

math

programme 2008

3^e

collection **prisme**



BELIN

s'engage pour
l'environnement

SEVEN PUBLICATIONS

Les unités de mesure

Unités de masse

Multiples du gramme			g	Sous-multiples du gramme		
kg	hg	dag		dg	cg	mg
1 kg = 1 000 g = 10^3 g	1 hg = 100 g = 10^2 g	1 dag = 10 g		1 dg = 0,1 g = 10^{-1} g	1 cg = 0,01 g = 10^{-2} g	1 mg = 0,001 g = 10^{-3} g

Unités de contenance

Multiples du litre			L	Sous-multiples du litre		
kL	hL	daL		dL	cL	mL
1 kL = 1 000 L = 10^3 L	1 hL = 100 L = 10^2 L	1 daL = 10 L		1 dL = 0,1 L = 10^{-1} L	1 cL = 0,01 L = 10^{-2} L	1 mL = 0,001 L = 10^{-3} L

Unités de longueur

Multiples du mètre			m	Sous-multiples du mètre		
km	hm	dam		dm	cm	mm
1 km = 1 000 m = 10^3 m	1 hm = 100 m = 10^2 m	1 dam = 10 m		1 dm = 0,1 m = 10^{-1} m	1 cm = 0,01 m = 10^{-2} m	1 mm = 0,001 m = 10^{-3} m

Unités d'aire

Multiples du mètre carré			m ²	Sous-multiples du mètre carré		
km ²	hm ²	dam ²		dm ²	cm ²	mm ²
1 km ² = 1 000 000 m ² 1 km ² = 10^6 m ²	1 hm ² = 10 000 m ² 1 hm ² = 10^4 m ²	1 dam ² = 100 m ² 1 dam ² = 10^2 m ²		1 dm ² = 0,01 m ² 1 dm ² = 10^{-2} m ²	1 cm ² = 0,0001 m ² 1 cm ² = 10^{-4} m ²	1 mm ² = 0,000 001 m ² 1 mm ² = 10^{-6} m ²

Unités agraires

Un are (1 a) est égal à 1 dam².

Un hectare (1 ha) est égal à 1 hm²; 1 ha = 100 a = 10^2 a.

Unités de volume

Multiples du mètre cube			m ³	Sous-multiples du mètre cube		
km ³	hm ³	dam ³		dm ³	cm ³	mm ³
1 km ³ = 1 000 000 000 m ³ 1 km ³ = 10^9 m ³	1 hm ³ = 1 000 000 m ³ 1 hm ³ = 10^6 m ³	1 dam ³ = 1 000 m ³ 1 dam ³ = 10^3 m ³		1 dm ³ = 0,001 m ³ 1 dm ³ = 10^{-3} m ³	1 cm ³ = 0,000 001 m ³ 1 cm ³ = 10^{-6} m ³	1 mm ³ = 0,000 000 001 m ³ 1 mm ³ = 10^{-9} m ³

Correspondances entre les unités de volume et de contenance: 1 dm³ = 1 L et 1 cm³ = 1 mL.

Unités de durée

La seconde (s).

La minute (min); 1 min = 60 s.

L'heure (h); 1 h = 60 min = 3 600 s.

Le jour (j); 1 j = 24 h.

Unité d'angle

Le degré (°).

Un angle droit mesure 90°.

Un angle plat mesure 180°.

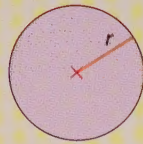
Un angle plein mesure 360°.

Formulaire de géométrie

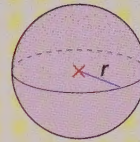
Toutes les longueurs doivent être exprimées dans la même unité.

Cercle-Disque-Sphère

Le **périmètre d'un disque** de rayon r est égal à la **longueur du cercle** de même rayon :
 $\mathcal{P} = 2\pi r$



L'**aire d'un disque** de rayon r est :
 $\mathcal{A} = \pi r^2$



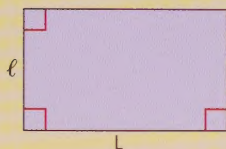
L'**aire d'une sphère** de rayon r est :
 $\mathcal{A} = 4\pi r^2$

Polygones

Périmètre Le périmètre d'un polygone est égal à la somme des longueurs de ses côtés.

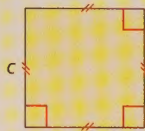
Aire

Rectangle



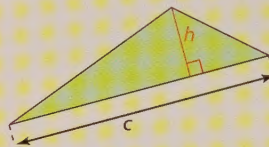
$$\mathcal{A} = L \times l$$

Carré



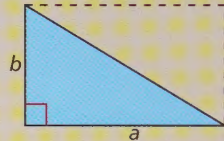
$$\mathcal{A} = c^2$$

Triangle (cas général)



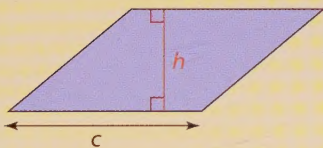
$$\mathcal{A} = \frac{c \times h}{2}$$

Triangle rectangle



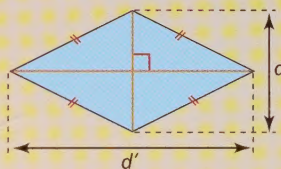
$$\mathcal{A} = \frac{a \times b}{2}$$

Parallélogramme (cas général)



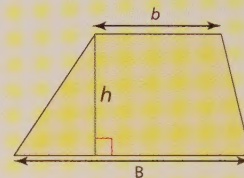
$$\mathcal{A} = c \times h$$

Losange



$$\mathcal{A} = \frac{d \times d'}{2}$$

Trapèze

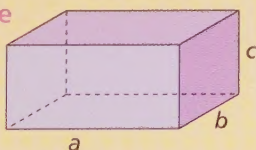


$$\mathcal{A} = \frac{b + B}{2} \times h$$

Solides

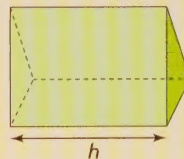
Si, par exemple, les longueurs sont exprimées en cm, alors l'aire est exprimée en cm^2 et le volume en cm^3 .

Parallélépipède rectangle



$$\mathcal{V} = a \times b \times c$$

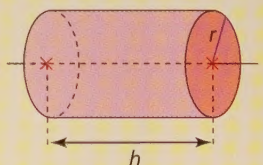
Prisme droit



$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$$

$$\mathcal{A}_{\text{latérale}} = \mathcal{P}_{\text{base}} \times h$$

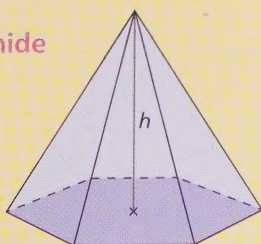
Cylindre de révolution



$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = \pi r^2 h$$

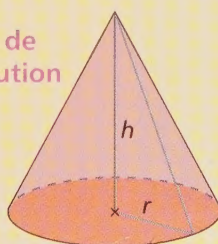
$$\mathcal{A}_{\text{latérale}} = \mathcal{P}_{\text{base}} \times h = 2\pi r h$$

Pyramide



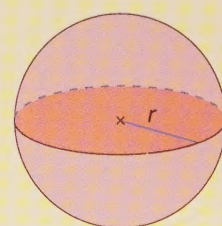
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$$

Cône de révolution



$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Boule



$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi r^3$$



Digitized by the Internet Archive
in 2023 with funding from
Kahle/Austin Foundation

math
3^e

Des **outils**
pour calculer
et démontrer

isme

Algèbre

- ... conduire un **calcul**
- ... calculer avec des **nombre**s en écriture fractionnaire
- ... écrire un **nombre** en notation scientifique
- ... factoriser une **expression**
- ... développer une **expression**
- ... démontrer que deux **expressions** sont égales
- ... résoudre une **équation** du premier degré d'inconnue x
- ... résoudre une **équation** de la forme $x^2 = a$
- ... résoudre une **équation** produit nul

Statistiques

- ... construire un **diagramme** en bâtons ou en tuyaux d'orgue
- ... construire un **histogramme**
- ... calculer une **moyenne**
- ... calculer une **moyenne** pondérée

Géométrie

- ... démontrer qu'un **point** appartient à la médiatrice d'un segment
- ... démontrer qu'un **point** appartient à la bissectrice d'un angle

II	• ... démontrer qu'un point est le milieu d'un segment	VI
II	• ... démontrer que trois points sont alignés	VII
III	• ... démontrer que deux droites sont perpendiculaires	VII
III	• ... démontrer que deux droites sont parallèles	VIII
III	• ... démontrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment	IX
IV	• ... démontrer qu'une droite est la bissectrice d'un angle	IX
IV	• ... démontrer que trois droites sont concourantes	X
V	• ... démontrer qu'un triangle est isocèle	X
V	• ... démontrer qu'un triangle est équilatéral	X
V	• ... démontrer qu'un triangle est rectangle	XI
V	• ... démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme	XI
V	• ... démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle	XII
V	• ... démontrer qu'un quadrilatère est un losange	XII
V	• ... démontrer qu'un quadrilatère est un carré	XIII
VI	• ... démontrer que des segments ont la même longueur	XIII
VI	• ... déterminer la longueur d'un segment	XIV
VI	• ... démontrer que des angles ont la même mesure	XV
VI	• ... déterminer la mesure d'un angle	XVI

Algèbre

Pour conduire un calcul

Méthode

- 1 On respecte les priorités dans les calculs.

Règle Pour calculer une expression, on effectue dans l'ordre :

- a. les calculs entre parenthèses,
- b. les puissances et les racines carrées,
- c. les multiplications et les divisions,
- d. les additions et les soustractions.

$$E = 9 + 4 \cdot \sqrt{3+6} - \frac{13}{7-5} + (-2+7)^2$$

$$E = 9 + 4 \times \sqrt{9} - \frac{13}{2} + 5^2$$

$$E = 9 + 4 \times 3 - \frac{13}{2} + 25$$

$$E = 9 + 12 - 6,5 + 25$$

$$E = 21 - 6,5 + 25$$

$$E = 14,5 + 25$$

$$E = 39,5$$

Pour calculer avec des nombre en écriture fractionnaire

Méthode

- 1 Pour additionner, ou soustraire, deux nombre en écriture fractionnaire, on les réduit au même dénominateur, puis on additionne, ou on soustrait, les numérateurs.

Propriétés

- Soient a , b et k trois nombre tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0$.

$$\text{On a : } \frac{a}{b} = \frac{ka}{kb} = \frac{a:k}{b:k}$$

- Soient a , b et c des nombre tels que $c \neq 0$.

$$\text{On a : } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ et }$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 6}{5 \times 6} = \frac{24}{30}$$

$$\frac{6}{5} - \frac{8}{35} = \frac{6 \times 7}{5 \times 7} - \frac{8}{35} = \frac{42}{35} - \frac{8}{35} = \frac{42-8}{35} = \frac{34}{35}$$

- 2 Pour multiplier deux nombre en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et on multiplie les dénominateurs entre eux.

Propriété Soient a , b , c et d quatre nombre relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$. On a :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{9}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{9 \times 2}{5 \times 7} = \frac{18}{35}$$

- 3 Pour diviser deux nombre en écriture fractionnaire, on multiplie le premier nombre par l'inverse du deuxième nombre.

Propriété Soient a , b , c et d quatre nombre relatifs tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$. On a :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{9}{5} : \frac{2}{7} = \frac{9}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{63}{10}$$

Pour écrire un nombre en notation scientifique

Méthode

- 1 Le nombre décimal compris entre 1 et 10 s'obtient en déplaçant la virgule et en associant la puissance de 10 correspondante.

Définition La notation scientifique d'un nombre décimal non nul est la seule écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p un entier relatif.

$$A = 301,58 = 3,0158 \times 10^2$$

$$B = 0,00455 = 4,55 \times 10^{-3}$$

Pour factoriser une expression

Méthode

- 1 On reconnaît un facteur commun, puis on utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction.

Propriété Quels que soient les nombres a, b, c, d et k , on a :

$$ka + kb = k(a + b)$$

$$ka - kb = k(a - b)$$

$$ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d).$$

- Factoriser $A = 4x^2 + 8x$
 $A = 4x^2 + 8x$
 $A = 4x \times x + 4x \times 2$
 $A = 4x(x + 2)$
- Factoriser $B = (x + 3)^2 - 4(x + 3)$
 $B = (x + 3)^2 - 4(x + 3)$
 $B = (x + 3)(x + 3) - 4(x + 3)$
 $B = (x + 3)[(x + 3) - 4]$
 $B = (x + 3)(x - 1)$

- 2 On utilise les identités remarquables.

Propriétés

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

- Factoriser $C = 9x^2 + 24x + 16$
 $C = 9x^2 + 24x + 16$
 $C = (3x + 4)^2$
- Factoriser $D = (x - 5)^2 - 9$
 $D = (x - 5)^2 - 9$
 $D = [(x - 5) + 3][(x - 5) - 3]$
 $D = (x - 2)(x - 8)$

Pour développer une expression

Méthode

- 1 On utilise la distributivité.

Propriété Quels que soient les nombres a, b, c, d et k , on a :

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$k(a - b) = ka - kb$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Développer $B = (3x + 2)(8x - 4)$
 $B = (3x + 2)(8x - 4)$
 $B = 3x \times 8x + 3x \times (-4) + 2 \times 8x + 2 \times (-4)$
 $B = 24x^2 - 12x + 16x - 8$
 $B = 24x^2 + 4x - 8$

Pour démontrer que deux expressions sont égales

Méthode

- 1 On transforme l'écriture de l'une pour obtenir l'autre.

Démontrer que, pour tout nombre x :

$$2x^2 - x - 15 = (x - 3)(2x + 5).$$

$$(x - 3)(2x + 5) = 2x^2 + 5x - 6x - 15$$

$$= 2x^2 - x - 15.$$

Donc, pour tout nombre x :

$$2x^2 - x - 15 = (x - 3)(2x + 5).$$

- 2 On prouve que les deux expressions sont égales à une même troisième.

Propriété Si $A = C$ et $B = C$, alors : $A = B$.

Démontrer que, pour tout nombre x :

$$(x + 1)^2 - (x + 7) = (x + 3)(x - 2).$$

D'une part, on a :

$$(x + 1)^2 - (x + 7) = x^2 + 2x + 1 - x - 7$$

$$= x^2 + x - 6.$$

D'autre part, on a :

$$(x + 3)(x - 2) = x^2 - 2x + 3x - 6$$

$$= x^2 + x - 6.$$

Donc, pour tout nombre x :

$$(x + 1)^2 - (x + 7) = (x + 3)(x - 2).$$

- 3 On prouve que la différence des deux expressions est nulle.

Propriété Si $A - B = 0$, alors :
 $A = B$.

Démontrer que, pour tout nombre x tel que $x \neq -1$ et $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)} &= \frac{x+2}{x+1} \\ \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+2}{x+1} &= \frac{x^2 + x - 2 - (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^2 + x - 2 - (x^2 + 2x - x - 2)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^2 + x - 2 - x^2 - 2x + x + 2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{0}{(x-1)(x+1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, pour tout nombre x différent de -1 ou de 1 : $\frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$.

● Pour résoudre une équation du premier degré d'inconnue x

Méthode

- 1 On se ramène à une équation de la forme $ax = b$, en isolant les termes en « x » dans un même membre. Lorsque $a \neq 0$, la solution de l'équation $ax = b$ obtenue est $\frac{b}{a}$.

Propriétés : Soient a , b et c trois nombres.

Si $a = b$, alors $a + c = b + c$

Si $a = b$, alors $a - c = b - c$

Si $a = b$, alors $a \times c = b \times c$

Si $c \neq 0$ et $a = b$, alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Résoudre l'équation $5x - 7 = 2x + 3$

$$5x - 7 = 2x + 3$$

$$5x - 2x = 3 + 7$$

$$3x = 10$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$\frac{10}{3}$ est la solution de cette équation.

● Pour résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

Méthode

- 1 On applique une des propriétés ci-contre selon le signe de a .

Propriété Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ admet une seule solution : 0 .

Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

L'équation $x^2 = 5$ a deux solutions :

$$\sqrt{5} \text{ et } -\sqrt{5}$$

L'équation $x^2 = -9$ n'a pas de solution.

● Pour résoudre une équation produit nul

Méthode

- 1 On applique la règle du produit nul.

Définition Une équation produit nul est une équation dont l'un des membres est un produit et dont l'autre membre est zéro.

Règle du produit nul Dire qu'un produit est nul équivaut à dire que l'un de ses facteurs est nul.

Résolution de l'équation $(2x - 5)(3x - 4) = 0$.

D'après la règle du produit nul :

$$2x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 4 = 0$$

$$2x = 5$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$\frac{5}{2}$ et $\frac{4}{3}$ sont les solutions de l'équation.

Statistiques

Pour construire un diagramme en bâtons ou en tuyaux d'orgue

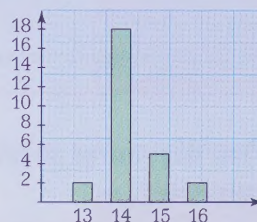
Méthode

- On utilise un diagramme en bâtons pour représenter l'étude statistique d'un caractère qualitatif (pays, marque, couleur) ou d'un caractère quantitatif dont les valeurs sont séparées et peu nombreuses.

Propriété Les hauteurs des barres sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences correspondants.

Représentation de la répartition des âges des élèves d'une classe de troisième.

Âge	Effectif
13	2
14	18
15	5
16	2



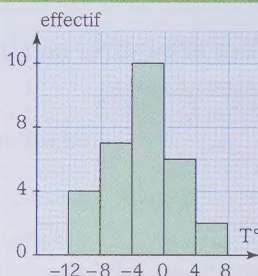
Pour construire un histogramme

Méthode

- L'histogramme est utilisé pour représenter une série statistique d'un caractère quantitatif dont les valeurs sont regroupées en classes.

Propriété Un histogramme est composé de rectangles accolés dont les bases, en abscisses, sont les intervalles de valeurs. Lorsque les classes ont la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences correspondants.

Classe	Effectif
$] -12 ; -8]$	4
$] -8 ; -4]$	7
$] -4 ; 0]$	10
$] 0 ; 4]$	6
$] 4 ; 8]$	2



Pour calculer une moyenne

Méthode

- On utilise la définition ci-contre.

Définition La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme des valeurs de la série par l'effectif total des valeurs.

La moyenne des notes 7, 12 et 14 est :

$$M = \frac{7 + 12 + 14}{3} = \frac{33}{3} = 11.$$

Pour calculer une moyenne pondérée

Méthode

- Lorsque chaque valeur de la série statistique a un coefficient, on calcule une moyenne pondérée.

Définition La moyenne pondérée est le quotient de la somme des produits des valeurs par leur effectif, par la somme des effectifs (l'effectif total).

Valeur	13	14	15	16
Effectif	2	18	5	2

La moyenne pondérée du tableau d'effectifs ci-dessus est :

$$M = \frac{2 \times 13 + 18 \times 14 + 5 \times 15 + 2 \times 16}{2 + 18 + 5 + 2} = \frac{380}{27} \text{ et } M \approx 14$$

- Lorsque les valeurs sont regroupées en classes, on obtient une valeur approchée de la moyenne.

Propriété La moyenne d'une série dont les valeurs sont regroupées par classe est égale à la moyenne pondérée des centres des classes.

Classe	$] -12 ; -8]$	$] -8 ; -4]$	$] -4 ; 0]$	$] 0 ; 4]$	$] 4 ; 8]$
Effectif	4	7	12	6	2
Centre	-10	-6	-2	2	6

$$M = \frac{4 \times (-10) + 7 \times (-6) + 12 \times (-2) + 6 \times 2 + 2 \times 6}{4 + 7 + 12 + 6 + 2} = \frac{-82}{31}$$

$$M \approx -2,6$$

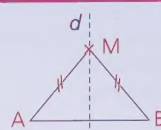
Géométrie

● Pour démontrer qu'un point appartient à la médiatrice d'un segment

utiliser

- 1 un point équidistant des extrémités de ce segment.

Propriété Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.



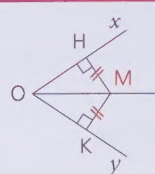
$MA = MB$, donc le point M appartient à la médiatrice d du segment $[AB]$.

● Pour démontrer qu'un point appartient à la bissectrice d'un angle

utiliser

- 1 un point équidistant des côtés de cet angle.

Propriété Si un point situé entre les côtés d'un angle saillant est équidistant des côtés de l'angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.



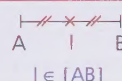
M est un point de l'angle saillant xOy tel que $MH = MK$, où MH et MK sont les distances respectives de M à $[Ox)$ et $[Oy)$, donc le point M appartient à la bissectrice de l'angle xOy .

● Pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

utiliser

- 1 la définition du milieu d'un segment.

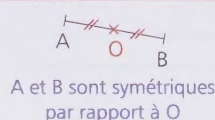
Définition Le milieu d'un segment est le point de ce segment qui est équidistant de ses extrémités.



$I \in [AB]$ et $IA = IB$, donc le point I est le milieu du segment $[AB]$.

- 2 deux points symétriques par une symétrie centrale.

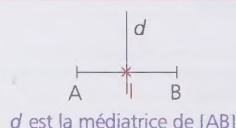
Définition Dire que deux points A et B sont symétriques par rapport à un point O signifie que O est le milieu du segment $[AB]$.



Les points A et B sont symétriques par rapport au point O, donc O est le milieu du segment $[AB]$.

- 3 la médiatrice d'un segment.

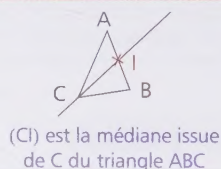
Propriété Si une droite est la médiatrice d'un segment, alors elle coupe ce segment en son milieu.



La droite d est la médiatrice du segment $[AB]$ et coupe $[AB]$ au point I, donc I est le milieu de $[AB]$.

- 4 une médiane d'un triangle.

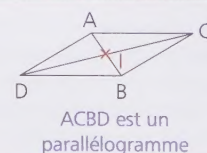
Définition Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui coupe le côté opposé à ce sommet en son milieu.



La droite (CI) est la médiane issue de C du triangle ABC et elle coupe $[AB]$ au point I, donc I est le milieu du segment $[AB]$.

- 5 les diagonales d'un parallélogramme.

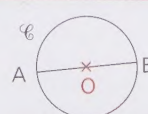
Propriété Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.



Le quadrilatère ACBD est un parallélogramme, et les segments $[AB]$ et $[CD]$ se coupent au point I, donc I est le milieu de $[AB]$ et $[CD]$.

- 6 un diamètre d'un cercle.

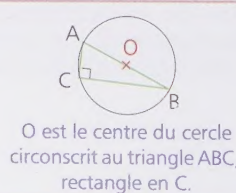
Propriété Si un segment est un diamètre d'un cercle, alors le centre du cercle est le milieu de ce segment.



Le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre O, donc le point O est le milieu de $[AB]$.

- 7 le cercle circonscrit à un triangle rectangle.

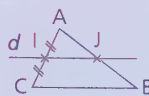
Propriété Si un triangle est rectangle, alors son cercle circonscrit a pour centre le milieu de son hypoténuse.



Le triangle ABC est rectangle en C, donc le centre O de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse $[AB]$.

8 un triangle, un milieu et une parallèle.

Théorème Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un deuxième côté de ce triangle, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.



I milieu de [AC] et $d \parallel (CB)$

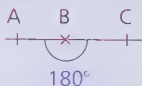
Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AC] et la droite d , parallèle à (CB) passant par I, coupe [AB] en J, donc J est le milieu de [AB].

Pour démontrer que trois points sont alignés

utiliser

1 un angle plat.

Propriété Si trois points A, B et C sont tels que l'angle $\widehat{ABC}$ est plat, alors les points A, B et C sont alignés.



$\widehat{ABC} = 180^\circ$, donc les points A, B et C sont alignés.

2 un angle nul.

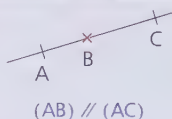
Propriété Si trois points A, B et C sont tels que l'angle $\widehat{ABC}$ est nul, alors les points A, B et C sont alignés.



$\widehat{ABC} = 0^\circ$, donc les points A, B et C sont alignés.

3 deux droites parallèles ayant un point commun.

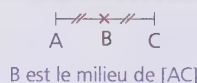
Propriété Si deux droites parallèles ont au moins un point commun, alors elles sont confondues.



Les droites (AB) et (AC) sont parallèles et ont un point commun A, donc (AB) et (AC) sont confondues. Ainsi, les points A, B et C sont alignés.

4 le milieu d'un segment.

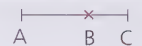
Propriété Si un point est le milieu d'un segment, alors il appartient à ce segment.



B est le milieu du segment [AC], donc B appartient à [AC]. Ainsi, les points A, B et C sont alignés.

5 des distances.

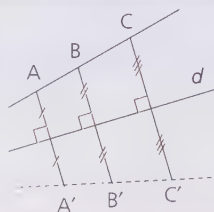
Propriété Si un point B vérifie $AB + BC = AC$, alors B appartient au segment [AC].



$AB + BC = AC$, donc B appartient au segment [AC]. Ainsi, les points A, B et C sont alignés.

6 la conservation de l'alignement par une symétrie axiale.

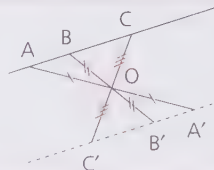
Propriété Si trois points sont alignés, alors leurs symétriques par rapport à une droite sont alignés.



Les points A, B, C sont alignés et les points A' , B' , C' sont leurs symétriques respectifs par rapport à la droite d , donc les points A' , B' , C' sont alignés.

7 la conservation de l'alignement par une symétrie centrale.

Propriété Si trois points sont alignés, alors leurs symétriques par rapport à un point sont alignés.



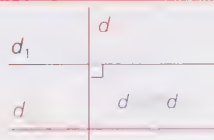
Les points A, B, C sont alignés et les points A' , B' , C' sont leurs symétriques respectifs par rapport au point O, donc les points A' , B' , C' sont alignés.

Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires

utiliser

1 deux droites parallèles et une perpendiculaire.

Propriété Si deux droites sont parallèles et qu'une troisième droite est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.



$d_1 \parallel d_2$ et $d \perp d_1$, donc : $d \perp d_2$.

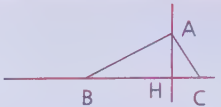
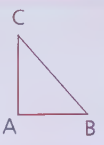
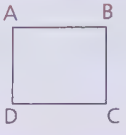
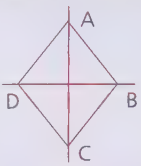
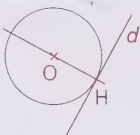
2 la médiatrice d'un segment.

Propriété Si une droite est la médiatrice d'un segment, alors elle est perpendiculaire à ce segment.

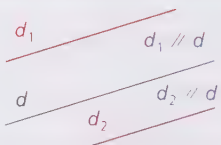
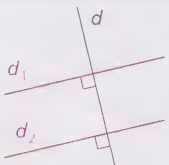
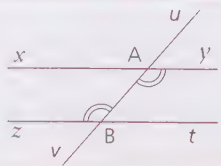
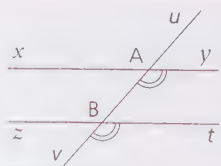


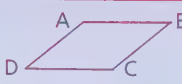
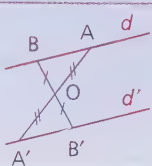
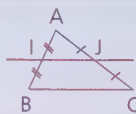
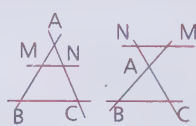
d est la médiatrice de [AB]

La droite d est la médiatrice du segment [AB], donc : $d \perp (AB)$.

3 une hauteur d'un triangle.	Définition Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire à la droite portant le côté opposé à ce sommet.	 (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC	(AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC, donc : $(AH) \perp (BC)$.
4 un triangle rectangle.	Définition Un triangle rectangle est un triangle qui a deux côtés perpendiculaires	 ABC est rectangle en A	Le triangle ABC est rectangle en A, donc : $(AB) \perp (AC)$.
5 un rectangle.	Propriété Si un quadrilatère est un rectangle, alors deux côtés consécutifs de ce rectangle sont perpendiculaires.	 ABCD est un rectangle	Le quadrilatère ABCD est un rectangle, donc, par exemple : $(AB) \perp (BC)$.
6 un losange.	Propriété Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires.	 ABCD est un losange	ABCD est un losange, donc ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
7 une tangente à un cercle.	Définition La tangente en H au cercle $\mathcal{C}$ de centre O est la droite passant par le point H et perpendiculaire à la droite (OH).	 d est la tangente en H au cercle $\mathcal{C}$ de centre O	La droite d est la tangente en H au cercle $\mathcal{C}$ de centre O, donc la droite d est perpendiculaire à la droite (OH).

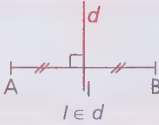
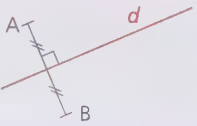
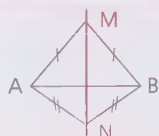
● Pour démontrer que deux droites sont parallèles

utiliser			
1 une troisième droite parallèle.	Propriété Si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles.		$d_1 \parallel d$ et $d_2 \parallel d$, donc : $d_1 \parallel d_2$.
2 une perpendiculaire commune.	Propriété Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.		$d_1 \perp d$ et $d_2 \perp d$, donc : $d_1 \parallel d_2$.
3 deux angles alternes-internes de même mesure.	Propriété Si deux droites coupées par une sécante déterminent deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.		Les angles alternes-internes $\widehat{yAv}$ et $\widehat{uBz}$ ont la même mesure, donc les droites (xy) et (zt) sont parallèles.
4 deux angles correspondants de même mesure.	Propriété Si deux droites coupées par une sécante déterminent deux angles correspondants de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.		Les angles correspondants $\widehat{yAv}$ et $\widehat{tBv}$ ont la même mesure, donc les droites (xy) et (zt) sont parallèles.

5 un parallélogramme.	Définition Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.	 ABCD est un parallélogramme	ABCD est un parallélogramme, donc : $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$.
6 une symétrie centrale.	Propriété Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles.		Les droites d et d' sont symétriques par rapport au point O , donc d et d' sont parallèles.
7 un triangle et les milieux de deux de ses côtés.	Théorème Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.		Dans le triangle ABC, I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$, donc les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
8 La réciproque du théorème de Thalès.	Théorème Soient d et d' deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de d distincts de A. Soient C et N deux points de d' distincts de A. Si les points A, B et M et les points A, C et N sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.	 $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$	Sur chacune des deux figures : • les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. • $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ • les points A, B et M et les points A, C et N sont alignés dans le même ordre, donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

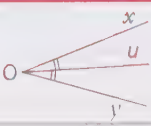
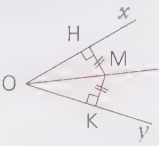
● Pour démontrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment

utiliser

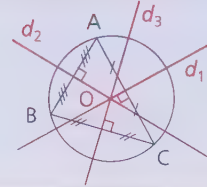
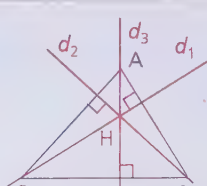
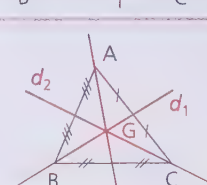
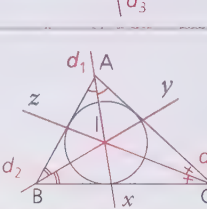
1 la définition de la médiatrice d'un segment.	Définition La médiatrice d'un segment est la droite qui est perpendiculaire à ce segment et qui coupe ce segment en son milieu.	 $I \in d$	$d \perp (AB)$, $I \in d$ et I est le milieu du segment $[AB]$, donc d est la médiatrice du segment $[AB]$.
2 deux points symétriques par une symétrie axiale.	Définition Dire que deux points distincts A et B sont symétriques par rapport à une droite d signifie que la droite d est la médiatrice du segment $[AB]$.	 A et B sont symétriques par rapport à d	Les points A et B sont symétriques par rapport à la droite d , donc d est la médiatrice du segment $[AB]$.
3 deux points équidistants des extrémités d'un segment.	Propriété Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.	 M et N	$MA = MB$ et $NA = NB$, donc M et N appartiennent à la médiatrice de $[AB]$. Ainsi, la droite (MN) est la médiatrice du segment $[AB]$.

● Pour démontrer qu'une demi-droite est la bissectrice d'un angle

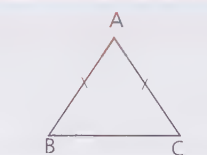
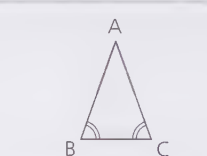
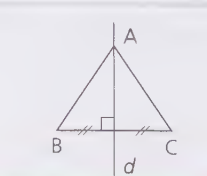
utiliser

1 la définition de la bissectrice d'un angle.	Définition La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.		$\widehat{xOu} = \widehat{uOy}$, donc la demi-droite $[Ou)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.
2 un point équidistant des côtés de cet angle.	Propriété Si un point situé entre les côtés d'un angle saillant est équidistant des côtés de l'angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.	 H et K	M est un point de l'angle saillant $\widehat{xOy}$ tel que $MH = MK$, où MH et MK sont les distances respectives de M à $[Ox)$ et $[Oy)$, donc le point M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$. Ainsi la demi-droite $[OM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

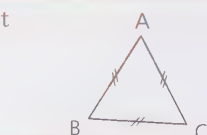
● Pour démontrer que trois droites sont concourantes

utiliser			
1 les médiatrices d'un triangle.	Propriété Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est le centre du cercle circonscrit au triangle.		d_1 , d_2 et d_3 sont les trois médiatrices du triangle ABC, donc d_1 , d_2 et d_3 sont concourantes. Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2 les hauteurs d'un triangle.	Propriété Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est l'orthocentre du triangle.		d_1 , d_2 et d_3 sont les trois hauteurs du triangle ABC, donc d_1 , d_2 et d_3 sont concourantes. Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.
3 les médianes d'un triangle.	Propriété Les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est le centre de gravité du triangle.		d_1 , d_2 et d_3 sont les trois médianes du triangle ABC, donc d_1 , d_2 et d_3 sont concourantes. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.
4 les bissectrices d'un triangle.	Propriété Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.		[Ax), [By) et [Cz) sont les trois bissectrices du triangle ABC, donc d_1 , d_2 et d_3 sont concourantes. Le point I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

● Pour démontrer qu'un triangle est isocèle

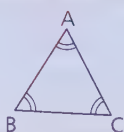
utiliser			
1 la définition d'un triangle isocèle.	Définition Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même longueur.		$AB = AC$, donc le triangle ABC est isocèle en A.
2 deux angles de même mesure.	Propriété Si un triangle a deux angles de même mesure, alors c'est un triangle isocèle.		$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, donc le triangle ABC est isocèle en A.
3 un axe de symétrie.	Propriété Si un triangle a un axe de symétrie, alors c'est un triangle isocèle.		La droite d est un axe de symétrie du triangle ABC, donc le triangle ABC est isocèle en A.

● Pour démontrer qu'un triangle est équilatéral

utiliser			
1 la définition d'un triangle équilatéral.	Définition Un triangle équilatéral est un triangle qui a ses trois côtés de même longueur.		$AB = AC = BC$, donc le triangle ABC est équilatéral.

2 trois angles de même mesure.

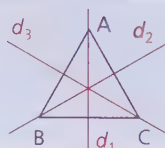
Propriété Si un triangle a trois angles de même mesure, alors c'est un triangle équilatéral.



$\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{CAB}$,
donc le triangle ABC est équilatéral.

3 les axes de symétrie.

Propriété Si un triangle a trois axes de symétrie, alors c'est un triangle équilatéral.

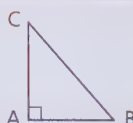


d_1, d_2 et d_3 sont trois axes de symétrie du triangle ABC, donc le triangle ABC est équilatéral.

● Pour démontrer qu'un triangle est rectangle

1 la définition d'un triangle rectangle.

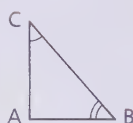
Définition Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit.



$\widehat{BAC} = 90^\circ$,
donc le triangle ABC est rectangle en A.

2 deux angles complémentaires.

Propriété Si un triangle a deux angles complémentaires, alors c'est un triangle rectangle.

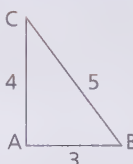


$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$$

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires, donc le triangle ABC est rectangle en A.

3 la réciproque du théorème de Pythagore.

Théorème Si le carré de la longueur d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

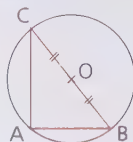


$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Dans le triangle ABC :
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

4 un cercle.

Propriété Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est ce côté.

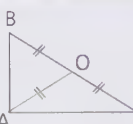


Le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [BC]

Le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [BC], donc le triangle ABC est rectangle en A.

5 une médiane du triangle.

Propriété Si la médiane relative à un côté d'un triangle a pour longueur la moitié de celle de ce côté, alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est ce côté.



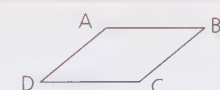
O est le milieu de [BC]

Dans le triangle ABC, [OA] est la médiane relative au côté [BC] et $OA = \frac{1}{2}BC$, donc le triangle ABC est rectangle en A.

● Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

1 la définition d'un parallélogramme.

Définition Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.

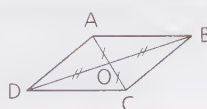


$$(AB) \parallel (DC) \text{ et } (AD) \parallel (BC)$$

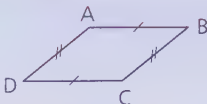
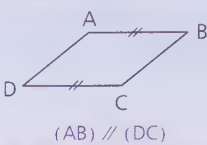
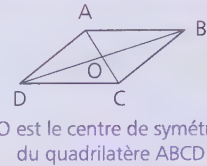
$(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$, donc ABCD est un parallélogramme.

2 les diagonales ayant le même milieu.

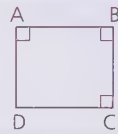
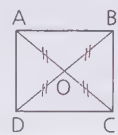
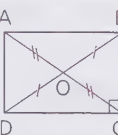
Propriété Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.



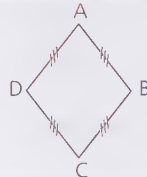
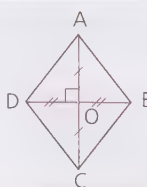
Les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD ont le même milieu O, donc ABCD est un parallélogramme.

3 les côtés opposés de même longueur.	Propriété Si les côtés opposés d'un quadrilatère non croisé ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.		$AB = DC, AD = BC$ et le quadrilatère ABCD n'est pas croisé, donc ABCD est un parallélogramme.
4 deux côtés opposés parallèles et de même longueur.	Propriété Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.		$AB = DC, (AB) \parallel (DC)$ et le quadrilatère ABCD n'est pas croisé, donc ABCD est un parallélogramme.
5 un centre de symétrie.	Propriété Si un quadrilatère non croisé a un centre de symétrie, alors c'est un parallélogramme.		O est le centre de symétrie du quadrilatère non croisé ABCD, donc ABCD est un parallélogramme.

● Pour démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle

utiliser			
1 un quadrilatère ayant trois angles droits.	Propriété Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.		$\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 90^\circ$, donc ABCD est un rectangle.
2 un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur.	Propriété Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.		ABCD est un parallélogramme (ses diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu O) et $AC = BD$, donc ABCD est un rectangle.
3 un parallélogramme ayant un angle droit.	Propriété Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.		ABCD est un parallélogramme (ses diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu O) et $\widehat{BCD} = 90^\circ$, donc ABCD est un rectangle.

● Pour démontrer qu'un quadrilatère est un losange

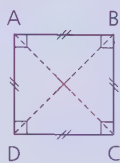
utiliser			
1 la définition d'un losange.	Définition Un losange est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur.		$AB = BC = CD = DA$, donc ABCD est un losange.
2 un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires.	Propriété Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.		ABCD est un parallélogramme (ses diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu O) et $(AC) \perp (BD)$, donc ABCD est un losange.
3 un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur.	Propriété Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.		ABCD est un parallélogramme (ses diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu O) et $AB = BC$, donc ABCD est un losange.

● Pour démontrer qu'un quadrilatère est un carré

utiliser

- la définition d'un carré.

Définition Un carré est un quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange.



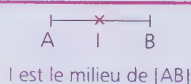
ABCD est un rectangle (on utilise, selon les données, l'un des trois outils du tableau) et ABCD est un losange (on utilise, selon les données, l'un des trois outils du tableau), donc ABCD est un carré.

● Pour démontrer que des segments ont la même longueur

utiliser

- le milieu d'un segment.

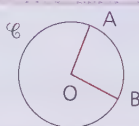
Propriété Si un point est le milieu d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.



I est le milieu de [AB], donc : $IA = IB$.

- un cercle.

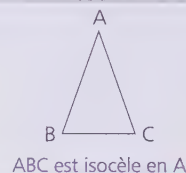
Propriété Si deux points appartiennent à un même cercle, alors ils sont équidistants du centre de ce cercle.



A et B appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O, donc : $AO = BO$.

- un triangle isocèle.

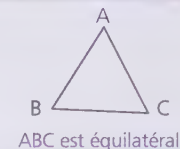
Définition Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même longueur.



Le triangle ABC est isocèle en A, donc : $AB = AC$.

- un triangle équilatéral.

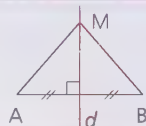
Définition Un triangle équilatéral est un triangle qui a ses trois côtés de même longueur.



Le triangle ABC est équilatéral, donc : $AB = AC = BC$.

- la médiatrice d'un segment.

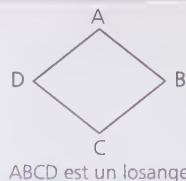
Propriété Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.



Le point M appartient à la médiatrice d du segment [AB], donc $MA = MB$.

- un losange.

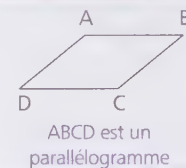
Définition Un losange est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur.



ABCD est un losange, donc : $AB = BC = CD = DA$.

- les côtés opposés d'un parallélogramme.

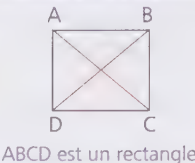
Propriété Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés ont la même longueur.



ABCD est un parallélogramme, donc : $AB = DC$ et $AD = BC$.

- les diagonales d'un rectangle.

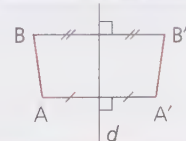
Propriété Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont la même longueur.



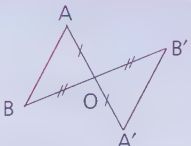
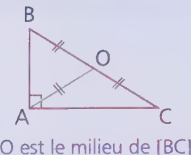
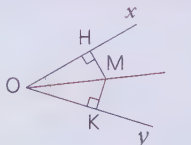
ABCD est un rectangle, donc : $AC = BD$.

- la conservation des longueurs par une symétrie axiale.

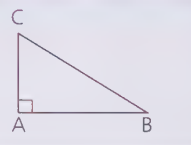
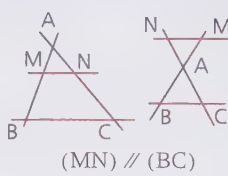
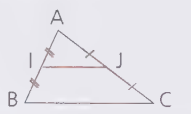
Propriété Si deux segments sont symétriques par rapport à une droite, alors ils ont la même longueur.



Les segments [AB] et [A'B'] sont symétriques par rapport à la droite d , donc : $AB = A'B'$.

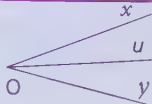
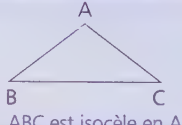
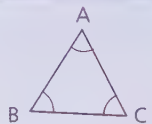
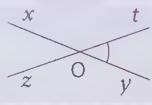
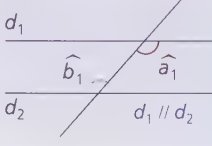
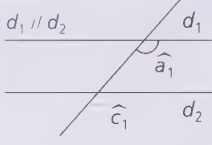
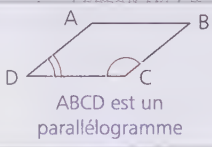
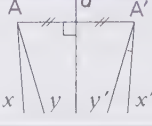
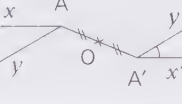
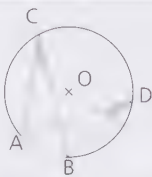
10 la conservation des longueurs par une symétrie centrale.	Propriété Si deux segments sont symétriques par rapport à un point, alors ils ont la même longueur.		Les segments [AB] et [A'B'] sont symétriques par rapport au point O, donc : $AB = A'B'$.
11 un triangle rectangle.	Propriété Si un triangle est rectangle, alors la médiane relative à son hypoténuse a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse.	 O est le milieu de [BC]	Le triangle ABC est rectangle en A et [OA] est la médiane relative à l'hypoténuse [BC], donc : $OA = OB = OC = \frac{1}{2}BC$.
12 la bissectrice d'un angle.	Propriété Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle.		Le point M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$ donc : $MH = MK$

● Pour déterminer la longueur d'un segment

utiliser			
1 le théorème de Pythagore.	Théorème Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.		Le triangle ABC est rectangle en A, donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
2 le théorème de Thalès.	Théorème Soient d et d' deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de d distincts de A. Soient C et N deux points de d' distincts de A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$	 (MN) // (BC)	Sur chacune des deux figures : • les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. • Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a donc : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.
3 un triangle et les milieux de deux de ses côtés.	Théorème Si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté de ce triangle.		Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC], donc : $IJ = \frac{1}{2}BC$.
4 la trigonométrie dans le triangle rectangle.	Définitions Dans un triangle rectangle : • Le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse. • Le sinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse. • La tangente d'un angle aigu est égale au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.		Dans le triangle ABC rectangle en A : • $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$, donc : $AB = BC \times \cos \widehat{ABC}$ $BC = \frac{AB}{\cos \widehat{ABC}}$ • $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$, donc : $AC = BC \times \sin \widehat{ABC}$ $BC = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}}$ • $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$, donc : $AC = AB \times \tan \widehat{ABC}$ $AB = \frac{AC}{\tan \widehat{ABC}}$

● Pour démontrer que des angles ont la même mesure

utiliser

1	la définition de la bissectrice d'un angle.	Définition La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.		La demi-droite [Ou) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$, donc : $\widehat{xOu} = \widehat{uOy}$.
2	un triangle isocèle.	Propriété Si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base ont la même mesure.	 ABC est isocèle en A	Le triangle ABC est isocèle en A, donc : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
3	un triangle équilatéral.	Propriété Si un triangle est équilatéral, alors chacun de ses trois angles mesure 60° .	 ABC est équilatéral	Le triangle ABC est équilatéral, donc : $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{CAB} = 60^\circ$.
4	deux angles opposés par le sommet.	Propriété Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont la même mesure.		Les angles $\widehat{xOz}$ et $\widehat{tOy}$ sont opposés par le sommet, donc : $\widehat{xOz} = \widehat{tOy}$.
5	deux droites parallèles coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes.	Propriété Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes qu'elles déterminent ont la même mesure.	 $d_1 \parallel d_2$	$d_1 \parallel d_2$, donc : $\widehat{a_1} = \widehat{b_1}$.
6	deux droites parallèles coupées par une sécante, alors les angles correspondants.	Propriété Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants qu'elles déterminent ont la même mesure.	 $d_1 \parallel d_2$	$d_1 \parallel d_2$, donc : $\widehat{a_1} = \widehat{c_1}$.
7	les angles opposés d'un parallélogramme.	Propriété Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés ont la même mesure.	 ABCD est un parallélogramme	ABCD est un parallélogramme, donc : $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.
8	la conservation des angles par une symétrie axiale.	Propriété Si deux angles sont symétriques par rapport à une droite, alors ils ont la même mesure.		Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'A'y'}$ sont symétriques par rapport à la droite d, donc : $\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$.
9	la conservation des angles par une symétrie centrale.	Propriété Si deux angles sont symétriques par rapport à un point, alors ils ont la même mesure.		Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'A'y'}$ sont symétriques par rapport au point O, donc : $\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$.
10	deux angles inscrits dans un cercle	Propriété Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.		Les angles inscrits $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$, donc : $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

● Pour déterminer la mesure d'un angle

utiliser

1 La somme des mesures des angles d'un triangle.

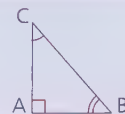
Propriété La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .



Dans le triangle ABC :
 $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180^\circ$.

2 un triangle rectangle.

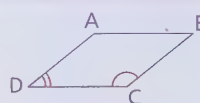
Propriété Si un triangle est rectangle, alors ses angles aigus sont complémentaires.



ABC est un triangle rectangle en A, donc :
 $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.

3 un parallélogramme.

Propriété Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles consécutifs sont supplémentaires.

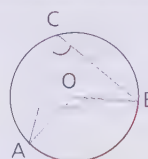


ABCD est un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme, donc, par exemple :
 $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

4 un angle inscrit dans un cercle et l'angle au centre associé.

Propriété Si, dans un cercle, un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre.

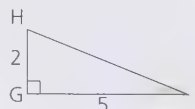
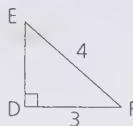
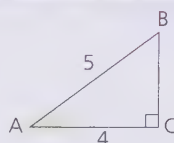


L'angle inscrit $\widehat{ACB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$, donc : $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

5 la trigonométrie dans le triangle rectangle.

Définitions Dans un triangle rectangle :

- le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse,
- le sinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse,
- la tangente d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.



• Dans le triangle ABC rectangle en C :

$\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$, donc :
 $\widehat{BAC} \approx 36,9^\circ$.

• Dans le triangle DEF rectangle en D :

$\sin \widehat{DEF} = \frac{DF}{EF} = \frac{3}{4}$, donc :
 $\widehat{DEF} \approx 48,6^\circ$.

• Dans le triangle GHI rectangle en G :

$\tan \widehat{GIH} = \frac{GH}{GI} = \frac{2}{5}$, donc :
 $\widehat{GIH} \approx 21,8^\circ$.

math

programme 2008

3^e

Directeur d'ouvrage

Claude Deschamps

Auteurs

Lionel Cuaz

Nadine Jacob

Dominique Le Bourgeois

Anne Roulet-Descombes

Alain Sitbon

Jean Vissio

Isabelle Xoual



8, rue Férou 75278 Paris cedex 06
www.editions-belin.com

collection **prisme**

Remerciements

Les auteurs et les éditions Belin remercient Philippe Boulanger, ancien directeur de la rédaction de la revue Pour la science, pour sa participation à la réalisation des pages d'ouverture des chapitres du manuel.

Les auteurs et les éditions Belin remercient également Éric Sigward, IPR (Académie de Strasbourg) pour sa relecture, et Dominique Chouchan, journaliste scientifique, pour la rédaction des pages métiers.

Crédits photographiques

Couverture et p. 1 : Serge Poliakov : Forme, détail, 1968 © ADAGP, Banque d'Images, Paris 2008
p. 7 : Eyedea/Top/J.P.Sudres • p. 25 : Réa/G. Rolle • p. 27 : Sunset/D. Bringard • p. 47 : Rue des Archives/The Granger Collection • p. 49 : Novapix/Jim Misti • p. 63 : Timo Jerkku/WAM – Turku City Art Collection, Wäinö Aaltonen Museum of Art (Mario Merz : Fibonacci Sequence 1-55, 1994 – Neon tube, stainless steel) • p. 76 : Rue des Archives/The Granger Collection • p. 78 : Roger Viollet/J. Boyer • p. 79 : Photo12.com/Alamy • p. 81 : J.-F. Dars in « les Déchiffreurs – Voyage en mathématiques » par J.-F. Dars, A. Lesne et A. Papillault © Éditions Belin, 2008 • p. 101 : Photo12.com/Alamy • p. 110 : Photo12.com/Alamy • p. 114 : AFP/F. Tanneau • p. 115 : Corbis • p. 126 : Météo France • p. 133 : Sunset/NHPA/S. Krasemann • p. 155 : Photo12.com/Alamy • p. 179 : Rue des Archives/ The Granger Collection • p. 197 : Photo12.com/Alamy • p. 217 : Novapix/F. Espenak • p. 235 : B.N.F. Paris • p. 238 : Photo12.com/Alamy • p. 242 : Photo12.com/Alamy • p. 249 : Corbis/L. Lefkowitz • p. 251 : Corbis/Robert Harding/Ch. Bowman • p. 267 : Bridgeman Giraudon • p. 284 : (h) Masterfile/R. Ian Lloyd • (b) Jérôme Pallé/ONISEP • p. 285 : (h) BSIP/Phototake/Maximilian - (b) Sunset/D. Cordier • p. 286 : (h) Jérôme Pallé/ONISEP - (b) Photononstop/Sime • p. 287 : (h) Jérôme Pallé/ONISEP - (b) Frédéric Durieu

Composition et schémas : Alpha-Edit

Illustrations : Finzo (pages d'ouverture et pages activités) et Grégoire Mabire (pages exercices)



Les pages métiers (284 à 287) ont été conçues dans le cadre d'une éducation à l'orientation en partenariat avec l'ONISEP.

D'autres métiers, en relation avec les grands thèmes du programme, sont disponibles sur le site : www.onisep.fr/belin-math-3e

Avertissement : Toutes les références à des sites Internet présentées dans cet ouvrage ont été vérifiées attentivement à la date d'impression. Compte tenu de la volatilité des sites et du détournement possible de leur adresse, les éditions Belin ne peuvent en aucun cas être tenues pour responsables de leur évolution. Nous appelons donc chaque utilisateur à rester vigilant quant à leur utilisation.

Le code de la propriété intellectuelle n'autorise que « les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » [article L. 122-5] ; il autorise également les courtes citations effectuées dans un but d'exemple ou d'illustration. En revanche « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » [article L. 122-4]. La loi 95-4 du 3 janvier 1994 a confié au C.F.C. (Centre français de l'exploitation du droit de copie, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), l'exclusivité de la gestion du droit de reprographie. Toute photocopie d'œuvres protégées, exécutée sans son accord préalable, constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Sommaire

Nombres et calculs

Nombres et calculs

Nombres et calculs

Nombres et calculs

Nombres et calculs

Grandeurs et mesures

Organisation et gestion de données, fonctions

Organisation et gestion de données, fonctions

Organisation et gestion de données, fonctions

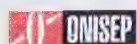
Géométrie
Grandeurs et mesures

Géométrie

Géométrie

Géométrie
Grandeurs et mesures

Géométrie



●	Présentation du manuel	4
●	Programme	6
1	Nombres entiers et rationnels.....	7
2	Équations et inéquations – Systèmes de deux équations.....	27
3	Puissances d'exposant entier relatif	49
4	Racine carrée	63
5	Identités remarquables – Équations produit nul.....	81
6	Grandeurs composées et unités.....	101
7	Notion de fonction	115
8	Fonction linéaire, fonction affine.....	133
9	Statistiques et probabilités	155
10	Le théorème de Thalès et sa réciproque Agrandissement et réduction	179
11	Triangle rectangle et relations trigonométriques.....	197
12	Angles inscrits – Polygones réguliers.....	217
13	Sphère et boule	235
14	Sections planes de solides	251
●	Corrigés des exercices « Faire le point »	272
●	Logiciels de géométrie.....	280
●	Métiers	284
●	Index	288
●	Les unités de mesure – Formulaire de géométrie	garde
●	Mode d'emploi des calculatrices	garde

[illegible]

Pour bien commencer

Activités

Activité 1 Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

	A	B	C
1. L'expression "un monde de papier" signifie :	un monde de papier d'écriture	un monde de papier d'impression	un monde de papier d'emballage
2. L'expression "un monde de papier" signifie :	un monde de papier d'écriture	un monde de papier d'impression	un monde de papier d'emballage
3. L'expression "un monde de papier" signifie :	un monde de papier d'écriture	un monde de papier d'impression	un monde de papier d'emballage
4. L'expression "un monde de papier" signifie :	un monde de papier d'écriture	un monde de papier d'impression	un monde de papier d'emballage
5. L'expression "un monde de papier" signifie :	un monde de papier d'écriture	un monde de papier d'impression	un monde de papier d'emballage
6. L'expression "un monde de papier" signifie :	un monde de papier d'écriture	un monde de papier d'impression	un monde de papier d'emballage
7. L'expression "un monde de papier" signifie :	un monde de papier d'écriture	un monde de papier d'impression	un monde de papier d'emballage
8. L'expression "un monde de papier" signifie :	un monde de papier d'écriture	un monde de papier d'impression	un monde de papier d'emballage

Activité 2 Sphère et boule

1. Une sphère est une surface courbe dont tous les points sont à égale distance d'un point fixe appelé centre.
2. Une sphère est une surface courbe dont tous les points sont à égale distance d'un point fixe appelé centre.
3. Une sphère est une surface courbe dont tous les points sont à égale distance d'un point fixe appelé centre.

Une sphère est une surface courbe dont tous les points sont à égale distance d'un point fixe appelé centre. Le point fixe est le centre de la sphère. La distance entre le centre et un point de la surface est le rayon de la sphère. Le rayon est noté r .

236

237

COLLEGE

[illegible]

Des exercices d'application du cours et des méthodes du chapitre, classés par thème.

«Caicul mental»

« Le saviez-vous ? »
pour enrichir sa
culture et s'ouvrir
sur le monde
d'aujourd'hui

« Vu au brevet »

«Thème de convergence»

Exercices – Faire le point

Des exercices d'auto-évaluation,
avec leurs corrigés en fin de manuel.

Exercise - Application

Des exercices plus complets
ou demandant une prise d'initiative.

4274

Une page de «travaux pratiques» dédiée, selon le chapitre, aux calculatrices, aux tableurs ou aux logiciels de géométrie.

Faire le point

 Indiquer, dans chaque cas, la réponse exacte parmi les trois réponses proposées.

Argumenter et débattre

156123

Déterminer la moyenne, la médiane et l'étendue d'une série

Un QCM
Des exercices à rédiger
Corrigés du QCM et des exercices p. 272

« Pour les curieux »
Pour éveiller
la curiosité
avec des exercices
ludiques ou
surprenants

« Argumenter et débattre » : exercices ouverts pour débattre en classe

« Vrai ou faux »

Les compléments

- La boîte à outils
- Les corrigés des exercices « Faire le point »
- Les modes d'emploi des logiciels de géométrie
- Une présentation des deux principales calculatrices utilisées au collège
- Un formulaire de géométrie
- Le tableau des unités de mesure
- Les pages métiers

Programme

Connaissances

Capacités

Une phrase ou une partie de phrase en italique désigne une connaissance ou une capacité qui n'est pas exigible dans le socle.

Les thèmes de convergence sont signalés entre crochets.

1. ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

1.1. Notion de fonction

► chap. 7

Déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule.

[SVT, Histoire, Géographie, Physique...]

1.2. Fonction linéaire, fonction affine

► chap. 8

Proportionnalité

Fonction linéaire

● Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné. ● Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image. ● Représenter graphiquement une fonction linéaire. ● Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.

[SVT, Physique...]

Fonction affine

● Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné. ● Déterminer une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images. ● Représenter graphiquement une fonction affine. ● Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.

1.3. Statistique

► chap. 9

Caractéristiques de position

Une série statistique étant donnée sous forme de liste ou de tableau ou par une représentation graphique :

Approche de caractéristiques de dispersion

● déterminer une valeur médiane de cette série et en donner la signification ; ● déterminer des valeurs pour les premier et troisième quartiles et en donner la signification ; ● déterminer son étendue.

Exprimer et exploiter les résultats de mesures d'une grandeur.

[SVT, Histoire, Géographie, Physique...]

1.4. Notion de probabilité

► chap. 9

● Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. ● Calculer des probabilités dans des contextes familiers.

2. NOMBRES ET CALCULS

2.1. Nombres entiers et rationnels

► chap. 1

Opérations sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire (Reprise du programme du cycle central)

● Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. ● Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

Diviseurs communs à deux entiers

Fractions irréductibles

2.2. Calculs élémentaires sur les radicaux

► chap. 4

Racine carrée d'un nombre positif

● Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a . ● Sur des exemples numériques où a est un nombre positif, utiliser les égalités : $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$. ● Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a est un nombre positif.

Produit et quotient de deux radicaux

Sur des exemples numériques, où a et b sont deux nombres positifs, utiliser les égalités : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ (b non nul).

2.3. Écritures littérales

Puissances

► chap. 3

Utiliser sur des exemples les égalités : $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $a^m/a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{m \times n}$, $(a \times b)^n = a^n \times b^n$, $(a/b)^n = a^n/b^n$, où a et b sont des nombres non nuls et m et n des entiers relatifs.

Factorisation

► chap. 5

Connaître dans le cadre général et factoriser des expressions algébriques dans lesquelles le facteur est apparent.

Identités remarquables

► chap. 5

● Connaître les identités : $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$,

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. ● Les utiliser dans les deux sens sur des exemples numériques ou littéraux simples.

2.4. Équations et inéquations du premier degré

Problèmes du premier degré : inéquation du premier degré à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues ► chap. 2

● Mettre en équation un problème. ● Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques ; représenter ses solutions sur une droite graduée. ● Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.

Problèmes se ramenant à une équation du premier degré : équations produits

► chap. 5

Résoudre une équation mise sous la forme $A(x) \times B(x) = 0$, où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux expressions du premier degré de la même variable x .

3. GÉOMÉTRIE

3.1. Figures planes

Triangle rectangle, relations trigonométriques

► chap. 11

● Connaître et utiliser les relations entre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de deux des côtés d'un triangle rectangle. ● Déterminer, à l'aide de la calculatrice, des valeurs approchées : du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu donné ; de l'angle aigu dont on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente.

Configuration de Thalès

► chap. 10

Connaître et utiliser, dans une situation donnée, les deux théorèmes suivants : ● Soient d et d' deux droites sécantes en A . Soient B et M deux points de d , distincts de A . Soient C et N deux points de d' , distincts de A . Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $AM/AB = AN/AC = MN/BC$. ● Soient d et d' deux droites sécantes en A . Soient B et M deux points de d , distincts de A . Soient C et N deux points de d' , distincts de A . Si $AM/AB = AN/AC$ et si les points A , B , M et les points A , C , N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Agrandissement et réduction

► chap. 10

(Reprise du programme de 4^e)

Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et de celles de la figure à obtenir.

Angle inscrit, angle au centre

► chap. 12

Connaître et utiliser la relation entre un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Polygones réguliers

► chap. 12

Construire un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier connaissant son centre et un sommet.

3.2. Configurations dans l'espace

Problèmes de sections planes de solides

► chap. 14

● Connaître et utiliser la nature des sections du cube, du parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face, à une arête. ● Connaître et utiliser la nature des sections du cylindre de révolution par un plan parallèle ou perpendiculaire à son axe. ● Connaître et utiliser les sections d'un cône de révolution et d'une pyramide par un plan parallèle à la base.

Sphère

► chap. 13

● Connaître la nature de la section d'une sphère par un plan. ● Calculer le rayon du cercle intersection connaissant le rayon de la sphère et la distance du plan au centre de la sphère. ● Représenter la sphère et certains de ses grands cercles.

[Géographie]

4. GRANDEURS ET MESURES

4.1. Aires et volumes

Calculs d'aires et volumes

► chap. 13

● Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné. ● Calculer le volume d'une boule de rayon donné.

Effet d'une réduction ou d'un agrandissement

► chap. 10 et 13

Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k , l'aire d'une surface est multipliée par k^2 , le volume d'un solide est multiplié par k^3 .

4.3. Grandeurs composées, changement d'unités

► chap. 6

Effectuer des changements d'unités sur des grandeurs produits ou des grandeurs quotients.

Vitesse moyenne

[SVT, technologie, Géographie, Physique...]

Nombres entiers et rationnels

Pourquoi le **quatre-quarts** s'appelle-t-il ainsi ?
Les ingrédients de ce gâteau sont les suivants :

Pour 8 personnes:

- 4 œufs
- 250 g de farine
- 250 g de beurre
- 240 g de sucre fin
+ 10 g de sucre vanillé
- 2 cuillères à café de levure
en poudre.

Sachant qu'un œuf pèse en moyenne 62 g, 4 œufs pèsent environ 250 g.

Les **quatre** ingrédients principaux sont donc présents en **quantité égale**.
D'où son nom...



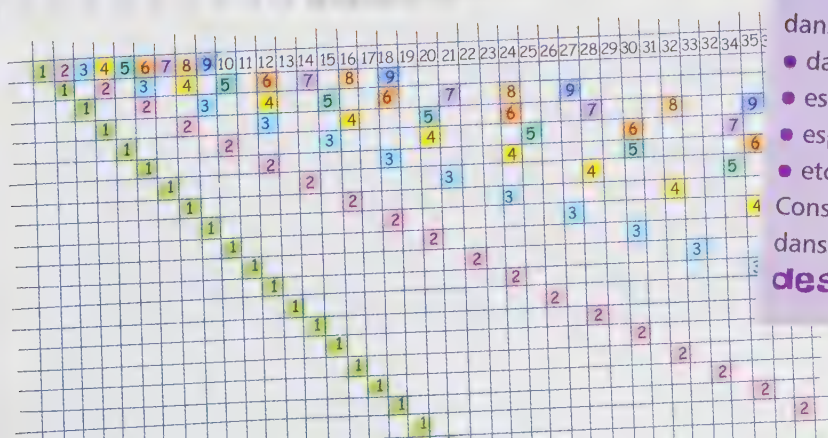
Désolé, on ne
laisse entrer
que farine,
beurre,
sucre et
œufs.



Un **mathématicien amateur**, Benoît Cloître, a construit récemment le **tableau de nombres** ci-contre. Il a inscrit les entiers strictement positifs dans l'ordre croissant :

- dans chaque case sur la première ligne ;
- espacés d'une case sur la deuxième ligne ;
- espacés de deux cases sur la troisième ligne ;
- etc.

Constatez que les nombres qui apparaissent dans les colonnes sont les **diviseurs des entiers** de la première ligne !



QCM Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	Le nombre 7,89 est égal à :	$\frac{789}{10}$	$\frac{789}{1000}$	$\frac{789}{100}$
2	Le nombre $\frac{8}{1000}$ est égal à :	0,008	8,1000	0,8000
3	Le nombre $\frac{19}{11}$:	est égal à 1,727272727	est égal à 1,73	n'est pas un nombre décimal
4	Le nombre $\frac{45}{35}$ est égal à :	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	45,35
5	Le nombre $\frac{8,15}{4,3}$ est égal à :	2,5	$\frac{815}{43}$	$\frac{81,5}{43}$
6	Le nombre 2 816 est :	divisible par 2 mais pas par 4	divisible par 4	divisible par 3
7	Compléter le nombre 45□3 pour qu'il soit divisible par 9 :	6	9	0
8	La somme $3a + 3b$ est égale à :	$3(a + b)$	$6(a + b)$	$9ab$

Exercice 1 a. Donner l'écriture décimale de chacune des puissances de 10 suivantes :

- 10^3 • 10^5 • 10^1 • 10^0 • 10^{-2} • 10^{-1} • 10^{-6}

b. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une puissance de 10 :

- 100 • 1 000 000 • 10 • 1 • 0,001 • 0,000 01

Exercice 2 a. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de 68 par 13.

b. Encadrer le nombre $\frac{68}{13}$ par deux entiers consécutifs.

c. Donner la troncature au millièmme et l'arrondi au millièmme du nombre $\frac{68}{13}$.

d. Le nombre $\frac{68}{13}$ est-il un nombre décimal ?

Exercice 3 Effectuer les calculs suivants. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

$$A = \frac{2}{5} + \frac{4}{3} \times \frac{9}{7} \quad B = \frac{15}{2} : \frac{5}{24} \quad C = \left(8 - \frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{12}\right) \quad D = \frac{\frac{9}{4} + 5}{3 - \frac{2}{8}}$$

Exercice 4 a. Rappeler la règle des signes du quotient de deux nombres relatifs.

b. Les nombres $A = \frac{-12}{21}$, $B = \frac{12}{-21}$ et $C = -\frac{12}{21}$ sont-ils égaux ? Justifier.

c. Simplifier la fraction $\frac{12}{21}$, puis en déduire une écriture simplifiée des nombres A, B et C.

Exercice 5 a. Développer chacun des produits suivants : $A = 7(3 - x)$; $B = 5(4a + b)$.

b. Factoriser chacune des sommes algébriques suivantes : $C = 15x + 3y$; $D = 8a - 16$.

Activité 1 Nature des nombres

1 Les nombres décimaux

a. Écrire sous la forme d'une fraction décimale les nombres suivants :

- 156,1 • -7,89 • 0,0023

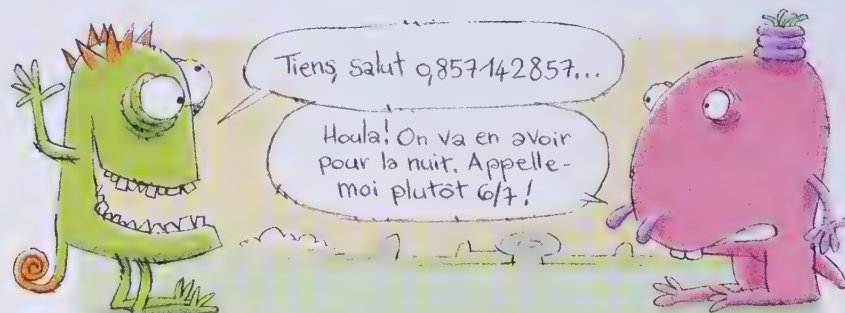
b. Donner l'écriture décimale des fractions suivantes :

- $\frac{89}{10^4}$ • $\frac{548}{10}$ • $\frac{7}{10^0}$ • $\frac{-62}{10^3}$ • $\frac{-50}{10}$

c. Écrire la fraction $\frac{17}{25}$ sous la forme d'une fraction de dénominateur 100, puis donner l'écriture décimale de $\frac{17}{25}$.

d. Sans effectuer la division, donner les écritures décimales des nombres suivants :

- $\frac{98}{50}$ • $\frac{-13}{25}$ • $\frac{29}{5}$ • $\frac{-35}{4}$ • $\frac{7}{8}$



2 Les nombres rationnels

a. Recopier la liste de nombres ci-dessous, puis entourer :

- en bleu les nombres entiers naturels ;
- en vert les nombres entiers relatifs ;
- en rouge les nombres décimaux.

Un nombre peut être entouré de plusieurs couleurs.

-1 ; 0 ; $\frac{-3}{4}$; -2 ; $\frac{2}{3}$; 12 ; $\frac{12}{3}$; 7,8 ; $\frac{7}{8}$; -0,56 ; $\frac{6}{7}$; $\frac{35}{-5}$; $-\frac{29}{2}$

b. Comment traduire le fait que certains nombres soient entourés trois fois, certains deux fois et certains une fois uniquement ?

c. Que peut-on dire des nombres qui ne sont pas entourés ?

d. Vérifier que chacun des nombres de la liste peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs. On appelle ces nombres des **nombres rationnels**.

Attention ! Tous les nombres ne sont pas rationnels. Il existe aussi des nombres non rationnels. On les appelle des **nombres irrationnels**. π par exemple est un nombre irrationnel.

e. Tous les nombres entiers relatifs sont-ils des nombres décimaux ?

Tous les nombres décimaux sont-ils des nombres entiers ?

Tous les nombres décimaux sont-ils des nombres rationnels ?

Tous les nombres rationnels sont-ils des nombres décimaux ?

Une **fraction décimale** est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Activité 2

Diviseurs positifs d'un nombre entier positif

- 1
 - a. Pourquoi peut-on affirmer que 7 divise 28 ? On dit que 7 est un **diviseur** de 28.
 - b. 1 et 28 sont-ils des diviseurs de 28 ? Donner tous les diviseurs de 28.
 - c. Les nombres a et b étant des nombres entiers strictement positifs, que doit-on vérifier pour pouvoir affirmer que b est un diviseur de a ?
- 2
 - a. Quels sont les diviseurs positifs de 1 ? de 2 ? de 5 ? de 6 ? de 7 ? de 9 ? de 11 ? de 15 ?
 - b. Quel est le plus petit nombre de diviseurs positifs d'un nombre entier supérieur ou égal à 2 ?
- 3

On dit qu'un nombre entier naturel est **premier** lorsqu'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

 - a. Le nombre 1 est-il premier ?
 - b. Parmi les entiers cités à la question 2a, quels sont ceux qui sont premiers ?

Activité 3

Diviseurs communs et fraction irréductible

A Plus grand commun diviseur (PGCD)

- 1
 - a. Écrire tous les diviseurs positifs de 36, puis tous les diviseurs positifs de 60.
 - b. Quels sont les diviseurs positifs communs à 36 et à 60 ?
 - c. Quel est le plus petit diviseur positif commun à 36 et à 60 ? Quel est le plus grand diviseur positif commun à 36 et à 60 ? Le **plus grand commun diviseur** de 36 et 60 est noté **PGCD(36 ; 60)**.
- 2

Calculer le plus grand diviseur commun aux nombres 36 et 65, puis aux nombres 18 et 49. Que remarque-t-on ?
- 3

On dit que deux nombres entiers sont **premiers entre eux** lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1. Indiquer, dans chacun des cas suivants, si les deux nombres donnés sont premiers entre eux.

a. 28 et 63 b. 72 et 32 c. 62 et 35



B Fraction irréductible

- 1
 - a. Simplifier la fraction $\frac{36}{60}$ au maximum. Une fraction qu'on ne peut plus simplifier est appelée **irréductible**.
 - b. Par quel nombre doit-on diviser 36 et 60 pour obtenir la fraction irréductible égale à $\frac{36}{60}$?
- 2

Peut-on simplifier les fractions $\frac{36}{65}$ et $\frac{49}{18}$? Justifier.
- 3

Par quel nombre doit-on diviser le numérateur et le dénominateur d'une fraction pour obtenir une fraction irréductible ?

Activité 4

Diviseur commun et opérations

A Diviseur commun et soustraction

1 Conjecture

- a. Expliquer pourquoi 4 est un diviseur de 248 et de 32.
- b. Calculer la différence $248 - 32$. Le nombre 4 est-il un diviseur de cette différence ?
- c. Que peut-on conjecturer ?

2 Démonstration

Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs tels que $a > b$.

Soit d un diviseur commun à a et b .

On veut montrer qu'un diviseur commun à deux nombres est aussi un diviseur de leur différence.

- a. Justifier qu'il existe deux entiers n et n' tels que :

$$a = dn \quad \text{et} \quad b = dn'.$$

- b. Exprimer la différence $a - b$ en fonction de d , n et n' .

- c. En déduire que d est un diviseur de $a - b$.

3 PGCD et soustraction

- a. Calculer le PGCD(248 ; 32) et le PGCD(248 - 32 ; 32). Que remarque-t-on ?

b. Quel processus utilisant la soustraction pourrait-on imaginer pour calculer le PGCD de deux nombres sans chercher tous les diviseurs communs à ces deux nombres ?

B Diviseur commun et division euclidienne

1 Conjecture

- a. Calculer le quotient q et le reste r de la division euclidienne de 248 par 32.
- b. Le nombre 4 est un diviseur de 248 et de 32. Montrer que le nombre 4 est également un diviseur du reste r .
- c. Que peut-on conjecturer ?

2 Démonstration

On veut montrer qu'un diviseur commun à deux nombres est aussi un diviseur du reste de la division euclidienne du plus grand par le plus petit de ces deux nombres.

Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs tels que $a > b$.

Soit d un diviseur commun à a et b .

On appelle q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .

- a. Exprimer a en fonction de b , q et r , puis exprimer r en fonction de a , b et q .

- b. Utiliser la question A2a pour montrer que d est un diviseur de r .

3 PGCD et division euclidienne

- a. Calculer le PGCD(248 ; 32) et PGCD(32 ; 24). Que remarque-t-on ?

b. Quel processus utilisant la division euclidienne pourrait-on imaginer pour calculer le PGCD de deux nombres sans chercher tous les diviseurs communs à ces deux nombres ?

A Nature des nombres

1 Les nombres entiers

Définitions

- Les nombres **entiers naturels** sont les nombres entiers positifs.
- Les nombres **entiers relatifs** sont les nombres entiers positifs et les nombres entiers négatifs.

Exemples

- ▶ Les nombres tels que : 0 ; 1 ; 2 ; 3 sont des nombres entiers positifs.
- ▶ Les nombres tels que : -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 sont des nombres entiers relatifs.

Remarque : Tout entier naturel est un entier relatif, mais tout entier relatif n'est pas un entier naturel. Par exemple, -2 est un entier relatif, mais n'est pas un entier naturel.

2 Les nombres décimaux

Définition

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10.

Exemples

On peut écrire : $-0,18 = \frac{-18}{100} = \frac{-18}{10^2}$; $4 = \frac{4}{1} = \frac{4}{10^0}$ et $\frac{3}{25} = \frac{12}{100} = \frac{12}{10^2}$.

Donc les nombres -0,18 ; 4 et $\frac{3}{25}$ sont des nombres décimaux.

En revanche $\frac{8}{9}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10. $\frac{8}{9}$ n'est donc pas un nombre décimal.

Remarque : Tout entier relatif est un nombre décimal, mais tout nombre décimal n'est pas un entier relatif. Par exemple, $\frac{3}{10}$ est un nombre décimal, mais n'est pas un entier relatif.

3 Les nombres rationnels

Définition

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs.

Exemples

▶ $\frac{8}{9}$; $-\frac{5}{7}$ et $\frac{1}{3}$ sont des nombres rationnels.

▶ On peut écrire : $-12,9 = \frac{-129}{10}$ et $8 = \frac{8}{1}$. Donc -12,9 et 8 sont des nombres rationnels.

Remarques :

- Tout nombre décimal est un nombre rationnel, mais tout nombre rationnel n'est pas un nombre décimal. Par exemple, $\frac{7}{6}$ est un nombre rationnel, mais n'est pas un nombre décimal.
- Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, comme $\sqrt{2}$ ou π . Ces nombres sont appelés des **nombres irrationnels**.

B Diviseurs, multiples et PGCD

1 Diviseurs et multiples

Définition

Soient a et b deux nombres entiers relatifs, avec b non nul.

On dit que le nombre b est un diviseur du nombre a s'il existe un nombre entier n tel que : $a = bn$.

On dit aussi que b divise a ou que a est un multiple de b .

Exemples

- ▶ $48 = 6 \times 8$, donc 8 et 6 sont des diviseurs de 48.
- ▶ $48 = (-2) \times (-24)$, donc -2 et -24 sont des diviseurs de 48.

Remarques :

- 1 est un diviseur de tous les nombres.
- Tout nombre entier non nul est un diviseur de 0.

b est un diviseur de a signifie que le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre entier.

2 Nombres premiers

Définition

On dit qu'un nombre entier naturel est **premier** lorsqu'il possède exactement deux diviseurs positifs différents : 1 et lui-même.

Exemples

- ▶ Les seuls diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5, donc 5 est un nombre premier.
- ▶ Les seuls diviseurs positifs de 31 sont 1 et 31, donc 31 est un nombre premier.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier car 1 n'admet qu'un seul diviseur positif égal à 1.

3 Plus grand diviseur commun à deux nombres entiers strictement positifs

Propriété

Parmi tous les diviseurs communs à deux nombres entiers strictement positifs a et b , il en existe un qui est plus grand que tous les autres.

Le plus grand diviseur commun à a et b est noté : **PGCD**(a ; b).

Exemples

- ▶ Trouver PGCD(48 ; 18).

Les diviseurs positifs de 48 sont :

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48.

Les diviseurs positifs de 18 sont : **1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18.**

Les diviseurs communs à 48 et à 18 sont : **1 ; 2 ; 3 et 6.**

Le plus grand diviseur commun à 48 et 18 est donc **6**.

On écrit : **PGCD(48 ; 18) = 6.**

- ▶ Trouver PGCD(80 ; 76).

Les diviseurs positifs de 80 sont : **1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 16 ; 20 ; 40 ; 80.**

Les diviseurs positifs de 76 sont : **1 ; 2 ; 4 ; 19 ; 38 ; 76.**

Les diviseurs communs à 80 et 76 sont : **1 ; 2 et 4.**

Le plus grand diviseur commun à 80 et 76 est **4**. On écrit **PGCD(80 ; 76) = 4.**

Un **diviseur commun** à a et à b est un nombre qui est à la fois un diviseur de a et un diviseur de b .

Propriétés

Ces propriétés justifient l'algorithme des différences

- Savoir-faire 1, page 15 et l'algorithme d'Euclide
- Savoir-faire 2, page 15.

Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs (avec $a > b$) et soit r le reste de la division euclidienne de a par b .

- $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a - b)$
- $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$

Exemples

Soient $a = 48$ et $b = 18$. On a vu dans l'exemple précédent que $\text{PGCD}(48 ; 18) = 6$.

- ▶ $a - b = 30$ et on a bien $\text{PGCD}(30 ; 18) = 6$.
- ▶ $48 = 18 \times 2 + 12$, donc le reste de la division euclidienne de 48 par 18 est 12, et on a bien $\text{PGCD}(18 ; 12) = 6$.

Remarques :

- Si a est un multiple de b , alors $\text{PGCD}(a ; b) = b$.
- $\text{PGCD}(a ; a) = a$.

4 Nombres premiers entre eux

Définition

On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.

Exemple

Les nombres 48 et 35 sont premiers entre eux.

En effet, les diviseurs positifs de 48 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48 et les diviseurs positifs de 35 sont : 1 ; 5 ; 7 ; 35. Le plus grand diviseur commun à 48 et 35 est 1.

Fraction irréductible

Définition

Soient deux nombres entiers strictement positifs a et b .

On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple

On a vu précédemment que 48 et 35 étaient premiers entre eux, donc $\frac{48}{35}$ et $\frac{35}{48}$ sont deux fractions irréductibles.

Une **fraction irréductible** est une fraction qui ne peut plus être simplifiée.

Règle

Soient deux nombres entiers strictement positifs a et b .

Pour obtenir la fraction irréductible égale à la fraction $\frac{a}{b}$, il suffit de diviser a et b par leur plus grand diviseur commun.

Exemple

On a vu précédemment que $\text{PGCD}(48 ; 18) = 6$. On a : $\frac{48}{18} = \frac{48 : 6}{18 : 6} = \frac{8}{3}$.
 $\frac{8}{3}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{48}{18}$.

- Savoir-faire 3, page 16

Savoir-faire 1 Recherche d'un PGCD à l'aide de l'algorithme des différences

Énoncé Calculer le plus grand diviseur commun à 182 et 117 à l'aide de l'algorithme des différences.

Résolution

Méthode Pour calculer le PGCD de deux nombres entiers différents avec l'algorithme des différences, on suit les étapes suivantes :

Étape 1 : on soustrait le plus petit nombre du plus grand nombre.

Étape 2 : on compare le résultat de cette soustraction au plus petit des deux nombres :

- s'ils sont égaux, alors le PGCD est égal au plus petit des nombres ;
- sinon on recommence l'étape 1 avec le résultat de la soustraction et le plus petit nombre.

On utilise la propriété :

$$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a - b)$$

$$\bullet 182 - 117 = 65$$

$$\bullet 117 - 65 = 52$$

$$\bullet 65 - 52 = 13$$

$$\bullet 52 - 13 = 39$$

$$\bullet 39 - 13 = 26$$

$$\bullet 26 - 13 = 13$$

Donc : $\text{PGCD}(182 ; 117) = 13$

$$\text{PGCD}(182 ; 117) = \text{PGCD}(117 ; 65)$$

$$\text{PGCD}(117 ; 65) = \text{PGCD}(65 ; 52)$$

$$\text{PGCD}(65 ; 52) = \text{PGCD}(52 ; 13)$$

$$\text{PGCD}(52 ; 13) = \text{PGCD}(13 ; 39)$$

$$\text{PGCD}(13 ; 39) = \text{PGCD}(13 ; 26)$$

$$\text{PGCD}(26 ; 13) = \text{PGCD}(13 ; 13)$$

L'algorithme s'arrête lorsque : $a - b = b$.

On obtient alors : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; b) = b$.

Ici, $\text{PGCD}(13 ; 13) = 13$.

Remarque : Si on continuait l'algorithme, la différence suivante serait nulle. Le PGCD cherché est donc la dernière différence non nulle.

Savoir-faire 2 Recherche d'un PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide

Énoncé Calculer le plus grand diviseur commun à 182 et 117 à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Résolution

Méthode Pour calculer le PGCD de deux nombres entiers différents non nuls avec l'algorithme d'Euclide, on suit les étapes suivantes :

Étape 1 : on effectue la division euclidienne du plus grand de ces nombres par le plus petit.

Étape 2 : on examine le reste de cette division :

- si ce reste est égal à zéro, alors le PGCD est le diviseur de cette division euclidienne ;
- si ce reste n'est pas égal à 0, on recommence l'étape 1 avec le diviseur et le reste de cette division.

$$\begin{array}{r|l} 182 & 117 \\ 65 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 117 & 65 \\ 52 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 52 \\ 13 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 52 & 13 \\ 0 & 4 \end{array}$$

On utilise la propriété :
 $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$,
 r étant le reste de la division euclidienne de a par b .

• $182 = 117 \times 1 + 65$
 65 est le reste de la division euclidienne de 182 par 117.

$$\text{PGCD}(182 ; 117) = \text{PGCD}(117 ; 65)$$

• $117 = 65 \times 1 + 52$
 52 est le reste de la division euclidienne de 117 par 65.

$$\text{PGCD}(117 ; 65) = \text{PGCD}(65 ; 52)$$

• $65 = 52 \times 1 + 13$
 13 est le reste de la division euclidienne de 65 par 52.

$$\text{PGCD}(65 ; 52) = \text{PGCD}(52 ; 13)$$

• $52 = 13 \times 4 + 0$
 0 est le reste de la division euclidienne de 52 par 13.

L'algorithme s'arrête lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul, ce qui signifie que b est un diviseur de a .
 On obtient alors : $\text{PGCD}(a ; b) = b$.
 Ici, $\text{PGCD}(52 ; 13) = 13$.

Donc : $\text{PGCD}(182 ; 117) = 13$

Remarque : Le PGCD cherché est donc le **dernier reste non nul** des divisions euclidiennes successives.

Savoir-faire

3

Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

Énoncé 1. Écrire $\frac{117}{182}$ sous la forme d'une fraction irréductible.

2. En déduire la fraction égale à $\frac{117}{182}$ dont le numérateur est 45.

Solution

1. On calcule le PGCD de 182 et 117 :
 $\text{PGCD}(182 ; 117) = 13$

$$\frac{117}{182} = \frac{117 : 13}{182 : 13} = \frac{9}{14}$$

La fraction irréductible égale à $\frac{117}{182}$ s'obtient en divisant 117 et 182 par leur PGCD.

$\frac{9}{14}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{117}{182}$.

2. D'après la question 1, on a : $\frac{117}{182} = \frac{9}{14}$.

$$\text{Or } \frac{9}{14} = \frac{9 \times 5}{14 \times 5} = \frac{45}{70}$$

$$\text{donc } \frac{117}{182} = \frac{45}{70}$$

Pour déterminer une fraction égale à $\frac{117}{182}$, on utilise la fraction irréductible $\frac{9}{14}$.

La fraction égale à $\frac{117}{182}$ de numérateur 45 est $\frac{45}{70}$.

➔ Savoir-faire 1 ou 2



Résoudre un problème de partage équitable

Énoncé Vu au brevet

Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il veut utiliser toutes ses billes pour confectionner des paquets identiques ayant chacun un même nombre de billes rouges et un même nombre de billes noires.

1. Quel nombre maximal de paquets Marc pourra-t-il réaliser ?
2. Quelle sera alors la composition de chaque paquet ?

Solution

1. Interprétation de l'énoncé

On appelle n le nombre maximal de paquets identiques que Marc pourra réaliser en utilisant toutes ses billes.

On choisit de désigner le nombre de paquets cherché par n .

Les n paquets doivent tous contenir le même nombre de billes rouges et le même nombre de billes noires, donc :

On traduit la donnée de l'énoncé : « des paquets identiques ».

– le quotient de la division euclidienne de 108 par n correspond au nombre de billes rouges dans un paquet ;

– le quotient de la division euclidienne de 135 par n correspond au nombre de billes noires dans un paquet.

De plus, Marc doit utiliser toutes ses billes. Les restes des divisions euclidiennes de 108 par n et de 135 par n doivent donc être nuls.

On traduit la donnée de l'énoncé : « il veut utiliser toutes ses billes ».

Par conséquent, n doit diviser 108 et 135. Comme Marc veut réaliser le plus grand nombre de paquets, **n est le plus grand diviseur commun à 108 et 135.**

On traduit la donnée de l'énoncé : « nombre maximal de paquets ».

Calcul du PGCD de 108 et 135

$$135 = 108 \times 1 + 27$$

$$\text{Donc : PGCD}(135 ; 108) = \text{PGCD}(108 ; 27)$$

$$108 = 27 \times 4 + 0$$

Donc 27 est un diviseur de 108 et $\text{PGCD}(108 ; 27) = 27$.

$$\text{D'où PGCD}(135 ; 108) = 27.$$

Marc pourra réaliser au maximum 27 paquets identiques en utilisant toutes les billes.

On calcule PGCD (135 ; 108). Ici, on utilise l'algorithme d'Euclide mais on aurait pu utiliser l'algorithme des différences.

2. Le nombre de billes rouges par paquet est le quotient de 108 par 27, soit 4.

Le nombre de billes noires par paquet est le quotient de 135 par 27, soit 5.

Chaque paquet sera composé de 4 billes rouges et de 5 billes noires.

On détermine la composition de chaque paquet en calculant le nombre de billes rouges et le nombre de billes noires par paquet.

$$\begin{array}{r|l} 135 & 108 \\ 27 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 27 \\ 0 & 4 \end{array}$$

Calculs en écriture fractionnaire RAPPEL

Pour les exercices 1 à 5, effectuer chaque calcul. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

- 1 a. $\frac{7}{3} + \frac{5}{9}$ b. $\frac{4}{25} + \frac{8}{5}$ c. $\frac{7}{6} - \frac{5}{12}$
 2 a. $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) : \frac{2}{5}$ b. $\frac{4}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{5}{3}$ c. $\frac{7}{8} - \frac{4}{15} \times \frac{25}{12}$
 3 a. $1 + \frac{2}{3} \times \frac{9}{5}$ b. $\frac{9}{8} - \frac{7}{3} + 5$ c. $4 \times \frac{3}{7} - \frac{5}{6}$
 4 a. $\frac{24}{35} \times \frac{77}{49} \times 30$ b. $\frac{(8-5)^2}{8^2-5^2}$ c. $\frac{3-7 \times 4}{3 \times 7 - 4}$
 5 a. $-\frac{5}{7} + \frac{5}{21} \times \frac{9}{25}$ b. $\frac{25}{17} : \frac{15}{24} - \frac{11}{3}$ c. $\frac{5}{4} - \frac{2}{5} \times \frac{10}{3}$

6 Calcul mental

Effectuer les calculs suivants :

- a. $\frac{3}{2} + \frac{5}{4}$ b. $4 + \frac{6}{5}$ c. $\frac{6}{7} - \frac{3}{14}$ d. $\frac{2}{5} + \frac{7}{3}$
 e. $\frac{9}{2} \times \frac{8}{3}$ f. $5 \times \frac{7}{4}$ g. $8 : \frac{10}{3}$ h. $\frac{4}{5} : \frac{1}{10}$

- 7 On considère l'expression $A = (5x+3)(x-4)$.
 Calculer A dans chacun des cas suivants :
 a. $x = \frac{8}{3}$ b. $x = -\frac{5}{4}$ c. $x = -\frac{2}{3}$

- 8 On considère l'expression $B = x^2 - 2x + 3$.
 Calculer B dans chacun des cas suivants :
 a. $x = \frac{7}{2}$ b. $x = \frac{3}{5}$ c. $x = -\frac{1}{6}$

- 9 Soient les nombres $x = \frac{9}{25}$ et $y = \frac{7}{4}$.
 Calculer les nombres A, B, C et D définis par :
 $A = x + y$ $B = x - y$ $C = xy$ $D = \frac{x}{y}$

- 10 Calculer chacun des nombres suivants :
 $A = \left(\frac{2}{7} - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{7}\right)$ $B = \frac{2}{7} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} - \frac{9}{7}$
 $C = \left(\frac{1}{9} - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{8}{9} + \frac{5}{4}\right)$ $D = \frac{1}{9} - \frac{3}{4} : \frac{8}{9} + \frac{5}{4}$

- 11 Calculer chacun des nombres suivants :
 $A = \frac{9}{11} - \frac{5}{4} : \frac{11}{7}$ $B = \left(\frac{9}{11} - \frac{5}{4}\right) : \frac{11}{7}$
 $C = \left(-\frac{3}{8} + \frac{5}{7}\right) : \frac{19}{28} \times \frac{1}{2}$ $D = \left(-\frac{3}{8} + \frac{5}{7}\right) : \left(\frac{19}{28} \times \frac{1}{2}\right)$

12 Vrai ou faux

- a. $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{3}{8}$ b. $\frac{7}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{2}$ c. $\frac{4}{9} : \frac{9}{4} = 1$
 d. $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$ e. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

- 13 Dans une association sportive, deux cinquièmes des membres pratiquent le basket-ball, un tiers des membres pratiquent le volley-ball et deux quinzièmes des membres pratiquent ces deux sports.

Calculer la fraction des membres de cette association qui pratiquent le basket mais pas le volley, puis la fraction des membres qui pratiquent le volley mais pas le basket.

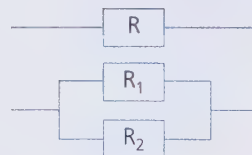
- 14 Sept neuvièmes des livres de la bibliothèque de Patrick sont des romans et trois cinquièmes de ses romans sont des romans policiers.

- 1 Quelle est la fraction des livres de Patrick qui correspond à des romans policiers ?
 2 Sachant que Patrick possède 270 livres, combien de romans policiers contient sa bibliothèque ?

15 Math et sciences physiques

En électricité, pour calculer la résistance R d'un dipôle ohmique équivalent à deux dipôles ohmiques de résistances respectives R_1 et R_2 montés en dérivation, on utilise la formule :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



- 1 Calculer R pour :
 a. $R_1 = 9$ ohms et $R_2 = 8$ ohms.
 b. $R_1 = R_2 = 400$ ohms.
 2 On ne dispose que de dipôles ohmiques de résistance 1 000 ohms. Quel montage doit-on réaliser pour obtenir l'équivalent d'un dipôle ohmique de résistance 500 ohms ? d'un dipôle ohmique de résistance 250 ohms ?

16 Vu au brevet

Quatre enfants se partagent une tablette de chocolat. Le premier en prend le tiers et le second le quart. Le troisième prend les deux cinquièmes de ce qui reste après que le premier et le deuxième se sont servis.

- 1 Lequel de ces calculs permet de trouver la part du troisième ?

$$A = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \qquad B = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{5}$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{2}{5} \qquad D = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{5}$$

- 2 Effectuer le calcul choisi.
 3 Quelle est la part du quatrième enfant ?

Nature des nombres

- 17** ① Dans chacun des cas suivants, écrire une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 égale à la fraction donnée.

a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{7}{2}$ c. $\frac{37}{25}$ d. $\frac{71}{500}$ e. $\frac{9}{20}$

- ② Donner une écriture décimale de chacun de ces nombres.

- 18** ① Simplifier chacune des fractions suivantes :

a. $\frac{27}{30}$ b. $\frac{18}{45}$ c. $\frac{6}{150}$ d. $\frac{72}{450}$ e. $\frac{63}{9000}$

- ② Dans chacun des cas précédents, écrire une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 égale à la fraction donnée.

- ③ Donner une écriture décimale de chacun de ces nombres.

- 19** Sans utiliser de calculatrice, déterminer si les nombres suivants sont des nombres décimaux.

a. $\frac{4}{5}$ b. $\frac{7}{15}$ c. $\frac{9}{2}$ d. $\frac{6}{15}$
e. $\frac{1}{4}$ f. $\frac{25}{6}$ g. $\frac{2}{7}$ h. $\frac{18}{6}$

- 20** Recopier le tableau ci-dessous, puis indiquer si les nombres proposés sont des nombres entiers naturels, des nombres entiers relatifs, des nombres décimaux non entiers ou des nombres rationnels non décimaux en inscrivant une croix dans la case correspondante.

Nature \ Nombre	$\frac{48}{5}$	$-\frac{38}{2}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{0,015}{1000}$	$-\frac{9}{7}$
Entier naturel					
Entier relatif					
Décimal non entier					
Rationnel non décimal					

Pour les exercices **21** à **29**, effectuer chaque calcul, puis indiquer si les résultats obtenus sont des nombres entiers, des nombres décimaux non entiers ou des nombres rationnels non décimaux.

21 $A = \frac{117}{63} + \frac{8}{7}$ $B = \frac{1}{9} + \frac{1}{12}$ $C = \frac{3}{7} - \frac{2}{5} \times \frac{15}{4}$

22 $A = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(3 + \frac{1}{2}\right)$ $B = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{7}{15}$ $C = \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{4}\right) : \frac{5}{8}$

23 $A = \frac{9}{5} - \frac{3}{4} \times 7$ $B = \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{9}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)$ $C = \left(\frac{2}{3} - 3\right) : \frac{1}{9}$

24 $A = -\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5}$ $B = \frac{\frac{1}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{7} - \frac{7}{3}}$ $C = \frac{5}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{8}{3}$

25 $A = \frac{6}{5} : \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{5}\right)$ $B = \frac{15}{28} \times \frac{7}{25} \times \frac{1}{6}$ $C = \frac{24}{5} : \left(-\frac{12}{7}\right)$

26 $A = \left(1 - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{5}{4} + 2\right) : \frac{1}{39}$ $B = \frac{8}{3} : \frac{3}{8}$
 $C = \frac{36}{35} \times \frac{49}{9} \times \frac{15}{4}$

27 $A = \frac{5^2 - 7^2}{2^2}$ $B = \frac{(5-7)^2}{2^2}$ $C = \frac{3 \times 4}{8^2 + 6^2}$ $D = \frac{2^3 - 5}{2^3 + 5}$

28 $A = 5,34 \times 1\,000$ $B = 78 \times 10^{-4}$ $C = 0,0675 \times 10^5$

29 $A = 0,01 \times 4\,342$ $B = 10^3 \times 0,0975$
 $C = 10\,921 \times 10^{-3}$ $D = 7,875 \times 10^5$

Vrai ou faux

- a. 50 est un nombre décimal.
b. $\frac{21}{3}$ est un nombre décimal.
c. $-\frac{48}{6}$ est un nombre entier.
d. 3,06 est un nombre rationnel.
e. π est un nombre décimal.

Diviseurs et multiples

- 31** ① Effectuer la division euclidienne de 5 106 par 37.
② Recopier et compléter les phrases suivantes avec les nombres 5 106 et 37.
a. ___ est divisible par ___.
b. ___ est un multiple de ___.
c. ___ est un diviseur de ___.

- 32** ① Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :
a. 682 par 76 b. 8 406 par 108 c. 2 384 par 16
② Recopier et compléter les phrases suivantes en remplaçant les pointillés par « est » ou « n'est pas ».
a. 682 ___ divisible par 76.
b. 8 406 ___ un multiple de 108.
c. 16 ___ un diviseur de 2 384.
d. 2 384 ___ divisible par 16.
e. 2 384 ___ un multiple de 16.
f. 76 ___ un diviseur de 682.

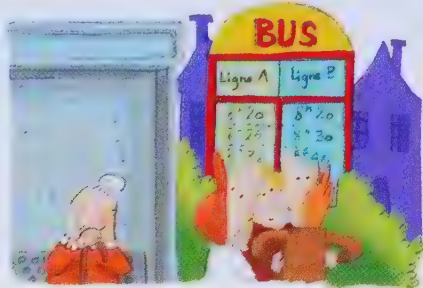
Vrai ou faux

- a. 5 est un diviseur de 45.
b. 63 est un multiple de 9.
c. 7 est divisible par 14.
d. 24 est divisible par 8.

- 34** Déterminer tous les diviseurs positifs des nombres suivants :
a. 34 b. 45 c. 50 d. 64 e. 28 f. 92

Exercices

- 35** Les lignes de bus A et B passent par le même arrêt. À 8 h 20 min, deux bus des lignes A et B sont présents en même temps à cet arrêt. Les bus de la ligne A passent toutes les six minutes et les bus de la ligne B passent toutes les dix minutes. Indiquer à quelle heure deux bus des lignes A et B seront de nouveau ensemble à cet arrêt.



- 36** On considère deux nombres A et B composés de quatre chiffres qui s'écrivent de la façon suivante : $A = 74\square5$ $B = 187\square$.
- Déterminer le chiffre manquant dans le nombre A afin qu'il soit divisible par 9.
 - Déterminer le chiffre manquant dans le nombre B afin qu'il soit divisible par 3 et 2. Donner toutes les possibilités.
 - Simplifier alors la fraction $\frac{A}{B}$. Donner tous les cas possibles.

37 Crible d'Ératosthène

- Recopier le tableau suivant :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Barrer tous les multiples de 2, sauf 2. Puis barrer tous les multiples de 3, sauf 3. Le plus petit nombre non barré est 5 : barrer tous les multiples de 5, sauf 5. Puis barrer tous les multiples du nombre non barré suivant, sauf ce nombre. Recommencer pour tous les nombres non barrés. Que peut-on dire des nombres non barrés ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

Ératosthène (284-192 av J.-C.) est un savant, géographe, astronome, mathématicien et philosophe grec. On lui doit cette méthode permettant de trouver les nombres premiers. Il fut également le premier à évaluer correctement la circonférence de la Terre grâce à la mesure ingénieuse d'un arc de méridien. (Petit Larousse)

PGCD - Fractions irréductibles

Pour les exercices **38** et **39**, déterminer tous les diviseurs positifs communs aux deux nombres donnés, puis indiquer lequel est le plus grand diviseur commun.

- 38** a. 14 et 49 b. 35 et 50 c. 27 et 63 d. 40 et 72
- 39** a. 55 et 60 b. 56 et 42 c. 54 et 78 d. 100 et 36

40 Calcul mental

Calculer :

- a. PGCD (2 ; 6) b. PGCD (15 ; 45)
c. PGCD (14 ; 28) d. PGCD (6 ; 27)

Pour les exercices **41** à **43**, déterminer le plus grand diviseur commun aux nombres x et y en utilisant l'algorithme des différences.

- 41** a. $x = 285$ et $y = 114$ b. $x = 195$ et $y = 364$
c. $x = 378$ et $y = 987$ d. $x = 500$ et $y = 448$
- 42** a. $x = 3\,575$ et $y = 2\,730$ b. $x = 3\,520$ et $y = 10\,780$
c. $x = 5\,148$ et $y = 1\,386$ d. $x = 3\,822$ et $y = 9\,240$
- 43** a. $x = 381$ et $y = 1\,016$ b. $x = 576$ et $y = 1\,248$
c. $x = 459$ et $y = 634$ d. $x = 2\,560$ et $y = 1\,872$

Pour les exercices **44** à **46**, déterminer le plus grand diviseur commun aux nombres x et y en utilisant l'algorithme d'Euclide.

- 44** a. $x = 616$ et $y = 495$ b. $x = 114$ et $y = 162$
c. $x = 624$ et $y = 408$ d. $x = 456$ et $y = 703$
- 45** a. $x = 1\,681$ et $y = 108$ b. $x = 6\,652$ et $y = 924$
c. $x = 273$ et $y = 1\,599$ d. $x = 2\,312$ et $y = 145$
- 46** a. $x = 425$ et $y = 1\,050$ b. $x = 975$ et $y = 793$
c. $x = 78$ et $y = 99$ d. $x = 671$ et $y = 542$

47 Indiquer dans chacun des cas suivants si les nombres suivants sont premiers entre eux.

- a. 789 et 502 b. 451 et 625
c. 936 et 1 118 d. 1 429 et 976

48 Calcul mental

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fraction irréductible égale à la fraction donnée.

- a. $\frac{40}{35}$ b. $\frac{24}{36}$ c. $\frac{63}{49}$ d. $\frac{72}{80}$ e. $\frac{45}{30}$

49 Expliquer pourquoi les fractions suivantes sont irréductibles.

- a. $\frac{46}{79}$ b. $\frac{92}{75}$ c. $\frac{68}{95}$ d. $\frac{154}{221}$

50 Vu au brevet

- 1 Expliquer pourquoi la fraction $\frac{170}{578}$ n'est pas irréductible.
- 2 Calculer le plus grand diviseur commun à 170 et 578.
- 3 Écrire la fraction $\frac{170}{578}$ sous forme irréductible.

Pour les exercices **51** et **52**, déterminer le plus grand diviseur commun aux nombres a et b , puis en déduire la fraction irréductible égale à la fraction $\frac{a}{b}$.

51 a. $a = 448$ et $b = 720$ b. $a = 624$ et $b = 996$

52 a. $a = 1\,562$ et $b = 1\,248$ b. $a = 1\,015$ et $b = 1\,617$

53 Recopier et compléter le tableau suivant :

Fraction $\frac{a}{b}$	PGCD ($a ; b$)	Fraction irréductible égale à $\frac{a}{b}$
$\frac{798}{1\,045}$		
	56	$\frac{7}{9}$
$\frac{4\,892}{3\,451}$		
	138	$\frac{5}{3}$

- 54** 1 Déterminer le plus grand diviseur commun à 962 et 555.
 2 En déduire la fraction irréductible égale à $\frac{962}{555}$.
 3 Quelle est la fraction égale à $\frac{962}{555}$ dont le dénominateur est 30 ?

55 Vu au brevet

- 1 Les nombres 756 et 441 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.
- 2 La fraction $\frac{756}{441}$ est-elle irréductible ? Si non, l'écrire sous forme irréductible en justifiant par des calculs.
- 3 Calculer la somme : $D = \frac{756}{441} + \frac{19}{21}$.

- 56** 1 Déterminer le plus grand diviseur commun à 1 152 et 1 656.

2 En déduire la fraction irréductible égale à $\frac{1\,152}{1\,656}$.

3 Calculer la somme $\frac{1\,152}{1\,656} + \frac{30}{23}$.

57 1 Déterminer la fraction irréductible égale à $\frac{3\,852}{1\,498}$.

2 En déduire la différence $\frac{3\,852}{1\,498} - \frac{18}{35}$.

58 Vu au brevet

- 1 Calculer le plus grand diviseur commun à 20 755 et 9 488.
- 2 En déduire le calcul du nombre : $A = \frac{20\,755}{9\,488} - \frac{3}{8}$.
- 3 Le nombre A est-il décimal ? Est-il rationnel ? Justifier.

Problèmes de partage équitable

- 59** Pour fêter son jumelage avec une ville d'Italie, une commune française organise des rencontres sportives entre les élèves de troisième des deux villes. Les organisateurs souhaitent constituer le plus grand nombre possible d'équipes comprenant chacune un même nombre d'élèves français et un même nombre d'élèves italiens.

1 Sachant qu'il y a 294 élèves français et 210 élèves italiens, quel est le plus grand nombre d'équipes que l'on peut composer ?

2 Combien y a-t-il d'élèves de chaque pays par équipe ?

60 Vu au brevet

Dans une salle de bain, on veut recouvrir le mur situé au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible.

1 Déterminer la longueur du côté d'un carreau sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur.

2 Combien faudra-t-il alors de carreaux ?

61 Vu au brevet

Un pâtissier dispose de 411 framboises et de 685 fraises. Afin de préparer des tartelettes, il désire répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques.

1 Calculer le nombre de tartelettes.

2 Calculer le nombre de framboises et de fraises dans chaque tartelette.

62 Vu au brevet

Un chef d'orchestre fait répéter 372 choristes hommes et 775 choristes femmes pour un concert. Il veut faire des groupes de répétition de telle sorte que :

– le nombre de choristes femmes est le même dans chaque groupe ;

– le nombre de choristes hommes est le même dans chaque groupe ;

– chaque choriste appartient à un groupe.

1 Quel nombre maximal de groupes pourra-t-il faire ?

2 Combien y aura-t-il alors de choristes hommes et de choristes femmes dans chaque groupe ?

- 63** Un fleuriste a reçu 1 756 roses blanches et 1 317 roses rouges. Il désire utiliser toutes ces fleurs pour réaliser des bouquets identiques, c'est-à-dire comprenant un même nombre total de roses et la même répartition entre les roses blanches et les roses rouges.

1 Quel sera le nombre maximum de bouquets identiques que ce fleuriste pourra réaliser ?

2 Quelle sera alors la composition de chaque bouquet ?

Faire le point

64 QCM Indiquer, dans chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les réponses proposées.

		A	B	C	D
1	Le nombre $A = \frac{60}{41} \times \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{4}\right)$	est un nombre entier	est un nombre décimal	est un nombre rationnel	n'est pas un nombre rationnel
2	Deux tiers de 12 est égal à	$\frac{24}{36}$	8	$\frac{6}{15}$	$\frac{14}{3}$
3	Les diviseurs de 5 sont :	2 et 2,5	2 et 3	1 et 5	1 et 4
4	$\text{PGCD}(15 ; 3) =$	3	15	0	5
5	$\text{PGCD}(20 ; 20) =$	3	40	20	1
6	$\text{PGCD}(156 ; 72) =$	4	12	$\text{PGCD}(156 ; 84)$	$\text{PGCD}(72 ; 12)$
7	Les nombres 5 et 7 sont :	premiers	premiers entre eux	des diviseurs de 12	des diviseurs de 35
8	La fraction irréductible égale à $\frac{162}{60}$ est :	2,7	$\frac{8,1}{3}$	$\frac{27}{10}$	$\frac{81}{30}$

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

• Reconnaître la nature d'un nombre

65 Pour chacun des nombres suivants, indiquer s'il s'agit d'un nombre entier, d'un nombre décimal non entier ou d'un nombre rationnel non décimal.

a. $\frac{7}{50}$

b. $-\frac{108}{4}$

c. $\frac{19}{20}$

d. $-\frac{75}{48}$

• Calculer avec des nombres rationnels

66 Effectuer les calculs suivants :

$A = 7 - \frac{3}{10} + \frac{2}{5}$

$B = \frac{12}{7} - \frac{9}{2}$

$C = \frac{8}{3} + \frac{11}{3} \times \frac{4}{9}$

$D = \frac{\frac{6}{5} - 4}{\frac{4}{3} + \frac{7}{18}}$

67 Un collège propose d'étudier en seconde langue vivante l'allemand, l'espagnol, l'italien ou l'anglais.

Un quart des élèves ont choisi l'allemand, un tiers des élèves ont choisi l'espagnol et un sixième des élèves ont choisi l'italien. Quelle est la fraction des élèves du collège qui ont choisi l'anglais en seconde langue vivante ?

• Calcul d'un PGCD - Fraction irréductible

68 Calculer le PGCD des nombres suivants :

a. 285 et 532

b. 136 et 442

c. 391 et 609

d. 1 050 et 1 435

69 ① Calculer le plus grand diviseur commun aux nombres 416 et 1 404.

② En déduire la fraction irréductible égale à $\frac{416}{1404}$.

③ Calculer le plus simplement possible la différence : $\frac{416}{1404} - \frac{14}{9}$.

• Résoudre un problème de partage

70 Pour financer un voyage, les élèves de troisième du collège Victor-Hugo ont acheté 1 615 bonbons et 969 chocolats en vrac qu'ils souhaitent revendre par sachets. Tous les sachets doivent contenir un même nombre de bonbons et un même nombre de chocolats et toutes les sucreries doivent être utilisées.

① Calculer le nombre maximal de sachets que les élèves pourront confectionner.

② Indiquer alors le nombre de bonbons et le nombre de chocolats contenus dans chaque sachet.

Approfondir

71 1 a. Le nombre $\frac{13}{11}$ est-il décimal ?

b. Effectuer la division de 13 par 11. Donner une troncature au millième du quotient.

c. Peut-on prévoir quels seront les quinzième et vingtième chiffres après la virgule si l'on poursuit la division de 13 par 11 ?

2 On considère le nombre $a = 3,128282828\dots$ dont la partie décimale se poursuit par une alternance sans fin de 2 et de 8.

a. Calculer la différence $1000a - 10a$.

b. En déduire que le nombre a est un nombre rationnel que l'on précisera.

72 Écrire sous la forme d'un seul quotient chacune des expressions suivantes :

$$A = \frac{2x+3}{10} - \frac{x}{5}$$

$$B = \frac{4x}{3} + \frac{x+1}{12}$$

$$C = \frac{5x}{6} - \frac{7x-3}{12}$$

$$D = \frac{x-6}{4} - \frac{3x+2}{8}$$

73 Écrire sous la forme d'un seul quotient chacune des expressions suivantes :

$$A = \frac{x+2}{9} + \frac{5x-1}{4}$$

$$B = \frac{7x+3}{5} - \frac{x+4}{2}$$

$$C = \frac{3x+1}{4} + \frac{x+7}{3}$$

$$D = \frac{5-2x}{8} - \frac{4x+9}{3}$$

74 Stéphane et Martin ont chacun la même bouteille.

Stéphane commence par boire le quart du volume d'eau contenue dans sa bouteille, puis il boit les trois huitièmes du reste. Martin commence par boire le tiers du volume d'eau contenue dans sa bouteille, puis les deux septièmes du reste. Lequel des deux garçons a bu le plus d'eau ?

75 Nombre parfait

Un nombre parfait est un nombre entier naturel égal à la somme de tous ses diviseurs excepté lui-même.

1 Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.

2 Le nombre 18 est-il parfait ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

Les cinq premiers nombres parfaits sont 6, 28, 496, 8 128 et 33 550 336 !

Un nombre **abondant** est un nombre entier naturel inférieur à la somme de tous ses diviseurs excepté lui-même.

Un nombre **déficient** est un nombre entier naturel supérieur à la somme de ses diviseurs excepté lui-même.

76 Nombres amicaux

On dit que deux nombres entiers a et b sont amicaux lorsque la somme des diviseurs de l'un (excepté lui-même) est égale à l'autre nombre.

1 Montrer que 284 et 220 sont deux nombres amicaux.

2 Les nombres 75 et 48 sont-ils des nombres amicaux ?

77 Critère de divisibilité par 11

1 Vérifier que les nombres 638 et 3 465 sont divisibles par 11.

2 Le nombre 638 peut s'écrire : $6 \times 100 + 3 \times 10 + 8$.

a. Vérifier les égalités suivantes :

$$100 = 9 \times 11 + 1$$

$$10 = 11 - 1$$

b. En déduire que $638 = 11 \times q + (8 - 3 + 6)$ avec $q = 6 \times 9 + 3 \times 1$.

c. En déduire que si la somme $8 - 3 + 6$ est un multiple de 11, alors 638 est un multiple de 11.

3 a. Vérifier que $1000 = 11 \times 91 - 1$.

b. En déduire que $3\,465 = 11 \times q + (5 - 6 + 4 - 3)$ avec $q = 3 \times 91 + 4 \times 9 + 6 \times 1$.

c. En déduire que si la somme $5 - 6 + 4 - 3$ est un multiple de 11, alors 3 465 est un multiple de 11.

4 a. Vérifier que $10\,000 = 909 \times 11 + 1$.

b. Comment peut-on savoir si 71 632 est divisible par 11 sans effectuer la division de 71 632 par 11 ?

5 Soit S la somme algébrique des chiffres d'un nombre N telle que :

$S = (\text{chiffre des unités}) - (\text{chiffre des dizaines}) + (\text{chiffre des centaines}) - (\text{chiffre des unités de mille}) + (\text{chiffre des dizaines de mille}) - \dots$

On admet que si S est un multiple de 11, alors le nombre N est aussi un multiple de 11 et que si S n'est pas un multiple de 11, alors N n'est pas un multiple de 11.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le chiffre manquant pour que le nombre N soit un multiple de 11.

a. $N = 4 \square 18$

b. $N = 7 \square 802$

c. $N = 142\,63 \square$

d. $N = 9\,000 \square 10$

78 1 Écrire une fraction égale à un nombre entier et dont le dénominateur est 7.

2 Écrire une fraction égale à un nombre décimal non entier et dont le dénominateur est 18.

3 Écrire une fraction égale à un nombre rationnel non décimal et dont le dénominateur est 30.

79 1 Déterminer le plus grand diviseur commun aux nombres 2940 et 2100.

2 En déduire le plus grand diviseur commun aux nombres 2940, 2100 et 1092.

80 Déterminer tous les diviseurs positifs communs aux trois nombres 108, 70 et 126.

81 Soit la fraction : $A = \frac{45 \square}{357}$.

Déterminer le chiffre manquant pour que la fraction A soit irréductible. Donner toutes les possibilités.

Exercices

- 82** Effectuer chacun des calculs suivants (on pourra commencer par déterminer les fractions irréductibles égales à chaque fraction) :

$$A = \frac{1\,737}{1\,544} + \frac{735}{2\,520}$$

$$B = \frac{3\,700}{2\,072} \times \frac{5\,341}{1\,635}$$

83 Une démonstration

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, on utilise un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire que l'on commence par supposer que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, puis on démontre que cette supposition conduit à une contradiction, donc que cette supposition est fausse.

A Résultats préliminaires

- 1 a.** Quels sont les différents restes possibles dans la division euclidienne d'un nombre entier n par 2 ?
- b.** En déduire que, quel que soit le nombre entier n , on a $n = 2q$ ou $n = 2q + 1$, q étant un nombre entier.
- c.** Comment appelle-t-on les nombres de la forme $2q$? Comment appelle-t-on les nombres de la forme $2q + 1$?
- 2** Démontrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair et que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

B Démonstration

- 1** Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il existe une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ telle que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
 - a.** Justifier l'égalité : $p^2 = 2q^2$.
 - b.** En déduire que p^2 est un nombre pair.
 - c.** Utiliser la partie **A** pour montrer que p est lui-même un nombre pair. On pose alors : $p = 2n$, n étant un nombre entier.
 - d.** Expliquer pourquoi le nombre q est pair également. On appellera m le nombre entier tel que : $q = 2m$.
- 2** Que peut-on dire alors de la fraction $\frac{p}{q}$? Expliquer pourquoi cette conclusion est en contradiction avec l'hypothèse concernant la fraction $\frac{p}{q}$.
- 3** Conclure.

- 84** **1** Déterminer deux nombres entiers naturels x et y multiples de 11 et dont la somme est égale à 132. Combien a-t-on de possibilités sachant que x est plus grand que y ?

- 2** Reprendre la question précédente en considérant que 11 est le plus grand diviseur commun à x et y .

- 85** On souhaite trouver deux nombres entiers naturels a et b premiers entre eux tels que : $a > b$ et $a + b = 10$. Combien y a-t-il de possibilités ?

86 Fraction irréductible et repère

On considère la fraction $\frac{92}{115}$.

- 1** Placer le point de coordonnées $(92 ; 115)$ dans un repère (O, I, J) en prenant 1 cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

- 2 a.** Déterminer la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ égale à $\frac{92}{115}$.

- b.** Placer dans le repère le point de coordonnées $(a ; b)$.

- 3 a.** Déterminer trois autres fractions égales à $\frac{92}{115}$.

- b.** Placer dans le repère précédent les points dont les abscisses sont les numérateurs de ces fractions et les ordonnées sont les dénominateurs correspondants.

- c.** Que remarque-t-on ?

- 4** Expliquer comment utiliser un repère pour trouver les fractions égales à une fraction donnée.

- 87** Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il doit découper dans ces plaques des carrés tous identiques de façon à ce qu'il n'y ait aucune perte de métal.

- 1 a.** Quelles sont toutes les longueurs possibles du côté d'un carré, sachant que ces longueurs doivent être égales à un nombre entier de centimètres ?

- b.** Calculer dans chaque cas le nombre de carrés que l'on peut découper dans une plaque.

- 2** Déterminer la dimension des carrés pour que le nombre de carrés découpés dans une plaque soit le plus petit possible.

- 88** Un photographe doit réaliser une exposition en présentant ses œuvres sur des panneaux contenant chacun un même nombre de photos de paysages et un même nombre de portraits. Il dispose de 224 photos de paysage et de 288 portraits.

- 1** Combien peut-il réaliser de panneaux en utilisant toutes ses photos sachant qu'il ne veut pas placer plus de 40 photos par panneau ? Donner toutes les possibilités.

- 2** Indiquer dans chacun des cas, le nombre de photos de paysage et le nombre de portraits affichés sur un panneau.

- 89** La longueur d'un terrain rectangulaire est égale à 1 309 m et sa largeur est égale à 1 001 m. On souhaite entourer ce terrain d'arbustes régulièrement espacés et de telle manière qu'il y ait un arbuste planté à chaque sommet du rectangle. Calculer le nombre d'arbustes nécessaires pour entourer ce terrain sachant que la distance entre deux arbustes consécutifs est un nombre entier de mètres compris entre 3 et 8 mètres.



- 90** Une boîte a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions 48 cm, 40 cm et 72 cm. On souhaite remplir cette boîte avec des cubes identiques dont la longueur de l'arête est un nombre entier de centimètres.

- 1 Quelle est la plus grande longueur possible pour l'arête d'un cube ?
- 2 Combien de cubes seront-ils alors nécessaires pour remplir la boîte ?



Argumenter et débattre

- 91** On considère l'expression : $A = \frac{\frac{n}{2} - \frac{n}{3}}{\frac{n}{4} - \frac{n}{5}}$.

- 1 Calculer A dans chacun des cas suivants :

- | | |
|-------------|----------------------|
| a. $n = 2$ | b. $n = 9$ |
| c. $n = -4$ | d. $n = \frac{2}{3}$ |

- 2 Pouvait-on prévoir ces résultats sans effectuer les calculs précédents ?

- 92** 1 a. Choisir trois nombres entiers consécutifs. Calculer leur somme et vérifier que cette somme est un multiple de 3.
b. Recommencer avec trois autres nombres entiers consécutifs.
c. Expliquer pourquoi la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

- 2 Peut-on également affirmer que la somme de quatre nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 4, que la somme de cinq nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 5, etc. ?

- 93** Si le 1^{er} mars est un mardi, peut-on savoir à quel jour de la semaine correspondra le 31 décembre de la même année ?

Vrai ou faux

- a. La somme de deux nombres entiers est un nombre entier.
- b. La somme de deux nombres décimaux peut être égale à un nombre entier.
- c. La somme de deux nombres rationnels est égale à un nombre rationnel.
- d. Le double d'un nombre décimal est un nombre entier.
- e. Deux nombres premiers sont toujours premiers entre eux.
- f. Deux nombres premiers entre eux sont deux nombres premiers.
- g. Deux nombres pairs ne sont jamais premiers entre eux.
- h. Deux nombres impairs sont toujours premiers entre eux.

POUR LES CURIEUX

Numéro INSEE

En France, chaque personne est identifiée par un numéro à 15 chiffres composé de la façon suivante :

- le premier chiffre est 1 si la personne est de sexe masculin et 2 si elle est de sexe féminin ;
- les deux chiffres suivants correspondent aux deux derniers chiffres de l'année de naissance (par exemple : 94 si la personne est née en 1994) ;
- les deux chiffres suivants correspondent au mois de naissance (par exemple : 05 si la personne est née en mai) ;
- les cinq chiffres suivants correspondent au lieu de naissance (département et commune ou 99 suivi du code du pays pour des personnes nées à l'étranger) ;
- les trois chiffres suivants correspondent au numéro d'enregistrement de la naissance sur le registre de la commune ;
- les deux derniers chiffres permettent de contrôler que le numéro a été correctement transcrit. On dit que ces chiffres représentent **une clef de contrôle**.

Si on désigne par N le numéro composé des treize premiers chiffres et par r le reste de la division euclidienne de N par 97, la clef de contrôle est égale à la différence $97 - r$.

- 1 Calculer la clef correspondant au numéro :
2 90 11 45 781 964
- 2 Demander à une personne de votre entourage son numéro INSEE et calculer la clef de son numéro.
- 3 Pour les départements de la Corse (2A et 2B), le nombre N utilisé pour le calcul de la clef est obtenu en remplaçant les lettres A et B par 0, puis en soustrayant au nombre à treize chiffres ainsi obtenu 1 000 000 pour le département 2A et 2 000 000 pour le département 2B.

Calculer la clef correspondant au numéro :

2 81 10 2A 125 009



Calculer le PGCD de deux nombres

On se propose de calculer le plus grand diviseur commun aux nombres 1 326 et 546.

a. On entre le plus grand nombre dans la cellule A1 et l'autre nombre dans la cellule B1.

Taper 1326 dans la cellule A1 et 546 dans la cellule B1.

	A	B	C
1	1326	546	

1 Avec l'algorithme des différences

b. On entre dans la cellule A2 le plus petit des deux nombres.

Entrer la formule =MIN(A1;B1) dans la cellule A2.

	A	B	C
1	1326	546	
2	=MIN(A1;B1)		

c. On calcule la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres.

Entrer la formule =MAX(A1;B1)-MIN(A1;B1) dans la cellule B2.

	A	B	C
1	1326	546	
2	546	=MAX(A1;B1)-MIN(A1;B1)	

d. On étend les formules entrées en A2 et B2 jusqu'à obtenir une différence nulle dans la colonne B.

Sélectionner les cellules A2 et B2, puis positionner le curseur sur le coin en bas à droite de la cellule B2. Étirer la croix noire jusqu'à obtenir une différence nulle dans la colonne B.

	A	B	C
1	1326	546	
2	546	780	
3	546	234	
4	234	312	
5	234	78	
6	78	156	
7	78	78	
8	78	0	

e. Le plus grand diviseur commun est la dernière différence non nulle.

Lire le nombre dans la cellule B7.

PGCD (1326 ; 546) est donc le nombre situé en B7, soit **PGCD (1326 ; 546) = 78**.

2 Avec l'algorithme d'Euclide

b. On calcule dans la cellule C1 le reste de la division euclidienne du nombre entré en A1 par le nombre entré en B1.

Entrer la formule =MOD(A1;B1) dans la cellule C1.

	A	B	C
1	1326	546	=MOD(A1;B1)

c. On entre le diviseur de la division euclidienne dans la cellule A2 et le reste dans la cellule B2.

Entrer dans la cellule A2 la formule =B1
Entrer dans la cellule B2 la formule =C1

	A	B	C	D
1	1326	546	234	
2	=B1			

d. On étend en C2 la formule entrée en C1.

Sélectionner la cellule C1, puis étirer la croix noire située en bas à droite de la cellule C1 jusqu'en C2.

	A	B	C	D
1	1326	546	234	
2	546	234	78	

e. On étend les formules entrées en A2, B2 et C2 jusqu'à obtenir un reste nul dans la colonne C.

Sélectionner les cellules A2, B2 et C2, puis étirer la croix noire jusqu'à obtenir un reste nul dans la colonne C.

	A	B	C	D
1	1326	546	234	
2	546	234	78	
3	234	78	0	

f. Le plus grand diviseur commun est le dernier reste non nul.

Lire le nombre dans la cellule C2.

PGCD (1326 ; 546) est donc le nombre situé en C2, soit **PGCD (1326 ; 546) = 78**.

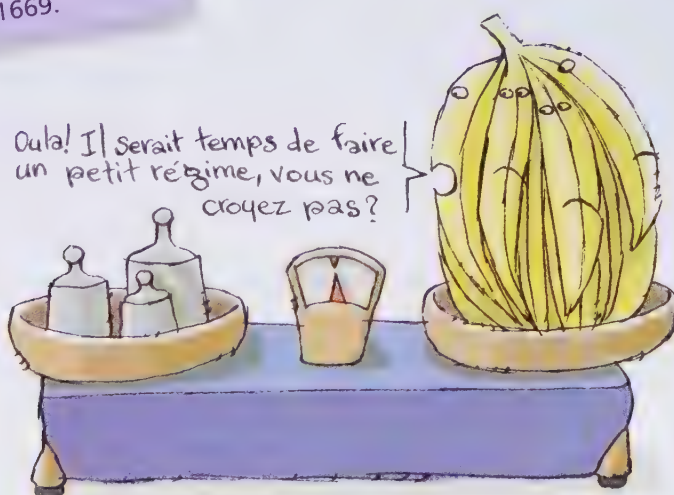
2

Équations et inéquations Systèmes de deux équations

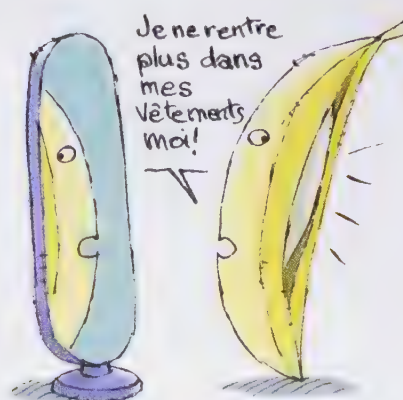


La **balance à deux plateaux** a été inventée par le mathématicien **Roberval** (1602-1675) et présentée à l'Académie des sciences le 21 août 1669.

D'abord, on place l'**objet à peser** sur un plateau, puis on met sur l'autre plateau une masse égale ou supérieure à celle de l'objet. Ensuite on complète les plateaux en ajoutant des masses jusqu'à l'**équilibre des deux plateaux**. Il faut alors **résoudre une équation** pour connaître la masse de l'objet !

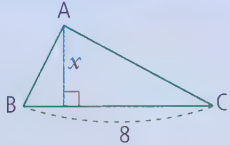


Le mathématicien perse **al-Khwarizmi** (env. 780-850) utilisait le mot « **chaq** » qui signifie « **chose** » dans ses équations. Traduit en espagnol, ce mot est devenu « **xai** » et aujourd'hui cela correspond à notre **x**.



QCM

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	Pour $x = -2$, on a : $2x(x-1) =$	-12	0	12
2	On donne $E = (2x+5)(x-3)$. Pour $x = 1$, on a : $E =$	-14	5	-16
3	 L'aire du triangle ABC est égale à :	$8x$	$\frac{8+x}{2}$	$4x$
4	Dans une salle de spectacles, la carte annuelle d'abonnement coûte 50 €. Elle permet de bénéficier d'un tarif réduit à 9 € pour chaque spectacle. Un abonné assistant à x spectacles pendant l'année paiera (en euros) :	$9 - 50x$	$9x + 50$	$9x - 50$
5	La solution de l'équation $4x + 1 = 5$ est le nombre :	1,5	1	4
6	Le nombre 4 est la solution de l'équation :	$4x = 0$	$5x + 23 = -1 - x$	$2x - 3 = x + 1$
7	Si $x < 5$, alors :	$x < 4$	$-2x < -10$	$x + 3 < 8$
8	Si $3x \leq 12$, alors :	$-3x \leq -12$	$x \leq 4$	$3x - 1 \geq 11$
9	Si $-5x \geq 20$, alors :	$x \geq -4$	$x \leq -4$	$x \geq 4$
10	Parmi les nombres proposés, le seul qui vérifie l'inégalité $-3 + x < 7$ est :	12	-2	10
11	On donne $F = -3x + 5y$. Pour $x = 3$ et $y = -2$, on a : $F =$	1	-19	3

Exercice 1 Développer et réduire chacune des expressions ci-dessous :

$$A = 5(x-2) + 7(4-8x)$$

$$B = 2(4-x) - 3(x+6)$$

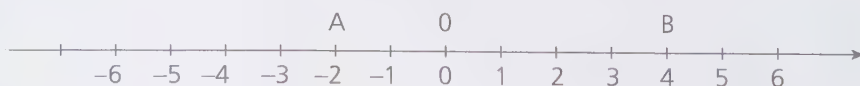
$$C = (x+3)(2-x) + x(x-7)$$

Exercice 2 En multipliant par 2 la somme d'un nombre et de 5, on obtient un résultat égal au triple de ce nombre.

- Écrire une équation permettant de traduire l'énoncé ci-dessus.
- Résoudre cette équation. En déduire le nombre inconnu de l'énoncé.

Exercice 3 a. Reproduire la droite graduée ci-dessus, puis :

- colorier en rouge la portion de la droite graduée correspondant aux nombres x vérifiant : $x \leq 2$.
- colorier en vert la portion de la droite graduée correspondant aux nombres x vérifiant : $x \geq -5$.



- Donner un encadrement des abscisses des points appartenant au segment [AB].

Activité 1 Mise en équation d'un problème

Arthur, le marchand de glaces, vend des cornets à une boule à 1,20 euros l'unité et des cornets à deux boules à 1,80 euros l'unité. Aujourd'hui, il a vendu 200 cornets et sa recette s'élève à 312 euros. On note x le nombre de cornets à une boule.

- 1
 - a. Que représente l'expression $1,2x$?
 - b. Que représente l'expression $200 - x$? Que représente l'expression $1,8(200 - x)$?
- 2
 - a. Traduire par une équation l'information : « La recette d'Arthur s'élève à 312 euros ».
 - b. Résoudre l'équation précédente. En déduire le nombre de cornets de chaque sorte vendus.

Activité 2 Inéquations

Une inégalité dans laquelle figure une inconnue est appelée une **inéquation**.

On considère l'inéquation $2x - 3 \leq 7$, dans laquelle x désigne un nombre inconnu. Une valeur de x pour laquelle l'inégalité $2x - 3 \leq 7$ est vraie est appelée une **solution** de l'inéquation $2x - 3 \leq 7$.

- 1
 - a. Recopier et compléter le tableau ci-contre :
 - b. L'inéquation $2x - 3 \leq 7$ a-t-elle une seule solution ? Si non, en donner cinq solutions.

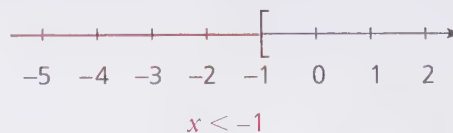
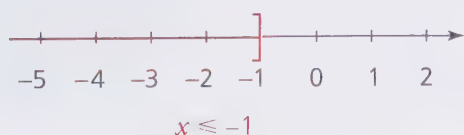
x	-5	-2	0	5	8	9,5
$2x - 3$						

- 2
 - a. Justifier chacune des étapes de calcul suivantes permettant de résoudre l'inéquation $2x - 3 \leq 7$:

$$\begin{array}{lcl}
 2x - 3 \leq 7 & & \text{Étape 1} \\
 2x - 3 + 3 \leq 7 + 3 & \leftarrow & \text{Étape 2} \\
 2x \leq 10 & \leftarrow & \text{Étape 3} \\
 2x \times \frac{1}{2} \leq 10 \times \frac{1}{2} & \leftarrow & \text{Étape 4} \\
 x \leq 5 & \leftarrow &
 \end{array}$$

- b. Quelles sont les solutions de l'inéquation $2x - 3 \leq 7$?
 - c. Le nombre 5 est-il solution de l'inéquation $2x - 3 \leq 7$? Justifier.
 - d. Résoudre l'inéquation : $2x - 3 < 7$.
- 3

On a colorié en rouge, sur chacune des droites graduées ci-dessous, les portions correspondant aux valeurs de x vérifiant les inéquations : $x \leq -1$ et $x < -1$.



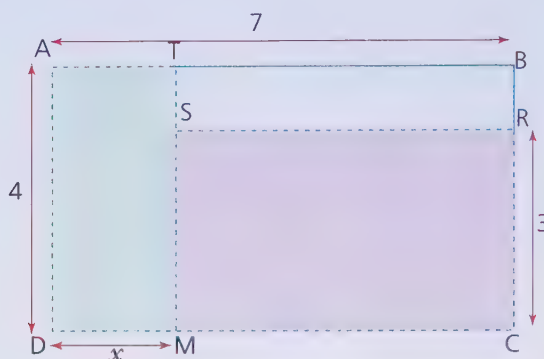
- a. Quelle différence y a-t-il entre ces deux représentations ? Quelle règle peut-on établir concernant les crochets ?
 - b. Représenter les solutions des inéquations $2x - 3 \leq 7$ et $2x - 3 < 7$ sur deux droites graduées.

Activité 3

Une inéquation pour un problème

ABCD est un rectangle et M est un point appartenant au côté [CD]. Toutes les longueurs sont exprimées en centimètres.

On souhaite savoir où placer le point M pour que l'aire du rectangle ADMT soit inférieure à l'aire du rectangle MCRS.



- 1 On appelle x la longueur DM. Exprimer l'aire du rectangle ADMT en fonction de x .
- 2 Justifier que l'expression de l'aire du rectangle MCRS en fonction de x est égale à $3(7 - x)$.
- 3 Quelle inéquation permet de traduire l'information suivante :
« L'aire du rectangle ADMT doit être inférieure à celle du rectangle MCRS » ?
- 4 Résoudre l'inéquation précédente, puis représenter ses solutions sur une droite graduée.
- 5 Conclure.

Activité 4

Équations du premier degré à deux inconnues – Systèmes

En achetant à l'unité trois cahiers et deux stylos dans une papeterie, Solène paie 10,50 euros.

- 1 On note x le prix d'un cahier et y le prix d'un stylo.
 - a. Traduire l'information précédente par une équation à deux inconnues x et y .
 - b. Exprimer x en fonction de y , puis y en fonction de x .
 - c. En supposant que le prix d'un cahier est 2,20 euros, calculer le prix d'un stylo.
 - d. En supposant que le prix d'un stylo est 1,80 euros, calculer le prix d'un cahier.
 - e. Peut-on connaître de façon certaine le prix d'un cahier et celui d'un stylo uniquement à partir de l'équation à deux inconnues x et y ?



- 2 Dans la même papeterie, Benjamin paie 14 euros pour l'achat de cinq cahiers et d'un stylo identiques à ceux de Solène. Traduire l'information précédente par une équation à deux inconnues x et y .

- 3 Lorsque les équations sont présentées sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10,5 \\ 5x + y = 14 \end{cases}$$

on dit que l'on a un **système de deux équations** ($3x + 2y = 10,5$ et $5x + y = 14$) à **deux inconnues** (x et y). Il permet de traduire simultanément les deux informations données précédemment.

a. Quelle information la première équation traduit-elle ?

Quelle information la deuxième équation traduit-elle ?

b. Un couple de nombres (x ; y) est une **solution** de ce système si x et y vérifient chacune des deux équations. Le couple ($2,3$; $1,8$) est-il une solution de ce système ? Que dire du couple ($2,2$; 3) ? Que dire du couple ($2,5$; $1,5$) ?

Le système
$$\begin{cases} 3x + 2y = 10,5 \\ 5x + y = 14 \end{cases}$$

pourra être interprété graphiquement dans le chapitre 8 page 138.

Activité 5 Résolution d'un système

On veut résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10,5 & (1) \\ 5x + y = 14 & (2) \end{cases}$$

Pour cela, il faut trouver tous les couples de nombres (x ; y) qui vérifient chacune des deux équations $3x + 2y = 10,5$ et $5x + y = 14$.

Résolution par substitution

a. Utiliser l'équation (2) pour exprimer y en fonction de x , puis remplacer y par cette expression dans l'équation (1).

b. Résoudre la nouvelle équation obtenue ; quelle valeur obtient-on pour x ?

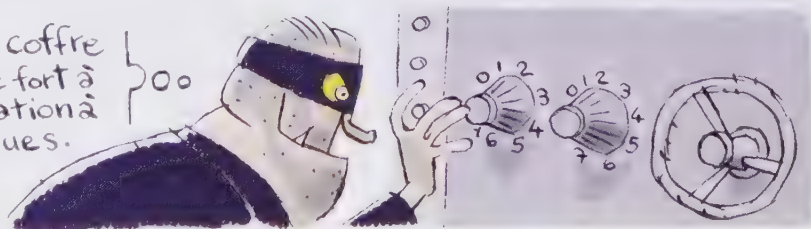
c. Calculer alors y .

d. Vérifier que le couple de nombres (x ; y) trouvé est bien une solution du système proposé.

e. Quelle est la solution de ce système ?

Cette méthode est dite **par substitution** car, dans une des deux équations, on substitue à y une nouvelle expression en fonction de x .

Hum ! Ce coffre ressemble fort à une équation à 2 inconnues.



Résolution par combinaison

a. Quelle nouvelle équation, que l'on appellera (2'), obtient-on en multipliant par -2 chaque membre de l'équation (2) ?

b. Additionner membre à membre les équations (1) et (2'), puis en déduire la valeur de x .

c. Déterminer la valeur de y .

d. Vérifier que le couple de nombres (x ; y) trouvé est bien solution du système proposé.

Cette méthode est dite **par combinaison** car on essaie de trouver une combinaison entre les deux équations afin qu'une des inconnues disparaisse quand on les additionne.

A Équations du premier degré à une inconnue

RAPPEL

Définitions

- Une **équation** est une égalité dans laquelle figure un nombre inconnu. On désigne en général ce nombre inconnu par une lettre, et on l'appelle l'**inconnue**.
- Une valeur de ce nombre pour laquelle l'égalité est vraie est une **solution** de l'équation.

Exemple

$3 - 4x = 6(2 - x)$ est une équation du premier degré à une inconnue x .

$$3 - 4x = 6(2 - x)$$

$3 - 4x$ est appelé le premier membre de l'équation

$6(2 - x)$ est appelé le second membre de l'équation

Une valeur de x pour laquelle l'égalité $3 - 4x = 6(2 - x)$ est vraie est une solution de l'équation $3 - 4x = 6(2 - x)$.

Définition

Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Exemple

Résoudre l'équation : $3 - 4x = 6(2 - x)$.

$$3 - 4x = 6(2 - x)$$

← On développe $6(2 - x)$.

$$3 - 4x = 12 - 6x$$

$$3 - 4x + 6x = 12 - 6x + 6x$$

← On ajoute $6x$ à chaque membre de l'équation.

$$3 + 2x = 12$$

← On réduit chaque membre de l'équation.

$$3 + 2x - 3 = 12 - 3$$

← On retranche 3 à chaque membre de l'équation.

$$2x = 9$$

← On réduit chaque membre de l'équation.

$$2x \times \frac{1}{2} = 9 \times \frac{1}{2}$$

← On multiplie par $\frac{1}{2}$ chaque membre de l'équation.

$$x = \frac{9}{2}$$

La solution de l'équation est le nombre $\frac{9}{2}$ (ou 4,5).

On dit que cette équation est du premier degré car le plus grand exposant de x est égal à 1.

Ces équations successives ont les mêmes solutions

B Inéquations du premier degré à une inconnue

1 Généralités

Définitions

- Une **inéquation** à une inconnue est une **inégalité** dans laquelle figure un nombre inconnu. On désigne en général ce nombre inconnu par une lettre, et on l'appelle l'**inconnue**.
- Une valeur de ce nombre pour laquelle l'inégalité est vraie est une **solution de l'inéquation**.

On dit que cette inéquation est du premier degré car le plus grand exposant de x est égal à 1.

Exemple

$5x + 3 \leq 9 - x$ est une inéquation du premier degré dont l'inconnue est x .

$$\underbrace{5x + 3}_{\text{premier membre}} \leq \underbrace{9 - x}_{\text{second membre}}$$

$5x + 3$ est appelé le premier membre de l'inéquation

$9 - x$ est appelé le second membre de l'inéquation

► Le nombre 2 n'est pas solution de l'inéquation $5x + 3 \leq 9 - x$.

En effet : $5 \times 2 + 3 = 10 + 3 = 13$ et $9 - 2 = 7$.

$13 > 7$ donc l'inégalité $5x + 3 \leq 9 - x$ n'est pas vraie pour $x = 2$.

► Le nombre -4 est solution de l'équation $5x + 3 \leq 9 - x$.

En effet : $5 \times (-4) + 3 = -20 + 3 = -17$ et $9 - (-4) = 9 + 4 = 13$.

$-17 < 13$ donc l'inégalité $5x + 3 \leq 9 - x$ est vraie pour $x = -4$.

2 Résoudre une inéquation

Définition

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes ses solutions.

Règle 1

Soient a , b et c trois nombres.

Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ et $a - c \leq b - c$.

Règle 2

Soient a , b et c trois nombres.

Si c est strictement positif et si $a \leq b$, alors $a \times c \leq b \times c$ et $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

Si c est strictement négatif et si $a \leq b$, alors $a \times c \geq b \times c$ et $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Exemples

► Résoudre l'inéquation $5x + 1 < 8$

$$5x + 1 < 8$$

$$5x + 1 - 1 < 8 - 1$$

$$5x < 7$$

$$5x \times \frac{1}{5} < 7 \times \frac{1}{5}$$

$$x < \frac{7}{5} \text{ soit } x < 1,4$$

← On applique la règle 1 →

← On applique la règle 2 →

► Résoudre l'inéquation $-3x + 5 \leq -4$

$$-3x + 5 \leq -4$$

$$-3x + 5 - 5 \leq -4 - 5$$

$$-3x \leq -9$$

$$-3x \times \left(-\frac{1}{3}\right) \geq -9 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$x \geq 3$$

Ces inéquations successives ont les mêmes solutions.

► Savoir-faire 1.
page 35

L'inégalité $x < 1,4$ est stricte : les solutions de l'inéquation $5x + 1 < 8$ sont donc les nombres strictement inférieurs à 1,4. Elles sont représentées en rouge sur la droite graduée.



Le crochet est tourné vers la partie non colorée car le nombre 1,4 n'est pas solution de l'inéquation.

Les solutions de l'inéquation $-3x + 5 \leq -4$ sont les nombres supérieurs ou égaux à 3. Elles sont représentées en rouge sur la droite graduée.



Le crochet est tourné vers la partie colorée car le nombre 3 est solution de l'inéquation.

C Systèmes

1 Équations à deux inconnues

Définitions

- Une **équation à deux inconnues** est une égalité dans laquelle figurent deux nombres inconnus désignés en général par deux lettres différentes.
- Un couple de valeurs de ces nombres pour lequel l'égalité est vraie est une **solution de l'équation**.

Exemple

$2x + y = -1$ est une équation à deux inconnues : x et y .

Il y a une infinité de couples qui sont solutions de l'équation $2x + y = -1$.

Par exemple, les couples $(0 ; -1)$; $(1 ; -3)$ ou $\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$ sont solutions de l'équation $2x + y = -1$.

Remarque : On peut exprimer y en fonction de x (dans l'exemple, on a : $y = -1 - 2x$). On peut aussi exprimer x en fonction de y (dans l'exemple, on a : $x = \frac{-1-y}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y$).

2 Systèmes de deux équations à deux inconnues

Définitions

- Un **système de deux équations à deux inconnues** du premier degré est la donnée simultanée de deux équations à deux inconnues du premier degré.
- Un couple de valeurs qui est solution de chacune de ces deux équations est appelé une **solution du système**.

Exemple

$\begin{cases} 5x + 3y = -2 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues (x et y).

► Pour $x = 5$ et $y = -9$, on a :

$$5x + 3y = 5 \times 5 + 3 \times (-9) = -2 \quad \leftarrow \text{Le couple } (5 ; -9) \text{ est solution de l'équation (1).}$$

$$\text{et } 2x + y = 2 \times 5 + (-9) = 1 \quad \leftarrow \text{Le couple } (5 ; -9) \text{ est solution de l'équation (2).}$$

Le couple $(5 ; -9)$ est solution de chacune des équations (1) et (2), donc il est solution du système proposé.

► Pour $x = -1$ et $y = 1$, on a :

$$5x + 3y = 5 \times (-1) + 3 \times 1 = -2 \quad \leftarrow \text{Le couple } (-1 ; 1) \text{ est solution de l'équation (1).}$$

$$\text{et } 2x + y = 2 \times (-1) + 1 = -1 \neq 1 \quad \leftarrow \text{Le couple } (-1 ; 1) \text{ n'est pas solution de l'équation (2).}$$

Le couple $(-1 ; 1)$ n'est pas solution du système proposé.

Définition

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est trouver toutes ses solutions, c'est-à-dire trouver tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient chacune des deux équations.

Attention !
L'ordre des termes d'un couple est important.
Par exemple :
 $(5 ; -9) \neq (-9 ; 5)$.

Savoir-faire 1 Résoudre une inéquation du 1^{er} degré à une inconnue

Énoncé Résoudre l'inéquation $-9x + 4 < 2(1 - 3x)$.

Solution

Méthode Pour trouver les solutions d'une inéquation de ce type, on se ramène à une inéquation d'inconnue x de la forme $ax < b$.

Pour cela, on **isole** x en transformant l'inéquation proposée en inéquations successives ayant les mêmes solutions grâce aux règles 1 et 2 du cours.

Attention : – si a est strictement **positif**, l'inégalité $ax < b$ se traduit par $x < \frac{b}{a}$;
– si a est strictement **négatif**, l'inégalité $ax < b$ se traduit par $x > \frac{b}{a}$.

$$-9x + 4 < 2(1 - 3x)$$

$$-9x + 4 < 2 - 6x$$

$$-9x + 4 + 6x < 2 - 6x + 6x$$

$$-3x + 4 < 2$$

$$-3x + 4 - 4 < 2 - 4$$

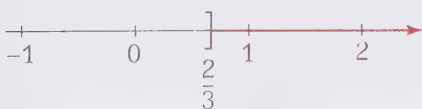
$$-3x < -2$$

$$-3x \times \left(-\frac{1}{3}\right) > -2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$x > \frac{2}{3}$$

Les solutions de l'inéquation $-9x + 4 < 2(1 - 3x)$ sont les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{3}$.

Elles sont représentées en rouge sur la droite graduée.



On développe $2(1 - 3x)$.

On supprime les « termes en x » dans le deuxième membre de l'inéquation en ajoutant $6x$ à chaque membre.

On réduit chaque membre de l'inéquation.

On isole le « terme en x » dans le premier membre de l'inéquation en retranchant 4 à chaque membre.

On réduit chaque membre de l'inéquation.

On multiplie chaque membre de l'inéquation par le nombre négatif $-\frac{1}{3}$, donc l'ordre est inversé.

On conclut.

Le crochet est tourné vers la partie non colorée car le nombre $\frac{2}{3}$ n'est pas solution de l'inéquation.

Savoir-faire 2 Mettre un problème en inéquation et le résoudre

Énoncé Un vidéo-club propose à ses clients deux formules de location de DVD :

- formule A : le client paie 5 € par DVD loué ;
- formule B : le client paie un abonnement annuel de 30 €, puis 3 € par DVD loué.

À partir de combien de DVD loués en une année la formule B est-elle plus intéressante que la formule A ?

Solution

Soit x le nombre de DVD loués en un an.

Avec la formule A, le montant, en euros, que devra payer le client est : $5x$.

Avec la formule B, le montant, en euros, que devra payer le client est : $3x + 30$.

La formule B sera plus intéressante que la formule A lorsque :

$$3x + 30 < 5x$$

$$3x + 30 - 5x < 5x - 5x$$

$$-2x + 30 < 0$$

$$-2x + 30 - 30 < 0 - 30$$

$$-2x < -30$$

$$-2x \times \frac{1}{-2} > -30 \times \frac{1}{-2}$$

$$x > 15$$

La formule B est plus intéressante que la formule A à partir de 16 DVD loués sur une année.

On choisit l'inconnue selon la question posée dans l'énoncé.

On exprime les données de l'énoncé en fonction de x .

On traduit l'information suivante : « la formule B est plus intéressante que la formule A » par l'inéquation d'inconnue x . On a donc mis le problème en inéquation.

On résout l'inéquation trouvée.

On interprète le résultat.

Savoir-faire

3

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues

Énoncé 1 Résoudre par la méthode de substitution le système :

$$\begin{cases} x - y = 4 & (1) \\ 2x + 5y = -6 & (2) \end{cases}$$

Solution

De l'équation (1), on déduit que :

$$x = 4 + y.$$

On remplace x par $4 + y$ dans l'équation (2) :

$$2(4 + y) + 5y = -6$$

$$8 + 2y + 5y = -6$$

$$7y = -14$$

$$y = -2$$

On calcule x :

$$x = 4 + y = 4 + (-2) \text{ donc } x = 2.$$

On exprime une des deux inconnues (celle pour laquelle les calculs sont les plus simples ; ici c'est x) en fonction de l'autre grâce à l'une des deux équations du système.

On remplace cette inconnue par sa nouvelle expression dans l'autre équation.

On obtient ainsi une équation à une inconnue.

On résout l'équation.

On a trouvé la première inconnue (y).

On calcule l'autre inconnue (x).

On peut aussi dire :
« On substitue ».

Vérification

Pour $x = 2$ et $y = -2$, on a :

- $x - y = 2 - (-2) = 4$ donc

l'équation (1) est vérifiée.

- $2x + 5y = 2 \times 2 + 5(-2) = -6$ donc

l'équation (2) est vérifiée.

Le système proposé admet une seule solution : le couple $(2 ; -2)$.

On vérifie que le couple $(x ; y)$ obtenu est bien solution du système.

On conclut.

Énoncé 2 Résoudre par la méthode de combinaison le système :

$$\begin{cases} 6x - 5y = 3 & (1) \\ 2x - 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

Solution

On multiplie les deux membres de l'équation (2) par (-3) et on obtient le système :

$$\begin{cases} 6x - 5y = 3 & (1) \\ -6x + 9y = -15 & (2') \end{cases}$$

On multiplie les deux membres de l'une des équations du système par un nombre choisi de telle sorte que, lorsqu'on additionne membre à membre les deux équations, une des deux inconnues disparaisse.

On additionne membre à membre les équations (1) et (2') et on obtient l'équation : $4y = -12$.

On effectue l'opération :

$$\begin{array}{r} 6x - 5y = 3 \\ + \quad -6x + 9y = -15 \\ \hline 0 + 4y = -12 \end{array}$$

On en déduit que : $y = -3$.

On résout l'équation obtenue pour obtenir la valeur de cette inconnue (y).

On multiplie les deux membres de l'équation (1) par (-3) , et les deux membres de l'équation (2) par 5 ; on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -18x + 15y = -9 \\ 10x - 15y = 25 \end{cases}$$

On trouve une nouvelle **combinaison** permettant de faire disparaître par addition ou par soustraction l'inconnue calculée précédemment.

On additionne membre à membre les équations de ce système. On obtient : $-8x = 16$.

On effectue l'opération :

$$\begin{array}{r} -18x + 15y = -9 \\ + \quad 10x - 15y = 25 \\ \hline -8x + 0 = 16 \end{array}$$

On en déduit que : $x = -2$.

On résout l'équation permettant d'obtenir la valeur de la 2^e inconnue (x).

Vérification

Pour $x = -2$ et $y = -3$, on a :

- $6x - 5y = 6 \times (-2) - 5 \times (-3) = 3$ donc l'équation (1) est vérifiée.

- $2x - 3y = 2 \times (-2) - 3 \times (-3) = 5$ donc l'équation (2) est vérifiée.

Le système proposé admet une seule solution : le couple $(-2 ; -3)$.

On vérifie que le couple $(x ; y)$ obtenu est bien solution du système.

On conclut.

4 Traduire et résoudre un problème par un système de deux équations à deux inconnues

Énoncé Un commerçant souhaite liquider son stock en vendant tous les pull-overs au même prix et tous les tee-shirts au même prix.

Le premier jour, la vente de 7 pull-overs et de 11 tee-shirts rapporte 147 euros.

Le deuxième jour, la vente de 9 pull-overs et 15 tee-shirts rapporte 195 euros.

Calculer le prix de chaque article.

Solution

On note x le prix d'un pull-over et y le prix d'un tee-shirt.

La recette du premier jour est donnée par l'équation :

$$7x + 11y = 147$$

La recette du deuxième jour est donnée par l'équation :

$$9x + 15y = 195$$

Pour connaître le prix de chaque article, il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 7x + 11y = 147 & (1) \\ 9x + 15y = 195 & (2) \end{cases}$$

- On multiplie les deux membres de l'équation (1) par (-9) et les deux membres de l'équation (2) par 7.

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} -63x - 99y = -1\,323 & (1') \\ 63x + 105y = 1\,365 & (2') \end{cases}$$

- On additionne membre à membre les équations (1') et (2'). On obtient : $6y = 42$.

On en déduit que : $y = 7$.

- On multiplie les deux membres de l'équation (1) par 15 et les deux membres de l'équation (2) par (-11) . On obtient le système :

$$\begin{cases} 105x + 165y = 2\,205 & (1'') \\ -99x - 165y = -2\,145 & (2'') \end{cases}$$

On additionne membre à membre les équations (1'') et (2''). On obtient : $6x = 60$.

On en déduit que : $x = 10$.

Vérification

Pour $x = 10$ et $y = 7$, on a :

$7x + 11y = 7 \times 10 + 11 \times 7 = 147$ donc l'équation (1) est vérifiée.

$9x + 15y = 9 \times 10 + 15 \times 7 = 195$ donc l'équation (2) est vérifiée.

Le système proposé admet une seule solution : le couple $(10 ; 7)$.

Un pull-over coûte 10 euros et un tee-shirt coûte 7 euros.

On choisit les inconnues selon la question posée dans l'énoncé.

On traduit la recette du premier jour par une équation.

On traduit la recette du deuxième jour par une équation.

On obtient un système de deux équations à deux inconnues.

On résout le système obtenu. On choisit ici la méthode de combinaison.

On conclut.

S'entraîner

Calcul littéral

1 On donne : $A = 3x - 11$. Calculer A pour :

- a. $x = 5$ b. $x = -8$
c. $x = 0$ d. $x = \frac{1}{3}$

2 On donne : $B = 3 - 7x$. Calculer B pour :

- a. $x = 8$ b. $x = 0$
c. $x = -\frac{2}{7}$ d. $x = -\frac{1}{14}$

3 On donne : $C = -4(x - 3)$. Calculer C pour :

- a. $x = 11$ b. $x = -5$
c. $x = 3$ d. $x = 0$

Pour les exercices **4** à **6**, développer chaque expression.

- 4** a. $7(x + 2)$ b. $-5(3 + x)$
c. $4(x - 13)$ d. $-8(-3 - x)$

- 5** a. $12(5x + 1)$ b. $-3(2 + 5x)$
c. $-5(4 + 4x)$ d. $6(-9 - 11x)$

- 6** a. $\frac{1}{2}(4x + 2)$ b. $-\frac{2}{9}(18 - 9x)$
c. $-\frac{3}{5}(-4x + 10)$ d. $-7(-\frac{2}{3} - \frac{5}{7})x$

Pour les exercices **7** à **9**, développer puis réduire chaque expression.

- 7** a. $9 + 2(x + 3)$ b. $7(6 + 3x) + 12x$
c. $-5x + 2(4 - 8x)$ d. $-4(7x - 7) - 5$

- 8** a. $5 - 3(x + 1)$ b. $-8x - 10(7 + x)$
c. $3(x + 7) + 5(x - 1)$ d. $-2(8 - x) - 12(2 - 3x)$

- 9** a. $\frac{5}{8}(x + 16) - 15$
b. $\frac{1}{4}x - 2(\frac{3}{2} - \frac{5}{8}x)$
c. $-\frac{1}{2}(4x - \frac{2}{3}) - 2(\frac{1}{3} + 4x)$
d. $-(3 - \frac{3}{10}x) + (-\frac{7}{10}x + 11)$

Équations et problèmes

10 Vrai ou faux

- a. L'équation $-2x + 7 = -1$ a pour solution -4 .
b. L'équation $-4x - 9 = 6 + x$ a pour solution -3 .

Pour les exercices **11** à **15**, il n'est pas demandé de résoudre les équations.

11 ① Justifier que le nombre -2 n'est pas solution de l'équation $5x - 1 = 4x + 9$.

② Le nombre 10 est-il solution de l'équation $5x - 1 = 4x + 9$? Justifier la réponse.

12 Justifier que le nombre 3 est solution de chacune des équations suivantes.

- a. $5x - 2 = 13$ b. $3(x - 5) = -12 + 2x$
c. $\frac{4}{5-x} = \frac{x+5}{4}$

13 ① Écrire trois équations admettant -1 pour solution.

② Écrire trois équations admettant $2,5$ pour solution.

③ Écrire trois équations admettant $\frac{3}{4}$ pour solution.

14 Traduire chacun des énoncés suivants par une équation d'inconnue x .

a. On ajoute à un nombre x les deux tiers de sa valeur. On obtient 5.

b. On ajoute $\frac{2}{3}$ à un nombre x . On obtient 5.

c. En calculant les cinq tiers d'un nombre x , on obtient 5.

15 « Le père de Martin a 25 ans de plus que son fils. Dans 10 ans, l'âge du père sera 2 fois celui de son fils. Quel est l'âge de Martin ? Quel est l'âge de son père ? »

On note x l'âge de Martin. Laquelle des trois équations proposées permet de traduire le problème posé ?

- a. $x + 25 = 2(x + 10)$
b. $x + 35 = 2(x + 10)$
c. $x + 10 = 2x + 25$



Pour les exercices **16** à **18**, résoudre chaque équation.

- 16** a. $x + 5 = 3$ b. $7 + x = 2,5$
c. $3x + 4,5 = 2x$ d. $-5x + 7 = -3x$

- 17** a. $6x + 1 = 2x + 6$ b. $5x - 8 = 2 + 3x$
c. $2 - 5x = 1 + 6x$ d. $-4 + 8x = 3x - 9$

- 18** a. $3(x + 1) = x + 6$ b. $x + 35 = 2(x + 10)$
c. $-2(3x + 5) = 7 + x$ d. $2(7 - 2x) = -3(x - 7)$

Exercices

Pour les exercices 19 à 21, résoudre chaque équation.

- 19 a. $-2(3-2x) = x-8$
 b. $8(1+7x) = -3(5-2x)$
 c. $3-3(2x-7) = 2x-5(x-3)$
 d. $2x-3(2-2x) = 8(-x+1)+2$
- 20 a. $\frac{3}{4}x = 9$
 b. $\frac{2}{7}x + 3 = 2$
 c. $\frac{3}{5} + \frac{1}{2}x = \frac{8}{5}$
 d. $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} - \frac{1}{2}x$
- 21 a. $\frac{3}{5}\left(x - \frac{5}{7}\right) = \frac{3}{10}x$
 b. $\frac{1}{3}x = -2\left(\frac{1}{3}x - 2\right)$
 c. $8 + 4\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5}\left(-\frac{5}{8}x - 1\right)$
 d. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(-4x + \frac{2}{7}\right) = \frac{6}{7} - \frac{1}{4}x$

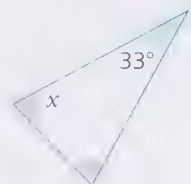
- 22 ① En ajoutant $\frac{3}{4}$ à un nombre, on obtient $-\frac{5}{12}$. Quel est ce nombre ?
 ② La différence d'un nombre et de son quart est égale à $\frac{7}{16}$. Quel est ce nombre ?
 ③ En calculant les deux tiers d'un nombre, on obtient 5. Quel est ce nombre ?

- 23 ① La différence d'un nombre et de 7 est égale à -3 . Quel est ce nombre ?
 ② Le triple de la somme d'un nombre et de 5 est égal à 12. Quel est ce nombre ?
 ③ La somme de 3 et d'un nombre est égale au double de ce nombre. Quel est ce nombre ?

- 24 Grand-père dit à ses petits-enfants : « Si je cuis 2 tartelettes pour chacun de vous, il me restera assez de pâte pour 3 tartelettes de plus. Mais si je voulais vous en faire 3 chacun, il me manquerait la pâte de 2 tartelettes. » Combien Grand-père a-t-il de petits-enfants ?

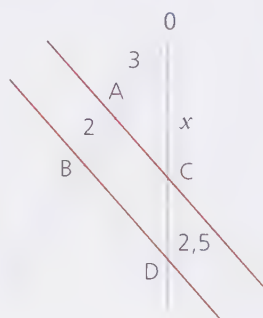
(D'après Kangourou 2006)

- 25 Quelle est la mesure de l'angle x dans le triangle isocèle ci-contre ?

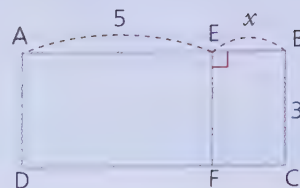


- 26 Sur la figure ci-contre, les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

- ① Écrire une équation qui permet de calculer x .
 ② Calculer x .



- 27 Sur la figure ci-contre, les longueurs sont exprimées en cm. Calculer x sachant que l'aire du rectangle ABCD est égale à $20,4 \text{ cm}^2$.



Inégalités

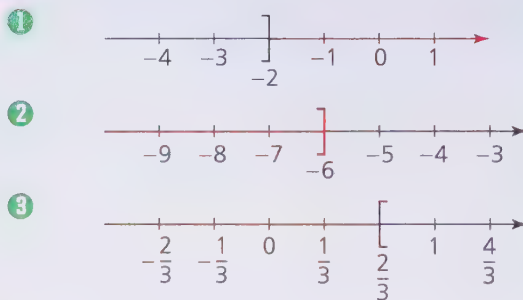
28 Vrai ou faux

- a. $-3 < 2$
 b. $5,3 \geq -1$
 c. $\pi \geq 3,14$
 d. $-\frac{1}{3} \geq -0,33$
 e. $-\frac{3}{4} < -\frac{4}{3}$
 f. $-7,5 \leq -7,5$

- 29 Dans chaque cas, indiquer les nombres entiers x qui vérifient l'encadrement proposé.

- a. $-3 \leq x < 2$
 b. $-2,4 < x < 1,5$
 c. $-7 < x \leq -5$
 d. $-\frac{8}{5} < x < \frac{4}{3}$
 e. $-\pi \leq x < \pi$
 f. $0 < x \leq \frac{9}{4}$

- 30 Pour chaque droite graduée, indiquer l'inégalité vérifiée par les abscisses x des points de la portion coloriée.



- 31 Dans chaque cas, tracer une droite graduée et colorier la portion correspondant aux points dont les abscisses x vérifient l'inégalité proposée.

- a. $x < 2$
 b. $x \geq -1$
 c. $x \leq \frac{1}{2}$
 d. $x > \pi$
 e. $x < 0$
 f. $x \leq -\frac{4}{3}$

- 32 On considère un nombre x tel que : $x < 6$. Recopier et compléter par le signe qui convient : $<$ ou $>$.

- a. $x+1 \dots 7$
 b. $x-6 \dots 0$
 c. $2x \dots 12$
 d. $-3x \dots -18$
 e. $\frac{x}{2} \dots 3$
 f. $\frac{x}{-3} \dots -2$

- 33 On considère un nombre x tel que : $x > -5$. Quelle inégalité peut-on alors écrire pour :

- a. $x+5$
 b. $x-6$
 c. $2x$
 d. $-4x$
 e. $\frac{x}{5}$
 f. $\frac{x}{-5}$

- 34 Soit x un nombre vérifiant l'inégalité : $3x+2 < 5$.

- ① Justifier alors l'inégalité : $3x < 3$.
 ② En déduire que : $x < 1$.

35 Soit un nombre x tel que : $-2x + 3 \leq 7$.

1 Justifier alors l'inégalité : $-2x \leq 4$.

2 En déduire que : $x \geq -2$.

36 **1** On considère un nombre x tel que : $5x - 6 > -1$.
Justifier alors l'inégalité : $x > 1$.

2 On considère un nombre x tel que : $-7x + 1 < 15$.
Justifier alors l'inégalité : $x > -2$.

37 **1** Quel nombre faut-il ajouter à chaque membre de l'inégalité $x - 8 < 12$ pour obtenir l'inégalité $x < 20$?

2 Par quel nombre faut-il multiplier chaque membre de l'inégalité $5x > 45$ pour obtenir l'inégalité $x > 9$?

3 Par quel nombre faut-il multiplier chaque membre de l'inégalité $-3x < 12$ pour obtenir l'inégalité $x > -4$?

38 **1** Quelles opérations doit-on effectuer sur chaque membre de l'inégalité $3x + 2 < 8$ pour obtenir l'inégalité $x < 2$?

2 Quelles opérations doit-on effectuer sur chaque membre de l'inégalité $-2x + 3 > -5$ pour obtenir l'inégalité $x < 4$?

3 Quelles opérations doit-on effectuer sur chaque membre de l'inégalité $7x - 1 > 9 - 3x$ pour obtenir l'inégalité $x > 1$?

Inéquations

39 **1** Justifier que l'inégalité $5x - 7 < 4$ est vraie lorsque x est égal à 2.

2 Justifier que l'inégalité $2x + 10 > 2$ est fausse lorsque x est égal à -4 .

3 L'inégalité $2x - 3 \leq 5$ est-elle vraie lorsque x est égal :
a. à 6 ? b. à 3 ? c. à 4 ?

40 **1** Justifier que le nombre 3 est solution de l'inéquation $-8x - 1 \leq 7$.

2 Le nombre -3 est-il solution de l'inéquation $-8x - 1 \leq 7$?
Le nombre -1 est-il solution de cette inéquation ? Le nombre 0 en est-il solution ?

41 Parmi les nombres -7 ; 0 ; -1 ; 8 et $-\frac{4}{3}$, quels sont ceux qui sont solutions de l'inéquation $7 - 3x > 11$?

42 Parmi les nombres 11 ; -4 ; $\frac{5}{7}$; 1 et -7 , quels sont ceux qui sont solutions de l'inéquation $9x - 6 \leq -1 + 2x$?

43 Le nombre 3 est solution de certaines des inéquations ci-dessous. Lesquelles ?

- a. $2 + 3x \geq -1$ b. $x - 6 < \frac{5}{7}$
c. $11 - 5x > 0$ d. $-15x - 3 < -8$
e. $x + 5 < 2 - 4x$ f. $5x + 2 < x - 15$

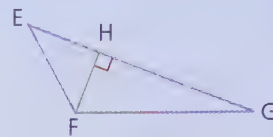
44 **1** Trouver trois nombres qui sont solutions de l'inéquation $5x - 11 \geq 4$.

2 Trouver trois nombres qui ne sont pas solutions de l'inéquation $-x + 3 < -7$.

45 **1** En ajoutant 3 à un nombre, la somme obtenue est supérieure à 43. Quelles sont les valeurs possibles de ce nombre ?

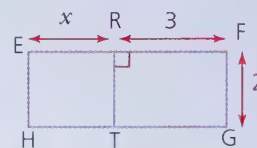
2 En multipliant un nombre par 5, le produit obtenu est inférieur à 125. Quelles sont les valeurs possibles de ce nombre ?

46 On donne : $EG = 6$ cm.
On pose : $FH = x$ (en cm).
Pour quelles valeurs de x l'aire du triangle EFG est-elle inférieure à 15 cm^2 ?



47 Sur la figure ci-dessous, les longueurs sont exprimées en centimètres.

Résoudre une inéquation afin de déterminer pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle EFGH est inférieure à 14 cm^2 .



48 Calcul mental

Associer à chaque inéquation ses solutions.

- 1** $x - 7 > 5$ a. $x < -12$
2 $13 + x < 1$ b. $x > -12$
3 $-5x < 60$ c. $x > 12$

Pour les exercices **49** et **50**, résoudre chaque inéquation, puis représenter ses solutions sur une droite graduée.

- 49** a. $x + 5 < 7$ b. $x - 6 > 11$
c. $3 + x < -6$ d. $13 - x \leq 12$

- 50** a. $2x < 8$ b. $5x < -15$
c. $-3x > 6$ d. $-4x < -20$

51 Associer à chaque inéquation ses solutions.

- 1** $-3x - 2 < 4$ a. $x < -2$
2 $7 + 3x > 13$ b. $x > -2$
3 $-5x + 2 > 12$ c. $x > 2$

Pour les exercices **52** à **54**, résoudre chaque inéquation, puis représenter ses solutions sur une droite graduée.

- 52** a. $2x + 1 > 7$ b. $-x + 4 < 3$
c. $\frac{3}{2} + x \leq \frac{1}{2}$ d. $7 - x \leq -12$

- 53** a. $9 + 4x \geq 7$ b. $x - \frac{4}{3} < \frac{5}{3}$
c. $5 - 2x \leq 9$ d. $-3x + 2 < -7$

- 54** a. $x < 7 - 6x$ b. $5x + 2 < x - 15$
c. $2 - 4x > 1 - 6x$ d. $-3x + \frac{2}{7} \geq -\frac{5}{7} - 2x$

55 Vu au brevet

On considère l'inéquation : $2x - 5 \leq \frac{3}{2} - 11x$.

- 1 Le nombre 0 est-il solution de cette inéquation ? Justifier.
- 2 Le nombre 1 est-il solution de cette inéquation ? Justifier.
- 3 a. Résoudre l'inéquation : $2x - 5 \leq \frac{3}{2} - 11x$.
- b. Représenter les solutions sur une droite graduée.

56 Vu au brevet

- 1 a. 60 est-il solution de l'inéquation $2,5x - 75 > 76$?
- b. Résoudre l'inéquation et représenter les solutions sur un axe. Hachurer la partie de l'axe qui ne correspond pas aux solutions.
- 2 Pendant la période estivale, un marchand de glaces a remarqué qu'il dépensait 75 euros par semaine pour faire, en moyenne, 150 glaces.
Sachant qu'une glace est vendue 2,50 euros, combien doit-il vendre de glaces, au minimum, dans la semaine pour avoir un bénéfice supérieur à 76 euros ?

- 57 1 Justifier que les inéquations $2x < 10 - 3x$ et $-5 - x > -7$ ont les mêmes solutions.

- 2 Reprendre la question précédente avec les inéquations $3 + 2x \geq 9$ et $5 - 3x \leq -1 - x$.

58 Vu au brevet

La société ALO propose un abonnement téléphonique de 17,40 € par mois et 0,20 € la minute de communication.
La société OLA propose un abonnement téléphonique de 14,20 € par mois et 0,35 € la minute de communication.
On désigne par x le nombre de minutes de communication par mois.

- 1 Exprimer en fonction de x le montant d'une facture de ALO, puis le montant d'une facture de OLA.
- 2 Pour quelles durées de communications mensuelles a-t-on intérêt à choisir ALO ?

Équations à deux inconnues

- 59 On considère l'équation à deux inconnues $x - 3y = 8$.

- 1 a. Exprimer x en fonction de y .
- b. Exprimer y en fonction de x .
- 2 Reprendre les questions précédentes pour l'équation $5x + y = -4$.

- 60 1 $2x + y = -4$ est une équation à deux inconnues (x et y).
Le couple de nombres $(-3 ; 2)$ est solution de cette équation. En effet, on a bien : $2 \times (-3) + 2 = -6 + 2 = -4$.
Le couple $(2 ; -3)$ est-il solution de cette équation ?
- 2 Le couple $(2 ; -1)$ est-il solution de l'équation $3x + y = 5$?
Le couple $(-1 ; 8)$ est-il solution de cette équation ?

- 61 1 Déterminer le nombre x tel que le couple $(x ; 6)$ soit solution de l'équation à deux inconnues $x - 2y = 5$.
- 2 Déterminer le nombre y tel que le couple $(1 ; y)$ soit solution de l'équation précédente.

- 62 1 Écrire une équation à deux inconnues x et y dont le couple $(4 ; -3)$ est solution.
- 2 Écrire une équation à deux inconnues x et y dont le couple $(-5 ; 2)$ est solution.

Résolution de systèmes d'équations Résolution de problèmes

- 63 1 Vérifier que le couple $(-3 ; 2)$ est solution de chacune des équations $x + 2y = 1$ et $-2x + y = 8$.

- 2 On considère le système de deux équations à deux inconnues suivant :
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x + y = 8 \end{cases}$$

Sans le résoudre, indiquer un couple qui en est solution.

- 64 En achetant 5 stylos et 2 cahiers, Julien a payé 11 euros.
Dans le même magasin, en achetant 3 stylos et 4 cahiers, Christine a payé 13,60 euros.

- 1 Lequel des systèmes proposés permet de traduire l'énoncé ci-dessus ?

a.
$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 4x + 3y = 13,60 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 3x + 4y = 13,60 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 5x + 4y = 11 \\ x + 2y = 13,60 \end{cases}$$

- 2 Vérifier que le couple $(1,2 ; 2,5)$ est solution de ce système.
- 3 En admettant que ce couple de nombres est le seul couple solution du système, déterminer le prix d'un stylo et d'un cahier.

- 65 1 Écrire un système de deux équations à deux inconnues permettant de traduire l'énoncé suivant : « La somme de deux nombres est égale à 78, et leur différence est égale à 32 ».

- 2 Vérifier que le couple $(55 ; 23)$ est solution de ce système. On admet que c'est le seul.

- 3 Quels sont les nombres dont la somme est égale à 78 et dont la différence est égale à 32 ?

- 66 1 Écrire un système de deux équations à deux inconnues x et y dont la solution est le couple de nombres $(2 ; 5)$.

- 2 Écrire un système de deux équations à deux inconnues x et y dont la solution est le couple de nombres $(-4 ; 3)$.

Pour les exercices 67 à 69, résoudre chaque système par la méthode de substitution.

67 a. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$

68 a. $\begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ x - 2y = -7 \end{cases}$ b. $\begin{cases} -8x + 2y = 3 \\ 7x - y = -4 \end{cases}$

69 a. $\begin{cases} -2x - 7y = 2 \\ x = 3 + y \end{cases}$ b. $\begin{cases} y = 3 - x \\ 5x + 2y = -3 \end{cases}$

Pour les exercices 70 à 72, résoudre chaque système par la méthode de combinaison.

70 a. $\begin{cases} 5x + 4y = -2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$

71 a. $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} -x + 10y = -1 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$

72 a. $\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ 5x + 3y = 6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x - 9y = 3 \\ -10x + 7y = -4 \end{cases}$

Pour les exercices 73 à 75, résoudre chaque système par la méthode de votre choix.

73 a. $\begin{cases} -x + y = -11 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -x + 5y = -1 \end{cases}$

74 a. $\begin{cases} 6x - 6y = 5 \\ -3x + 9y = -1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} -2x + 3y = 7 \\ -2x + 9y = -4 \end{cases}$

75 a. $\begin{cases} x = 4y + 2 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} -2y = 3 + 5x \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

76 Vu au brevet

On considère le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y = 5,5 \\ 3x + y = 4,05 \end{cases}$

- Le couple $(x = 2 ; y = 0,5)$ est-il solution de ce système ?
- Résoudre le système d'équations.
- À la boulangerie, Anatole achète 2 croissants et 3 pains au chocolat : il paie 5,50 €. Béatrice achète 3 croissants et 1 pain au chocolat et paie 4,05 €. Quel est le prix d'un croissant ? Quel est le prix d'un pain au chocolat ?

77 Vu au brevet

1 Résoudre le système : $\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 3x + 7y = 55,5 \end{cases}$

- 2 Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums ou des boîtes. Léa achète 6 boîtes et 5 albums et paie 57 € ; Hugo achète 3 boîtes et 7 albums et paie 55,50 €. Quel est le prix d'une boîte ? Quel est le prix d'un album ?

78 Si on additionne la longueur et la largeur d'un rectangle, on obtient 34 m ; si on les soustrait, on obtient 10 m.

- Traduire cet énoncé par un système de deux équations à deux inconnues.
- Résoudre ce système et en déduire les dimensions du rectangle.

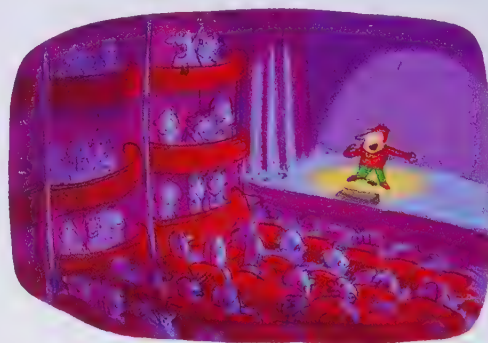
79 1 Déterminer les deux nombres entiers dont la somme est égale à 130 et la différence est égale à 44.

- 2 Déterminer les deux nombres entiers dont la somme est égale à 384 et tels que le plus grand est le triple du plus petit.

80 Une salle de spectacles, qui peut accueillir 3 000 personnes, propose des places « balcon » à 45 € et des places « orchestre » à 60 €. Lorsque la salle est pleine, la recette totale est égale à 162 000 €.

On note x le nombre de places « balcon » et y le nombre de places « orchestre ».

- Traduire les données de l'énoncé par un système de deux équations à deux inconnues.
- Résoudre le système précédent et en déduire le nombre de places de chaque catégorie.



81 Un commerçant dispose dans sa caisse de 40 billets. Il y a des billets de 10 euros et de 20 euros pour une valeur de 550 euros.

Calculer le nombre de billets de 20 euros.

82 Vu au brevet

Une fermière vend 3 canards et 4 poulets pour 70,30 €.

Un canard et un poulet valent ensemble 20,70 €.

Déterminer le prix d'un poulet et celui d'un canard.

83 Vu au brevet

1 Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x - y = 5 \end{cases}$

- 2 Le CDI d'un collège a acheté 2 exemplaires d'une même bande dessinée et 3 exemplaires d'un même livre de poche pour la somme de 30 euros.

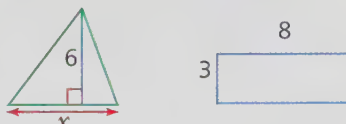
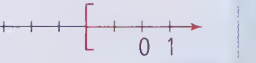
Une bande dessinée coûte 5 euros de plus qu'un livre de poche.

Quel est le prix d'une bande dessinée ?

Quel est le prix d'un livre de poche ?

Faire le point

84 QCM Indiquer, dans chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les réponses proposées.

		A	B	C
1	L'énoncé « En multipliant par 7 la somme d'un nombre x et de 11, on obtient 63. Quel est ce nombre ? » peut être traduit par l'équation :	$7(x+11) = 63$	$x+11 = 7 \times 63$	$x+11 \times 7 = 63$
2	Le triangle et le rectangle ont la même aire.  Pour calculer la longueur x , on résout l'équation :	$6+x = 24$	$3x = 24$	$6x = 24$
3	La solution de l'équation $3(4-x) = -2(x-1)$ est le nombre :	2	14	10
4	Le double de la somme d'un nombre et de 7 est égal à 18. Ce nombre est égal à :	5,5	2	16
5	Les solutions de l'inéquation $-3x+2 \leq 4-2x$ sont représentées sur la figure :			
6	Le couple $(-3; 5)$ est solution du système :	$\begin{cases} x+y=2 \\ -x+2y=-11 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ -2x-y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} -x-2y=1 \\ x+2y=7 \end{cases}$
7	La solution du système $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ est le couple :	$(-1; 2)$	$(2; -1)$	$(-1; -2)$

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

• Résoudre une inéquation et représenter ses solutions sur une droite graduée

85 Résoudre chaque inéquation, puis représenter ses solutions sur une droite graduée.

- a. $8x+9 < -1$ b. $7x+\frac{5}{3} \geq 25$
c. $2x+7 \leq 9-6x$ d. $3x-\frac{8}{5} > 42-x$

• Résoudre un problème se ramenant à une inéquation

86 Le coût d'une course en taxi est la somme d'un montant fixe (le forfait de prise en charge) et d'un montant dépendant du nombre de kilomètres parcourus.

Pour une course un soir en Vendée, le forfait de prise en charge s'élève à 1,90 € et le prix du kilomètre est 1,95 €.

- En notant x le nombre de kilomètres parcourus, écrire une expression permettant de déterminer le coût d'une course en taxi. On notera cette expression y .
- Pour quelles valeurs de x a-t-on : $y \leq 37$?
- Quelle est la distance maximale qu'un client peut parcourir en dépensant au plus 37 euros ?

• Résoudre un système de deux équations à deux inconnues

87 Résoudre les systèmes de deux équations à deux inconnues suivants :

- a.
$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 5x-y=4 \end{cases}$$
 b.
$$\begin{cases} 5x+2y=11 \\ 4x+3y=13 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 3x+5y=63 \\ 2x-y=25 \end{cases}$$
 d.
$$\begin{cases} 4x-4y=16 \\ 3x+2y=47 \end{cases}$$

• Résoudre un problème se ramenant à un système de deux équations à deux inconnues

88 3 baguettes et 2 croissants coûtent 5,05 euros ; 2 baguettes et 3 croissants coûtent 5,20 euros.

- Quelle phrase de l'énoncé ci-dessus l'équation $3x+2y=5,05$ traduit-elle ?
- Écrire une équation à deux inconnues x et y qui traduit la phrase : « 2 baguettes et 3 croissants coûtent 5,20 euros ».
- Résoudre un système de deux équations à deux inconnues pour calculer x et y .
- Quel est le prix d'une baguette ? Quel est le prix d'un croissant ?

Approfondir

89 Vrai ou faux

- a. L'équation $x^2 = 16$ admet une seule solution.
- b. Si un nombre x est au plus égal à -17 , alors il est solution de l'inéquation $2x + 1 \leq -33$.
- c. L'équation $-3x = -12$ a pour solution le nombre -4 .
- d. Si un nombre x est solution de l'inéquation $-3x + 2 \leq -13$, alors il est au moins égal à 5 .
- e. Le couple $(0 ; 0)$ est solution du système :

$$\begin{cases} -527x + 1\,023,7y = 0 \\ 10^7x - 45\,023y = 0 \end{cases}$$

- 90 Le périmètre d'un terrain rectangulaire est égal à 900 m. Sa largeur mesure 40 m de moins que sa longueur. Calculer les dimensions de ce terrain.

- 91 Une bouteille d'eau gazeuse coûte 75 centimes. Sachant que l'eau coûte 35 centimes de plus que la bouteille vide, quel est le prix de la bouteille vide ?

- 92 Une bouteille d'eau pleine a une masse de $1\,220$ g. À moitié vide, elle a une masse de 845 g. Quelle est la masse de la bouteille vide ?



93 Vu au brevet

Aujourd'hui, Marc a 11 ans et Pierre a 26 ans. Dans combien d'années l'âge de Pierre sera-t-il le double de celui de Marc ?

- 94 Résoudre l'équation $3x^2 - 2x + 9 = -3(1 - 5x - x^2)$.

- 95 Un élève a écrit sur sa copie :

$$\begin{aligned} x &> 3 \\ \text{donc } 3x &> 9 \\ \text{donc } 3x - x^2 &> 9 - x^2 \\ \text{donc } x(3-x) &> (3-x)(3+x) \\ \text{donc } x &> 3+x \\ \text{donc } 0 &> 3. \end{aligned}$$

Quelle erreur l'élève a-t-il commise ?

Pour les exercices 96 à 98, résoudre chaque inéquation, puis représenter ses solutions sur une droite graduée.

- 96 a. $3(x+1) < -4$ b. $-2(x-5) \geq 9$
c. $-4x \leq -3(2x-5)$ d. $7(-2x+5) < -3(4-2x)$

- 97 a. $1+8(2+x) > 5$ b. $2-2(x+4) \leq 9x$
c. $7-4(1-5x) < 5-2(3x-7)$
d. $7(-2x+5) \geq -3(4-2x)$

- 98 a. $2\left(\frac{3}{2}+x\right) \leq 5-4x$ b. $5-\frac{3}{4}(2x-4) > \frac{1}{2}x-7$
c. $2x-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-9x\right) < 4+2\left(-x-\frac{7}{2}\right)$
d. $7(-2x+5) \leq -3(4-2x)$

99 Vu au brevet

① Résoudre l'inéquation $x + 15 \geq \frac{2}{3}(x + 27)$.

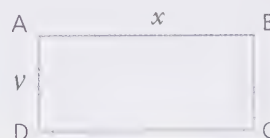
② Un bureau de recherche emploie 27 informaticiens et 15 mathématiciens. On envisage d'embaucher le même nombre x d'informaticiens et de mathématiciens. Combien faut-il embaucher de spécialistes de chaque domaine pour que le nombre de mathématiciens soit au moins égal aux deux tiers du nombre d'informaticiens ?

- 100 Dans une salle de cinéma, deux tarifs sont proposés : le plein tarif à 10 euros la séance et le tarif réduit à 7 euros la séance. Les 180 entrées de la séance de 14 h ont rapporté $1\,470$ euros. Calculer le nombre de billets de chaque sorte qui ont été vendus lors de cette séance.

- 101 La somme de trois nombres entiers consécutifs est comprise entre 65 et 68 . Quels sont ces nombres ?

- 102 Fabien a obtenu $8,5$; 13 et $9,5$ aux trois premiers contrôles de mathématiques du trimestre. Toutes les notes sont sur 20 et comptent de la même façon. Résoudre une inéquation permettant de déterminer quelle note au minimum Fabien devra obtenir au prochain contrôle pour être sûr d'avoir une moyenne supérieure ou égale à 12 .

- 103 Si on augmente sa longueur x de 2 m et sa largeur y de 1 m, l'aire du rectangle ABCD augmente de 24 m². Si on augmente x de 1 m et y de 2 m, cette aire augmente de 31 m². Quelles sont les dimensions du rectangle ABCD ?



Exercices

104 ① Justifier que l'équation :
 $-2 - 3(-x - 2) - 10x = 1 - 7(6 + x)$
 n'admet pas de solution.

② Justifier que l'équation :
 $-7(x - 5) + 9x = -2(1 - x) + 37$
 admet une infinité de solutions.

105 Si Anna donnait 5 timbres à Martin, ils en auraient le même nombre chacun ; si elle lui en donnait 15, il en aurait trois fois plus qu'elle.
 Combien Anna a-t-elle de timbres ? Combien Martin a-t-il de timbres ?

106 ① Justifier que l'inéquation $2(x - 7) - 8x < 1 - 3(6 + 2x)$ n'admet pas de solutions.

② Justifier que l'inéquation $-8x + 13 > 2(6 - 4x)$ admet une infinité de solutions.

107 ① Quelles sont les solutions de l'inéquation suivante :
 $2x - 2 < 4 - 4x$?

Représenter ses solutions en bleu sur une droite graduée.

② Quelles sont les solutions de l'inéquation suivante :
 $5x + 4 > -2 + 2x$?

Représenter ses solutions en rouge sur la même droite graduée.

③ Dédurre des questions précédentes les solutions du système de deux inéquations à une inconnue :

$$\begin{cases} 2x - 2 < 4 - 4x \\ 5x + 4 > -2 + 2x \end{cases}$$

108 ① Existe-t-il un couple $(x ; y)$ qui soit solution du système ci-dessous ?

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ 5x + 15y = 50 \end{cases}$$

② Combien de couples $(x ; y)$ sont solutions du système ci-dessous ?

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ -8x + 2y = -4 \end{cases}$$

109 ① Traduire par une inéquation chacune des phrases suivantes :

a. La différence de 4 et du double d'un nombre est au moins égale à 7.

b. Le produit de -2 par la somme d'un nombre et de 4 est au plus égale à -3 .

② Résoudre les inéquations obtenues.

110 ① Quels sont les nombres x tels que la somme $2x + 7$ est au moins égale à -3 ?

② Quels sont les nombres x tels que le produit $5(4 - 2x)$ est au plus égal à 6 ?

111 Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{3x + 4}{4} + \frac{1 - 4x}{2} = \frac{5x}{4}$

b. $\frac{3 - 7x}{9} - \frac{2x - 1}{3} = \frac{5x + 2}{18}$

112 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\frac{1 + x}{2} > \frac{2 - x}{4}$

b. $\frac{x - 5}{6} + 1 \leq \frac{x - 1}{3}$

c. $4 - \frac{2x + 1}{5} < x - \frac{3}{10}$

d. $\frac{-3 - 5x}{14} - 2 \geq -4 - \frac{-2x - 7}{21}$

113 ① Trouver trois couples $(x ; y)$ qui sont solutions de l'équation $x + 2y = 5$.

② Reprendre la question ① avec l'équation $-5x + 3y = -1$.

114 En achetant un CD et un livre, Marie a payé 23,50 euros. Sachant que le livre coûte 2,50 euros de plus que le CD, calculer le prix de chaque article.

115 Un amateur de casse-tête expliqua ainsi son âge :
 Prenez trois fois mon âge dans trois ans, et enlevez trois fois mon âge il y a trois ans, vous obtiendrez mon âge actuel.
 Quel âge a-t-il ?

(D'après *Oh, les Maths !*, Yakov Perelman, Éditions Dunod).

116 Vu au brevet

Si on retranche un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{4}{5}$, on obtient la fraction $\frac{5}{4}$.
 Quel est ce nombre ?

117 On admet que 1 cm³ d'eau a une masse de 1g et que 1 cm³ d'huile a une masse de 0,9 g.

Si l'on remplit complètement un verre avec de l'eau, il pèse 200 g ; si on le remplit complètement avec de l'huile, il ne pèse plus que 188 g.

Calculer la masse du verre vide.

118 L'échelle de température de Fahrenheit est utilisée de nos jours aux États-Unis et dans certains pays anglophones.
 En notant T la température en degré Fahrenheit (°F) et T' la température en degré Celsius (°C), l'expression de T en fonction de T' est de la forme : $T = aT' + b$, a et b étant deux nombres entiers.

① Sachant qu'une température de 60 °C correspond à 140 °F, et que 100 °C correspond à 212 °F, calculer les coefficients a et b.

② En déduire la relation générale qui lie les températures dans les deux unités.

119 La somme de deux nombres est égale à 109. En ajoutant 7 à l'un et en retranchant 7 à l'autre, leur produit augmente de 28. Déterminer ces deux nombres.

120 Un bateau, utilisant ses moteurs à pleine puissance, descend un fleuve d'une ville A à une ville B, dans le sens du courant, en trois heures ; il remonte le fleuve de B à A, toujours à pleine puissance, en cinq heures.

On note :

d la distance entre les deux villes par le fleuve, exprimée en km ;

V la vitesse propre du bateau, exprimée en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$;

v la vitesse propre du courant, exprimée en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

1 Exprimer de deux façons différentes d en fonction de v et de V (indication : les vitesses peuvent s'additionner ou se soustraire).

2 En déduire la relation : $V = 4v$.

3 a. Déduire des questions précédentes l'expression de d en fonction de v .

b. Quel est le temps mis par un tronc d'arbre qui flotte sur le fleuve pour aller de la ville A à la ville B ?

121 Un père dit à son fils : « J'ai trois fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. À nous deux, nous avons 140 ans ». Quel est l'âge du père ? Quel est l'âge du fils ?

Argumenter et débattre

122 Quels sont les couples $(x ; y)$ de nombres entiers positifs tels que le produit $(x + y)(x - y)$ soit égal à 15 ?

123 Un coureur parcourt 5 tours de piste à la vitesse moyenne de $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, puis la même distance à la vitesse moyenne de $16 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Sa vitesse moyenne sur le parcours total est-elle égale à $17 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

124 Quels sont les nombres x qui sont solutions de l'inéquation $(x - 5)(x + 3) > 0$?

POUR LES CURIEUX

Hiéron, tyran de Syracuse (III^e siècle av. J.-C.), demanda que lui soit façonnée une couronne d'or ; pour cela, il donna à son orfèvre 800 g du précieux métal pour la fabrication du bijou. Afin d'être sûr que l'orfèvre ne l'avait pas dupé en substituant une partie de l'or à de l'argent, métal moins cher, Hiéron demanda à Archimède de déterminer si cette couronne était effectivement constituée d'or uniquement ; dans le cas contraire, il lui demanda d'identifier sa composition exacte.

1 a. En immergeant la couronne dans de l'eau, Archimède mesura un volume d'eau déplacée égal à 50 mL. Déterminer le volume de la couronne, exprimé en cm^3 .

b. La couronne fabriquée par l'orfèvre pesait 800 g. En admettant que la masse de 1 cm^3 d'or est égale à 19,3 g, justifier par un calcul que la couronne n'était pas constituée d'or seulement.

2 a. En notant V le volume réel d'or de la couronne, exprimer en fonction de V la masse d'or contenu dans la couronne, notée M .

b. On admet que 1 cm^3 d'argent a une masse de 10,5 g. En notant V' le volume réel d'argent de la couronne, exprimer en fonction de V' la masse M' d'argent contenu dans la couronne.

c. Déduire des questions précédentes l'équation à deux inconnues : $19,3V + 10,5V' = 800$.

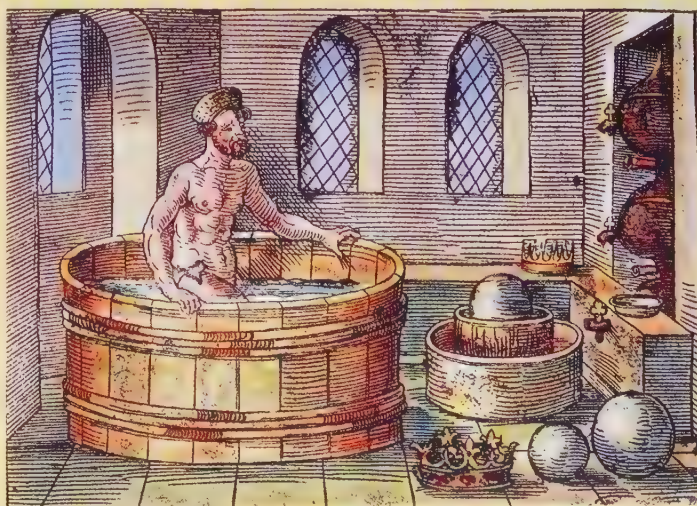
3 Quelle est la valeur de $V + V'$?

4 Utiliser les questions précédentes pour poser et résoudre un système de deux équations à deux inconnues permettant de calculer V et V' .

5 Quelles masses d'or et d'argent l'orfèvre avait-il effectivement utilisées ?

Archimède dans sa baignoire.

« Archimède comprit, en prenant son bain, qu'un corps immergé dans un liquide déplace un volume de liquide égal à son propre volume. Il s'exclama alors : « Eurêka ! » (« J'ai trouvé ! »), en pensant au problème de la couronne que lui avait posé le tyran Hiéron ».

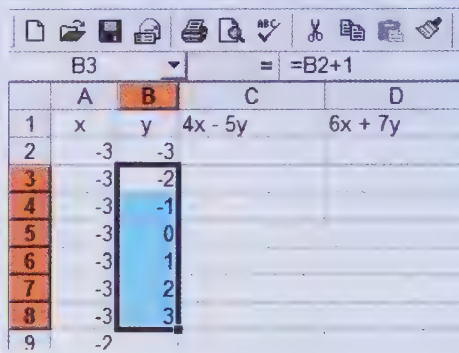
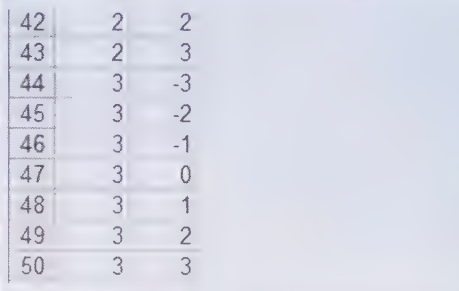
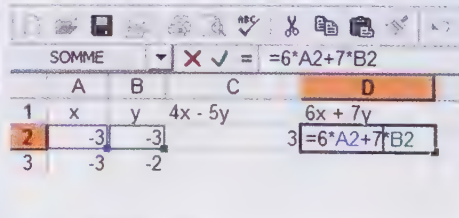


Tester les égalités dans un système de deux équations à deux inconnues

On considère le système de deux équations à deux inconnues suivant :
$$\begin{cases} 4x - 5y = 22 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$$

On admet que ce système admet un unique couple solution dont les valeurs sont des nombres entiers compris entre -3 et 3 . On se propose d'utiliser un tableur pour déterminer ce couple solution.

1 Utilisation du tableur

a. On entre les titres de colonnes dans les cellules A1 , B1 , C1 et D1 .	Entrer x en A1 , y en B1 , $4x - 5y$ en C1 , et $6x + 7y$ en D1 .	
b. On entre une première valeur possible de x dans les cellules A2 à A8 .	Écrire -3 en A2 , puis copier -3 dans chacune des cellules A3 à A8 .	
c. On entre toutes les valeurs possibles de y dans les cellules B2 à B8 .	Écrire -3 en B2 , puis entrer la formule $=B2+1$ en B3 , et étendre cette formule jusqu'à la cellule B8 .	
d. On entre une deuxième valeur possible de x dans les cellules A9 à A15 .	Écrire -2 en A9 , puis copier -2 dans chacune des cellules A10 à A15 .	
e. On entre à nouveau toutes les valeurs possibles de y dans les cellules B9 à B15 .	Copier le contenu des cellules B2 à B8 et le coller dans les cellules B9 à B15 .	
f. On réitère le procédé précédent dans les colonnes A et B , jusqu'à la ligne 50.		
g. On entre la formule $4x - 5y$ dans la cellule C2 , et la formule $6x + 7y$ dans la cellule D2 .	Entrer la formule $=4*A2-5*B2$ en C2 , puis entrer la formule $=6*A2+7*B2$ en D2 .	
h. On étend la formule entrée en C2 aux cellules C3 à C50 , et la formule entrée en D2 aux cellules D3 à D50 .	Cliquer sur C2 , puis étirer la croix jusqu'à la cellule C50 . Cliquer sur D2 , puis étirer la croix jusqu'à la cellule D50 .	

2 Exploitation des résultats

Pour quelle ligne du tableau a-t-on simultanément : $4x - 5y = 22$ et $6x + 7y = 4$?

En déduire la solution du système proposé.

3 Application

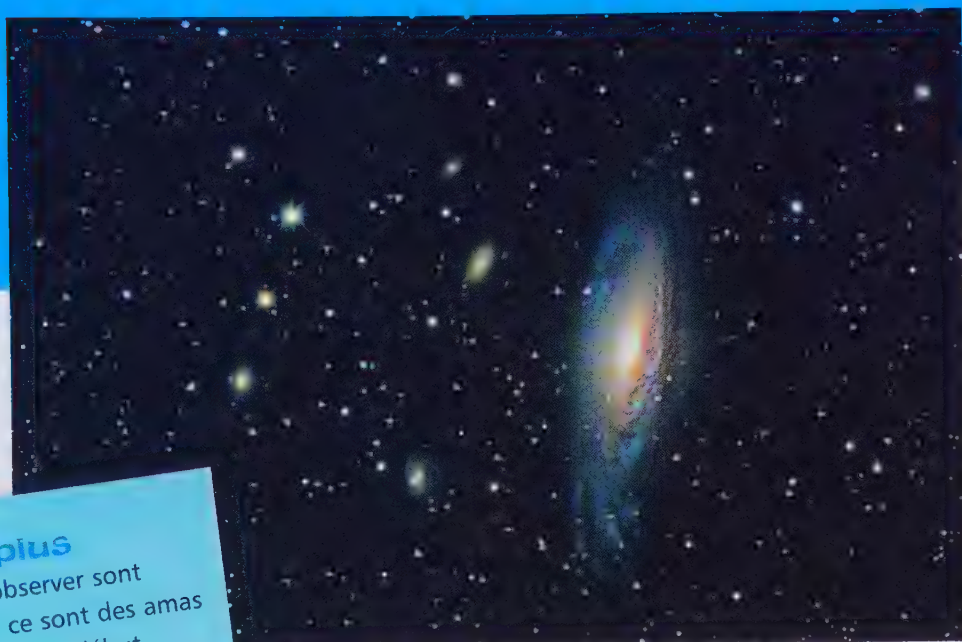
Soit le système de deux équations à deux inconnues suivant :
$$\begin{cases} -2x + y = -9 \\ 3x - 5y = 17 \end{cases}$$

En admettant que ce système admet un unique couple solution dont les valeurs sont des nombres entiers compris entre -5 et 5 , utiliser un tableur pour déterminer ce couple solution.

3

Puissances d'exposant entier relatif

Galaxie spirale NGC 7331 dans Pégase



Les objets de l'Univers **les plus éloignés** que l'on peut observer sont situés à **10^{25} mètres** : ce sont des amas de galaxies très brillantes créés au début de l'Univers, il y a environ **10^{10} années**. **Les plus petites** structures dont on peut obtenir des images sont des grosses molécules, comme la molécule de benzène de quelque **10^{-10} mètre**. Sans la notation scientifique, il serait bien long d'écrire ces nombres...

Le **gogol** vaut **10^{100}** . Le moteur de recherche **Google** a repris la version anglaise de ce nom (*googol*), faisant ainsi allusion à sa **puissance** d'organisation des données sur le web.

Tu es certain que c'est la vraie règle?



Imaginez que vous **doubliez** le nombre de grains de blé sur les **64 cases** successives d'un échiquier en partant d'un grain. Le nombre total de grains **$(1 + 2 + 4 + \dots)$** sera environ égal à **2^{64}** , soit plus que la récolte mondiale de blé !

QCM Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	Le nombre 3^4 est égal à :	3×4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	$4 \times 4 \times 4$
2	Le nombre $(-4)^0$ est égal à :	1	-1	0
3	Le nombre 2^{-1} est :	un nombre négatif	l'opposé de 2	l'inverse de 2
4	$2^2 \times 2^3 =$	2^5	2^6	$2 \times 2 \times 2 \times 3$
5	$\frac{2^7}{2^5} =$	2^{12}	2^2	$\frac{7}{5}$
6	$(-3)^4$ est un nombre :	positif	négatif	On ne peut rien dire
7	$(-2)^7$ est un nombre :	positif	négatif	On ne peut rien dire
8	Soit n un entier tel que $n > 1$. L'écriture décimale de 10^n comporte :	10 zéros	n chiffres	n zéros
9	L'écriture décimale de 10^{-5} comporte :	4 zéros	5 zéros	6 zéros
10	$10^4 \times 10^{-7} \times 10^{-1} =$	10^{12}	10^{-4}	10^{28}
11	$\frac{10^2}{10^5} =$	10^{-3}	10^3	10^7
12	$(10^2)^{-3} =$	10^{-1}	-10^6	10^{-6}
13	Le nombre $467,3 \times 10^4$ a pour notation scientifique :	$4,673 \times 10^4$	$4,673 \times 10^6$	$4,673 \times 10^2$

Exercice 1 a. Recopier et compléter :

$$(-3)^2 \times (-3)^5 = \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots = (-3) \dots$$

$$\frac{2^4}{2^3} = \frac{\dots \times \dots \times \dots}{\dots \times \dots} = 2 \dots$$

$$(3^2)^4 = 3^2 \times \dots \times \dots \times \dots = \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots = 3 \dots$$

b. En utilisant la méthode de la question **a**, écrire chacune des expressions suivantes sous la forme a^n où n est un entier relatif.

$\bullet 7^4 \times 7^{-1}$ $\bullet 5^{-2} \times 5$ $\bullet \frac{3^2}{3^7}$ $\bullet \frac{(-5)^{-2}}{(-5)^{-7}}$ $\bullet (5^{-1})^3$ $\bullet (11^{-4})^{-2}$

Exercice 2 Écrire les expressions suivantes sous la forme 10^n où n est un entier relatif.

$$A = 10^7 \times 10^2 \times 10^{-1}$$

$$B = \frac{10^{-5} \times 10^3}{10^8}$$

$$C = (10^5)^{-2}$$

$$D = 10^3 \times 10^5 \times 10^0$$

$$E = \frac{10^{11} \times 10^{-4}}{10^2}$$

$$F = 10 \times (10^{-3})^{-4}$$

Exercice 3 a. Parmi les nombres ci-dessous, quels sont ceux écrits en notation scientifique ?

$$A = 13\,563 \quad B = 0,0095 \quad C = 1,72 \times 10^{-3} \quad D = 15,4 \times 10^2 \quad E = 0,87 \times 10^5$$

$$F = -2,85 \times 10^4 \quad G = -12\,000 \times 10^{-2} \quad H = 0,56 \times 10^{-7} \quad I = -1,8.$$

b. Donner la notation scientifique des autres nombres.

Exercice 4 Soient $A = 367,9 \times 10^{12}$ et $B = 0,0076 \times 10^{16}$.

Donner un ordre de grandeur de A et B , puis en déduire une comparaison de A et B .

Activité 1

Produit et quotient de deux puissances d'un même nombre

A Produit

Soit a un nombre non nul.

1 a. En utilisant la définition de la puissance d'un nombre, recopier et compléter :

• $a^3 \times a^2 = \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} = a^{\text{---}}$

• $a^{-4} \times a^7 = \frac{\text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---}}{\text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---}} = a^{\text{---}}$

• $a^{-3} \times a^{-1} = \frac{1}{\text{---} \times \text{---} \times \text{---}} \times \frac{1}{\text{---}} = \frac{1}{a^{\text{---}}} = a^{\text{---}}$

b. Peut-on calculer rapidement $a^{1977} \times a^{-436}$ en utilisant la définition de la puissance d'un nombre ? Pourquoi ?

2 Dans chacun des cas précédents, quelle est la relation entre les exposants de l'expression initiale et l'exposant du résultat final ?

3 De manière générale, n et p étant deux nombres entiers relatifs, le produit $a^n \times a^p$ est égal à une puissance de a . Quel est son exposant ?

Applications

a. Calculer le plus rapidement possible les expressions suivantes :

$A = 3^4 \times 3^{-7}$

$B = 2^{11} \times 2^{-5} \times 2^3$

$C = 5^{364} \times 5^{763}$

b. Réduire les expressions suivantes :

$D = (-x)^3 \times (-x)^2 \times (-x)^1$

$E = (-x)^0 \times (-x)^5$

$F = x^{-17} \times x^{80} \times x^{-63}$

c. À la calculatrice, calculer les nombres 3^1 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; 3^5 ; 3^6 ; 3^7 et 3^8 . Que constate-t-on concernant les derniers chiffres de ces puissances ?

Sans calculatrice, mais en utilisant la règle de calcul établie précédemment, donner le dernier chiffre de l'écriture décimale du nombre 3^{27} .

B Quotient

Soient a un nombre non nul et n et p deux entiers relatifs.

On s'intéresse au quotient $\frac{a^n}{a^p}$.

1 Le quotient $\frac{a^n}{a^p}$ est égal à une puissance de a . Écrire le quotient $\frac{a^n}{a^p}$ sous la forme d'un produit, puis, en utilisant le résultat trouvé dans la question A3, déterminer son exposant.

2 Applications

a. Calculer le plus rapidement possible :

$A = \frac{7^{12}}{7^5}$

$B = \frac{2^0}{2^{-6}}$

$C = \frac{(-3)^{-65}}{(-3)^{-98}}$

b. Réduire les expressions suivantes :

$D = \frac{a^{-3}}{a^2}$

$E = \frac{a^4}{a^{-9}}$

$F = \frac{a^{678} \times a^{-5}}{a^{-7}}$



Activité 2

Puissance d'une puissance d'un nombre

Soit a un nombre non nul.

1 a. En utilisant la définition de la puissance d'un nombre, recopier et compléter :

• $(a^2)^4 = \dots \times \dots \times \dots \times \dots = a^{\dots}$

• $(a^{-3})^2 = \dots \times \dots = a^{\dots}$

• $(a^5)^{-2} = \frac{1}{(a^5)^{\dots}} = \frac{1}{\dots} \times \frac{1}{\dots} = \frac{1}{a^{\dots}} = a^{\dots}$

• $(a^{-3})^{-1} = \frac{1}{a^{\dots}} = a^{\dots}$

b. Peut-on calculer rapidement $(a^{120})^{40}$ en utilisant la définition de la puissance d'un nombre ? Pourquoi ?

2 Dans chacun des cas précédents, quelle est la relation entre les exposants de l'expression initiale et l'exposant du résultat final ?

3 De manière générale, n et p étant deux nombres entiers relatifs, la puissance de puissance $(a^n)^p$ est égale à une puissance de a . Quel est son exposant ?

Applications

a. Calculer le plus rapidement possible :

$A = (2^4)^5$

$B = (6^{-1})^7$

$C = (3^{45})^{-10}$

b. Réduire les expressions suivantes :

$D = (a^0)^{-3}$

$E = (a^{-3})^{-8}$

$F = (3^{-67})^{-20}$

c. Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^4 ? Écrire 24 sous la forme d'un produit de deux entiers, puis en déduire le dernier chiffre de 7^{24} .

Activité 3

Produit et quotient des puissances de deux nombres ayant le même exposant

A Produit

1 En participant à un concours de mathématiques, Maxime a dû résoudre le problème suivant : « Combien de zéros terminent l'écriture décimale du nombre 30^{27} ? »
Voici son raisonnement :

$$\begin{aligned} 30^{27} &= \underbrace{(3 \times 10) \times (3 \times 10) \times (3 \times 10) \times \dots \times (3 \times 10)}_{27 \text{ fois}} \\ &= \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{27 \text{ fois}} \times \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{27 \text{ fois}} \\ &= 3^{27} \times 10^{27} \end{aligned}$$

$3^0 = 1$; $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$; $3^5 = 243$; $3^6 = 729$; $3^7 = 2187$; $3^8 = 6561$... donc 3^{27} ne peut pas se terminer par 0 ... D'où le nombre 30^{27} se termine par 27 zéros.

Le raisonnement de Maxime est-il correct ?

b. Soient a et b des nombres non nuls, recopier et compléter :

$$\bullet a^3 \times b^3 = a \times \dots \times \dots \times b \times \dots \times \dots = (a \times b) \times (\dots \times \dots) \times (\dots \times \dots) = (a \times b) \dots$$

$$\bullet a^{-2} \times b^{-2} = \frac{1}{\dots \times \dots} \times \frac{1}{\dots \times \dots} = \frac{1}{(\dots \times \dots) \times (\dots \times \dots)} = \frac{1}{(\dots \times \dots)} = (a \times b) \dots$$

c. De quel nombre obtient-on une puissance quand on effectue les produits $a^3 \times b^3$ et $a^{-2} \times b^{-2}$?

d. De manière générale, n étant un nombre entier relatif, le produit $a^n \times b^n$ est égal à la puissance d'un nombre. De quel nombre s'agit-il et quel est son exposant ?

2 Applications

a. Calculer le plus rapidement possible :

$$A = 2^4 \times 5^4$$

$$B = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2^2$$

$$C = 3^{-1} \times 5^{-1}$$

b. x et y sont des nombres non nuls. Réduire les expressions suivantes :

$$D = b^3 \times c^3$$

$$E = x^{-5} \times y^{-5}$$

B Quotient

1 Soient a et b deux nombres non nuls.

a. n étant un entier relatif, quelle relation a-t-on entre $\left(\frac{1}{b}\right)^n$ et $\frac{1}{b^n}$?

b. n étant un entier relatif, le quotient $\frac{a^n}{b^n}$ est égal à la puissance d'un nombre. En utilisant le résultat trouvé dans la question A 1, déterminer de quel nombre il s'agit et préciser son exposant.

2 Applications

a. b , c et y sont des nombres non nuls. Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une puissance d'un nombre :

$$A = \frac{5^7}{3^7}$$

$$B = \frac{6^2}{3^2}$$

$$C = \frac{7,2^{-1}}{2,4^{-1}}$$

$$D = \frac{b^{-3}}{c^{-3}}$$

$$E = \frac{x^{24}}{y^{24}}$$

b. Écrire le nombre $1,5^4$ sous la forme d'un quotient de deux entiers (on commencera par écrire 1,5 sous la forme d'un quotient de deux entiers, puis on en déduira l'écriture recherchée de $1,5^4$).

Activité 4

De l'importance des parenthèses...

Soit le nombre $A = 2^{2^n} + 1$.

1 Le professeur demande de calculer A pour $n = 3$. Rémi trouve 65 tandis que Jeanne a pour résultat 257.

a. Quel programme de calcul a effectué Rémi ?

b. Quel programme de calcul a effectué Jeanne ?

c. Peut-on savoir quel élève a donné la réponse correcte ? Pourquoi ?

2 On appelle nombres de Fermat les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$. Ils correspondent aux nombres $2^{(2^n)} + 1$. Calculer un de ces nombres pour $n = 4$ et $n = 5$.



A Puissances d'exposant entier relatif d'un nombre

RAPPEL

Définitions

Soient a un nombre relatif et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} \text{ et, pour } a \text{ non nul, } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Le nombre n est l'**exposant** de a et a^n est la **puissance d'exposant n** du nombre a .

On a :

• $a^1 = a$ • pour $a \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$

et par convention : pour $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

Remarque :

Pour n un nombre entier strictement positif, $0^n = 0$. Calculer la puissance d'exposant négatif de 0 n'a pas de sens puisqu'on ne peut pas diviser par 0.

B Opérations sur les puissances d'un même nombre

Propriétés

Soit a un nombre non nul et soient n et p des entiers relatifs. On a :

• $a^n \times a^p = a^{n+p}$ • $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ • $(a^n)^p = a^{n \times p}$

Exemples

► $3^{-1} \times 3^5 = 3^{-1+5} = 3^4$

► $\frac{2,1^5}{2,1^3} = 2,1^{5-3} = 2,1^2$

Attention à l'utilisation des parenthèses ! $(a^n)^p$ n'est pas égal à $a^{(n^p)}$.

► Pour a non nul, $(a^{-2})^3 = a^{-2 \times 3} = a^{-6}$.

► On retrouve en particulier les propriétés sur les puissances de 10 vues en 4^e :

pour n et p entiers relatifs : • $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ • $\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ • $(10^n)^p = 10^{np}$

Remarque : Il n'existe pas de propriété sur l'addition et la soustraction de puissances d'un même nombre. Par exemple, $2^5 + 2^7$ n'est pas égal à 2^{12} .

C Opérations sur les puissances de même exposant

Propriétés

Soient a et b deux nombres non nuls et n un entier relatif. On a :

• $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ • $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Exemples

► $5^3 \times 2^3 = (5 \times 2)^3 = 10^3$

► $\frac{12^n}{3^n} = \left(\frac{12}{3}\right)^n = 4^n$

Attention à l'utilisation des parenthèses !
 $a \times b^n$ n'est pas égal à $(a \times b)^n$
et $\frac{a^n}{b}$ n'est pas égal à $\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Savoir-faire 1 Simplifier un produit ou un quotient de puissances

Énoncé 1 Écrire l'expression $A = 4^3 \times 9^2 \times 2^5$ sous la forme $2^n \times 3^p$.

Solution

$$A = 4^3 \times 9^2 \times 2^5$$

On écrit 4 sous la forme d'une puissance de 2 et 9 sous la forme d'une puissance de 3.

$$A = (2^2)^3 \times (3^2)^2 \times 2^5$$

On utilise la propriété : $(a^n)^p = a^{n \times p}$.

$$A = 2^{2 \times 3} \times 3^{2 \times 2} \times 2^5$$

$$A = 2^6 \times 3^4 \times 2^5$$

On utilise la propriété : $a^n \times a^p = a^{n+p}$.

$$A = 2^{6+5} \times 3^4$$

$$A = 2^{11} \times 3^4$$

Énoncé 2 Écrire l'expression $B = \frac{(3^4)^2 \times 2^{11}}{2^8 \times 3^5}$ sous la forme d'une seule puissance.

Solution

$$B = \frac{(3^4)^2 \times 2^{11}}{2^8 \times 3^5}$$

On écrit ce quotient sous la forme d'un produit de deux quotients de puissances d'un même nombre.

$$B = \frac{(3^4)^2}{3^5} \times \frac{2^{11}}{2^8}$$

On utilise la propriété : $(a^n)^p = a^{n \times p}$.

$$B = \frac{3^8}{3^5} \times \frac{2^{11}}{2^8}$$

On utilise la propriété : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

$$B = 3^{8-5} \times 2^{11-8}$$

$$B = 3^3 \times 2^3$$

On utilise la propriété : $a^n \times b^n = (ab)^n$.

$$B = (3 \times 2)^3$$

$$B = 6^3$$

Savoir-faire 2 Factoriser une puissance dans une somme algébrique

Énoncé Réduire les expressions $D = 2^{14} - 2^{13}$, puis $E = a^n b + a^{n+k} c$.

Solution

$$\bullet D = 2^{14} - 2^{13}$$

$$D = 2^{13} \times 2 - 2^{13} \times 1$$

On écrit chaque terme sous la forme d'un produit dont un facteur est 2^{13} .

$$D = 2^{13}(2 - 1)$$

On factorise par 2^{13} .

$$D = 2^{13}$$

$$\bullet E = a^n \times b + a^{n+k} \times c$$

$$E = a^n \times b + a^n \times a^k \times c$$

On écrit chaque terme sous la forme d'un produit dont un facteur est a^n .

$$E = a^n(b + a^k \times c)$$

On factorise par a^n .

Puissances RAPPEL

- 1** Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$$2^5; 4^2; (-1,5)^0; \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}; 0,5^3.$$

- 2** Déterminer le signe des nombres suivants :

$$(-2)^{24}; 3^{-5}; (-17)^7; 2^{10}; (-20)^{-2}.$$

- 3** Soit a un nombre négatif différent de zéro. Déterminer le signe des expressions suivantes :

$$a^3; a^6; a^{-2}; a^{-5}; -a^3; (-a)^5.$$

4 Vrai ou faux

- a. 3^{-1} est l'opposé de 3.
- b. L'inverse de $\frac{1}{2}$ est $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.
- c. 3×10^2 est égal à 3^2 .
- d. $\frac{1}{5 \times 10^6}$ est égal à $1,5 \times 10^{-6}$.

- 5** Le tenrec est un mammifère insectivore ressemblant au hérisson. En captivité, les femelles peuvent avoir des portées de 32 petits. Si un éleveur possède 16 femelles tenrecs, combien pourra-t-il avoir au plus de petits ? On donnera la réponse sous la forme d'une puissance de 2.



6 Vrai ou faux

- a. Le cube de 5 est 5^3 .
- b. Le produit de deux puissances de 10 est une puissance de 10.
- c. Le carré d'un nombre négatif est un nombre négatif.
- d. Le carré du double de 10 est 200.

- 7** Effectuer les calculs suivants :

$$A = (3^2 + 5)^{-1} \times 2 \times (2^3 - 1) \quad B = \frac{5^2 - 3^2}{4^2}$$

$$C = 2^3 - 5 \times 3 + 7 \quad D = 3^2 + 2 \times 5 + 5^2 - (3^2 + 5^2)$$

- 8** Effectuer les calculs suivants :

$$A = (10 - 3^2) \times 7 - 2^2 \quad B = 0^2 \times (3^7 - 4^3) - 1$$

$$C = (10^2 - 5^2) \times 3^{-1} \quad D = (3 \times 7 + 2^0) \times 123$$

- 9** Soit $A = (3^2 + 5^3) \times 2^2$.

- a. Donner un ordre de grandeur de A .
- b. Peut-on en déduire un ordre de grandeur de $A + 1$?

- 10** Donner un ordre de grandeur des nombres suivants en utilisant la calculatrice.

$$A = 2^{10} \quad B = 7^6 \quad C = 3^{21}$$

$$D = 5^{-15} \quad E = 3^{-20} \quad F = 11^{-3}$$

- 11** Donner l'écriture décimale de chacun des nombres suivants : 10^2 ; 10^{-2} ; 10^{-4} ; 10^5 ; 10^{-1} ; 10^0 .

- 12** Une bactérie est un organisme vivant unicellulaire. Dans un millilitre d'eau de mer, il y a environ un million de bactéries. Combien y a-t-il de bactéries dans un litre d'eau de mer ? On donnera la réponse sous la forme d'une puissance de 10. Heureusement, la plupart des bactéries sont sans effet sur notre organisme voire bénéfiques !

- 13** Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont écrits à l'aide de leur notation scientifique ?

$$A = 4,5 \times 10^{-4} \quad B = 0,37 \times 10^6$$

$$C = 59,23 \times 10^{-1} \quad D = 3,782 \times 10^5$$

$$E = 2,1 \times 10 \quad F = 5 \times 10^{-11}$$

- 14** Recopier et compléter chaque égalité.

$$a. 320\,000 = 3,2 \times 10^{---} \quad b. 364,7 = 3,647 \times 10^{---}$$

$$c. 2,93 = 2,93 \times 10^{---} \quad d. 0,003 = 3 \times 10^{---}$$

$$e. 0,0276 = 2,76 \times 10^{---} \quad f. 0,0000042 = 4,2 \times 10^{---}$$

- 15** Écrire les distances du tableau ci-dessous à l'aide de leur notation scientifique

Nom des planètes	Distance au Soleil en km
Mercure	57 900 000
Terre	149 600 000
Jupiter	778 300 000
Saturne	1 427 000 000
Neptune	4 497 000 000

Pour les exercices **16** à **18**, déterminer la notation scientifique de chacun des nombres donnés.

- 16** 267 ; 0,03 ; 11 000 000 ; 0,000 54 ; 34,667 ; 4,5.

- 17** 356×10^3 ; 25×10^{-5} ; $0,56 \times 10^7$; $0,007 \times 10^2$;
 $41,89 \times 10^{-8}$; $56\,000 \times 10^{-4}$.

- 18** $2\,000 \times 10^{-8}$; 345×10^{-1} ; $0,045 \times 10^{-4}$;
 $0,000\,065 \times 100\,000$; $44,4 \times 10^4$; $2\,000 \times 10^7$.

- 19** Soient x , y et z trois nombres tels que :

$$x = 3\,000, \quad y = 250, \quad z = 6.$$

Donner les notations scientifiques des nombres x , y et z , puis des nombres suivants :

$$A = x + y + z \quad B = z(x + y)$$

$$C = x(y - z) \quad D = xyz$$

20 Effectuer les calculs suivants :

$$A = 10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^0 \quad B = \frac{10^5 + 10^4}{10^3}$$

$$C = 8 \times 10^2 - 7 \times 10^1 \quad D = \frac{3 \times 10^4 + 2 \times 10^3}{8 \times 10^3}$$

21 a. Effectuer les calculs suivants :

$$A = \frac{10^0 + 10^1}{11} \quad B = \frac{10^1 + 10^2}{11}$$

$$C = \frac{10^3 + 10^4}{11} \quad D = \frac{10^4 + 10^5}{11}$$

b. n étant un entier positif, quelle est la valeur de : $\frac{10^n + 10^{n+1}}{11}$?

22 Encadrer chaque nombre par deux puissances de 10 dont les exposants sont deux entiers relatifs consécutifs.

$$A = 24\,008 \quad B = 0,000\,006 \quad C = 1,45 \times 10^4$$

$$D = 25 \times 10^{-5} \quad E = 0,003 \times 10^6$$

23 Vrai ou faux

- a. 3×10^{-6} est un ordre de grandeur de 0,000 003 031.
- b. Si $10^4 \leq a \leq 10^5$, alors 10^4 est un ordre de grandeur de a .
- c. $9 \times 10^2 \times 9 \times 10^3$ a pour ordre de grandeur 10^5 .
- d. $0,001 \times 10^{-8}$ a pour ordre de grandeur 10^{-8} .

24 a. Combien y a-t-il de secondes dans une journée de 24 h ?

b. Combien y a-t-il de secondes dans une année de 365,25 jours ? Donner le résultat en écriture scientifique avec deux chiffres après la virgule.

c. Sachant que la vitesse de la lumière est de $300\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ environ, donner un ordre de grandeur de la distance (en kilomètres) parcourue par la lumière en une année.

25 La masse d'un électron est égale à $9,109\,4 \times 10^{-31} \text{ kg}$. La masse d'un proton est de $1,672\,6 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Donner un ordre de grandeur du rapport entre la masse d'un proton et la masse d'un électron.

Opérations sur les puissances

Pour les exercices **26** à **28** écrire chaque nombre sous la forme a^p où a est un nombre et p est un entier relatif.

26 $A = 7^3 \times 7^2 \quad B = (-3)^{12} \times (-3)^9$
 $C = (-2,1)^{-15} \times (-2,1)^{-5} \quad D = 2^{-17} \times 2$
 $E = (-1)^0 \times (-1)^2 \quad F = (-6)^{-3} \times (-6)^3$

27 $A = 5^3 \times 5^{-2} \times 5^4 \quad B = 3,7^4 \times 3,7^9 \times 3,7^5$
 $C = 12^{-2} \times 12^3 \times 12^{-1} \quad D = 7,5^8 \times 7,5^{-5} \times 7,5^{-2}$

28 $A = (-2,3)^{-15} \times (-2,3)^{-10} \times (-2,3)^{45}$
 $B = (-1,5)^3 \times (-1,5)^{-14} \times (-1,5)^{10} \times (-1,5)^{-6}$

29 Écrire chaque nombre sous la forme a^p où a est un nombre en écriture fractionnaire et p est un entier relatif.

$$A = \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} \quad B = \left(\frac{11}{4}\right)^7 \times \left(\frac{11}{4}\right)^{-3}$$

$$C = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \quad D = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{5}\right)^9 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-11}$$

30 a est un nombre non nul. Écrire chaque nombre sous la forme a^p où p est un entier relatif.

$$A = a^5 \times a^{12} \quad B = a^{-4} \times a^{-1}$$

$$C = a^{-3} \times a^{11} \quad D = a^{-1} \times a^{-5} \times a^{26} \times a^{-20}$$

$$E = a^5 \times a^{-3} \times a^{-1} \quad F = a^{-3} \times a^5 \times a^3 \times a^{-5}$$

Pour les exercices **31** et **32**, écrire chaque nombre sous la forme a^p où a est un nombre et p est un entier relatif.

31 $\frac{3^{10}}{3^6}$; $\frac{7,4^5}{7,4^7}$; $\frac{(-9)^{-3}}{(-9)^{-10}}$; $\frac{1^3}{1^9}$; $\frac{2,9^{-1}}{2,9^{-2}}$; $\frac{(-4)^5}{(-4)^5}$

32 $\frac{5^6}{(-5)^7}$; $\frac{(-7)^3}{7^2}$; $\frac{(-11)^4}{11^5}$; $\frac{10^2}{(-10)^6}$; $\frac{7^{-11}}{(-7)^8}$; $\frac{(-8)^{10}}{8^{-6}}$

33 Écrire chaque nombre sous la forme a^p où a est un nombre en écriture fractionnaire et p est un entier relatif.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^7; \left(\frac{2}{3}\right)^5; \left(-\frac{4}{7}\right)^{11}; \left(\frac{9}{13}\right)^0; \left(-\frac{1}{6}\right)^{-5}; \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\frac{1^3}{5^3}; \frac{2^9}{3^9}; \frac{(-4)^{-21}}{(-7)^{-21}}; \frac{9^4}{13^4}; \frac{(-1)^{-7}}{(-6)^{-7}}; \frac{1^3}{2^3}$$

34 a est un nombre non nul. Écrire chaque nombre sous la forme a^p où p est un entier relatif.

$$\frac{a^8}{a^3}; \frac{a^{-4}}{a^{-1}}; \frac{a^{45}}{a^{57}}; \frac{a^{-2}}{a^2}; \frac{a^3}{a^{-4}}; \frac{a^{-7}}{a^2}$$

Pour les exercices **35** et **36**, écrire chaque nombre sous la forme a^p où a est un nombre relatif et p est un entier relatif.

35 $(3^2)^5$; $(2,8^{-5})^7$; $((-4)^3)^{-1}$; $(1,5^{-2})^{-4}$; $(3,8^0)^6$; $(9^{-4})^4$

36 $(0,1^0)^0$; $(0^{-2})^{-7}$; $((-1)^0)^{-1}$; $(1^{-2})^{-6}$; $(7^{98})^0$; $((-2)^{-1})^{-1}$

37 Écrire chaque nombre sous la forme a^p où a est un nombre relatif en écriture fractionnaire et p est un entier relatif.

$$\left(\left(\frac{2}{9}\right)^3\right)^2; \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right)^7; \left(\left(-\frac{1}{7}\right)^2\right)^{-6}; \left(\left(\frac{1}{10}\right)^{-4}\right)^{11}; \left(\left(\frac{13}{17}\right)^4\right)^0$$

38 a est un nombre non nul. Écrire chaque nombre sous la forme a^p où p est un entier relatif.

$$(a^{-3})^{10}; (a^5)^{-2}; (a^6)^7; (a^0)^{-5}; (a^1)^{-3}; (a^{10})^{10}$$

39 Calcul mental

$$A = 2^2 \times 2^{-3} \quad B = \frac{3^{-1}}{3^{-2}}$$

$$C = (5^0)^4 \quad D = 3^2 \times 2^2$$

Exercices

- 40** Calculer les expressions suivantes et écrire le résultat sous la forme a^p où a est un nombre et p est un entier relatif.

$$A = \frac{3^{-4} \times 3^7}{3^5} \quad B = \frac{5^{21}}{5^{-4} \times 5^{11}} \quad C = \frac{2,8^0}{2,8^{-11} \times 2,8^5}$$

$$D = \frac{9^{-2} \times 9^{-1}}{9^{-5}} \quad E = \frac{11^5 \times 11^{-6}}{11^{-7} \times 11^8} \quad F = \frac{7^{10} \times 7^{13}}{7^2 \times 7^{-4}}$$

- 41** a est un nombre non nul. Simplifier les expressions suivantes et écrire le résultat sous la forme a^p où p est un entier relatif.

$$A = \frac{a^5 \times a^{-9}}{a^{-6}} \quad B = \frac{a^{-3} \times a^{-6}}{a^{-12}} \quad C = \frac{a^2}{a^3 \times a^5}$$

$$D = \frac{a^{-2} \times a^{-1}}{a^{-6} \times a^4} \quad E = \frac{a^3 \times (a^{-3})^3}{a^{12} \times a^{15}} \quad F = \frac{a^{-17} \times a^{14}}{(a^{-2})^2 \times a^{-3}}$$

- 42** Écrire chaque produit sous la forme a^p où a est un nombre relatif et p est un entier relatif.

$$A = 27 \times 3^2$$

$$B = 16 \times 2^{-2}$$

$$C = 5^{-1} \times 125 \times 5^4$$

$$D = (10^2)^3 \times 10\,000 \times 10^{-6}$$

- Pour les exercices 43 à 46**, recopier et compléter chaque égalité.

43 a. $3^{---} \times 3^{17} = 3^{-2}$ b. $\frac{2^3}{2^{---}} = 2^{-5}$

c. $(5^4)^{---} = 5^{-16}$ d. $a^2 \times a^{---} = a^{-7}$

e. $\frac{b^{---}}{b^{-4}} = b^4$ f. $(c^{-2})^{---} = c^6$

44 a. $5^{---} \times 5^2 \times 5^9 = 5^7$ b. $\frac{3^{---} \times 3^{-1}}{3^4} = 3^2$

c. $(2^{---})^{-3} \times 2^5 = 2^{11}$ d. $\frac{7^{-3} \times 7^{10}}{(7^{---})^3} = 7^{-2}$

45 a. $(5a)^2 = \text{---} a^2$ b. $(2a)^4 = \text{---} a^4$

c. $(-4a)^3 = \text{---} a^3$ d. $6^5 \times a^5 = (\text{---})^5$

46 a. $8a^3 = (\text{---})^3$ b. $-4a^2 = -(\text{---})^2$

c. $-27a^3 = (\text{---})^3$ d. $-144a^4 = -(\text{---})^{---}$

- 47** Écrire chaque produit sous la forme $(ab)^p$ où a est un nombre relatif et p est un entier relatif.

$$A = 2^5 \times 0,5^5 \quad B = 0,001^{-6} \times 10^{-6}$$

$$C = 3^5 \times 4^2 \times 4^3 \quad D = \left(\frac{1}{5}\right)^7 \times 10^7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$E = (3^2)^5 \times 2^{10} \quad F = 7^{-3} \times \frac{1}{4^3}$$

- 48** a et b sont deux nombres non nuls. Écrire chaque produit sous la forme $(ab)^p$ où p est un entier relatif.

$$A = b^7 \times a^7 \quad B = a^{-3} \times a^{-2} \times b^{-5}$$

$$C = \frac{a^4 \times b^2}{b^{-2}} \quad D = a^3 \times a^0 \times a^1 \times \frac{1}{b^{-4}}$$

$$E = \frac{1}{a^{-2}} \times \frac{1}{b^{-2}} \quad F = (a^4)^{-3} \times (b^{-4})^3$$

- Pour les exercices 49 à 51**, a et b sont deux nombres non nuls. Écrire chacune des expressions données sous la forme $a^n \times b^p$.

49 $A = 25 \times 27 \quad B = 2^4 \times 5^{-3} \times 16 \times 5^7$

$$C = \frac{49 \times 14 \times 7^3}{2^4} \quad D = \frac{125 \times 27}{5^{-2} \times 3}$$

50 $A = 2^4 \times 3^{-1} \times 3^7 \times 2^{-3}$

$$B = (7^2)^{-1} \times 3^5 \times 7^2 \times (3^{-5})^{-2}$$

$$C = \frac{(3^2)^4 \times 2^5 \times 3^{-1} \times 2^{-8}}{(2^2)^{-1} \times 3}$$

$$D = \frac{5 \times (3^{-4})^2 \times 5^7}{3^{-6} \times 5^{-2} \times (3^{-1})}$$

51 $A = a^3 \times b^4 \times a^7 \times (b^2)^{-4} \quad B = a^5 \times b^7 \times a^4 \times b^1$

$$C = \frac{a^{-1} \times a^4 \times b^{-2}}{b^2 \times a} \quad D = \frac{a^3 \times b^{-1} \times a^2}{(a^2)^3 \times (b^{-1})^{-2}}$$

Factorisation

- Pour les exercices 52 à 56**, factoriser les expressions suivantes puis les simplifier si possible.

52 $A = 2^{10} - 2^9 \quad B = 3^{20} - 3^{21}$

$$C = 5^{12} + 5^{11} \quad D = 7^{31} + 7^{29}$$

53 $A = 5^{19} - 4 \times 5^{18} \quad B = 2^{10} + 2^9 - 2^8$

$$C = 3^{12} - 10 \times 3^{10} + 3^{11} \quad D = 10^{21} - 10^{22} + 10^{20}$$

54 $A = 2^{-10} - 2^{-9} \quad B = 3^{-20} - 4 \times 3^{-21}$

$$C = 5^{-12} + 5^{-11} \quad D = 7^{-31} + 7^{-29}$$

55 $A = x^n + x^{m+n} \quad B = 10 \times x^n - 9 \times x^n$

$$C = -3 \times x^n + 4 \times x^n \quad D = x^n \times (1 + y) - x^n \times y$$

56 $A = 10 \times 4^7 - 10 \times 4^5 \quad B = 2^2 \times 3^4 + 2^4 \times 3^2$

$$C = 5^{-2} \times 2^5 + 2^3 \times 5^{-3} \quad D = 10^6 + 15^6$$

- 57** Factoriser chaque expression, puis donner la notation scientifique des résultats.

$$A = 23 \times 10^{23} + 1\,200 \times 10^{21}$$

$$B = -167 \times 10^{45} + 0,002 \times 10^{49}$$

$$C = 3,56 \times 10^{-7} + 56 \times 10^{-9}$$

$$D = 234 \times 10^{-37} - 45\,021 \times 10^{-40}$$

- 58** Écrire le plus simplement possible les quotients suivants :

$$A = \frac{520 \times 10^4 - 4 \times 10^6}{6 \times 10^{-3}}$$

$$B = \frac{3,24 \times 10^{11} + 0,02 \times 10^{13}}{5 \times 10^2}$$

$$C = \frac{34 \times 10^{-9} + 21 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-5}}$$

$$D = \frac{1\,200 \times 10^{-23} - 350 \times 10^{-22}}{46 \times 10^8}$$

Faire le point

59 QCM Indiquer, dans chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les quatre réponses proposées.

		A	B	C	D
1	$4^5 \times 4^7 =$	4^{12}	4^{35}	$2^{10} \times 2^{14}$	2^{24}
2	$7^{51} \times \frac{7^{-42}}{7^{-25}} =$	7^{34}	$7^{51-42-(-25)}$	7^{-16}	7^{118}
3	$(3^{-2})^3 \times 3^6 =$	3^1	3^0	0	1
4	Pour b non nul, on a : $\frac{a^3 \times b}{b^{-2}} =$	$a^3 \times b^{-1}$	$(a \times b)^3$	$\frac{a^3}{b^{-1}}$	$a^3 \times b^3$
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{2^{-2}}{2^{-4}} =$	$\frac{1}{2}$	2	2^{-1}	1
6	$3^{28} - 3^{29} =$	-2×3^{28}	3^{57}	3^{-1}	0
7	$a^k - a^{k+1} =$	a^1	$a^k(1-a)$	$a^{k+1}(a-1)$	$a^{k+1}(a^{-1}-1)$
8	Pour b non nul, on a : $\frac{a^4}{b^4} =$	$\left(\frac{a}{b}\right)^4$	$(ab^{-1})^4$	$a^4 \times b^4$	$\frac{a}{b}$
9	Un ordre de grandeur de $2^{10} - 3^3$ est :	100	10^3	10^4	1 000
10	La notation scientifique de $617,8 \times 10^{-4}$ est :	$0,6178 \times 10^{-1}$	$6,178 \times 10^{-1}$	$6,178 \times 10^{-2}$	$6,178 \times 10^{-6}$
11	$3^4 - 2^2 \times 5^2 =$	$9^2 - 100$	$1^2 \times 5^2$	-19	$(3^2 - 2 \times 5)^2$

Je rédige Pour chacun des exercices, on demande une solution rédigée.

• Calculer avec des puissances d'un même nombre

60 Écrire chaque nombre sous la forme a^p où a est un nombre relatif et p est un entier relatif.

$$A = 10^5 \times 10^{-6} \times 10^8 \quad B = \frac{1}{0,2^4 \times 0,2^{-2}}$$

$$C = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}} \quad D = \frac{7^2 \times 7^{-1} \times 7^3}{7^5 \times 7^{-7}}$$

• Calculer des puissances de puissances

61 Écrire chaque nombre sous la forme a^p où a est un nombre relatif et p est un entier relatif.

$$A = (1,5^2)^3 \times (1,5^{-1})^{-1} \quad B = (2^4)^{-1} \times (2^{-2})^3$$

$$C = (15^0)^3 \times (15^8)^0 \quad D = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^6\right)^2 \times \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{-2}$$

• Calculer le produit et le quotient de deux puissances ayant le même exposant

62 a est un nombre non nul. Écrire chaque nombre sous la forme a^p où p est un entier relatif.

$$A = 10^{12} \times 0,1^{12} \quad B = \frac{1}{16} \times 6^4$$

$$C = a^5 \times \left(\frac{12}{a}\right)^5 \quad D = 2^{-6} \times 3^{-6} \times 5^{-6}$$

• Factoriser des expressions contenant des puissances

63 Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 3 \times 10^4 - 2 \times 10^4 \quad B = a^7 - a^5$$

$$C = 3^2 \times 5^2 - 3^4 \quad D = 2^5 \times 7^6 - 2^3 \times 7^8$$

• Calculer une expression contenant des puissances

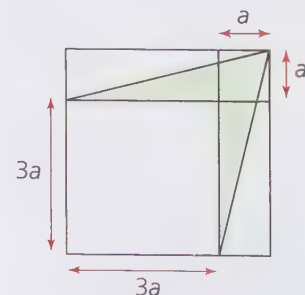
64 Calculer les expressions suivantes :

$$A = 2^3 \times 5^2 - 3^5 \quad B = 2^3 + 5^2 - 3^5$$

$$C = 2^3 \times (5^2 - 3^5) \quad D = 2^3 - 5^2 \times 3^5$$

Approfondir

- 65** Soit ABC un triangle tel que :
 $AB = 3^5$, $AC = 3^5$ et $BC^2 = 3^{11}$.
 ABC est-il un triangle rectangle ?
- 66** Soit IJK un triangle rectangle en K tel que :
 $IK^2 = 21^2 \times 3$ et $JK^2 = 21^2$.
 Sans utiliser de calculatrice, calculer la longueur IJ.
- 67** ABC est un triangle tel que : $AB = 6 \times 10^7$ et $AC = 3 \times 10^8$.
 M est un point du côté [AB] et N est un point du côté [AC] tels que : $(MN) \parallel (BC)$, $AM = 2 \times 10^4$ et $MN = 5 \times 10^6$.
 a. Faire une figure à main levée.
 b. Calculer AN et BC.
- 68** On considère les points B, A et M alignés dans cet ordre ainsi que les points C, A et N alignés dans cet ordre.
 On donne : $AB = 3^7$, $AC = (3^{-1})^{-4}$, $AM = 3^5$, $AN = 3^2$ et $MN = 3^3 \times 10$.
 a. Faire une figure à main levée.
 b. Calculer la longueur BC.
- 69** a. Calculer les expressions suivantes, puis exprimer les résultats sous la forme d'une puissance.
 $A = 1 + 3$ $B = 1 + 3 + 5$ $C = 1 + 3 + 5 + 7$
 b. Sans faire le calcul, peut-on prévoir la valeur de $D = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$?
 c. Vérifier la conjecture du b.
- 70** a. Expliquer pourquoi on peut écrire un nombre pair sous la forme $2n$ avec n entier naturel.
 b. Démontrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair.
 c. Démontrer que le cube d'un nombre pair est un nombre pair.
- 71** a. Expliquer pourquoi on peut écrire un nombre impair sous la forme $2n + 1$ avec n entier naturel.
 b. Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.
- 72** a. Décomposer 294 en un produit de puissances de 6 et de 7.
 b. Trouver un entier positif n tel que : $n^3 - n^2 = 294$.
- 73** a. Démontrer que si n est un entier positif, alors :
 $2n^2 + n = n(n + n + 1)$.
 b. Trouver un entier naturel n tel que : $2n^2 + n = 55$.
- 74** Écrire les expressions suivantes sous la forme a^n .
 $A = \frac{(-3)^3 \times 27}{-3^2 \times (-9)^5}$ $B = \frac{4^2 \times (-2^5)^3}{2^{20} \times 2^{-2}}$
- 75** Écrire les expressions suivantes sous la forme $a^n \times b^p$:
 $A = -45 \times 9^5 \times (5^{-2})^3 \times (-375)^3$ $B = \frac{100^5 \times 16}{(-4^5)^2 \times 5^3}$
- 76** Écrire les expressions suivantes sous la forme $a^n \times b^p \times c^m$.
 $A = \frac{(-3)^3 \times 7^{-4} \times 5^{-1}}{(-5)^{-3} \times (-21)^2}$ $B = \frac{27 \times (4^{-3} \times 10^2)^2 \times 75^{-3}}{4\,000^{-1} \times 16}$
- 77** Calculer, sans utiliser de calculatrice, les expressions :
 $A = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times 1,5^{11}$ $B = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{(8 \times 10^{-2})^3}{0,002^3}$
- 78** À quelle puissance faut-il élever 4^4 pour obtenir 8^8 ?
- 79** On pose : $ab = 5$.
 Calculer : $A = a^{-3} \times b^2 \times a^2 \times b^{-3}$ et $B = \frac{7a^5 \times b}{a^3 \times 2b^{-1}}$.
- 80** On pose : $a^2b = -2$.
 Calculer : $A = (ab)^8 \times a^8$ et $B = \frac{5a^4 \times 3(ab)^{-3}}{a^3 \times b^{-2}}$.
- 81** Combien d'entiers naturels de 5 chiffres, peut-on écrire avec les chiffres 2, 3 et 7 ?
- 82** Combien d'entiers naturels de 7 chiffres peut-on écrire avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 ?
- 83** Ranger dans l'ordre décroissant les nombres suivants :
 2^{-3} ; $2^{(3^5)}$; 2^{-5} ; $2^{(5^3)}$.
- 84** a. Ranger par ordre croissant les nombres suivants :
 $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2^3}$; $\frac{1}{2^{-2}}$; $\frac{1}{2^4}$; $\frac{1}{2^2}$.
 b. Ranger par ordre décroissant les nombres suivants.
 2^{-2} ; 2^4 ; 2 ; 2^{-3} ; 2^3 .
- 85** Soit a un nombre strictement positif. Quel est le plus grand nombre parmi les nombres ci-dessous ?
 $(2a)^2$; $2 \times (a^2)$; $(3a) \times a$; $(2a) \times (3a)$; $2a \times 2a$.
- 86** Quel est le chiffre des unités de $45^{1\,081}$? Justifier.
- 87** Quel est le chiffre des unités de $2\,009^{2\,009}$? Justifier.
- 88** Quel est le chiffre des unités de 102^{30} ? Justifier.
- 89** Déterminer sans calculatrice combien de chiffres comporte l'écriture du nombre $4^5 \times 5^{13}$.
- 90** Exprimer, en fonction de a , l'aire colorée dans le carré ci-dessous.



91 Le jeu d'échec

Une légende raconte que le roi des Indes voulut remercier un de ses sujets, nommé Sessa, pour avoir inventé le jeu d'échec. Sessa demanda qu'on lui offrît un grain de riz sur la première case de l'échiquier deux sur la seconde, ... en doublant sur chaque case le nombre de grain de riz présent sur la case précédente.

- Sachant qu'un jeu d'échec comporte 64 cases, déterminer le nombre de grains de riz déposés sur la 64^e case. Donner le résultat en utilisant la puissance d'un nombre.
- Donner un ordre de grandeur de ce nombre. La demande de Sessa est-elle réaliste ?

92 Démontrer que : $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-7} = -\left(\frac{4}{3}\right)^7$.

93 Montrer que les nombres A et B sont des entiers naturels.

$$A = \frac{(-4)^{-4} \times 16^2 \times 3^5}{3^{(2^2)}} \quad B = \frac{2^{11} \times 0,5^{13}}{4^{-2}}$$

94 Montrer que les nombres A et B sont des nombres décimaux.

$$A = \frac{3 \times 10^2}{256\,000} \quad B = \frac{35 \times 14}{25 \times 160}$$

95 On veut calculer la somme suivante :

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{49} + 2^{50}.$$

- Démontrer que pour tout entier n : $2^n = 2^{n+1} - 2^n$.
- En utilisant la question a, écrire S comme une somme de différence de puissances de 2.
- En déduire une valeur de S.

Argumenter et débattre

96 Le grand théorème de Fermat

Si n est un nombre entier strictement supérieur à 2 alors il n'existe pas d'entiers naturels non nuls x , y et z tels que : $x^n + y^n = z^n$.

Trouver des valeurs de x , y et z pour que l'égalité soit vraie pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

97 Pourquoi a-t-on l'égalité $32^{16} = 16^{20}$?

98 Sachant que 1 024 est plus grand que 1 000, pourquoi peut-on affirmer que 2^{20} est plus grand que 1 000 000 ?

99 Si on découpe un cube de 1 m^3 de volume en petits cubes de 1 dm^3 de volume et si on empile ces petits cubes, quelle est la hauteur de la pile obtenue ?

100 Mehdi a fait tomber sa calculatrice ; elle affiche encore les nombres mais elle ne fait plus que quatre opérations :

- multiplier par 2 ;
- multiplier par 3 ;
- élever au carré ;
- élever au cube.

Mehdi tape le nombre 15 et effectue successivement 5 opérations. Parmi les nombres suivants lesquels a-t-il pu obtenir ? Justifier.

$$A = 2^8 \times 3^5 \times 5^6$$

$$B = 2^6 \times 3^6 \times 5^4$$

$$C = 2^8 \times 3^4 \times 5^2$$

$$D = 2^3 \times 3^{13} \times 5^6$$

POUR LES CURIEUX

Marin Mersenne est un mathématicien et un philosophe français du XVII^e siècle qui a étudié les nombres pouvant s'écrire sous la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On nomme maintenant ces nombres les nombres de Mersenne.

1 a. Soient q et r deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

En utilisant la règle de distributivité :

$$(a-b)(c+d+e+\dots+y+z) = ac+ad+ae+\dots+ay+az-bc-bd-be-\dots-by-bz,$$

montrer que :

$$2^{qr} - 1 = (2^q - 1)(2^{q(r-1)} + 2^{q(r-2)} + 2^{q(r-3)} + \dots + 2^q + 1).$$

b. Soit n un nombre entier naturel qui n'est pas premier. Déduire de la question précédente que le nombre de Mersenne : $M_n = 2^n - 1$ n'est pas un nombre premier non plus.

2 En revanche, lorsque n est un nombre premier, certains de ces nombres sont premiers. Déterminer cinq nombres premiers de Mersenne.

Les nombres premiers de Mersenne pour $n=2$, $n=3$, $n=5$ et $n=7$ étaient connus dès l'Antiquité.

Le cinquième a été découvert au XV^e siècle par un inconnu. Les deux suivants ont été trouvés par Cataldi en 1588 et Euler en trouva encore un en 1750.

Puis, jusqu'en 1952, seuls quatre nombres premiers de Mersenne ont encore été trouvés.

Depuis, grâce à l'utilisation d'ordinateurs très performants, la « chasse » continue et, à l'heure actuelle, on connaît 44 nombres premiers de Mersenne. Le plus grand nombre premier connu est le nombre premier de Mersenne $2^{32\,582\,657} - 1$. Il a été découvert en 2006 et il comporte 9 808 358 chiffres !

Les nombres premiers sont des éléments clés pour la cryptographie et la sécurité, c'est pourquoi la recherche de ces nombres est indispensable.



Étudier l'aire des triangles

On construit une suite de triangles équilatéraux de la manière suivante :

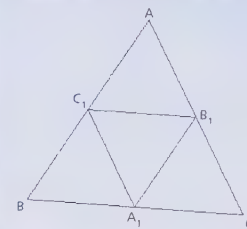
On trace un triangle ABC équilatéral, puis on place les milieux respectifs A_1 , B_1 et C_1 des côtés [BC], [AC] et [AB] : on obtient un triangle $A_1B_1C_1$.

En plaçant les milieux respectifs A_2 , B_2 et C_2 des côtés $[B_1C_1]$, $[A_1C_1]$ et $[A_1B_1]$, on obtient alors un nouveau triangle $A_2B_2C_2$. On obtient de la même manière les triangles $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, etc.

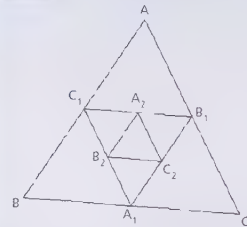
On veut étudier les aires de ces triangles.

1 Conjecturer

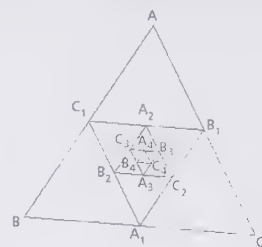
1. a. Créer un triangle équilatéral ABC.
- b. Créer les milieux A_1 , B_1 et C_1 des segments [BC], [AC] et [AB].
- c. Créer le triangle $A_1B_1C_1$.



2. a. Créer les milieux A_2 , B_2 et C_2 des segments $[B_1C_1]$, $[A_1C_1]$ et $[A_1B_1]$.
- b. Créer le triangle $A_2B_2C_2$.
- c. De la même façon, construire les triangles $A_3B_3C_3$ et $A_4B_4C_4$.



3. Afficher :
 - l'aire a_0 du triangle ABC,
 - l'aire a_1 du triangle $A_1B_1C_1$,
 - l'aire a_2 du triangle $A_2B_2C_2$,
 - l'aire a_3 du triangle $A_3B_3C_3$,
 - l'aire a_4 du triangle $A_4B_4C_4$.
4. À l'aide de la calculatrice, afficher :
 - le quotient q_0 de a_1 par a_0 ,
 - le quotient q_1 de a_2 par a_0 ,
 - le quotient q_2 de a_3 par a_0 ,
 - le quotient q_3 de a_4 par a_0 .



Quelle conjecture peut-on faire ?

2 Démontrer

Soit a la longueur d'un côté du triangle équilatéral ABC.

- a. Déterminer la longueur des côtés du triangle $A_1B_1C_1$. En déduire l'aire de $A_1B_1C_1$.
- b. Déterminer la longueur des côtés du triangle $A_2B_2C_2$. En déduire l'aire de $A_2B_2C_2$.
- c. Conclure.
- d. Quelle sera l'aire du triangle $A_7B_7C_7$?

4

Racine carrée



Fibonacci (1170-1245), un mathématicien italien, inventa la suite de nombres suivante: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...** On obtient le nombre suivant de la liste en **additionnant les deux nombres précédents**.

Cette liste est infinie. Comparez maintenant le quotient de deux nombres successifs de cette suite (5 par 3, ou 8 par 5) à la valeur $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Que constatez-vous?

Suite de Fibonacci sur la cheminée d'un bâtiment industriel de Turku en Finlande

Les mathématiciens grecs savaient, en appliquant le théorème de Pythagore, que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 était égale à $\sqrt{2}$. Quand ils découvrirent et démontrèrent qu'on ne pouvait **exprimer**

exactement cette longueur par une fraction (les seuls nombres qu'ils connaissaient jusque-là), ils furent **désespérés**. Ils

nommèrent ces nombres **irrationnels**, ce qui signifie étymologiquement « que l'on ne peut pas compter ».



Dans le format international, le rapport de la longueur sur la largeur des **feuilles de papier** est toujours égal à $\sqrt{2}$. Pour cette raison, si on **plie en deux une feuille**, la nouvelle feuille conservera les mêmes proportions. On passe ainsi du format **A0**, dont la feuille a une surface de **1 m²**, au format **A1**, puis **A2, A3, A4...**



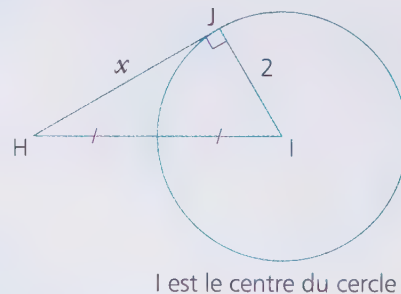
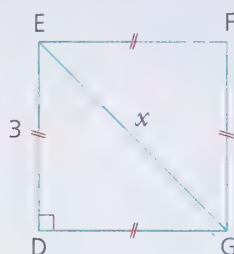
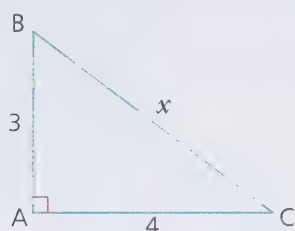
QCM

Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	Le carré de 5 est égal à :	5×5	2×5	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
2	Le carré de 5 se note :	2^5	5^2	2×5
3	$0^2 =$	0	1	2
4	$-10^2 =$	100	-100	0,01
5	Les carrés de -7 et 7 sont égaux à :	-49	49	-49 pour l'un, 49 pour l'autre
6	64 est le carré de :	8	32	128
7	25 est le carré de :	5 et -5	5 uniquement	-5 uniquement
8	0,36 est le carré de :	0,06	0,6	0,18
9	10^6 est le carré de :	10^3	10^4	10^{-3}
10	Quand on tape $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{\div} \boxed{7}$ sur la calculatrice, on peut lire à l'écran : 1,428571429	1,43 est une valeur approchée par défaut de $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{\div} \boxed{7}$	1,43 est une valeur approchée par excès de $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{\div} \boxed{7}$	Ce résultat est la valeur exacte de $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{\div} \boxed{7}$

Exercice 1 a. Énoncer le théorème de Pythagore.

b. À l'aide du théorème de Pythagore, calculer la valeur exacte de la longueur x dans chacun des cas suivants (l'unité choisie est le centimètre) :



Exercice 2 Quel est le signe de chacun des nombres suivants ?

- a. -5^2 b. $(-2)^2$ c. 10^{-2} d. $-(-3)^2$ e. $(-10)^{-2}$ f. $(-5)^4$ g. -10^{-4}

Exercice 3 a. Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit dont l'un des facteurs est 225 ou sous la forme d'un quotient dont le numérateur est 225.

A = 2,25 B = 22 500 C = 22,5 D = 2 250 E = 0,225 F = 0,0225

b. Recopier et compléter :

Soient a et b deux nombres entiers relatifs non nuls. On a : $a^2 \times b^2 = (\dots)^2$ et $\frac{a^2}{b^2} = (\dots)^2$.

c. On donne : $225 = 15^2$. Sachant que $\sqrt{10}$ n'est pas un nombre décimal, reconnaître parmi les nombres donnés dans la question a ceux qui sont le carré d'un nombre décimal et préciser dans chaque cas de quel nombre il s'agit.

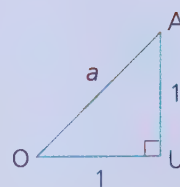
Exercice 4 Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit dont au moins un des facteurs est un carré (autre que 1). Donner toutes les solutions possibles.

- a. 18 b. 48 c. 80 d. 72 e. 28 f. 1 000 g. 360 h. 108

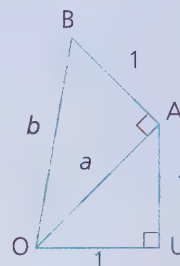
Activité 1 Racine carrée d'un nombre positif

1 Racine carrée d'un nombre entier

a. On considère le triangle OUA rectangle et isocèle en U représenté ci-contre. On choisit pour unité de longueur la longueur OU. Les côtés de l'angle droit ont donc pour longueur 1 et on appelle a la longueur de son hypoténuse. Calculer a^2 . Peut-on déterminer la valeur numérique de a sans calculatrice ? Que doit vérifier cette valeur ? On utilise le symbole $\sqrt{\quad}$ pour exprimer la valeur exacte de a .



b. À partir du triangle précédent, on construit un nouveau triangle OAB rectangle en A dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur a et 1. On appelle b la longueur de son hypoténuse. Calculer b^2 . Exprimer la valeur exacte de b .



c. On poursuit de manière analogue la construction : l'hypoténuse du dernier triangle construit forme un côté de l'angle droit du nouveau triangle, l'autre côté de l'angle droit étant de longueur 1. On appelle les longueurs des hypoténuses des triangles rectangles successifs c, d, e , etc.



Quelles sont les valeurs de chacun des nombres c^2, d^2, e^2 ? Exprimer les valeurs exactes des nombres c, d, e .

d. Cette construction s'appelle l'**escargot de Pythagore**. Quels nombres permet-il de construire ?

e. Recopier et compléter :

Pour tout nombre entier a positif, il existe un nombre positif, noté $\sqrt{a}$, tel que son $\square$ est égal à $\square$.

2 Racine carrée d'un nombre rationnel positif

Calculer sans calculatrice le nombre $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$.

On donnera le résultat sous la forme d'un nombre en écriture fractionnaire.

Peut-on en déduire qu'il existe un nombre a tel que

$$a^2 = \frac{2}{3} ?$$



Activité 2 Solutions de l'équation $x^2 = a$

On admet que l'équation $x^2 = a$ a au plus deux solutions

- 1 a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2											

- b. Quels nombres ont pour carré :

• 25 • 16 • 9 • 4 • 1

- c. Calculer $(\sqrt{2})^2$ et $(-\sqrt{2})^2$, puis calculer $(\sqrt{3})^2$ et $(-\sqrt{3})^2$.

- d. Quels sont les nombres qui ont pour carré 2 ? Quels sont les nombres qui sont solutions de l'équation $x^2 = 2$?

- e. Quels sont les nombres qui ont pour carré 3 ? Quels sont les nombres qui sont solutions de l'équation $x^2 = 3$?

- f. À partir de ces exemples, quelles semblent être les solutions de l'équation $x^2 = a$ lorsque a est un nombre strictement positif ?

- 2 Quel(s) nombre(s) ont pour carré 0 ? Quelle(s) solution(s) l'équation $x^2 = 0$ a-t-elle ?

- 3 - 9 peut-il être le carré d'un nombre ? Un nombre négatif peut-il être un carré ?

- 4 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 11$

b. $x^2 = 81$

c. $x^2 = 0,01$

d. $x^2 - 4 = 0$

Activité 3 Racine carrée et calculatrice

- 1 a. À l'aide de la calculatrice, calculer la racine carrée de 2. Qu'affiche l'écran de la calculatrice ?

- b. Sans retaper le résultat obtenu, élever au carré le nombre affiché. Que constate-t-on ?

- c. Calculer $1,414\,213\,562^2$ à la calculatrice. Qu'affiche l'écran ?

- d. Peut-on en conclure que le nombre 1,414 213 562 est la valeur exacte de $\sqrt{2}$?

- 2 a. De la même manière, à l'aide de la calculatrice, calculer la racine carrée du nombre 29,920 9.

- b. Le nombre 5,47 est-il la valeur exacte de $\sqrt{29,920\,9}$?

- 3 Comment savoir si le résultat affiché est une valeur arrondie ou une valeur exacte ?

- 4 On regardant uniquement le dernier chiffre du résultat affiché sur la calculatrice, comment pourrait-on savoir si ce résultat est une valeur arrondie de la racine carrée ?



Activité 4

Racine carrée et opérations

A Multiplication

- 1 a. Comparer les nombres suivants en s'aidant, si nécessaire, de la calculatrice. Que constate-t-on ?
- $\sqrt{36}$ et $\sqrt{9} \times \sqrt{4}$
 - $\sqrt{400}$ et $\sqrt{50} \times \sqrt{8}$
 - $\sqrt{2\,601}$ et $\sqrt{17} \times \sqrt{153}$
 - $\sqrt{289}$ et $\sqrt{2,89} \times \sqrt{100}$
 - $\sqrt{0,81}$ et $\sqrt{4,5} \times \sqrt{0,18}$
- b. Si a et b sont deux nombres positifs, que peut-on conjecturer concernant les nombres $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$?
- 2 a. Démontrons la conjecture établie dans la question 1 b.
Soient a et b deux nombres positifs.
On admet la propriété suivante : m et n étant deux nombres positifs, si $m^2 = n^2$, alors $m = n$.
- b. • Quel est le signe de $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$?
• Calculer $(\sqrt{ab})^2$ et $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$.
• En déduire en utilisant la propriété admise ci-dessus que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

B Quotient

- 1 a. Comparer les nombres suivants en s'aidant, si nécessaire, de la calculatrice. Que constate-t-on ?
- $\sqrt{\frac{25}{4}}$ et $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$
 - $\sqrt{\frac{45}{20}}$ et $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}}$
 - $\sqrt{\frac{1,44}{0,01}}$ et $\frac{\sqrt{1,44}}{\sqrt{0,01}}$
- b. Si a est un nombre positif et b un nombre strictement positif, que peut-on conjecturer concernant les nombres $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$?
- 2 Démontrons la conjecture établie dans la question 1 b.
Soient a un nombre positif et b un nombre strictement positif.
Montrer, en suivant le même raisonnement que dans la question A2, que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

C Addition et soustraction

- 1 Comparer les nombres suivants :
- $\sqrt{9+16}$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16}$
 - $\sqrt{100-36}$ et $\sqrt{100} - \sqrt{36}$
 - $\sqrt{9^2+18^2}$ et $9+18$
- Semble-t-il possible de citer une propriété sur la racine carrée d'une somme ou d'une différence ?

- 2 Recopier et compléter :
- Si a et b sont deux nombres positifs, alors $\sqrt{ab} = \dots$.
- Si a est un nombre positif et b un nombre strictement positif, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \dots$.
- En général, la racine carrée d'une $\dots$ (ou d'une $\dots$) n'est pas $\dots$ à la $\dots$ (ou à la $\dots$) des racines carrées des deux termes de la $\dots$ (ou de la $\dots$).

A Racine carrée d'un nombre positif

1 Notion de racine carrée

Définition

Soit a un nombre positif.

Il existe un, et un seul, nombre positif dont le carré est a . Ce nombre s'appelle la **racine carrée de a** et se note $\sqrt{a}$.

Autrement dit : pour $a \geq 0$, il existe un, et un seul, nombre $\sqrt{a}$ tel que $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Le symbole $\sqrt{\quad}$ s'appelle « radical » et $\sqrt{a}$ se lit « racine carrée de a ».

Exemples

► Le nombre 9 est positif, donc la racine carrée de 9 existe. La racine carrée de 9 est 3.

En effet, $3 > 0$ et $3^2 = 9$.

On peut écrire $\sqrt{9} = 3$.

► Le nombre 2,89 est positif, donc la racine carrée de 2,89 existe. La racine carrée de 2,89 est 1,7.

En effet, $1,7 > 0$ et $1,7^2 = 2,89$.

On peut écrire $\sqrt{2,89} = 1,7$.

Remarque : Soit a un nombre positif. Si a n'est pas le carré d'un nombre décimal ou rationnel, alors la valeur exacte de la racine carrée de a est notée $\sqrt{a}$. La calculatrice peut en donner une valeur décimale arrondie.

Par exemple, la valeur exacte de la racine carrée de 10 est le nombre $\sqrt{10}$. Avec la calculatrice, on peut obtenir l'arrondi au millième de $\sqrt{10}$. On écrit : $\sqrt{10} \approx 3,162$.

2 Racine carrée de b^2

Propriété

Soit b un nombre positif.

• Si $b > 0$, alors $\sqrt{b^2} = b$.

• Si $b = 0$, alors $\sqrt{b^2} = 0$.

Exemple

► $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$

Si $b < 0$, alors $\sqrt{b^2} = -b$.

B Solutions de l'équation $x^2 = a$

Propriété

Soit l'équation $x^2 = a$ où x est l'inconnue et a un nombre donné.

• Si $a > 0$, alors cette équation a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

• Si $a = 0$, alors cette équation a une seule solution : 0.

• Si $a < 0$, alors cette équation n'a pas de solution.

Exemples

► L'équation $x^2 = 9$ a deux solutions : 3 et -3.

► L'équation $x^2 = 7$ a deux solutions : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

► L'équation $x^2 = -100$ n'a pas de solution.

Racine carrée et opérations

1 Racine carrée et produit

Propriété

La racine carrée d'un produit de deux nombres positifs est égale au produit des racines carrées de chacun des facteurs de ce produit.

Autrement dit : pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a :

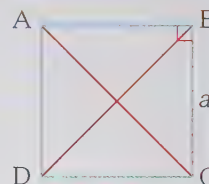
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Exemples

- ▶ $\sqrt{48}$ peut s'écrire $4\sqrt{3}$. En effet :
 $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$
- ▶ $\sqrt{7,2}$ peut s'écrire $1,2\sqrt{5}$. En effet :
 $\sqrt{7,2} = \sqrt{1,44 \times 5} = \sqrt{1,44} \times \sqrt{5} = 1,2\sqrt{5}.$
- ▶ $\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36} = 6$
- ▶ Dans le carré ABCD de côté a ci-contre, la longueur de la diagonale AC est égale à :

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = a\sqrt{2}.$$

Il n'est pas obligatoire d'écrire le symbole « $\times$ » dans un produit dont un des facteurs est une racine carrée. Par exemple,
 $6 \times \sqrt{13} = 6\sqrt{13}.$



2 Racine carrée et quotient

Propriété

La racine carrée du quotient d'un nombre positif par un nombre strictement positif est égale au quotient de la racine carrée du numérateur par la racine carrée du dénominateur.

Autrement dit : pour $a \geq 0$ et $b > 0$, on a :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Exemples

$$\sqrt{\frac{11}{49}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{11}}{7} \qquad \sqrt{\frac{50}{10}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}} = \sqrt{5}$$

3 Addition et soustraction

- En général, la racine carrée d'une somme **n'est pas égale** à la somme des racines carrées des deux termes de la somme.
- En général, la racine carrée d'une différence **n'est pas égale** à la différence des racines carrées des deux termes de la différence.

Exemples

- ▶ $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.
Or $5 \neq 7$, donc $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}.$
- ▶ $\sqrt{225-144} = \sqrt{81} = 9$ et $\sqrt{225} - \sqrt{144} = 15 - 12 = 3$.
Or $9 \neq 3$, donc $\sqrt{225-144} \neq \sqrt{225} - \sqrt{144}.$

Savoir-faire 1 Développer une expression comportant des racines carrées

Énoncé Développer, puis simplifier les expressions suivantes :

$$A = 3(2\sqrt{5} - \sqrt{7}) \quad B = \sqrt{2}(5\sqrt{7} + 4\sqrt{3}) \quad C = (9 - 2\sqrt{2})(3\sqrt{7} + 5)$$

Résolution

$$\bullet A = 3(2\sqrt{5} - \sqrt{7})$$

$$A = 3 \times 2\sqrt{5} - 3 \times \sqrt{7}$$

$$A = 3 \times 2 \times \sqrt{5} - 3 \times \sqrt{7}$$

$$A = 6\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$$

$$\bullet B = \sqrt{2}(5\sqrt{7} + 4\sqrt{3})$$

$$B = \sqrt{2} \times 5\sqrt{7} + \sqrt{2} \times 4\sqrt{3}$$

$$B = 5 \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} + 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

$$B = 5\sqrt{2 \times 7} + 4\sqrt{2 \times 3}$$

$$B = 5\sqrt{14} + 4\sqrt{6}$$

$$\bullet C = (9 - 2\sqrt{2})(3\sqrt{7} + 5)$$

$$C = 9 \times 3\sqrt{7} + 9 \times 5 - 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{7} - 2\sqrt{2} \times 5$$

$$C = 27\sqrt{7} + 45 - 2 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} - 2 \times 5 \times \sqrt{2}$$

$$C = 27\sqrt{7} + 45 - 6\sqrt{2 \times 7} - 10\sqrt{2}$$

$$C = 27\sqrt{7} + 45 - 6\sqrt{14} - 10\sqrt{2}$$

On applique la distributivité :

$$a(b - c) = ab - ac$$

avec $a = 3$; $b = 2\sqrt{5}$ et $c = \sqrt{7}$.

$$2\sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5}$$

On effectue les produits et on simplifie l'écriture.

On applique la distributivité.

On change l'ordre des facteurs de chaque produit pour regrouper les racines carrées.

On effectue les produits sous les radicaux en appliquant la propriété $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

On applique la distributivité :

$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$$

avec $a = 9$; $b = 2\sqrt{2}$; $c = 3\sqrt{7}$ et $d = 5$.

• On regroupe les racines carrées.

• On applique la propriété

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Savoir-faire 2 Factoriser une expression contenant des racines carrées

Énoncé 1. Mettre $\sqrt{3}$ en facteur dans l'expression : $A = 2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 24\sqrt{3}$ puis simplifier A.

2. Simplifier l'expression suivante : $B = 5\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - 12\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2}$.

Solution

$$1. A = 2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 24\sqrt{3}$$

$$A = (2 - 7 + 24)\sqrt{3}$$

$$A = 19\sqrt{3}$$

On applique la distributivité :
 $ba + ca = (b + c)a$.

On effectue les calculs dans la parenthèse.

$$2. B = 5\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - 12\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2}$$

$$B = 9\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3}$$

$$B = (9 - 3 + 15)\sqrt{2} + (5 - 12)\sqrt{3}$$

$$B = 21\sqrt{2} - 7\sqrt{3}$$

On regroupe tous les termes avec des $\sqrt{2}$
d'une part et tous les termes avec des $\sqrt{3}$
d'autre part.

On met en facteur $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Savoir-faire 3 Écrire un nombre sous la forme $a\sqrt{b}$

Énoncé Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels, b étant le plus petit possible.

$$\bullet A = \sqrt{72}$$

$$\bullet B = \sqrt{12} - \sqrt{27} + 5\sqrt{48}$$

Solution

$$\bullet A = \sqrt{72}$$

$$A = \sqrt{36 \times 2}$$

$$A = \sqrt{36} \times \sqrt{2}$$

$$A = 6\sqrt{2}$$

On veut écrire 72 sous la forme d'un produit dont un des facteurs est le plus grand carré entier possible.
 $72 = 18 \times 4 = 8 \times 9 = 2 \times 36$. 36 est le plus grand carré ici.

On applique la propriété $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

On applique la règle : pour $a > 0$, on a : $\sqrt{a^2} = a$.

$$\bullet B = \sqrt{12} - \sqrt{27} + 5\sqrt{48}$$

$$B = \sqrt{4 \times 3} - \sqrt{9 \times 3} + 5\sqrt{16 \times 3}$$

$$B = \sqrt{4} \times \sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{3} + 5\sqrt{16} \times \sqrt{3}$$

$$B = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5 \times 4\sqrt{3}$$

$$B = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$$

$$B = (2 - 3 + 20)\sqrt{3}$$

$$B = 19 \times \sqrt{3}$$

$$B = 19\sqrt{3}$$

On veut écrire chacun des nombres sous un radical sous la forme d'un produit dont :
– l'un des facteurs est un carré (ici 4, 9 et 16) ;
– l'autre facteur est commun à chacun des produits et est le plus petit possible (ici 3).

On applique la propriété $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

On applique la règle : pour $a > 0$, on a : $\sqrt{a^2} = a$.

On met $\sqrt{3}$ en facteur.

Le résultat final s'écrit sous la forme d'un produit dont le deuxième facteur est la racine carrée.



Écrire une fraction sans racine carrée au dénominateur

Énoncé Écrire les fractions suivantes sans racine carrée au dénominateur :

• $A = \frac{5}{\sqrt{7}}$ • $B = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$

Solution

• $A = \frac{5}{\sqrt{7}}$

$A = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}}$

$A = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

• $B = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}$

$B = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{4\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$

$B = \frac{3\sqrt{10}}{4 \times 5}$

$B = \frac{3\sqrt{10}}{20}$

On applique la définition de $\sqrt{a}$ pour $a > 0$:
 $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$. Ici $a = 7$.

On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par $\sqrt{5}$ car $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.

On applique la propriété : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
 Ici : $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$

On vérifie que la fraction ne peut pas se simplifier davantage :

- $\frac{3}{20}$ est une fraction irréductible ;
- $\sqrt{10}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$.



Racine carrée et priorité des opérations

Énoncé Calculer $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}$.

Solution

$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}$

$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2}}$

$A = \sqrt{2 + \sqrt{4}}$

$A = \sqrt{2 + 2}$

$A = \sqrt{4} = 2$

On commence par effectuer le calcul le plus à droite :
 $\sqrt{4} = 2$.

On continue en effectuant les calculs toujours les plus à droite : $\sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$.

S'entraîner

Racine carrée d'un nombre positif

- 1** Donner le carré puis le double de chacun des nombres ci-dessous.

3 ; -5 ; 0 ; 2 ; -1 ; 10 ; -7.

2 Calcul mental

Calculer le carré de chaque nombre.

6 ; -5 ; 0,2 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{-2}{5}$; $\frac{7}{-5}$.

Pour les exercices **3** à **5**, Calculer le carré de chaque nombre.

3 -10 ; $\frac{5}{4}$; -0,3 ; -7 ; 500 ; $\frac{-2}{3}$.

4 1,1 ; $-\frac{7}{2}$; 0,03 ; 2^3 ; $(-2)^3$.

5 -9 ; 2,5 ; 0,7 ; 3^{-1} ; -3^{-1} .

Pour les exercices **6** et **7**, déterminer le signe de chacun des nombres donnés.

6 $(-4)^2$; -4^2 ; $-(-4)^2$; $(4^{-1})^2$; $-(4^{-1})^2$.

7 $(-\frac{3}{5})^2$; $\frac{(-3)^2}{5^2}$; $(\frac{3}{5})^2$; $-\frac{3^2}{(-5)^2}$; $-(\frac{-3}{5})^2$; $-(\frac{-3}{-5})^2$; $\frac{(-3)^2}{-5^2}$.

- 8** Chasser l'intrus dans la liste de nombres ci-dessous.

$\frac{4^2}{7^2}$; $\frac{(-4)^2}{7^2}$; $-(\frac{-4}{-7})^2$; $(-\frac{4}{-7})^2$; $\frac{4^2}{(-7)^2}$.

- 9** Écrire chacun des nombres suivants sous la forme du carré d'un nombre positif.

49 ; 121 ; 0,04 ; $\frac{36}{100}$; 400 ; $\frac{0,64}{25}$.

- 10** Parmi les nombres suivants, lesquels ont une racine carrée ?

A = 0 B = -1 C = 81 D = $(-2)^2$
E = $5^2 + 3^2$ F = $5^2 - 3^2$ G = $3^2 - 5^2$

- 11** Parmi les nombres suivants, lesquels sont égaux à la racine carrée d'un nombre ? (On ne demande pas de déterminer ce nombre.)

$\sqrt{7}$; -2 ; π ; $\sqrt{81}$; $(-3)^2$.

- 12** Recopier et compléter les phrases :

- est le carré de ---
- est la racine carrée de ---

à l'aide des nombres de la liste ci-dessous. Donner toutes les possibilités.

11 ; 0,05 ; 121 ; 4 900 ; $\frac{81}{64}$; 70 ; 0,0025 ; $\frac{9}{8}$.

Pour les exercices **13** à **17**, sans utiliser de calculatrice, écrire chacun des nombres donnés sans radical.

13 $\sqrt{1}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{100}$.

14 $\sqrt{0,81}$; $\sqrt{0,0036}$; $\sqrt{10\,000}$; $\sqrt{1,21}$; $\sqrt{4\,900}$.

15 $\sqrt{5^2}$; $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{5^4}$; $\sqrt{(-5)^4}$; $\sqrt{5^{16}}$.

16 $\sqrt{3^4}$; $\sqrt{7^{-2}}$; $\sqrt{(-2)^2}$; $\sqrt{(-6)^4}$; $\sqrt{(-10)^{-2}}$.

17 $\sqrt{\frac{1}{64}}$; $\sqrt{\frac{0,16}{25}}$; $\sqrt{\frac{625}{0,09}}$; $\sqrt{\frac{0,36}{121}}$; $\sqrt{\frac{0,0064}{0,81}}$.

18 Calcul mental

Écrire chacun des nombres sans radical.

$\sqrt{\frac{49}{25}}$; $\sqrt{\frac{4}{81}}$; $\sqrt{\frac{121}{16}}$; $\sqrt{\frac{9}{36}}$; $\sqrt{\frac{144}{225}}$.

- 19** Parmi les écritures suivantes lesquelles sont égales à 5 ?
Lesquelles sont égales à -5 ?

A = $\sqrt{5^2}$ B = $(-\sqrt{5})^2$ C = $-\sqrt{25}$
D = $\sqrt{(-5)^2}$ E = $(\sqrt{5})^2$ F = $-\sqrt{(-5)^2}$

Pour les exercices **20** et **21**, écrire chacun des nombres donnés sous la forme 10^n où n est un entier relatif :

20 $\sqrt{10^6}$; $\sqrt{10^4}$; $\sqrt{10^{10}}$; $\sqrt{10^{-2}}$; $\sqrt{10^{-8}}$.

21 $\sqrt{10^{-10}}$; $\sqrt{(-10)^{-2}}$; $\sqrt{10^{24}}$; $\sqrt{(-10)^4}$; $\sqrt{(-10)^{-6}}$.

Pour les exercices **22** et **23**, donner, à l'aide de la calculatrice, la valeur de la racine carrée de chacun des nombres.

22 169 ; 289 ; 361 ; 20,25 ; 44 100.

23 53,29 ; 324 ; 1,0201 ; 93 025 ; 31,472 1.

Pour les exercices **24** et **25**, donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie au centième des nombres suivants.

24 $\sqrt{8}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{47}$; $\sqrt{101}$; $\sqrt{214}$.

25 $\sqrt{32,5}$; $\sqrt{4,72}$; $\sqrt{11,3}$; $\sqrt{154,9}$; $\sqrt{125,78}$.

- 26** À l'aide de la calculatrice, encadrer les nombres suivants par deux entiers naturels consécutifs.

$\sqrt{7}$; $\sqrt{65}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{31}$; $\sqrt{124}$.

- 27** À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 0,1 de chacun des nombres suivants :

$\sqrt{47}$; $\sqrt{70}$; $\sqrt{3,2}$; $\sqrt{135}$; $\sqrt{10,75}$.

- 28** Déterminer les écritures incorrectes, puis, pour chaque écriture correcte, donner sa forme la plus simple.

$\sqrt{3^{-2}}$; $\sqrt{-3^2}$; $\sqrt{\frac{1}{3^2}}$; $\sqrt{3-\pi}$; $\sqrt{3^2+4^2}$.

Exercices

Pour les exercices 29 et 30, déterminer les écritures incorrectes, puis, pour chaque écriture correcte, donner sa forme la plus simple.

29 $\sqrt{5^2 - 7^2}$; $\sqrt{(5-7)^2}$;
 $\sqrt{1 - \frac{1}{4}}$; $\sqrt{(-5+2)^2}$.

30 $\sqrt{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{-2^2}{3^2}}$;
 $\sqrt{(-5)^2 + 3^2}$; $\sqrt{3^{-2} - \frac{1}{9}}$;
 $\sqrt{4(\sqrt{9})}$.

L'équation $x^2 = a$

31 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 64$ b. $x^2 = 0,49$
 c. $x^2 = 0$ d. $x^2 = 100$

32 Calcul mental

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 81$ b. $2x^2 = 50$
 c. $3x^2 = 12$ d. $9x^2 = 1$

Pour les exercices 33 à 37, résoudre, lorsque c'est possible, les équations données.

33 a. $x^2 = 3$ b. $x^2 = -5$
 c. $x^2 = 41$ d. $x^2 = \frac{4}{9}$

34 a. $3x^2 = 75$ b. $x^2 = -36$
 c. $25x^2 = 4$ d. $49x^2 = -64$

35 a. $x^2 - 4 = 0$ b. $x^2 = \frac{64}{25}$

36 a. $x^2 + 9 = 0$ b. $27x^2 = 12$

37 a. $x^2 - 8 = 0$ b. $5x^2 = 32$

38 a. Déterminer la longueur du côté d'un carré dont l'aire est égale à 80 cm^2 . Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.
 b. Quelle est la valeur exacte du périmètre de ce carré ?

39 Déterminer le nombre positif dont le triple du carré est égal à 147.

40 Déterminer le rayon d'un disque dont l'aire est $78,5 \text{ cm}^2$. On arrondira le résultat au dixième.

41 Une boîte de conserve cylindrique a pour hauteur $10,5 \text{ cm}$ et pour volume 465 cm^3 . Quel est le rayon de sa base ? On arrondira le résultat au dixième.



Calculs avec des racines carrées

Pour les exercices 42 et 43, écrire le nombre donné sans radical.

42 $\sqrt{3\sqrt{100} - \sqrt{4^2 + \sqrt{81}}}$

43 $\sqrt{109 - \sqrt{74 + \sqrt{54 - \sqrt{25}}}}$

Pour les exercices 44 et 45, écrire le nombre donné avec un seul radical.

44 $\sqrt{9 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$

45 $\sqrt{29 + \sqrt{13 + \sqrt{8 + \sqrt{1}}}}$

46 a. Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit de deux facteurs dont l'un est le plus grand carré possible.
 8 ; 28 ; 32 ; 48 ; 18 ; 80.

b. Utiliser les résultats précédents pour écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels et b est le plus petit possible.
 $\sqrt{8}$; $\sqrt{28}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{80}$.

Pour les exercices 47 à 52, écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels et b est le plus petit possible.

47 $\sqrt{12}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{63}$; $\sqrt{44}$.

48 $\sqrt{75}$; $\sqrt{128}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{54}$; $\sqrt{48}$.

49 $\sqrt{300}$; $\sqrt{147}$; $\sqrt{338}$; $\sqrt{108}$; $\sqrt{192}$.

50 $\sqrt{810}$; $\sqrt{605}$; $\sqrt{153}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{245}$.

51 $\sqrt{5 \times 3^3}$; $\sqrt{8 \times 10^4}$; $\sqrt{2^3 \times 3^3}$; $\sqrt{15 \times 5^3}$; $\sqrt{7^3 \times 42}$.

52 $\sqrt{35 \times 7^5}$; $\sqrt{11^3 \times 63}$; $\sqrt{2 \times 14}$; $\sqrt{3^3 \times 5^3}$; $\sqrt{4,9 \times 100}$.

53 Calcul mental

Montrer que chacun des nombres est un nombre entier.

A = $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ B = $\sqrt{7} \times \sqrt{63}$ C = $\sqrt{20} \times \sqrt{5}$
 D = $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$ E = $\sqrt{8} \times \sqrt{50}$

54 Sans utiliser de calculatrice, montrer que chacun des nombres suivants est un nombre entier.

A = $\sqrt{6} \times \sqrt{150}$ B = $\sqrt{21} \times \sqrt{84}$ C = $\sqrt{10} \times \sqrt{90}$
 D = $\sqrt{35} \times \sqrt{140}$ E = $\sqrt{242} \times \sqrt{8}$

55 Sachant que $15^2 = 225$, écrire les nombres suivants sans radical.

A = $\sqrt{22\,500}$ B = $\sqrt{2,25}$ C = $\sqrt{0,0225}$
 D = $\sqrt{22,5 \times 10^5}$ E = $\sqrt{0,225 \times 10^{-3}}$

56 Sachant que $43^2 = 1\,849$, écrire les nombres suivants sans radical.

$$A = \sqrt{0,1849} \quad B = \sqrt{184\,900} \quad C = \sqrt{18,49}$$

$$D = \sqrt{1,849 \times 10^5} \quad E = \sqrt{184,9 \times 10^{-1}}$$

Pour les exercices **57** à **59**, écrire chacun des nombres sous la forme $\sqrt{a}$ où a est un entier naturel.

57 $3\sqrt{7}$; $2\sqrt{5}$; $4\sqrt{3}$; $7\sqrt{2}$; $12\sqrt{3}$.

58 $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $5\sqrt{5}$; $6\sqrt{7}$.

59 $\frac{3}{2}\sqrt{8}$; $\frac{7}{3}\sqrt{18}$; $8\sqrt{\frac{5}{16}}$; $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{48}{9}}$; $\frac{\sqrt{15}}{11}\sqrt{\frac{242}{6}}$.

60 Simplifier, lorsque cela est possible, les expressions suivantes :

$$\sqrt{36+64}; \sqrt{25}+\sqrt{56}; \sqrt{36}+\sqrt{64};$$

$$\sqrt{225-144}; \sqrt{56+25}; \sqrt{25}-\sqrt{24};$$

$$\sqrt{225}-\sqrt{144}; \sqrt{25}-24.$$

Pour les exercices **61** à **63**, effectuer chaque somme.

61 $A = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2}$

$$B = 4\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$$

$$C = -7\sqrt{13} + 5\sqrt{13} + 2\sqrt{13} - 3\sqrt{13}$$

62 $A = 7\sqrt{10} - \frac{3}{4}\sqrt{10} + 4\sqrt{10} - \frac{2}{3}\sqrt{10}$

$$B = 2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - (\sqrt{7} - 3\sqrt{7})$$

63 $A = \frac{2}{3}\sqrt{11} - \frac{1}{2}\sqrt{11} + 3\sqrt{11}$

$$B = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{6}\right) - \frac{3}{5}(2\sqrt{6} - 3)$$

64 QCM

Indiquer, dans chaque cas, la réponse exacte.

$$\sqrt{80} = \quad \text{a. } 40 \quad \text{b. } 4\sqrt{5} \quad \text{c. } 8,94$$

$$\frac{\sqrt{75}}{5} = \quad \text{a. } 3 \quad \text{b. } \sqrt{3} \quad \text{c. } 5$$

$$2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = \quad \text{a. } 6\sqrt{2} \quad \text{b. } 0 \quad \text{c. } \sqrt{2}$$

$$2(1 + 3\sqrt{2}) = \quad \text{a. } 5 \quad \text{b. } 2 + 6\sqrt{2} \quad \text{c. } 8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{400 - 144} = \quad \text{a. } 8 \quad \text{b. } 16 \quad \text{c. } 28$$

Pour les exercices **65** à **69**, écrire chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers naturels et b est le plus petit possible.

65 $A = \sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{50}$

$$B = 3\sqrt{45} - 2\sqrt{20} + \sqrt{125}$$

66 $A = 8\sqrt{5} + 4\sqrt{45} - 3\sqrt{80}$

$$B = 3\sqrt{28} - 8\sqrt{63} + 2\sqrt{700}$$

67 $A = 5\sqrt{27} - 7\sqrt{12} + 2\sqrt{48} \quad B = \sqrt{99} - \frac{7}{2}\sqrt{44} + \sqrt{275}$

68 $A = \sqrt{363} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{108} \quad B = \sqrt{54} + 10\sqrt{24} - 3\sqrt{96}$

69 $A = 5\sqrt{108} - \frac{2}{3}\sqrt{75} + \frac{1}{3}\sqrt{300} \quad B = \sqrt{63} - 2\sqrt{112} + 7\sqrt{343}$

70 Vu au brevet

1 Écrire sous la forme $a\sqrt{7}$, où a est un entier, le nombre A tel que :

$$A = 4\sqrt{7} - 8\sqrt{28} + \sqrt{700}.$$

2 Calculer à 0,01 près $A = \sqrt{\frac{83+167}{138}}$.

71 Vu au brevet

1 Écrire sous la forme $a\sqrt{5}$, avec a entier :

$$A = 3\sqrt{20} + \sqrt{45}; \quad B = \sqrt{180} - 3\sqrt{5}.$$

2 En utilisant les résultats de la question **1**, démontrer que

$$A \times B \text{ et } \frac{A}{B} \text{ sont des nombres entiers.}$$

Pour les exercices **72** à **74**, développer chaque expression. Simplifier si nécessaire.

72 $A = 2(3 + 5\sqrt{7}) \quad B = 2\sqrt{10}(1 - 2\sqrt{5})$

$$C = (\sqrt{3} + 2)(4 - 2\sqrt{5})$$

73 $A = -3(\sqrt{13} - 4) \quad B = -2\sqrt{11}(4 - 3\sqrt{3})$

$$C = (2\sqrt{7} - 5)(1 - 5\sqrt{2})$$

74 $A = (4\sqrt{3})^2 \times 3\sqrt{7} \quad B = (\sqrt{7} - 5) \times (3\sqrt{2})^2$

$$C = (1 - 5\sqrt{3})(2\sqrt{3} - 4\sqrt{2})$$

75 Vu au brevet

Prouver que $\sqrt{648} + \sqrt{972} = 18(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Pour les exercices **76** et **77**, écrire chacun des nombres donnés sans radical.

76 $\sqrt{\frac{5}{20}}; \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}}; \sqrt{\frac{63}{28}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}; \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{147}}$

77 $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{125}}; \sqrt{\frac{52}{117}}; \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{99}}; \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{98}}; \sqrt{\frac{96}{150}}$

Pour les exercices **78** et **79**, écrire les quotients donnés sans radical au dénominateur.

78 $\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{7}}; \frac{7}{2\sqrt{5}}; \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \frac{-3\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}$

79 $\frac{-10}{\sqrt{11}}; \frac{5\sqrt{2}-1}{\sqrt{7}}; \frac{-3+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}; \frac{4-\sqrt{7}}{-3\sqrt{2}}; \frac{11-7\sqrt{5}}{3\sqrt{11}}$

Exercices

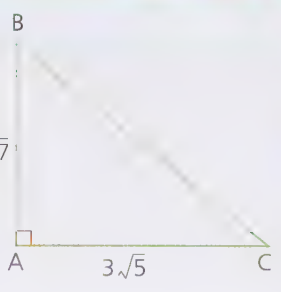
Racine carrée et physique

- 80** La puissance P , exprimée en watts (W), d'une ampoule électrique est donnée par la formule : $P = RI^2$ où R est la résistance exprimée en ohms (Ω) de son filament et I l'intensité du courant électrique exprimée en ampères (A). Sachant que $P = 60$ W et $R = 800$ Ω , quelle est la valeur de I ?
- 81** En mars 1851, pour mettre en évidence la rotation de la Terre sur elle-même, Léon Foucault suspend un pendule de 67 m de longueur sous le dôme du Panthéon à Paris. Sachant que la période T d'un pendule, exprimée en secondes, est $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ où l est la longueur en mètres de ce pendule, quelle était la période de ce pendule ?

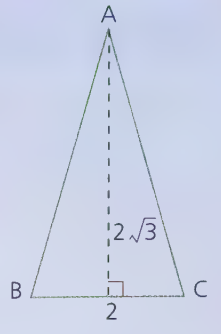


Racine carrée et géométrie

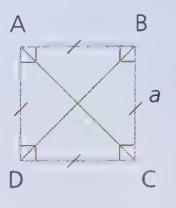
- 82** Toutes les longueurs sont données en centimètres. ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 2\sqrt{7}$ et $AC = 3\sqrt{5}$.
- 1** Calculer la valeur exacte de la longueur BC. En déduire la valeur exacte du périmètre p de ce triangle.
- 2** Donner une valeur arrondie au dixième de BC et de p .
- 83** Toutes les longueurs sont données en centimètres. ABC est un triangle tel que $AB = \sqrt{10}$ et $BC = 3\sqrt{2}$. Calculer la valeur exacte de la longueur AC dans chacun des cas suivants :
- a. ABC est rectangle en A.
b. ABC est rectangle en B.



- 84** Toutes les longueurs sont données en centimètres. ABC est un triangle isocèle de sommet A. Sa base [BC] a pour longueur 2 et sa hauteur issue de A a pour longueur $2\sqrt{3}$. Quelle est la longueur de ses côtés [AC] et [AB] ?



- 85** Une unité de longueur est fixée et a est un nombre positif. Soit ABCD un carré dont les côtés ont pour longueur a . En utilisant le théorème de Pythagore, déterminer en fonction de a la longueur des diagonales [AC] et [BD] de ce carré.



- 86** Une unité de longueur est fixée et a est un nombre positif. Soit ABC un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueurs a . On appelle H le pied de la hauteur issue de A.



- 1** Déterminer la distance BH en fonction de a .
2 Quelle est la nature du triangle ABH ?
3 En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que :

$$AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2.$$

En déduire que $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

- 87** Un carré a pour aire 48 cm². Quelle est la longueur de ses côtés ? Quelle est la longueur de ses diagonales ?
- 88** Un triangle équilatéral a pour aire $6\sqrt{3}$ cm².

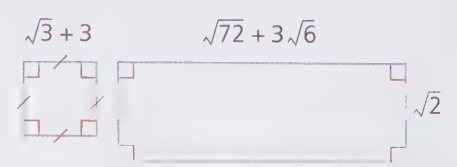
- 1** On appelle a la longueur en centimètres de chacun des côtés de ce triangle. Montrer que a est solution de l'équation :

$$a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$$

- 2** Déterminer la valeur exacte de a . En donner une valeur arrondie au millimètre près.

89 Vu au brevet

Dans cet exercice, toutes les longueurs sont données en centimètres. La mesure du côté du carré est $\sqrt{3} + 3$. Les dimensions du rectangle sont $\sqrt{72} + 3\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$.



- 1** Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du carré ; réduire l'expression obtenue.
2 Calculer l'aire $\mathcal{A}'$ du rectangle.
3 Vérifier que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Faire le point

90 QCM Indiquer, dans chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les trois réponses proposées.

	A	B	C
1 $\sqrt{81} =$	9	-9	9 ou -9
2 La valeur exacte de $\sqrt{13}$ est :	3,6	$\sqrt{13}$	3,6055
3 $\sqrt{(-6)^2} :$	n'existe pas	est égal à -6	est égal à 6
4 L'équation $x^2 = 12$ a :	une solution : $\sqrt{12}$	deux solutions : -6 et 6	deux solutions : $2\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{3}$
5 $\sqrt{7} \times \sqrt{63} =$	$\sqrt{70}$	$\sqrt{441}$	21
6 $2\sqrt{\frac{7}{4}} =$	$\frac{\sqrt{14}}{2}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{\frac{7}{2}}$
7 La moitié de $\sqrt{50}$ est :	5	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$	$\frac{5}{\sqrt{2}}$
8 $\sqrt{20} + \sqrt{80} - \sqrt{45} =$	$\sqrt{55}$	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{45}$
9 $\sqrt{\frac{3}{75}} =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$	$\frac{\sqrt{3}}{5}$

Je rédige Pour les exercices suivants, on demande une solution rédigée.

• Calculer une expression contenant des racines carrées

91 Sachant que $17^2 = 289$, écrire les nombres ci-dessous sans radical.

$$\sqrt{2,89}; \sqrt{2\,890 \times 10^3}; \sqrt{0,0289}; \sqrt{28,9 \times 10^5}; \sqrt{28,9 \times 10^{-3}}.$$

92 Calculer l'expression $A = 2\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{500}$.
On donnera le résultat sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un entier relatif.

• Résoudre une équation du type $x^2 = a$

93 Résoudre, lorsque c'est possible, les équations suivantes :

a. $x^2 = 121$ b. $x^2 = -100$
c. $3x^2 + 4 = 112$ d. $75 - 2x^2 = 75$

• Écrire un nombre sans radical

94 Écrire sans radical le nombre :

$$A = \sqrt{\sqrt{72} + 49} + \sqrt{10 + 3\sqrt{25}}.$$

95 Chasser l'intrus :

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{14}}; \sqrt{\frac{18}{14}}; \frac{21}{\sqrt{7}}; \frac{\sqrt{8} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}}; \frac{6}{2\sqrt{7}}; \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

• Calculer avec des racines carrées en géométrie

96 Dans cet exercice, toutes les longueurs sont données en centimètres.

❶ La longueur du côté d'un carré est $\sqrt{8} + \sqrt{2}$.

a. Montrer que la longueur de sa diagonale est un nombre entier.

b. Montrer que l'aire en cm^2 de ce carré est un nombre entier.

❷ La longueur de la diagonale d'un autre carré est $\sqrt{40}$.
Calculer la longueur de son côté et exprimer cette longueur sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un entier naturel.

97 ❶ Un rectangle a pour longueur $\sqrt{75}$ cm et pour largeur $\sqrt{27}$. Montrer que son aire est un nombre entier.

❷ Un carré a la même aire que le rectangle précédent, quelle est la longueur exacte de son côté ? Quelle est la longueur exacte de sa diagonale ?

Approfondir

- 98** Sans calculatrice, déterminer si les expressions A et B sont des entiers ou non.

$$A = \sqrt{\frac{243}{36}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{30}} \quad B = \frac{\sqrt{2^3 \times 3^5}}{\sqrt{24}}$$

- 99** Montrer que les fractions ci-dessous sont des quotients de deux entiers.

$$A = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{21}}{\sqrt{84 \times 50}} \quad B = \frac{3\sqrt{22} \times \sqrt{35}}{10\sqrt{11} \times 4\sqrt{7} \times \sqrt{10}}$$

- 100** Montrer que $\frac{\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10}} = 0,1(\sqrt{2} - \sqrt{5})$.

Pour les exercices **101** à **103**, résoudre les équations suivantes, puis donner la solution sans radical au dénominateur.

101 a. $2x - 3\sqrt{2} + 1 = 5 - 4x$ b. $x\sqrt{2} + 4 = 2\sqrt{3} - 5$

102 a. $4 - x\sqrt{7} = 3\sqrt{7} - 2$ b. $x\sqrt{5} - 5 = 3\sqrt{5}(x + 2\sqrt{3})$

103 a. $5 - x\sqrt{3} - 3(1 + \sqrt{5}) = 5 - 2x\sqrt{3}$
b. $2(1 - x\sqrt{2}) + x\sqrt{8} = (5 + x)\sqrt{2}$

- 104** Résoudre les équations suivantes :

a. $(x + 2)^2 = 25$ b. $(x + 2)^2 = \frac{64}{9}$
c. $x^2 = (3 + \sqrt{10})^2$ d. $x^2 = (1 - 5\sqrt{2})^2$

- 105** Trois points du plan A, B et C sont tels que $AB = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{45}$ et $BC = \sqrt{125}$. Ces trois points sont-ils alignés ?

- 106** Trois points du plan A, B et C sont tels que $AB = \sqrt{28}$, $AC = \sqrt{60}$ et $BC = \sqrt{175}$. Ces trois points sont-ils alignés ?

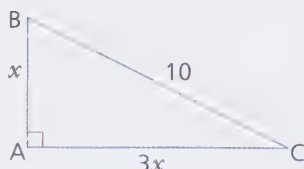
- 107** Soit ABCD un carré de 3 cm de côté. Calculer la valeur exacte du rayon du cercle circonscrit à ce carré.

- 108** ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de 4 cm de diamètre. Calculer la valeur exacte de la longueur de chacun des côtés de ABC.

- 109** Un rectangle a pour aire $24,5 \text{ cm}^2$. Sa longueur L et sa largeur l sont telles que $\frac{L}{l} = \frac{5}{2}$. Calculer son périmètre.

- 110** L'unité est le centimètre et x désigne un nombre positif. ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 10$, $AB = x$ et $AC = 3x$.

Déterminer la valeur exacte de x.



Formule de Héron

Soit un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c. Son aire $\mathcal{A}$ est, d'après la formule de Héron :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ où } p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

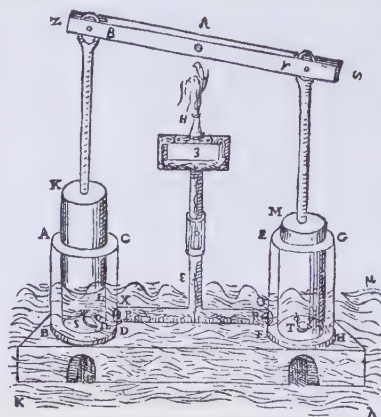
Calculer l'aire exacte d'un triangle dans les cas suivants :

1 $a = 4$, $b = 5$ et $c = 7$

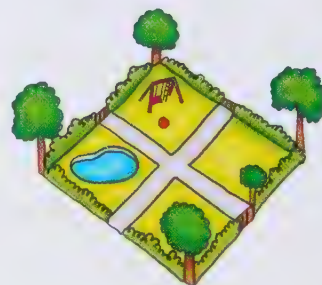
2 $a = \frac{8}{3}$, $b = \frac{11}{2}$ et $c = \frac{23}{6}$

LE SAVIEZ-VOUS ?

Héron d'Alexandrie était un mathématicien et un physicien grec du premier siècle après J.-C. Il fut l'auteur de plusieurs formules de mathématiques (dont celle ci-dessus) et il conçut de nombreuses machines hydrauliques. On le considère comme l'inventeur des premiers automates.



- 112** Dans un jardin carré de 20 m de côté, on a tracé deux allées en croix comme sur le dessin ci-contre. La surface totale de ces deux allées est 76 m^2 . Quelle est la longueur du côté de chacun des quatre carrés ainsi déterminés ?

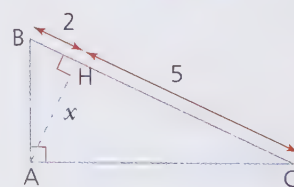


- 113** ABC est un triangle rectangle en A. On appelle H le pied de la hauteur issue de A et on a $BH = 2 \text{ cm}$ et $CH = 5 \text{ cm}$.

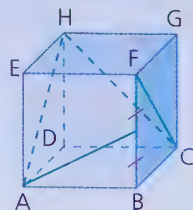
On pose $AH = x$.

- Exprimer AB^2 et AC^2 en fonction de x.
- Calculer BC^2 de deux manières différentes.
- Déterminer la valeur exacte de x.
- Montrer que le périmètre de ABC est :

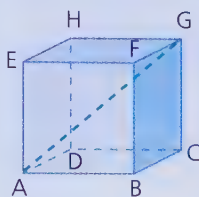
$$p = \sqrt{7}(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}).$$



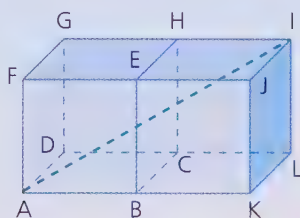
- 114** ABCDEFGH est un cube de 4 cm d'arête.
Déterminer la longueur exacte de la ligne tracée en vert sur le cube.



- 115** ABCDEFGH est un cube de 4 cm d'arête. Calculer la valeur exacte de la diagonale [AG].



- 116** On a placé deux cubes identiques de 4 cm d'arête l'un à côté de l'autre comme indiqué sur la figure ci-dessous. Quelle est la valeur exacte de la « diagonale » dessinée en pointillés ?



- 117** Sans tenir compte de la résistance de l'air, la distance d , exprimée en mètres, parcourue par un corps en chute libre pendant un temps t , exprimé en secondes, est : $d = 9,8 \frac{t^2}{2}$.
Un parachutiste effectue une chute libre de 100 mètres avant d'ouvrir son parachute. Quelle a été la durée de sa chute ?

- 118** Lorsqu'on perce à sa base un réservoir d'une hauteur h d'eau exprimée en mètres, la vitesse v d'écoulement de l'eau, exprimée en mètres par seconde, est $v = \sqrt{2 \times 9,8h}$.
Un réservoir mesure 3 m de haut et est muni à sa base d'un robinet.

- 1 Le réservoir étant plein, quelle est la vitesse d'écoulement de l'eau lorsqu'on ouvre le robinet ?
- 2 Quelle est la vitesse d'écoulement de l'eau lorsque le réservoir n'est plus qu'à moitié plein ?

- 119** Des astronautes aménagent une station en orbite autour de la Terre. Cette station parcourt à la vitesse constante v un cercle dont le centre coïncide avec celui de la terre et dont tous les points sont à une altitude constante h au dessus du sol. En notant R le rayon de la terre, la vitesse v en kilomètres

par heure est telle que $v = \sqrt{360^2 \frac{R^2}{R+h}}$.

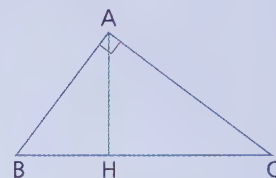
On donne $R = 6\,400$ km.

- 1 Calculer v pour $h = 1\,700$ km.
- 2 Calculer v pour $h = 36\,240$ km.

Combien de temps met alors la station pour faire un tour complet ?

- 120** Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}$

ABC est un triangle rectangle en A. On appelle H le pied de la hauteur issue de A.



- 1 a. Justifier l'égalité :

$$AB^2 + AC^2 = (BH + HC)^2.$$

- b. En déduire que $AB^2 - BH^2 + AC^2 - HC^2 = 2BH \times HC$.

- 2 a. Justifier les égalités : $AB^2 - BH^2 = AH^2$
et $AC^2 - HC^2 = AH^2$.

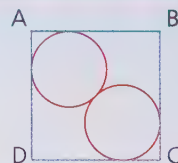
- b. En utilisant les égalités obtenues aux questions 1 b et 2 a, montrer que $AH^2 = BH \times HC$.

- 3 Une unité de longueur étant fixée, choisir un nombre a positif puis tracer un segment [BC] de longueur $a + 1$. Sur le segment [BC], placer le point H tel que $HC = 1$ et tracer le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [BC]. On appelle A l'un des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite perpendiculaire à la droite (BC) en H. Déterminer en fonction de a la longueur AH.

- 4 Application : construire un segment de longueur $\sqrt{7}$.

Argumenter et débattre

- 121** ABCD est un carré de 10 cm de côté.
On a dessiné dans ABCD deux cercles de même rayon tangents aux côtés du carré et l'un à l'autre. Déterminer le rayon de ces cercles.

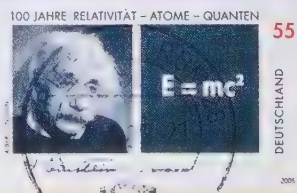


POUR LES CURIEUX

Une célèbre formule de physique, due à Einstein, est $E = mc^2$. Cette formule signifie qu'une quantité de matière m , exprimée en kg, est théoriquement convertible en énergie E , exprimée en joules, le coefficient de proportionnalité étant c^2 où c est la vitesse de la lumière égale à 3×10^8 m · s⁻¹.

Un autre résultat de physique énonce que l'énergie E' nécessaire pour accélérer une masse M , exprimée en kg, depuis le repos jusqu'à une vitesse V , exprimée en m · s⁻¹, est

$$E' = \frac{1}{2}MV^2.$$



- 1 On convertit un gramme de matière en énergie. Calculer l'énergie correspondant à cette conversion.
- 2 On veut accélérer une masse d'une tonne avec l'énergie calculée à la question 1. Quelle vitesse sera atteinte ? On donnera le résultat en km · h⁻¹.

Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Héron

1 Méthode

a. Justifier l'égalité : $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

b. Soit a un nombre tel que $0 < a < \sqrt{2}$.

Montrer que : $\frac{2}{a} > \frac{2}{\sqrt{2}}$, puis que $a < \sqrt{2} < \frac{2}{a}$. En déduire que si a est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$,

alors la moyenne de a et de $\frac{2}{a}$, soit $\frac{a + \frac{2}{a}}{2}$, est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ plus proche de $\sqrt{2}$ que a .

c. Soit b un nombre tel que $b > \sqrt{2}$. Montrer que $\frac{2}{b} < \frac{2}{\sqrt{2}}$, puis que $\frac{2}{b} < \sqrt{2} < b$.

En déduire que si b est une valeur approchée par excès de $\sqrt{2}$, alors $\frac{b + \frac{2}{b}}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ plus proche de $\sqrt{2}$ que b .

Conclusion : Si x est une valeur approchée de $\sqrt{2}$, strictement positive, alors $\frac{x + \frac{2}{x}}{2}$ est une meilleure approximation de $\sqrt{2}$. On peut ainsi déterminer des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{2}$.

2 Utilisation d'un tableur

a. Dans la cellule **A1**, on entre une valeur approchée a de $\sqrt{2}$. Ici on prend $a = 1$.

b. On entre le nombre $\frac{2}{a}$ en **B1**.
Entrer la formule $=2/A1$ en **B1**.

c. On entre $\frac{a + \frac{2}{a}}{2}$ en **A2**.
Entrer la formule $=0,5*(A1+B1)$ en **A2**.

d. On étend la formule de la cellule **B1** en **B2**.
Cliquer sur la cellule **B1**, positionner le curseur en bas à droite de la cellule et étirer la croix noire jusqu'à la cellule **B2**.

e. On étend la formule entrée en **A2** et **B2** jusqu'aux cellules **A5** et **B5**.
Cliquer sur les cellules **A2** et **B2**, positionner le curseur en bas à droite de la cellule **B2** et étirer la croix noire sur les deux colonnes **A** et **B** jusqu'à la ligne 5.

	A	B
1	1	$=2/A1$
2	$=0,5*(A1+B1)$	

	A	B
1	1	2
2	1,5	1,33333333

	A2	B2	C
1	1	2	
2	1,5	1,33333333	
3	1,41666667	1,41176471	
4			
5			

f. Pour obtenir plus de décimales, utiliser l'icône .

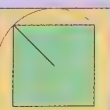
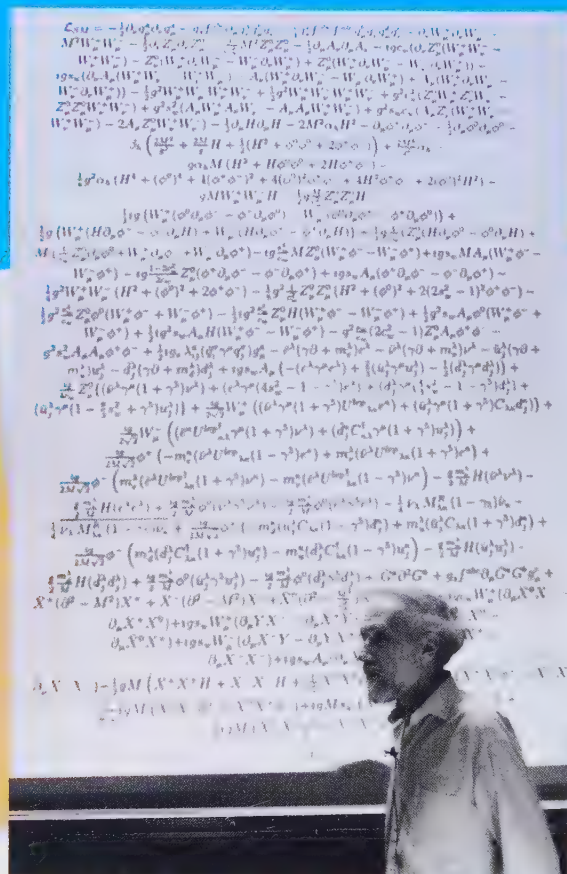
Donner une valeur approchée à 10^{-10} de $\sqrt{2}$, puis une valeur approchée à 10^{-12} de $\sqrt{2}$.

Peut-on faire mieux à l'aide du tableur ?

5

Identités remarquables Équations produit nul

Sur la photo ci-contre, **Alain Connes** se tient devant un tableau rempli de **calcul littéral**. Ce **mathématicien** n'avait que 35 ans quand il reçut la **prestigieuse médaille Fields** (l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiciens) pour ses travaux en algèbre. Au fil de sa carrière de chercheur, il a accumulé les distinctions: le Prix Clay, le Prix Crafoord et, en 2004, la médaille d'or du CNRS.



Dans son carnet, **Villard de Honnecourt**, un architecte du Moyen Âge, a dessiné deux carrés de même centre tels que la demi-diagonale du plus petit des carrés est égale au demi-côté du grand carré. Ainsi la **différence des deux aires** de ces carrés **est égale à l'aire du petit carré**... comme dans divers cloîtres de cette époque, où on s'aperçoit que l'espace découvert (en général planté d'arbustes) est sensiblement égal à la surface de l'espace couvert !

François Viète (1540-1603) est un des savants les plus éminents du **xvi^e siècle**. Il est le **père de l'algèbre moderne**. C'est à lui que sont dues l'idée de **désigner par des lettres** des quantités que l'on veut soumettre au calcul et celle d'effectuer des opérations sur ces lettres à l'aide des **signes** **+**, **-** et **/**... afin d'en déduire des **formules universelles**.

QGM

Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	$3x \times 2x =$	$6x$	$5x^2$	$6x^2$
2	L'expression réduite de $5x^2 - 3x + 8 - 2x$ est :	$5x^2 - 5x + 8$	$2x^2 + 8 - 2x$	8
3	$-(x + 2) =$	$-x + 2$	$-x - 2$	$-2x$
4	$7 + (x - 7) =$	x	$x + 14$	$7x - 49$
5	$7 - (x + 5) =$	$12 - x$	$7x + 5$	$2 - x$
6	$-3(x - 2) =$	$-3x - 2$	$-3x + 6$	$-3x - 6$
7	$(x + 2)(x + 3) =$	$x^2 + 6$	$2x + 6$	$x^2 + 5x + 6$
8	$4x + 8 =$	$4(x + 2)$	$4(x + 8)$	$12x$
9	$2x^2 + 3x =$	$5x^2$	$x(2x + 3)$	$x^2(2 + 3x)$
10	Le carré de $5x$ vaut :	$10x$	$5x^2$	$25x^2$
11	Le carré de $-2x$ vaut :	$4x^2$	$-4x^2$	$-4x$
12	Le double du produit de 3 par $5x$ vaut :	$15x$	$16x$	$30x$
13	On choisit un nombre x . On lui ajoute 7, puis on multiplie la somme obtenue par le nombre choisi. On obtient :	$(x + 7) \times 7$	$(x + 7)x$	$x + 7 \times x$

Exercice 1 Réduire chaque expression.

$$A = 6x + 4 - 8x^2 - 7x + 5 + 3x^2$$

$$C = 3x^2 - (6x - 2x^2 + 1) + (x^2 - 5x)$$

$$E = 7 - x + (3x^2 - 1) - (-3x + 2x^2)$$

$$B = -3a + 5a^2 - 2a - 3 - 7a^2 + 3$$

$$D = -(2a + 1) + 4a^2 + 6 - (-3a^2 + a)$$

$$F = 4x - x^2 - (5 - 2x) + (6x^2 - 7)$$

Exercice 2 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

$$A = 3(2x + 5) + 2(x - 4)$$

$$C = (3x + 4)(2x + 5)$$

$$E = 5(x - 3) + (x + 2)(x - 4)$$

$$B = 4(-x + 3) - 3(x - 2)$$

$$D = (-2x + 3)(3x - 7)$$

$$F = 4(5 - x) - (x + 3)(x + 2)$$

Exercice 3 Factoriser chacune des expressions suivantes :

$$a. 2x + 6$$

$$b. 3x^2 + 9$$

$$c. 8x + 8$$

$$d. 8x - 12$$

$$e. x^2 + 7x$$

$$f. 5x^2 - 10x$$

$$g. 4x^2 - 8x + 12$$

$$h. x^3 + 2x^2 + x$$

Exercice 4 Recopier, puis relier chaque phrase à l'expression littérale qui lui correspond.

Le carré de la somme de x et de 3

La différence des carrés de x et de 3

La somme des carrés de x et de 3

Le carré de la différence de x et de 3

$$\bullet (x - 3)^2$$

$$\bullet x^2 + 3^2$$

$$\bullet (x + 3)^2$$

$$\bullet x^2 - 3^2$$

Activité 1 Carré d'une somme

1 Carré d'une somme et somme des carrés

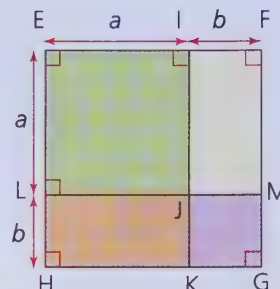
Dans chaque cas, calculer les deux expressions proposées, puis indiquer si elles sont égales ou non. Que constate-t-on ?

- $(3+4)^2$ et 3^2+4^2
- $(7+2)^2$ et 7^2+2^2
- $[3+(-1)]^2$ et $3^2+(-1)^2$

2 À l'aide des aires

Soient a et b deux nombres positifs. On considère le carré EFGH de la figure ci-contre.

- a. Exprimer l'aire du carré EFGH en fonction de $a+b$.
- b. Exprimer l'aire de chacun des carrés EIIL et JMKG, puis l'aire de chacun des rectangles IFMJ et LJKH en fonction de a et de b . En déduire une expression de l'aire du carré EFGH en fonction de a et b .
- c. Quelle égalité peut-on déduire des questions précédentes ?



L'égalité qui donne l'expression de $(a+b)^2$ est vraie pour tous les nombres a et b : une telle égalité s'appelle une **identité**.

3 À l'aide du calcul littéral

Soient a et b deux nombres. Écrire $(a+b)^2$ sous la forme d'un produit de deux facteurs. Développer, puis réduire le produit obtenu.

Cette identité est très souvent utilisée ; on dit que c'est une **identité remarquable**.

4 Applications

En utilisant l'identité remarquable de la question 3 :

- a. Développer les produits : $(x+3)^2$; $(x+5)^2$; $(5x+2)^2$; $(3+7x)^2$.
- b. Recopier et compléter :
 - $21^2 = (20 + ___)^2 = ___^2 + 2 \times ___ \times ___ + ___^2 = ___$
 - $99^2 + 2 \times 99 + 1 = 99^2 + 2 \times 99 \times ___ + 1 = (99 + ___)^2 = ___$
- c. Sans calculatrice, calculer le plus astucieusement possible : 31^2 ; 32^2 ; $999^2 + 2 \times 999 + 1$.

Activité 2 Carré d'une différence

1 Carré d'une différence et différence des carrés

Dans chaque cas, calculer les deux expressions proposées, puis indiquer si elles sont égales ou non. Que constate-t-on ?

- $(7-4)^2$ et 7^2-4^2
- $(10-2)^2$ et 10^2-2^2
- $(5-6)^2$ et 5^2-6^2

2 À l'aide du calcul littéral

Soient a et b deux nombres. Écrire $(a-b)^2$ sous la forme d'un produit de deux facteurs. Développer, puis réduire le produit obtenu.

L'égalité qui donne l'expression de $(a-b)^2$ est une **identité remarquable**.

3 Applications

En utilisant l'identité remarquable de la question 2 :

- a. Développer les produits : $(x-2)^2$; $(x-6)^2$; $(3x-4)^2$; $(5-6x)^2$.
- b. Recopier et compléter :
 - $39^2 = (40 - ___)^2 = ___^2 - 2 \times ___ \times ___ + ___^2 = ___$
 - $101^2 - 2 \times 101 + 1 = 101^2 - 2 \times 101 \times ___ + 1 = (101 - ___)^2 = ___$
- c. Sans calculatrice, calculer le plus astucieusement possible : 99^2 ; 48^2 ; $401^2 - 2 \times 401 + 1$.

Activité 3 Différence de deux carrés

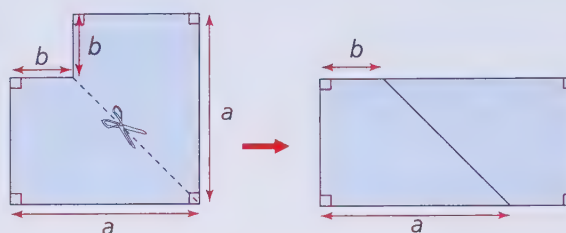
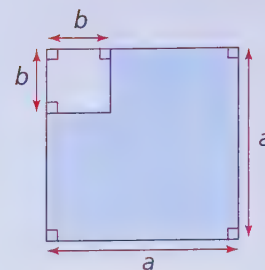
1 À l'aide des aires

a. Exprimer l'aire de la figure bleue ci-contre en fonction des deux nombres positifs a et b ($b < a$).

b. On découpe deux trapèzes rectangles superposables dans la figure bleue, puis on les assemble de façon à obtenir un rectangle.

Exprimer, en fonction de a et de b :

- la longueur du rectangle ;
- la largeur du rectangle ;
- l'aire du rectangle.



c. Quelle égalité peut-on déduire des questions précédentes ?

2 À l'aide du calcul littéral

Soient a et b deux nombres.

Développer, puis réduire le produit $(a + b)(a - b)$.

L'égalité qui donne l'expression de $(a + b)(a - b)$ est une **identité remarquable**.

3 Applications

En utilisant l'identité remarquable de la question 2 :

a. Développer les produits : $(x + 3)(x - 3)$; $(x + 7)(x - 7)$; $(3x + 5)(3x - 5)$.

b. Recopier et compléter :
 • $31 \times 29 = (30 + \dots)(30 - \dots) = \dots^2 - \dots^2 = \dots$
 • $65^2 - 35^2 = (65 + \dots)(65 - \dots) = \dots \times \dots = \dots$

c. Sans calculatrice, calculer le plus astucieusement possible :

41×39 ; 52×48 ; $78^2 - 22^2$; $8,6^2 - 1,4^2$.

Activité 4 Factorisations

A Factoriser avec un facteur commun

1 Calculer mentalement :

$$A = 9,23 \times 4 + 9,23 \times 6$$

$$B = 47 \times 16 - 47 \times 6$$

$$C = 8,4 \times 1,3 - 8,4 \times 0,9 - 8,4 \times 0,4$$

2 Parmi les expressions ci-dessous, indiquer celles qui sont factorisées, c'est-à-dire mises sous la forme d'un produit de facteurs. Factoriser ensuite les autres expressions.

$$D = 3x + 6$$

$$E = (x + 3)(x - 5)$$

$$F = 5x^2 - 10x + 5$$

$$G = 2(4 - 3x)$$

$$H = 7x + x^2$$

$$I = x(2 + x)$$

$$J = (x - 4)^2$$

$$K = 5x^2 - 15x$$

3 Soit $A = (3x - 1)(x - 2) + 5(x - 2)$.

Pour factoriser A , Cynthia observe que $(x - 2)$ est un facteur commun à $(3x - 1)(x - 2)$ et à $5(x - 2)$. Après factorisation, elle obtient : $A = (x - 2)(3x + 4)$. Retrouver le résultat de Cynthia.

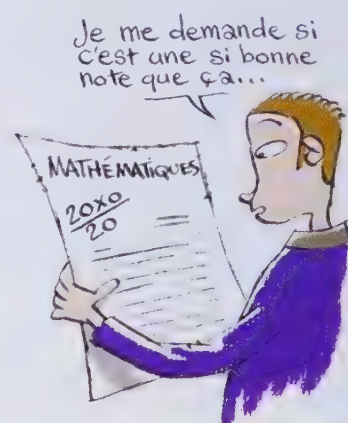
B Factoriser à l'aide des identités remarquables

- 1 a. Recopier et compléter les égalités suivantes :
 - $x^2 + 8x + 16 = (x + ___)^2$
 - $4x^2 + 12x + 9 = (___ + 3)^2$
 b. Factoriser, si possible, les expressions suivantes :
 $A = x^2 + 12x + 36$ $B = 4x^2 + 20x + 25$ $C = 4x^2 + 14x + 49$
- 2 a. Recopier et compléter les égalités suivantes :
 - $x^2 - 2x + 1 = (x - ___)^2$
 - $9x^2 - 24x + 16 = (3x - ___)^2$
 b. Factoriser, si possible, les expressions suivantes :
 $D = x^2 - 6x + 9$ $E = 4x^2 - 10x + 25$ $F = 16x^2 - 8x + 1$
- 3 a. Recopier et compléter les égalités suivantes :
 - $x^2 - 25 = x^2 - ___^2 = (___ + ___)(___ - ___)$
 - $4x^2 - 9 = (___)^2 - ___^2 = (___ + ___)(___ - ___)$
 b. Factoriser les expressions : $x^2 - 16$; $x^2 - 1$; $9x^2 - 49$; $25 - 16x^2$.

Activité 5

Équation produit nul

- 1 a. Calculer les produits suivants :
 $A = 0 \times (-3)$ $B = 5,32 \times 0$
 $C = 0 \times \sqrt{2}$ $D = 0 \times \frac{-5}{9}$
 b. Soient a et b deux nombres.
 - Si $a = 0$, que peut-on dire du produit $a \times b$?
 - Que peut-on dire du produit $a \times b$ si $b = 0$?
 - Recopier et compléter la phrase suivante :
 Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit...
- 2 a. Donner cinq couples de nombres $(a ; b)$ vérifiant l'égalité $a \times b = 0$.
 b. Peut-on envisager un couple de nombres $(a ; b)$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ tel que $a \times b = 0$?
 Quelle conjecture peut-on émettre si un produit de deux facteurs est nul ?
- 3 On considère l'équation $(x + 5)(2x - 3) = 0$.
 - a. Cette équation est appelée **équation produit nul**. Pourquoi l'appelle-t-on ainsi ?
 Est-ce une équation du premier degré à une inconnue ?
 - b. Déterminer x tel que $x + 5$ soit nul.
 - c. Déterminer x tel que $2x - 3$ soit nul.
 - d. Quelles sont alors les solutions de l'équation $(x + 5)(2x - 3) = 0$?
- 4 a. Résoudre l'équation produit nul $(3x - 4)(7 - x) = 0$.
 b. Factoriser le premier membre de chaque équation, puis la résoudre.
 - $2x^2 - x = 0$
 - $(2x - 1)(-3x + 2) + 3(2x - 1) = 0$
 - $x^2 - 2x + 1 = 0$



A

La distributivité pour développer ou factoriser

RAPPEL

Définitions

- **Développer** un produit, c'est le transformer en une somme algébrique.
- **Factoriser** une somme algébrique, c'est la transformer en un produit.

Propriété

La distributivité

Quels que soient les nombres k, a, b, c et d , on a :

produits	sommes algébriques
$k(a+b)$	$= ka+kb$
$k(a-b)$	$= ka-kb$
$(a+b)(c+d)$	$= ac+ad+bc+bd$

Exemples

➤ Savoir-faire 2,
page 88

► Développer $A = -3(2+5x)$.

$$A = -3 \times 2 + (-3) \times 5x$$

$$A = -6 - 15x.$$

► Factoriser $C = 6x - 3x^2$.

$$C = 3x \times 2 - 3x \times x$$

$3x$ est un facteur commun à $6x$ et à $3x^2$

$$C = 3x(2-x).$$

► Développer $B = (2x+3)(y+5)$.

$$B = 2x \times y + 2x \times 5 + 3 \times y + 3 \times 5$$

$$B = 2xy + 10x + 3y + 15.$$

► Factoriser $D = (x-3)(2x+1) - 4(x-3)$.

$(x-3)$ est un facteur commun à

$(x-3)(2x+1)$ et à $4(x-3)$.

$$D = (x-3)[(2x+1)-4] = (x-3)(2x-3).$$

B

Identités remarquables

Propriété

Première identité remarquable

Quels que soient les nombres a et b , on a :

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{expression factorisée}} = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{expression développée}}$$

$(a+b)^2$ est le **carré d'une somme**.

$2ab$ est appelé le **double produit** de a par b .

Exemples

➤ Savoir-faire 1,
page 88

► Développement : $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$.

► Factorisation : $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x+3)^2$.

► Calcul mental : $101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$.

Attention à élever au carré **toute** l'expression contenant x .

➤ Savoir-faire 3,
page 89

Propriété

Deuxième identité remarquable

Quels que soient les nombres a et b , on a :

$$\underbrace{(a-b)^2}_{\text{expression factorisée}} = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{expression développée}}$$

$(a-b)^2$ est le **carré d'une différence**.

Exemples

- ▶ Développement : $(7x - 3)^2 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 3 + 3^2 = 49x^2 - 42x + 9$.
- ▶ Factorisation : $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 1 + 1^2 = (2x - 1)^2$.
- ▶ Calcul mental : $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.

Propriété

Troisième identité remarquable

Quels que soient les nombres a et b , on a :

$$\underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{expression factorisée}} = \underbrace{a^2 - b^2}_{\text{expression développée}}$$

$a^2 - b^2$ est la **différence de deux carrés**.

Exemples

- ▶ Développement : $(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$.
- ▶ Factorisation : $16x^2 - 25 = (4x)^2 - 5^2 = (4x + 5)(4x - 5)$.
- ▶ Calcul mental : $101 \times 99 = (100 + 1)(100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 10\,000 - 1 = 9\,999$.

Équation produit nul

Propriété

a et b étant deux nombres :

- si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$;
- si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $a \times b = 0$.

Règle

Règle du produit nul

Dire qu'un produit est nul équivaut à dire que l'un de ses facteurs est nul.

Définition

Une **équation produit nul** est une équation dont l'un des membres est un produit et dont l'autre membre est zéro.

Exemples

- ▶ $(2x + 5)(3x - 4) = 0$ est une équation produit nul.

Le premier membre est un **produit** de deux facteurs Le second membre est **zéro**

- ▶ Résolution de l'équation $(3x + 2)(5x - 1) = 0$.

L'équation $(3x + 2)(5x - 1) = 0$ est une équation produit nul.

Or, dire qu'un produit est nul équivaut à dire que l'un de ses facteurs est nul.

$(3x + 2)(5x - 1) = 0$ équivaut donc à :

$$\begin{array}{l|l} 3x + 2 = 0 & \text{ou} \quad 5x - 1 = 0 \\ 3x = -2 & 5x = 1 \\ x = -\frac{2}{3} & x = \frac{1}{5} \end{array}$$

L'équation $(3x + 2)(5x - 1) = 0$ admet deux solutions : $-\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{5}$.

Savoir-faire 1 Développer et réduire une expression en utilisant les identités remarquables

Énoncé On considère les expressions $A = (7x + 3)^2$ et $B = (2x - 5)^2 - (x + 3)(x - 3)$.

a. Développer l'expression A.

b. Développer et réduire l'expression B.

Solution

a. $A = (7x + 3)^2$

A est de la forme $(a + b)^2$ avec $a = 7x$ et $b = 3$.

$A = (7x)^2 + 2 \times 7x \times 3 + 3^2$

On développe A à l'aide de l'identité remarquable :
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
 Attention : $a^2 = (7x)^2$.

$A = 49x^2 + 42x + 9$

On calcule chacun des termes.
 Attention : $(7x)^2 = 7x \times 7x = 49x^2$.

b. $B = (2x - 5)^2 - (x + 3)(x - 3)$

B est la différence des deux produits $(2x - 5)^2$ et $(x + 3)(x - 3)$.

$B = 4x^2 - 20x + 25 - (x^2 - 3^2)$

- On développe directement $(2x - 5)^2$ à l'aide de l'identité remarquable : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- On développe $(x + 3)(x - 3)$ à l'aide de l'identité remarquable : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
 $(x + 3)(x - 3)$ étant précédé du signe « - », on place son développement entre parenthèses.

$B = 4x^2 - 20x + 25 - (x^2 - 9)$

$B = 4x^2 - 20x + 25 - x^2 + 9$

On supprime les parenthèses.

$B = 3x^2 - 20x + 34$

On réduit la somme algébrique.

Savoir-faire 2 Factoriser une expression en utilisant la distributivité

Énoncé Factoriser l'expression $A = (3x - 1)^2 - (x + 4)(3x - 1)$.

Solution

$A = (3x - 1)^2 - (x + 4)(3x - 1)$

$A = (3x - 1)(3x - 1) - (x + 4)(3x - 1)$

Comme $(3x - 1)^2 = (3x - 1)(3x - 1)$,
 l'expression $(3x - 1)$ est un facteur commun
 aux deux termes $(3x - 1)^2$ et $(x + 4)(3x - 1)$.

$A = (3x - 1)[(3x - 1) - (x + 4)]$

On factorise.

$A = (3x - 1)[3x - 1 - x - 4]$

On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets.

$A = (3x - 1)(2x - 5)$

On réduit le deuxième facteur.

3 Factoriser une expression en utilisant les identités remarquables

Énoncé Factoriser les expressions $A = 9x^2 + 30x + 25$ et $B = (x-5)^2 - 16$.

Solution

• $A = 9x^2 + 30x + 25$

On observe que : $9x^2 = (3x)^2$; $25 = 5^2$
et que : $30x = 2 \times 3x \times 5$.

$$A = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2$$

A est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$, on applique donc l'identité remarquable :
 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

$$A = (3x + 5)^2$$

• $B = (x-5)^2 - 16$

On observe que $(x-5)^2$ est le carré de $(x-5)$ et que 16 est le carré de 4.
B est donc une différence de deux carrés.

$$B = (x-5)^2 - 4^2$$

On applique l'identité remarquable :
 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = x-5$ et $b = 4$.

$$B = (x-5+4)(x-5-4)$$

On réduit chaque facteur.

$$B = (x-1)(x-9)$$

4 Ramener une équation à une équation produit nul et la résoudre

Énoncé Résoudre l'équation $(x-5)(3x+1) - 3(x-5) = 0$.

Solution

Si on développait le premier membre, on obtiendrait l'équation du second degré $3x^2 - 17x + 10 = 0$ que l'on ne sait pas résoudre facilement.

$$(x-5)(3x+1) - 3(x-5) = 0$$

Le second membre étant zéro, il suffit que le premier membre soit un produit pour obtenir une équation produit nul. Pour cela, il faut pouvoir le factoriser. C'est possible ici car $(x-5)$ est un facteur commun à $(x-5)(3x+1)$ et $3(x-5)$.

$$(x-5)(3x+1-3) = 0$$

On obtient une équation produit nul.

$$(x-5)(3x-2) = 0$$

On applique la règle du produit nul.

Dire qu'un produit est nul équivaut à dire que l'un de ses facteurs est nul. Donc on a :

$$x-5 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x-2 = 0$$

$$x = 5$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

On résout chaque équation.

L'équation $(x-5)(3x+1) - 3(x-5) = 0$ admet deux solutions : 5 et $\frac{2}{3}$.

On conclut.

Utiliser la distributivité

Pour les exercices 1 à 5, développer puis réduire les expressions données.

1 $A = 2(3x + 4) + 3(x - 2)$ $B = 4(x - 5) - 2(x + 1)$
 $C = 5(3 - 2x) - 2(x + 3)$ $D = -3(2x - 5) - (4 - x)$

2 $A = 7 - (8x + 3) + 2x(5x - 4)$
 $B = 6x(2x - 3) - (x + 2) + 4(5 - 3x^2)$
 $C = -4x(2 + 3x) + (7x^2 - 3x + 1) + 3(-2x + 5)$

3 $A = (x + 2)(3x + 4)$ $B = (-2x + 5)(4x - 3)$
 $C = (5x - 2)(3x - 5)$ $D = (7x - 4)(-4x + 9)$

4 $A = \left(x + \frac{1}{3}\right)(3x + 2)$
 $B = \left(\frac{1}{3}x - 1\right)\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$
 $C = \left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$
 $D = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(2x + \frac{1}{2}\right)$

5 $A = 4(5x - 3) - (2x - 1)(x + 4)$
 $B = 3x - x(4x + 1) + (-x + 2)(5 - 4x)$
 $C = (2x + 3)(-2x + 7) - (3x - 4)(2 + 5x)$

6 Recopier, puis relier chaque expression factorisée à son expression développée et réduite.

$(2x + 3)(3x - 4)$

$(3x + 2)(2x - 6)$

$(-3x + 2)(-6 - 2x)$

$(2x - 3)(3x + 4)$

$6x^2 - 14x - 12$

$6x^2 + 14x - 12$

$6x^2 + x - 12$

$6x^2 - x - 12$

7 Recopier et compléter chaque égalité.

a. $(2x + 3)(-5x + 2) = \dots x^2 - \dots x + 6$

b. $(3x + \dots)(\dots x - 5) = 6x^2 - 11x - 10$

c. $(4x - 3)(\dots x - 2) = 12x^2 - \dots x + 6$

8 Soit l'expression : $A = (x + 3)(x - 2) - x(x + 1)$.

1 Développer et réduire A.

2 En déduire, sans utiliser de calculatrice et sans poser d'opérations, la valeur de :

$2\,013 \times 2\,008 - 2\,010 \times 2\,011$.

Calcul mental

a. $38 \times 64 + 38 \times 36$

b. $9,14 \times 24 - 9,14 \times 16 + 9,14 \times 2$

c. $4,7 \times 5,3 + 4,7 \times 3,9 - 4,7 \times 8,2$

Pour les exercices 10 et 11, factoriser chaque expression en prenant comme facteur commun le nombre indiqué entre crochets.

10 $A = 8x + 12$ [4] $B = 15x + 10$ [5]
 $C = 30x - 12$ [6] $D = -7x - 28$ [-7]
 $E = 3x^2 + 6x$ [3x] $F = 8x - 6x^2$ [2x]
 $G = 16x^2 + 20x^3$ [4x^2] $H = 9x^3 + 12x^2$ [3x^2]

11 $A = 18x^2 - 30x + 36$ [6]
 $B = 40x^3 + 25x^2 + 10x$ [5x]
 $C = 8x^3 - 28x^2 + 16x$ [4x]
 $D = 6x^4 + 8x^3 + 10x^2$ [2x^2]

Pour les exercices 12 et 13, factoriser chaque expression.

12 a. $5x + 15$ b. $14x + 7$
c. $42x + 35$ d. $9x^2 - 6$
e. $-8x^2 + 12x$ f. $28x + 20x^2$

13 a. $10x^3 + 15x^2$ b. $12x^2 + 6x + 6$
c. $22x^2 - 11x$ d. $-7x^3 + 42x^2 + 14x$
e. $-24x^3 + 18x^2$ f. $36x^2 - 27x + 9$

14 Dans chaque cas, recopier l'expression et souligner en rouge le facteur commun, puis factoriser et réduire.

a. $x(5x - 1) + x(2x + 3)$
b. $5x(2 + x) - (3 + x)(2 + x)$
c. $(x - 4)(x + 7) + (x - 4)(2x - 5)$
d. $(3x + 2)(4x + 5) - (x + 4)(3x + 2)$

15 Mettre $(5 - x)$ en facteur, puis réduire l'expression.

$A = (-3 - 4x)(5 - x) - (2 - 7x)(5 - x)$
 $B = (5 - x)^2 + 3x(5 - x)$
 $C = (5 - x)^2 - (5 - x)$
 $D = (5 - x)(5x + 3) + 5 - x$

Pour les exercices 16 à 18, factoriser chaque expression :

16 $A = (4x - 3)(2x + 7) - (4x - 3)(6 - x)$
 $B = (3x + 1)^2 + (2x - 3)(3x + 1)$
 $C = (x - 2)(3 + 7x) - (x - 2)^2$
 $D = 4x(2x - 5) - 3(2x - 5)^2$

17 $A = (3x - 4)(-x + 9) + (7x + 2)(3x - 4)$
 $B = (4 - x)(3x + 5) - (4 - x)(-x - 2)$
 $C = (4x - 1)^2 - (x + 6)(4x - 1)$
 $D = 3(x - 5)(2x + 1) + (6x - 7)(2x + 1)$

18 $A = (-2x + 3)(5x + 3) + (-2x + 3)(-x + 4)$
 $B = (4x - 3)(7 - 3x) + (4x - 3)^2$
 $C = (9x - 2)(-x + 6) - (2x + 5)(9x - 2)$
 $D = 7x(6x + 1) - 2(x + 1)(6x + 1)$

Exercices

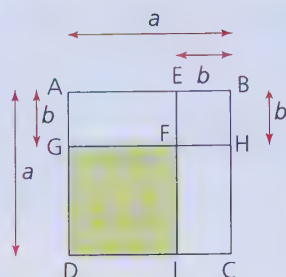
37 Dans la figure ci-contre, ABCD, EBHF et GFID sont des carrés.

1 Exprimer l'aire du carré GFID en fonction de $a - b$.

2 a. Exprimer les aires de ABCD, ABHG, EBCI et EBHF en fonction de a et de b .

b. En déduire une autre expression de l'aire du carré GFID en fonction de a et de b .

3 Quelle identité remarquable retrouve-t-on à l'aide des questions précédentes ?



38 Factoriser les expressions suivantes :

a. $x^2 + 2x + 1$

b. $x^2 + 6x + 9$

c. $x^2 + 8x + 16$

d. $x^2 + 12x + 36$

Pour les exercices 39 à 45, factoriser, si possible, les expressions données.

39 a. $4x^2 + 4x + 1$

b. $4x^2 + 6x + 9$

c. $9x^2 + 24x + 16$

d. $25x^2 + 40x + 16$

40 a. $16x^2 + 24x + 9$

b. $4x^2 + 20x + 25$

c. $49x^2 + 24x + 9$

d. $4 + 9x^2 + 24x$

41 a. $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9$

b. $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

c. $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

d. $\frac{1}{25}x^2 + 2x + 25$

42 a. $x^2 - 8x + 16$

b. $x^2 - 4x + 4$

c. $x^2 - 10x + 25$

d. $x^2 - 7x + 49$

43 a. $16x^2 - 8x + 1$

b. $4x^2 - 6x + 1$

c. $81x^2 - 36x + 4$

d. $25x^2 - 30x + 9$

44 a. $x^2 - 12x + 36$

b. $x^2 - 2x + 4$

c. $36 + 25x^2 - 60x$

d. $9x^2 + 1 - 6x$

45 a. $4x^2 + 28x - 49$

b. $9x^2 - 48x + 64$

c. $16x^2 - 12x + 9$

d. $100x^2 + 9 + 60x$

46 Écrire chaque expression sous la forme d'un carré.

a. $16x^2 - 40x + 25$

b. $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

c. $25x^2 - 10x + 1$

d. $\frac{1}{16}x^2 + x + 4$

Pour les exercices 47 et 48, recopier et compléter les égalités suivantes :

47 a. $(x + ___)^2 = ___ + 6x + ___$

b. $(x + ___)^2 = ___ + ___ + 49$

c. $(___ + 5)^2 = 16x^2 + ___ + ___$

48 a. $(3x + ___)^2 = 9x^2 + ___ + 25$

b. $(5x + ___)^2 = ___ + 40x + ___$

c. $(___ + ___)^2 = 4x^2 + ___ + 81$

49 Soit $A = x^2 + 4x + 4 + (5x + 3)(x + 2)$.

1 Factoriser $x^2 + 4x + 4$.

2 En déduire une factorisation de A .

50 Soit $B = (2x + 5)(3x + 2) + 4x^2 + 20x + 25$.

1 Factoriser $4x^2 + 20x + 25$.

2 En déduire une factorisation de B .

51 Vrai ou faux

a. $(x + 3)^2 = x^2 + 9$

b. $(3x + 2)^2 = 3x^2 + 12x + 4$

c. $(4x - 1)^2 = 16x^2 - 8x + 1$

d. $(2 + 5x)^2 = 4 + 10x + 25x^2$

e. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

f. $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$

52 Soit $C = (2x - 3)^2 - (x - 2)(2x - 3)$.

1 Développer et réduire C .

2 Factoriser C .

3 Calculer le plus rapidement possible C pour $x = 0$, puis pour $x = 1$.

Différence de deux carrés

53 Recopier et compléter chacun des développements suivants :

a. $(x + 3)(x - 3) = ___ - ___ = ___$

b. $(3x + 5)(3x - 5) = (___)^2 - (___)^2 = ___$

c. $(2 + 7x)(2 - 7x) = ___ - (___)^2 = ___$

d. $(2x - 9)(2x + 9) = (___)^2 - ___ = ___$

Pour les exercices 54 à 57, développer les expressions données en utilisant une identité remarquable.

54 a. $(x + 4)(x - 4)$

b. $(7 + x)(7 - x)$

c. $(5x + 1)(5x - 1)$

d. $(4x - 3)(4x + 3)$

55 a. $(t + 6)(t - 6)$

b. $(5 - 2t)(5 + 2t)$

c. $(3t + 10)(3t - 10)$

d. $(t^2 + 1)(t^2 - 1)$

56 a. $(x + y)(x - y)$

b. $(2x + y)(2x - y)$

c. $(x - 3y)(x + 3y)$

d. $(3x + 5y)(3x - 5y)$

57 a. $\left(y + \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right)$

b. $\left(\frac{1}{3}y + 1\right)\left(\frac{1}{3}y - 1\right)$

c. $\left(\frac{1}{2}y + 3\right)\left(\frac{1}{2}y - 3\right)$

d. $\left(y - \frac{1}{5}\right)\left(y + \frac{1}{5}\right)$

Pour les exercices 58 et 59, calculer les expressions données sans utiliser de calculatrice et sans poser d'opérations.

58 a. $(100 + 1)(100 - 1)$

b. 31×29

c. 38×42

59 a. 51×49

b. 103×97

c. $20,1 \times 19,9$

60 Recopier et compléter chacune des factorisations suivantes :

- a. $x^2 - 16 = x^2 - \text{---}^2 = (x + \text{---})(x - \text{---})$
 b. $9x^2 - 25 = (\text{---})^2 - \text{---}^2 = (\text{---} + \text{---})(\text{---} - \text{---})$
 c. $4 - \frac{1}{49}x^2 = \text{---}^2 - (\text{---})^2 = (\text{---} + \text{---})(\text{---} - \text{---})$

Pour les exercices 61 et 62, factoriser les expressions données en utilisant une identité remarquable.

- 61** a. $x^2 - 64$ b. $81 - x^2$ c. $4x^2 - 9$
 d. $25x^2 - 36$ e. $1 - 16x^2$ f. $49x^2 - 4$

- 62** a. $9x^2 - 1$ b. $100x^2 - 121$ c. $16 - 81x^2$
 d. $x^2 - \frac{1}{4}$ e. $\frac{1}{9}x^2 - 4$ f. $\frac{1}{16} - 25x^2$

63 a et b sont deux nombres tels que : $a - b = 13$ et $a^2 - b^2 = 156$.

- 1 Calculer $a + b$.
 2 Calculer a et b.

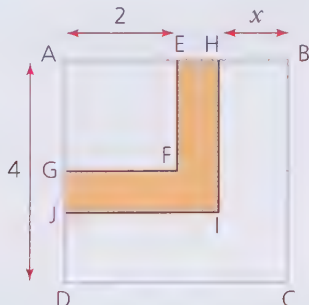
64 Calcul mental

Calculer mentalement :

$A = 45^2 - 35^2$ $B = 101^2 - 99^2$ $C = 37^2 - 36^2$

65 Vu au brevet

Dans la figure ci-dessous, AEFG, AHJ et ABCD sont des carrés.



1 Exprimer AH en fonction de x ; en déduire l'aire de AHJ, puis préciser dans la liste ci-dessous la (ou les) expression(s) algébrique(s) qui correspond(ent) à l'aire de la partie coloriée en orange.

$M = (4 - x)^2 - 2^2$; $N = (4 - x - 2)^2$; $P = 4^2 - x^2 - 2^2$.

2 Développer et réduire l'expression : $Q = (4 - x)^2 - 4$.

3 Factoriser Q.

4 Calculer Q pour $x = 2$.

Que traduit ce résultat pour la figure ?

Pour les exercices 66 et 67, factoriser chaque expression.

- 66** a. $(x + 2)^2 - 9$ b. $(2x + 1)^2 - 4$
 c. $25 - (5x - 4)^2$ d. $(x + 1)^2 - 4x^2$
 e. $x^2 - (-2x + 5)^2$ f. $9x^2 - (2x - 3)^2$

- 67** a. $(x - 2)^2 - (2x + 5)^2$ b. $(3 - x)^2 - (3x + 2)^2$
 c. $(-x + 4)^2 - (6x - 1)^2$ d. $(3x + 2)^2 - (2x + 7)^2$

68 Soit $A = x^2 - 25 + (3x + 4)(x - 5)$.

- 1 Factoriser $x^2 - 25$.
 2 En déduire une factorisation de A.

Utiliser les trois identités remarquables

69 Recopier, puis relier chaque expression factorisée à son expression développée.

$(4x + 1)(4x - 1)$ •
 $(x - 8)^2$ •
 $(x + 4)(x - 4)$ •
 $(1 - 4x)^2$ •
 $(x + 8)^2$ •
 $(1 - 4x)(1 + 4x)$ •

• $1 - 16x^2$
 • $x^2 + 16x + 64$
 • $16x^2 - 1$
 • $x^2 - 16$
 • $x^2 - 16x + 64$
 • $1 - 8x + 16x^2$

70 Soit $A = (3x - 5)^2 - (2x + 1)(2x - 1)$.

- 1 Développer et réduire A.
 2 Calculer A pour $x = -1$, puis pour $x = \frac{1}{5}$.

71 On donne $I = 2\sqrt{3} + 5$ et $J = 2\sqrt{3} - 5$.
 Calculer les valeurs exactes de I^2 , J^2 et $I \times J$.

72 Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = \left(\frac{1}{6}x + 3\right)^2$ $B = \left(\frac{3}{4}x + 2\right)\left(\frac{3}{4}x - 2\right)$
 $C = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}x\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}x\right)$ $D = \left(\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}\right)^2$

73 Soient les expressions $A = (5 - 3x)^2 - 7(2 - x^2)$ et $B = (4x + 1)(4x - 1) - 6(5x - 2)$.
 Démontrer que : $A = B$.

74 1 Développer et réduire l'expression $A = (a + 3)^2 - (a - 3)^2$.

2 En déduire, sans utiliser de calculatrice et sans poser d'opérations, la valeur de $1\,003^2 - 997^2$.

75 Développer puis réduire chaque expression.

$A = (7x - 2)^2 - (6x + 1)(6x - 1)$
 $B = (3x + 2)(3x - 2) - 2(2x - 1)^2$
 $C = (2x + 5)^2 - (x + 7)^2$

76 Factoriser chaque expression.

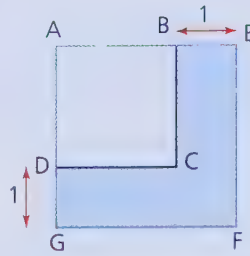
$A = 25x^2 + 30x + 9$ $B = 16x^2 - 25$
 $C = (3x - 1)^2 - 9$ $D = 49x^2 - 42x + 9$
 $E = 9x^2 + 3x + \frac{1}{4}$ $F = (4x - 3)^2 - (5x + 1)^2$

77 Calculer les expressions suivantes sans utiliser de calculatrice et sans poser d'opérations.

a. 99^2 b. 39×41
 c. $56^2 - 44^2$ d. $41,3^2 - 2 \times 41,3 \times 1,3 + 1,3^2$

Exercices

- 78** ABCD est un carré de côté x (en cm). On augmente son côté de 1 cm et on obtient le carré AEFG comme l'indique la figure ci-contre.



1 Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la surface bleue (en cm^2).

Parmi les expressions suivantes, laquelle correspond à $\mathcal{A}$?

- $x^2 - (x+1)^2$
- $(x+1)^2$
- $x^2 - 1$
- $(x+1)^2 - x^2$

2 Démontrer que : $\mathcal{A} = 2x + 1$.

3 Trouver x lorsque $\mathcal{A}$ est égale à 14 cm^2 .

79 Vu au brevet

1 Développer et réduire l'expression : $P = (x+12)(x+2)$.

2 Factoriser l'expression : $Q = (x+7)^2 - 25$.

3 ABC est un triangle rectangle en A ; x désigne un nombre positif ; $BC = x+7$; $AB = 5$.

Faire un schéma et montrer que : $AC^2 = x^2 + 14x + 24$.

80 Soit x un nombre quelconque.

Démontrer chacune des égalités suivantes :

- a. $(7x-3)^2 - (5x+2)(6x-7) = 19x^2 - 19x + 23$
- b. $x^2 - 4x - 16 = (3x-4)(3x+4) - 4x(2x+1)$
- c. $(4x+3)^2 - (x-2)^2 = (5x+1)(3x+5)$

81 On donne ci-dessous deux programmes de calcul.

Programme A

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 1.
- Élever au carré la somme obtenue.
- Retrancher le carré du nombre choisi au nombre obtenu.
- Noter le résultat.

Programme B

- Choisir un nombre.
- Le multiplier par 2.
- Ajouter 1 au nombre obtenu.
- Noter le résultat.

1 Effectuer chaque programme de calcul en choisissant 2 puis -3 pour nombre de départ. Que peut-on conjecturer ?

2 Démontrer cette conjecture en prenant x comme nombre choisi au départ.

Pour les exercices **83** à **85**, résoudre les équations produit nul.

83 a. $(3x-1)(x+4) = 0$ b. $(x-5)(2x+7) = 0$
c. $5x(-x+3) = 0$ d. $(x+5)^2 = 0$

84 a. $(x+5)(4x-3) = 0$ b. $-3x(5-x) = 0$
c. $(3x-2)^2 = 0$ d. $(-5x+2)(5x+4) = 0$

85 a. $(x+\sqrt{3})(3x+2) = 0$ b. $(x-\sqrt{2})(2x-\sqrt{5}) = 0$
c. $\left(\frac{1}{3}x-2\right)\left(\frac{2}{7}x-1\right) = 0$ d. $\frac{1}{5}x\left(x+\frac{1}{9}\right) = 0$

86 Calcul mental

Résoudre mentalement les équations suivantes :

a. $(x-5)(x-3) = 0$ b. $(x+3)(4-x) = 0$
c. $4x(x+7) = 0$ d. $(3x-4)(7x+2) = 0$

87 Dans chaque cas, écrire une équation produit nul qui a exactement les deux solutions données.

a. 5 et 3 b. 4 et -7 c. $\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{7}$

88 Résoudre chacune des équations proposées après avoir factorisé le premier membre en utilisant la distributivité.

a. $x^2 - 5x = 0$ b. $(x-4)^2 + 3(x-4) = 0$
c. $3x^2 + 2x = 0$ d. $(x+2) + (3x+1)(x+2) = 0$

89 Résoudre chacune des équations proposées après avoir factorisé le premier membre en utilisant une identité remarquable.

a. $x^2 - 9 = 0$ b. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
c. $4x^2 - 1 = 0$ d. $(x+3)^2 - 16 = 0$

Exercices de synthèse

90 Vu au brevet

1 Éric dit à Zoé : « Choisis un nombre x ; ajoute 1 au triple de x ; calcule alors le carré du nombre obtenu et retranche-lui le nombre 4 ».

Quel résultat trouvera Zoé si elle choisit $x = 5$?

2 Éric propose à Zoé quatre expressions dont l'une correspond au calcul qu'il lui a fait faire.

Voici ces quatre expressions :

A = $3(x+1)^2$ B = $4 - (3x+1)^2$
C = $(3x+1)^2 - 4$ D = $(x+3)^2 - 4$

Quelle expression Zoé doit-elle choisir ?

3 a. Factoriser C = $(3x+1)^2 - 4$.
b. Résoudre $(3x-1)(3x+3) = 0$.

c. Zoé rejoue ; elle choisit un nombre négatif et elle trouve alors zéro. Quel nombre a-t-elle choisi ?

Vérifier alors le calcul de Zoé.

Équations produit nul

82 Quelles sont les équations produit nul parmi les équations suivantes ? Justifier les réponses.

a. $(2x+3)(x-5) = 0$ b. $(2x+3) + (x-5) = 0$
c. $2x(3x-5) = 0$ d. $(2x+3)(x-5) = 1$

91 Vu au brevet

On donne un programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 4.
- Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi.
- Ajouter 4 à ce produit.
- Écrire le résultat.

1 Écrire les calculs permettant de vérifier que si l'on fait fonctionner ce programme avec le nombre -2 , on obtient 0.

2 Donner le résultat fourni par le programme lorsque le nombre choisi est 5.

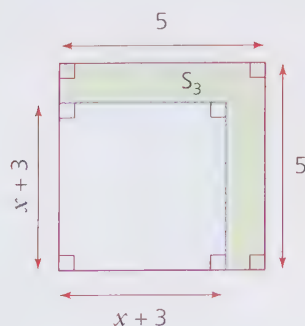
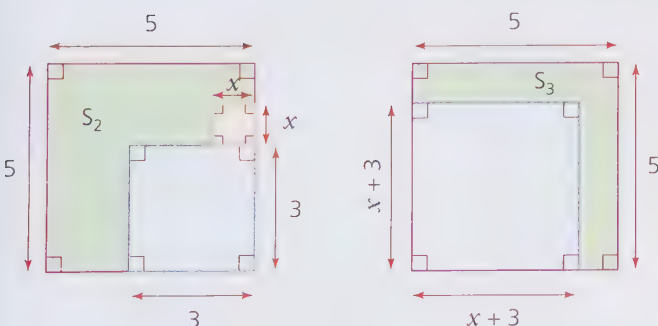
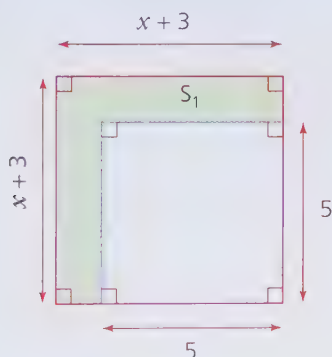
3 a. Faire deux autres essais en choisissant à chaque fois un nombre entier et écrire le résultat obtenu sous la forme du carré d'un autre nombre entier (les essais doivent figurer sur la copie).

b. En est-il toujours ainsi lorsqu'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul ? Justifier la réponse.

4 On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?

92 Vu au brevet

1 Parmi les surfaces coloriées en vert, laquelle a pour aire : $25 - (x + 3)^2$?



2 On pose $E = 25 - (x + 3)^2$.

a. Développer et réduire E.

b. Factoriser E.

c. Calculer E pour $x = \sqrt{2}$, puis en donner la troncature au centième.

3 a. Résoudre l'équation : $(2 - x)(x + 8) = 0$.

b. Expliquer, en utilisant la question 1, pourquoi l'une des solutions de l'équation était prévisible.

93 Vu au brevet

On donne l'expression $M = (3x + 5)^2 - (3x + 5)(2x + 7)$.

1 Développer et réduire M.

2 Factoriser M.

3 Calculer M pour $x = 2$, puis pour $x = 0$.

4 Résoudre l'équation $M = 0$.

94 Vu au brevet

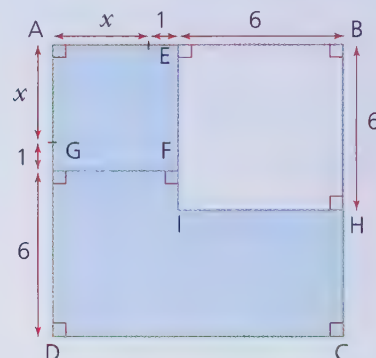
1 Factoriser les expressions :

$$A = (x + 7)^2 - 36 \quad B = 4x^2 + 8x + 4$$

$$C = (x + 13)(x + 1) - 4(x + 1)^2$$

Exprimer C en fonction de A et de B.

2 On considère la figure ci-dessous :



a. Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface bleue en fonction de x .

b. Calculer la valeur de C pour $x = 3$.

c. En déduire que, pour $x = 3$, l'aire du carré AEFG est le quart de celle de la surface bleue.

95 On considère l'expression $D = (x - 5)^2 - 16$.

1 Développer et réduire l'expression D.

2 Factoriser l'expression D.

3 Calculer D pour $x = \sqrt{3}$. Donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{3}$, avec a et b entiers relatifs.

4 Résoudre l'équation $D = 0$.

96 Vu au brevet

On considère l'expression $E = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 2)$.

1 Développer et réduire l'expression E.

2 Factoriser $4x^2 - 9$. En déduire la factorisation de l'expression E.

3 a. Résoudre l'équation $(2x + 3)(3x - 5) = 0$.

b. Cette équation a-t-elle une solution entière ?

c. Cette équation a-t-elle une solution décimale ?

97 Vu au brevet

1 Soit $E = 4x^2 + 8x - 5$. Calculer E pour $x = 0,5$.

2 Soit $F = (2x + 2)^2 - 9$.

a. Développer et réduire F.

b. Factoriser F.

3 a. Résoudre l'équation $(2x - 1)(2x + 5) = 0$.

b. Quelles sont les valeurs de x qui annulent E ?

Faire le point

98 QCM Indiquer, dans chaque cas, la réponse exacte parmi les quatre réponses proposées.

		A	B	C	D
1	$(2x+3)^2 =$	$4x^2 + 6x + 9$	$2x^2 + 9$	$4x^2 + 9$	$4x^2 + 12x + 9$
2	$(5x-3)^2 =$	$5x^2 - 15x + 9$	$5x^2 - 30x + 9$	$25x^2 - 30x - 9$	$25x^2 - 30x + 9$
3	$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 =$	$x^2 - \frac{1}{4}$	$x^2 - 2x + \frac{1}{4}$	$x^2 - x + \frac{1}{4}$	$x^2 - x - \frac{1}{4}$
4	$(3x+4)(3x-4) =$	$3x^2 - 16$	$9x^2 + 16$	$9x^2 - 16$	$(3x-4)^2$
5	$(x+5)(3x-2) + (x+5) =$	$(x+5)(3x-1)$	$(x+5)(3x-2)$	$(x+5)(4x+3)$	$(x+5)(4x-7)$
6	$16x^2 + 24x + 9 =$	$(4x-3)^2$	$(4x+3)^2$	$(4x+9)^2$	$(4x+3)(4x-3)$
7	$4x^2 - 25 =$	$(4x+5)(4x-5)$	$(2x-5)^2$	$(2x-5)(2x+5)$	$(4x-5)^2$
8	$(2x+5)^2 - 4 =$	$(2x+3)(2x+7)$	$(2x+1)(2x+9)$	$(2x+1)^2$	$(2x+3)(2x+1)$
9	L'équation $(4-3x)(x+2) = 0$ a pour solutions :	$-\frac{3}{4}$ et -2	$\frac{3}{4}$ et -2	-2 et $\frac{4}{3}$	-2 et $-\frac{4}{3}$
10	L'équation $-2x(x-5) = 0$ a pour solutions :	2 et 5	-2 et 5	$\frac{1}{2}$ et 5	0 et 5

Je rédige Pour les exercices suivants, on demande une solution rédigée.

• Développer et réduire une expression littérale

99 Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (4-3x)^2 - (x-3)(5x+1)$$

$$B = (7x+2)(7x-2) - (5x+2)^2$$

$$C = (2+3x)^2 - (4x-1)^2$$

100 ① Développer et réduire l'expression :

$$A = (a-4)^2 - (a-8)(a-2).$$

② En déduire, sans utiliser de calculatrice, la valeur de $996^2 - 992 \times 998$.

• Factoriser une expression littérale

101 ① Factoriser les expressions suivantes en utilisant la distributivité.

$$A = 8x + 4x^2 \quad B = (x+3)^2 + 4x(x+3)$$

$$C = (3x+5)(x+2) - (3x+5)(3x-7)$$

② Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables.

$$D = 49 - 100x^2 \quad E = 25x^2 + 4 + 20x$$

$$F = (4x-1)^2 - 9x^2 \quad G = \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$$

③ Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables et la distributivité.

$$H = 4x^2 - 4x + 1 + (x+5)(2x-1)$$

$$I = (3x-2)(4x+3) - (9x^2-4)$$

• Ramener une équation à une équation produit nul et la résoudre

102 Résoudre chacune des équations proposées après avoir factorisé le premier membre.

a. $5x^2 + 2x = 0$

b. $2x + 3 + (x-2)(2x+3) = 0$

c. $9x^2 - 4 = 0$

d. $x^2 - (1+3x)^2 = 0$

• Traduire un énoncé par une expression littérale

103 On donne ci-dessous un programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Ajouter 5 au double du nombre choisi.
- Élever au carré le nombre obtenu.
- Retrancher 16 à ce carré.
- Noter le résultat.

On appelle x le nombre auquel on applique le programme de calcul et R le résultat de ce programme.

a. Exprimer R en fonction de x .

b. Démontrer que $R = (2x+1)(2x+9)$.

c. Quels nombres peut-on choisir au départ pour que le résultat R soit nul ?

Approfondir

104 ① Soit $A = (2x - 3)(x + 4) + 2x + 8$.

- Factoriser l'expression $2x + 8$.
- En déduire une factorisation de A.

② Soit $B = x^2 + 2x + 1 + (4x + 1)(x + 1)$.

- Factoriser l'expression $x^2 + 2x + 1$.
- En déduire une factorisation de B.

③ Factoriser chacune des expressions suivantes :

$$C = (x - 2)^2 - (3x - 6)$$

$$D = x^2 - 5x + (3x - 1)(x - 5)$$

$$E = x^2 - 6x + 9 - (x - 3)(2x + 1)$$

$$F = (2x - 3)(x + 2) + 4x^2 - 9$$

105 ① Soit $A = (3x - 2)(x + 6) - 3x + 2$.

- Recopier et compléter : $-3x + 2 = (-1) \times (\dots)$.
- En déduire une factorisation de A.

② Factoriser chacune des expressions suivantes :

$$B = (x + 2)(2x - 5) - 2x + 5$$

$$C = (4x - 3)^2 - 4x + 3$$

$$D = -x - 6 + (3x + 5)(x + 6)$$

$$E = 2x - 8 - (4 - x)(5x + 1)$$

106 ① Quel est l'opposé de 5 ? Comparer les nombres 5^2 et $(-5)^2$.

② a. Quel est l'opposé de $x + 5$? Comparer $(x + 5)^2$ et $(-x - 5)^2$.

b. En déduire le développement de $(-x - 5)^2$.

③ Développer les expressions suivantes :

$$A = (-x - 3)^2 \quad B = (-7 - x)^2 \quad C = (-2x - 1)^2$$

Pour les exercices **107** à **109**, factoriser chaque expression.

107 $A = (6x + 1)(3x + 4) + (-6x - 1)^2$

$$B = (-x + 5)^2 - (2x + 3)(x - 5)$$

$$C = x^2 - 16 + (4 - x)^2$$

108 $A = (2x - 4)(x + 3) - (x - 2)^2$

$$B = 9(x - 1)^2 - (x + 4)^2$$

$$C = (3x + 5)^2 - 4(x - 1)^2$$

$$D = 25(x + 2)^2 - 16(x + 1)^2$$

109 $A = (x - 3)(5x + 1) + (x - 3)(1 - x) + (x - 3)(2x - 7)$

$$B = (x - 2)(-3x + 1) - (x - 2)(x + 3) + (x^2 - 2x)$$

$$C = 9x^2 - 1 + (x + 2)(3x - 1) + (9x^2 - 6x + 1)$$

$$D = x^2 + 6x + 9 + (4x - 3)(x + 3) - (x^2 + 3x)$$

110 Résoudre les équations suivantes :

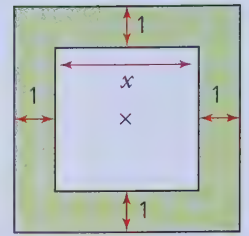
a. $(x - 8)^2 + 36 = x^2$

b. $(2x - 1)(3x + 2) = 6x^2 + 7$

c. $(x - 3)^2 - x(x + 1) = 0$

d. $(2x + 5)(x + 2) = 10$

111 La figure ci-contre est constituée de deux carrés ayant le même centre. L'unité de longueur est le centimètre.



① Exprimer en fonction de x l'aire $\mathcal{A}$ de la partie verte.

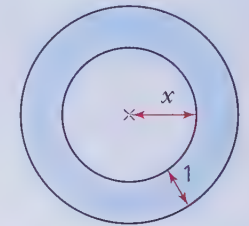
Donner l'écriture développée et réduite de $\mathcal{A}$.

② Sachant que l'aire $\mathcal{A}$ de la partie verte est égale à 26 cm^2 , calculer x .

112 L'aire d'un carré augmente de 44 cm^2 si on augmente chacun de ses côtés de 4 cm .

Calculer la longueur initiale d'un côté de ce carré.

113 La figure ci-contre est constituée de deux cercles de même centre. L'unité de longueur est le centimètre.



L'aire $\mathcal{A}$ de la partie bleue est égale à 36 cm^2 .

Calculer x . On donnera l'arrondi au mm.

Pour les exercices **114** à **118**, démontrer chaque égalité.

114 $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

115 $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

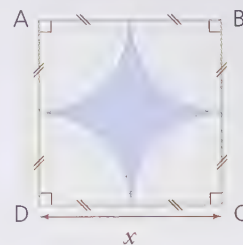
116 $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

117 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

118 $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$

119 ABCD est un carré de côté x . On appelle $\mathcal{A}$ l'aire de la partie coloriée.

Démontrer que : $\mathcal{A} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)x^2$.



120 Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (3 + 5\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}(2\sqrt{2} + 1)$$

$$B = (2\sqrt{3} - 1)^2 + (1 - \sqrt{3})^2$$

$$C = (\sqrt{5} + 1)^2 + (\sqrt{5} - 1)^2 - (\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$$

121 Démontrer que $\sqrt{2} + 1$ et $\sqrt{2} - 1$ sont deux nombres inverses.

Exercices

122 1 On donne $A = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$.
Calculer : $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$. En déduire que : $A = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

2 On donne $B = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

a. Calculer : $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

b. En déduire une écriture de B sans radical au dénominateur.

3 On donne $C = \frac{3}{3+\sqrt{7}}$ et $D = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}$.

Écrire C et D sans radical au dénominateur.

123 Soient $a = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$ et $b = \frac{2}{1-\sqrt{5}}$.

1 Mettre au même dénominateur a et b.

2 En déduire que $a+b$ est un nombre entier.

124 1 a. Déterminer le signe de $2-\sqrt{3}$, puis calculer $(2-\sqrt{3})^2$.

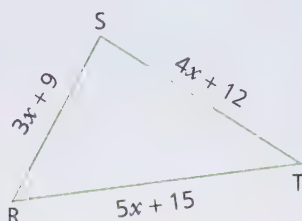
b. En déduire une expression simplifiée de $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

2 a. Déterminer le signe de $4-3\sqrt{5}$, puis calculer $(4-3\sqrt{5})^2$.

b. En déduire une expression simplifiée de $\sqrt{61-24\sqrt{5}}$.

125 Soit x un nombre positif.

Démontrer que le triangle RST ci-contre est rectangle en S (les mesures des côtés du triangle RST sont exprimées dans la même unité).



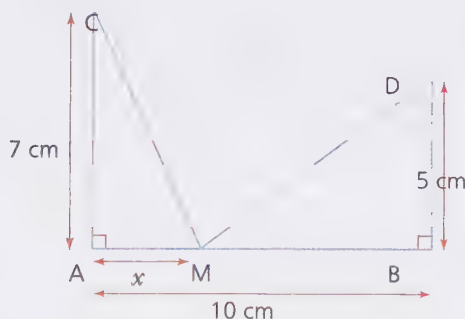
126 Calculer sans utiliser de calculatrice.

$$A = (5^6+1)^2 - (5^6+1)(5^6-1) - 2(5^6-1)$$

$$B = \frac{5^{18}-25}{(5^8+1)(5^8-1)}$$

127 Sur la figure ci-dessous, [AC] et [BD] sont deux segments perpendiculaires au segment [AB].

M est un point quelconque du segment [AB]. On pose $AM = x$ (en cm).



1 Démontrer que : $MC^2 + MD^2 = 2x^2 - 20x + 174$.

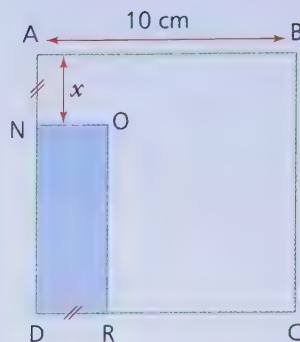
2 a. Démontrer que : $2x^2 - 20x + 174 = 2[(x-5)^2 + 62]$.

b. Calculer x pour que : $MC^2 + MD^2 = 126$.

128 Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 10 cm. N est un point de [AD] et R est un point de [DC] tels que $AN = DR$; on pose $AN = x$ (en cm).

O est le point tel que NORD est un rectangle.

On souhaite trouver la position du point N pour laquelle l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle NORD est maximale.



1 Donner un encadrement de x .

2 a. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de x .

b. Démontrer que : $\mathcal{A} = 25 - (x-5)^2$.

3 a. Déterminer la valeur de x pour laquelle $\mathcal{A}$ est maximale. Où est alors situé le point N ?

b. Dans ce cas, que peut-on dire du rectangle NORD ?

129 On considère l'expression $A = 3x^2 + 14x - 5$.

a. Montrer que : $3x^2 + 14x - 5 = (3x-1)(x+5)$.

b. Résoudre l'équation $A = 0$.

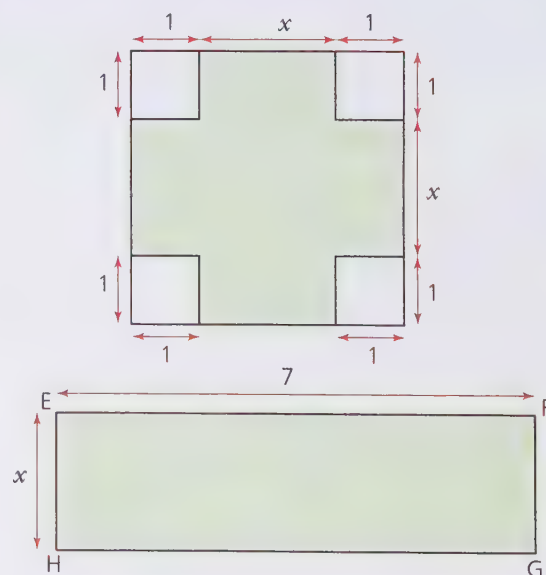
130 On considère l'expression $A = (x-3)(x+5)$.

a. Résoudre l'équation $A = 0$.

b. Développer et réduire A.

c. En déduire les nombres tels que la somme de leur carré et de leur double est égale à 15.

131 L'unité de longueur est le centimètre.



Déterminer x non nul pour que l'aire $\mathcal{A}_1$ de la croix verte soit égale à l'aire $\mathcal{A}_2$ du rectangle EFGH.

132 Résoudre les équations suivantes :

a. $(x+5)(x-7)(x+9) = 0$

b. $4x(2x-1)(3x+2) = 0$

c. $(x^2-4)(x+3) = 0$

- 133** ① Trouver les nombres tels que leur carré est égal à leur double.
 ② Trouver les nombres tels que leur cube est égal à leur double.

- 134** ① On considère les expressions $A = (x + 7)(-2x + 5)$ et $B = (x + 7)(x - 2)$. Soit l'équation suivante de la forme $A = B$, c'est-à-dire : $(x + 7)(-2x + 5) = (x + 7)(x - 2)$.
 a. Écrire cette équation sous la forme $A - B = 0$.
 b. Résoudre cette équation après avoir factorisé son premier membre.

② Résoudre les équations suivantes :

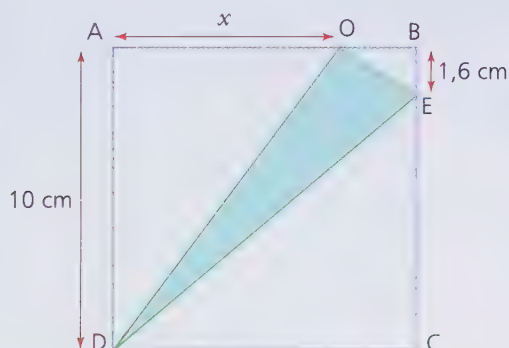
- a. $(-3x - 2)(4x + 3) = (x - 5)(4x + 3)$
 b. $2x(5x - 1) = 3x(2x + 1)$
 c. $(5x - 1)^2 = 9$

135 Résoudre les équations suivantes :

- a. $(3x + 4)^2 = (x - 3)(3x + 4)$
 b. $(2x + 7)^2 = (3x - 4)^2$
 c. $(5x - 3)(4 + x) = 25x^2 - 9$

136 ABCD est carré de côté 10 cm.

E est un point de [BC] tel que $BE = 1,6$ cm. O est un point de [AB] ; on pose $AO = x$ (en cm).



- ① Donner un encadrement de x .
 ② a. Calculer DE^2 .
 b. Dans le triangle AOD, exprimer OD^2 en fonction de x .
 c. Dans le triangle OBE, exprimer OE^2 en fonction de x et montrer que : $OE^2 = x^2 - 20x + 102,56$.
 ③ a. Démontrer que si $x^2 - 10x + 16 = 0$, alors le triangle ODE est rectangle en O.
 b. Démontrer que : $x^2 - 10x + 16 = (x - 5)^2 - 9$.
 c. Résoudre l'équation $x^2 - 10x + 16 = 0$.
 d. En déduire les valeurs de x pour lesquelles le triangle ODE est rectangle en O.

137 ① Développer $(a + 1)^3$ après avoir remarqué que : $(a + 1)^3 = (a + 1)(a + 1)^2$.

② En déduire la valeur de 101^3 sans utiliser de calculatrice et sans poser d'opérations.

Argumenter et débattre

138 ① Quelle est la solution de l'équation : $(x + 2^{999})^2 - (x - 2^{999})^2 = 2^{1000}$?

② En est-il de même pour l'équation : $(x + 2^{99})^2 - (x - 2^{99})^2 = 2^{100}$?

139 Vrai ou faux

- a. $(-x - 1)^2 = (x + 1)^2$ b. $(-x - 2)^2 = -(x + 2)^2$
 c. $(x - 3)^2 = (-x + 3)^2$ d. $-(x + 5)^2 = [-(x + 5)]^2$

140 Soient a et b deux nombres.

Dans quels cas l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ est-elle vraie ?

141 Trouver tous les nombres a et b non nuls tels que :

$$\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} = 1.$$

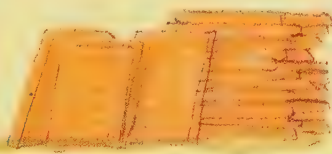
POUR LES CURIEUX

Triplets pythagoriciens

Trouver un triangle rectangle dont les longueurs des trois côtés sont des entiers est un très vieux problème mathématique. Il s'agit de trouver des triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs vérifiant : $a^2 = b^2 + c^2$.

De tels triplets sont appelés **triplets pythagoriciens**.

En Mésopotamie, il y a plus de 4 000 ans, les habitants écrivaient sur des tablettes d'argile qu'ils laissaient sécher au soleil. Sur l'une d'entre elles, dite Plimpton 322 (du nom du collectionneur américain qui l'a recueillie), sont écrits 15 triplets pythagoriciens : ils sont tous de la forme :



$(n^2 + m^2, 2nm, n^2 - m^2)$, n et m étant des entiers strictement positifs tels que $n > m$.

Les Grecs, eux, découvrirent les triplets $(2n^2 + 2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n + 1)$, n étant un entier supérieur ou égal à 1. C'est Euclide qui le premier donna la forme générale de tous les triplets pythagoriciens ; ce sont exactement les triplets : $(k(n^2 + m^2), 2knm, k(n^2 - m^2))$, k étant un entier supérieur ou égal à 1 et n et m étant deux entiers strictement positifs tels que $n > m$.

① Vérifier que les Babyloniens et les Grecs avaient trouvé des triplets pythagoriciens (indication : pour calculer un nombre de la forme $(i + j + k)^2$, on pourra commencer par développer $(i + (j + k))^2$).

② Vérifier que les triplets d'Euclide sont pythagoriciens.

③ Comment sont obtenus les triplets babyloniens à partir d'un triplet donné par Euclide ?

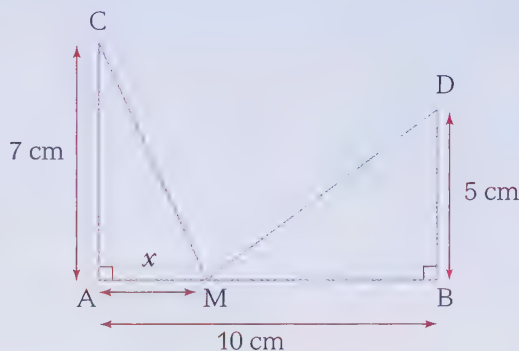
④ En prenant $n = m + 1$, retrouver les triplets grecs, exprimés en fonction de m , à partir d'un triplet donné par Euclide.

Problème d'équidistance

Sur la figure ci-dessous, $[AC]$ et $[BD]$ sont deux segments perpendiculaires au segment $[AB]$ tels que : $AB = 10$ cm, $AC = 7$ cm et $BD = 5$ cm.

M est un point quelconque du segment $[AB]$.

On pose $AM = x$ (en cm).

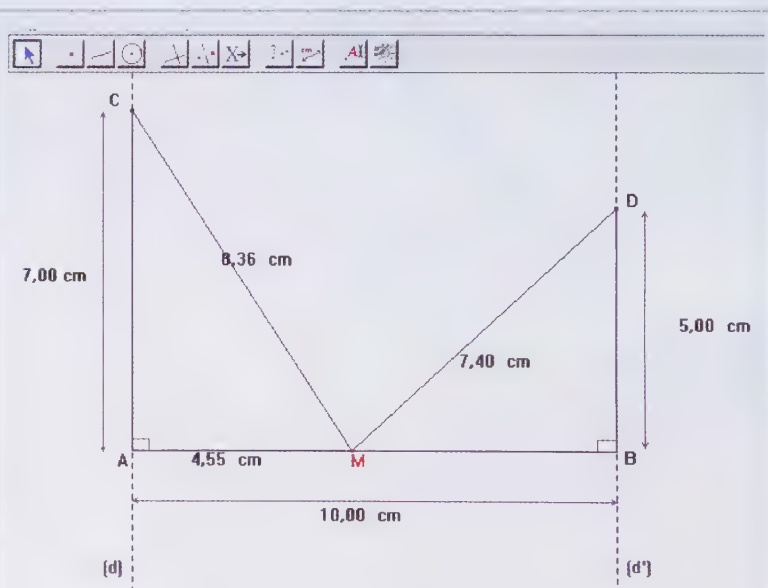


On se pose alors la question suivante : où doit être placé le point M pour qu'il soit équidistant des points C et D ?

1 Conjecturer

- Créer un **segment** $[AB]$ de **longueur** 10 cm.
- Créer les **droites perpendiculaires** au segment $[AB]$ en A et en B . **Nommer** d et d' ces deux droites.
- Créer un **point** C sur d tel que : $AC = 7$ cm, et créer le **point** D sur d' tel que :
 - C et D sont du même côté de la droite (AB) ;
 - $BD = 5$ cm.
- Créer un **point** M sur le segment $[AB]$, puis créer les **segments** $[AM]$, $[CM]$ et $[DM]$.
- Afficher les **longueurs** des segments $[AM]$, $[CM]$ et $[DM]$.
- Déplacer** le point M sur $[AB]$ en observant les variations des longueurs des segments $[CM]$ et $[DM]$.

Pour quelle position de M les segments $[CM]$ et $[DM]$ semblent-ils avoir la même longueur ?



2 Démontrer

- Exprimer MC^2 en fonction de x .
- Démontrer que : $MD^2 = x^2 - 20x + 125$.
- Déterminer x pour que le point M soit équidistant des points C et D .
Où est alors placé le point M ?

6

Grandeurs composées et unités



L'unité choisie pour une mesure est « idéalement » de la **taille** de ce que l'on doit mesurer.
Chez les fourmis, l'unité de mesure principale serait le « **millimètre** ».
Les astronomes utilisent, pour mesurer les longueurs, l'**unité astronomique** (UA) égale à une distance « moyenne » entre la Terre et le Soleil. Une telle unité vaut **$1,50 \times 10^{11}$ mètres**.

L'ancien système monétaire britannique était irritant : **12 pence** valaient 1 shilling, **20 shillings** valaient 1 livre, **2 shillings et 6 pence** valaient 1 demi-couronne.

Un industriel français se plaignit que, pour calculer un bénéfice de 7 % sur un produit dont le prix de base était **27 £ 6 shillings et 8 pence**, il lui fallait utiliser un **comptable spécialisé**...

1 £,
3 shillings
and...



Une mesure n'est **jamais exacte** : le temps que vous disiez l'heure précise, ce n'est déjà plus la même heure !



QCM

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	Si on a l'égalité de quotients $\frac{a}{4} = \frac{4}{5}$, alors :	$4a = 20$	$5a = 16$	$\frac{a}{5} = 1$
2	La formule de la vitesse moyenne est $v = \frac{d}{t}$ où d est la distance parcourue et t la durée du parcours. On peut en déduire :	$d = v \times t$	$d = \frac{v}{t}$	$t = d \times v$
3	La superficie d'un lac est de $3,5 \text{ km}^2$. Elle est aussi égale à :	$3\,500 \text{ m}^2$	$3,5 \times 10^6 \text{ m}^2$	35 hm^2
4	Un volume de 40 dm^3 est aussi égal à :	400 dL	$0,4 \text{ m}^3$	400 cm^3
5	$3,25 \text{ h}$ correspond, en heures et minutes, à :	$3 \text{ h } 25 \text{ min}$	$3 \text{ h } \frac{25}{60} \text{ min}$	$3 \text{ h } 15 \text{ min}$
6	Un TGV part d'une ville A à $5 \text{ h } 48 \text{ min}$ et arrive dans une ville B à $9 \text{ h } 15 \text{ min}$. Le trajet a duré :	$3,27 \text{ h}$	$3 \text{ h } 27 \text{ min}$	$4 \text{ h } 67 \text{ min}$
7	Un TGV parcourt $637,5 \text{ km}$ en $2 \text{ h } 30 \text{ min}$. Sa vitesse moyenne est de :	255 km/h	$277,17 \text{ km/h}$	$255 \text{ km} \cdot \text{h}$
8	Une voiture parcourt $12,5 \text{ km}$ avec 1 L de carburant. Cette voiture consomme :	$12,5 \text{ L aux } 100 \text{ km}$	$12,5 \text{ L/km}$	$8 \text{ L aux } 100 \text{ km}$
9	Une pompe évacue $3\,000 \text{ L}$ par heure. Son débit est égal à :	$3 \text{ m}^3/\text{h}$	$3 \text{ m}^3 \cdot \text{h}$	30 L/min
10	Dans un pays d'une superficie de $600\,000 \text{ km}^2$, il y a 42 millions d'habitants. La densité de population est de :	7 hab/m^2	70 hab/km^2	$25,2 \text{ hab/km}^2$

Exercice 1

- 1 a. Convertir en nombre décimal d'heures : $5 \text{ h } 39 \text{ min}$; $1 \text{ h } 03 \text{ min}$; 864 s .
b. Convertir en heures, minutes et secondes : $4,25 \text{ h}$; $2,1 \text{ h}$; $0,6 \text{ min}$.
- 2 Recopier et compléter : $0,17 \text{ hm}^2 = \dots \text{ m}^2$ $3\,500 \text{ cm}^2 = \dots \text{ m}^2$
 $1\,200 \text{ m}^2 = \dots \text{ dam}^2 = 0,12 \dots$
- 3 Recopier et compléter : $3 \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3 = \dots \text{ L}$ $7\,500 \text{ cm}^3 = 7,5 \dots = \dots \text{ m}^3$
 $750 \text{ L} = \dots \text{ cm}^3 = 0,75 \dots$

Exercice 2

La vitesse moyenne d'un mobile est donnée par la formule $v = \frac{d}{t}$, où d est la distance parcourue et t la durée du parcours.

- 1 Exprimer d en fonction de v et de t , puis t en fonction de d et de v .
- 2 Quelle est la distance parcourue en $1,75 \text{ h}$ à la vitesse moyenne de $70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?
- 3 Toujours à $70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, quelle est la distance parcourue en $1 \text{ h } 45 \text{ min}$?
- 4 Quelle est la durée d'un trajet de 80 km effectué à la vitesse moyenne de $25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?
On exprimera le résultat en nombre décimal d'heures, puis en heures et minutes.

Exercice 3

Un coureur de fond parcourt 59 mètres en 10 secondes.

- 1 Quelle distance parcourt-il en 1 seconde ? En déduire sa vitesse moyenne en m/s .
- 2 Quelle distance parcourt-il en 1 minute ? en 1 heure ? Convertir la dernière distance en km et en déduire sa vitesse moyenne en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Activité 1 Des grandeurs produits

A Des grandeurs produits connues : l'aire et le volume

Une société d'autoroute doit remettre en état la chaussée sur une portion de 22 km de longueur et de 7 m de largeur. On assimile cette portion à un rectangle et, pour cette remise en état, on envisage une couche de 2,5 cm de bitume.

- 1 Pour calculer l'aire de cette portion d'autoroute en m^2 , puis en hm^2 , recopier et compléter :

$$A = 22 \text{ km} \times 7 \text{ m} = \dots \text{ m} \times 7 \text{ m} = \dots \text{ m}^2.$$

$$A = 22 \text{ km} \times 7 \text{ m} = \dots \text{ hm} \times \dots \text{ hm} = \dots \text{ hm}^2.$$

L'aire et le volume sont obtenus en multipliant des longueurs, ce sont des grandeurs produits d'une grandeur usuelle : la longueur.

- 2 Pour calculer le volume de bitume nécessaire en m^3 , recopier et compléter :

$$V = \dots \text{ m}^2 \times 2,5 \text{ cm} = \dots \text{ m}^2 \times \dots \text{ m} = \dots \text{ m}^3.$$

- 3 Un camion-benne de travaux publics peut transporter 35 m^3 de bitume. Combien de chargements de camion faut-il prévoir pour remettre en état la chaussée ?

B L'énergie électrique

Pour calculer l'énergie consommée par un appareil électrique, on multiplie sa puissance électrique, indiquée sur la notice, donnée en Watt (W), par la durée de fonctionnement en heure. L'énergie consommée se mesure donc en Wattheure (Wh).

- 1 Pourquoi dit-on que l'énergie électrique est une grandeur produit ?

- 2 Calculer l'énergie consommée par une alimentation d'ordinateur de 350 W qui fonctionne pendant 5 heures.

- 3 Cet ordinateur fonctionne 320 jours par an à raison de 5 heures par jour. Calculer la consommation annuelle de cet ordinateur.

- 4 Le prix moyen d'un kilowattheure (kWh) est de 0,1074 €. Déterminer la dépense annuelle due à l'énergie consommée par cet ordinateur.

- 5 Une année ordinaire comporte 365 jours. Déterminer la dépense moyenne par jour. Arrondir le résultat au dixième d'euro.

Des grandeurs courantes de la vie quotidienne sont des grandeurs obtenues en composant des grandeurs physiques.

faire cet exo sur cet ordi m'a coûté 9,08€



C Activité d'un transporteur routier

Pour évaluer l'activité d'une entreprise de transport routier, on effectue notamment le produit du nombre de tonnes transportées par le nombre de kilomètres parcourus.

À la fin de l'année, un transporteur relève qu'un de ses camions a effectué 186 voyages avec une moyenne de 675 kilomètres parcourus et de 21 tonnes de charge utile transportée.

- 1 Déterminer, en tonnes-kilomètres, l'activité annuelle de ce camion.

- 2 Le coût de revient du transport est estimé à 0,13 euro par tonne-kilomètre. Calculer le coût de revient annuel de ce camion chez ce transporteur.

Activité 2 La masse volumique, une grandeur quotient

La masse volumique d'un chêne est de 800 kg/m^3 .

- 1 Donner la signification de cette grandeur.
- 2 Une poutre de ce chêne a une masse de 160 kg . Quel est son volume (en m^3) ?
- 3 Cette poutre a la forme d'un parallélépipède rectangle dont une face est un carré de $0,2 \text{ m}$ de côté. Quelle est sa longueur ?
- 4 La masse volumique du sapin est de 450 kg/m^3 . Quelle serait la masse d'une poutre de mêmes dimensions que celle de la question 3 si elle était en sapin ?
- 5 Si ces deux cubes de mêmes dimensions, l'un en chêne, l'autre en sapin, flottaient sur l'eau, lequel sortirait le plus de l'eau ?

Activité 3 Changement d'unité

- 1 L'étoile, autre que le Soleil, la plus proche de la Terre s'appelle Proxima du Centaure et se trouve à $3,99 \times 10^{13} \text{ km}$.
 - a. Sachant que la vitesse de la lumière est d'environ $299\,792 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, quel temps met la lumière émise par cette étoile pour nous parvenir ? Donner le résultat en écriture scientifique avec deux chiffres après la virgule.
 - b. La durée obtenue en secondes est « astronomique ». Convertir cette durée en années (prendre 365 jours pour un an). Arrondir le résultat au dixième.
 - c. En astronomie, on utilise l'année-lumière comme unité de longueur. Elle correspond à la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année. À quelle distance, en années-lumière, se trouve cette étoile ?
- 2 Une tortue en forme peut avancer à la vitesse moyenne de $0,252 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Recopier et compléter la série d'égalités suivantes pour convertir la vitesse de la tortue en mètre par seconde ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) :

$$v = 0,252 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{\text{--- km}}{\text{--- h}} = \frac{\text{--- m}}{\text{--- s}} = \text{--- m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'unité de base d'une grandeur n'est pas nécessairement adaptée à l'objet étudié. On change alors d'unité pour que le résultat soit plus significatif.

Activité 4 Formules et unités

Voici deux expressions connues, mais que l'on confond souvent :

$$2\pi r \text{ et } \pi r^2$$

où r est le rayon d'un cercle ou d'un disque exprimé en m .

- 1 Dans laquelle des deux expressions trouve-t-on le produit de deux longueurs ? Dans quelle unité doit-on l'exprimer ?
- 2 Retrouver l'expression qui correspond à une longueur, celle du cercle, et l'expression qui correspond à une aire, celle d'un disque.

L'unité associée au résultat d'un calcul dépend des unités des grandeurs intervenant dans la formule.

4 Généralités

1 Grandeurs

On peut associer à un objet diverses **grandeurs** ayant pour fonction de le décrire.

Exemples

- En géométrie, si l'on prend pour objet une pyramide, on peut s'intéresser à la **longueur** de ses arêtes, à l'**aire** de ses faces ou à son **volume**.
- En physique, on s'intéresse à la **masse** d'un corps, à l'**intensité** d'un courant électrique ou encore à la **durée** d'un phénomène.

Une même grandeur, par exemple la longueur, peut servir à comparer des objets différents.

Remarque : Le langage courant peut être source d'ambiguïtés. Lorsque l'on dit : « la Terre est environ 80 fois plus grosse que la Lune », de quoi parle-t-on ? Le rayon de la Terre est environ 3,67 fois celui de la Lune : son volume est donc $3,67^3$, soit environ 49 fois celui de la Lune. La masse de la Terre est 81,4 fois celle de la Lune, donc le terme « grosse » signifiait « lourde » et il s'agissait de la grandeur masse.

2 Mesures

- Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une autre grandeur de même nature prise comme référence, appelée **grandeur étalon**. La mesure de cette grandeur étalon est prise pour unité.
- Mesurer, c'est trouver le nombre d'unités contenues dans la grandeur considérée.

Exemple

La mesure de l'aire d'un carré de côté 2 m peut être 4 si l'unité choisie est le mètre carré ou 400 si l'unité est le décimètre carré.

Remarques :

- À chaque grandeur mesurable est associée une grandeur étalon.
- Il existe des grandeurs étalons universelles qui donnent les unités de base du système international (SI). Grâce à ces unités reconnues par la grande majorité des pays, les scientifiques du monde entier peuvent échanger, comparer des résultats.

On définit sept grandeurs de base :

Grandeurs	Longueur	Masse	Temps	Courant électrique	Température	Quantité de matière	Intensité lumineuse
Unité	mètre	kilogramme	seconde	ampère	kelvin	mole	candela
Symbole	m	kg	s	A	K	mol	cd

B Grandeurs composées

Définition

- Une **grandeur composée** est une grandeur résultant du produit ou du quotient de plusieurs grandeurs. On les appelle respectivement grandeur produit ou grandeur quotient.
- L'**unité de mesure de la grandeur composée** est le produit ou le quotient des unités de chaque grandeur.

Exemples

- En géométrie, le volume est une grandeur produit.

Le volume d'un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h est le produit de trois longueurs ou le produit d'une aire et d'une longueur.

$$V = B \times h = \pi r^2 \times h \text{ où } B \text{ est l'aire de la base.}$$

L'unité est le mètre cube (m^3) : $1 m^3 = 1 m \times 1 m \times 1 m = 1 m^2 \times 1 m$.

- En physique, la vitesse moyenne est une grandeur quotient. On la détermine à l'aide de la formule suivante : $v = \frac{d}{t}$. Elle est le quotient de la grandeur *longueur* par la grandeur *durée* et l'unité du SI correspondante est le quotient des unités des deux grandeurs, c'est-à-dire le mètre par seconde (m/s ou $m \cdot s^{-1}$).

- En économie, l'activité d'une compagnie de bus qui a transporté 1 580 voyageurs sur des trajets de longueur moyenne 370 km est donnée en voyageurs- kilomètres.

L'activité de cette compagnie est égale à : $1\,580 \text{ voyageurs} \times 370 \text{ km} = 584\,600 \text{ voyageurs-kilomètres}$.

C Changements d'unités

Les unités de base ne sont pas nécessairement bien adaptées à l'objet étudié : ainsi, plutôt que le *mètre*, on utilise le *kilomètre* pour une distance entre deux villes, ou on utilise l'*année-lumière* en astronomie.

L'heure sexagésimale (heure, minute, seconde) n'est pas utilisable dans les formules ou les opérations mathématiques, il est nécessaire de la convertir en « heure décimale ».

Exemple

Un artisan a travaillé pendant 1 h 45 min au tarif de 38 euros de l'heure TTC (€/h). Pour le calcul du montant de sa facture, on convertit 1 h 45 min en heure décimale, soit 1,75 h, et on effectue : $1,75 \text{ h} \times 38 \text{ €/h} = 66,50 \text{ €}$.

Règle

Un changement des unités des grandeurs de base entraîne un changement de l'unité de la grandeur composée. Pour l'effectuer, on peut avoir recours à un tableau de conversion ou effectuer un calcul sur les grandeurs avec les unités.

Exemple

Une poutre a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions : 2,5 m, 15 cm et 60 mm. On exprime dans la même unité les données pour calculer son volume. Alors :

$$V = 250 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 22\,500 \text{ cm}^3 \text{ ou } V = 2,5 \text{ m} \times 0,15 \text{ m} \times 0,06 \text{ m} = 0,022\,5 \text{ m}^3.$$

Savoir-faire 1 Comprendre une grandeur composée avec ses unités

Énoncé 1 Une bille d'acier de volume $2,4 \text{ cm}^3$ a une masse de $18,84 \text{ g}$.
Déterminer la masse volumique ρ de cet acier en g/cm^3 .

Solution

La formule de la masse volumique est : $\rho = \frac{m}{V}$
où m est la masse et V est le volume.

$$\text{Alors : } \rho = \frac{18,84}{2,4} = 7,85.$$

La masse volumique de l'acier est $7,85 \text{ g/cm}^3$.

Les unités des deux grandeurs de l'énoncé sont celles demandées dans l'unité de la grandeur composée, donc on remplace m et V par leur valeur numérique.

Si l'on ne connaît pas la définition de la masse volumique, d'après le nom « masse volumique » et d'après l'unité g/cm^3 , on comprend qu'il s'agit du quotient de la masse d'un corps par son volume.

Énoncé 2 Parmi les trois formules proposées, quelle est celle qui donne le volume d'un cône de révolution de hauteur h et dont la base a pour rayon r ?

a. $V = \frac{1}{3} \times 2\pi r \times h$ b. $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$ c. $V = \frac{1}{3} \times \pi r \times h$

Solution

Les grandeurs r et h sont des longueurs.

Les formules a. et c. sont fausses car elles correspondent au produit de deux longueurs seulement. Le résultat de chacune de ces deux formules s'exprimera donc en unité de longueur au carré.

En revanche, dans la formule b., on a le produit de trois longueurs : $r^2 \times h = r \times r \times h$, qui correspond au calcul d'un volume.

Une unité de volume est la puissance d'exposant 3 d'une unité de longueur, soit le produit de trois longueurs.

Savoir-faire 2 Changement d'unité d'une grandeur quotient

Énoncé La masse volumique de l'or est $19\,300 \text{ kg/m}^3$.
Exprimer cette masse volumique en g/cm^3 .

Solution

La masse volumique est donnée par la formule : $\rho = \frac{m}{V}$ où m est la masse et V est le volume.

On a : $m = 19\,300 \text{ kg} = 19\,300\,000 \text{ g}$
et $V = 1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$.

$$\text{D'où } \rho = \frac{19\,300\,000}{1\,000\,000} = 19,3.$$

Donc la masse volumique de l'or est $19,3 \text{ g/cm}^3$.

On convertit chacune des unités des données de l'énoncé dans l'unité qui apparaît dans l'unité de la grandeur quotient demandée.

On reprend la formule avec les nouvelles valeurs numériques.

On conclut en mettant l'unité au résultat.

Solution 2

La masse volumique est $\rho = \frac{m}{V}$, où m est la masse et V est le volume.

$$\text{Donc } \rho = \frac{19\,300\text{ kg}}{1\text{ m}^3} = \frac{19\,300\,000\text{ g}}{1\,000\,000\text{ cm}^3} = 19,3\text{ g/cm}^3.$$

Donc la masse volumique de l'or est $19,3\text{ g/cm}^3$.

On utilise la formule avec les grandeurs et leurs unités.

Savoir-faire

3

Changement d'unité d'une grandeur produit

Énoncé À l'aide de la formule $E = P \times t$ où P est la puissance électrique exprimée en watt (W) et t est la durée de fonctionnement exprimée en heure, calculer l'énergie consommée en kilowattheure (kWh) par un gaufrier de puissance 700 W qui fonctionne pendant 12 minutes.

Solution 1

On a : $E = P \times t$, avec $P = 700\text{ W}$ et $t = 12\text{ min}$.

$$\text{Or, } 700\text{ W} = 0,7\text{ kW et } 12\text{ min} = 12 \times \frac{1}{60}\text{ h} = 0,2\text{ h}.$$

$$\text{D'où } E = 0,7 \times 0,2 = 0,14.$$

Donc l'énergie consommée est $0,14\text{ kWh}$.

On convertit chaque unité dans l'unité souhaitée.

On remplace les lettres par leur valeur numérique dans la formule.

On conclut en mettant l'unité au résultat.

Solution 2

On a : $E = P \times t$, où P est la puissance et t est la durée.

$$\text{Donc } E = 700\text{ W} \times 12\text{ min}$$

$$E = 0,7\text{ kW} \times \frac{12}{60}\text{ h}$$

$$E = 0,7 \times \frac{12}{60}\text{ kWh}$$

$$E = 0,14\text{ kWh}.$$

Donc l'énergie consommée est $0,14\text{ kWh}$.

On effectue directement le calcul sur les grandeurs.

Solution 3

On a : $E = P \times t$, avec $P = 700\text{ W}$ et $t = 12\text{ min}$.

$$\text{Donc } E = 700 \times 12 = 8\,400.$$

L'énergie consommée est égale à $8\,400\text{ Wmin}$.

$$\text{On a : } 8\,400\text{ Wmin} = 8\,400\text{ W} \times 1\text{ min}$$

$$= 8,4\text{ kW} \times \frac{1}{60}\text{ h}.$$

$$\text{D'où } 8\,400\text{ Wmin} = 0,14\text{ kWh}.$$

On applique la formule avec les unités données.

On convertit ensuite l'unité de la grandeur composée dans l'unité demandée.

S'entraîner

Changement d'unités

1 Recopier et compléter :

a. $45 \text{ km/h} = \frac{\text{--- km}}{\text{--- h}} = \frac{\text{--- m}}{\text{--- s}} = \text{--- m/s}$

b. $9,8 \text{ m/s} = \frac{\text{--- m}}{\text{--- s}} = \frac{\text{---} \times 3\,600 \text{ m}}{\text{--- s}} = \frac{\text{--- m}}{\text{--- h}}$
 $= \frac{\text{--- km}}{\text{--- h}} = \text{--- km/h}$

2 Recopier et compléter :

a. $72 \text{ km/h} = \text{--- m/s}$ b. $0,15 \text{ m/s} = \text{--- m/min}$
 c. $125 \text{ m/min} = \text{--- km/h}$ d. $1,5 \text{ m/s} = \text{--- km/h}$

3 On rappelle que : $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ L}$.

Recopier et compléter :

a. $2 \text{ L/min} = \frac{\text{--- L}}{\text{--- min}} = \frac{\text{---} \times 60 \text{ L}}{\text{--- min}} = \frac{\text{--- L}}{\text{--- h}} = \text{--- L/h}$

b. $18 \text{ m}^3/\text{h} = \frac{\text{--- m}^3}{\text{--- h}} = \frac{\text{--- L}}{\text{--- s}} = \text{--- L/s}$

4 Recopier et compléter. Utiliser les puissances de 10 si nécessaire.

a. $1,2 \text{ L/s} = \text{--- L/h} = \text{--- m}^3/\text{h}$
 b. $15 \text{ L/min} = \text{--- m}^3/\text{h}$
 c. $150\,000 \text{ m}^3/\text{s} = \text{--- m}^3/\text{h}$
 d. $7,2 \text{ m}^3/\text{h} = \text{--- L/h} = \text{--- L/s}$

5 On rappelle que : $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$.

Recopier et compléter :

a. $9 \text{ Wh} = \text{--- W} \times \text{--- min}$ $\text{--- Wmin} = \text{--- kWmin}$
 b. $72\,000 \text{ Wmin} = \text{--- W} \times \text{--- min} = \text{--- W} \times \text{--- h}$
 $= \text{--- Wh} = \text{--- kWh}$

6 Recopier et compléter :

a. $0,3 \text{ kWh} = \text{--- Wmin}$
 b. $450 \text{ Wj} = \text{--- kWh}$ (où $\text{Wj} = \text{Wattjour}$)
 c. $18\,000 \text{ Wmin} = \text{--- kWh}$
 d. $36 \text{ kW} = \text{--- Wh}$

Pour les exercices **7** et **8**, recopier et compléter. Utiliser les puissances de 10 si nécessaire.

7 a. $3,5 \text{ kg/m}^3 = \frac{\text{--- kg}}{\text{--- m}^3} = \frac{\text{--- g}}{\text{--- cm}^3} = \text{--- g/cm}^3$

b. $125 \text{ g/cm}^3 = \frac{\text{--- g}}{\text{--- cm}^3} = \frac{\text{---} \times 1\,000 \text{ g}}{\text{--- cm}^3}$
 $= \frac{\text{--- g}}{\text{--- cm}^3} = \frac{\text{--- kg}}{\text{--- dm}^3} = \text{--- kg/dm}^3$

8 a. $13\,450 \text{ kg/m}^3 = \text{--- kg/dm}^3$

b. $0,15 \text{ g/cm}^3 = \text{--- kg/m}^3$
 c. $2,435 \text{ kg/dm}^3 = \text{--- hg/cm}^3$
 d. $0,3 \text{ kg/m}^3 = \text{--- g/cm}^3$

9 QCM

Pour chaque question, indiquer la conversion correcte parmi les trois proposées.

1 $320\,000 \text{ m}^2 =$

a. 320 km^2 b. $3,2 \text{ dam}^2$ c. 32 hm^2

2 $400 \text{ kg/m}^3 =$

a. 400 g/cm^3 b. $0,4 \text{ g/cm}^3$ c. 4 kg/dm^3

3 $36\,000 \text{ Wmin} =$

a. 360 kWmin b. $0,6 \text{ Kwh}$ c. 60 Wh

4 $36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} =$

a. $129,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ b. $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ c. $216 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$

5 $0,3 \text{ L/s} =$

a. $3 \text{ m}^3/\text{h}$ b. $18 \text{ dm}^3/\text{h}$ c. $1,08 \text{ m}^3/\text{h}$

10 La Lune parcourt son orbite autour de la Terre en 27,32 jours. Convertir cette durée en jours, heures, minutes et secondes.



11 La vitesse de la lumière dans le vide est d'environ $300\,000 \text{ km/s}$. On sait que la lumière du Soleil met 8 min 20 s pour nous parvenir. Déterminer la distance entre la Terre et le Soleil.

12 Une année-lumière est une unité de distance utilisée en astronomie. Elle correspond à la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année (365,25 jours). Tous les résultats seront donnés en écriture scientifique (avec deux décimales).

a. La vitesse de la lumière dans le vide est de $299\,792\,458 \text{ m/s}$. Convertir une année-lumière en kilomètres.

b. L'étoile la plus proche de la Terre est Proxima du centaure. Elle est située à 4,22 années-lumière. Déterminer cette distance en mètres.

13 En informatique, l'octet (o) est une unité utilisée pour décrire la quantité d'information. Un octet est composé de 8 bits. Les multiples de ces mesures couramment utilisés sont le kilo (K), le mega (M) et le giga (G) tels que : $1 \text{ Ko} = 1\,024 \text{ octets}$, $1 \text{ Mo} = 1\,024 \text{ Ko}$ et $1 \text{ Go} = 1\,024 \text{ Mo}$. On peut transposer ces égalités pour les bits.

Recopier et compléter :

1 a. $128 \text{ octets} = \text{--- bits}$

b. $1,2 \text{ Ko} = \text{--- octets}$

c. $2 \text{ Mo} = \text{--- octets}$

2 a. $2\,048 \text{ bits} = \text{--- octets}$

b. $8 \text{ Mb} = \text{--- bits}$

c. $3\,145\,728 \text{ bits} = \text{--- Kb} = \text{--- Mb}$

3 a. $320 \text{ Go} = \text{--- octets}$

b. $2 \text{ Mb} = \text{--- Kb} = \text{--- Ko}$

- 14** En informatique, les multiples de l'octet sont tels que : 1 Ko = 1 024 octets ; 1 Mo = 1 024 Ko et 1 Go = 1 024 Mo.
- Un disque dur a une capacité de 320 Go. Combien de photos de 4 Mo chacune peut-on stocker sur le disque dur ?
 - On a stocké 266 fichiers audio sur la totalité de l'espace de 1 Go d'une clé USB. Quelle est la taille moyenne en octets d'un fichier audio ?
 - On veut sauvegarder sur un disque dur 116 CD contenant 700 Mo de données chacun. Un disque dur de 80 Go est-il suffisant ?

Problèmes

- 15** À l'aide d'un robinet, 20 secondes sont nécessaires pour remplir un arrosoir de 12 litres.

- Calculer le débit du robinet en L/s puis l'exprimer en m³/h.
- Une piscine hors-sol a la forme d'un cylindre de révolution de 4,60 m de diamètre et de 1,2 m de hauteur.
 - Calculer le volume de la piscine en m³.
 - Déterminer le temps nécessaire pour remplir la piscine avec le robinet précédent. On donnera le résultat en heure décimale arrondi au centième, puis en heure et minute (arrondi à la minute près).

- 16** En juin 2006 a été inauguré en Chine le barrage des Trois Gorges sur le Yangtsé (anciennement le Fleuve bleu) dont le débit est estimé à 30 000 m³/s. Ce barrage a créé une retenue d'eau de 39 milliards de m³ et d'une surface de 1 084 km².

- Quelle est la profondeur moyenne de la retenue d'eau ?
- En supposant que ce réservoir d'eau se soit rempli en une seule fois, quel aurait été le temps de remplissage ? On donnera le résultat (arrondi à l'unité) en secondes, puis en heures et en jours.
- Quel serait le temps de remplissage de cette retenue d'eau si elle était alimentée par un fleuve dont le débit est 400 m³/s ?



- 17** En 2004, un Australien a battu le record de consommation automobile à bord d'une voiture de série en réalisant le tour d'Australie, soit 14 634 km, avec 510 litres de gasoil.

- Quelle a été sa consommation moyenne pour 100 km parcourus (en L/100 km) ? On arrondira le résultat au cL.
- Quelle est la distance moyenne parcourue avec un litre de gasoil (en km/L) ? On arrondira le résultat au cm.

- 18** La masse volumique d'un sable est $\rho = 1\,600 \text{ kg/m}^3$.

- Donner la signification de cette indication.
- On a $\rho = \frac{m}{V}$ avec m la masse en kg, V le volume en m³ et ρ la masse volumique en kg/m³. Exprimer la masse en fonction du volume et de la masse volumique ρ , puis le volume en fonction de la masse volumique ρ et de la masse.
- Pierre doit évacuer un tas de ce sable d'un volume de 0,3 m³. Peut-il le faire en un seul voyage à l'aide d'une remorque dont la charge utile est 500 kg ?
- Quel est le volume occupé par 6 tonnes de sable ? On donnera le résultat en dm³.

Thème de convergence

Électricité, la loi d'Ohm.

La tension U , en volts (V), aux bornes d'un dipôle ohmique comportant une résistance R , en ohms (Ω), traversée par un courant continu d'intensité I , en ampères (A), est donnée par la formule $U = R \cdot I$.

- Quelle est la tension aux bornes d'un fil de cuivre de résistance 0,14 Ω traversé par un courant continu de 5 A ?
- Quelle est l'intensité du courant qui traverse un dipôle « résistance » de 120 Ω soumise à une tension de 9 V ?
- Quelle est la résistance du filament d'une ampoule automobile sur laquelle est indiqué « 12 V – 250 mA » ?

- 20** En 2004, 329 millions de voyageurs ont circulé sur le réseau « grandes lignes et régional hors Île-de-France » en parcourant en moyenne 181,52 km.

En 2005, ce sont 342 millions de voyageurs qui ont parcouru en moyenne 179,56 km.

- Calculer, en voyageurs $\times$ kilomètres, l'activité de la SNCF sur ce réseau en 2004. Arrondir au centième.
- Calculer cette activité en 2005. Arrondir au centième.
- Quelle a été l'augmentation en pourcentage de l'activité entre 2004 et 2005 ?

- 21** Dans les pays anglo-saxons, la consommation d'un véhicule est exprimée en miles par gallon.

On a : 1 mile = 1,609 km et 1 gallon = 4,546 L.

- Convertir 8,5 L en gallons et 100 km en miles. On arrondira les résultats au centième.
- Exprimer une consommation de 8,5 L/100 km en miles/gal. On arrondira le résultat au centième.

- 22** La vitesse dans les pays anglo-saxons est exprimée en miles par heure. Un mile (mille en français) vaut 1,609 km.

- Le compteur d'une voiture américaine roulant en France sur une route nationale (sur laquelle la vitesse est limitée à 90 km/h) indique 60 miles/h. L'automobiliste respecte-t-il la limitation de vitesse ?
- Quelle vitesse maximale en miles/h doit indiquer le compteur de cette voiture sur une portion de route où la vitesse est limitée à 70 km/h ? Arrondir à l'unité.

23 Une compagnie de ferroutage détermine le prix du transport des remorques de camion en fonction du nombre de tonnes et de kilomètres à parcourir.

① Une société veut faire transporter trois remorques de 26 tonnes chacune sur 95 km. Déterminer le nombre de tonnes $\times$ kilomètres à facturer.

② Pour le transport de deux remorques de 30 tonnes chacune, la société a noté 10800 tonnes $\times$ kilomètres. Déterminer la distance parcourue.

③ Le prix du ferroutage est de 0,26 € par tonne $\times$ kilomètre. Calculer le coût de chacun des deux transports.

24 Le diamètre d'une roue de voiture est de 14 pouces. Un pouce mesure 2,54 cm.

① Calculer la circonférence d'une roue. On donnera le résultat en mètre (arrondi au centimètre).

② On suppose que la voiture roule à la vitesse moyenne de 90 km/h.

a. Exprimer cette vitesse en m/min. Arrondir au dixième.

b. Déterminer la vitesse de rotation d'une roue en tour par minute (tr/min). Arrondir au dixième.

25 En avril 2007, un TGV a battu le record du monde de vitesse sur rail avec une vitesse de $574,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Cette rame de TGV s'appelait V150, car les concepteurs espéraient atteindre la vitesse de 150 mètres par seconde.

La vitesse atteinte lors du record a-t-elle été supérieure à celle espérée par les ingénieurs ? Comment cette rame aurait-elle pu être baptisée ?

26 L'énergie consommée par un appareil électrique de puissance P , en watt (W), fonctionnant pendant une durée t , en heure (h), est donnée par la formule $E = P \times t$ et s'exprime en wattheure (Wh).

① Calculer l'énergie consommée par un lave-linge dont la puissance moyenne est 440 W durant un cycle court à 40 °C de 54 minutes.

② Ce même lave-linge a consommé 1,03 kWh pendant un cycle long à 90 °C de 1 h 48 min. Quelle est la puissance moyenne durant ce cycle ? Arrondir le résultat au W.

③ Le kWh est vendu 0,1085 € (TTC). Calculer le coût de chaque cycle.

Thème de convergence

Économie d'énergie

Un téléviseur allumé a une puissance de 110 W alors qu'en veille, elle est de 18 W.

a. Calculer l'énergie (en Wh) consommée par un téléviseur pendant 3 h 30 de fonctionnement.

b. Un téléviseur fonctionne en moyenne 3 h 30 par jour. Calculer l'énergie consommée par un téléviseur en veille pendant le reste du temps.

c. Comparer les deux résultats.

28 Thème de convergence

Santé

① On dissout un morceau de sucre dont la masse est de 6 grammes dans un verre contenant 15 cL d'eau. Quelle est la concentration en sucre (en g/L) de la solution obtenue ?

② On veut préparer 1,5 L de solution dont la concentration en sucre est de 36 g/L. Combien de morceaux de sucre doit-on dissoudre dans 1,5 L d'eau ?

③ Sur une bouteille de soda, on peut lire dans sa composition : « pour 100 mL : 9,6 g de sucre ». Combien de morceaux de sucre consomme-t-on en buvant une canette de 25 cL de ce soda ?

29 Thème de convergence

Géographie

① En 2005, l'Île-de-France avait une population de 11 399 milliers d'habitants pour une superficie de 12 012 km². Déterminer la densité de population en Île-de-France.

② La Bourgogne, d'une superficie de 31 582 km², avait une densité de population de 51,4 hab/km² en 2005. Quelle était sa population ?

③ La région PACA avait 4 780,9 milliers d'habitants en 2006 et une densité de population de 151,3 hab/km². Calculer sa superficie.

30 Le laiton est un alliage de zinc et de cuivre dans des proportions variables. Une poignée en laiton composé de 30 % de zinc a un volume de 8 cm³.

① Déterminer les volumes de zinc et de cuivre rentrant dans la composition de cette poignée.

② Les masses volumiques du zinc et du cuivre sont respectivement 7 150 g/dm³ et 8 920 g/dm³. Déterminer la masse de cette poignée.

③ Quelle est la masse volumique en g/cm³ de ce laiton ?

31 Vu au brevet

Une cloche dont le volume est 0,1 m³ est faite en bronze. Le bronze est un alliage de cuivre et d'étain. Pour qu'une cloche tinte, il faut qu'il y ait 24 % d'étain. La masse volumique de l'étain est de 7,29 kg/dm³ et celle du cuivre est de 8,9 kg/dm³.

① Calculer le volume d'étain et le volume de cuivre contenus dans la cloche.

② Quelle est la masse de la cloche ?

32 Vu au brevet

Le granite est une roche cristalline formée d'un mélange hétérogène de quatre éléments : quartz, feldspath, biotite et minéraux secondaires.

① Un bloc de granite est composé de 28 % de quartz, 53 % de feldspath, 11 % de biotite et 19,2 dm³ de minéraux secondaires. Calculer le volume de ce bloc.

② Un mètre cube de ce granite a une masse de 2,6 tonnes. Calculer la masse du bloc de granite considéré à la question ①.

Faire le point

33 QCM Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois réponses proposées.

		A	B	C
1	Un athlète a parcouru 3 000 mètres en 8 minutes. Sa vitesse moyenne est :	37,5 m/min	22,5 km/h	3,75 km/h
2	L'énergie consommée par 3 ampoules de 75 W pendant 12 heures est :	18,75 Wh	2 700 kWh	2,7 kWh
3	Sur une ligne de bus, on effectue 9 trajets avec en moyenne 48 passagers sur une distance de 36 km. L'activité de cette ligne en voyageurs-kilomètres est :	15 552 voyageurs-kilomètres	1 728 voyageurs-kilomètres	12 voyageurs-kilomètres
4	Une barre en fer de volume 800 cm^3 a une masse de 6 288 g. La masse volumique du fer est :	7,86 kg/m ³	7 860 kg/m ³	78,6 kg/m ³
5	Un réservoir de 15 m^3 est rempli par un robinet en 2 h 05 min. Le débit du robinet est de :	6 m ³ /h	12 L/min	2 L/s

Je rédige Pour les exercices suivants, on demande une solution rédigée.

• Changer d'unité avec une grandeur quotient

34 Le mile est une unité de longueur encore en usage dans les pays anglo-saxons. Un mile correspond à 1 609 mètres. On arrondira les résultats à l'unité.

- 1 Convertir une vitesse de $60 \text{ miles} \cdot \text{h}^{-1}$ en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- 2 Convertir une vitesse de $45 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en $\text{miles} \cdot \text{h}^{-1}$.
- 3 En tennis, une balle de service peut atteindre la vitesse de $2 \text{ miles} \cdot \text{min}^{-1}$. Quelle est cette vitesse en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?
- 4 Convertir la vitesse de la lumière, environ $300\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, en $\text{miles} \cdot \text{h}^{-1}$.

• Changer d'unité avec une grandeur produit

35 L'activité d'une société de transport peut s'exprimer en tonnes $\times$ kilomètres.

- 1 En une journée, une société a transporté 78 tonnes sur 182 kilomètres.
 - a. Quelle a été son activité en tonnes $\times$ kilomètres pour cette journée ?
 - b. Convertir le résultat du a. en kilogrammes $\times$ kilomètres, puis en kilogrammes $\times$ mètres. Donner les écritures scientifiques des résultats.
- 2 Une autre journée, son activité a été de $2,109 \times 10^6$ tonnes $\times$ mètres. Exprimer cette donnée en tonnes $\times$ kilomètres.

• Utiliser une grandeur produit

36 L'activité d'une ligne de tramway est déterminée en voyageurs $\times$ kilomètres.

- 1 Pour une année, l'activité d'une ligne « A » est de 153 millions de voyageurs $\times$ kilomètres. Sachant que 43,7 millions de tickets ont été compostés sur cette ligne, calculer la distance moyenne parcourue par les usagers de cette ligne « A ». On arrondira le résultat au dixième.
- 2 La même année, 35,2 millions de voyageurs ont emprunté une ligne « B » sur une distance moyenne de 4,2 km. Quelle est la ligne de tramway qui a eu la plus grande activité ?

• Utiliser une grandeur quotient

- 37** 1 Un dé à jouer en aluminium de 1 cm de côté a une masse de 2,7 g. Quelle est la masse volumique de l'aluminium, exprimée en g/cm^3 , puis en kg/m^3 .
- 2 Le plateau d'une table rectangulaire en sapin a pour dimensions 1,8 m, 85 cm et 4 cm d'épaisseur. Sachant que la masse volumique du sapin est de 450 kg/m^3 , calculer la masse de ce plateau de table.

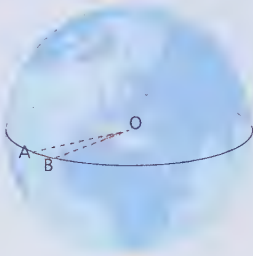
Approfondir

38 Électricité

La puissance P d'un dipôle, en watts (W), est donnée par la formule $P = U \cdot I$ où U est la tension aux bornes du dipôle, en volts (V), et I est l'intensité qui le traverse, en ampères (A).

- 1 Quelle est la puissance d'une ampoule de voiture alimentée par une tension de 12 V et une intensité de 250 mA ?
- 2 Quelle est l'intensité du courant qui alimente une ampoule de 21 W sous une tension de 12 V ?

- 39 La vitesse des bateaux est fréquemment exprimée en nœuds. Un nœud correspond à un mille marin par heure et un mille marin est la longueur de l'arc terrestre dont l'angle au centre de la Terre mesure $1/60^\circ$ de degré.



- 1 Sachant que la circonférence de la Terre mesure environ 40 000 km, déterminer la longueur d'un mille marin (au mètre près) et la correspondance d'un nœud en km/h.
- 2 Certains navires à grande vitesse (NGV) assurent la liaison Nice-Ajaccio, soit une traversée de 247 km. Leur vitesse de croisière est 37 nœuds. Quelle est la durée, en heures et minutes, de la traversée Nice-Ajaccio en NGV ?

40 Connexion Internet

En informatique, la taille d'un fichier ou la capacité d'une unité de stockage est exprimée en octets et le débit d'une connexion est exprimé en bits par seconde.

On a : 1 octet = 8 bits.

- 1 Un fournisseur d'accès à Internet (FAI) propose une connexion ADSL à 5 Méga, c'est-à-dire un débit maximal de 5 mégabits par seconde (5 Mb/s).

a. Sachant que 1 Mb = 1 024 Kb (kilobits), convertir ce débit en kilobits par seconde (Kb/s).

b. Sachant que 1 Ko = 1 024 octets et que 1 Mo = 1 024 Ko, convertir ce débit en mégaoctets par seconde (Mo/s).

c. Quel temps faut-il pour télécharger un fichier de 3,1 Mo avec le débit maximal ?

- 2 En réalité, le temps de téléchargement de ce fichier a été de 9 secondes. Déterminer le débit effectif de téléchargement en Ko/s, en Kb/s, puis en Mb/s.

- 3 La vitesse de transfert ou le débit sur un réseau local (Ethernet) est de 10 Mb/s. Quel temps faut-il pour transférer un dossier de 2,6 Go entre deux PC ?

41 Thème de convergence

Ressources naturelles : consommation de kérosène

L'avion Airbus A340-600 consomme 1 800 L de kérosène pour 7 minutes de vol et sa vitesse de croisière se détermine à partir du nombre de Mach.

Ce nombre exprime le rapport entre la vitesse d'un avion par rapport au sol (vitesse de croisière) et celle du son (qui dépend de la température et donc de l'altitude). On estime la vitesse du son à $1\,055 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ à environ 10 000 mètres d'altitude et -50°C .

- 1 a. Sachant que le nombre de Mach est 0,86, déterminer la vitesse de croisière de cet Airbus en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.
b. En déduire la distance parcourue en 7 minutes. Arrondir au centième.
- 2 Déterminer la consommation moyenne de cet avion aux 100 km (résultat arrondi à l'unité près).
- 3 La capacité maximale de cet avion, en configuration « 3 classes », est de 380 passagers. Donner la consommation de kérosène par passager aux 100 km (à 0,01 près).

42 Thème de convergence

Effet de serre : émission de CO_2

Un gros avion commercial a une consommation de 3,95 L/100 km par passager.

- 1 La distance Paris-New York en avion est de 5 850 km. En supposant l'avion plein, calculer le volume de kérosène brûlé par chaque passager sur un vol aller-retour Paris-New York.

- 2 La masse volumique du kérosène est d'environ 800 kg/m^3 . Déterminer la masse de kérosène brûlé par un passager sur ce voyage. On arrondira le résultat au centième.

- 3 On estime que 1 kg de kérosène brûlé équivaut à une émission de 3,1 kg de CO_2 (dioxyde de carbone). Déterminer la masse équivalente de CO_2 émise par l'avion pour chaque passager.

43 Vélo

Le col de l'Iseran en Savoie, à 2 770 m d'altitude, est le plus haut col routier de France. La montée à partir du village de Bonneval-sur-Arc est longue de 13,5 km.

- 1 Un cycliste entraîné effectue cette montée en 55 min 51 s. Calculer sa vitesse moyenne en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, puis en $\text{m} \cdot \text{min}^{-1}$.

- 2 On appelle développement la distance parcourue sur la route à chaque tour de pédale.

En montagne, ce cyclosporitif a un développement de 3,35 m. Quelle est sa fréquence de pédalage en tours de pédale par minute (tr/min) ?

Exercices

44 Thème de convergence

Santé-Diététique

La valeur énergétique des aliments est donnée en calories (cal) ou en joules (J) ($1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$). Une alimentation équilibrée couvre les besoins énergétiques dus au métabolisme de base, à une activité physique normale et à l'activité cérébrale.

1 Chaque jour, en dehors des repas, Coralie boit une canette de soda de 33 cL dont la valeur énergétique s'élève à 44 kcal pour 100 mL et mange un paquet de biscuits au chocolat de 150 g qui présente 560 kcal pour 100 g. Calculer l'apport énergétique supplémentaire quotidien, puis hebdomadaire apporté par ces deux consommations.

2 Le tableau ci-contre donne les dépenses énergétiques liées à certaines activités sportives

Activité	Marche	Course	Tennis
Dépense énergétique	180 kcal/h	670 kcal/km	450 kcal/h

Proposer quelques activités à faire à Coralie (par jour ou par semaine), afin d'éliminer ce surplus d'alimentation et éviter une augmentation de poids.

45 Une boule de pétanque en acier a une masse de 720 g. La masse volumique de l'acier est $7\,850 \text{ kg/m}^3$.

1 Calculer le volume d'acier qui compose la boule de pétanque. On arrondira le résultat au dixième.

2 Le diamètre d'une boule de pétanque est 75 mm. Calculer le volume d'une boule de pétanque.

3 Une boule de pétanque est-elle pleine ? Justifier.

POUR LES CURIEUX

L'échelle de Beaufort

Les marins devaient autrefois estimer la vitesse du vent d'après les effets sur l'environnement (avant l'utilisation de l'anémomètre, instrument qui mesure la vitesse du vent). C'est l'amiral britannique Francis Beaufort (1774-1857) qui a imaginé une échelle comportant des critères pour quantifier le vent en mer.

On trouve une formule mettant en relation la vitesse du vent en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et l'échelle Beaufort. Le degré Beaufort étant l'arrondi à l'unité du résultat donné par la formule suivante :

$$\text{Beaufort} \approx 3 \sqrt[3]{\frac{v^2}{9}} \text{ où } v \text{ est la vitesse du vent exprimée en } \text{km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Le symbole « $\sqrt[3]{a}$ » se lit « racine cubique de a », soit le nombre qui, élevé au cube, est égal à a . À la calculatrice, on effectue la séquence : $3 \sqrt[3]{a}$ ou $3 \sqrt[3]{a}$.

46 Neige de culture

Dans les stations de ski, on a de plus en plus recourt aux canons à neige pour pallier le manque de neige. On estime que 1 m^3 d'eau produit 2 m^3 de neige.

1 En hiver 2006/2007, ce sont environ 4 845 hectares qui ont été aspergés de 15 millions de m^3 d'eau en France.

a. Quelle a été la quantité d'eau utilisée pour enneiger artificiellement un hectare ? On arrondira au m^3 .

b. Déterminer le volume de neige produite pour un hectare de piste et en déduire l'épaisseur moyenne de cette couche de neige.

2 a. Quelle est la quantité d'eau nécessaire pour recouvrir de 10 cm de neige un tronçon de piste de 15 m de large sur une longueur de 40 m ?

b. Si le débit moyen en eau du canon à neige est de $38 \text{ m}^3/\text{h}$, pendant combien de temps doit-il fonctionner ?

47 Thème de convergence

Énergie renouvelable

Une lampe de jardin solaire se recharge pendant la journée à l'aide d'un petit panneau solaire qui convertit l'énergie solaire en électricité, emmagasinée dans des accumulateurs.

Sur une fiche technique d'une telle lampe, on donne la puissance du panneau : $0,45 \text{ W}$ en plein Soleil.

a. La moyenne d'ensoleillement est de 11,6 h par jour à Toulon et de 6,9 h à Lille en juillet. En supposant que ces heures soient de « plein Soleil », quelle est l'énergie électrique emmagasinée en un jour à Toulon et à Lille par une de ces lampes (en Wh) ?

b. À la tombée de la nuit, la lampe s'allume. Pendant combien de temps une lampe d'une puissance de $0,7 \text{ W}$ va-t-elle fonctionner à Toulon et à Lille ?



• On parle de tempêtes tropicales sur l'Atlantique quand la vitesse du vent est comprise entre 63 et $117 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Donner l'encadrement de la vitesse du vent en Beaufort.

• Lorsque l'on entend à la radio « un vent de 4 Beaufort avec des rafales à 6 sur les côtes bretonnes », quelles sont les vitesses du vent mesurées ?

7

Notion de fonction



Agent des services secrets américains expliquant à une nouvelle recrue le fonctionnement d'une machine de codage (1930)

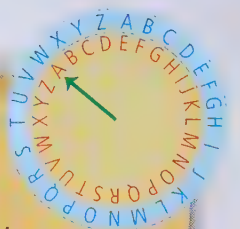
Certaines **machines de codage** utilisent des fonctions pour coder des messages : à chaque lettre du message d'origine est **associée** une nouvelle lettre **selon une logique définie**. Le message ainsi obtenu n'est pas compréhensible par une personne **ne connaissant pas la fonction appliquée** !



Un rêve ! Dès 1772, Euler a remarqué que la fonction $f : x \rightarrow x^2 + x + 41$ donnait **un nombre premier** lorsque $x = 0 ; 1 ; \dots 39$. Chercher une fonction générant tous les nombres premiers est **un vieux rêve de mathématicien** !

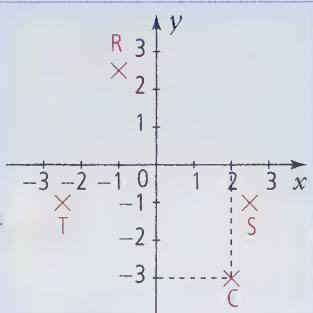
La machine de codage Kryha a été utilisée entre 1920 et 1950. Cette machine comprenait **deux disques concentriques** portant chacun l'alphabet sur le pourtour. La **fonction de codage** est une rotation de la roue interne qui décale les lettres par rapport à leur position de base : par exemple, si le A était transformé en W, le B en X, etc., le mot **BONJOUR** serait codé en **XKJFKQN**.

Pour éviter que les messages codés ne soient trop faciles à déchiffrer, un dispositif permettant d'obtenir une **rotation irrégulière** des disques a été intégré à cette machine...



QCM

Pour chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	L'aire $\mathcal{A}$ d'un carré s'exprime, en fonction de la longueur x de son côté, par la formule :	$\mathcal{A} = 4x$	$\mathcal{A} = x^2$	$\mathcal{A} = 4x^2$
2	Soit l'expression $E = -5x^2 + 2x$. Si $x = -3$, alors $E =$	-51	3	39
3	La solution de l'équation $2(x - 5) = 8$ est le nombre :	-1	4	9
4	Soit l'expression $F = -7x + 3$. Si $F = 17$, alors $x =$	2	-2	21
5	Le nombre 16 :	est le carré de deux nombres distincts	n'est le carré d'aucun nombre	est le carré d'un seul nombre
6	L'équation $4x^2 = 25$:	n'admet pas de solution	admet une seule solution	admet deux solutions exactement
7		Dans le repère ci-contre, le point C :	a pour abscisse -3	a pour ordonnée 2
8		Dans le repère ci-contre, le couple de coordonnées associé au point C est :	$(-3 ; 2)$	$(2 ; -3)$
9		Dans le repère ci-contre, le couple de coordonnées $(-1 ; 2,5)$ correspond au point :	R	S

Exercice 1

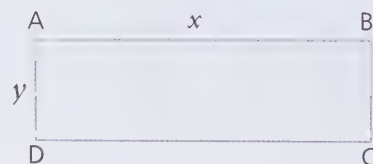
Toutes les longueurs sont exprimées en cm.

- Exprimer, en fonction de sa longueur L , l'aire d'un rectangle de largeur 5.
- Exprimer, en fonction de sa hauteur h , le volume d'un prisme droit dont l'aire de la base est égale à 18 cm^2 .
- Exprimer, en fonction du rayon r de son disque de base et du nombre π , le volume d'un cône de révolution de hauteur 9.

Exercice 2

x et y désignent les dimensions non nulles, exprimées en cm, du rectangle ABCD.

On souhaite que l'aire du rectangle ABCD soit égale à 6 cm^2 .



- Recopier et compléter le tableau ci-dessous par les valeurs qui conviennent.

x	3	4	5	6	8
y					

- L'égalité $xy = 6$ permet de traduire que l'aire du rectangle ABCD est égale à 6 cm^2 . En déduire l'expression de y en fonction de x .
- En utilisant l'expression de y en fonction de x , calculer y lorsque x prend les valeurs suivantes : 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 18 et 20. On arrondira les résultats au dixième si nécessaire. Quelle conjecture peut-on faire sur les valeurs de y lorsque les valeurs de x augmentent ?

Activité 1

Fonction et représentation graphique

Un opérateur de téléphonie propose le tarif suivant pour les communications vers des téléphones fixes : 0,01 euro par minute, après une charge de mise en relation facturée 0,12 euros.

- Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Il donne les valeurs du coût C de communication pour une durée d'appel t donnée.

Durée t de l'appel (en min)	2	4	7	10	12	13	15
Coût C de l'appel (en euros)	0,14						

- Exprimer C en fonction de t .

La formule obtenue permet d'associer à toute valeur de t une unique valeur de C , qui dépend de t . On la note $C(t)$.

Le « procédé » qui, à une valeur quelconque de la variable t , fait correspondre un unique nombre $C(t)$ s'appelle une **fonction**.

On dit que la **fonction C** fait correspondre au nombre t le nombre $C(t)$, et on note :

$$C : t \mapsto C(t).$$

$C(t)$ se lit : « C de t ».

- La notation $C(t)$ signifie que C est fonction de t . La lettre C désigne une fonction et non un nombre. Dans l'expression $C(t)$, les parenthèses jouent-elles le même rôle que dans l'expression $2(t+1)$? Justifier.

- Dans la formule obtenue à la question 2, la variable t peut, *a priori*, prendre n'importe quelle valeur ; calculer $C(-3)$.
- Dans la réalité, la variable t peut-elle prendre n'importe quelle valeur ? Justifier.

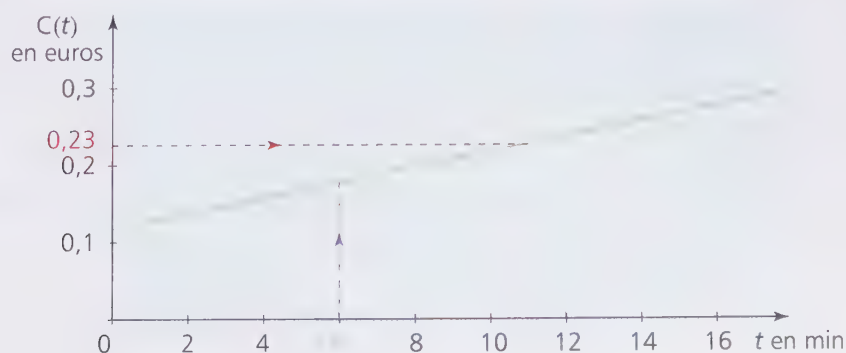
- Sur le graphique ci-dessous, on a représenté en vert les valeurs $C(t)$ du coût d'un appel, en euros, en fonction de la durée t de communication, en minutes.

On a ainsi obtenu la **représentation graphique de la fonction C** , ou courbe représentative de C , pour t positif.

Les valeurs de t figurent sur l'axe des abscisses et celles de $C(t)$ sur l'axe des ordonnées.

- Retrouver graphiquement les résultats obtenus à la question 1.
- Déterminer graphiquement le coût d'une communication de 6 min.
- Déterminer graphiquement la durée d'un appel ayant coûté 0,23 euros.

Je t'appelle pendant 6 minutes. Dès que je reçois la facture, le mois prochain, j'aurai la solution de l'exercice.



Activité 2 Lecture graphique et formule

La distance de freinage d'un véhicule est la distance parcourue par le véhicule entre l'instant où le frein est actionné et celui où le véhicule est arrêté.

1

Le graphique ci-contre représente la distance de freinage (en mètres) d'un véhicule en fonction de sa vitesse avant le freinage (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$).

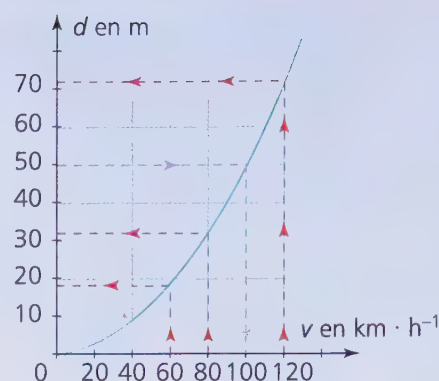
En utilisant ce graphique :

a. Déterminer la distance de freinage sur route sèche d'un véhicule qui se déplace :

- à $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
- à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
- à $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

b. Indiquer à quelle vitesse correspond une distance de freinage égale à 50 m.

c. Peut-on être sûr de la précision des valeurs obtenues aux questions précédentes ?



2

Sur route sèche, la distance de freinage d'un véhicule est proportionnelle au carré de sa vitesse.

La relation entre la distance d de freinage et la vitesse v du véhicule est donnée par la formule $d = 0,005v^2$, dans laquelle d est exprimée en m et v en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

La **fonction** d ainsi définie fait correspondre à toute valeur de la variable v une unique valeur $d(v)$.

a. La variable v peut-elle prendre n'importe quelle valeur ? Justifier.

b. Calculer $d(60)$, $d(80)$, puis $d(120)$.

c. En déduire la distance de freinage sur route sèche d'un véhicule qui, avant de freiner, roulait à :

- $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
- $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
- $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

3

a. Vérifier que les résultats obtenus par le calcul dans la question 2 c. concordent avec ceux obtenus par les lectures graphiques de la question 1 a.

b. Pour une valeur donnée de v , la valeur exacte de $d(v)$ est-elle donnée par une lecture graphique ou par un calcul ?

Le quotient $\frac{d}{v^2}$ est constant.

Activité 3 Image et antécédent

1

Recopier et compléter le tableau ci-contre, dans lequel x désigne un nombre non nul. Écrire les nombres sous forme fractionnaire.

x	-4	-3	2	5	8	10
$\frac{1}{x}$						

2

À tout nombre x non nul, on a associé un nombre unique : son inverse $\frac{1}{x}$. On a ainsi défini la **fonction** f qui, à tout nombre x non nul, associe le nombre $f(x)$ tel que : $f(x) = \frac{1}{x}$.

a. On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f . Quelles sont les images par la fonction f des nombres -4 ; 2 et 5 ?

b. On a : $f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$. Le nombre $-\frac{1}{2}$ est donc l'image de -2 par la fonction f ; on dit aussi que -2 est un **antécédent** par la fonction f de $-\frac{1}{2}$. Utiliser le tableau de la question 1 pour déterminer un antécédent du nombre $-\frac{1}{3}$, puis du nombre $\frac{1}{5}$.

c. Résoudre l'équation $\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$, et en déduire que le nombre $\frac{1}{5}$ admet un seul antécédent.

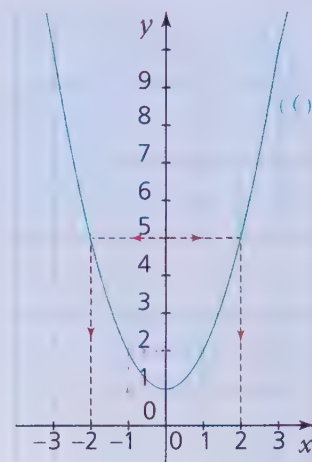
$f(x)$ se lit « f de x ». Cette fonction s'écrit aussi $f: x \mapsto \frac{1}{x}$.

Activité 4

Utilisations de la courbe représentative d'une fonction

La courbe (C) tracée dans le repère ci-contre représente la fonction $h : x \mapsto x^2 + 1$.

Elle est constituée de tous les points de coordonnées x et y tels que $y = h(x)$.



A Image d'un nombre par une fonction

1 Les flèches en violet indiquent comment lire, sur la courbe (C), l'image du nombre -1 par la fonction h .

a. Quelle est l'image du nombre -1 par la fonction h ? Recopier et compléter : $h(-1) = \dots$

b. Procéder de la même façon pour déterminer graphiquement l'image du nombre -3 , puis celle du nombre 3 . Que remarque-t-on ?

2 Reproduire le graphique ci-dessus, puis tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $(1,5 ; 0)$. En combien de points cette droite coupe-t-elle la courbe (C) ? Le nombre $1,5$ a-t-il plusieurs images par la fonction h ?

B Antécédents d'un nombre par une fonction

1 Les flèches rouges montrent comment lire, sur la courbe (C), les antécédents par la fonction h du nombre 5 .

a. Quels semblent être les antécédents du nombre 5 ? Vérifier en résolvant l'équation $h(x) = 5$.

b. Déterminer graphiquement les antécédents du nombre 2 , puis résoudre l'équation correspondante pour vérifier la réponse.

c. Déterminer approximativement, par lecture graphique, les antécédents du nombre 4 . Quelles sont les valeurs exactes de ces antécédents ?

2 Tracer sur votre graphique la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $(0 ; 6)$. Combien d'antécédents le nombre 6 admet-il ?

C Coordonnées de points

1 Placer le point $A(0 ; 1)$; ce point semble-t-il appartenir à la courbe (C) ? Vérifier la réponse par un calcul.

2 Placer le point B de la courbe (C) dont l'abscisse est égale à 3 . Vérifier par un calcul que son ordonnée est égale à 10 .

3 Placer le point $C(-1,5 ; 3)$. Ce point semble-t-il appartenir à la courbe (C) ? Vérifier la réponse par un calcul.

A Généralités

1 Notations et vocabulaire

$f(x)$ se lit « f de x ».

Une **fonction** f permet d'associer à un nombre x un nombre **unique** noté $f(x)$.
 x est appelé la **variable** et $f(x)$ est la valeur prise par la fonction f pour la valeur x .
 On note $f: x \mapsto f(x)$ et on lit : « fonction f qui à x associe $f(x)$ ».

Exemples

- Soit f la fonction qui à x associe le nombre $3x + 4$.
 On note $f: x \mapsto 3x + 4$. La fonction f est définie par : $f(x) = 3x + 4$.
- Soit h la fonction qui à x associe le nombre $x^2 + 1$.
 On note $h: x \mapsto x^2 + 1$. La fonction h est définie par $h(x) = x^2 + 1$.

Dans la notation $f(x)$,
 f ne désigne pas
 un nombre.

2 Image et antécédent

Définitions

Soit une fonction $f: x \mapsto f(x)$. En posant $f(x) = y$, on dit que :

- le nombre $f(x)$, ou y , est **l'image** de x par la fonction f ;
- x est un **antécédent** de y .

➔ Savoir-faire 1 et 2,
 page 122

Exemple

Le tableau de valeurs ci-contre donne les images de quelques nombres par la fonction f définie par $f: x \mapsto x^2$.

x	-3	-2	-0,5	1	1,5	3
$y = f(x)$	9	4	0,25	1	2,25	9

L'égalité $f(-2) = 4$ signifie que :

4 est l'image de -2 par la fonction f et -2 est un antécédent de 4.

3 Courbe représentative d'une fonction dans un repère

Définition

Dans un repère, la **courbe représentative**, ou **représentation graphique**, d'une fonction f est formée de tous les points M de coordonnées $(x; y)$ avec $y = f(x)$, pour toutes les valeurs de x telles que $f(x)$ existe.

➔ Savoir-faire 3,
 page 123

Par une fonction, un nombre admet une image unique mais un nombre donné peut admettre plusieurs antécédents.
 Dans cet exemple, 8 admet deux antécédents : 3 et -3.

Exemple

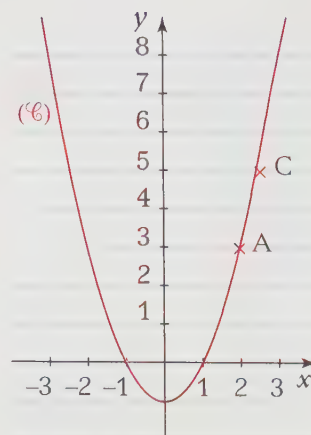
Soit la fonction $f: x \mapsto x^2 - 1$.

Dans un repère, la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f est constituée de tous les points M de coordonnées $(x; y)$ tels que : $y = x^2 - 1$.

• Le point $A(2; 3)$ appartient à la courbe $(\mathcal{C})$; en effet, $f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ (on obtient l'ordonnée du point A).

• Soit un point B d'abscisse -3 appartenant à la courbe $(\mathcal{C})$.
 Son ordonnée est : $f(-3) = (-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$.

• Le point $C(2,5; 5)$ n'appartient pas à la courbe $(\mathcal{C})$. En effet, $f(2,5) = (2,5)^2 - 1 = 6,25 - 1 = 5,25$:
 on n'obtient pas l'ordonnée du point C.



B Détermination d'une fonction

1 Une fonction peut être déterminée par une formule littérale

Lorsqu'une fonction f est définie par une formule, on peut calculer **précisément** les valeurs de $f(x)$ pour les valeurs envisagées du nombre x .

Exemple

On peut calculer l'image de -5 par la fonction $f: x \mapsto x(x-1)$.
 $f(-5) = -5(-5-1)$ donc $f(-5) = 30$.

Remarque : À partir de la formule donnée pour une fonction, on peut aussi calculer les images de plusieurs nombres en utilisant un algorithme sur une calculatrice scientifique, ou une formule dans un tableur.

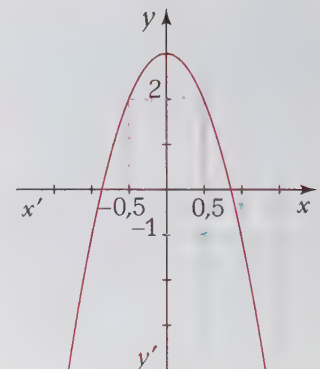
2 Une fonction peut être déterminée par sa courbe représentative

La courbe représentative d'une fonction f permet de déterminer des **valeurs approchées** de l'image d'un nombre donné ou des antécédents d'un nombre par cette fonction.

Exemple

La courbe tracée dans le repère ci-contre représente une fonction f . À chaque valeur de x sur l'axe des abscisses correspond un seul nombre y sur l'axe des ordonnées tel que $y = f(x)$.
 Par lecture graphique, on peut déterminer approximativement l'image d'un nombre donné, ou les antécédents d'un nombre.
 Par exemple, d'après le graphique :

- l'image de 0 est 3 et l'image de 1 est -1 ;
- les nombres $-0,5$ et $0,5$ sont les deux antécédents du nombre 2 .



3 Tableau de valeurs d'une fonction

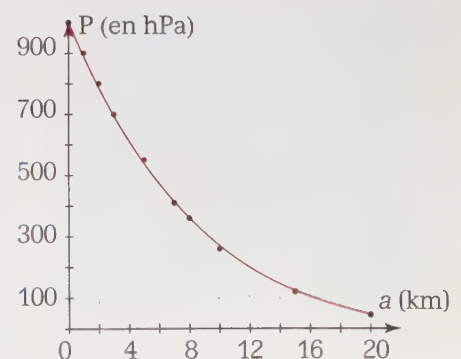
Un tableau de valeurs permet de connaître les valeurs prises par une fonction f pour certaines valeurs de la variable. On peut alors placer les points correspondants dans un repère. Si l'on connaît suffisamment de valeurs, on peut les relier pour tracer, de façon approchée, la représentation graphique de cette fonction.

Exemple

Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de la pression atmosphérique P , en hectopascal (hPa), en fonction de l'altitude a (en km).

Altitude a (en km)	0	1	2	3	5	7	8	10	15	20
Pression P (en hPa)	1 000	900	800	700	550	410	360	260	130	55

On peut représenter graphiquement la fonction $P: a \mapsto P(a)$ dans un repère.



➔ Voir page TICE,
page 132

➔ Savoir-faire 4,
page 124

Savoir-faire 1 Calculer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une formule

Énoncé Calculer l'image des nombres $-\frac{3}{4}$ et $\sqrt{3}$ par la fonction $f: x \mapsto 4x^2 + 1$.

Résolution

La fonction f est définie par $f(x) = 4x^2 + 1$.

- L'image du nombre $-\frac{3}{4}$ est $f\left(-\frac{3}{4}\right)$.

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \times \frac{9}{16} + 1$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} + 1$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{13}{4}$$

L'image de $-\frac{3}{4}$ par la fonction f est donc $\frac{13}{4}$.

- L'image du nombre $\sqrt{3}$ est $f(\sqrt{3})$.

$$f(\sqrt{3}) = 4 \times (\sqrt{3})^2 + 1$$

$$f(\sqrt{3}) = 4 \times 3 + 1$$

$$f(\sqrt{3}) = 13$$

L'image de $\sqrt{3}$ par la fonction f est donc 13.

a étant un nombre, l'image de a par la fonction f est le nombre $f(a)$.

On calcule $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ en remplaçant x par $-\frac{3}{4}$ dans l'expression de $f(x)$.

On conclut.

On remplace x par $\sqrt{3}$ dans l'expression de $f(x)$.

On conclut.

Savoir-faire 2 Calculer un antécédent d'un nombre par une fonction déterminée par une formule

Énoncé Calculer l'antécédent du nombre 7 par la fonction $f: x \mapsto -2x + 3$.

Résolution

La fonction f est définie par $f(x) = -2x + 3$.

On résout l'équation $f(x) = 7$,

soit $-2x + 3 = 7$:

$$-2x + 3 = 7$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

L'antécédent du nombre 7 par la fonction f est le nombre -2 .

Chercher l'antécédent de 7 par la fonction f revient à chercher x tel que $f(x) = 7$. On doit donc résoudre l'équation $f(x) = 7$.

On conclut.

Énoncé 2 Calculer les antécédents du nombre 14 par la fonction $g : x \mapsto x^2 + 5$.

Solution

La fonction g est définie par $g(x) = x^2 + 5$.

On résout l'équation $x^2 + 5 = 14$:

$$x^2 + 5 = 14$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0$$

Dire qu'un produit de deux facteurs est nul revient à dire que l'un au moins des facteurs est nul.

Donc on a : $x+3 = 0$ ou $x-3 = 0$ et par conséquent $x = -3$ ou $x = 3$.

Les solutions de l'équation $(x+3)(x-3) = 0$ sont les nombres -3 et 3 .

Le nombre 14 a donc 2 antécédents par la fonction g : les nombres 3 et -3 .

Chercher les antécédents de 14 par g revient à chercher x tel que $g(x) = 14$. On doit donc résoudre l'équation $g(x) = 14$.

On conclut.

3 Tracer la courbe représentative d'une fonction déterminée par une formule

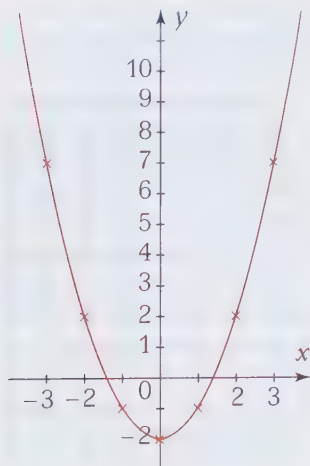
Énoncé Tracer à main levée la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$.

Solution

Le tableau donne quelques valeurs de $f(x)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	7	2	-1	-2	-1	2	7

On calcule les images de quelques valeurs de x ; par exemple :
 $f(-3) = (-3)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$.
 On peut reporter les résultats dans un tableau.



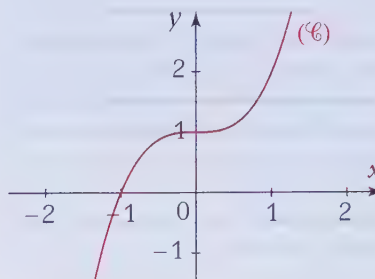
On trace un repère, et on place les points de coordonnées $(x ; y)$, avec $y = f(x)$, calculées précédemment.

On relie à main levée les points obtenus par une courbe régulière.

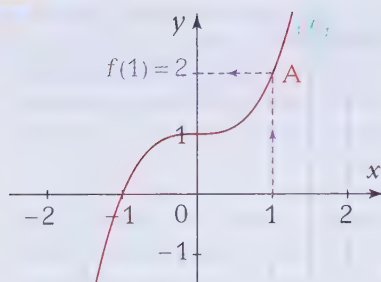
On admet que le tracé effectué est la courbe représentative de la fonction f .

Déterminer graphiquement l'image ou les antécédents d'un nombre par une fonction

Énoncé 1 Déterminer graphiquement l'image du nombre 1 par la fonction f dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ est tracée dans le repère ci-dessous.



Solution



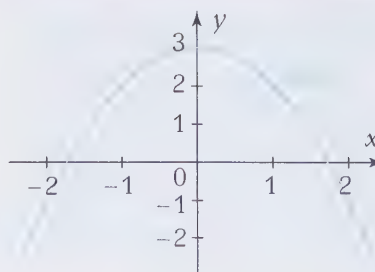
On repère le point sur l'axe des abscisses ayant pour abscisse 1, puis on trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point.

La droite tracée rencontre $(\mathcal{C})$ en un point A. La parallèle à l'axe des abscisses passant par A coupe l'axe des ordonnées en 2.

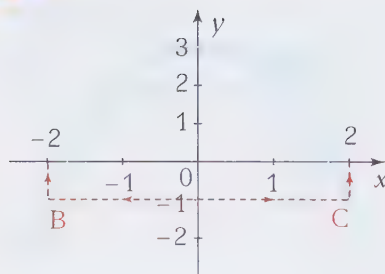
La lecture graphique montre que l'image du nombre 1 par la fonction f est le nombre 2.

On a donc : $f(1) = 2$.

Énoncé 2 Déterminer graphiquement les antécédents du nombre -1 par la fonction g dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ est tracée dans le repère ci-dessous.



Solution



On repère le point sur l'axe des ordonnées ayant pour ordonnée -1 , puis on trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par ce point.

La droite tracée rencontre $(\mathcal{C})$ en deux points B et C.

Les parallèles à l'axe des ordonnées passant par les points B et C coupent l'axe des abscisses en -2 et 2 .

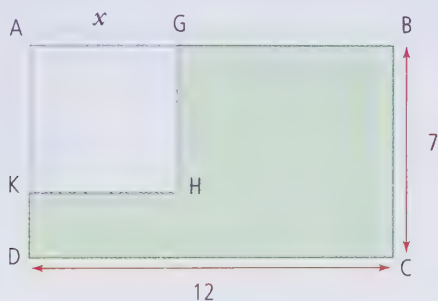
La lecture graphique montre que les antécédents par g du nombre -1 sont les nombres -2 et 2 .

S'entraîner

En fonction de ...

- 1** 1 Quelle formule permet d'exprimer le périmètre p d'un carré en fonction de son côté x ?
- 2 On désigne par x et y les dimensions non nulles, en cm, d'un rectangle dont l'aire est égale à 5 cm^2 . Exprimer y en fonction de x .
- 3 En multipliant un nombre x par 7 et en ajoutant 2 au produit, on obtient un nombre y . Exprimer y en fonction de x .
- 4 Quelle formule permet d'exprimer le volume V d'un cube en fonction de son arête x ?

- 2** 1 Quelle formule permet d'exprimer le volume V d'un cylindre de hauteur 7 cm en fonction du rayon r de sa base ?
- 2 Les longueurs sont exprimées en cm.
ABCD est un rectangle et AGHK est un carré.
Exprimer l'aire coloriée en fonction de x .



- 3** 1 Deux nombres x et y vérifient la relation $x + y = 5$.
a. Exprimer x en fonction de y .
b. Exprimer y en fonction de x .
- 2 Reprendre les questions précédentes pour des nombres x et y vérifiant la relation $x - y = 3$.
- 3 Exprimer y en fonction de x , puis x en fonction de y , sachant que les nombres x et y vérifient la relation $2x - y = 1$.

Image et antécédents

- 4** Recopier et compléter les phrases suivantes :
- a. L'image du nombre 3 par la fonction $f : x \mapsto x + 7$ est L'antécédent du nombre 8 par cette fonction est
- b. L'image du nombre 9 par la fonction $g : x \mapsto x - 11$ est L'antécédent du nombre 7 par cette fonction est
- c. L'image du nombre 4 par la fonction $h : x \mapsto -5 - x$ est L'antécédent du nombre -10 par cette fonction est

5 Calcul mental

- 1 Soit h la fonction définie par $h(x) = x - 7$.
Calculer les nombres suivants :
a. $h(-2)$ b. $h(-0,5)$ c. $h(0)$
d. $h(1,5)$ e. $h(9)$
- 2 Soit k la fonction définie par $k(x) = -8x$.
Calculer les nombres suivants :
a. $k(-5)$ b. $k(-2,5)$ c. $k(0)$
d. $k(4,5)$ e. $k(10)$

- 6** 1 Soit la fonction g définie par : $g(x) = 3x$.
a. Calculer les images par g des nombres -11 ; -8 ; -1 ; 4 et $\frac{13}{3}$.
b. Calculer l'antécédent par g de -27, puis de 12.
- 2 Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{9}{x}$ pour x non nul.
a. Calculer les images par h des nombres -9 ; -3 ; -1 ; 2 et 12.
b. Calculer l'antécédent par h de 3, puis de 18.

- 7** On considère un nombre x . On le multiplie par 3, puis on ajoute 2 au produit obtenu.
- 1 Définir la fonction f associée à ce programme de calcul.
- 2 Calculer les images par f des nombres -5 ; -2 ; 0 ; 3,5 et 7.
- 3 Calculer les nombres $f(-3)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(5)$ et $f(13)$.
- 4 Quel nombre a pour image 6 ? Quel est l'antécédent de 8 ?

- 8** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$.
- 1 Calculer $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$.
- 2 En utilisant la question précédente, déterminer, sans calcul, deux antécédents de 15, de 3, puis de 0.

- 9** f est une fonction telle que $f(1) = 7$.
- 1 Quelle est l'image de 1 par la fonction f ?
- 2 Cette fonction f est telle que 7 a deux antécédents : 1 et -1. La fonction f pourrait-elle être définie par $f(x) = x^2 + 6$? Pourrait-elle être définie par $f(x) = 7x$? Justifier.

- 10** Soit x un nombre non nul.
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{5}{x}$.

- 1 Le nombre 0 a-t-il une image par f ? Justifier.
- 2 Calculer $f(-5)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(4)$ et $f(10)$.
- 3 Quel est l'antécédent de 5 ?

11 Vrai ou faux

- Par la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 3$,
- a. l'image de 1 est 1. b. -2 est un antécédent de 5.
c. 47 est l'image de 5. d. -4 a pour image 29.

Courbe représentative d'une fonction

12 On considère la fonction $f : x \mapsto 3x$.

1 Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

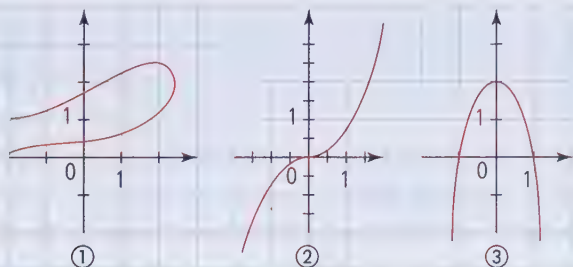
x	-3	-2,5	-2	-1	0	1,5	2	3
$f(x)$								

2 Justifier que le tableau obtenu à la question 1 est un tableau de proportionnalité.

3 Peut-on prévoir la nature de la courbe représentative de la fonction f ? Justifier.

4 Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère. On choisira 1 cm pour unité sur chaque axe.

13 Parmi les trois tracés ci-dessous, reconnaître lequel ne représente pas une fonction.



14 On considère la fonction $f : x \mapsto 2x + 1$.

1 Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	2
$f(x)$		

2 On admet que la courbe représentative de la fonction f est une droite d . Utiliser alors les valeurs du tableau précédent pour tracer cette droite dans un repère orthogonal.

3 Le point $A(1 ; 2)$ semble-t-il appartenir à d ? Vérifier la réponse par un calcul.

4 Reprendre la question précédente pour le point $B(-1 ; -1)$.

15 1 À quelle fonction f le tableau de valeurs ci-dessous pourrait-il correspondre? On donnera une formule pour f .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

2 Calculer, à partir de la formule trouvée dans la question précédente, les nombres $f(-2,5)$, $f(-1,5)$ et $f(0,5)$.

3 Tracer à main levée, à partir de points correspondants aux valeurs trouvées dans les questions précédentes, la courbe représentative de la fonction f . On choisira 1 cm pour unité sur chaque axe.

4 La courbe tracée admet-elle un axe de symétrie? Préciser la réponse.

16 Une fonction g est définie de la manière suivante :

- sa courbe représentative est une droite ;
- $g(0) = 2$ et $g(1) = -1$.

1 Tracer la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal. On choisira 1 cm pour unité graphique sur chaque axe.

2 Déterminer par lecture graphique les images des nombres -1 et $1,5$, puis les antécédents des nombres -4 et $3,5$.

Thème de convergence

Météorologie

La pression atmosphérique en un lieu donné équivaut au poids par unité de surface de la colonne d'air qui surmonte ce lieu.

Le tableau ci-contre indique les variations de la pression atmosphérique P , exprimée en hectopascal (hPa), en fonction de l'altitude a , exprimée en mètre (m).

Altitude (m)	Pression (hPa)
0	1 013
1 000	899
2 000	795
3 000	701
4 000	616
5 000	540
6 000	472
10 000	264
15 000	120
30 000	11

1 a. Déterminer l'image de la valeur 3 000 par la fonction P .

b. Déterminer l'antécédent par la fonction P de la valeur 472.

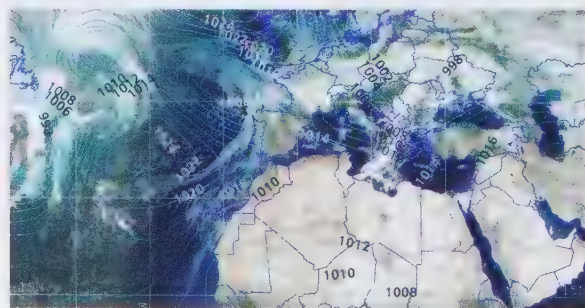
c. Comment évolue la pression atmosphérique en fonction de l'altitude?

2 a. Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $P : a \mapsto P(a)$.

On choisira les unités graphiques suivantes :

- 1,5 cm pour 3 000 m sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm pour 100 hPa sur l'axe des ordonnées.

b. L'allure de la courbe confirme-t-elle le résultat trouvé dans la question 1 c.?



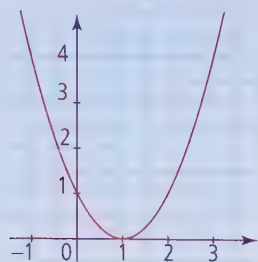
18 On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2$.

1 Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

2 Utiliser les valeurs du tableau précédent pour tracer à main levée, à partir des points placés, la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. On choisira 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 0,5 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

- 19 Une fonction f est représentée par la courbe ci-dessous.



- 1 Déterminer graphiquement $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.
- 2 Déterminer graphiquement les images par f des nombres $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$.
- 3 Quels sont les antécédents de chacun des nombres 4 et 1 ?

- 20 Soit la fonction $f : x \mapsto -3x + 7$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .

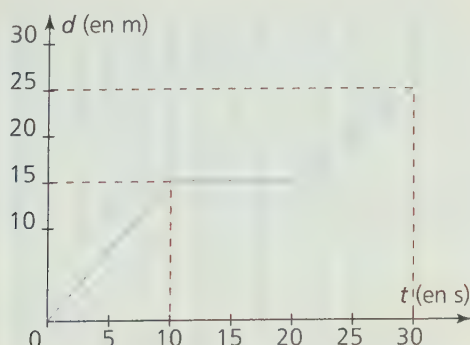
- 1 On considère le point A de $(\mathcal{C})$ dont l'abscisse est égale à -1. Quelle est son ordonnée ?
- 2 On considère le point B de $(\mathcal{C})$ dont l'ordonnée est égale à 1. Quelle est son abscisse ?
- 3 Justifier que le point C(3 ; -2) appartient à $(\mathcal{C})$.

21 Vrai ou faux

Le graphique ci-dessous montre le déplacement d'un piéton ; on a représenté la distance d parcourue, en mètres, en fonction de la durée t du parcours, en secondes.

Parmi les affirmations suivantes concernant ce piéton, indiquer lesquelles sont sûrement vraies.

- a. Il a gravi une côte de 15 m.
- b. On a relevé son déplacement pendant une durée de 30 s.
- c. Avant de s'arrêter, il a marché à allure régulière, à la vitesse de $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- d. Il a marché sur un terrain plat de longueur 15 m.
- e. Après s'être arrêté pendant 10 s, il a marché à nouveau, mais moins rapidement que lors des 15 premiers mètres.
- f. Sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours a été de $3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.



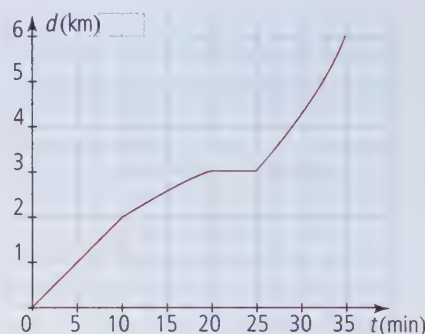
- 22 On considère la fonction $g : x \mapsto x^2 - 5$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

- 1 Le point F(-1 ; -6) appartient-il à $(\mathcal{C})$? Justifier.
- 2 Le point G(-2 ; -1) appartient-il à $(\mathcal{C})$? Justifier.
- 3 Parmi les points H(-3 ; 4), K(3 ; 1) et P(5 ; 20), lesquels appartiennent à $(\mathcal{C})$? Justifier.

23 Vrai ou faux

- a. Le point A(-2 ; -1) appartient à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3$.
- b. Une lecture graphique permet toujours d'avoir une très bonne précision de lecture.
- c. Le point B(-1 ; -1) appartient à la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto -2x^2 + 1$.
- d. Soit F un point de la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto -3x + 1$. Si l'abscisse de F est -3, alors son ordonnée est égale à -8.
- e. Si l'image de -4 par une fonction k est -63, alors le point G(-4 ; -63) appartient à la courbe représentative de la fonction k .

- 24 La courbe ci-dessous représente la distance d parcourue par un coureur à pied, en km, en fonction de la durée t de parcours, en minutes. Ce coureur s'efforce de maintenir, sur terrain plat, une vitesse constante égale à $12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.



- 1 Peut-on dire que la vitesse du sportif a été constante durant toute sa course ?
- 2 Le coureur s'est-il arrêté ? Si oui, pendant combien de temps ?
- 3 Quelle est l'image de 5 par la fonction $d : t \mapsto d(t)$? Quelle distance le coureur a-t-il parcourue après 5 minutes de course ?
- 4 Quel est l'antécédent de 6 par la fonction $d : t \mapsto d(t)$? Quelle a été la durée du parcours de 6 km effectuée par le coureur ?
- 5 Pendant sa course, le coureur a gravi une côte. Quand a certainement dû débiter l'ascension de cette côte ? Quelle était la longueur de cette côte ?
- 6 Pourquoi peut-on supposer que les 10 dernières minutes de course furent effectuées en descente ?
- 7 Quelle a été la vitesse moyenne de ce coureur durant les 10 dernières minutes de course ? Quelle a été la vitesse moyenne de ce coureur sur l'ensemble de sa course ?

Exercices

Détermination d'une fonction

25 On considère les tableaux de valeurs suivants :

1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Image de x	9	4	1	0	1	4	9	16

2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Image de x	8	3	0	-1	0	3	8	15

3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Image de x	10	5	2	1	2	5	10	17

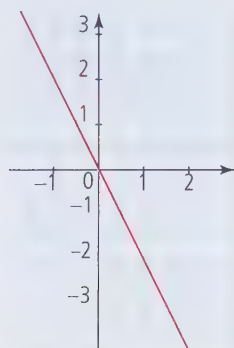
À laquelle des trois fonctions définies ci-dessous peut être associé chaque tableau ?

a. $f: x \mapsto x^2 + 1$ b. $g: x \mapsto x^2 - 1$ c. $h: x \mapsto x^2$

26 On donne trois fonctions f , g et h définies par :

$f(x) = -3x$; $g(x) = -2x$ et $h(x) = 2x$.

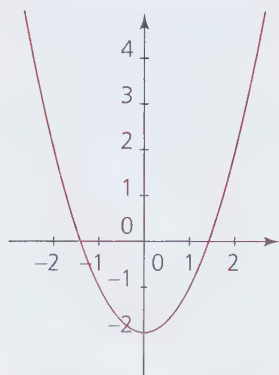
À laquelle de ces fonctions le graphique ci-dessous peut-il être associé ?



27 On considère les trois fonctions f , g et h définies par :

$f(x) = x^2 + 3$; $g(x) = x^2 - 2$ et $h(x) = x^2$.

Quelle est, parmi les fonctions f , g et h , celle dont la courbe représentative est tracée dans le repère ci-dessous ? Justifier la réponse.



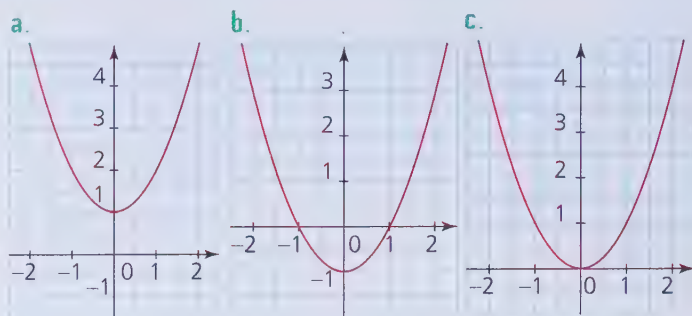
28 1 On considère le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-2	0	1
Image de x	-8	0	1

Justifier que ce tableau pourrait être associé à chacune des fonctions f et g définies par :

$f: x \mapsto -x^2 + 2x$ et $g: x \mapsto x^3$.

29 Parmi les tracés ci-dessous, lequel représente la fonction $f: x \mapsto x^2 - 1$?



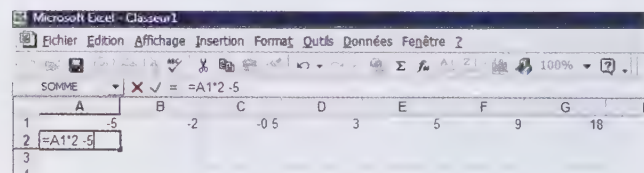
30 Associer à chaque grandeur la formule définissant la fonction f qui lui correspond.

Aire d'un disque de rayon x •
Volume d'un cube d'arête x •
Longueur d'un cercle de rayon x •

• $f(x) = x^3$
• $f(x) = 2\pi x$
• $f(x) = \pi x^2$

31 Avec un tableau

Quels nombres lira-t-on dans les cellules A2, B2, C2, D2, E2, F2 et G2 si l'on étend la formule de la cellule A2 à la cellule G2 ? Quelle fonction est associée à cette formule ?



32 Avec une calculatrice scientifique

Indiquer à quelle fonction est associé chacun des algorithmes suivants :

- 1 $Y \leftarrow (-) 4 \leftarrow 2 \times x^2 + (-) 7$
- 2 $Y \leftarrow x^2 - 5$
- 3 $Y \leftarrow (-) 4 \leftarrow 2 \times x^2 + (-) 7$

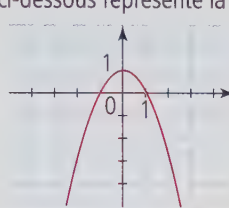
33 Avec une calculatrice scientifique

Écrire un algorithme de calcul pouvant être associé à chacune des fonctions f , g et h suivantes :

$f(x) = 3x + 2$
 $g(x) = x^2 - 5$
• $h(x) = -3(x^2 + 2x + 1)$

Faire le point

34 QCM Indiquer, dans chaque cas, la réponse exacte parmi les trois réponses proposées.

		A	B	C												
1	Soient deux nombres x et y vérifiant la relation $2x - 3y = 7$. Alors :	$y = \frac{7 - 2x}{3}$	$y = \frac{2x - 7}{3}$	$y = 7 - \frac{2}{3}x$												
2	Par la fonction $f: x \mapsto 5 + x^2$, l'image du nombre -4 est le nombre :	-11	1	21												
3	Par la fonction $f: x \mapsto 3x - 5$, le nombre 4 :	a un antécédent : le nombre 3	a un antécédent : le nombre 5	n'a pas d'antécédent												
4	La courbe ci-dessous représente la fonction : 	$f: x \mapsto 1 + x^2$	$f: x \mapsto 1 - x^2$	$f: x \mapsto -x^2$												
5	<table border="1" data-bbox="149 847 527 951"><tr><td>x</td><td>-7</td><td>-3</td><td>2</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>8</td><td>4</td><td>-1</td><td>-4</td><td>-6</td></tr></table> Le tableau ci-dessus peut être associé à la fonction f définie par :	x	-7	-3	2	5	7	$f(x)$	8	4	-1	-4	-6	$f(x) = 1 + x$	$f(x) = x - 1$	$f(x) = 1 - x$
x	-7	-3	2	5	7											
$f(x)$	8	4	-1	-4	-6											

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

• Comprendre les notions d'image et d'antécédent(s) d'un nombre par une fonction

35 On donne la fonction $f: x \mapsto 5 - x^2$.

❶ Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous, correspondant à la fonction f .

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	4	5
$f(x)$									

- ❷ Quelle est l'image par f de -4 ? de 3 ? de $\frac{8}{3}$?
 ❸ Justifier que -6 est un antécédent de -31 .
 ❹ Justifier que le nombre 1 admet deux antécédents.

• Interpréter graphiquement les notions d'image et d'antécédent(s) d'un nombre par une fonction

36 Une fonction f est définie par la représentation graphique ci-contre.

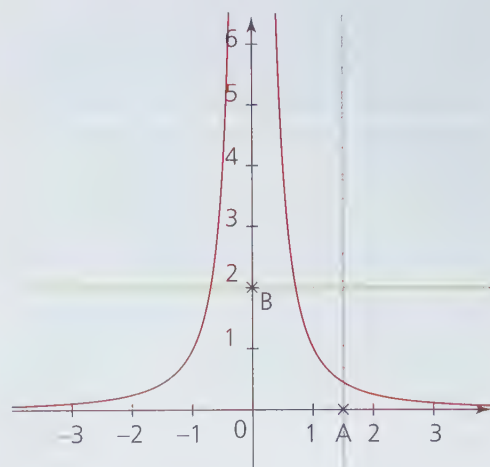
- ❶ a. On considère la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $A(1,5; 0)$; en combien de points cette droite rencontre-t-elle la courbe représentant la fonction f ?
 b. Justifier que $1,5$ admet une image par f .

❷ a. On considère la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $B(0; 2)$; en combien de points cette droite rencontre-t-elle la courbe représentant la fonction f ?

b. Justifier que 2 admet deux antécédents par f .

❸ Par lecture graphique, déterminer :

- a. l'image de -1 par f .
 b. les antécédents de 4 par f .



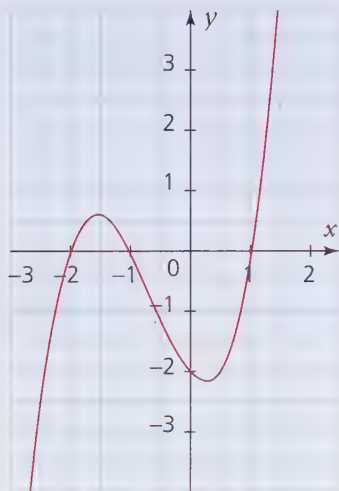
Approfondir

37 On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 + 1$.

- 1 Quels sont les antécédents par f de 5 ? de 17 ? de 82 ?
- 2 Le nombre 0 admet-il un antécédent ? Justifier.

38 La courbe ci-dessous représente une fonction f .

- En utilisant la représentation graphique de f :
- a. Justifier que l'équation $f(x) = -1$ admet trois solutions.
 - b. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique.
 - c. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0,5$.



39 Soit r la fonction définie, pour x positif, par : $r(x) = \sqrt{x}$.

- 1 Déterminer les images par la fonction r des nombres : 0 ; 1 ; 4 ; $\frac{16}{25}$ et 121.
- 2 Quel est l'antécédent par la fonction r du nombre 5 ? du nombre $\frac{2}{3}$?
- 3 Dresser un tableau de valeurs et représenter graphiquement la fonction r dans un repère orthogonal.

40 Soit la fonction $f: x \mapsto x^2 - 4(x + 2) - (x - 2)^2$.

- 1 Calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$. Que constate-t-on ?
- 2 Développer et réduire l'expression de $f(x)$.
- 3 $f(x)$ varie-t-il lorsque x varie ? Justifier.
- 4 Pourquoi dit-on que f est une *fonction constante* ?

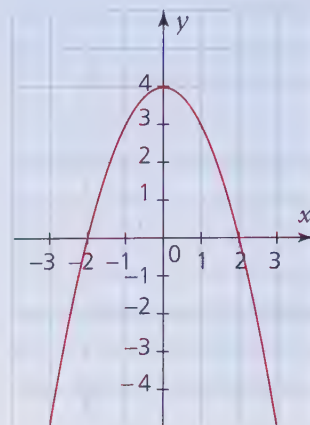
41 1 On considère la fonction $f: x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$.

- a. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
- b. En déduire les antécédents de 1 par la fonction f .

2 On considère la fonction $g: x \mapsto x^2 - 2x + 5$.

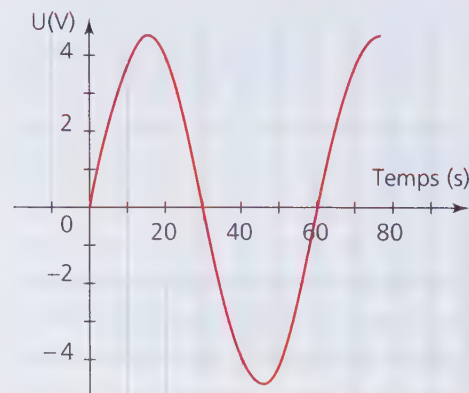
- a. Résoudre l'équation $g(x) = 4$.
- b. En déduire que le nombre 4 admet un antécédent unique par la fonction g .

42 La courbe tracée dans le repère ci-dessous représente une fonction f .



- 1 Semble-t-il exister des valeurs de x telles que : $f(x) > 4$? On admettra que le nombre 4 est le *maximum* de la fonction f .
- 2 Déterminer graphiquement :
 - a. les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
 - b. les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.
 - c. les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.
- 3 a. Reproduire le graphique, puis, en s'aidant de la courbe de f , tracer la courbe représentative de la fonction g définie par : $g(x) = f(x) + 1$.
- b. Quel est le maximum de la fonction g ?

43 Math et sciences physiques



Le graphique ci-dessus montre les variations de la tension U , en volts (V), délivrée par un générateur alternatif en fonction du temps t , en secondes (s).

- 1 a. On considère la fonction $U: t \mapsto U(t)$. Déterminer graphiquement $U(20)$, $U(40)$, puis $U(60)$.
- b. Quelle tension délivre le générateur au bout de 20 s ? de 40 s ? de 60 s ?
- 2 Indiquer des valeurs approchées de deux antécédents de -2, puis de trois antécédents de 4 par la fonction U . Interpréter les réponses.

- 44** Soit la fonction f définie, pour x différent de 3, par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

- 1 Calculer les images par f des nombres -1 ; 0 ; 1 et 5 .
- 2 Déterminer l'antécédent par la fonction f du nombre -1 .
- 3 Justifier que le nombre 1 n'admet pas d'antécédent par f .

- 45** On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1-2x}{x-5}$, définie pour x différent de 5.

- 1 Calculer les images par f des nombres -3 ; 0 ; $\frac{1}{2}$ et 4 .
- 2 Pourquoi peut-on dire que 2 est un antécédent de 1 ?
- 3 Le nombre -2 admet-il un antécédent par f ? Justifier.

- 46** On lâche une bille d'une hauteur de 6 m, sans vitesse initiale, puis on relève pendant 1 seconde, par chronophotographie, sa position x en fonction du temps t .

t (en s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
x (en m)	0	0,05	0,20	0,44	0,78	1,23

t (en s)	0,6	0,7	0,8	0,9	1
x (en m)	1,77	2,40	3,14	3,97	4,91

- 1 Représenter graphiquement x en fonction de t . On effectuera le tracé à main levée, à partir des points donnés et on choisira 1 cm pour 0,1 s sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 0,5 m sur l'axe des ordonnées.
- 2 Prolonger de façon régulière le tracé obtenu pour déterminer graphiquement la durée de chute de la bille.

- 47** Une fonction f est donnée par $f(x) = ax^2 + b$, où a et b sont des nombres.

Sachant que les images respectives par f des nombres -2 et 3 sont les nombres -5 et 0 , déterminer a et b , puis en déduire l'expression de $f(x)$.

- 48** On considère la fonction $f : x \mapsto 4(x+2)^2 - 9$.

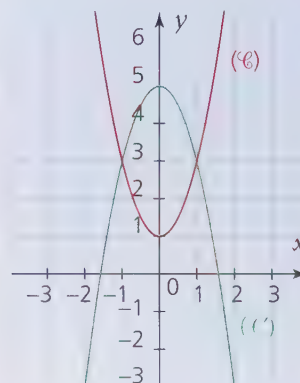
- 1 Calculer les images par f des nombres -2 ; 0 ; 1 et $-\frac{1}{2}$.
- 2 Factoriser $f(x)$, puis en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- 3 Résoudre l'équation $f(x) = -5$.

- 49** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 7$.

- 1 a. Résoudre l'équation $f(x) = 2$.
b. En déduire les antécédents de 2 par la fonction f .
- 2 Justifier que les antécédents de 6 par f sont les nombres $-\sqrt{13}$ et $\sqrt{13}$.
- 3 Quel est l'antécédent de -7 par f ?
- 4 Le nombre -10 admet-il un antécédent par f ? Justifier.

- 50** Sur le graphique ci-dessous, la courbe $(\mathcal{C})$ représente la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 1$ et la courbe $(\mathcal{C}')$ représente la fonction $g : x \mapsto -2x^2 + 5$.

- 1 a. En utilisant ce graphique, indiquer pour quelles valeurs de x l'égalité $f(x) = g(x)$ est vraie.
b. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, puis vérifier les résultats de la question 1 a.
- 2 Pour quelles valeurs de x a-t-on : $f(x) < g(x)$?
- 3 Quelles sont les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$?



POUR LES CURIEUX

Lorsqu'un corps est en chute libre, sans vitesse initiale, il tombe verticalement sous l'action de la pesanteur. Sa vitesse au moment de l'impact sur le sol est fonction de sa hauteur de chute : plus cette hauteur est importante, plus cette vitesse au moment de l'impact avec le sol est grande.

Par exemple, un corps en chute libre d'une hauteur de 10 m arrive au sol avec une vitesse environ égale à $50,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; s'il est lâché d'une hauteur de 50 m, sa vitesse au sol est environ égale à $113 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Sur Terre, on lâche d'une certaine hauteur h un corps de masse m . Sans vitesse initiale, celui-ci chute verticalement sous l'action de la pesanteur. Si l'on ne tient pas compte de la résistance de l'air, les lois de la physique permettent d'établir la relation : $mv^2 = 19,62mh$, dans laquelle v est la vitesse du corps, exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, lorsqu'il a chuté d'une hauteur h , exprimée en m.

- 1 À partir de cette relation on peut exprimer la vitesse v , positive, en fonction de la hauteur h . Quelle est cette fonction ?
- 2 L'expression obtenue est-elle fonction de la masse du corps ? En l'absence d'air, une bille de plomb tombe-t-elle plus vite qu'une bille de bois ?
- 3 Retrouver les résultats annoncés dans l'encadré ci-contre, puis calculer, en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, la vitesse au sol d'un corps lâché d'une hauteur de 100 m, de 150 m, de 200 m.



Calculer des valeurs prises par une fonction

On se propose de déterminer les valeurs prises par la fonction $f: x \mapsto f(x) = -2(x - 5)$ pour les valeurs de la variable x égales à -10 ; -6 ; $-1,5$; $-0,5$; 0 ; 2 ; $3,7$ et 11 .

1 Avec une calculatrice scientifique

	CASIO Collège 2D	TI-Collège
• On vide les mémoires de la calculatrice.	[CLR] [2] [EXE] [AC] Clear? 1: Setup 2: Memory 3: All	[EFF VAR] (O) [ENTER] EFFVAR: 0 N
• On saisit l'expression de $f(x)$.	[Y] [=] (-) [2] [X] (-) [X] [=] [5] [)] $Y = -2(X - 5)$	[OP1] (-) [2] [X] (-) [VAR] (A) [ENTER] [=] [5] [)] [ENTER] $OP1 = -2 \times (A - 5)$
	Note : Les touches [X] et [)] ne sont pas obligatoires.	Note : Les touches [X] et [)] ne sont pas obligatoires.
	On met la calculatrice en mode [CALC] . La première valeur de x est demandée.	
	$X?$ 0	
• On entre la 1 ^{re} valeur de x .	(-) [1] [0]	(-) [1] [0] [STO→] (A) [ENTER] $-10 \rightarrow A$ -10
• On obtient la valeur prise par la fonction f pour cette valeur de x .	[EXE] $Y = -2(X - 5)$ 30	[OP1] $-2 \times (A - 5)$ 30
	[CALC] ou [EXE]	
• On entre la 2 ^e valeur de x .	(-) [6] [EXE] $Y = -2(X - 5)$ 22	(-) [6] [STO→] (A) [ENTER] [OP1] $-2 \times (A - 5)$ 22
• On procède de même pour les autres valeurs de x proposées.		
• On vide les mémoires de la calculatrice.	On quitte le mode [CALC] [AC] [CLR] [2] [EXE] [AC]	[EFF VAR] (O) [ENTER]

2 Avec un tableur

- On entre les valeurs proposées de la variable dans les cellules de la première ligne.
- On tape la formule de la fonction dans la cellule **A2**.
- On étend ensuite la formule jusqu'à la cellule **H2**.

Entrer -10 en **A1** ; -6 en **B1** ; $-1,5$ en **C1** ; $-0,5$ en **D1** ; 0 en **E1** ; 2 en **F1** ; $3,7$ en **G1** ; 11 en **H1**.

Entrer la formule $= -2*(A1-5)$ dans la cellule **A2**.

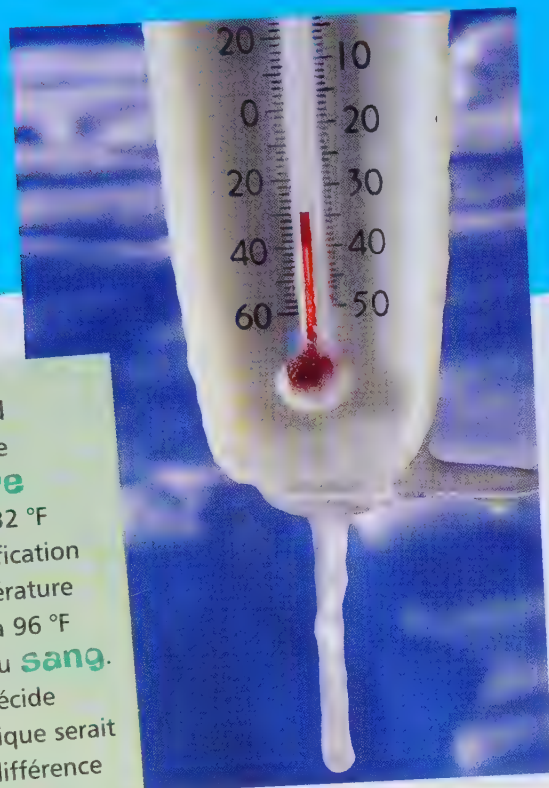
Cliquer sur la cellule **A2**, puis étirer la croix jusqu'à la cellule **H2**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	-10	-6	-1,5	-0,5	0	2	3,7	11
2	$-2*(A1-5)$							

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	-10	-6	-1,5	-0,5	0	2	3,7	11
2	30	22	13	11	10	6	2,6	-12

8

Fonction linéaire, fonction affine



En 1717, le savant allemand **Fahrenheit** conçoit le premier **thermomètre à mercure** et fixe à 32 °F la température de la solidification de l'eau, à 212 °F la température d'ébullition de l'eau... et à 96 °F la température normale du **sang**. En 1794, la Convention décide que le degré thermométrique serait la centième partie de la différence entre la température de l'**eau bouillante** et celle de la **glace fondante**; ce degré fut adopté sous le nom de **Celsius** en 1948. Sur le thermomètre ci-dessus, **savez-vous reconnaître** de quel côté sont inscrits les degrés Celsius et de quel côté sont les degrés Fahrenheit ?

En 1748, Euler s'intéressait aux **transformations du plan**, autrement dit à l'image d'un objet mathématique, représenté dans un plan, auquel on a appliqué une **fonction**. En examinant l'effet d'une telle transformation sur une **courbe**, il écrivit : « deux courbes images l'une de l'autre par une telle transformation présentent entre elles **une certaine "affinité"** »; c'est vraisemblablement l'**origine** de l'adjectif affine.



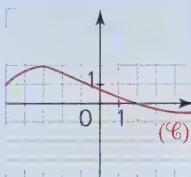
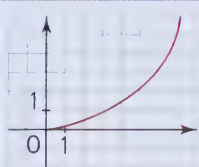
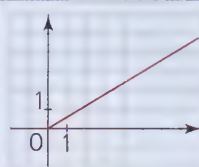
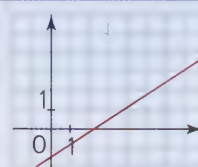
Si vous suivez la météo aux États-Unis, vous obtenez la température usuelle par :

$$C^{\circ} = \frac{F^{\circ} - 32}{1,8}$$

Quel temps fait-il aux États-Unis quand le thermomètre affiche 86 °F ?

QGM

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C																														
1	L'image de 0 par la fonction f définie par $f(x) = 2x - 4$ est :	-4	2	$\frac{1}{2}$																														
2	L'antécédent de 0 par la fonction f définie par $f(x) = 2x - 4$ est :	-4	2	$\frac{1}{2}$																														
3	La courbe (C) ci-contre représente une fonction f . 	L'image de 2 par f est -3	L'image de -3 par f est 2	L'antécédent de 3 par f est -2																														
4	Des trois situations suivantes, laquelle représente une situation de proportionnalité ?	Développer cinq photos par Internet et payer 0,11 euros par photo plus 2 euros de frais d'envoi.	Acheter cinq baguettes à 0,85 euros chacune	Calculer l'aire d'un carré en fonction de sa longueur.																														
5	Des trois tableaux suivants, lequel est un tableau de proportionnalité ?	<table border="1"><tr><td>5</td><td>7</td><td>15</td><td>32</td><td>72</td></tr><tr><td>15</td><td>21</td><td>45</td><td>96</td><td>216</td></tr></table>	5	7	15	32	72	15	21	45	96	216	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td></tr></table>	1	2	3	4	5	1	4	9	16	25	<table border="1"><tr><td>2</td><td>5</td><td>7</td><td>13</td><td>17</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>9</td><td>15</td><td>19</td></tr></table>	2	5	7	13	17	4	7	9	15	19
5	7	15	32	72																														
15	21	45	96	216																														
1	2	3	4	5																														
1	4	9	16	25																														
2	5	7	13	17																														
4	7	9	15	19																														
6	Des trois représentations graphiques suivantes, laquelle correspond à une situation de proportionnalité ?																																	
7	20 % de 115 est égal à :	23	20	135																														

Exercice 1

Pour faire son célèbre gâteau au chocolat pour six personnes, Hélène a besoin de 200 g de chocolat, 3 œufs, 150 g de sucre, 70 g de farine et 50 g de beurre.

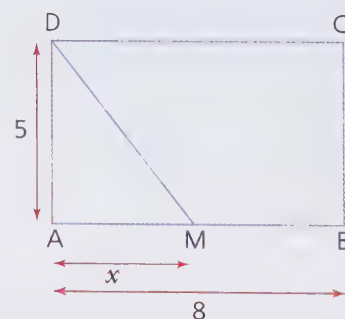
- Si elle veut faire son gâteau pour huit personnes, quelle quantité de chaque ingrédient doit-elle prendre ? Si besoin, on arrondira les quantités au gramme.
- Il ne lui reste plus que deux œufs dans son réfrigérateur ; quelle quantité de chacun des autres ingrédients doit-elle utiliser pour faire son gâteau (arrondir au gramme) ? Pour combien de personnes sera-t-il ?

Exercice 2

L'unité est le centimètre.

ABCD est un rectangle tel que $AB = 8$ et $AD = 5$. M est un point du segment $[AB]$ tel que : $AM = x$ où x est un nombre positif.

- Justifier que x est compris entre 0 et 8.
- Exprimer en fonction de x l'aire du triangle AMD. Cette aire est-elle proportionnelle à x ?
- Exprimer en fonction de x l'aire du trapèze MBCD. Cette aire est-elle proportionnelle à x ?



Exercice 3

Résoudre les équations et l'inéquation suivantes :

a. $3x - 2 = 2x + 5$

b. $-5x + 7 \leq -2x - 5$

c. $\frac{5}{2}x + 8 = 6 - \frac{5}{4}x$

Activité 1 Notion de fonction linéaire

A Correspondance milles marins - kilomètres

En mer, la distance parcourue par un bateau se mesure en milles marins.

Le tableau ci-dessous donne la correspondance entre la valeur en milles marins et la valeur en kilomètres d'une même distance.

$\times a$	Distance en milles	1	10	25	50	100	175
	Distance en kilomètres	1,852	18,52	46,3	92,6	185,2	324,1

- 1 a. Justifier que ce tableau est un tableau de proportionnalité.
b. Quelle est la valeur du coefficient de proportionnalité a ?
- 2 Un bateau parcourt x milles, où x est un nombre positif. Soit f la fonction qui à x associe le nombre $f(x)$ de kilomètres parcourus. Exprimer, en fonction de x , le nombre $f(x)$.
- 3 Soit a un nombre relatif. La fonction qui, à un nombre x , associe le produit ax est appelée la **fonction linéaire de coefficient a** .
a. La fonction f de la question 2 est-elle une fonction linéaire ? Si c'est le cas, donner son coefficient.
b. Si $a = 0$, que peut-on dire de la fonction linéaire de coefficient a ?

B Augmentation en pourcentage

Quand l'eau gèle, son volume augmente de 8 % environ.

- 1 On fait geler 20 cm^3 d'eau pour obtenir un glaçon. Montrer que l'augmentation du volume est de $1,6 \text{ cm}^3$. En déduire le volume total du glaçon obtenu.
- 2 Soit x un nombre positif. On fait geler $x \text{ cm}^3$ d'eau. Montrer que le volume de glace obtenu est $1,08x \text{ cm}^3$.
- 3 Soit f la fonction qui à $x \text{ cm}^3$ d'eau associe le volume $f(x)$ de glace obtenu quand l'eau gèle. La fonction f est-elle linéaire ? Si oui, préciser son coefficient.
- 4 Soit a un nombre positif. Quelle est la fonction linéaire qui à une quantité x associe la quantité augmentée de a % ?



Activité 2 Représentation graphique d'une fonction linéaire

A Représentation graphique

Soit f la fonction linéaire définie par $f(x) = 2x$.

1 Conjecture

- Reproduire et compléter le tableau ci-contre.
- Construire un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1 \text{ cm}$, puis placer les points de coordonnées $(x ; f(x))$ du tableau.

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$								

6. Quelle semble être la nature de la représentation graphique de la fonction f ?

Un repère **orthonormal** est un repère orthogonal tel que $OI = OJ = 1$.

2 Démonstration

Soit f la fonction linéaire définie par $f(x) = 2x$.

Soit le point A de coordonnées $(1 ; f(1))$.

Pour $x = 1$, $f(1) = 2$ donc le point A(1 ; 2) appartient à la représentation graphique de la fonction f . Il en est de même pour le point O(0 ; 0).

On trace la droite (OA).

a. Montrons que si un point M appartient à la droite (OA), alors il appartient à la représentation graphique de f .

On considère un point quelconque M appartenant à la droite (OA).

On note x son abscisse.

• Si $x > 0$, on considère le point H de coordonnées $(x ; 0)$.

À l'aide du théorème de Thalès, montrer que $\frac{HM}{IA} = \frac{OH}{OI}$.

En déduire que l'ordonnée y du point M est $y = 2x$, puis que M est un point de la représentation graphique de la fonction f .

• Si $x < 0$, on considère le point Q symétrique de M par rapport à O.

Expliquer pourquoi Q appartient à la droite (OA), puis donner son abscisse.

En utilisant le cas précédent, déterminer son ordonnée. En déduire les coordonnées du point M, puis montrer que M est un point de la représentation graphique de la fonction f .

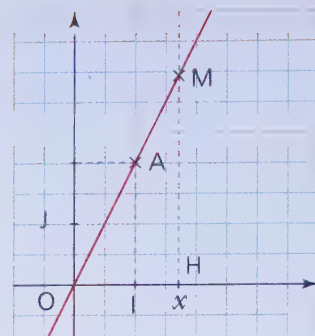
b. Réciproquement, montrons que tout point P de la représentation graphique de f appartient à la droite (OA).

Soient x un nombre quelconque, P le point de coordonnées $(x ; 2x)$ appartenant à la représentation graphique de f et R le point d'abscisse x appartenant à la droite (OA).

En utilisant la question a, déterminer l'ordonnée du point R.

Que peut-on dire des points P et R ? En déduire que P appartient à la droite (OA).

c. Conclure.



B Coefficient directeur

Soient a un nombre et f la fonction linéaire définie par $f(x) = ax$.

Dans un repère (O, I, J), on appelle A le point de coordonnées $(1 ; a)$.

La représentation graphique de la fonction linéaire f est la droite (OA).

a s'appelle le **coefficient directeur** de la représentation graphique de f .



En utilisant des couleurs différentes, tracer la représentation graphique de f :

- quand $a = -3$
- quand $a = -1,5$
- quand $a = 0,5$
- quand $a = 3$



a. Pour $a < 0$, où se situe le point A par rapport à l'axe des abscisses du repère ? Que dire de la direction de la droite qui représente la fonction f ?

b. Pour $a > 0$, où se situe le point A par rapport à l'axe des abscisses du repère ? Que dire de la direction de la droite qui représente la fonction f ?

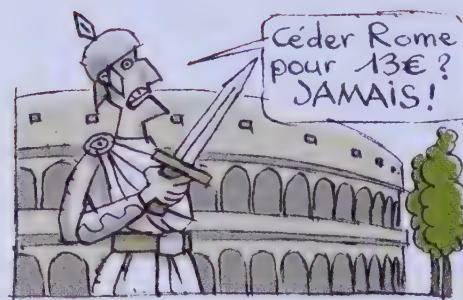
c. Si $a = 0$, avec quelle droite particulière du repère est confondue la droite (OA) ?

d. Sans les tracer, que dire de la direction de chacune des représentations graphiques des fonctions linéaires suivantes :

- $f(x) = 9x$
- $f(x) = -\frac{3}{2}x$
- $f(x) = -cx$ avec $c > 0$

Activité 3 Notion de fonction affine

- 1 Sur son site Internet, un magasin propose l'achat de CD-Rom à 10 euros l'unité. Quel que soit le nombre de CD-Rom commandés, les frais d'envoi s'élèvent à 3 euros pour la France métropolitaine. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?



Nombre de CD-Rom commandés	1	2	3	5	6	8	10
Prix total à payer en euros							

- 2 a. Soit x un nombre entier positif. Exprimer le prix total $p(x)$ de la commande en fonction du nombre x de CD-Rom commandés.
b. Le nombre $p(x)$ est-il proportionnel à x ?
- 3 Soient a et b deux nombres. La fonction qui à x associe la valeur $ax + b$ est appelée une **fonction affine**.
a. La fonction f de la question précédente est-elle une fonction affine ?
b. Que peut-on dire d'une fonction affine h définie par $h(x) = ax + b$ si $a = 0$? Si $b = 0$?

Activité 4 Représentation graphique d'une fonction affine

A Représentation graphique

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 2x + 1,5$.

1 Conjecture

- a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

- b. Tracer un repère (O, I, J) orthonormal tel que $OI = OJ = 1$ cm, puis placer dans (O, I, J) les points de coordonnées $(x; f(x))$ du tableau précédent. Quelle semble être la nature de la représentation graphique de la fonction f ?
c. Le point O appartient-il à la représentation graphique de la fonction f ?

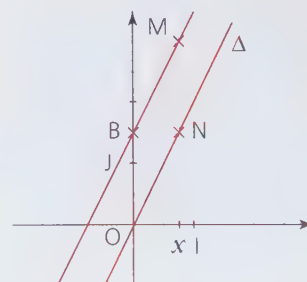
2 Démonstration

Dans le repère (O, I, J) ci-contre :

- la droite Δ représente la fonction linéaire g définie par $g(x) = 2x$;
- on a placé le point $B(0; 1,5)$ et, pour une valeur de x quelconque, les points $N(x; 2x)$ et $M(x; 2x + 1,5)$.

- a. Que peut-on dire des droites (OB) et (NM) ?
Que peut-on dire des longueurs des segments $[OB]$ et $[NM]$?
En déduire la nature du quadrilatère $ONMB$.

- b. Que peut-on en déduire concernant la nature de la représentation graphique de la fonction affine f ?



B Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Les cas particuliers $a = 0$ ou $b = 0$ ont été vus dans l'activité 3.

Soient a et b deux nombres non nuls et f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

On considère la représentation graphique de f dans un repère orthonormal (O, I, J) .

a est appelé le **coefficient directeur** de la représentation graphique de f et b est appelé l'**ordonnée à l'origine**.

1 Le point $(0 ; b)$ appartient-il à la représentation graphique de f ? Justifier l'expression « ordonnée à l'origine » employée pour b .

2 Tracer les représentations graphiques de la fonction f quand :

$a = -3$ et $b = 2,5$ $a = -3$ et $b = -1$ $a = 2$ et $b = 2,5$ $a = 2$ et $b = -1$

3 Indiquer, selon le signe du coefficient directeur, la direction de la représentation graphique de la fonction f et donner, selon le signe de l'ordonnée à l'origine b , la position du point $B(0 ; b)$ par rapport à l'axe des abscisses.

C Accroissements

Soient deux nombres quelconques x_1 et x_2 distincts. Le nombre $f(x_2) - f(x_1)$ s'appelle l'**accroissement de $f(x_1)$ à $f(x_2)$** et le nombre $x_2 - x_1$ l'**accroissement de x_1 à x_2** .

1 Conjecture

a. On reprend la fonction affine f définie par $f(x) = 2x + 1,5$. Calculer les quotients des accroissements suivants :

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$$\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)}$$

$$\frac{f(-2) - f(-3)}{-2 - (-3)}$$

b. Quelle conjecture peut-on faire ?

2 Démonstration

Soient deux nombres a et b et f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

a. Factoriser la différence $f(x_2) - f(x_1)$.

b. Former le quotient de $f(x_2) - f(x_1)$ par $x_2 - x_1$ puis conclure.

Activité 5

Liaison avec les systèmes de deux équations à deux inconnues

On considère le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10,5 \\ 5x + y = 14 \end{cases}$$

1 a. L'équation $3x + 2y = 10,5$ permet d'exprimer y en fonction de x . Quelle est cette expression ?

b. L'expression obtenue à la question précédente définit-elle une fonction affine f ?

3. Reprendre les questions a et b pour l'équation $5x + y = 14$. On appellera g la fonction trouvée.

2 Tracer les représentations graphiques d et d' des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm.

3 Les droites d et d' se coupent en un point I . Quelles semblent être les coordonnées de I ?

4 Vérifier par le calcul que les coordonnées trouvées graphiquement pour le point I sont les solutions du système.

A Fonction linéaire

1 Définition

Définition Étant donné un nombre a , la **fonction linéaire f de coefficient a** est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre ax .
On note $f: x \mapsto ax$.

Exemple

La fonction f définie par $f: x \mapsto 5x$ est la fonction linéaire de coefficient 5.
En revanche, la fonction f définie par $f: x \mapsto x^2$ n'est pas une fonction linéaire.

Remarques :

- Si f est une fonction linéaire de coefficient a , alors l'image $f(x)$, égale à ax , de tout nombre x par f est **proportionnelle** à x (le coefficient de proportionnalité est a).
Réciproquement, toute situation de proportionnalité peut être associée à une fonction linéaire.
Par exemple, puisque le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur d'un côté de ce carré, il peut être représenté par la fonction p qui, à un côté de longueur x , associe le périmètre du carré, soit $4x$. Ainsi, la fonction $p: x \mapsto 4x$ est une fonction linéaire de coefficient 4.
- Si f est une fonction linéaire de coefficient $a = 0$, alors f est appelée la fonction nulle.

2 Représentation graphique

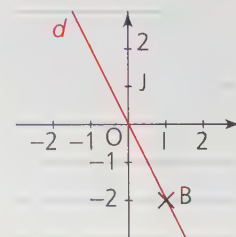
Propriétés

Les coordonnées $(x; y)$ de tout point M de la droite d vérifient la relation $y = ax$.

- Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , la représentation graphique de la fonction linéaire $f: x \mapsto ax$ est la droite d passant par l'origine O du repère et le point $A(1; a)$.
Le nombre a est appelé le **coefficient directeur de d** .
- Réciproquement, dans le repère (O, I, J) , toute droite passant par O , sauf l'axe des ordonnées, est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Exemple

La droite d passant par le point O et le point $B(1; -2)$ représente la fonction linéaire $g: x \mapsto -2x$.



3 Augmentation et réduction en pourcentage

Définition Soit a un nombre positif.

L'augmentation de $a\%$ d'une quantité x est associée à la fonction linéaire $f: x \mapsto \left(1 + \frac{a}{100}\right)x$.

La diminution de $a\%$ d'une quantité x est associée à la fonction linéaire $g: x \mapsto \left(1 - \frac{a}{100}\right)x$.

B Fonction affine

1 Définition

Définition

Étant donnés deux nombres a et b , la **fonction affine** f est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre $ax + b$.

Exemple

$f: x \mapsto 3x - 5$ est une fonction affine ($a = 3$ et $b = -5$).

La fonction affine f est définie par le programme de calcul :
« On multiplie le nombre x par a , puis on ajoute b au résultat. »

Remarques :

- Si $b = 0$, alors $f(x) = ax$ et f est une fonction linéaire de coefficient a .
- Si $a = 0$, alors $f(x) = b$ et f est une fonction constante.

2 Représentation graphique

Propriétés

- Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , la représentation graphique de la fonction affine $f: x \mapsto ax + b$ est une droite d .
 a est appelé le **coefficient directeur** de d .
 b est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite d .
- Réciproquement, dans le repère (O, I, J) , toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

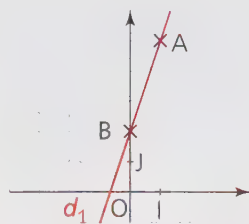
Les coordonnées $(x; y)$ de tout point M de la droite d vérifient la relation $y = ax + b$.

➔ Savoir-faire 3, page 142

La direction de la droite représentative d'une fonction affine dépend du signe du coefficient directeur.

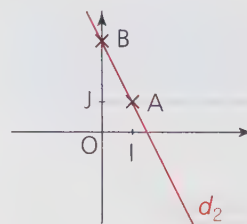
Exemple

► La fonction affine $f: x \mapsto 3x + 2$ est représentée par la droite d_1 .



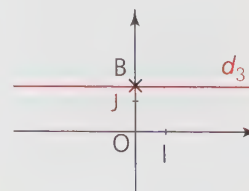
$a > 0$, la droite d_1 « monte ».

► La fonction affine $g: x \mapsto -2x + 3$ est représentée par la droite d_2 .



$a < 0$, la droite d_2 « descend ».

► La représentation graphique d'une fonction affine dont le coefficient directeur est nul est une droite parallèle à l'axe des abscisses. La fonction constante $f: x \mapsto 1,5$ est représentée par la droite d_3 .



3 Proportionnalité des accroissements

Propriété

Soit la fonction affine $f: x \mapsto ax + b$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres et $f(x_1)$ et $f(x_2)$ leurs images respectives par f .

L'**accroissement** $f(x_2) - f(x_1)$ des images $f(x_1)$ à $f(x_2)$ est proportionnel à l'**accroissement** $x_2 - x_1$ de x_1 à x_2 , le coefficient de proportionnalité étant a .

On a : $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$.

Savoir-faire

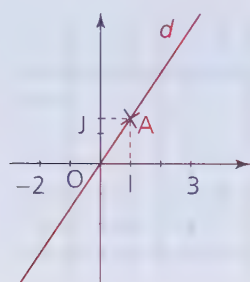
1 Tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire

Énoncé Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) , représenter la fonction linéaire $f: x \mapsto 1,5x$.

Solution

f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique dans le repère (O, I, J) est une droite d qui passe par le point O .

$f(1) = 1,5$ donc le point $A(1; 1,5)$ appartient à d .



La représentation graphique de la fonction f est la droite d représentée ci-dessus.

f étant linéaire, elle est représentée par une droite d passant par le point O .

On détermine un deuxième point de la droite d en calculant l'image d'un nombre par f .

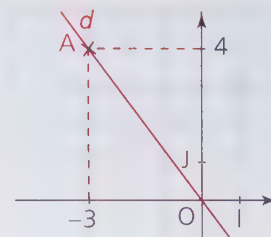
On place le point A dans le repère (O, I, J) et on trace la droite (OA) .

Savoir-faire

2 Déterminer une fonction linéaire connaissant un nombre non nul et son image, ou un point de sa représentation graphique

Énoncé 1. Déterminer la fonction linéaire f telle que $f(6) = 9$.

2. Déterminer la fonction linéaire g dont la représentation graphique est la droite d sur la figure ci-contre.



Solution

1. f est une fonction linéaire donc on peut écrire $f(x) = ax$.

D'après l'énoncé : $f(6) = a \times 6 = 9$.

donc $a \times 6 = 9$, d'où $a = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

La fonction f est donc définie par $f: x \mapsto \frac{3}{2}x$.

On utilise la définition d'une fonction linéaire en remplaçant x par 6.

On obtient une équation dont l'inconnue est a .

2. La droite d passe par l'origine du repère donc elle représente une fonction linéaire g .

On peut donc écrire $g(x) = ax$.

Le point $A(-3 ; 4)$ appartient à la droite d , donc on a :

$$g(-3) = a \times (-3) = 4.$$

$$\text{D'où } -3a = 4$$

$$\text{soit } a = -\frac{4}{3}.$$

La fonction g est donc définie par $g : x \mapsto -\frac{4}{3}x$.

On lit les coordonnées $(x_A ; y_A)$ d'un point A de la droite d .

Le point $A(x_A ; y_A)$ appartient à la représentation graphique de g donc $g(x_A) = y_A$.

Savoir-faire

3

Tracer la représentation graphique d'une fonction affine

Énoncé 1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , représenter la fonction affine $f : x \mapsto 2x - 1$.

2. Déterminer graphiquement l'antécédent du nombre 7 par f , puis vérifier le résultat par le calcul.

Solution

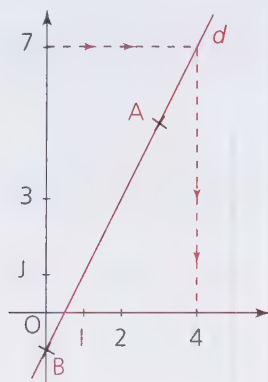
1. f est une fonction affine donc sa représentation graphique dans le repère (O, I, J) est une droite d .

$f(3) = 5$ donc le point $A(3 ; 5)$ appartient à d .

$f(0) = -1$ donc le point $B(0 ; -1)$ appartient à d .

f étant affine, elle est représentée par une droite d .

On détermine deux points de la droite d en choisissant deux nombres et en calculant leurs images respectives par f .



On place ces deux points dans le repère (O, I, J) et on trace la droite (AB) .

2. Le point d'ordonnée 7 de d a pour abscisse 4 donc l'antécédent de 7 par f est 4. Vérification par le calcul

$$2x - 1 = 7$$

$$2x = 7 + 1$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

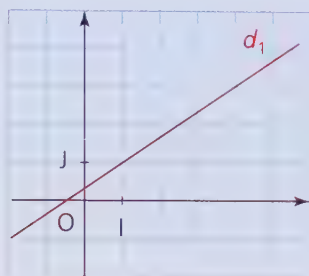
$$x = 4$$

On repère 7 sur l'axe des ordonnées, puis on lit l'abscisse du point de d qui a pour ordonnée 7 (pointillés rouges). Cette abscisse est égale à 4, on a donc : $f(4) = 7$.

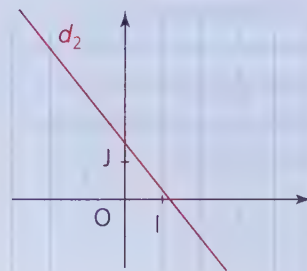
L'antécédent de 7 par f est le nombre x solution de l'équation $f(x) = 7$.

Énoncé Déterminer le coefficient directeur de chacune des droites d_1 et d_2 représentées ci-dessous.

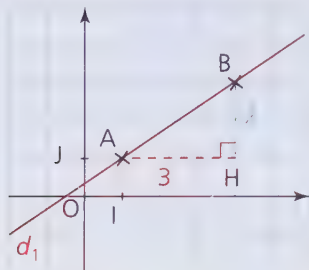
1.



2.

**Solution**

1. On repère deux points A et B qui appartiennent à la droite d_1 : A(1 ; 1) et B(4 ; 3).

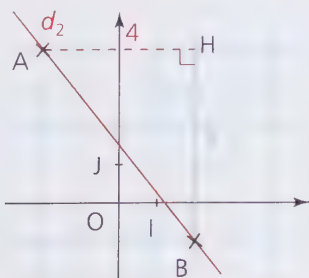


- On place deux points A(x_1 ; $f(x_1)$) et B(x_2 ; $f(x_2)$) sur la droite d_1 .
- On place le point H à droite du point A tel que le triangle AHB soit rectangle en H.
- On repère l'accroissement $x_2 - x_1$ de x_1 à x_2 en comptant le nombre de carreaux entre les points A et H. Ici 3.
- On repère l'accroissement $f(x_2) - f(x_1)$ de $f(x_1)$ à $f(x_2)$ en comptant le nombre de carreaux entre H et B. Ici 2.

Le coefficient directeur de la droite d_1 est égal à $\frac{2}{3}$.

On a : $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$ où a est le coefficient directeur de la fonction affine f . D'où $a = \frac{2}{3}$ ici.

2. On repère deux points A et B qui appartiennent à la droite d_2 : A(-2 ; 4) et B(2 ; -1).



- On choisit sur d_2 deux points A et B.
- On place le point H à droite du point A tel que le triangle AHB soit rectangle en H.
- On compte les carreaux :
 - de A à H, il y a 4 carreaux ;
 - de H à B, il y a 5 carreaux en « descendant ».

Le coefficient directeur de la droite d_2 est $-\frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$.

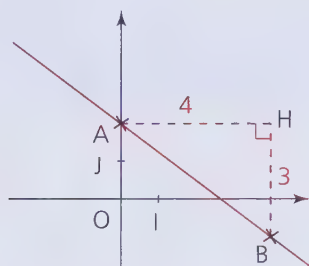
Le signe moins devant le nombre 5 indique que l'on « descend » de H à B.

5 Représentation graphique d'une fonction affine connaissant son coefficient, un nombre et son image

Énoncé Représenter la fonction affine f telle que $f(0) = 2$ et dont le coefficient directeur est $-\frac{3}{4}$.

Solution

Le point $A(0; 2)$ appartient à la représentation graphique de la fonction f .



La droite (AB) est la représentation graphique de f .

- f est une fonction affine donc f est représentée par une droite dans le repère (O, I, J) . Il suffit de placer deux points A et B appartenant à la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J) pour pouvoir tracer la représentation graphique de f .
- $f(0) = 2$ donc on peut placer le point $A(0; 2)$.
- On place le point H à 4 carreaux à droite du point A en se déplaçant parallèlement à l'axe des abscisses.
- On place le point B à « -3 carreaux », soit à 3 carreaux du point H en « descendant » parallèlement à l'axe des ordonnées.

6 Déterminer une fonction affine connaissant deux nombres distincts et leurs images

Énoncé f est une fonction affine telle que $f(-2) = 2$ et $f(4) = 5$. Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

Solution

L'accroissement des images est :

$$f(4) - f(-2) = 5 - 2 = 3.$$

L'accroissement de x est :

$$4 - (-2) = 4 + 2 = 6.$$

Le coefficient de f est donc : $a = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, on a : $f(x) = \frac{1}{2}x + b$.

Puisque $f(-2) = 2$, on a :

$$\frac{1}{2}(-2) + b = 2.$$

$$\text{D'où } -1 + b = 2$$

$$\text{et } b = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3.$$

On a donc $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

f est une fonction affine donc l'expression de $f(x)$ en fonction de x est $f(x) = ax + b$. Pour calculer a , on utilise la proportionnalité des accroissements.

Pour calculer b , on utilise $f(x) = \frac{1}{2}x + b$.

On remplace $f(x)$ par une valeur donnée dans l'énoncé (ici $f(-2) = 2$) et x par la valeur de x correspondante (ici $x = -2$) et on résout l'équation d'inconnue b ainsi obtenue.

S'entraîner

Fonction linéaire

Pour les exercices 1 et 2, indiquer si les fonctions proposées sont des fonctions linéaires. Préciser alors leur coefficient.

1 • $f_1: x \mapsto -3x$ • $f_2: x \mapsto 2x + 1$ • $f_3: x \mapsto 2x^2$
 • $f_4: x \mapsto \frac{4}{5}x$ • $f_5: x \mapsto 3x - 2(x - 2) - 4$

2 • $f_1: x \mapsto 2x^3$ • $f_2: x \mapsto (3 - \sqrt{2})x$ • $f_3: x \mapsto 10^6x$
 • $f_4: x \mapsto (2x - 3)x$ • $f_5: x \mapsto (3 - 9x)(5x) - 45x^2$

Pour les exercices 3 et 4, indiquer quels tableaux de valeurs parmi ceux proposés pourraient être associés à une fonction linéaire. Préciser alors le coefficient de cette fonction.

3 a.

x	-6	-5	-2	4	8	10
$f(x)$	18	15	6	-12	-24	-30

b.

x	-10	-8	-5	2	6	17
$f(x)$	-5	-3	0	7	11	22

4 a.

x	-15	-12	-9	0	6	8
$f(x)$	-3,75	-3	-2,25	0,25	1,5	2

b.

x	-9,6	-7,5	-6,7	-6	3	5
$f(x)$	5,76	4,5	4,02	3,6	-1,8	-3

5 Chacune des phrases ci-dessous définit une fonction f . Dans chaque cas, exprimer $f(x)$ en fonction de x , puis indiquer si f est une fonction linéaire. Si oui, préciser son coefficient.

- a. f est la fonction qui à x associe le dixième de x .
 b. f est la fonction qui à x associe le cinquième du double de x .
 c. f est la fonction qui à x associe le double de son inverse.
 d. f est la fonction qui à x associe le triple de son opposé.
 e. f est la fonction qui à x associe la moitié de son carré.

6 La fonction f associée à chacune des situations suivantes est-elle une fonction linéaire ? Si oui, donner son coefficient.

- a. $f(x)$ est le périmètre d'un carré de côté x centimètres.
 b. $f(x)$ est l'aire d'un carré de côté x centimètres.
 c. $f(x)$ est l'aire d'un disque de rayon x centimètres.
 d. $f(x)$ est la longueur d'un cercle de rayon x centimètres.
 e. $f(x)$ est le volume d'un parallélépipède rectangle dont la base rectangulaire a pour aire 25 cm^2 et la hauteur mesure x centimètres.
 f. $f(x)$ est le volume d'un cube de x centimètres d'arêtes.

7 Calcul mental

Soit f la fonction linéaire définie par $x \mapsto 3x$.
 Calculer l'image par f de chacun des nombres suivants :
 • -6 • -1,3 • 0 • 1,25 • 7,2 • 12

8 Soit g la fonction linéaire définie par $x \mapsto \frac{2}{5}x$.

1 Calculer l'image par g de chacun des nombres suivants :
 • -15 • -6,5 • 0,55 • 2,5 • 45 • 100

2 Quel est l'antécédent par g du nombre 17,6 ? Quel est l'antécédent par g du nombre -10,2 ?

9 Calcul mental

Soit f la fonction linéaire définie par $f(x) = 5x$.

Déterminer les antécédents par f des nombres suivants :

-5,5 ; 100 ; 2 ; 0 ; $\frac{5}{3}$.

10 Soit g la fonction linéaire définie par $x \mapsto \frac{7}{2}x$.

Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-2,2			-8×10^{-2}	$\frac{2\sqrt{5}}{7}$	$-\frac{4\pi}{5}$
$g(x)$		21	$-\frac{3}{7}$		$35\sqrt{6}$	

11 Déterminer le coefficient des fonctions linéaires f , g et h dans chacun des cas suivants :

- a. $f(3) = 21$.
 b. L'image de -2,4 par g est 12.
 c. L'antécédent de -20 par h est 0,4.

12 QCM

Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse.

1 Soit f la fonction linéaire telle que $f\left(\frac{2}{7}\right) = 4$. Son coefficient est :

- a. $\frac{1}{14}$ b. 14 c. $\frac{1}{7}$

2 Soit f la fonction linéaire telle que l'image de $-\frac{6}{5}$ est $-\frac{8}{5}$. Son coefficient est :

- a. $\frac{3}{4}$ b. $\frac{4}{3}$ c. $\frac{48}{25}$

3 Soit f la fonction linéaire telle que $f(6) = 4$.

L'image de 15 par f est :

- a. 10 b. 22,5 c. 5

4 Soit f la fonction linéaire telle que $f(8) = 2,4$.

L'antécédent de -1,8 par f est :

- a. $-\frac{5}{9}$ b. -6 c. $-\frac{1}{6}$

13 1 Déterminer le coefficient de la fonction linéaire h telle que l'image de 3×10^2 par h est 1,2.

2 Exprimer $h(x)$ en fonction de x . En déduire l'image par h de chacun des nombres suivants : 625 ; 10^4 ; $\frac{3 \times 10^6}{40}$.

Exercices

14 Math et sciences physiques

La loi d'Ohm pour un dipôle ohmique est donnée par la formule $U = RI$ où U est la tension, en volts (V), aux bornes du dipôle, R est sa résistance, en ohms (Ω), et I est l'intensité, en ampères (A), qui le traverse.

a. La tension aux bornes d'un dipôle ohmique est de 3,5 V. L'intensité du courant qui le traverse est de 50 mA. Calculer, en ohms, la résistance de ce dipôle.

b. Un dipôle ohmique a une résistance de $48 \times 10^2 \Omega$. Quelle est, en milliampères, l'intensité du courant qui le traverse lorsque la tension à ses bornes est de 12 V ?

Fonctions linéaires et pourcentages

15 Dans chacun des cas suivants, déterminer le coefficient de la fonction linéaire f associée à l'augmentation ou à la réduction donnée, puis exprimer $f(x)$ en fonction de x .

- a. Une hausse de 10 % b. Une baisse de 20 %
c. Une hausse de 2,5 % d. Une hausse de 100 %
e. Une baisse de 3,7 % f. Une baisse de 50 %

16 À quel pourcentage de hausse ou de baisse correspond chacune des fonctions linéaires suivantes.

- a. $f_1: x \mapsto 1,4x$ b. $f_2: x \mapsto 0,25x$
c. $f_3: x \mapsto 3x$ d. $f_4: x \mapsto 1,35x$
e. $f_5: x \mapsto 0,98x$ f. $f_6: x \mapsto 0,1x$
g. $f_7: x \mapsto \frac{3}{4}x$ h. $f_8: x \mapsto \frac{7}{4}x$

17 ① Un objet A coûte 65 €. Son prix augmente de 5 %. Combien coûte-t-il après cette augmentation ?

② Un objet B coûte 88 € après une augmentation de 10 %. Quel était son prix avant cette augmentation ?

③ Un objet C coûte 45 €. Après une augmentation son prix est de 50,40 €. Quel est le pourcentage de cette augmentation ?

18 ① Un objet A coûte 95 €. Son prix diminue de 12 %. Combien coûte-t-il après cette réduction ?

② Un objet B coûte 70 € après une diminution de 20 %. Quel était son prix avant cette réduction ?

③ Un objet C coûte 120 €. Après une diminution, son prix est de 90 €. Quel est le pourcentage de cette réduction ?

19 Du 1^{er} janvier 2003 au 1^{er} janvier 2008, la population d'une ville a augmenté de 3,5 %. Au 1^{er} janvier 2003, cette ville comptait 21 000 habitants. Combien compte-t-elle d'habitants le 1^{er} janvier 2008 ?

20 Sophie rêve depuis longtemps d'une guitare. Il y a six mois, elle en a vu une conforme à ses goûts dont le prix était 117 €. Six mois plus tard, le prix de cette guitare augmente de 6 %. Pourra-t-elle l'acheter avec ses 125 € d'économie ?

21 ① En 2005, la France (métropole et DOM) comptait 62 818 milliers d'habitants. Sachant que le taux de natalité de l'année 2005 était de 12,8 naissances pour 1 000 habitants, combien y a-t-il eu de naissances en France cette année-là ?

② Entre 2005 et 2006, le nombre de naissances en France a augmenté de 2,8 %.

a. Combien y a-t-il eu de naissances en France en 2006 ?

b. Sachant qu'il y avait 63 195 milliers d'habitants en 2006, quel est le taux de natalité de cette année ?

Représentation graphique d'une fonction linéaire

Pour les exercices 22 à 24, tracer un repère orthogonal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm, puis représenter dans des couleurs différentes chacune des fonctions linéaires.

22 Les fonctions linéaires sont définies par :

$$f_1: x \mapsto 2,5x$$

$$f_2: x \mapsto -1,5x$$

$$f_3: x \mapsto \frac{2}{3}x$$

$$f_4: x \mapsto -\frac{5}{3}x$$

23 Les fonctions linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 ont respectivement les coefficients directeurs suivants :

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = 1,2$$

$$a_3 = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = -\frac{2}{5}$$

24 Les fonctions linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 sont définies par :

$$f_1(1) = -1$$

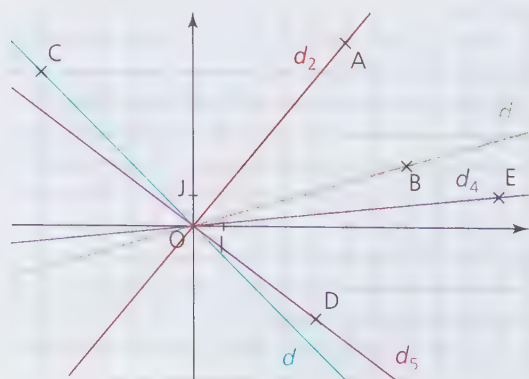
$$f_2(2,5) = -7,5$$

$$f_3(-2) = \frac{4}{3}$$

$$f_4\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$$

Préciser le coefficient directeur de chacune des droites obtenues.

25 Dans le repère (O, I, J) ci-dessous, lire les coordonnées des points A, B, C, D et E, puis donner pour chacune des droites d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 , l'expression de la fonction linéaire que cette droite représente.



26 Soit f la fonction linéaire définie par $f(x) = 2,4x$ et d sa représentation graphique dans un repère orthonormal (O, I, J) . Répondre par le calcul aux questions suivantes :

a. Les points $A(1,5 ; 3,6)$, $B(-2,6 ; -6,2)$, $C(\frac{5}{6} ; 2)$ et $D(-\frac{3}{2} ; 3,5)$ appartiennent-ils à la droite d ?

b. Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse -6 de la droite d ?

c. Quelle est l'abscisse du point d'ordonnée 9 de la droite d ?

27 Vu au brevet

Teva roule en scooter et tout à coup, il aperçoit un piéton. La distance de réaction est la distance parcourue entre le temps où Teva voit l'obstacle et le moment où il va ralentir ou freiner.

Teva est en bonne santé, il lui faut une seconde en moyenne pour réagir.

A Première partie

1 Si Teva roule à 54 km/h ,

a. quelle distance en mètres parcourt-il en une heure ?

b. quelle distance en mètres parcourt-il en une seconde ?

En déduire la distance de réaction de Teva s'il roule à 54 km/h .

2 On admettra que la distance de réaction se calcule avec la formule suivante : $d_R = v \times \frac{5}{18}$

où d_R est la distance de réaction en mètres et v est la vitesse en km/h .

Reproduire et compléter le tableau suivant :

Vitesse en km/h	45	54	90	108
Distance de réaction en mètres				

B Seconde partie

On appelle x la vitesse, exprimée en km/h , à laquelle peut rouler un conducteur.

1 Exprimer, en fonction de x , la distance de réaction $d(x)$.

2 a. Sur une feuille de papier millimétré, tracer un repère (O, I, J) en plaçant l'origine O en bas à gauche et en prenant pour unité en abscisse, 1 cm pour 10 km/h et en ordonnée, 1 cm pour 2 m .

b. Dans le repère (O, I, J) , tracer la représentation graphique de la fonction d définie par $d(x) = \frac{5}{18}x$.

3 Un conducteur roule à la vitesse de 30 km/h .

a. Déterminer graphiquement la vitesse de réaction de ce conducteur. On laissera apparents les traits de construction.

b. Retrouver le résultat de la question précédente par le calcul. Le présenter sous forme de fraction irréductible, puis l'arrondir à l'unité.

4 En utilisant le graphique (on laissera apparents les traits de construction), donner la vitesse à partir de laquelle la distance de réaction est supérieure à 20 m .

Fonction affine

28 Indiquer si les fonctions proposées sont des fonctions affines. Préciser alors le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

• $f_1 : x \mapsto 3x - 5$

• $f_2 : x \mapsto 2x(x - 5)$

• $f_3 : x \mapsto x\sqrt{5} - 0,5$

• $f_4 : x \mapsto (3 - x)(x - 5) + x^2$

29 Soit f la fonction affine définie par $f(x) = \frac{5}{4}x - 2$.

1 Déterminer les images par f des nombres 0 ; -2 ; $\frac{16}{5}$.

2 Quel est l'antécédent par f du nombre 0 ?

30 Soit f la fonction affine définie par $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$.

Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-3		$\frac{4}{9}$		-10^2	$\sqrt{6}$
$f(x)$		0		$-\frac{17}{5}$		

Pour les exercices **31** à **33**, déterminer les fonctions affines vérifiant :

31 $f(0) = 3$ et $f(-1) = 6$.

32 L'image de 5 est $-\frac{4}{3}$ et l'antécédent de 8 est -9 .

33 L'image de $\sqrt{5}$ est 6 et celle de $\sqrt{20}$ est 11 .

34 Math et sciences physiques

Soit un ressort de longueur 10 cm à vide, c'est-à-dire qui mesure 10 cm quand aucun objet n'y est suspendu.

On appelle élongation du ressort la différence entre la longueur du ressort auquel est attaché un objet de masse x , en kg , et la longueur du ressort à vide.

L'élongation du ressort est proportionnelle à la masse que l'on y suspend. On désigne par a le coefficient de proportionnalité.

1 a. Supposons que $a = 0,4 \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$. Exprimer la fonction linéaire f qui, à la masse x , associe l'élongation du ressort.

b. Quelle est son élongation lorsqu'on suspend à son extrémité libre une masse de 500 g ?

2 On s'intéresse à la longueur totale du ressort. Exprimer la longueur totale du ressort en fonction de la longueur à vide, de la masse x de l'objet et de la constante de raideur.



Exercices

Représentation graphique d'une fonction affine

35 Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 2x - 1$ et d sa droite représentative.

1 Montrer par le calcul que les points $A(0 ; -1)$ et $B(2 ; 3)$ appartiennent à la droite d .

2 Placer les points A et B dans le repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm, puis tracer la droite d .

36 **1** Dans le repère orthonormal (O, I, J) , on donne les points $A(3 ; 6)$, $B(-1 ; 3,33)$, $C(-12 ; 12)$ et $D(48 ; -28)$. Chacun de ces quatre points appartient-il à la droite d représentant la fonction affine f définie par $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$?

37 Dans le repère orthonormal (O, I, J) , on appelle d la droite représentant la fonction affine h définie par $h(x) = \frac{6}{5} - 2x$.

1 Le point A d'abscisse $\frac{1}{5}$ appartient à la droite d . Quelle est son ordonnée ?

2 Le point B d'ordonnée 0 appartient à la droite d . Quelle est son abscisse ?

3 Le point C d'ordonnée $\frac{8}{15}$ appartient à la droite d . Quelle est son abscisse ?

4 Le point D d'abscisse $1 - 2\sqrt{3}$ appartient à la droite d . Quelle est son ordonnée ?

Pour les exercices 38 et 39, construire un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm, puis représenter graphiquement dans des couleurs différentes chaque fonction affine.

38 • $f_1 : x \mapsto 3x - 5$ • $f_2 : x \mapsto \frac{5}{2}x + 1$ • $f_3 : x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2$

39 • $f_1 : x \mapsto 3 - \frac{2}{3}x$ • $f_2 : x \mapsto \frac{4}{5}x - \frac{7}{2}$ • $f_3 : x \mapsto 1,4 - \frac{3}{2}x$

40 **1** Dans un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm, sur du papier millimétré, représenter graphiquement dans des couleurs différentes les fonctions affines suivantes :

• $f_1 : x \mapsto 1,2x - 5$ • $f_2 : x \mapsto 1,2x$
• $f_3 : x \mapsto 1,2x + 3$ • $f_4 : x \mapsto 1,2x + \frac{2}{5}$

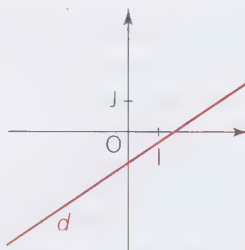
2 Que peut-on dire des droites d_1, d_2, d_3, d_4 représentant les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 ?

3 Justifier cette observation.

41 La droite d ci-contre est la représentation graphique d'une fonction affine f .

Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

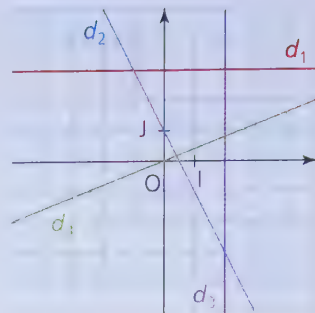
x	-3		1,5
$f(x)$		1	-1



42 **1** Parmi les quatre droites ci-contre, trois d'entre elles représentent des fonctions affines. Lesquelles ?

2 Quelle droite représente une fonction linéaire ?

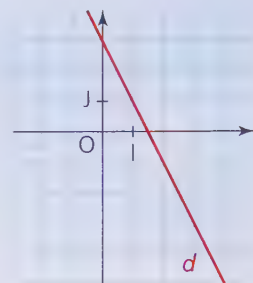
3 Quelle droite représente une fonction constante ?



43 **1** Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite d ?

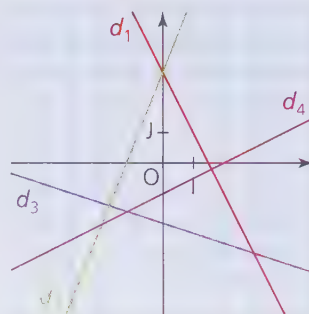
2 Quel est son coefficient directeur ?

3 On appelle f la fonction affine représentée par la droite d . Exprimer $f(x)$ en fonction de x .



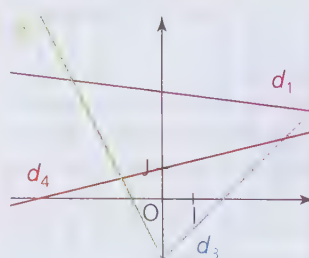
44 **1** Pour chacune des droites ci-contre donner son ordonnée à l'origine et son coefficient directeur.

2 En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x pour chacune des fonctions affines f représentées.



45 **1** Pour chacune des droites ci-contre, donner son ordonnée à l'origine et son coefficient directeur.

2 En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x pour chacune des fonctions affines f représentées.



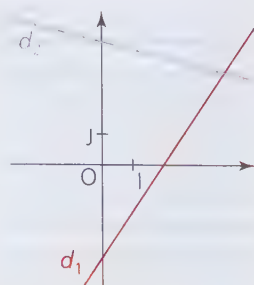
46 La droite d_1 représente la fonction affine f et la droite d_2 la fonction affine g .

1 Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

2 Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

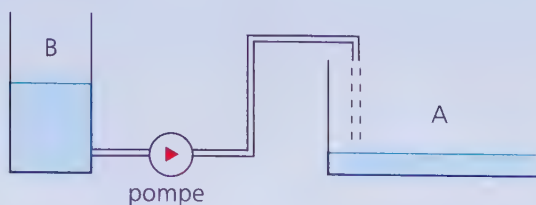
3 a. Déterminer en fonction de x l'expression de $f(x)$ et celle de $g(x)$.

b. Retrouver par le calcul les résultats des questions **1** et **2**.



47 Vu au brevet

On transfère le pétrole contenu dans un réservoir B vers un réservoir A à l'aide d'une pompe.



Après démarrage de la pompe, on constate que la hauteur de pétrole dans le réservoir A augmente de 3 cm par minute. Le réservoir A est vide au départ.

A Remplissage du réservoir A

1 Recopier et compléter le tableau suivant :

Temps en minutes	0	10	20	30	40
Hauteur de pétrole dans le réservoir A en cm	0		60		

2 On appelle x le temps (en min) de fonctionnement de la pompe et $f(x)$ la hauteur du pétrole (en cm) dans le réservoir A.

Parmi les trois fonctions suivantes laquelle correspond à la fonction f ?

$x \mapsto -2x$ $x \mapsto 3x + 20$ $x \mapsto 3x$

3 Représenter graphiquement la fonction f , pour x variant de 0 à 40, sur une feuille de papier millimétré. Le repère sera tel que :

– en abscisse : 2 cm représenteront 5 minutes ;
– en ordonnée : 1 cm représentera une hauteur de 10 cm de pétrole dans le réservoir A.

4 Déterminer graphiquement le temps nécessaire pour obtenir une hauteur de 105 cm dans le réservoir A (on fera apparaître les tracés sur le graphique).

B Vidange du réservoir B

Au départ, le réservoir B est rempli de pétrole jusqu'à une hauteur de 2 m. Après le démarrage de la pompe, le niveau du pétrole baisse de 5 cm par minute.

1 Recopier et compléter le tableau suivant :

Temps (en minutes)	0	10		40
Hauteur de pétrole dans le réservoir B (en cm)	200		80	

2 On appelle x le temps (en min) de fonctionnement de la pompe et $g(x)$ la hauteur du pétrole (en cm) dans le réservoir B.

Parmi les trois fonctions suivantes, laquelle correspond à la fonction g ?

$x \mapsto -4x$ $x \mapsto 3x + 200$ $x \mapsto -5x + 200$

3 Déterminer par le calcul le temps au bout duquel les hauteurs de pétrole dans les réservoirs A et B sont égales.

4 Expliquer comment on peut retrouver graphiquement ce dernier résultat.

48 Vu au brevet

Une station de ski propose les tarifs suivants pour la saison :

- Tarif A : chaque journée de ski coûte 20 €.
- Tarif B : en adhérant au club des sports dont la cotisation annuelle s'élève à 60 €, on bénéficie d'une réduction de 30 % sur le prix de chaque journée à 20 €.

1 Yann est adhérent au club des sports. Sachant qu'il a déjà payé sa cotisation annuelle, expliquer pourquoi il devra payer 14 euros par journée de ski.

2 On appelle x le nombre de journées de ski effectuées durant la saison, f la fonction qui à x associe le coût de la saison pour un utilisateur ayant choisi le tarif A et g la fonction qui à x associe le coût de la saison pour un utilisateur ayant choisi le tarif B.

Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x .

3 Sachant que Yann, adhérent au club, a dépensé au total 242 €, combien de jours a-t-il skié ?

4 Représenter graphiquement sur papier millimétré les fonction f et g dans un repère orthogonal en prenant :

- en abscisse : 1 cm pour un jour de ski ;
- en ordonnée : 1 cm pour 20 €.

5 Dans cette partie, on répondra en utilisant les représentations graphiques de la question précédente (faire apparaître les traits de construction nécessaires).

a. Léa doit venir skier douze journées pendant la saison. Quel est pour elle le tarif le plus intéressant ? Quel est le prix correspondant ?

b. En étudiant les tarifs de la saison, Chloé constate que, pour son séjour, les tarifs A et B sont égaux. Combien de journées de ski prévoit-elle de faire ? Quel est le prix correspondant ?

Interprétation graphique de systèmes de deux équations à deux inconnues

49 On considère le système de deux équations à deux inconnues :
$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ -3x + y = 4 \end{cases}$$

1 On appelle f la fonction affine qui à x associe y tel que $2x - 3y = 9$ et g la fonction affine qui à x associe y tel que $-3x + y = 4$.

a. Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x .

b. Dans un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm, représenter les fonctions f et g .

c. Résoudre graphiquement le système donné.

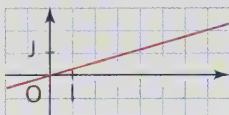
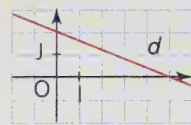
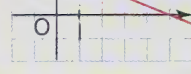
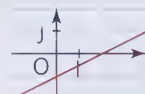
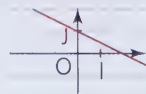
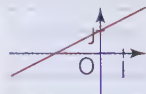
2 Résoudre par le calcul le système
$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ -3x + y = 4 \end{cases}$$
 afin de retrouver la solution précédente.

50 1 Résoudre par le calcul le système
$$\begin{cases} -3x + y = 10 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$$

2 Retrouver la solution du système graphiquement.

Faire le point

51 QCM Indiquer, dans chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les trois réponses proposées.

		A	B	C
1	Quelles sont les fonctions linéaires parmi les trois proposées ?	$f: x \mapsto 2x^2$	$g: x \mapsto 2x$	$h: x \mapsto \frac{2}{x}$
2	Soit la fonction linéaire $g: x \mapsto \frac{-2}{3}x$. L'antécédent de -4 par g est :	6	$\frac{8}{3}$	10
3	Le prix P d'une baguette a augmenté de 5 %. Son nouveau prix est :	1,05P	0,05P	1,5P
4	Un article qui valait 50 € est soldé à 40 €. Le pourcentage de réduction est :	10 %	20 %	25 %
5	La droite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction : 	$f: x \mapsto \frac{7}{2}x$	$g: x \mapsto -\frac{2}{7}x$	$h: x \mapsto \frac{2}{7}x$
6	La fonction affine f telle que $f(1) = 4$ et $f(-3) = 2$ est définie par :	$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$	$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
7	 La droite d ci-contre a pour ordonnée à l'origine :	5	2	$\frac{2}{5}$
8	 La droite d ci-contre a pour coefficient directeur :	$\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
9	La représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x) = -0,5x + 1$ est :			

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

• Calcul d'images et d'antécédents

52 Soit g la fonction affine qui au nombre x associe $g(x) = 2,5x - 4$.

- Calculer les images par g des nombres 0, -2 et 5.
- Quel est l'antécédent par g de 0 ? de 1 ? de 10 ?

• Déterminer une fonction

53 Déterminer la fonction affine f telle que $f(-1) = 1$ et $f(6) = -2$.

• Utilisation des fonctions affines dans un problème

54 Un club de sport propose trois formules différentes :
 – Tarif A : payer 5 € par séance ;
 – Tarif B : prendre une carte d'abonné à 70 € et chaque séance coûte alors 2 € ;
 – Tarif C : prendre un forfait de 150 € pour toute l'année.
 On appelle x le nombre de séances effectuées, f la fonction qui à x associe le prix à payer si l'on choisit le

tarif A, g la fonction qui à x associe le prix à payer si l'on choisit le tarif B et h la fonction qui à x associe le prix à payer si l'on choisit le tarif C.

- Déterminer, en fonction de x , $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.
- Dans un repère orthogonal, en prenant pour unité sur l'axe des abscisses 1 cm pour cinq séances et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 50 €, représenter les fonctions f , g et h .
- À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :
 a. À partir de combien de séances le tarif B est-il plus intéressant que le tarif A ?
 b. À partir de combien de séances le tarif C est-il plus intéressant que le tarif B ?
- Résoudre chacune des inéquations $g(x) \leq f(x)$ et $h(x) \leq g(x)$ et retrouver par le calcul les résultats de la question précédente.

Approfondir

- 55** Parmi les tableaux de valeurs ci-dessous, indiquer lesquels pourraient être associés à une fonction linéaire. Préciser alors le coefficient de cette fonction.

a.

x	-4×10^4	$0,5 \times 10^{-2}$	$1,1 \times 10^{-5}$	2×10^7	12×10^6
$f(x)$	-4×10^2	$0,5 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^{-7}$	2×10^5	12×10^4

b.

x	12×10^3	$0,145 \times 10^{-2}$	48×10^{-4}	$16,55 \times 10^{-1}$	$1,78 \times 10^2$
$f(x)$	$2,4 \times 10^5$	2,9	9,6	18,55	3560

c.

x	$1 + \sqrt{3}$	$1 - \sqrt{3}$	$\sqrt{3} - 1$	$2\sqrt{3} + 6$	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$
$f(x)$	$4 + 2\sqrt{3}$	-2	2	$12 + 8\sqrt{3}$	$\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$

- 56** Déterminer le coefficient de la fonction linéaire f dans chacun des cas suivants. Écrire le coefficient sans radical au dénominateur.

a. $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{5}$ b. $f(1 + \sqrt{2}) = -1$ c. $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{5}{12}$

- 57** À chacun de ses anniversaires depuis celui de ses dix ans, la grand-mère de Vincent lui donne 45 € qu'il ne dépense pas.

① Au lendemain de son dix-huitième anniversaire, Vincent décide de placer cette somme sur son livret jeune dont le taux d'intérêt s'élève à 4 %. Quelle somme y aura-t-il sur ce livret la veille de ses dix-neuf ans ?

② Le jour de ses dix-neuf ans, la grand-mère de Vincent lui donne à nouveau 45 € qu'il place aussitôt sur son livret. Il souhaite alors acheter un ampli haut de gamme pour sa guitare électrique. Cet ampli coûte 500 €, pourra-t-il faire cet achat ?

③ Pourra-t-il acheter l'ampli après son vingtième anniversaire avec ou sans l'argent que sa grand-mère lui donnera à cette occasion ?

- 58** L'unité est le centimètre.

ABCD est un trapèze rectangle de bases [AB] et [DC] et de hauteur [AD] tel que :

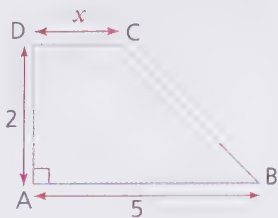
AB = 5, DC = x et AD = 2.

① Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du trapèze ABCD en fonction de x .

② La fonction qui au nombre x associe l'aire $\mathcal{A}$ est-elle une fonction affine ? Si oui, préciser son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

③ Quelle valeur faut-il donner à x pour que l'aire $\mathcal{A}$ soit égale à 20 cm² ?

④ Pour quelles valeurs de x l'aire $\mathcal{A}$ est-elle inférieure à 25 cm² ?



- 59** Une piscine extérieure mesure 25 m de long, 10 m de large et sa profondeur est de 1,5 m.

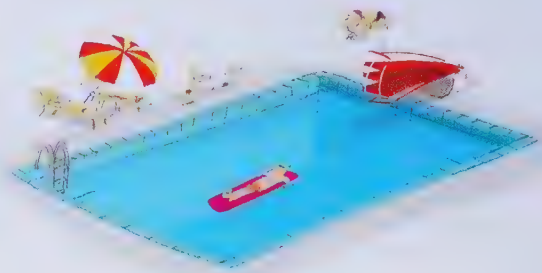
① De quel volume d'eau, en m³, a-t-on besoin pour la remplir à ras bords ?

② Chaque jour, à cause de l'évaporation, le niveau d'eau baisse de 1 cm.

a. Déterminer le volume $V(x)$ d'eau restant dans la piscine après un nombre x de jours. La fonction V qui à x associe $V(x)$ est-elle une fonction affine ?

b. Quel volume d'eau reste-t-il dans la piscine au bout de 5 jours ?

c. Au bout de combien de jours la piscine n'est-elle plus qu'à moitié remplie ?



- 60** L'unité choisie est le centimètre.

ABC est un triangle rectangle en A, tel que AB = 8 et AC = 6. Le point M est un point du segment [AB]. On pose AM = x .

① Entre quelles valeurs varie le nombre x ?

② Soit f la fonction qui à x associe l'aire du triangle AMB.

Exprimer $f(x)$ en fonction de x . Quelle est la nature de la fonction f ?

③ Soit g la fonction qui à x associe l'aire du triangle BMC. Exprimer $g(x)$ en fonction de x . Quelle est la nature de la fonction g ?

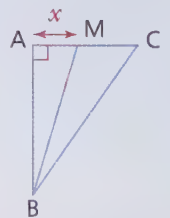
④ Dans un repère orthogonal en prenant pour unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées, représenter graphiquement les fonctions f et g .

⑤ Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
a. Si $x = 2$, quelle est la valeur de l'aire du triangle AMB et de celle du triangle BMC ?

b. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle BMC est-elle égale à 15 cm² ? Quelle est alors la valeur de l'aire du triangle AMB ?

c. Pour quelles valeurs de x l'aire du triangle AMB est-elle supérieure à celle du triangle BMC ? Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

⑥ Retrouver les résultats de la question ⑤ par le calcul.



Exercices

- 61** On souhaite représenter la fonction affine f définie par :
 $f(x) = 0,2x + 0,03$.

1 Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	0	3	4
$f(x)$					

2 Parmi les repères orthogonaux (O, I, J) suivants lequel semble être le plus approprié pour représenter f ?

- a. $OI = 0,1$ cm et $OJ = 10$ cm.
- b. $OI = OJ = 1$ cm.
- c. $OI = 1$ cm et $OJ = 0,1$ cm.
- d. $OI = 2$ cm et $OJ = 20$ cm.

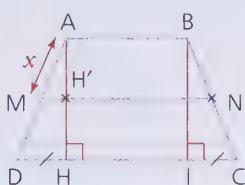
3 Dans le repère choisi, tracer la représentation graphique de f .

- 62** L'unité choisie est le centimètre.

ABCD est un trapèze isocèle de bases $[AB]$ et $[CD]$ telles que $AB = 5$ et $CD = 17$ et de hauteur $AH = 8$.

M est un point du segment $[AD]$. On pose $AM = x$.

La droite passant par M et parallèle à la droite (DC) coupe le segment $[BC]$ en N. Les droites (MN) et (AH) se coupent en H' .



1 Calculer la longueur AD. En déduire un encadrement de x .

2 a. Déterminer en fonction de x les longueurs AH' et MH' .

b. Montrer que la fonction p_1 qui à x associe le périmètre du trapèze ABNM est une fonction affine.

c. Montrer que la fonction p_2 qui à x associe le périmètre du trapèze DMNC est une fonction affine.

3 Pour quelles valeurs de x a-t-on $p_1(x) \leq p_2(x)$?

- 63** Pour accéder à l'année supérieure, Noémie a passé un examen comportant deux épreuves A et B. Le coefficient de l'épreuve A est 2, celui de l'épreuve B est 3.

1 a. Noémie a obtenu 8 à l'épreuve A et 12 à l'épreuve B. Sa moyenne est-elle égale à 10 ?

b. Sa moyenne serait-elle égale à 10 si elle avait eu 12 à l'épreuve A et 8 à l'épreuve B ?

2 On appelle x la note de Noémie à l'épreuve A et y la note qu'elle a obtenue à l'épreuve B.

Montrer que si Noémie a eu 10 de moyenne à cet examen alors $y = \frac{50}{3} - \frac{2}{3}x$.

3 Pour tout x compris entre 0 et 20, on définit la fonction

$$f \text{ par } f(x) = \frac{50}{3} - \frac{2}{3}x.$$

Représenter la fonction f dans un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm.

4 Les notes données à l'examen sont sur 20 et sont des nombres entiers. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a. Si Noémie obtient 9 à l'épreuve A, quelle note minimale doit elle obtenir à l'épreuve B pour réussir son examen ?

b. Si Noémie obtient 6 à l'épreuve B, quelle note minimale doit elle obtenir à l'épreuve A pour réussir son examen ?

5 Pierre a également passé cet examen et souhaite obtenir la mention « assez bien », c'est-à-dire obtenir une moyenne supérieure ou égale à 12.

a. Peut-il se servir de la représentation graphique obtenue à la question **3** pour déterminer la note minimale qu'il doit avoir à l'épreuve B sachant qu'il a eu 7 à l'épreuve A ?

b. Soient x la note que Pierre a obtenue à l'épreuve A et g la fonction associant à x la note qu'il doit obtenir à l'épreuve B pour avoir 12 à l'examen. Exprimer $g(x)$ en fonction de x , puis répondre à la question précédente.

64 Vu au brevet

L'unité choisie est le centimètre.

ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 10$ et $BC = 8$.

A Première partie

Dans cette partie, on place sur le segment $[AB]$ le point E tel que $BE = 3$ et on trace la parallèle à la droite (AC) passant par E qui coupe le segment $[BC]$ en F.

1 Calculer les longueurs FE et BF.

2 Calculer la longueur FC. Le triangle EFC est-il isocèle en F ?

B Deuxième partie

Dans cette partie, on place sur le segment $[AB]$ un point E tel que $BE = x$ où x est un nombre positif et on trace la parallèle à la droite (AC) passant par E qui coupe le segment $[BC]$ en F.

1 Quelles sont les valeurs possibles de x ? Donner la réponse sous forme d'un encadrement de x .

2 Exprimer les longueurs FE et BF en fonction de x .

En déduire que $FC = 8 - 1,6x$.

3 Résoudre l'équation $8 - 1,6x = 2x$.

Donner la solution sous la forme d'une fraction irréductible.

4 On prend pour x la valeur trouvée à la question précédente.

a. Justifier que le triangle EFC est isocèle en F.

b. Prouver que la droite (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

C Troisième partie

On considère les fonctions f et g définie par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 8 - 1,6x$.

1 Construire les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormal en se limitant aux valeurs de x comprises entre 0 et 5.

2 Utiliser ces représentations graphiques pour déterminer un encadrement par deux nombres entiers consécutifs de la solution trouvée dans la question **3** de la deuxième partie ; on laissera apparents les traits de construction.

65 Vu au brevet

A Première partie

Un réservoir est constitué d'une pyramide régulière à base carrée surmontée d'un parallélépipède rectangle.

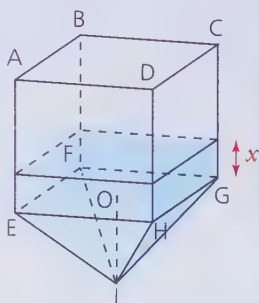
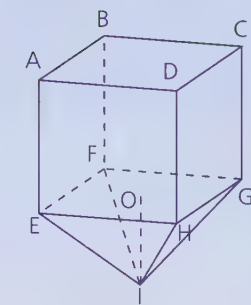
L'unité étant le mètre, on donne $AB = BC = 2$, $AE = 5$ et la hauteur OI de la pyramide est $OI = 1,5$.

- 1 Calculer en m^3 le volume de la pyramide.
- 2 Calculer le volume du réservoir lorsqu'il est plein.

B Deuxième partie

On remplit d'eau ce réservoir. La partie pyramidale étant entièrement pleine, on appelle x la hauteur d'eau dans le parallélépipède rectangle.

- 1 Quelles sont les valeurs de x possibles ? Donner la réponse sous forme d'un encadrement de x .
- 2 Montrer que le volume d'eau dans le réservoir est donné par la fonction affine V définie par : $V(x) = 4x + 2$.
- 3 Représenter graphiquement la fonction V dans un repère orthogonal en prenant 1 cm pour 0,5 m en abscisse et 1 cm pour 2 m^3 en ordonnée.
- 4 Lire graphiquement pour quelle valeur de x le volume d'eau est égal à 12 m^3 .
- 5 a. Trouver par le calcul le volume d'eau dans le réservoir lorsque x vaut 1,8 m.
b. Quel est alors le pourcentage de remplissage du réservoir ? (arrondir à l'unité).



- 66 Soit f la fonction définie par $f(x) = 11 - 3x$ et g la fonction définie par $g(x) = -2x$.

- 1 Représenter graphiquement les fonctions f et g dans un repère orthonormal (O, I, J) tel que $OI = OJ = 1$ cm.
- 2 Déterminer graphiquement la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
- 3 Un groupe de huit personnes, six enfants et deux adultes, visitent une exposition. Le prix total des huit billets d'entrée est de 22 euros. Trois autres personnes, deux enfants et un adulte, visitent la même exposition. Le prix total de leurs trois billets d'entrée est de 9 euros. On appelle x le prix en euros du billet d'entrée d'un enfant et y celui du billet d'entrée d'un adulte.
a. Écrire un système permettant de déterminer x et y .
b. Expliquer comment résoudre ce système à l'aide de la question 2.
c. Résoudre par le calcul le système trouvé à la question 3 a.

Argumenter et débattre

- 67 Le prix d'un objet est augmenté de 20 % puis diminué de 20 %.
1 Après cette baisse cet objet est-il au même prix qu'avant l'augmentation ? Justifier votre réponse.
2 Quel est le pourcentage d'augmentation ou de réduction du prix par rapport au prix initial ?
- 68 Un flacon contient 250 mL de shampoing et coûte 6,5 €. Lors d'une promotion, ce flacon est vendu au même prix et contient 10 % de produit en plus. Quelle est, en pourcentage, la diminution du prix du litre de shampoing ? Arrondir le résultat à l'unité.

POUR LES CURIEUX

Une automobile consomme de l'essence constituée d'un mélange de divers composés de carbone et d'hydrogène. On peut admettre, avec une bonne approximation, que ce mélange contient deux fois plus d'atomes d'hydrogène que d'atomes de carbone. Grâce à l'apport d'oxygène de l'air, le fonctionnement du moteur rejette, entre autres, pour chaque atome de carbone du carburant, une molécule de dioxyde de carbone, constituée de l'atome de carbone en question et de deux atomes d'oxygène. Le dioxyde de carbone est un gaz à effet de serre rejeté dans l'atmosphère. On sait que la masse d'un atome de carbone est égale à douze fois celle d'un atome d'hydrogène et que la masse d'un atome d'oxygène est égale à seize fois celle d'un atome d'hydrogène.

- 1 Montrer que le total des masses d'un atome de carbone et de deux atomes d'hydrogène est égal à 14 fois celle d'un atome d'hydrogène et que la masse d'une molécule de dioxyde de carbone est égale à 44 fois celle d'un atome d'hydrogène.

- 2 En déduire que la masse d'une molécule de dioxyde de carbone est égale à $\frac{44}{14}$ fois celle des masses d'un atome de carbone et de deux atomes d'hydrogène.
- 3 La densité de l'essence est de 0,7 kg/L et la voiture d'Amélie consomme en moyenne 6 litres d'essence pour 100 kilomètres parcourus.
a. Pour un trajet de x centaines de kilomètres, exprimer en fonction de x la masse, de gaz à effet de serre rejetée par le moteur de la voiture d'Amélie en kilogrammes.
b. Amélie effectue les 460 km qui séparent Paris de Lyon. Quelle masse, en kilogrammes, de gaz à effet de serre est rejetée par sa voiture ?



Comparer les valeurs de deux fonctions

Dans un magasin, une cartouche d'encre pour imprimante coûte 15 €. Sur un site Internet, cette même cartouche coûte 10 €, avec des frais de livraison fixes de 40 € quel que soit le nombre x de cartouches achetées.

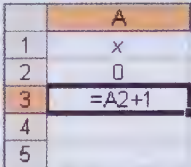
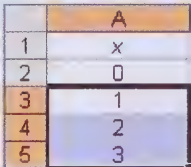
On appelle P_M le prix à payer pour l'achat de x cartouches en magasin. On a donc : $P_M = 15x$.

On appelle P_I le prix à payer, en comptant la livraison, pour l'achat de x cartouches par Internet. On a donc : $P_I = 10x + 40$.

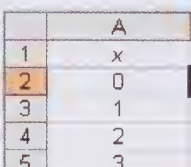
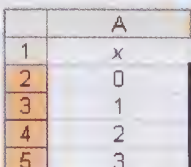
On se propose de déterminer la formule la plus avantageuse pour l'achat de x cartouches entre l'achat dans le magasin et l'achat par Internet.

1 Utilisation du tableur

1. Colonne A

a. Dans la cellule A1 , on entre le titre de la colonne A .	Entrer x en A1 .	
b. Dans la cellule A2 , on entre la première valeur possible de x .	Entrer 0 en A2 .	
c. Dans la cellule A3 , on entre la formule permettant de passer de la cellule A2 à la cellule A3 en ajoutant 1.	Entrer la formule $=A2+1$ en A3 .	
d. On étend la formule entrée en A3 aux cellules de A4 à A17 .	Cliquer sur A3 , positionner le curseur sur le coin en bas à droite de la cellule, saisir la croix noire et étendre la formule jusqu'à la cellule A17 .	

2. Colonne B

a. Dans la cellule B1 , on entre le titre de la colonne.	Entrer PM en B1 .	
b. Dans la cellule B2 , on entre la formule permettant de calculer P_M en fonction de x .	Entrer la formule : $=15*A2$ en B2 .	
c. On étend la formule entrée dans la cellule B2 aux cellules B3 à B17 .	Cliquer sur B2 , saisir la croix noire et étirer la formule jusqu'à la cellule B17 .	

3. Colonne C

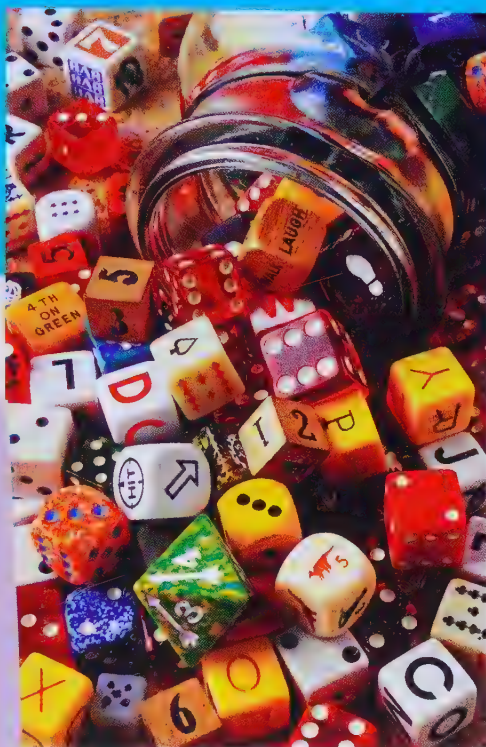
Procéder de la même manière que pour la colonne **B** mais entrer dans la cellule **C1** le titre de la colonne **C** : P_I , puis entrer la formule « $=10*A2+40$ » dans la cellule **C2**. Étendre la cellule **C2** jusqu'à la cellule **C17**.

2 Exploitation des résultats

1. Quel est le prix le plus avantageux pour l'achat de 6 cartouches ?
2. Sonia dispose de 80 € pour acheter des cartouches. Est-il plus avantageux pour elle d'acheter des cartouches en magasin ou par Internet ?
3. À partir de quel nombre de cartouches le prix sur Internet est-il inférieur ou égal à celui en magasin ?

9

Statistiques et probabilités



Les statistiques et les probabilités sont nées avec les jeux. Un des **jeux de hasard** les plus anciens est le jeu de **dés**. Dans les dés modernes, la somme des chiffres sur deux **faces opposées est égale à 7**, ce qui n'est pas le cas pour tous les dés.

Si les chiffres sont **figurés par des points** sur les faces d'un **dé**, c'est que ce jeu a été **inventé avant** l'écriture des chiffres arabes.

Les statisticiens doivent faire très attention à la manière dont ils élaborent une **série statistique**. Supposons qu'ils veuillent déterminer le nombre moyen d'enfants par famille dans une région. S'ils **interrogent les adultes**, ils obtiendront une série de données et un premier nombre moyen, et s'ils **interrogent les enfants**, ils obtiendront une série de données différente et un nombre moyen supérieur. À votre avis, **pourquoi ?**

Je suis désolé,
je ne peux pas
compter ton chien!

Dans une pièce pavée **de carreaux égaux**, on jette en l'air un écu. L'un des joueurs parie que cet écu se trouvera à « **franc carreau** » après sa chute, c'est-à-dire sur un seul carreau. Quelle est la **probabilité** que ce joueur gagne à ce jeu ? La réponse n'est pas facile à donner ! C'est d'ailleurs avec ce problème que **Buffon** (1707-1788) envisagea pour la **première fois des calculs de probabilités** liés à une mesure : pour calculer cette probabilité, il faut considérer l'aire du carreau et la taille de l'écu...



QCM Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

Voici la répartition des notes obtenues par les élèves de troisième d'un collège à un devoir commun :

Note	]0 ; 4]	]4 ; 8]	]8 ; 12]	]12 ; 16]	]16 ; 20]
Effectif	24	45	52	42	29

		A	B	C
1	L'effectif total est :	52	192	5
2	Combien d'élèves ont eu une note inférieure ou égale à 12 ?	121	3	12
3	Le centre de la classe]4 ; 8] est :	4	6	8
4	Pour calculer la valeur approchée de la moyenne de ces notes, on calcule :	la moyenne simple des centres des classes	la moyenne pondérée des centres des classes	la somme des centres
5	La fréquence de la classe]16 ; 20] est :	$\frac{1}{5}$	$\frac{29}{5}$	$\frac{29}{192}$
6	Le pourcentage d'élèves qui ont strictement plus de 12 est environ :	12 %	37 %	40 %

Exercice 1 Les montants des retraits à un guichet automatique sur une journée sont donnés dans le tableau suivant :

Montant en euros	20	30	40	50	70	100
Effectif	35	43	25	38	5	15

- Combien y a-t-il eu de retraits dont le montant est inférieur ou égal à 50 euros ?
- Quel est le pourcentage de retraits dont le montant est strictement supérieur à 40 euros ? Arrondir à l'unité.
- Calculer le montant moyen des retraits de la journée. Arrondir à la dizaine.

Exercice 2 Voici le tableau incomplet donnant les résultats de l'étude de la taille, en cm, des élèves de troisième d'un collège.

Taille	[150 ; 156[	[156 ; 162[	[162 ; 168[	[168 ; 174[	[174 ; 180[	Total
Effectif	16	29	38	---	12	120
Centre	153	---	---	---	---	
Produit	2 448	---	---	---	---	---

- Recopier et compléter le tableau.
- À l'aide des résultats de la dernière ligne, calculer la taille moyenne des élèves de troisième de ce collège.
- Tracer l'histogramme correspondant à ce tableau.

Exercice 3 Deux nombres ont pour moyenne 10 et trois autres nombres ont pour moyenne 14.

- Quelle est la somme des deux premiers nombres ? Et des trois suivants ?
- Quelle est la moyenne des cinq nombres ?

Activité 1 Médiane

A Partage en deux

- 1 En 1973, la Communauté Économique Européenne (CEE) comprenait 9 États dont les densités, en hab/km², de population sont données ci-dessous :

Allemagne	230,85	Belgique	343,06	Danemark	126,24
France	112,22	Italie	192,93	Irlande	57,81
Luxembourg	183,45	Pays-Bas	437,60	Royaume Uni	246,24

Effectif total $N = 9$ est impair. La médiane correspond à la $\frac{N+1}{2}$ ième valeur de la série ordonnée.

- Ranger ces densités par ordre croissant.
- On veut répartir les pays en deux groupes, l'un étant constitué des pays de plus faible densité et l'autre des pays de plus forte densité. Ces deux groupes peuvent-ils avoir le même effectif ?
- Quel est le pays que l'on pourrait placer dans l'un ou l'autre groupe ? Quelle est la position de la densité de ce pays dans la série ordonnée ? La valeur de cette densité permet de partager la série en deux groupes de même effectif, on l'appelle la **médiane** de cette série de densités.

Généralement, si l'effectif total N est pair, on choisit la moyenne des valeurs des rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$ comme valeur médiane.

- 2 La Grèce en 1981, puis l'Espagne et le Portugal en 1986, rejoignent la CEE. Les densités de ces trois pays sont respectivement 83,69 hab/km² ; 89,16 hab/km² et 115,40 hab/km².

- Ranger les densités des 12 pays par ordre croissant.
- Partager la série ordonnée en deux groupes de même effectif.
- Donner une valeur telle qu'il y ait autant de pays ayant une densité de population inférieure à cette valeur que de pays ayant une densité de population supérieure à cette valeur. Toutes les valeurs répondant à la question précédente peuvent être considérées comme une **médiane** de la série ordonnée.

- 3 Supposons que la population de l'Irlande ait été plus importante et que sa densité de population ait été égale à 98 hab/km².

- Quelle remarque peut-on faire à propos de la médiane de cette nouvelle série de densités ?
- Peut-on faire la même remarque au sujet de la moyenne ?

B Tableau d'effectifs

Dans un collège, on a interrogé les élèves sur le nombre d'enfants dans leur famille.

Nombre d'enfant(s)	1	2	3	4	5	6 et plus
Effectif	18	25	20	11	5	3

- On considère les familles ayant au plus trois enfants, c'est-à-dire ayant un, deux ou trois enfants. Quel est le nombre d'élèves appartenant à une telle famille ? Ce nombre correspond à l'**effectif cumulé croissant** des familles ayant au plus trois enfants.
- Reproduire le tableau en ajoutant et en complétant la ligne des effectifs cumulés croissants.
- D'après la ligne des effectifs cumulés croissants, combien d'élèves appartiennent à des familles ayant au plus quatre enfants ?
- On ordonne les élèves par ordre croissant du nombre d'enfants dans leur famille. Combien y a-t-il d'enfants dans les familles des 63^e et 64^e élèves ?
- Quel est le nombre d'enfants dans la famille du 41^e élève et du 42^e élève de la série ordonnée dans l'ordre croissant ? En déduire la médiane de cette série statistique.

On calcule la **fréquence cumulée croissante** en effectuant le quotient de l'effectif cumulé croissant correspondant par l'effectif total.

C Polygone des effectifs cumulés

Une administration a relevé les distances parcourues en une année par les 150 véhicules de son parc automobile.

Distance	Effectif
$0 < d \leq 5\,000$	10
$5\,000 < d \leq 10\,000$	16
$10\,000 < d \leq 15\,000$	34
$15\,000 < d \leq 20\,000$	43
$20\,000 < d \leq 25\,000$	23
$25\,000 < d \leq 30\,000$	15
$30\,000 < d \leq 35\,000$	...

1 Reproduire et compléter ce tableau en ajoutant les colonnes des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes.

2 Dans quelle classe se trouve la médiane de cette série statistique ?

a. Sur une feuille de papier millimétré, tracer un repère (placer l'origine en bas et à gauche), puis graduer l'axe des abscisses en prenant 2 cm pour 5 000 km et l'axe des ordonnées en prenant 1 cm pour 10 véhicules.

b. Placer les points de coordonnées (0 ; 0) et (5 000 ; 10), (10 000 ; 26) et (15 000 ; 60). On admet que les valeurs à l'intérieur d'une classe sont uniformément réparties, cela signifie que l'on passe d'un effectif cumulé au suivant de façon régulière et que, graphiquement, on trace un segment entre les points d'ordonnées correspondantes. Recommencer pour les classes suivantes et chaque effectif cumulé correspondant. On a ainsi tracé le **polygone des effectifs cumulés croissants**.

c. Placer le point M d'ordonnée 75. À quoi correspond la valeur 75 ? Lire sur le graphique l'abscisse du point M et donner une interprétation de cette valeur.

d. Construire le polygone des fréquences cumulées et retrouver graphiquement la valeur médiane.

On construit le **polygone des fréquences cumulées croissantes** en représentant les pourcentages sur l'axe des ordonnées et les classes sur l'axe des abscisses.

Activité 2 Quartiles

1 Le tableau ci-contre donne le nombre de médailles obtenues par les 12 premiers pays aux Jeux Olympiques de 2004.

a. Déterminer la médiane de cette série.

b. En s'inspirant de la méthode utilisée pour déterminer la médiane, donner une valeur q_1 qui partage en deux groupes de même effectif la série ordonnée des 6 pays ayant obtenu le moins de médailles.

c. Quel est le pourcentage de pays dont le nombre de médailles est inférieur à la valeur trouvée dans la question b ?

d. Déterminer de la même façon une valeur q_3 qui partage en deux groupes de même effectif la série ordonnée des 6 pays ayant obtenu le plus de médailles. Quel est le pourcentage de pays dont le nombre de médailles est inférieur à cette valeur ?

Nation	Nombre total de médailles
États-Unis	102
Chine	63
Russie	92
Australie	49
Japon	37
Allemagne	49
France	33
Italie	32
Corée	30
Grande-Bretagne	30
Cuba	27
Ukraine	23

Les deux valeurs q_1 et q_3 qui partagent une série ordonnée de telle façon que 25 % des valeurs soient inférieures à q_1 et 75 % des valeurs soient inférieures à q_3 sont appelées des **quartiles**.

Les premier et troisième quartiles correspondent aux médianes des deux demi-séries déterminées par la médiane.

Activité 3

Étendue et comparaison de séries statistiques

Voici un tableau donnant les résultats des élèves de deux classes de troisième à un contrôle commun de connaissances noté sur 10.

Effectif par classe \ Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3 ^e A	1	3	2	2	6	7	0	2	3	2
3 ^e B	0	0	3	4	7	6	4	4	0	0

- 1 Calculer la moyenne des notes de chaque classe. On arrondira le résultat au dixième.
- 2 Déterminer la médiane de chaque classe.
- 3 Représenter chacune des séries par un diagramme en bâtons.
- 4 Ces deux classes de troisième ont-elles le même « profil » ?
- 5 Pour chaque série de notes, calculer la différence positive entre la plus grande et la plus petite des notes obtenues. Cette différence est appelée l'**étendue** de la série.
- 6 Comparer ces deux étendues. Dans quelle classe les notes sont-elles le moins dispersées ?

Plus l'**étendue** d'une série est faible, moins les valeurs sont dispersées et plus elles sont regroupées autour des **paramètres de position** que sont la **moyenne** et la **médiane**.

Activité 4

Fréquence relative et probabilité

On lance un dé à jouer cubique et on s'intéresse au chiffre qui apparaît sur la face supérieure.

- 1 Quels sont les résultats possibles ? Intuitivement, quelles sont les « chances » d'obtenir chacun des résultats ? Les exprimer sous forme fractionnaire.
- 2 Le tableau suivant donne le nombre de fois qu'est apparue la face 3 lors de simulations de lancers effectuées sur ordinateur.

Nombre de lancers	20	50	100	500	1 000	5 000	10 000	20 000
Nombre d'apparitions de la face 3	5	10	16	72	153	836	1 705	3 331

- a. Pour chaque colonne, calculer la fréquence d'apparition de la face 3. Les résultats sont compris entre 0 et 1 et arrondis à 10^{-3} près.
- b. Tracer le polygone des fréquences en fonction du nombre de lancers (prendre comme unité pour les fréquences 1 cm, sur l'axe des ordonnées, pour 0,02 et commencer à 0,10 et prendre, sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 20 lancers, 2 cm pour 50 lancers, 3 cm pour 100 lancers, etc.).
- c. Tracer sur ce graphique la droite horizontale correspondant à la valeur « intuitive » de la question 1. Vers quelle valeur semble se rapprocher la fréquence relative d'apparitions lorsque le nombre de lancers augmente ? En déduire la probabilité de l'événement M : « obtenir un 3. », c'est-à-dire la chance de réalisation d'obtenir un 3. On la note $p(M)$.

Activité 5

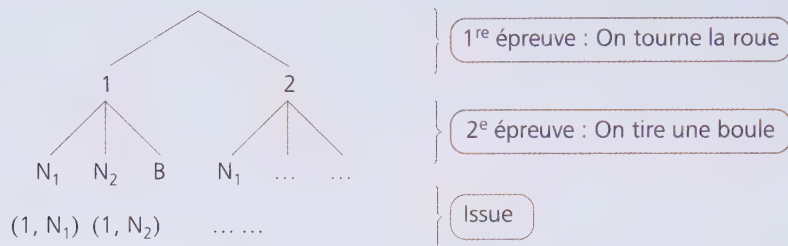
Épreuves successives et arbre de probabilité

Quand on participe à ce jeu, on réalise une **expérience aléatoire** à deux **épreuves successives**.

Dans une fête foraine, un jeu consiste à faire tourner une roue de loterie partagée en deux secteurs identiques numérotés 1 et 2 puis à extraire une boule d'une urne composée de deux boules noires N_1 , N_2 et d'une boule blanche B.

A Arbre de probabilité

- 1 On représente les différents résultats possibles de cette expérience aléatoire à l'aide d'un **arbre**. Chaque branche correspond à une **issue** (ou résultat).
Recopier et compléter l'arbre suivant :



- 2 a. Combien y a-t-il d'issues possibles à cette expérience aléatoire ?
b. Chaque secteur de la roue de loterie et chaque boule ont la même chance d'être obtenus à chacune des deux épreuves. Quelle est la probabilité de chaque issue de l'expérience ?
- 3 Un joueur gagne un lot s'il obtient 1 et une boule noire. Donner toutes les issues qui correspondent à l'obtention d'un lot. En déduire la probabilité de gagner un lot.

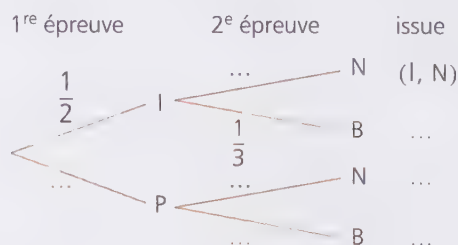
B Arbre de probabilité pondéré

On considère les événements suivants :

I : « obtenir le nombre 1 », P : « obtenir le nombre 2 »,

N : « obtenir une boule noire » et B : « obtenir une boule blanche ».

- 1 a. Quelles sont les chances d'obtenir le nombre 1 à la roue de loterie ? En déduire la probabilité $p(I)$.
b. Déterminer la probabilité de chaque événement à chacune des deux épreuves.
- 2 Recopier et compléter l'arbre en indiquant la probabilité des événements à chaque épreuve sur les branches.



- 3 a. Donner les issues de l'expérience permettant de gagner un lot, c'est-à-dire d'obtenir le nombre 1 et une boule noire.
b. Dans la question A 3, on a obtenu la probabilité $\frac{1}{3}$ d'obtenir un lot. Conjecturer un moyen d'obtenir ce résultat à l'aide des probabilités de l'arbre pondéré.

On réalise ainsi un **arbre pondéré** représentant l'expérience aléatoire.

A Statistiques

1 Médiane d'une série statistique

Définition

La médiane peut être déterminée à partir d'un tableau d'effectifs

➔ Savoir-faire 1, page 165

ou bien graphiquement à partir du polygone des fréquences cumulées

➔ Savoir-faire 2, page 166

On appelle **médiane** d'une série statistique ordonnée une valeur du caractère qui partage la série en deux groupes de même effectif tels que :

- un groupe contient les valeurs inférieures ou égales à la médiane ;
- l'autre groupe contient les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

Remarque :

- Dans le cas d'un effectif total N impair, la médiane est la valeur de la série ordonnée de rang $\frac{N+1}{2}$.
- Dans le cas d'un effectif total N pair, aucune valeur de la série ordonnée ne partage la série en deux groupes de même effectif. Toute valeur comprise entre les valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$ peut être prise comme médiane.

En général, on prend la moyenne de ces deux valeurs.

Exemples

- Voici les notes obtenues au premier trimestre par un élève :

13 ; 7 ; 11 ; 15 ; 14 ; 15 ; 6 ; 10 ; 8 ; 16 ; 15.

On ordonne la série des 11 notes, 11 étant impair, la médiane correspond à la valeur de rang $\frac{11+1}{2}$, soit au 6^e rang de la série ordonnée.

6	7	8	10	11	(13)	14	15	15	15	16
5 notes					↑	5 notes				
médiane										

On constate que 5 notes sont supérieures à 13 et que 5 notes sont inférieures à 13. La médiane de la série est donc 13.

- Voici la série ordonnée des notes obtenues au deuxième trimestre :

6 ; 7 ; 8 ; 8 ; 11 ; 12 ; 12 ; 13 ; 15 ; 15.

L'effectif total N est pair ($N = 10$) donc toute valeur comprise entre les rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$, soit la 5^e et la 6^e valeur, peut être prise comme médiane. On choisit la moyenne des deux valeurs, soit 11,5.

2 Quartiles

Définition

Les quartiles peuvent être déterminés à partir d'un tableau d'effectifs

➔ Savoir-faire 1

ou bien graphiquement à partir du polygone des fréquences cumulées

➔ Savoir-faire 2

On appelle **premier quartile** la plus petite valeur q_1 de la série ordonnée telle que 25 % des valeurs soient inférieures ou égales à q_1 .

On appelle **troisième quartile** la plus petite valeur q_3 de la série ordonnée telle que 75 % des valeurs soient inférieures ou égales à q_3 .

Remarques :

- Le 2^e quartile, q_2 , est la médiane de la série.
- Les premier et troisième quartiles correspondent aux médianes des deux demi-séries déterminées par la médiane.

Exemples

► Cas d'un effectif total faible :

Soit une série ordonnée de 15 valeurs : 5 ; 7 ; 7 ; 8 ; 9 ; 9 ; 10 ; 11 ; 11 ; 11 ; 12 ; 13 ; 13 ; 14 ; 16.

- L'effectif total étant impair, la médiane est la valeur de rang $\frac{(15+1)}{2}$, c'est-à-dire la 8^e note. Donc la médiane est 11.
- Le premier quartile partage les 7 premières notes en deux groupes de même effectif, donc le premier quartile est $q_1 = 8$, la 4^e valeur de la série.
- Le troisième quartile partage de la même façon les 7 autres notes, donc le troisième quartile est $q_3 = 13$.

► Cas d'un effectif total important :

La médecine du travail a relevé le « poids » (la masse) des 160 employés hommes d'une entreprise.

Masse en kg	57	61	63	64	65	67	68	69	70	72	73	76	78	81	86	92
Effectif	1	3	7	9	18	16	15	17	23	13	8	9	7	5	7	2
Effectif cumulé	1	4	11	20	38	54	69	86	109	122	130	139	146	151	158	160

- L'effectif total de la série est 160, un nombre pair. La médiane est donc la moyenne des valeurs des rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$, 80^e et 81^e valeurs. On observe à partir des effectifs cumulés que ces deux valeurs sont 69. La médiane de cette série est donc 69.
- 25 % des valeurs correspondent à $160 \times 0,25 = 40$. Donc le 1^{er} quartile est la 40^e valeur, c'est-à-dire 67.
- 75 % des valeurs correspondent à $160 \times 0,75 = 120$. Donc le 3^e quartile est la 120^e valeur, c'est-à-dire 72.

Propriété

Environ 50 % des valeurs d'une série ordonnée sont comprises entre les quartiles q_1 et q_3 .

③ Étendue d'une série statistique

Définition

L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

Propriété

L'étendue est un **paramètre de dispersion** : moins l'étendue d'une série statistique est grande, moins les valeurs sont dispersées.

Elles sont alors regroupées autour de la moyenne et de la médiane (qui sont deux paramètres de position).

Exemple

Les élèves d'une classe ont effectué deux devoirs dont les notes ordonnées sont les suivantes :

Devoir 1 : 1 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 11 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 15 ; 15 ; 16 ; 19.

Devoir 2 : 4 ; 5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13 ; 14 ; 15 ; 15.

Ces deux séries de notes ont la même moyenne 10 et la même médiane 11, cependant elles n'ont pas le même « profil ».

En effet, l'étendue des notes du devoir 1 est : $19 - 1 = 18$, alors que celle du devoir 2 est : $15 - 4 = 11$. Donc les notes du devoir 2 sont moins dispersées que celles du devoir 1.

L'**effectif cumulé** croissant d'une valeur s'obtient en additionnant l'effectif de cette valeur et les effectifs des valeurs inférieures.

B Probabilités

1 Vocabulaire

Définitions

- Un phénomène dont on ne peut pas prévoir de façon certaine le résultat, ou l'**issue**, s'appelle une **expérience aléatoire**.
- Les résultats ou issues possibles d'une expérience aléatoire sont appelées **éventualités**.
- Un **événement** est un ensemble d'éventualités. Un événement est réalisé lorsque l'une des éventualités qui le composent est réalisée.
- Une éventualité est un **événement élémentaire**.

Deux événements A et B sont dits **incompatibles** lorsqu'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Exemple

« Jeter un dé » est une expérience aléatoire. On ne peut pas savoir le numéro de la face supérieure qui va apparaître, les issues possibles sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Les éventualités sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

On peut définir l'événement M : « obtenir un multiple de 3 ».

L'événement M est constitué des éventualités 3 et 6.

Définition

Si A désigne un événement, on appelle « non A » ou $\bar{A}$ (on lit « A barre ») l'**événement contraire** de A, c'est-à-dire l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

Exemple

Soit M l'événement : « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé.

L'événement contraire de M est $\bar{M}$ l'événement « ne pas obtenir un multiple de 3 ».

2 Probabilité

Définition

Quand une expérience est répétée un grand nombre de fois, la fréquence relative de réalisation d'un événement élémentaire se rapproche d'une valeur particulière : la **probabilité** de cet événement élémentaire.

Exemple

► La probabilité d'obtenir « pile » lors du jet d'une pièce est égale à $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

► Dans un collège, on a interrogé les élèves sur le nombre d'enfants dans leur famille.

Nombre	1	2	3	4	5	6 et plus
Effectif	18	25	20	11	5	3
Fréquence	21,95 %	30,49 %	24,39 %	13,41 %	6,10 %	3,66 %

On choisit un élève au hasard dans le collège.

La probabilité pour que cet élève appartienne à une famille de trois enfants est approchée par la fréquence correspondante, soit $\frac{24,39}{100}$ ou 0,2439.

Propriétés

On peut additionner les probabilités de deux événements incompatibles.

- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des éventualités qui le composent.
- La probabilité d'un événement qui se produit nécessairement (événement certain) est égale à 1.
- La probabilité d'un événement qui ne peut pas se produire (événement impossible) est égale à 0.
- Quel que soit l'événement A, on a : $0 \leq p(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

Exemple

Dans l'expérience du jeu de dé à 6 faces, on appelle :

A l'événement élémentaire : « obtenir un 1 » ; B l'événement élémentaire : « obtenir un 2 » ;
C l'événement élémentaire : « obtenir un 3 » ; D l'événement élémentaire : « obtenir un 4 » ;
E l'événement élémentaire : « obtenir un 5 » ; F l'événement élémentaire : « obtenir un 6 ».

- Chaque face a la même chance d'apparition, donc :

$$p(A) = p(B) = p(C) = p(D) = p(E) = p(F) = \frac{1}{6}.$$

- On a : $p(A) + p(B) + p(C) + p(D) + p(E) + p(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$.
- Soit l'événement M « obtenir un multiple de 3 ». L'événement M est réalisé si la face obtenue est 3 ou 6.

$$\text{On a alors : } p(M) = p(C) + p(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Définition

➔ Savoir-faire 3, page 167

Si tous les événements élémentaires ou éventualités d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont **équiprobables** ou qu'il y a **équiprobabilité**.

Propriété

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale au quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

Exemple

Soit l'événement M « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé.

- Toutes les faces ayant la même chance d'apparition, il y a équiprobabilité.
- L'événement M est constitué de 2 événements élémentaires, il y a 2 cas favorables pour réaliser M sur 6 cas possibles. Donc $p(M) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriété

La probabilité de $\bar{A}$, l'événement contraire de A, est le complément à 1 de la probabilité de A. On a : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple

Soit l'événement M : « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé. L'événement $\bar{M}$ est : « ne pas obtenir un multiple de 3 » ou encore « obtenir 1, 2, 4 ou 5 ».

Pour réaliser l'événement $\bar{M}$, il y a 4 cas favorables équiprobables, donc $p(\bar{M}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On a aussi : $p(\bar{M}) = 1 - p(M)$, donc $p(\bar{M}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Déterminer une médiane et les quartiles à partir d'un tableau d'effectifs

Énoncé 1 On a relevé la pointure des élèves de troisième d'un collège.

Pointure	35	36	37	38	39	40	41	42 et plus
Effectif cumulé croissant	2	23	40	59	72	76	79	80

Déterminer la médiane et les quartiles de cette série statistique.

Solution

L'effectif total de la série statistique est 80, un nombre pair.

On prend comme médiane la moyenne de la valeur correspondant au 40^e rang et de la valeur correspondant au 41^e rang.

La 40^e valeur est égale à 37 et la 41^e valeur est égale à 38. La médiane est donc égale à : $\frac{37+38}{2} = 37,5$.

25 % des valeurs correspondent à $80 \times 0,25 = 20$. Donc le premier quartile est la valeur de rang 20, soit 36.

75 % des valeurs correspondent à $80 \times 0,75 = 60$. Donc le troisième quartile est la valeur de rang 60, soit 39.

L'effectif total N est un nombre pair, donc la médiane est une valeur comprise entre les valeurs de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$. On prend la moyenne de ces deux valeurs.

Le premier quartile q_1 est la plus petite valeur telle que 25 % des valeurs de la série sont inférieures à q_1 .

Le troisième quartile q_3 est la plus petite valeur telle que 75 % des valeurs de la série sont inférieures à q_3 .

Énoncé 2 Le tableau suivant donne les relevés de température à 9 h du matin un 14 juillet dans quelques grandes villes.

Température (°C)	11	13	15	16	17	18	19	20	23
Effectif	2	2	6	5	6	7	4	4	1

Déterminer la médiane et les quartiles de cette série statistique.

Solution

Température (°C)	11	13	15	16	17	18	19	20	23
Effectif	2	2	6	5	6	7	4	4	1
Effectif cumulé croissant	2	4	10	15	21	28	32	36	37

L'effectif total est 37, un nombre impair, donc la médiane correspond à la valeur de la ville de rang $\frac{37+1}{2} = 19$ de la série ordonnée dans l'ordre croissant de température.

La 19^e valeur est 17 donc la médiane de cette série est 17.

On recopie le tableau et on le complète par la ligne des effectifs cumulés croissants.

L'effectif total N est un nombre impair, donc la médiane est la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$.

La médiane partage la série en deux groupes dont l'effectif est égal à 18, un nombre pair. Donc :

- le premier quartile est la moyenne des 9^e et 10^e valeurs de la série, soit $\frac{15 + 15}{2} = 15$.

Le premier quartile est la médiane des 18 valeurs de la première moitié de la série.

- le troisième quartile est la moyenne des 28^e et 29^e valeurs, soit $\frac{18 + 19}{2} = 18,5$.

Le troisième quartile est la médiane des 18 valeurs de la deuxième moitié de la série.

Savoir-faire 2 Déterminer graphiquement la médiane et les quartiles

Énoncé Voici les notes obtenues par 80 candidats à un concours.

Notes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	6	16	36	18	4

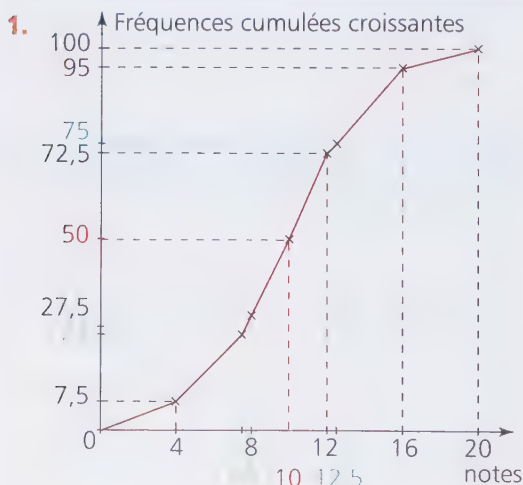
- Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.
- Déterminer graphiquement une valeur approchée de la médiane et des quartiles de cette série.
- Donner les deux valeurs entre lesquelles sont situées 50 % des notes.

Solution

Notes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	6	16	36	18	4
Effectif cumulé croissant	6	22	58	76	80
Fréquence cumulée croissante (en %)	7,5	27,5	72,5	95	100

On recopie le tableau et on le complète par la ligne des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes.

La fréquence cumulée croissante de la classe [8 ; 12[est égale à : $\frac{58}{80} \times 100$.



On construit le polygone des fréquences cumulées croissantes. On admet en général qu'à l'intérieur d'une classe les valeurs sont uniformément réparties, donc on passe d'une fréquence cumulée à une autre de façon régulière et, graphiquement, cela se représente par un segment de droite.

2. D'après le polygone des fréquences cumulées croissantes, les notes qui correspondent à 25 %, 50 % et 75 % sont respectivement environ 7,5 ; 10 et 12,5.

Donc par lecture graphique, le premier quartile q_1 est 7,5, la médiane est 10 et le troisième quartile q_3 est 12,5.

3. Environ 50 % des valeurs d'une série statistique ordonnée sont comprises entre q_1 et q_3 . Donc environ 50 % des notes sont comprises entre 7,5 et 12,5.

• La médiane est la valeur correspondant à la fréquence cumulée égale à 50 %.

• Le premier quartile, et le troisième quartile sont les valeurs correspondant respectivement aux fréquences cumulées 25 % et 75 %.

Savoir-faire

3 Calculer la probabilité d'un événement

Énoncé 1 Un jeu de 32 cartes à jouer est constitué de quatre « familles » : trèfle et pique, de couleur noire ; carreau et cœur, de couleur rouge. Dans chaque famille, on trouve trois « figures » : valet, dame et roi. On tire une carte au hasard dans ce jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité des événements suivants :

1. A : « La carte tirée est une dame. »

2. B : « La carte tirée est une figure rouge. »

3. C : « La carte tirée n'est pas une figure rouge. »

Solution

1. Il y a 4 dames dans le jeu, soit 4 possibilités, ou cas favorables, pour l'événement A. Le nombre de cas possibles est égal au nombre total de cartes, soit 32.

$$\text{D'où } p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

2. Il y a 3 figures dans chacune des deux « familles » rouges, donc il y a 6 cas favorables pour l'événement B.

$$\text{Donc } p(B) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

3. L'événement C est l'événement contraire de l'événement B, donc $p(C) = 1 - p(B)$ et $p(C) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$.

Dans l'énoncé, il est écrit « au hasard », cela signifie que toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées.

Les événements élémentaires sont équiprobables donc la probabilité d'un événement est donnée par la formule :
« nombre de cas favorables »
« nombre de cas possibles »

Pour A un événement et $\bar{A}$ l'événement contraire de A, on a la formule :
 $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Énoncé

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux noires « N » et trois blanches « B ». On dispose également de deux sacs contenant des jetons : l'un est noir et contient un jeton noir et trois jetons blancs, l'autre est blanc et contient deux jetons noirs et deux jetons blancs. On extrait une boule de l'urne, puis on tire un jeton dans le sac qui est de la même couleur que la boule tirée.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ? Les expliciter.

2. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité de chacune de ces issues.

3. Déterminer la probabilité de l'événement A : « la boule et le jeton extraits sont de la même couleur ».

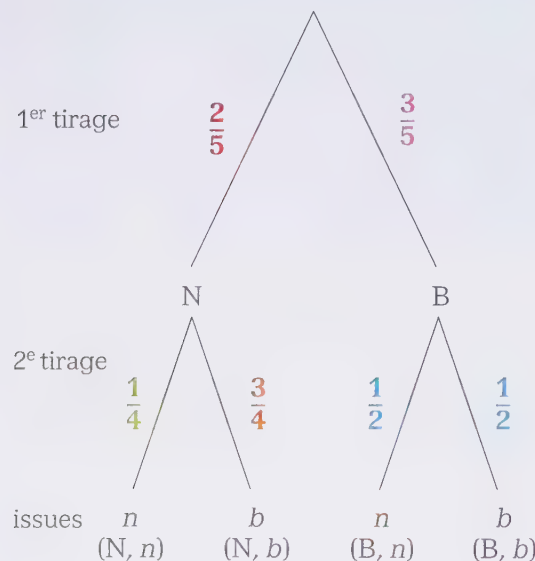
Solution

1. Si la première boule tirée est noire, le jeton extrait peut être noir (n) ou blanc (b) et les résultats possibles sont (N, n) et (N, b).

Si la première boule tirée est blanche, on peut avoir les deux résultats (B, n) et (B, b).

Il y a donc 4 issues possibles.

2.



$$\text{D'où : } p((N, n)) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$p((N, b)) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$p((B, n)) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$\text{et } p((B, b)) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

3. L'événement A est constitué des deux événements élémentaires (N, n) et (B, b).

Donc $p(A) = p((N, n)) + p((B, b))$,

$$\text{soit } p(A) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Les issues possibles lors de cette expérience aléatoire sont les résultats qui peuvent être obtenus à la suite du tirage d'une boule dans l'urne et d'un jeton dans le sac de la même couleur que la boule tirée.

Il y a cinq boules dans l'urne : deux boules sont noires et trois boules sont blanches.

La probabilité de tirer une boule noire est donc égale à $\frac{2}{5}$ et celle de tirer une boule blanche est $\frac{3}{5}$.

Si la boule tirée est noire, alors on tire un jeton dans le sac noir. Il contient un jeton noir et trois jetons blancs. On a donc une chance sur quatre d'extraire un jeton noir et trois chances sur quatre d'extraire un jeton blanc.

Si la boule extraite est blanche, alors on tire un jeton dans le sac blanc qui contient deux jetons noirs et deux jetons blancs. La probabilité d'obtenir un jeton noir est donc égale à celle d'obtenir un jeton blanc, soit $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

La probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées sur les branches.

La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

S'entraîner

Moyenne et médiane – Quartiles

- 1** Les tailles, en cm, des joueuses sélectionnées en équipe de France de volley en 2007 étaient les suivantes :
- 196 ; 169 ; 186 ; 183 ; 180 ; 187 ;
191 ; 183 ; 168 ; 186 ; 181 ; 182.

- Quels sont la population et le caractère étudiés ?
- Le caractère est-il quantitatif ou qualitatif ?
- Quel est l'effectif de cette série ?
- Quelles sont les valeurs extrêmes ?

- 2** Ordonner, puis déterminer la médiane de chacune des séries suivantes :

- 13 ; 15 ; 12 ; 18 ; 16 ; 13 ; 11.
- 31 ; 28 ; 31 ; 35 ; 33 ; 29.
- 9,5 ; 7 ; 10,5 ; 11 ; 8 ; 13.

- 3** Voici les moyennes mensuelles du prix du baril de pétrole brut en dollars entre le 1^{er} juillet 2006 et le 31 juillet 2007 :
- 73,6 ; 73,3 ; 62,0 ; 57,8 ; 58,4 ; 62,4 ; 53,6 ;
57,5 ; 62 ; 67,8 ; 67,2 ; 71 ; 76,8.

- Combien de mois le prix du baril a-t-il été strictement supérieur à 62,4 \$? Combien de mois, le prix du baril a-t-il été strictement inférieur à 62,4 \$?
- Quel est le nom de la valeur 62,4 pour la série statistique des prix du baril ?
- Peut-on dire que, pendant 50 % de cette période, le prix du baril a dépassé 62,4 \$?

- 4** Les tailles, en cm, des joueurs sélectionnés en équipe de France de volley en 2007 étaient les suivantes :
- 191 ; 195 ; 198 ; 203 ; 197 ; 200 ; 195 ; 196 ; 196 ;
190 ; 183 ; 186 ; 198 ; 197 ; 193 ; 180 ; 200 ; 175.

- Calculer la taille moyenne des joueurs. Arrondir le résultat au cm.
- Déterminer une médiane de cette série de tailles.
- Déterminer les premier et troisième quartiles de la série.

- 5** On s'est intéressé à la pointure des élèves des classes de troisième d'un collège. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Pointure	36	37	38	39	40	41	42	43
Effectif	8	19	31	32	29	24	15	4

- Calculer l'effectif total.
- Calculer la moyenne de cette série statistique.
- Reproduire et compléter le tableau avec la ligne des effectifs cumulés croissants.
- Déterminer la pointure médiane et en donner une interprétation.
- Déterminer les premier et troisième quartiles de cette série.

- 6** On a relevé le poids, en kg, des élèves d'un collège à leur entrée en sixième. Le tableau ci-dessous donne la répartition par classes de la série obtenue :

Poids (Kg)	]20 ; 26]	]26 ; 32]	]32 ; 38]	]38 ; 50]
Effectif	20	45	51	28

- Déterminer l'effectif total des élèves de sixième.
- Déterminer le centre de chaque classe et en déduire un calcul du poids moyen de ces élèves. Arrondir au dixième.
- Reproduire le tableau et le compléter avec la ligne des effectifs cumulés croissants.
- À quelle classe appartient la médiane de cette série ?

7 Thème de convergence

Économie et société

D'après l'INSEE, en France en 2004, un salarié à temps complet sur deux a perçu un salaire mensuel net inférieur à 1 484 euros.

- Peut-on dire que 50 % des salariés à temps complet ont gagné moins de 1 484 euros nets par mois en 2004 ? Quel nom porte cette valeur ?
- En Europe, le « seuil de pauvreté » est fixé à 60 % du salaire médian. Quel était le « seuil de pauvreté » en France en 2004 ?

- 8** Trouver une série de trois valeurs dont la moyenne est 13 et la médiane est 12.

- 9** On a relevé la taille, en cm, de dix des onze joueurs d'une équipe de football professionnelle :
- 189 ; 180 ; 181 ; 176 ; 178 ;
183 ; 173 ; 178 ; 185 ; 178.

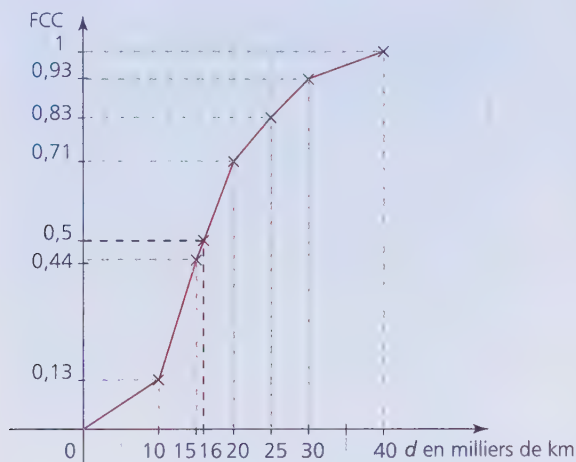
- Il manque la taille du gardien de but, qui est supérieure à celle des autres joueurs. Trouver la taille médiane de la série.
- Sachant que la taille moyenne des onze joueurs est 181 cm, calculer la taille du gardien de but.

- 10** La répartition par âge des élèves d'une classe de troisième est donnée dans le tableau suivant :

Âge	13 ans et moins	14 ans	15 ans	16 ans et plus
Effectif	1	19	9	2

- Calculer la fréquence en pourcentage de chaque âge. Arrondir au dixième.
- Recopier le tableau et le compléter avec la ligne des effectifs cumulés croissants et la ligne des fréquences cumulées croissantes.
- Combien d'élèves de cette classe ont 15 ans ou moins ?
- Quel est le pourcentage d'élèves ayant 14 ans ou moins ?

T Un sondage a été réalisé auprès de 248 automobilistes sur la distance qu'ils ont parcourue en une année. Le polygone des fréquences cumulées croissantes (FCC) illustre les résultats obtenus.



a. Reproduire le tableau ci-dessous, puis compléter les colonnes (ECC signifie effectif cumulé croissant). On arrondira les ECC et les effectifs à l'unité près.

Distance d parcourue en milliers de km	FCC	ECC	Effectif	Centre
$0 \leq d < 10$	0,13	32	32	5
$10 \leq d < 15$	0,44	109	77	12,5
	1	248		
Total			248	

b. Quel est le pourcentage d'automobilistes qui parcourent moins de 20 000 km par an ?

c. Quel est le pourcentage d'automobilistes qui parcourent au moins 25 000 km par an ?

d. On a placé sur le graphique le point M de coordonnées (16 ; 0,5). Que représente la valeur 16 ? Que signifie-t-elle ?

e. Calculer la distance moyenne parcourue en un an par ces 248 automobilistes.

12 La préfecture des Côtes d'Armor donne la répartition par tranche d'âge de sa population en 1990 et en 1999.

Âge (ans)		0 à 19	20 à 39	40 à 59	60 à 74	75 et plus	Total
1990	Effectif	137 777	140 446	123 928	89 346	46 896	
	%						100
1999	Effectif	124 519		139 338			542 580
	%	22,95	23,74	25,68	17,55	10,08	100

1 Recopier le tableau et compléter les données manquantes.

2 a. Quel pourcentage de la population avait moins de 40 ans en 1990 ?

b. Peut-on affirmer que plus de la moitié de la population avait au moins 40 ans en 1999 ?

3 Donner une conclusion sur le vieillissement ou le rajeunissement de la population dans ce département ?

B Voici les résultats d'un rapport de recherche sur la fréquence d'utilisation d'Internet par les jeunes, en moyenne par jour, lorsqu'ils ont Internet à la maison.

Durée en heure par jour	en semaine	le week-end
[0 ; 0,5[	59 %	30 %
[0,5 ; 1[	30 %	30 %
[1 ; 2[	9 %	28 %
plus de 2	2 %	12 %

a. Recopier et compléter le tableau par la colonne des fréquences cumulées croissantes « en semaine » et la colonne des fréquences cumulées croissantes « le week-end ».

b. Quel est le pourcentage de jeunes qui utilisent Internet moins de 1 heure par jour en semaine ? Plus d'une demi-heure par jour le week-end ?

1 a. Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série des durées d'utilisation d'Internet en semaine. On prendra 3 h comme extrémité de la dernière classe.

b. Sur ce polygone, placer le point M d'ordonnée 50 et déterminer graphiquement l'abscisse m de ce point.

2 a. Quel est le pourcentage d'internautes qui ont passé moins de m heures sur Internet en semaine ? Quel est le pourcentage d'internautes qui ont passé plus de m heures sur Internet en semaine ?

b. Quel nom porte cette valeur ?

Étendue et comparaison

14 Calculer l'étendue de la série :

5; 8; 12; 15; 3; 18; 11; 7.

15 Calculer l'étendue de la série de masses m (en kg) réparties en classes :

m (kg)	$19 \leq m < 21$	$21 \leq m < 23$	$23 \leq m < 25$	$25 \leq m < 27$	$27 \leq m < 29$
----------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

16  Voici le poids des 15 joueurs de l'équipe de France de rugby avant le premier match de préparation de la coupe du monde 2007 :

85; 93; 82; 95; 86; 85; 112; 108;
107; 68; 105; 105; 115; 102; 98.

a. Déterminer l'étendue et la médiane de cette série statistique.

b. Calculer le poids moyen de l'équipe.

2 Voici maintenant le poids des 15 joueurs de l'équipe d'Afrique du Sud lors de cette même coupe du monde 2007 :
125 ; 109 ; 110 ; 115 ; 107 ; 88 ; 98 ; 89 ;
100 ; 88 ; 95 ; 89 ; 116 ; 107 ; 92.

Déterminer l'étendue, la médiane et la moyenne de cette série statistique.

3 Comparer ces deux équipes.

17 Thème de convergence

Climat

On a relevé la pluviométrie, c'est-à-dire la quantité de pluie tombée (en mm) en un temps donné, et les températures dans deux villes de France sur les douze mois de l'année 2005. Voici les résultats :

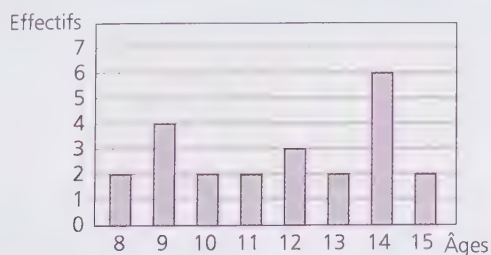
Mois	Biarritz		Belfort	
	Pluie (mm)	T (°C)	Pluie (mm)	T (°C)
J	67	10	65	2
F	39	12	60	0
M	37	13,6	32	7
A	171	15,8	92	10
M	54	19	111	13,5
J	19	22,4	51	19
J	33	24,7	83	28,7
A	56	25,2	57	17,5
S	77	22,7	80	16,5
O	126	18,5	75	13
N	487	13	55	5
D	161	10,5	94	0

- Déterminer l'étendue et une médiane de chaque série de pluviométrie.
- Calculer la hauteur moyenne de précipitation mensuelle pour chaque ville. Arrondir au dixième.
- Déterminer l'étendue, la médiane et la moyenne mensuelle de chacune des deux séries de températures. Arrondir au dixième.
- À l'aide des résultats précédents, comparer le climat de ces deux villes.



Lecture graphique

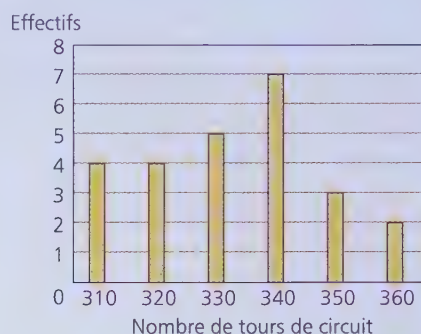
- 18** Le diagramme en bâtons ci-dessous donne la répartition des âges des jeunes adhérents d'un club de théâtre.



- Combien y a-t-il de jeunes adhérents ?
- Calculer l'étendue de cette série.
- Déterminer l'âge médian.

19 Vu au brevet

La course automobile des 24 heures du Mans consiste à effectuer en 24 heures le plus grand nombre de tours d'un circuit. Le diagramme en bâtons ci-dessous donne la répartition du nombre de tours effectués par les 25 premiers coureurs automobiles.



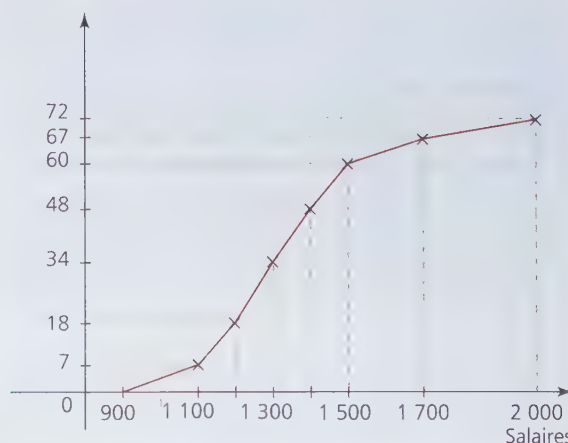
- Recopier et compléter le tableau des effectifs et des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

Nombre de tours effectués	310	320	330	340	350	360
Effectifs	4					
Effectifs cumulés croissants						

- Déterminer la médiane et l'étendue de cette série.
- Calculer la moyenne de cette série (on donnera la valeur arrondie à l'unité).

- 20** Une entreprise a réalisé une étude statistique portant sur les salaires nets en euros de ses employés.

Effectifs cumulés croissants

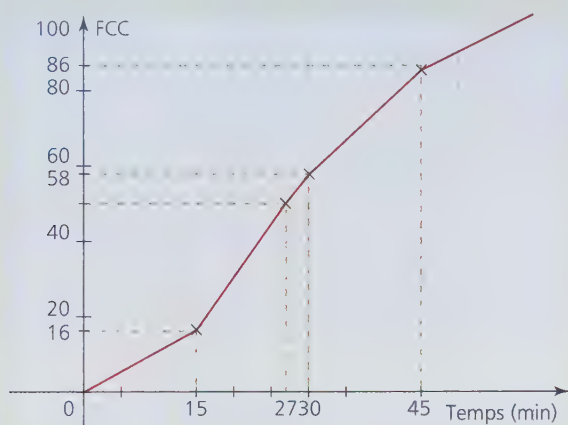


- À l'aide du polygone des effectifs cumulés croissants représenté ci-dessus, établir le tableau récapitulatif :
 - les classes de salaires ;
 - les effectifs ;
 - les effectifs cumulés croissants ;
 - les fréquences cumulées croissantes en pourcentage.
- À quelle classe appartient le salaire médian ?
- Calculer le salaire moyen. On arrondira à l'euro.

Exercices

21 QCM

Une enquête a été menée auprès de 543 élèves sur le temps de trajet quotidien entre le collège et leur domicile. Le polygone des fréquences cumulées croissantes (FCC) représente les réponses obtenues.



Dans chaque cas, donner la réponse juste parmi les trois proposées.

- 1 Le pourcentage d'élèves dont le temps de trajet est inférieur à 45 min est :
a. 10 % b. 45 % c. 86 %
- 2 Le pourcentage d'élèves dont le temps de trajet est supérieur à 30 min est :
a. 42 % b. 58 % c. 60 %
- 3 Le nombre d'élèves dont le temps de trajet est inférieur à 15 min est :
a. 18 b. 87 c. 271
- 4 Le nombre d'élèves dont le temps de trajet est supérieur à 45 min est :
a. 14 b. 76 c. 86
- 5 Le pourcentage d'élèves dont le temps de trajet est compris entre 15 et 30 min est :
a. 42 % b. 58 % c. 80 %
- 6 70 % des élèves ont un temps de trajet :
a. inférieur à 45 min
b. supérieur à 15 min
c. compris entre 15 et 45 min
- 7 La valeur 27 est :
a. la moyenne b. la médiane c. l'étendue

Probabilités et statistiques

- 22 On donne la répartition « filles-garçons » dans trois collèges :
- dans le collège Thalès, il y a 57 % de filles ;
 - dans le collège Pythagore, il y a 360 garçons sur un total de 750 élèves ;
 - dans le collège Chasles, il y a 352 filles et 288 garçons.
- Dans chacun des trois collèges, on croise un élève au hasard.
- Quelle est la probabilité de croiser une fille ?

- 23 Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves d'un collège suivant le temps de trajet pour se rendre de leur domicile à leur établissement.

Temps de trajet (en min)	Effectif	Fréquence
]0 ; 15]	76	
]15 ; 30]	128	
]30 ; 45]	112	
]45 ; 60]	90	
]60 ; 75]	36	
]75 ; 90]	25	

- 1 Reproduire et compléter le tableau. Arrondir les résultats au centième.
- 2 On choisit un élève au hasard dans le collège.
 - a. Quelle est la fréquence des élèves ayant un temps de trajet compris entre 30 et 45 min ?
 - b. Quelle est la probabilité pour que cet élève ait mis entre 30 et 45 min pour venir au collège ?
 - c. Quelle est la fréquence correspondant aux élèves ayant un temps de trajet supérieur à 1 h ?
 - d. Quelle est la probabilité pour que l'élève choisi ait mis plus de 1 heure pour venir au collège ?

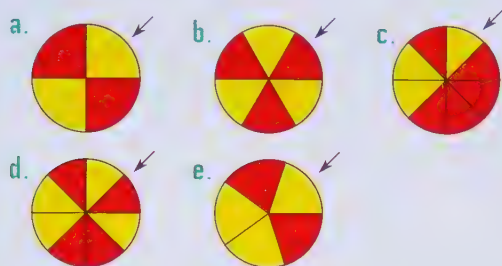
Pour les exercices 24 à 26, on utilise un jeu de 32 cartes, constitué de quatre « familles » : trèfle et pique, de couleur noire ; carreau et cœur, de couleur rouge. Chaque famille contient huit cartes : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; as et trois « figures » : roi, dame et valet.

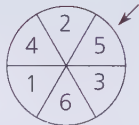
On tire une carte au hasard. La face des cartes étant cachée, toutes les cartes ont la même chance d'être tirée.

- 24 Pour chaque question, quel événement parmi les deux proposés est le plus probable ?
- a. « La carte tirée est le roi de cœur » ou « la carte tirée est un valet noir ».
 - b. « La carte tirée est un cœur » ou « la carte tirée est une figure ».
 - c. « La carte tirée est un pique » ou « la carte tirée n'est pas un pique ».
- 25 Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?
- a. Événement A : « la carte tirée est un cœur ».
 - b. Événement B : « la carte tirée est un roi ».
 - c. Événement C : « la carte tirée est le 10 de cœur ».
 - d. Événement A : « la carte tirée est un as noir ».
 - e. Événement B : « la carte tirée est une figure ».
- 26 On s'intéresse à l'événement C : « la carte tirée est un cœur ».
- a. Quelle est la probabilité $p(C)$ de l'événement C ?
 - b. Formuler l'événement contraire de l'événement C, c'est-à-dire l'événement tel que l'événement C n'est pas réalisé. On le note $\bar{C}$. Calculer sa probabilité.
 - c. Calculer $p(C) + p(\bar{C})$. Que remarque-t-on ?

- 27** On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
- 1 Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?
 - a. Événement A : « la carte tirée est un as ».
 - b. Événement B : « la carte tirée est un roi ou une dame ».
 - 2 a. Formuler les événements contraires $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
 - b. Calculer de deux manières différentes la probabilité de chacun de ces événements.

- 28** On fait tourner les cinq roues de loterie ci-dessous. Sur quelles roues la probabilité que le pointeur s'arrête sur une section jaune est-elle égale à la probabilité que le pointeur s'arrête sur une section rouge ?



- 29** Voici une roue de loterie partagée en six secteurs identiques. On la fait tourner et on s'intéresse au chiffre du secteur désigné par le pointeur.
- 
- a. Quelles sont les issues (ou résultats) possibles ? Sont-ils équiprobables ?
 - b. Soit A l'événement : « le chiffre est pair ». Quelles sont les issues favorables à l'événement A ? En déduire la probabilité de cet événement.
 - c. Reprendre les questions précédentes avec l'événement B : « le chiffre est inférieur à 5 ».

- 30** Une urne contient 12 boules vertes et 4 boules rouges. Une autre urne contient 20 boules vertes et 10 boules rouges. On tire au hasard une boule dans chacune des urnes.
- a. Dans quelle urne est-il plus facile d'obtenir une boule verte ?
 - b. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule verte pour chaque urne. On donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

- 31** Une urne contient 3 boules vertes et 1 boule rouge. Une autre urne contient 1 boule verte et 2 boules rouges. On tire une boule dans la première urne, puis une seconde dans l'autre urne.
- 1 Tracer un arbre de probabilité correspondant à ces deux épreuves successives. Déterminer toutes les issues possibles.
 - 2 Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?
 - a. « La première boule extraite est verte et la seconde est rouge. »
 - b. « Les deux boules extraites sont de la même couleur. »
 - c. « Au moins une des deux boules extraites est rouge. »

- 32** Une urne contient 5 boules rouges dont 2 ont une tache noire et 4 boules jaunes dont une a une tache noire. On extrait une boule au hasard. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?
- a. A : « la boule extraite est jaune ».
 - b. B : « la boule extraite a une tache noire ».
 - c. C : « la boule extraite n'est pas jaune et sans tache noire ».

- 33** On lance un dé cubique sur lequel est écrit le nombre 1 sur trois faces, est dessiné un rond sur deux faces et une croix sur une face. On lance le dé et on s'intéresse à la face supérieure.
- a. Les probabilités que sur la face soit inscrit le nombre 1, le rond ou la croix sont-elles égales ?
 - b. Quel est le résultat le plus facile à obtenir ? Le moins facile à obtenir ?
 - c. Déterminer la probabilité de chacun des trois résultats possibles.

34 QCM

Un sac contient cinq jetons noirs numérotés de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotés de 6 à 9. Les jetons sont indiscernables au toucher. On en tire un au hasard.

Parmi les trois réponses proposées, choisir les deux bonnes réponses.

1 La probabilité de tirer un jeton noir est :

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{5}{9}$

c. supérieure à celle de tirer un jeton rouge.

2 La probabilité de tirer un jeton rouge sur lequel est inscrit un numéro pair est :

a. $\frac{2}{9}$ b. $\frac{4}{9}$

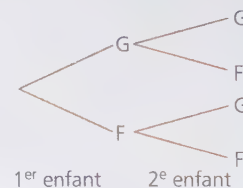
c. égale à celle de tirer un jeton rouge sur lequel est inscrit un numéro impair.

3 La probabilité de tirer un jeton sur lequel est inscrit un nombre multiple de 3 est :

a. $\frac{4}{9}$ b. $\frac{1}{3}$

c. égale à celle de tirer un jeton portant un diviseur de 9.

- 35** On suppose que, pour un couple, la probabilité d'avoir une fille ou un garçon est la même. Un couple souhaite avoir deux enfants. L'arbre ci-contre permet de constater que le couple a une chance sur quatre d'avoir deux garçons.



Quelle est la probabilité qu'il ait :

- a. deux enfants de même sexe ?
- b. un garçon en premier ?
- c. au moins une fille ?

Faire le point

36 QCM Indiquer, dans chaque cas, la réponse exacte parmi les trois proposées.

Pour les questions 1 à 7, on considère la série statistique suivante constituée des notes des élèves d'une classe de troisième à un contrôle :

Note	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectif	2	5	2	4	3	2	7	2

	A	B	C
1 La moyenne de la classe arrondie au dixième est :	11,6	11,5	11,7
2 La note médiane est :	11	12	11,5
3 L'étendue de cette série est :	11,5	7	5
4 Si on enlève les deux valeurs extrêmes :	la médiane ne change pas	la moyenne ne change pas	l'étendue ne change pas
5 La fréquence de la note 14 est, à 0,01 près :	0,14	0,07	0,26
6 L'effectif cumulé croissant de la note 12 est :	16	14	24
7 Les premier et troisième quartiles sont :	8 et 15	9 et 13	9 et 14

Pour les questions 8 à 10, on considère le regroupement en classes d'âges des adhérents d'un club d'escalade.

Âges (en années)	[10 ; 14[	[14 ; 18[	[18 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 76[
Effectif	25	29	31	37	33	7

8 L'âge médian est :	30 ans	compris entre 18 et 30 ans	43 ans
9 L'âge moyen est :	43 ans	environ 29 ans	exactement 29 ans 2 mois et 9 jours
10 L'étendue est :	81	30	66

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

- Déterminer les fréquences, la médiane et la moyenne relatives à une série statistique

37 Au cours de la diffusion d'un film dans une salle de cinéma de 288 places, dont toutes les places sont occupées, on a noté, dans un tableau, la répartition par tranches d'âge de tous les spectateurs.

Classe d'âge	Effectif	Fréquence en pourcentage
[15 ; 25[	118	
[25 ; 35[	69	
[35 ; 45[	97	
[45 ; 55[		
[55 ; 65[		11,6
Total	388	100

1 Reproduire et compléter le tableau ci-dessus en prenant soin de détailler le calcul de la fréquence en pourcentage de la classe [15 ; 25[. Arrondir au dixième.

2 Calculer la moyenne de cette série statistique, en remplaçant chaque classe par sa valeur centrale.

3 Déterminer la classe de l'âge médian de la série.

4 On croise un spectateur à la sortie de la séance, quelle est la probabilité qu'il ait moins de 25 ans ? Qu'il ait au moins 45 ans ?

- Calculer la probabilité d'un événement

38 On tire au hasard une bille dans une urne contenant 25 billes numérotées de 1 à 25.

- Combien de billes portent un numéro pair ?
- En déduire la probabilité d'extraire une bille avec un numéro pair.
- Quelle est la probabilité d'extraire une bille :
 - sur laquelle est inscrit un diviseur de 24 ?
 - sur laquelle n'est pas inscrit un diviseur de 24 ?

Approfondir

- 39** Avant de faire courir ses élèves autour d'un stade, un professeur d'éducation physique et sportive relève le nombre de pulsations cardiaques par minute de ses 32 élèves. Les résultats obtenus sont les suivants :

57	61	55	67	59	52	59	63
62	65	59	54	59	57	62	54
61	65	63	61	63	55	66	63
61	59	62	63	58	61	59	63

- 1** Montrer que le nombre moyen de pulsations par minute est égal à 60,25.

- 2** Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de pulsations par minute	[52 ; 56[	[56 ; 60[	[60 ; 64[	[64 ; 68[
Effectif	5			
Effectif cumulé croissant				

- 3** Faire l'histogramme représentant le tableau des effectifs.
4 Combien d'élèves ont au moins 60 pulsations par minute ?
5 Quel est le pourcentage d'élèves ayant un nombre de pulsations par minute inférieur à 60 ?
6 Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants. Les unités choisies seront : en abscisse, 1 cm pour 2 pulsations en commençant à 52 ; en ordonnée, 1 cm pour 4 élèves.
7 Déterminer par lecture graphique une valeur approchée à l'unité de la médiane de cette série.

40 Thème de convergence

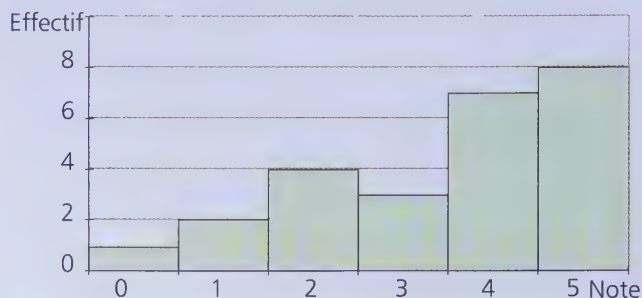
Sécurité routière

Le tableau ci-dessous est le relevé des accidents de la circulation de 1993 à 2002 en Nouvelle-Calédonie.

Année \ Nombre de	Tués	Blessés	Accidents corporels
1993	61	993	690
1994	72	903	625
1995	60	1014	707
1996	42	892	623
1997	66	893	772
1998	59	916	639
1999	58	983	696
2000	49	1079	735
2001	57	1021	738
2002	58	914	662

- 1** Calculer le nombre moyen de tués et le nombre moyen d'accidents par an sur ces dix années.
2 Peut-on dire que 949 ou 950 sont des valeurs médianes de la série des nombres de blessés ? Justifier.
3 Déterminer une médiane de la série des nombres d'accidents.

- 41** Voici l'histogramme des notes d'un contrôle noté sur 5 pour une classe de 25 élèves.



- 1** Reproduire et compléter le tableau suivant :

Note	0	1	2	3	4	5
Effectif						
Fréquence (en %)						
Fréquence cumulée croissante						

- 2** Calculer la moyenne des notes de la classe.
3 Déterminer la note médiane à partir des fréquences cumulées croissantes.
4 Construire le diagramme en bâtons des fréquences cumulées croissantes. Choisir comme unité en ordonnée, 1 cm pour 10 %.
5 Indiquer sur le diagramme comment on peut retrouver la valeur de la médiane.
6 Si on choisit au hasard un élève de la classe, quelle est la probabilité que cet élève ait eu au moins 3 sur 5 au contrôle ?

- 42** Le tableau suivant, donne la population totale de la ville de Lyon par tranche d'âge en 1990 et en 1999.

Âge (ans)	1990	1999
[0 ; 20[	88 954	94 252
[20 ; 40[	144 404	164 712
[40 ; 60[	92 823	100 059
60 ou plus	89 298	86 251

- 1** En prenant 72 ans comme valeur représentative de la dernière classe d'âge, calculer l'âge moyen arrondi à l'unité de ces deux séries.
2 a. Calculer les fréquences et les fréquences cumulées en pourcentage de ces deux séries arrondies à 0,1 près.
b. Dans un même repère, tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes de chacune des deux séries.
c. Placer le point d'ordonnée 50 sur chaque polygone. En déduire que l'âge médian en 1990 est supérieur à l'âge médian de 1999.
3 À l'aide des résultats des questions **1** et **2**c, peut-on affirmer que la population de Lyon rajeunit ?

Exercices

- 43** On a relevé les notes obtenues par les 112 élèves de troisième d'un collège à un devoir commun.

Notes n	$0 \leq n < 4$	$4 \leq n < 8$	$8 \leq n < 12$
Effectif	5	27	32

Notes n	$12 \leq n < 16$	$16 \leq n \leq 20$
Effectif	...	18

1 Reproduire et compléter le tableau avec la ligne des effectifs cumulés croissants.

2 Donner un encadrement de la note médiane.

3 Construire le polygone des effectifs cumulés croissants. Les unités choisies seront : en abscisse, 1 cm pour 2 points ; en ordonnée, 1 cm pour 10 élèves.

4 Par lecture graphique, donner une valeur approchée de la médiane de cette série. On laissera les traits nécessaires sur le graphique.

5 Soit m la valeur de la médiane obtenue en abscisses.

a. Placer sur le graphique, les points A(8 ; 32), B(12 ; 64), C(12 ; 32), M(m ; 56) et N(m ; 32).

b. Appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABC et AMN.

c. Montrer que $AN = m - 8$, puis calculer ainsi les longueurs AB, AM et AC.

d. Déterminer alors la valeur de m .

- 44** Voici les rémunérations mensuelles nettes moyennes en euros en France selon la catégorie socioprofessionnelle et le sexe en 2004 (secteurs privé et semi-public).

Statut	Ensemble	Hommes	Femmes
Cadres	3 783	4 025	3 112
Professions intermédiaires	1 934	2 028	1 786
Employés	1 318	1 365	1 303
Ouvriers	1 390	1 420	1 282
Moyennes	1 903	2 036	1 654

a. En supposant qu'il y ait la moitié d'hommes et de femmes parmi les cadres, quel serait le salaire moyen de l'ensemble de cette catégorie socioprofessionnelle ? En déduire que les hommes sont plus nombreux parmi les cadres.

b. En comparant de la même façon le salaire moyen de l'ensemble d'une catégorie par rapport aux salaires moyens des hommes et des femmes, déterminer les catégories où les hommes sont plus nombreux que les femmes.

c. Calculer la moyenne simple des rémunérations des quatre catégories professionnelles pour les hommes. Comparer le résultat obtenu avec la moyenne donnée dans la dernière ligne. Donner une explication.

d. Quelles sont les informations manquantes pour permettre de retrouver les valeurs de la dernière ligne à partir des données des quatre premières lignes du tableau ?

- 45** On lance deux dés cubiques parfaitement équilibrés dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la somme des chiffres des faces supérieures.

a. Recopier et compléter le tableau à double entrée ci-contre qui permet de récapituler tous les résultats possibles.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3				
2						
3				7		
4						
5						
6						

b. Quelles sont les issues possibles ou éventualités ?

c. Soit l'événement A :

« la somme est égale à 7 ».

Déterminer la probabilité de l'événement A.

d. Soit l'événement B : « la somme est supérieure ou égale à 8 ». Déterminer la probabilité de l'événement B.

46 Loto

Au jeu du loto, chaque joueur a un ou plusieurs cartons de 27 cases dont 15 portent un nombre. L'animateur extrait au hasard un jeton d'un sac qui contient les 90 jetons numérotés de 1 à 90 et annonce le numéro. Il ne remet pas le jeton tiré dans le sac.

Voici le carton d'un joueur au début de la partie.

6		26	32				71	83
9	14			45	53			84
	18		39	47		65	73	

a. Le premier numéro de la partie est tiré, quelle est la probabilité qu'il figure sur le carton du joueur ?

b. Un peu plus tard, les numéros suivants ayant déjà été tirés et annoncés : 8-10-17-28-29-34-50-58-61, quelle est la probabilité que le prochain numéro tiré soit sur le carton du joueur affiché ci-dessus ?

47 Ambiance de travail

Un chef d'entreprise effectue un sondage sur l'ambiance de travail auprès des 335 salariés de son entreprise. Voici les résultats obtenus (de façon anonyme) :

	Hommes	Femmes	Total
Bonne		56	
Mauvaise	59	78	
Total			335

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

b. Le chef d'entreprise rencontre un salarié au hasard. Quelle est la probabilité que ce salarié soit un homme ? Quelle est la probabilité que ce salarié soit un salarié mécontent ? Quelle est la probabilité que ce salarié soit une femme satisfaite de l'ambiance de travail ?

c. Le chef d'entreprise s'adresse maintenant uniquement aux femmes et en interroge une au hasard sur ses conditions de travail. Quelle est la probabilité qu'elle en soit mécontente ?

Déterminer la moyenne, la médiane et l'étendue d'une série

On veut déterminer les différents paramètres d'une série statistique, celle des distances (en km) des étapes du Tour de France 2007 qui sont : 203 ; 168,5 ; 236,5 ; 193 ; 182,5 ; 199,5 ; 197,5 ; 165 ; 159,5 ; 229,5 ; 182,5 ; 178,5 ; 54 ; 197 ; 196 ; 218,5 ; 188,5 ; 211 ; 55,5 ; 146.

a. Dans la cellule A1 , on entre le titre de la colonne.	Taper Distance en A1 .	
b. On entre les données de la série des distances.	Entrer les distances dans les cellules A2 à A21 .	
c. On entre les noms des paramètres que l'on veut calculer	Taper Moyenne en B1 , Médiane en B3 et Étendue en B5 .	
d. On entre la fonction Moyenne en C1 .	Dans la cellule C1 , entrer =, puis sélectionner MOYENNE dans le menu des fonctions.	
	Taper A2:A21 entre les parenthèses de MOYENNE() ou sélectionner la plage de données concernée.	
e. On détermine de la même manière la médiane de la série dans la cellule C3 .	Dans la cellule C3 , entrer = et sélectionner MEDIANE dans le menu des fonctions, puis sélectionner la plage de données concernée.	
f. On détermine l'étendue de la série dans la cellule C5 .	Dans la cellule C5 , entrer la formule =MAX(A2:A21)-MIN(A2:A21)	

10

Le théorème de Thalès et sa réciproque Agrandissement et réduction



Géomètres prenant
des mesures.
Gravure allemande,
1594

Comment mesurer
les grandeurs qui sont
inaccessibles ?

Au cours des siècles,
les savants ont inventé
différents instruments
de mesure...

Mais la plupart ne
permettaient pas d'obtenir
immédiatement
les mesures, il fallait appliquer
quelques **principes**
de géométrie,
par exemple le théorème
de Thalès pour avoir
le résultat recherché.

Mes biens chers frères,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

AMEN!



Gerbert, qui fut pape en l'an 1000 sous
le nom de Sylvestre II, a été le seul **pape**
mathématicien. Il a écrit un traité
de géométrie où il explique de **manière**
moderne les termes comme base, hauteur,
côté perpendiculaire à la base, hypoténuse, etc.
Il **a introduit le zéro** malgré
la grande résistance des clercs et a inventé
des instruments de mesure, dont certains
nécessitent l'utilisation du théorème
de Thalès.

Des situations particulières comme le **passage de Vénus** entre
la **Terre** et le **Soleil** ont permis, à partir de la **mesure des**
ombres sur le Soleil et en appliquant le **théorème de Thalès**,
de calculer la distance Terre-Soleil. Aujourd'hui nous savons que le Soleil
est à **8 minutes-lumière** de la Terre, ce qui correspond à
une distance que vous pouvez calculer sachant que la vitesse de la lumière
est de **300 000 kilomètres par seconde**.

Pour calculer 8 minutes-
lumière, pendant
la nuit, on fait
comment ?



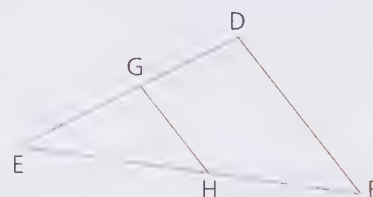
QCM

Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	Si $\frac{x}{3} = \frac{7}{5}$, alors :	$x = \frac{7 \times 3}{5}$	$x = \frac{7}{5 \times 3}$	$x = \frac{5}{7 \times 3}$
2	Si, pour $x \neq 0$, $\frac{2}{9} = \frac{5}{x}$, alors :	$x = \frac{2 \times 5}{9}$	$x = \frac{5 \times 9}{2}$	$x = \frac{5}{9 \times 2}$
3	Si $M \in [AB]$, alors les points sont alignés dans l'ordre :	A, M puis B	M, A puis B	A, B puis M
4	Dans le triangle ABC ci-contre, on a : $M \in [AB]$ $N \in [AC]$ $(MN) \parallel (BC)$. Alors on peut écrire :	$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{MB}$	$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$	$\frac{MN}{BC} = \frac{NC}{AC}$
5	Dans le triangle ci-dessous, on a : $(MN) \parallel (BC)$ $AB = 12$ $AM = 4$ $MN = 2$. On a alors :	$BC = 8$	$BC = 4$	$BC = 6$
6	D'après la figure ci-contre :	$(IJ) \parallel (BC)$	(IJ) et (BC) sont sécantes	on ne peut rien dire
7	Sur la figure ci-contre, on a : $(d) \parallel (FG)$ Alors :	$EJ = \frac{1}{3}EG$	$EJ = 2EG$	$EJ = \frac{1}{2}EG$
8	Si un quadrilatère $\mathcal{F}'$ est une réduction d'un quadrilatère $\mathcal{F}$ de facteur $\frac{1}{3}$ et si $\mathcal{F}$ a un périmètre de 36 cm, alors le périmètre de $\mathcal{F}'$ mesure :	108 cm	12 cm	39 cm

Exercice 1 Sur la figure ci-contre, on a :

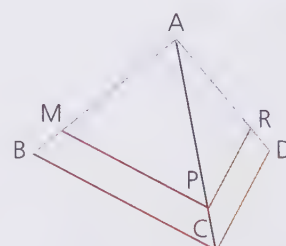
- $G \in [ED]$ et $H \in [EF]$
 - $(GH) \parallel (DF)$
 - $EG = 5$ cm, $ED = 9$ cm, $GH = 4$ cm et $EH = 7$ cm.
- Calculer les longueurs DF et EF.



Exercice 2 ABC et ACD sont deux triangles tels que :

- $M \in [AB]$, $P \in [AC]$, $R \in [AD]$
- $(MP) \parallel (BC)$, $(PR) \parallel (CD)$
- $CD = 10$ cm et $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$

Calculer la longueur PR.



Activité 1 Théorème de Thalès

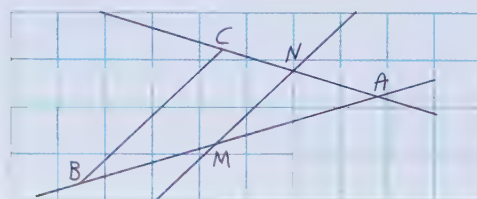
A Position d'une droite par rapport à une autre

1. Tracer deux droites d et d' sécantes en A .
Placer un point B distinct de A sur la droite d et un point C distinct de A sur la droite d' , puis tracer la droite (BC) .
2. On imagine une droite Δ passant par un point M de d et parallèle à la droite BC . Quelles sont les trois portions de la droite d sur lesquelles peut se trouver le point M ?

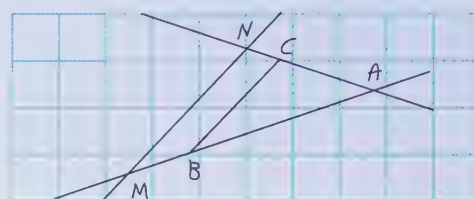
B Des situations déjà étudiées

Sur les figures de Maude et Matéo ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

1. Figure de Maude



2. Figure de Matéo



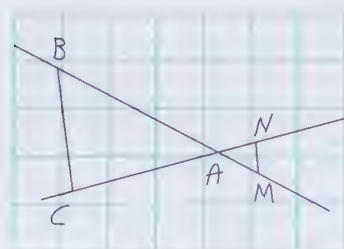
Les quotients $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont-ils égaux dans chacune des deux situations ? Justifier.

C Une nouvelle situation

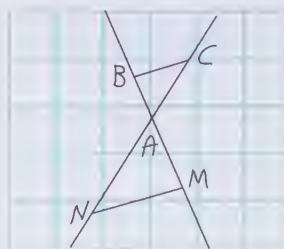
Conjecture

Voici les figures de trois autres élèves de la classe. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

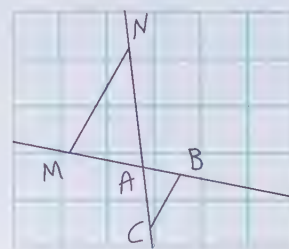
a. Figure de Sara



b. Figure de Karim



c. Figure d'Alexandre



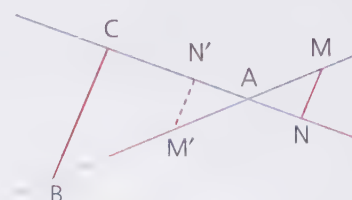
- a. Mesurer les longueurs AM , AB , AN , AC , MN et BC , puis comparer les quotients de longueurs $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ pour chacune des trois figures ci-dessus.

b. Que peut-on conjecturer ?

Démonstration

Sur la figure ci-contre, les droites (MN) et (BC) sont parallèles et les points M' et N' sont respectivement les symétriques des points M et N par rapport à A .

- a. Montrer que les droites $(M'N')$ et (BC) sont parallèles.
- b. Comparer les longueurs AM et AM' , puis les longueurs AN et AN' et enfin les longueurs MN et $M'N'$.
- c. En déduire que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



Activité 2 Réciproque du théorème de Thalès

A Avec un logiciel de géométrie

- a. Créer quatre points R, S, T et V tels que les droites (RS) et (TV) soient sécantes.
 - b. Créer le point A intersection des droites (RS) et (TV).
 - c. Placer un point B distinct de A sur la droite (RS), puis un point C distinct de A sur la droite (TV).
 - d. Tracer la droite (BC), puis masquer les points R, S, T et V.
 - e. Placer un point M sur la demi-droite [AB) et un point N sur la demi-droite [AC).
- Tracer la droite (MN).
- f. À l'aide de l'outil Calculatrice ou Table du logiciel, calculer et afficher les réels m et n tels que $m = \frac{AM}{AB}$ et $n = \frac{AN}{AC}$.
 - g. Déplacer le point N sur la demi-droite [AC) jusqu'à ce que les deux réels m et n soient égaux. Dans ce cas, que semble-t-on pouvoir dire des droites (MN) et (BC) ?
 - h. Déplacer à nouveau le point N. Existe-t-il d'autres positions pour le point N sur la demi-droite [AC) telles que les rapports m et n soient égaux ?
 - i. Quelle conjecture peut-on faire ?
 - j. Reprendre les questions f à i pour un point M sur la droite (AB) tel que les points M, A et B soient alignés dans cet ordre et pour un point N sur la droite (AC) tel que les points N, A et C soient alignés dans cet ordre.



B Avec une règle et un crayon

- 1 Tracer deux droites d et d' , graduées en centimètres, sécantes en A, puis placer un point B sur la droite d tel que $AB = 6$ cm et un point C sur la droite d' tel que $AC = 3$ cm.
- 2 On veut placer un point M sur d et un point N sur d' tels que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$.
 - a. Combien doit mesurer la longueur AM ? Combien doit mesurer la longueur AN ?
 - b. À combien d'endroits peut-on placer le point M ? À combien d'endroits peut-on placer le point N ?
- 3 a. Placer les points M_1 et N_1 vérifiant $\frac{AM_1}{AB} = \frac{AN_1}{AC} = \frac{2}{3}$ et tels que les points A, M_1 et B soient alignés dans cet ordre et les points A, N_1 et C dans cet ordre. Que semble-t-on pouvoir dire des droites (M_1N_1) et (BC) ?
 - b. Placer les points M_2 et N_2 vérifiant $\frac{AM_2}{AB} = \frac{AN_2}{AC} = \frac{2}{3}$ et tels que les points M_2 , A et B soient alignés dans cet ordre et les points N_2 , A et C dans cet ordre. Que semble-t-on pouvoir dire des droites (M_2N_2) et (BC) ?
- 4 Reprendre la question 3a pour placer les points I_1 sur (d) et J_1 sur (d') , puis la question 3b pour placer les points I_2 sur (d) et J_2 sur (d') tels que : $\frac{AI_1}{AB} = \frac{AJ_1}{AC} = \frac{AI_2}{AB} = \frac{AJ_2}{AC} = \frac{4}{3}$.
- 5 Quelle conjecture peut-on faire ?

Une démonstration de cette réciproque fait l'objet de l'exercice 52 page 194

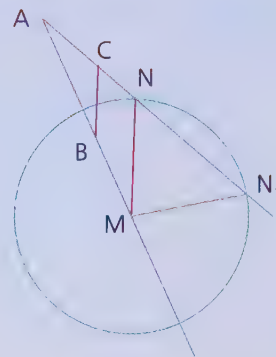
C Quotients égaux et droites non parallèles

Soient les triangles ABC et AMN ci-contre tels que B appartient à [AM] et C appartient à [AN] et soit le point N₁ tel que MN₁ = MN.

a. Sachant que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, que permettrait de supposer la conjecture établie dans les questions A et B ?

b. Montrer que $\frac{MN_1}{BC} = \frac{MN}{BC}$. L'égalité $\frac{AM}{AB} = \frac{MN_1}{BC}$ permet-elle de dire que les droites (MN₁) et (BC) sont parallèles ?

c. Que peut-on en déduire concernant la réciproque du théorème de Thalès ?



Activité 3 Agrandissement et réduction

1 Longueurs des côtés

a. En prenant le quadrillage comme repère, comparer les longueurs des côtés des triangles A₁B₁C₁, A₂B₂C₂ et A₃B₃C₃ en recopiant et complétant :

• A₁B₁ = --- A₃B₃ • A₂B₂ = --- A₁B₁

• B₁C₁ = --- B₃C₃ • B₂C₂ = --- B₁C₁

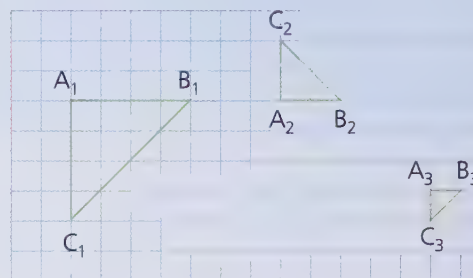
• A₁C₁ = --- A₃C₃ • A₂C₂ = --- A₁C₁

b. Quel(s) triangle(s) correspond(ent) à un agrandissement du triangle A₃B₃C₃ ? Préciser le facteur d'agrandissement dans chaque cas.

Quel(s) triangle(s) correspond(ent) à une réduction du triangle A₁B₁C₁ ? Préciser le facteur de réduction dans chaque cas.

c. Que peut-on dire du périmètre du triangle A₂B₂C₂ par rapport à celui du triangle A₁B₁C₁ ? Que peut-on dire du périmètre du triangle A₁B₁C₁ par rapport à celui du triangle A₃B₃C₃ ?

d. Par quel facteur doit-on multiplier le périmètre d'un triangle pour obtenir le périmètre de son triangle réduit ou agrandi ?



2 Aires

a. En prenant la longueur d'un carreau comme unité de longueur, donner l'aire des triangles A₁B₁C₁, A₂B₂C₂ et A₃B₃C₃.

b. Recopier et compléter : • Aire_{A₂B₂C₂} = --- Aire_{A₁B₁C₁} • Aire_{A₁B₁C₁} = --- Aire_{A₃B₃C₃}

c. Par quel facteur doit-on multiplier l'aire d'un triangle pour obtenir l'aire de son triangle réduit ou agrandi ?

3 Angles

a. Tracer un triangle ABC quelconque, puis placer un point O n'appartenant ni à la droite (AB), ni à la droite (AC), ni à la droite (BC).

b. Construire les points G, H et I sur les demi-droites [OA), [OB) et [OC) tels que : $OG = \frac{3}{2}OA$, $OH = \frac{3}{2}OB$ et $OI = \frac{3}{2}OC$.

c. Le triangle GHI est-il un agrandissement du triangle ABC ? Justifier.

d. Que peut-on dire sur les angles de ces deux figures ?

Cette démonstration nécessite le théorème de Thalès et sa réciproque.

A Le théorème de Thalès

Théorème

Soient d et d' deux droites sécantes en A .

Soient B et M deux points de d distincts de A .

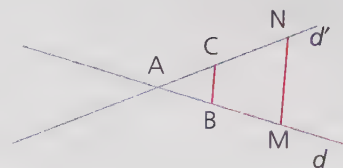
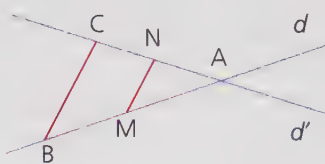
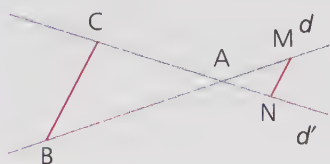
Soient C et N deux points de d' distincts de A .

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Exemples

Sur les trois figures ci-dessous, les points B et M appartiennent à la droite d , les points C et N appartiennent à la droite d' et les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on en déduit que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



Remarque

Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Longueur du côté [AM]	Longueur du côté [AN]	Longueur du côté [MN]
Longueur du côté [AB]	Longueur du côté [AC]	Longueur du côté [BC]

a

B Réciproque du théorème de Thalès

Théorème

Soient d et d' deux droites sécantes en A .

Soient B et M deux points de d distincts de A .

Soient C et N deux points de d' distincts de A .

Si les points A , B et M et les points A , C et N sont alignés dans le même ordre et si

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

IL faut utiliser l'égalité des quotients qui font intervenir le point d'intersection entre les deux droites sécantes.

Exemples

► Sur la figure ci-dessous, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Les points M , A et B sont alignés dans cet ordre ainsi que les points N , A et C .

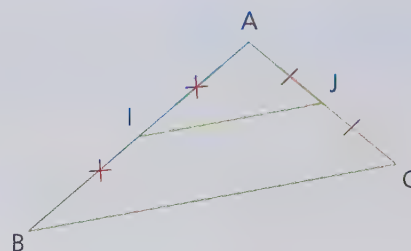
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



Remarque : La propriété admise en 4^e :

« Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle. »

est un cas particulier de la réciproque du théorème de Thalès.



C Agrandissement et réduction

Définition

Lorsque l'on multiplie par un nombre k **toutes** les longueurs d'une figure $\mathcal{F}$, on obtient une figure $\mathcal{F}'$ qui est :

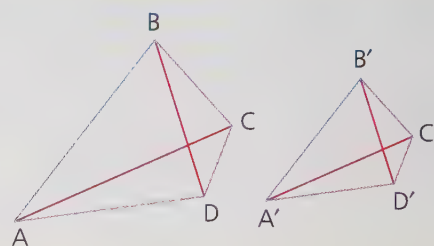
- un agrandissement de la figure $\mathcal{F}$ si k est strictement supérieur à 1 ;
- une réduction de la figure $\mathcal{F}$ si k est strictement compris entre 0 et 1.

Le nombre k est appelé le facteur d'agrandissement ou de réduction.

Exemple

Le quadrilatère $A'B'C'D'$ ci-contre est une réduction du quadrilatère $ABCD$ de facteur $\frac{2}{3}$. En effet, on a :

- $A'B' = \frac{2}{3}AB$; • $B'C' = \frac{2}{3}BC$;
- $C'D' = \frac{2}{3}CD$; • $D'A' = \frac{2}{3}DA$;
- $A'C' = \frac{2}{3}AC$ • $D'B' = \frac{2}{3}DB$.



Propriété

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction, les mesures d'angle sont conservées.

Remarque : Cette propriété implique que le parallélisme et la perpendicularité sont conservés lors d'un agrandissement ou d'une réduction.

Propriété

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de facteur k d'une figure $\mathcal{F}$:

- le périmètre de la figure $\mathcal{F}'$ obtenue est égal au produit du périmètre de $\mathcal{F}$ par k ;
- l'aire de la figure $\mathcal{F}'$ obtenue est égale au produit de l'aire de $\mathcal{F}$ par k^2 .

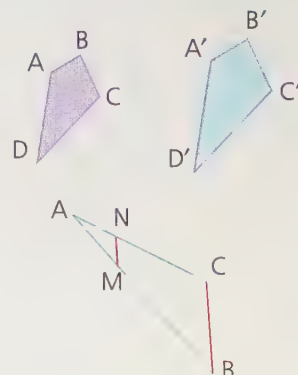
Exemple

$A'B'C'D'$ est un agrandissement de facteur $\frac{5}{4}$ de $ABCD$.

Alors $\text{aire}(A'B'C'D') = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \text{aire}(ABCD)$.

Remarque : Soit un triangle AMN obtenu en coupant le triangle ABC par une droite (MN) parallèle à la droite (BC) . Ce triangle est une réduction du triangle ABC de facteur k .

Alors : $\text{aire}(AMN) = k^2 \text{aire}(ABC)$.



Savoir-faire

1 Déterminer une longueur dans une figure contenant des droites parallèles

Énoncé Le parallélogramme ABCD ci-contre est tel que $AD = 6$ cm. E est un point du segment [BC] tel que $BE = 2$ cm. I est le point d'intersection des droites (AE) et (BD) et on donne : $BI = 4$ cm. Calculer la longueur DB.



Solution

ABCD est un parallélogramme donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

La figure contient des droites parallèles, on peut donc penser à utiliser le théorème de Thalès pour calculer la longueur recherchée.

Les droites (BD) et (AE) sont sécantes en I et les droites (BE) et (AD) sont parallèles.

On identifie les conditions nécessaires pour appliquer le théorème de Thalès.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on peut écrire les égalités de quotients :

$$\frac{IE}{IA} = \frac{IB}{ID} = \frac{EB}{AD}.$$

On applique le théorème de Thalès.

Or : $AD = 6$ cm, $BE = 2$ cm et $IB = 4$ cm.

On utilise les valeurs numériques données dans l'énoncé.

Donc on a : $\frac{IE}{IA} = \frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$.

Calcul de ID

On a : $\frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$.

On connaît la longueur IB et on cherche la longueur BD. Le point I appartenant au segment [BD], il suffit de calculer ID. Pour cela, on utilise l'égalité : $\frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$.

Donc : $6 \times 4 = 2 \times ID$.

On écrit l'égalité des produits en croix.

Donc : $ID = \frac{6 \times 4}{2} = 12$.

Calcul de BD

I appartient au segment [BD], donc :

On peut maintenant calculer BD.

$BD = BI + ID = 12 + 4 = 16$.

[BD] mesure 16 cm.

On conclut.

Savoir-faire

2 Démontrer que deux droites sont parallèles

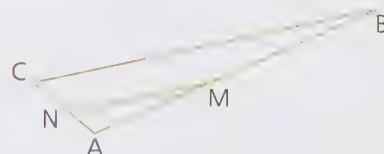
Énoncé On considère un triangle ABC tel que :

$AB = 7$ cm et $AC = 1,75$ cm.

Soit M un point du segment [AB] tel que : $AM = 3$ cm.

Soit N un point du segment [AC] tel que : $AN = 0,75$ cm.

Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



Solution

M appartient au segment [AB] et N appartient au segment [AC] donc les points A, M et B et les points A, N et C sont alignés dans le même ordre.

De plus on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{7} \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{0,75}{1,75} = \frac{3 \times 0,25}{7 \times 0,25} = \frac{3}{7}.$$

On constate que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

La réciproque du théorème de Thalès nous permet de montrer que les droites sont parallèles.

On vérifie une des conditions pour l'appliquer : l'ordre de l'alignement des points.

On vérifie une deuxième condition nécessaire pour appliquer la réciproque du théorème de Thalès : l'égalité des deux quotients de longueurs.

On conclut en utilisant la réciproque du théorème de Thalès.

Savoir-faire

3

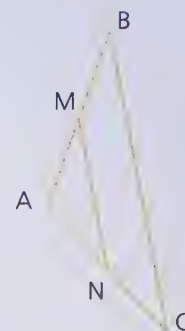
Démontrer que deux droites sont sécantes

Énoncé On considère le triangle ABC tel que : AB = 11 cm et AC = 10 cm.

Soit M un point du segment [AB] tel que : AM = 5,8 cm.

Soit N un point du segment [AC] tel que : AN = 5,2 cm.

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?



Solution

M appartient au segment [AB] et N appartient au segment [AC] donc les points A, M et B et les points A, N et C sont alignés dans le même ordre.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{5,8}{11} = \frac{58}{110}$$

$$\text{et } \frac{AN}{AC} = \frac{5,2}{10} = \frac{5,2 \times 11}{10 \times 11} = \frac{57,2}{110}.$$

On constate que : $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$.

Si les droites (BC) et (MN) étaient parallèles, alors les quotients seraient égaux.

Or ici les quotients de longueurs ne sont pas égaux, donc les droites ne peuvent pas être parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

La réciproque du théorème de Thalès peut peut-être nous permettre de répondre à la question.

On vérifie une des conditions nécessaires pour l'appliquer : l'ordre de l'alignement des points.

On cherche à savoir si les quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont égaux.

Les quotients de longueurs ne sont pas égaux. Donc la réciproque du théorème de Thalès ne nous permet pas de conclure.

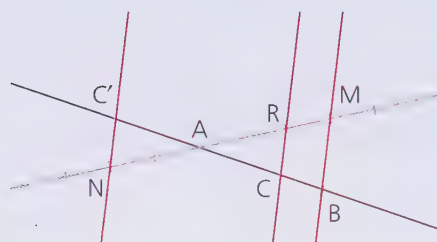
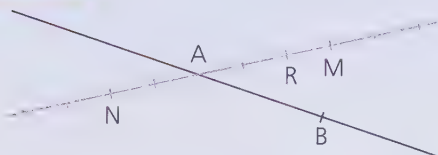
On essaye de raisonner en utilisant le théorème de Thalès.

1 Placer des points sur une droite avec une égalité de quotients

Énoncé Soient A et B deux points distincts sur une droite non graduée.

Construire les points C et C' sur la droite (AB) tels que : $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB} = \frac{2}{3}$.

Solution



On trace une droite graduée d'origine A distincte de la droite (AB).

On place les points M, N et R d'abscisses respectivement 3, -2 et 2 sur la droite graduée.

On trace la droite (MB) et les parallèles à la droite (MB) passant par R et N. Celles-ci coupent la droite (AB) respectivement en C et C'.

• Les droites (AB) et (AM) sont sécantes en A. Le point C appartient à (AB) et le point R appartient à (AM). De plus les droites (MB) et (CR) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a donc :

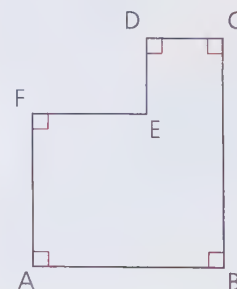
$$\frac{AR}{AM} = \frac{AC}{AB}. \text{ Or } \frac{AR}{AM} = \frac{2}{3}, \text{ donc } \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}.$$

• On suit le même raisonnement pour

$$\text{montrer que : } \frac{AN}{AM} = \frac{AC'}{AB} = \frac{2}{3}.$$

5 Calculer une aire

Énoncé Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{200}$, Maéva a représenté sa chambre. L'unité de longueur choisie est le centimètre. Quelle est la surface de la chambre ?



Solution

La chambre de Maéva est dessinée à l'échelle $\frac{1}{200}$, le plan est donc une réduction de la chambre de facteur 200.

D'où l'aire de la chambre de Maéva est égale à :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{ABCEDEF}} \times 200^2 &= (AF \times FE + BC \times DC) \times 200^2 \\ &= (2 \times 1,5 + 3 \times 1) \times 200^2 \\ &= 6 \times 200^2 = 240\,000. \end{aligned}$$

La chambre de Maéva a une aire de $240\,000 \text{ cm}^2$, soit 24 m^2 .

L'échelle $\frac{1}{200}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 200 cm dans la réalité.

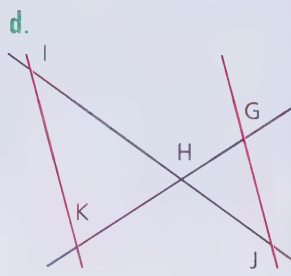
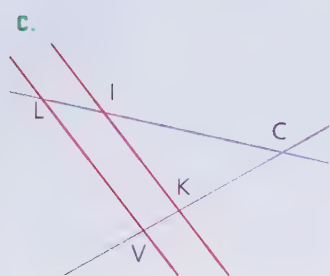
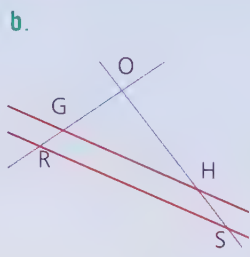
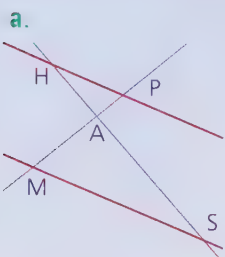
On utilise la propriété : « Lors d'un agrandissement de facteur k d'une figure $\mathcal{F}$, l'aire de la figure $\mathcal{F}'$ est égale au produit de l'aire de $\mathcal{F}$ par k^2 . »

On conclut.

S'entraîner

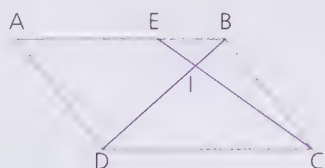
Théorème de Thalès

- 1** Sur chacune des figures suivantes, les droites rouges sont parallèles. Écrire toutes les égalités de quotients possibles.

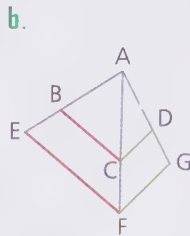
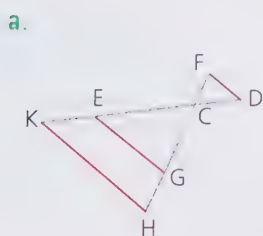


- 2** ABCD est un parallélogramme et E est un point du côté [AB]. I est le point d'intersection des droites (EC) et (BD). Justifier que : $\frac{IE}{IC} = \frac{IB}{ID} = \frac{EB}{DC}$.

Justifier que : $\frac{IE}{IC} = \frac{IB}{ID} = \frac{EB}{DC}$.



- 3** Dans chacun des deux cas ci-dessous, les droites rouges sont parallèles entre elles et les droites vertes sont parallèles entre elles. Écrire toutes les égalités de quotients possibles.



- 4** Sur la figure ci-contre, les droites (RS) et (BC) sont parallèles. De plus, on a : $AB = 10$ cm, $AC = 15$ cm, $AS = 9$ cm et $RS = 4,2$ cm. Calculer les longueurs des segments [AR] et [BC].



- 5** Sur chacune figures ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Associer chaque figure à l'égalité de quotients correspondante.

a. $\frac{3}{x} = \frac{8-6}{8}$

b. $\frac{x}{8-x} = \frac{3}{12}$

c. $\frac{x}{x+6} = \frac{3}{12}$

d. $\frac{2}{6} = \frac{x}{12}$

Figure 1

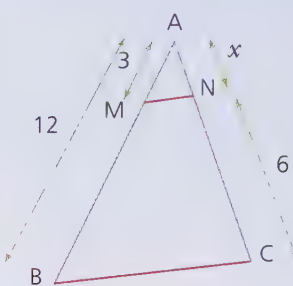


Figure 2

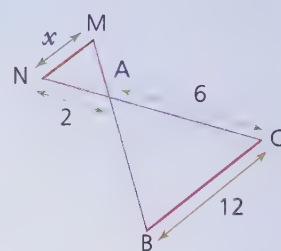


Figure 3

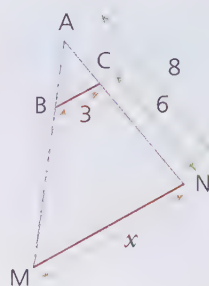
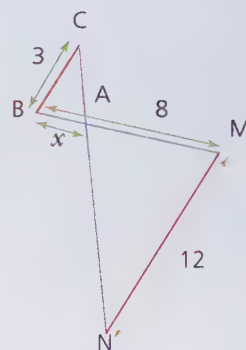


Figure 4



6 Vrai ou faux

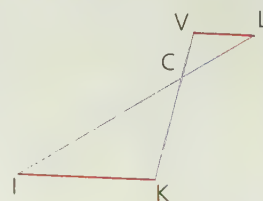
- 1** Dans un triangle ABC, si R est un point de [AB] et S un point de [BC], alors on a toujours :

$\frac{BR}{BA} = \frac{BS}{BC} = \frac{RS}{AC}$

- 2** Sur la figure ci-contre, les droites (VL) et (IK) sont parallèles.

a. Alors : $\frac{IL}{VK} = \frac{VL}{IK}$

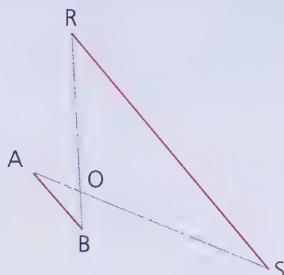
b. On a : $CL \times CK = CV \times CI$



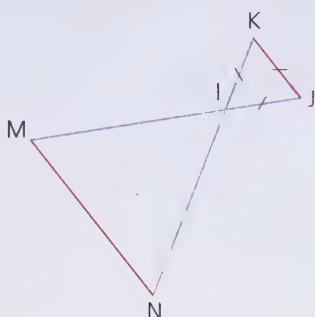
- 3** Dans un triangle IJK, si L est le milieu de [IJ] et si une droite d parallèle à la droite (JK) passant par L coupe le côté [IK] en M, alors : $\frac{IL}{IJ} = \frac{IM}{IK} = \frac{LM}{JK} = \frac{1}{2}$

Exercices

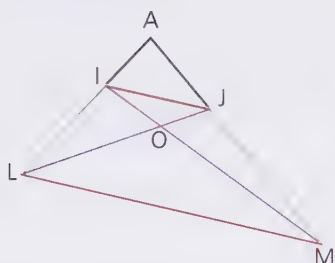
- 7** Sur la figure ci-dessous, les droites (AB) et (RS) sont parallèles.
De plus, on a : $AO = 2$ cm, $OS = 10$ cm, $AB = 3$ cm et $OB = 1,5$ cm.
Calculer les longueurs des segments [RS] et [OR].



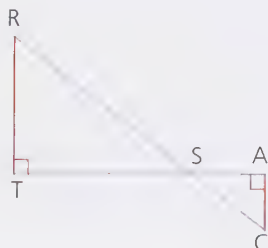
- 8** IJK est un triangle équilatéral.
Les points M, I et J ainsi que les points N, I et K sont alignés dans le même ordre et les droites (KJ) et (MN) sont parallèles.
Démontrer que le triangle IMN est un triangle équilatéral.



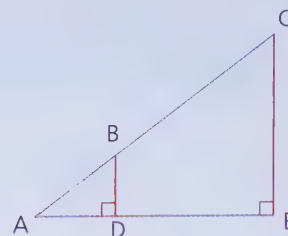
- 9** IJML est un trapèze dont les bases [IJ] et [LM] sont parallèles.
Les droites (IL) et (JM) se coupent en A.
On donne : $IO = 3$ cm ; $OM = 7$ cm et $AJ = 3,6$ cm.



- a. Déterminer la valeur du quotient $\frac{IJ}{LM}$.
b. Calculer AM, puis en déduire la valeur de JM.
- 10** Sur la figure ci-dessous, les triangles ACS et TRS sont rectangles respectivement en A et T.
On a : $AC = 3$ cm ; $AS = 4$ cm et $RS = 12,5$ cm.
Calculer les longueurs des côtés de l'angle droit du triangle TRS.



- 11** Sur la figure ci-dessous, les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires à la droite (AE).



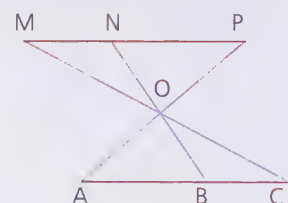
On a : $AB = 2,5$ cm ; $BD = 1,5$ cm et $CE = 4,5$ cm.

- 1 Calculer la longueur AD.
2 Calculer les longueurs AC et AE.

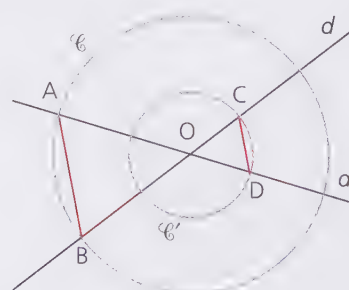
12 Vu au brevet

- 1 Construire un triangle EFG tel que $EF = 12$ cm, $EG = 5$ cm et $FG = 13$ cm.
2 Démontrer que le triangle EFG est rectangle en E.
3 Placer le point B du segment [EF] tel que $EB = 7$ cm. Tracer la droite passant par B et parallèle au côté [FG]. Elle coupe le côté [EG] en M.
4 Calculer la valeur exacte de BM, puis donner l'arrondi au mm près.

- 13** Sur la figure ci-dessous, les droites (MP) et (AC) sont parallèles.
De plus : $AC = 10$ cm ; $BC = 4$ cm ; $OC = 7$ cm ;
 $OA = 5$ cm ; $MN = 5,6$ cm.
Calculer les longueurs OM, OP et NP.



- 14** Sur la figure ci-dessous :
 $\mathcal{C}$ est un cercle de rayon 5 cm et de centre O ;
 $\mathcal{C}'$ est un cercle de centre O ;
 d et d' sont deux droites sécantes en O qui coupent les cercles $\mathcal{C}$ respectivement en A et B et le cercle $\mathcal{C}'$ respectivement en C et D.
On a : $AB = 45$ mm et $CD = 20$ mm.



- 1 Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2 Déterminer le rayon du cercle $\mathcal{C}'$ en millimètre. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction.

Réciproque du théorème de Thalès

- 15** On considère un triangle ABC tel que : $AB = 14$ cm et $AC = 17,5$ cm.

M est un point du côté [AB] tel que : $AM = 8$ cm.

N est un point du côté [AC] tel que : $AN = 10$ cm.

a. Faire une figure à main levée.

b. Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

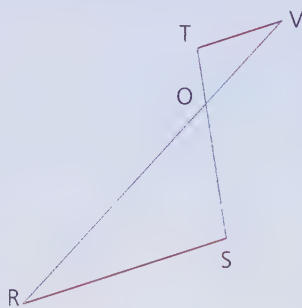
- 16** Sur la figure ci-contre, les points T, O et S sont alignés dans cet ordre ainsi que les points V, O et R.

De plus, on a : $OV = 15$ cm,

$OT = 7,5$ cm, $OS = 18$ cm et

$OR = 36$ cm.

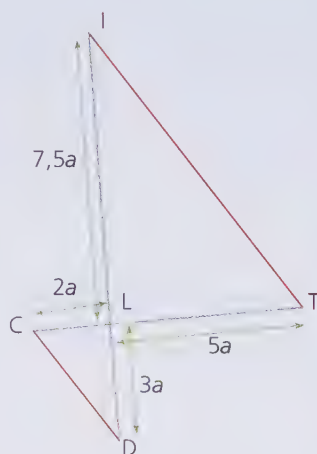
Démontrer que les droites (TV) et (RS) sont parallèles.



- 17** a est un nombre strictement positif.

Sur la figure ci-contre, les points C, L et T sont alignés dans cet ordre ainsi que les points D, L et I.

Les droites (CD) et (IT) sont-elles parallèles ?



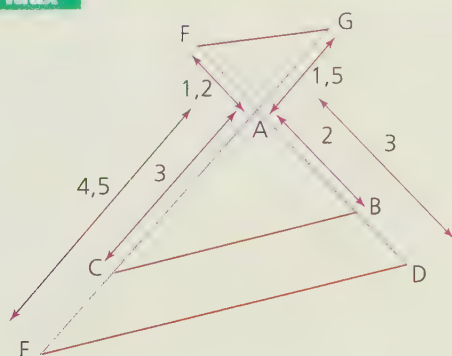
- 18** On considère un triangle EDF tel que : $EF = 18$ cm.
G est un point du côté [ED] tel que : $EG = 7$ cm et $GD = 5$ cm.

H est un point du côté [EF] tel que : $EH = 10,5$ cm.

a. Faire une figure à main levée.

b. Les droites (GH) et (DF) sont-elles parallèles ?

19 Vrai ou faux



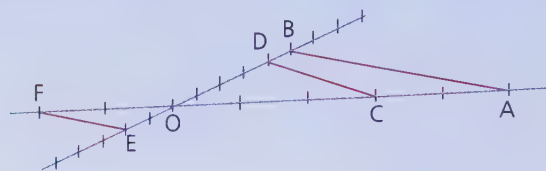
a. $(BC) \parallel (DE)$

b. $(GF) \parallel (BC)$

c. $(GF) \parallel (DE)$

d. $\frac{BC}{DE} = \frac{2}{3}$

- 20** Sur la figure ci-dessous, les graduations des deux droites sont régulières.



- a. Les droites (DC) et (FE) sont-elles parallèles ? Justifier.
b. Les droites (AB) et (FE) sont-elles parallèles ? Justifier.

- 21** ABCD est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en O. Les points A, O, C ainsi que les points B, O, D sont alignés dans cet ordre. On donne : $OA = 1,7$ cm ; $OB = 1,2$ cm ; $OC = 5,1$ cm et $OD = 3,6$ cm.

a. Faire une figure.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

c. Le quadrilatère ABCD peut-il être un parallélogramme ?

- 22** Sur la figure ci-dessous, les points A, C et E sont alignés dans cet ordre ainsi que les points B, C et D.

De plus, on sait que : $CD = 6$ cm, $CE = 7$ cm, $DE = 1,5$ cm, $CB = 18$ cm et $CA = 21$ cm.

- a. Démontrer que les droites (ED) et (AB) sont parallèles.
b. Calculer la longueur AB.



23 Vrai ou faux

Soient deux triangles ABC et AEF dont le sommet A est commun.

Sachant que les rapports $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AF}{AC}$ sont égaux, peut-on toujours en déduire que les droites (EF) et (BC) sont parallèles ? Justifier.

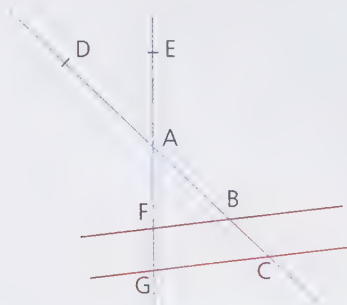
24 Vu au brevet

Sur la figure ci-dessous, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, les droites (BF) et (CG) sont parallèles.

① On donne : $AB = 5$; $BC = 4$; $AF = 3$.
Calculer AG puis FG.

② On donne : $AD = 7$; $AE = 4,2$.

Démontrer que les droites (ED) et (BF) sont parallèles.



Construction

- 25** a. Tracer un segment $[AB]$, puis une demi-droite $[Ax)$ non parallèle au segment $[AB]$.
 b. Graduer la demi-droite $[Ax)$ à l'aide d'un compas.
 c. Placer un point C d'abscisse 10 et un point M d'abscisse 7 sur la demi-droite $[Ax)$.
 d. Tracer la parallèle à (BC) passant par M. Elle coupe le segment $[AB]$ en N.
 e. Démontrer que $\frac{AN}{AB} = \frac{7}{10}$.

- 26** Tracer un segment $[DE]$, puis sans utiliser de règle graduée, placer le point K sur le segment $[DE]$ tel que : $\frac{DK}{DE} = \frac{3}{5}$.

- 27** Tracer un segment $[MN]$, puis, sans utiliser de règle graduée, le partager en 8 parties égales.

- 28** Tracer un segment $[AB]$, puis placer les points M_1 et M_2 de la droite (AB) tels que : $\frac{AM_1}{AB} = \frac{AM_2}{AB} = \frac{3}{4}$.

- 29** Tracer un segment $[IJ]$ puis, placer les points N_1 et N_2 de la droite (IJ) tels que : $\frac{JN_1}{JI} = \frac{JN_2}{JI} = \frac{5}{4}$.

- 30** a. Tracer un segment $[TR]$.
 b. Placer les points C_1 et C_2 de la droite (TR) tels que : $\frac{TC_1}{TR} = \frac{TC_2}{TR} = \frac{5}{8}$.
 c. Placer les points D_1 et D_2 de la droite (TR) tels que : $\frac{TD_1}{TR} = \frac{TD_2}{TR} = \frac{11}{8}$.

Agrandissement et réduction

- 31** Un carré de côté 6 cm a été agrandi d'un facteur $\frac{5}{2}$. On appelle $\mathcal{F}$ la figure agrandie.
 a. Quelle est la nature de $\mathcal{F}$?
 b. Déterminer les longueurs des côtés de $\mathcal{F}$.
 c. Déterminer de deux manières différentes l'aire de $\mathcal{F}$.

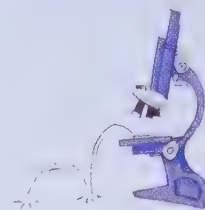
- 32** On multiplie le rayon d'un cercle par 4.
 a. Par quel nombre est multiplié la longueur du cercle ?
 b. Par quel nombre est multiplié l'aire du disque correspondant ?

- 33** Le jardin de Mathilde a une superficie de 3 500 m². Elle le représente sur un plan à l'échelle $\frac{1}{2\,500}$. Quelle est l'aire en cm² du jardin sur le plan ?

- 34** M. et Mme Dujardin souhaitent acheter un appartement plus grand que leur actuel de 70 m². Ils examinent un plan d'un appartement représenté à l'échelle $\frac{1}{100}$ dont l'aire est de 84 cm². Ce logement peut-il les intéresser ?

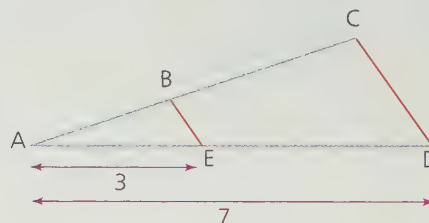
- 35** Soit $\mathcal{F}'$ une réduction de la figure $\mathcal{F}$. Sachant que l'aire de $\mathcal{F}$ est égale à 1 225 cm² et que l'aire de $\mathcal{F}'$ est égale à 100 cm², déterminer le facteur de réduction.

- 36** Sous la lamelle, une cellule animale a une aire d'environ 3×10^{-7} cm². Grâce à un microscope, on obtient un agrandissement dont l'aire est de 7 cm². Quel est le facteur d'agrandissement ?



Vrai ou faux

- a. L'agrandissement de facteur 2 d'un disque a une aire égale au double de celle du disque.
 b. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux figures. Si l'aire de $\mathcal{F}'$ est égale au produit de $\frac{81}{4}$ et de l'aire de la figure $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}'$ est un agrandissement de facteur $\frac{9}{2}$ de $\mathcal{F}$.
 c. Tout carré d'aire a est une réduction d'un carré d'aire b si $a < b$.
 d. Sur la figure ci-dessous, les droites (BE) et (CD) sont parallèles. Alors on a : $\text{aire}(\text{AEB}) = \frac{3}{7} \text{aire}(\text{ADC})$.



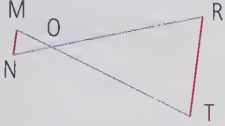
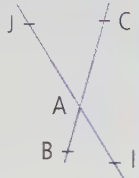
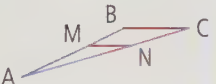
- 38** FGK est un triangle isocèle en F tel que $FG = 14$ cm. Soient H le pied de la hauteur issue de F, E un point du côté $[FG]$ et D est un point du côté $[FK]$ tels que les droites (ED) et (GK) soient parallèles et que ED mesure 12 cm. (FH) coupe le segment $[ED]$ en H' tel que $FH' = 8$ cm.
 a. Calculer l'aire du triangle EFD.
 b. Montrer que FED est une réduction du triangle FGK.
 c. Calculer la longueur EF, puis en déduire le facteur de réduction sous forme fractionnaire.
 d. Déterminer l'aire de GFK. Arrondir le résultat au dixième.

- 39** On considère un triangle ABC. M est un point du côté $[AB]$, N est un point du côté $[AC]$ tels que les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Déterminer la valeur de $\frac{AM}{AB}$ pour que l'aire du quadrilatère MNCB soit égale à la moitié de l'aire du triangle ABC.

- 40** ABCD est un rectangle tel que : $AB = 10$ cm et $AD = 4$ cm. G est un point du côté $[AB]$ tel que : $AG = 2,5$ cm. E est un point du côté $[AD]$ tel que : $AE = 1$ cm. La perpendiculaire à (AB) en G coupe la perpendiculaire à (AD) en E au point F. Démontrer que AGFE est une réduction de ABCD. Donner le facteur de réduction.

Faire le point

41 QCM Indiquer dans chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les quatre réponses proposées.

		A	B	C	D
1	Sur la figure ci-dessous, les droites (MN) et (RT) sont parallèles. Alors : 	$\frac{OT}{OM} = \frac{OR}{ON}$	$\frac{ON}{OR} = \frac{MN}{RT}$	$\frac{RT}{MN} = \frac{OM}{OT}$	$\frac{OM}{OT} = \frac{OR}{ON}$
2	Sur la figure ci-contre, $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{7}$ $\frac{AI}{AJ} = \frac{6}{10,5}$ Alors : 	(BI) // (JC)	on ne peut pas savoir si (BI) et (JC) sont parallèles	(BJ) // (IC)	on ne peut pas savoir si (BJ) et (IC) sont parallèles
3	On considère la figure ci-dessous telle que : $AM = 7$ $AB = 10$ $AN = 10,5$ $MN = 4,2$. Alors : 	(BC) // (MN)	On ne peut pas savoir si (BC) et (MN) sont parallèles	$BC = 6$	$\frac{BC}{MN} = \frac{AM}{AB}$
4	Une figure $\mathcal{F}'$ est un agrandissement d'une figure $\mathcal{F}$ tel que : $\text{Aire}(\mathcal{F}') = k \text{Aire}(\mathcal{F})$ avec $k > 1$. Alors :	le facteur d'agrandissement est k	le facteur d'agrandissement est $\sqrt{k}$	$\mathcal{F}$ est une réduction de $\mathcal{F}'$	le périmètre de $\mathcal{F}'$ est égal au produit du périmètre de $\mathcal{F}$ et de $\sqrt{k}$

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

Calculer des longueurs

- 42** On considère deux triangles AMN et ABC tels que :
- les points B, A et M sont alignés dans cet ordre ainsi que les points C, A et N ;
 - $AM = 5$ cm, $AN = 7$ cm, $CN = 35$ cm, $MN = 3$ cm ;
 - les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
- Calculer les longueurs BM et BC.

Démontrer que deux droites sont parallèles

- 43** On considère les points S, I, K et M alignés dans cet ordre et les points T, I, J et L alignés dans cet ordre.
 On donne : $SI = 10$ cm, $KI = 2,3$ cm, $MI = 15$ cm, $TI = 13$ cm, $JI = 3,75$ cm et $LI = 19,5$ cm.
- Les droites (ST) et (LM) sont-elles parallèles ?
 - Les droites (ST) et (JK) sont-elles parallèles ?

Construire un point sur une droite

- 44** a. Tracer un segment [AB].
 b. À l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, construire les points M_1 et M_2 sur la droite (AB) tels que : $\frac{AM_1}{AB} = \frac{AM_2}{AB} = \frac{5}{6}$.

Calculer l'aire d'un agrandissement

- 45** Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :
 $AC = 5$ cm et $AB = 7$ cm.
 Soit $AB'C'$ un agrandissement du triangle ABC tel que : $B' \in [AB]$, $C' \in [AC]$ et $AB' = 7,5$ cm.
 Déterminer l'aire du triangle $AB'C'$. Arrondir le résultat au centième.

Tous les exercices de cette page sont corrigés page 277.

Approfondir

46 Utiliser un cas particulier de Thalès

On considère le triangle ABC représenté ci-contre.

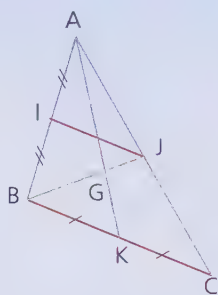
Le point I est le milieu de [AB] et le point K est le milieu de [BC].

La droite parallèle à la droite (BC) passant par le point I coupe le segment [AC] en J.

Le point G est le point d'intersection des droites (AK) et (BJ).

a. Démontrer que le point G est le centre de gravité du triangle ABC (on rappelle que le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection de ses médianes).

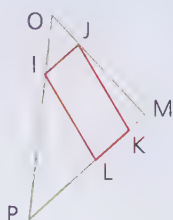
b. Démontrer que les points C, G et I sont alignés.



47 Sur la figure ci-contre, OPM est un triangle et IJKL est un parallélogramme tel que : $I \in [OP]$, $J \in [OM]$, $K \in [PM]$ et $L \in [PM]$.

Démontrer l'égalité suivante :

$$OM \times LK = OJ \times PM.$$



48 On considère les points M, I et K alignés dans cet ordre ainsi que les points N, I et J alignés dans cet ordre.

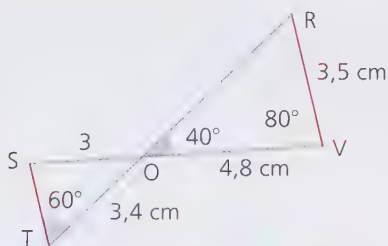
On donne : $IJ = 5$, $IK = 3x$, $IM = 5x + 3$ et $IN = 10$.

Déterminer la valeur de x pour laquelle les droites (JK) et (MN) sont parallèles.

49 On considère les triangles ORV et OST ci-dessous.

a. Démontrer que les droites (ST) et (RV) sont parallèles.

b. Calculer les longueurs OR et ST.



50 Thème de convergence

Physique

Un disque opaque de 12 cm de diamètre est éclairé par une lampe qui se comporte comme une source ponctuelle de lumière. Son ombre est projetée sur un écran parallèle au disque.

Le centre de la boule est situé à 1 m de la lampe et à 2,5 m de l'écran.

Quel est le diamètre de l'ombre portée sur l'écran ?



51 On veut démontrer la propriété suivante :

« Le point de concours des médianes d'un triangle, appelé centre de gravité, est situé aux deux tiers d'une médiane en partant du sommet. »

1 Construire un triangle ABC.

2 Placer le point I milieu de [AB] et le point J milieu de [AC].

3 Les droites (CI) et (BJ) se coupent en G. Que représente le point G pour le triangle ABC ?

4 Tracer le point M symétrique de A par rapport à G.

5 Démontrer que les droites (IG) et (BM) sont parallèles et que : $IG = \frac{1}{2}BM$.

6 Démontrer que les droites (JG) et (MC) sont parallèles.

7 Quelle est la nature du quadrilatère BGCM ?

8 En déduire que : $IG = \frac{1}{2}GC$.

9 Conclure.

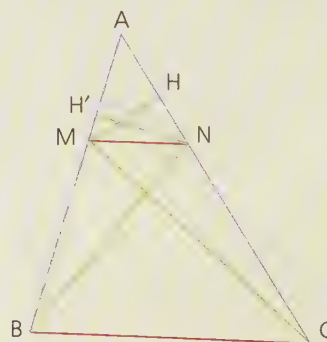
52 Une démonstration

La réciproque du théorème de Thalès dans un triangle

On considère un triangle ABC tel que $M \in [AB]$,

$N \in [AC]$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Dans le triangle AMN, H est le pied de la hauteur issue de M et H' est le pied de la hauteur issue de N.



1 Justifier que : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$.

2 En déduire que : $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$.

3 Déterminer les aires des triangles MNC et MNB, puis l'aire du triangle AMN de deux manières différentes.

4 Exprimer à l'aide de longueurs, $\frac{\text{aire}(MNB)}{\text{aire}(MNC)}$ et $\frac{\text{aire}(MNB)}{\text{aire}(AMN)}$.

5 En déduire que : $\text{aire}(MNB) = \text{aire}(MNC)$.

6 Que peut-on dire de la hauteur issue de B dans MNB et de la hauteur issue de C dans MNC ?

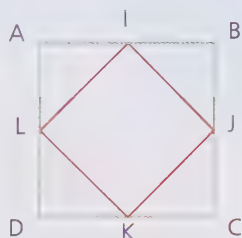
7 Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

- 53** ABCD est un trapèze dont les côtés [AB] et [DC] sont parallèles et tels que : $AB < DC$.
I est le milieu de [AB]. O est le point d'intersection des droites (AC) et (BD). O' est le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

- 1 Faire une figure.
- 2 La droite (OI) coupe le segment [DC] en J. Démontrer que J est le milieu de [DC].
- 3 La droite (O'I) coupe le segment [DC] en K. Démontrer que K est le milieu de [DC].
- 4 En déduire que les points O', I, O et J sont alignés.

- 54** 1 Tracer un triangle ABC, puis placer le point D milieu de [BC] et tracer la droite (AD).
2 Placer un point P sur le segment [BD].
3 Tracer la parallèle à la droite (AD) passant par P. Elle coupe respectivement les droites (AB) en M et (AC) en N.
4 Démontrer que : $PN = \frac{AD \times CP}{CD}$.
5 Démontrer que : $PM = \frac{AD \times BP}{BD}$.
6 Démontrer que : $PM + PN = 2 \times AD$.

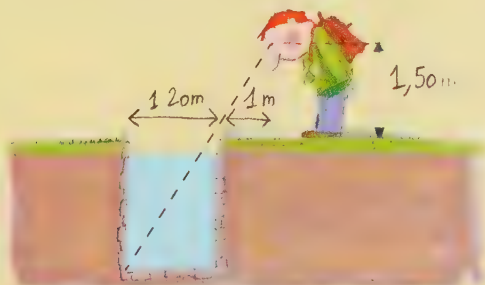
- 55** Soit ABCD un carré. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].



- 1 Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?
- 2 Déterminer le rapport : $\frac{\text{aire}(IJKL)}{\text{aire}(ABCD)}$.
- 3 En déduire le facteur de la réduction qui transforme ABCD en IJKL.

POUR LES CURIEUX

Un puits a pour diamètre 1,20 m. En se plaçant à 1 m du bord de ce puits, Théo peut aligner son œil, situé à 1,50 m de hauteur, avec le bord du puits et le coin opposé du fond du puits comme indiqué sur le dessin ci-dessous.



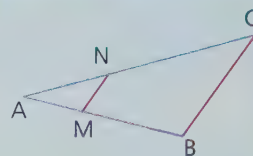
Argumenter et débattre

56 Vrai ou faux

- a. Sur la figure ci-contre, on a :

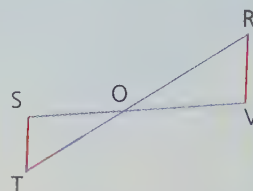
$AN = 5$; $AC = 7$; $AM = x$ et $MB = 3$.

On peut calculer la valeur de x .



- b. On ne peut construire qu'un seul point M sur la droite (AB) tel que : $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$.

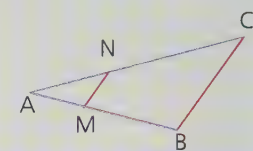
- c. Sur la figure ci-contre, si les droites (ST) et (RV) sont parallèles, alors on peut affirmer que le triangle ORV est un agrandissement ou une réduction du triangle OST.



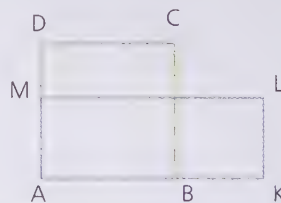
- d. Soit un triangle $\mathcal{T}'$ dont l'aire est égale à quatre fois celle du triangle $\mathcal{T}$. Alors $\mathcal{T}'$ est un agrandissement de facteur 2 du triangle $\mathcal{T}$.

- e. Sur la figure ci-contre, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$.

Alors $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$.



- 57** ABCD est un carré de côté a . K est un point de la demi-droite [AB) n'appartenant pas au segment [AB]. Comment placer le point M sur le segment [AD] pour que le rectangle AKLM ait la même aire que le carré ABCD ? On donnera une construction géométrique.



- 1 a Effectuer un schéma de cette situation et nommer les points nécessaires pour le calcul de la profondeur du puits.
b En déduire la profondeur du puits (arrondir au mm).

Dans l'Antiquité, on mesurait la profondeur d'un puits, dont on connaissait le diamètre D , en alignant son œil avec le bord du puits et le coin opposé du fond du puits. Connaissant la distance d de recul par rapport au puits et la taille h des pieds à l'œil de l'arpenteur, on pouvait en déduire la profondeur du puits.

- 2 Justifier la méthode utilisée dans l'Antiquité pour mesurer la profondeur d'un puits.

Agrandissement

On considère un triangle ABC et un point O extérieur au triangle ABC.

On place respectivement sur les demi-droites [AO), [BO) et [CO) les points A', B' et C' tels que :

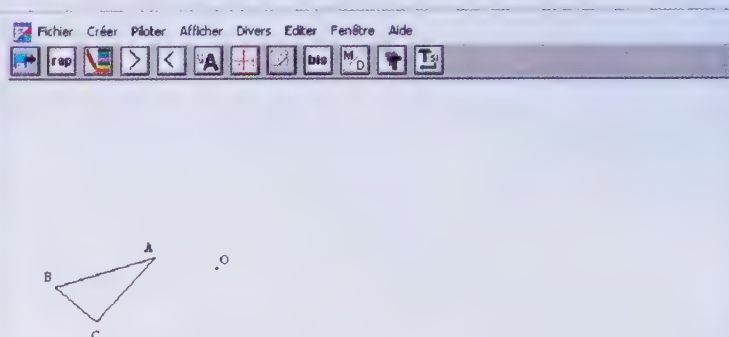
- $OA' = 3OA$ et $A' \notin [AO]$
- $OB' = 3OB$ et $B' \notin [BO]$
- $OC' = 3OC$ et $C' \notin [CO]$

On se propose de déterminer l'aire du triangle A'B'C' en fonction de l'aire du triangle ABC.

1 Observer et conjecturer

1.a. Créer un triangle ABC.

b. Créer un point O extérieur au triangle ABC.



2.a. Créer la droite graduée (OA) telle que la longueur OA soit égale à une unité.

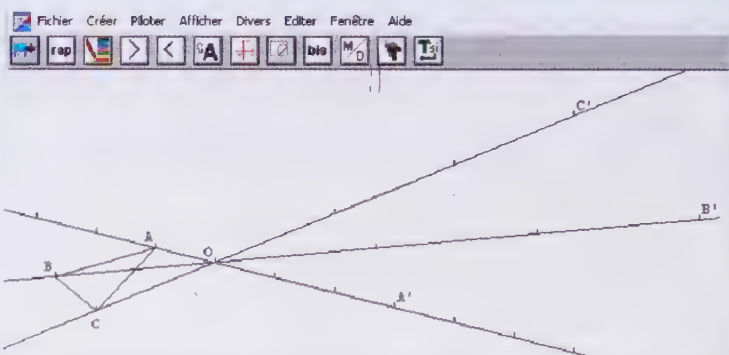
b. Créer le point A' de la droite (OA) repéré par l'abscisse -3.

c. Créer la droite graduée (OB) telle que la longueur OB soit égale à une unité.

d. Créer le point B' de la droite (OB) repéré par l'abscisse -3.

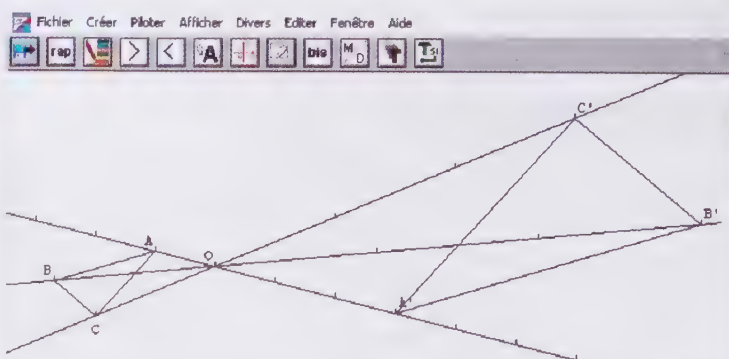
e. Créer la droite graduée (OC) telle que la longueur OC soit égale à une unité.

f. Créer le point C' de la droite (OC) repéré par l'abscisse -3.



3. Créer le triangle A'B'C'.

Que semble-t-on pouvoir dire des triangles ABC et A'B'C' ?



2 Démontrer

- Démontrer que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles, ainsi que les droites (BC) et (B'C'), et (AC) et (A'C').
- Démontrer que : $A'B' = 3AB$, $B'C' = 3BC$ et $A'C' = 3AC$.
- En déduire que le triangle A'B'C' est un agrandissement du triangle ABC.
- Démontrer que : $\text{aire}(A'B'C') = 9 \times \text{aire}(ABC)$.

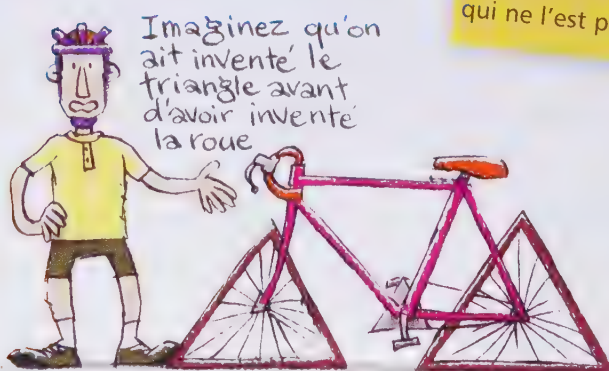
11

Triangle rectangle et relations trigonométriques

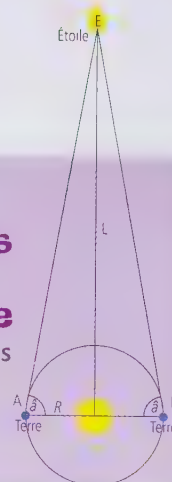


Ce triangle composé de dés semble **parfaitement normal...** jusqu'à ce que vous essayiez de le construire. Chaque côté contient le même nombre de dés : c'est donc un **triangle équilatéral**, mais les trois angles ont l'air de mesurer **90 degrés !** La construction est une illusion... Chaque sommet, pris indépendamment est possible, c'est l'ensemble qui ne l'est pas.

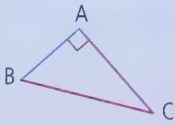
Le mot « **trigonométrie** » vient du grec « *trigone* » (triangle) et « *metron* » (mesure). Dans l'*Encyclopédie* (1751), la trigonométrie est définie comme « **l'art de trouver les parties inconnues** d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît ».



La trigonométrie est une géométrie appliquée à l'**étude du monde** et de l'Univers, elle est donc fortement liée à l'**avancée des progrès** en astronomie. Les astronomes babyloniens l'utilisèrent pour déterminer la distance entre les étoiles, les planètes... La **distance L d'une étoile** à la Terre peut être déterminée en visant cette étoile de la Terre à deux moments séparés de six mois, c'est-à-dire quand la Terre a effectué une demi-révolution sur elle-même. On **mesure les angles** $\widehat{EAB}$ et $\widehat{EBA}$ égaux à $\hat{a}$, et la formule **$L = R \times \tan \hat{a}$** donne la longueur L .



QCM Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	Dans le triangle ABC rectangle en A, le côté [AB] est appelé : 	l'hypoténuse	le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$	le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$
2	Le triangle ABC est rectangle en A tel que : AB = 51 cm et AC = 68 cm. Alors :	BC = 45 cm	BC = 119 cm	BC = 85 cm
3	DEF est un triangle tel que : DE = 6,3 cm, EF = 8,4 cm et FD = 10,5 cm. Alors :	le triangle DEF est rectangle en D	le triangle DEF est rectangle en E	le triangle DEF n'est pas rectangle
4	Dans le triangle GHI, l'angle $\widehat{GIH}$ mesure : 	108°	18°	90°
5	La somme des mesures de deux angles complémentaires est égale à :	180°	100°	90°
6	Le triangle LMN est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [MN]. Le triangle LMN est :	rectangle en L	rectangle en M	rectangle en N
7	Si le triangle RST est rectangle en S et si RS = 3, RT = 5 et ST = 4, alors :	$\cos \widehat{STR} = \frac{3}{5}$	$\cos \widehat{STR} = \frac{5}{4}$	$\cos \widehat{STR} = \frac{4}{5}$
8	Si $\cos \widehat{ABC} = \frac{1}{2}$, alors :	$\widehat{ABC} = 30^\circ$	$\widehat{ABC} = 45^\circ$	$\widehat{ABC} = 60^\circ$
9	Si $\widehat{ABC}$ est un angle aigu, alors :	$\cos \widehat{ABC} > 1$	$0 < \cos \widehat{ABC} < 1$	$\cos \widehat{ABC}$ est négatif
10	Si $\cos \widehat{ANG} = 0,425$, alors :	$\widehat{ANG} = 64^\circ$	$\widehat{ANG} = 64,8^\circ$	$\widehat{ANG} \approx 64,8^\circ$

Exercice 1 Soit x un nombre non nul. Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{x}{5} = 17$

b. $\frac{x}{7} = \frac{6}{9}$

c. $\frac{4}{x} = 15$

d. $\frac{5}{x} = \frac{3}{2}$

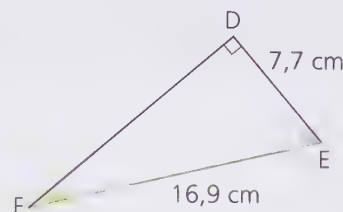
Exercice 2 a. Construire un triangle ABC rectangle en A tel que : AC = 6,7 cm et BC = 10 cm.

b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$. On donnera l'arrondi à l'unité.

Exercice 3 On considère le triangle DEF ci-contre.

Calculer la mesure, en degré, de chacun des angles du triangle DEF.

On donnera les arrondis au dixième.



Exercice 4 Soit un triangle KLM rectangle en K tel que : $\widehat{KML} = 28^\circ$ et ML = 13,6 cm.

Calculer la longueur MK. On donnera l'arrondi à l'unité.

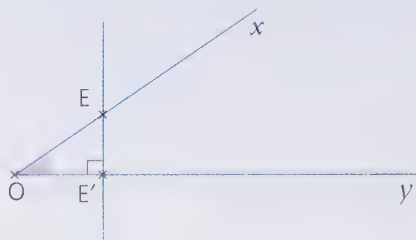
Exercice 5 Soit un triangle GHI rectangle en H tel que : $\widehat{IGH} = 57^\circ$ et GH = 5,5 cm.

Calculer la longueur GI. On donnera l'arrondi au dixième.

Activité 1 Sinus d'un angle aigu

A Conjecturer

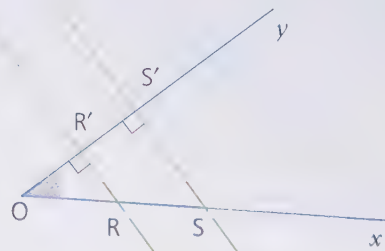
- 1 Tracer un angle aigu $\widehat{xOy}$ de sommet O.
- 2
 - a. Placer un point E sur la demi-droite $[Ox)$, puis tracer la droite perpendiculaire à $[Oy)$ passant par E ; elle coupe $[Ox)$ en E'.
 - b. Mesurer les longueurs OE et EE'.
 - c. Calculer l'arrondi au dixième du quotient $\frac{EE'}{OE}$.
- 3
 - a. Placer un point F, distinct de E, sur la demi-droite $[Ox)$. Tracer la droite perpendiculaire à $[Oy)$ passant par F ; elle coupe $[Ox)$ en F'.
 - b. Mesurer les longueurs OF et FF'.
 - c. Calculer l'arrondi au dixième du quotient $\frac{FF'}{OF}$.
- 4 Comparer les quotients $\frac{EE'}{OE}$ et $\frac{FF'}{OF}$. Que constate-t-on ?
- 5 Reprendre les questions 1 à 4 en modifiant la mesure de l'angle $\widehat{xOy}$.
- 6 Recopier et compléter la conjecture suivante :
 Soit un point E sur la demi-droite $[Ox)$ et soit E' le point d'intersection de la demi-droite $[Oy)$ et de la droite --- à $[Oy)$ passant par E.
 Quelle que soit la position du point E sur la demi-droite $[Ox)$, le quotient $\frac{EE'}{OE}$ est --- .
 On appelle ce quotient le **sinus** de l'angle $\widehat{xOy}$. On le note $\sin \widehat{xOy}$.



B Démontrer

Sur la figure ci-contre,

- $\widehat{xOy}$ est un angle aigu,
- R et S sont deux points de la demi-droite $[Ox)$,
- R' et S' sont deux points de la demi-droite $[Oy)$,
- les droites (RR') et (SS') sont perpendiculaires à $[Oy)$.



- 1
 - a. Montrer que les droites (RR') et (SS') sont parallèles.
 - b. Quelle propriété permet d'obtenir les égalités :

$$\frac{OR}{OS} = \frac{RR'}{SS'} = \frac{OR'}{OS'} ?$$
- 2 Que peut-on dire des produits $OR \times SS'$ et $RR' \times OS$?
 En déduire l'égalité $\frac{SS'}{OS} = \frac{RR'}{OR}$. Conclure.

Activité 2 Tangente d'un angle aigu

A Conjecturer avec un logiciel de géométrie

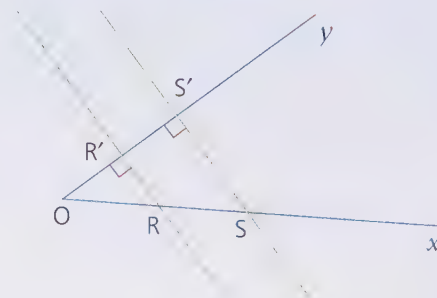
- 1
 - a. Créer trois points A, O et B tels que l'angle $\widehat{AOB}$ soit aigu.
 - b. Créer les demi-droites [OA) et [OB).
 - c. Créer un point E sur la demi-droite [OA) distinct de O.
 - d. Créer la droite perpendiculaire à la demi-droite [OB) passant par E, puis créer le point d'intersection E' de cette droite et de la demi-droite [OB).
 - e. Afficher la longueur des segments [EE'] et [OE'].
- 2
 - a. À l'aide des fonctions Calculatrice ou Table du logiciel, afficher la valeur du quotient $\frac{EE'}{OE'}$.
 - b. Déplacer le point E sur la demi-droite [OA) et comparer les valeurs du quotient $\frac{EE'}{OE'}$ selon la position du point E. Que remarque-t-on ?
- 3 Déplacer les points A et B, puis déplacer de nouveau le point E sur la demi-droite [OA). Comparer les valeurs du quotient $\frac{EE'}{OE'}$ selon la position du point E.
- 4 Quelle conjecture peut-on émettre ?

Le quotient $\frac{EE'}{OE'}$ s'appelle la **tangente** de l'angle $\widehat{AOB}$. On le note $\tan \widehat{AOB}$.

B Démontrer

Sur la figure ci-contre,

- $\widehat{xOy}$ est un angle aigu,
- R et S sont deux points de la demi-droite [Ox),
- R' et S' sont deux points de la demi-droite [Oy),
- les droites (RR') et (SS') sont perpendiculaires à [Oy).



- 1 Démontrer les égalités suivantes :

$$\frac{OR}{OS} = \frac{RR'}{SS'} = \frac{OR'}{OS'}$$

- 2 Que peut-on dire des produits $OR' \times SS'$ et $RR' \times OS'$?

En déduire l'égalité $\frac{SS'}{OS'} = \frac{RR'}{OR'}$ puis conclure.



Dans un triangle rectangle

-

- $$\frac{\text{longueur du côté } \dots \text{ à cet angle}}{\text{longueur de } \dots}$$

- Le sinus d'un angle est au cosinus de son angle

- $$\frac{\text{longueur du côté} \dots \text{à cet angle}}{\text{longueur du côté} \dots \text{à cet angle}}$$

Propriétés liant le sinus et le cosinus d'un même angle

On note $\hat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$.

-
- A right-angled triangle with vertices labeled A, B, and C. The right angle is at vertex C, indicated by a small square symbol. Vertex A is at the bottom right, and vertex B is at the bottom left.

C. Quelle égalité peut-on en déduire ?

- d. Justifier l'égalité : $(\sin \hat{A})^2 + (\cos \hat{A})^2 = 1$.

Chapitre 11 ■ Triangle rectangle et relations trigonométriques ■ 201

A Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

1 Définitions

Définitions

Dans un triangle rectangle,

- le **cosinus** d'un angle aigu est égal au quotient :

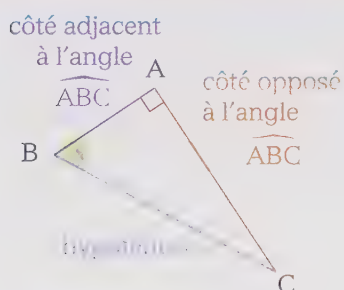
$$\frac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

- le **sinus** d'un angle aigu est égal au quotient :

$$\frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

- la **tangente** d'un angle aigu est égale au quotient :

$$\frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$$



Dans le triangle ABC rectangle en A,

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$$

Remarques

- L'hypoténuse est le plus grand côté du triangle donc le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont des nombres compris entre 0 et 1.
- Les longueurs doivent être exprimées dans la même unité.

2 Utilisation de la calculatrice

➔ Savoir-faire 1 et 2, pages 204 et 205

On peut utiliser la calculatrice pour calculer :

- la valeur du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle dont on connaît la mesure ;
- la mesure d'un angle dont on connaît la valeur du cosinus, du sinus ou de la tangente.

Exemples

On commence par mettre la calculatrice en mode degré.

► Calculer l'arrondi au millième de $\sin 55^\circ$.

	CASIO Collège 2D	TI-Collège
On tape la séquence de touches :	$\sin$ $\boxed{5}$ $\boxed{5}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$	$\sin$ $\boxed{5}$ $\boxed{5}$ $\boxed{)}$ $\boxed{ENTER}$
On obtient :	$\sin(55)$ 0.8191520443	$\sin(55)$ 0.819152044
On conclut :	En arrondissant au millième, on obtient : $\sin 55^\circ \approx 0,819$	

- Calculer l'arrondi au millième de $\tan 72,4^\circ$.

	CASIO Collège 2D	TI-Collège
On tape la séquence de touches :	$\boxed{\tan} \boxed{7} \boxed{2} \boxed{.} \boxed{4} \boxed{)} \boxed{\text{EXE}}$	$\boxed{\tan} \boxed{7} \boxed{2} \boxed{.} \boxed{4} \boxed{)} \boxed{\text{ENTER}}$
On obtient :	$\tan(72.4)$ 3.152399419	$\tan(72.4)$ 3.152399419
On conclut :	En arrondissant au millième, on obtient : $\tan 72,4^\circ \approx 3,152$	

- Sachant que $\sin \widehat{ABC} = 0,8579$, calculer l'arrondi au centième de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

	CASIO Collège 2D	TI-Collège
On tape la séquence de touches :	$\boxed{[\text{Asn}]} \boxed{0} \boxed{.} \boxed{8} \boxed{5} \boxed{7} \boxed{9} \boxed{)} \boxed{\text{EXE}}$	$\boxed{[\sin^{-1}]} \boxed{0} \boxed{.} \boxed{8} \boxed{5} \boxed{7} \boxed{9} \boxed{)} \boxed{\text{ENTER}}$
On obtient :	$\sin^{-1}(0.8579)$ 59.08160641	$\sin^{-1}(0.8579)$ 59.08160641
On conclut :	En arrondissant au centième, on obtient : $\widehat{ABC} \approx 59,08^\circ$	

- Sachant que $\tan \widehat{ABC} = 1,5$, calculer l'arrondi au centième de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

	CASIO Collège 2D	TI-Collège
On tape la séquence de touches :	$\boxed{[\text{Atn}]} \boxed{1} \boxed{.} \boxed{5} \boxed{)} \boxed{\text{EXE}}$	$\boxed{[\tan^{-1}]} \boxed{1} \boxed{.} \boxed{5} \boxed{)} \boxed{\text{ENTER}}$
On obtient :	$\tan^{-1}(1.5)$ 56.30993247	$\tan^{-1}(1.5)$ 56.30993247
On conclut :	En arrondissant au centième, on obtient : $\widehat{ABC} \approx 56,31^\circ$	

B Propriétés

Propriétés

Soit $\widehat{A}$ un angle aigu, alors on a :

- $\tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$
- $\sin^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{A} = 1$

Ces propriétés sont démontrées dans l'activité 4

Exemple

Soit $\widehat{A}$ un angle aigu.

Sachant que $\cos \widehat{A} = \frac{5}{13}$, on peut calculer les valeurs exactes de $\sin \widehat{A}$ et $\tan \widehat{A}$.

En effet, $\sin^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{A} + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$,

d'où $\sin^2 \widehat{A} = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$, or le sinus

d'un angle aigu est un nombre toujours positif, donc $\sin \widehat{A} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$.

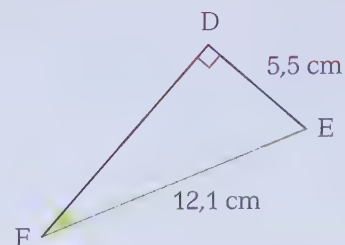
Puisque $\tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$, on a : $\tan \widehat{A} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{13} \times \frac{13}{5} = \frac{12}{5}$.

$\sin^2 \widehat{A}$ est une écriture simplifiée de $(\sin \widehat{A})^2$ et $\cos^2 \widehat{A}$ est une écriture simplifiée de $(\cos \widehat{A})^2$.

➔ Savoir-faire 3, page 206

Savoir-faire 1 Calculer la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle

Énoncé 1 Calculer la mesure de l'angle $\widehat{DFE}$ du triangle rectangle DEF représenté ci-contre. On donnera l'arrondi au centième de degré.



Solution

Le triangle DEF est rectangle en D, donc on peut écrire :

$$\sin \widehat{DFE} = \frac{DE}{EF}$$

Or, d'après la figure de l'énoncé, on sait que :

$$DE = 5,5 \text{ cm et } EF = 12,1 \text{ cm.}$$

$$\text{Donc } \sin \widehat{DFE} = \frac{5,5}{12,1}$$

$$\text{d'où : } \widehat{DFE} \approx 27,04^\circ.$$

L'arrondi au centième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{DFE}$ est $27,04^\circ$.

Le triangle DEF est rectangle en D et on connaît :
– la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{DFE}$,
– la longueur de l'hypoténuse.
On peut donc utiliser la définition de $\sin \widehat{DFE}$.

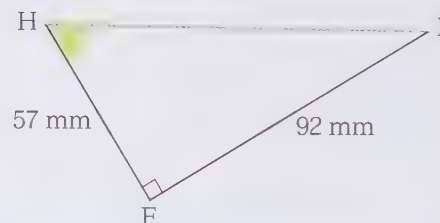
En utilisant la touche $\sin^{-1}$ ou Asn de la calculatrice, on obtient :

$$\sin^{-1}(5,5 \div 12,1)$$

$$27,03569179$$

On conclut.

Énoncé 2 Calculer la mesure de l'angle $\widehat{FHI}$ du triangle rectangle HIF représenté ci-contre. On donnera l'arrondi au dixième de degré.



Solution

Le triangle HIF est rectangle en F, donc on peut écrire :

$$\tan \widehat{FHI} = \frac{IF}{FH}$$

Or, d'après la figure de l'énoncé, on sait que :

$$IF = 92 \text{ mm et } FH = 57 \text{ mm.}$$

$$\text{Donc } \tan \widehat{FHI} = \frac{92}{57}$$

$$\text{d'où : } \widehat{FHI} \approx 58,2^\circ.$$

L'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{FHI}$ est $58,2^\circ$.

Le triangle HIF est rectangle en F et on connaît :
– la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{FHI}$,
– la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{FHI}$.
Donc on peut utiliser la définition de $\tan \widehat{FHI}$.

En utilisant la touche $\tan^{-1}$ ou Atn de la calculatrice, on obtient :

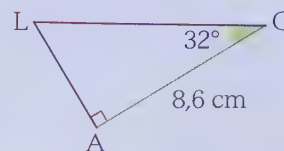
$$\tan^{-1}(92 \div 57)$$

$$58,21908491$$

On conclut.

Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

Énoncé 1 Calculer la longueur du côté [AL] du triangle rectangle LAC représenté ci-contre. On donnera l'arrondi au millimètre.

**Solution**

Le triangle LAC est rectangle en A, donc on peut écrire :

$$\tan \widehat{LCA} = \frac{AL}{AC}.$$

On en déduit que :

$$AL = AC \times \tan \widehat{LCA}.$$

Or, d'après l'énoncé, on sait que :

$$\widehat{LCA} = 32^\circ \text{ et } AC = 8,6 \text{ cm.}$$

$$\text{Donc } AL = 8,6 \times \tan 32^\circ$$

$$\text{d'où } AL \approx 5,4.$$

L'arrondi de AL au millimètre est 5,4 cm.

Le triangle LAC est rectangle en A.

On connaît la mesure de l'angle $\widehat{LCA}$ et la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{LCA}$. On peut donc utiliser la définition de $\tan \widehat{LCA}$ pour calculer la longueur AL.

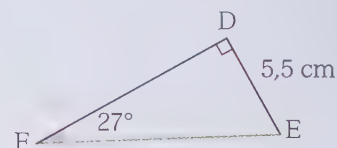
On utilise la propriété : si $a = \frac{b}{c}$, alors $b = a \times c$.

Avec la calculatrice, on obtient :

$$8,6 \times \tan(32) \\ 5,373876426$$

On conclut.

Énoncé 2 Calculer la longueur du côté [EF] du triangle rectangle DEF représenté ci-contre. On donnera l'arrondi au millimètre.

**Solution**

Le triangle DEF est rectangle en D, donc on peut écrire :

$$\sin \widehat{DFE} = \frac{ED}{EF}.$$

On en déduit que :

$$\sin \widehat{DFE} \times EF = ED.$$

$$\text{Donc on a : } EF = \frac{ED}{\sin \widehat{DFE}}.$$

Or, d'après l'énoncé, on sait que :

$$\widehat{DFE} = 27^\circ \text{ et } ED = 5,5 \text{ cm.}$$

$$\text{Donc } EF = \frac{5,5}{\sin 27^\circ}.$$

$$\text{D'où } EF \approx 12,1.$$

L'arrondi de EF au millimètre est 12,1 cm.

Le triangle DEF est rectangle en D.

On connaît la mesure de l'angle $\widehat{DFE}$ et la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{DFE}$. On peut donc utiliser la définition de $\sin \widehat{DFE}$ pour calculer la longueur EF.

On utilise la propriété : si $a = \frac{b}{c}$, alors $a \times c = b$.
Donc : $c = \frac{b}{a}$.

Avec la calculatrice, on obtient :

$$5,5 \div \sin(27) \\ 12,11479896$$

On conclut.

Savoir-faire 3 Utiliser les propriétés $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$ et $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$

Énoncé 1 Soit $\hat{B}$ un angle aigu tel que $\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$.

a. Calculer la valeur exacte de $\sin \hat{B}$.

b. En déduire la valeur exacte de $\tan \hat{B}$.

Solution

a. $\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1$

d'où $\sin^2 \hat{B} = 1 - \cos^2 \hat{B}$.

Or $\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$, donc : $\sin^2 \hat{B} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\sin^2 \hat{B} = 1 - \frac{9}{25}$

$\sin^2 \hat{B} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

D'où $\sin \hat{B} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

La valeur exacte de $\sin \hat{B}$ est $\frac{4}{5}$.

b. On sait que $\tan \hat{B} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$.

Or $\sin \hat{B} = \frac{4}{5}$ et $\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$,

donc $\tan \hat{B} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$.

La valeur exacte de $\tan \hat{B}$ est $\frac{4}{3}$.

On connaît $\cos \hat{B}$ et on cherche $\sin \hat{B}$. On utilise donc la propriété :

$\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1$.

Une équation du type $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Ici, $\sin^2 \hat{B} = \frac{16}{25}$ est une équation de cette forme.

Or le sinus d'un angle aigu est toujours un nombre positif, l'équation $\sin^2 \hat{B} = \frac{16}{25}$

n'admet donc que la solution positive $\sqrt{\frac{16}{25}}$.

On conclut.

On utilise la propriété : $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$.

Énoncé 2 Soit $\hat{A}$ un angle aigu. Démontrer que : $1 + \tan^2 \hat{A} = \frac{1}{\cos^2 \hat{A}}$.

Solution

$1 + \tan^2 \hat{A} = 1 + \left(\frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \hat{A}}{\cos^2 \hat{A}}$

$1 + \tan^2 \hat{A} = \frac{\cos^2 \hat{A}}{\cos^2 \hat{A}} + \frac{\sin^2 \hat{A}}{\cos^2 \hat{A}}$

$1 + \tan^2 \hat{A} = \frac{\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A}}{\cos^2 \hat{A}}$

$1 + \tan^2 \hat{A} = \frac{1}{\cos^2 \hat{A}}$

On a démontré que : $1 + \tan^2 \hat{A} = \frac{1}{\cos^2 \hat{A}}$.

On utilise la propriété : $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$.

On met les deux termes de la somme au même dénominateur.

Pour cela, on utilise : $1 = \frac{\cos^2 \hat{A}}{\cos^2 \hat{A}}$.

On utilise la propriété : $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$.

On conclut.

S'entraîner

Cosinus, sinus et tangente d'angles aigus

- 1** ABC est un triangle rectangle en A.

Recopier et compléter les phrases suivantes :

[BC] est du triangle ABC rectangle en

[AB] est le côté à l'angle $\widehat{ACB}$.

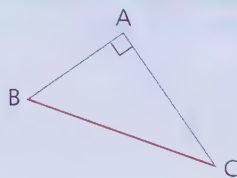
[AC] est le côté à l'angle $\widehat{ACB}$.

Par définition,

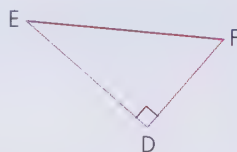
$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\text{longueur } \dots}{\text{longueur } \dots} \text{ donc } \cos \widehat{ACB} = \frac{\dots}{\dots};$$

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{\text{longueur } \dots}{\text{longueur } \dots} \text{ donc } \sin \widehat{ACB} = \frac{\dots}{\dots};$$

$$\text{et } \tan \widehat{ACB} = \frac{\text{longueur } \dots}{\text{longueur } \dots} \text{ donc } \tan \widehat{ACB} = \frac{\dots}{\dots}.$$



- 2** DEF est un triangle rectangle en D. Relier chacun des éléments de la première colonne avec l'élément correspondant de la seconde colonne.



$\sin \widehat{DEF} =$	$\frac{DE}{DF}$
$\sin \widehat{DFE} =$	$\frac{DF}{DE}$
$\cos \widehat{DEF} =$	$\frac{DF}{EF}$
$\cos \widehat{DFE} =$	$\frac{DE}{EF}$
$\tan \widehat{DEF} =$	
$\tan \widehat{DFE} =$	

- 3** Construire un triangle TRI rectangle en I, puis recopier les égalités suivantes en remplaçant les pointillés par « sin », « cos » ou « tan ».

a. $\widehat{ITR} = \frac{IT}{RT}$

b. $\widehat{ITR} = \frac{IR}{IT}$

c. $\widehat{IRT} = \frac{IT}{RT}$

d. $\widehat{IRT} = \frac{IT}{IR}$

- 4** Représenter, dans chacun des cas suivants, le triangle rectangle correspondant à :

a. $\sin \widehat{REC} = \frac{CR}{CE}$

b. $\cos \widehat{STI} = \frac{TI}{TS}$

c. $\tan \widehat{LMN} = \frac{LN}{NM}$

- 5** En précisant le triangle rectangle utilisé, écrire de deux manières différentes le quotient de deux longueurs égal à :

a. $\sin \widehat{GJI}$

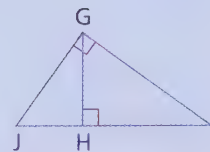
b. $\sin \widehat{GIH}$

c. $\cos \widehat{GJI}$

d. $\cos \widehat{GIH}$

e. $\tan \widehat{GJI}$

f. $\tan \widehat{GIH}$



- 6** Tracer un triangle KLM rectangle en K, puis recopier et compléter les égalités suivantes :

a. $\frac{KL}{LM} = \cos \dots = \sin \dots$

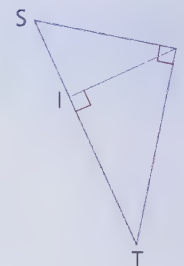
b. $\frac{KM}{LM} = \cos \dots = \sin \dots$

c. $\frac{KM}{LK} = \tan \dots$ et $\frac{LK}{KM} = \tan \dots$

- 7** **1** Que peut-on dire des angles $\widehat{SRI}$ et $\widehat{ITR}$ de la figure ci-contre ?

2 a. Exprimer $\sin \widehat{SRI}$ et $\sin \widehat{ITR}$.

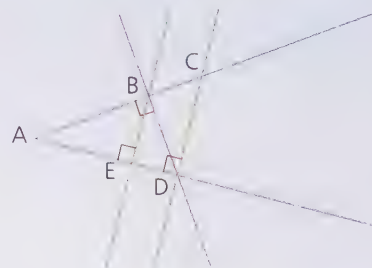
b. En déduire l'égalité $RI \times RS = IS \times RT$.



- 8** En précisant le triangle utilisé, exprimer de trois manières différentes :

a. $\sin \widehat{CAD}$

b. $\tan \widehat{CAD}$



Pour les exercices **9** à **12**, construire chaque triangle sans utiliser de calculatrice ni de rapporteur.

- 9** ABC est un triangle rectangle en C tel que : $\sin \widehat{ABC} = \frac{2}{5}$.

- 10** DEF est un triangle rectangle en F tel que : $\sin \widehat{DEF} = \frac{1}{2}$ et $DF = 3$ cm.

- 11** GHI est un triangle rectangle en I tel que : $\tan \widehat{GHI} = \frac{4}{7}$.

- 12** KLM est un triangle rectangle en L tel que : $\tan \widehat{LMK} = \frac{5}{3}$ et $KL = 2,5$ cm.

Exercices

13 Déterminer l'arrondi au centième de :

- a. $\sin 5^\circ$ b. $\sin 23^\circ$ c. $\sin 50^\circ$
 d. $\sin 75^\circ$ e. $\sin 79^\circ$ f. $\sin 81^\circ$

14 Soit $\hat{A}$ un angle aigu. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi au dixième de degré de $\hat{A}$.

- a. $\sin \hat{A} = 0,124$ b. $\sin \hat{A} = 0,156$
 c. $\sin \hat{A} = 0,4218$ d. $\sin \hat{A} = 0,5478$

15 Recopier et compléter le tableau ci-dessous. On arrondira les résultats au dixième de degré.

$\sin \hat{B}$	0,05	0,096	0,1	0,235	0,33333	0,77
$\hat{B}$ (en $^\circ$)						

16 Déterminer l'arrondi au centième de :

- a. $\tan 3^\circ$ b. $\tan 27^\circ$ c. $\tan 45^\circ$
 d. $\tan 67^\circ$ e. $\tan 81^\circ$ f. $\tan 85^\circ$

17 Soit $\hat{A}$ un angle aigu.

Déterminer, dans chacun des cas, l'arrondi au degré de $\hat{A}$.

- a. $\tan \hat{A} = 0,1763$ b. $\tan \hat{A} = 0,6249$
 c. $\tan \hat{A} = 0,124$ d. $\tan \hat{A} = 5,6713$

18 Recopier et compléter le tableau ci-dessous. On arrondira les résultats au dixième de degré.

$\tan \hat{C}$	0,05	0,5	0,7	1,2	2,33	4
$\hat{C}$ (en $^\circ$)						

19 Peut-on construire un triangle rectangle tel que le sinus de l'un de ses angles aigus soit égal aux nombres suivants ? Justifier les réponses.

- a. $\frac{4}{3}$ b. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{\sqrt{2}}{7}$ d. 365

20 Soit $\hat{A}$ un angle aigu.

Déterminer, si possible, l'arrondi au dixième de degré de $\hat{A}$.

- a. $\cos \hat{A} = 10^{-3}$ b. $\sin \hat{A} = -0,5$ c. $\tan \hat{A} = 0,1$
 d. $\cos \hat{A} = 2$ e. $\sin \hat{A} = \frac{1}{4}$ f. $\tan \hat{A} = 100$

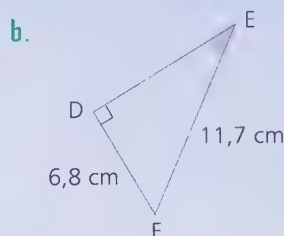
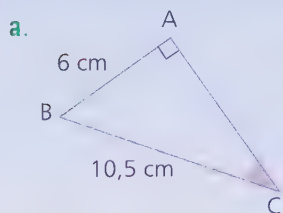
21 Soit $\hat{A}$ un angle aigu d'un triangle rectangle.

Recopier et compléter le tableau suivant :

	cas 1	cas 2	cas 3	cas 4
$\sin \hat{A} =$	$\frac{3}{5}$	---	$\frac{15}{39}$	$\frac{15}{17}$
$\cos \hat{A} =$	---	$\frac{20}{25}$	---	$\frac{16}{34}$
$\tan \hat{A} =$	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{15}{36}$	---

Calcul de mesures d'angles aigus

22 Calculer, dans chacun des cas, la mesure en degré, arrondie au dixième, de l'angle colorié.



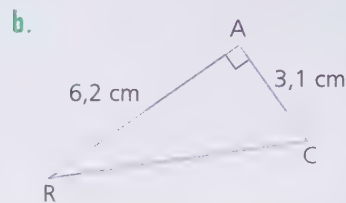
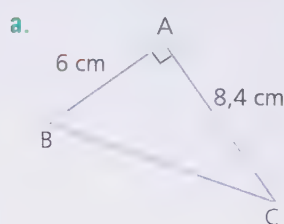
23 ① Construire un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3$ cm et $BC = 7,5$ cm.

- ② a. Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\hat{ABC}$. On donnera l'arrondi au dixième.
 b. Vérifier le résultat sur la figure.

24 On considère un triangle TRI rectangle en I tel que $IT = 9$ cm et $TR = 15,2$ cm. Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\hat{TRI}$. On donnera l'arrondi au dixième.

25 On considère un triangle REC rectangle en E tel que $ER = 4,3$ cm et $CR = 6,8$ cm. Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\hat{ECR}$. On donnera l'arrondi au dixième.

26 Calculer la mesure, en degré, de chacun des angles aigus des triangles ci-dessous. On donnera les arrondis au dixième.



27 ① Construire un triangle DEF rectangle en D tel que $DE = 2,4$ cm et $DF = 6,8$ cm.

- ② a. Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\hat{DEF}$. On donnera l'arrondi au dixième.
 b. Vérifier le résultat sur la figure.

28 On considère un triangle GHI rectangle en H tel que $GH = 10$ cm et $IH = 2,5$ cm.

- a. Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\hat{HIG}$. On donnera l'arrondi à l'unité.
 b. En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\hat{HGI}$. On donnera l'arrondi à l'unité.

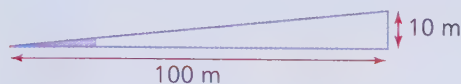
29 Soient le triangle ABC isocèle en A et D le milieu de [BC]. On donne : $BC = 6$ cm et $AD = 5$ cm.

- a. Quelle est la nature de chacun des triangles ABD et ADC ?
 b. Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\hat{ABC}$, puis de l'angle BAD. On donnera les arrondis à l'unité.

- 30** On considère un triangle JKL tel que $JL = 13$ cm, $JK = 12$ cm et $KL = 5$ cm.

- 1** Vérifier que le triangle JKL est rectangle.
- 2 a.** Calculer de trois manières différentes la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{KJL}$. On donnera l'arrondi au dixième.
- b.** En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{KLJ}$. On donnera l'arrondi au dixième.

- 31** Une pente de 10 % représente une différence de niveau de 10 mètres sur une distance horizontale de 100 mètres.



Calculer une valeur arrondie au dixième de degré de la mesure de l'angle formé par la route et l'horizontale lorsque la pente est de :

- a.** 10 % **b.** 8 % **c.** 4 %

Calcul de longueurs

- 32** **1** Construire un triangle ABC rectangle en C tel que : $AB = 8,5$ cm et $\widehat{BAC} = 37^\circ$.
- 2 a.** Calculer la longueur BC. On donnera l'arrondi au millimètre.
 - b.** Vérifier le résultat sur la figure.

- 33** On considère le triangle GHT rectangle en H tel que : $GH = 3$ cm et $\widehat{GTH} = 52^\circ$. Calculer la longueur GT. On donnera l'arrondi au millimètre.

- 34** **1** Construire un triangle DEF rectangle en F tel que : $DF = 6,5$ cm et $\widehat{FDE} = 41^\circ$.
- 2 a.** Calculer la longueur EF. On donnera l'arrondi au millimètre.
 - b.** Vérifier le résultat sur la figure.

- 35** On considère le triangle KLM rectangle en K tel que : $KL = 3,6$ cm et $\widehat{KLM} = 65^\circ$. Calculer la longueur KM. On donnera l'arrondi au millimètre.

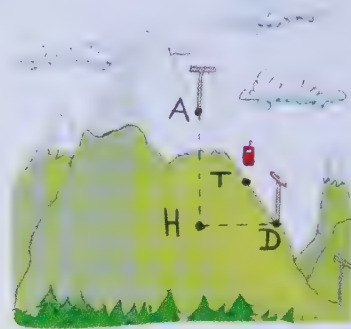
- 36** On considère le triangle VAR rectangle en A tel que : $AR = 7,2$ cm et $\widehat{RVA} = 14,5^\circ$. Calculer la longueur AV. On donnera l'arrondi au millimètre.

- 37** Une équerre a la forme d'un triangle rectangle dont le plus grand côté mesure 18 cm et le plus petit angle mesure 30° . Calculer la longueur des deux autres côtés de l'équerre. On donnera si nécessaire les arrondis au millimètre.

- 38** Dans le massif du Mont-blanc, le deuxième tronçon du téléphérique de l'Aiguille du Midi part d'une altitude de 2 317 m et arrive à une altitude de 3 777 m. La distance horizontale entre les deux gares est de 2 467 m.

Le câble du téléphérique est supposé rectiligne.

- a.** Calculer la mesure de $\widehat{HDA}$. Arrondir au degré.
- b.** Calculer la longueur AD du câble. Arrondir au dm.
- c.** Calculer l'altitude du point T lorsque celui-ci est situé au tiers du trajet en partant de D.



Calcul de longueurs et de mesures d'angles aigus

- 39** Le triangle ABC a trois angles aigus et $BC = 75$ mm. Soit H le pied de la hauteur issue de C tel que $AH = 20$ mm et $BH = 60$ mm.
- a.** Tracer une figure à main levée, puis calculer la longueur CH.
 - b.** Exprimer $\tan \widehat{HCA}$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{HCA}$, puis de l'angle $\widehat{HAC}$. On donnera les arrondis au degré près.
 - c.** Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HBC}$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$. On donnera les arrondis au degré près.

- 40** Paul veut installer un panier de basket chez lui. Il souhaite le fixer à 3,05 m du sol. L'échelle dont il se sert mesure 3,20 m de long. Le mur est perpendiculaire au sol.

- 1** À quelle distance du pied du mur doit-il placer l'échelle pour que son sommet soit juste au niveau du panier ? On donnera l'arrondi au cm.
- 2** Calculer la mesure de l'angle formé par l'échelle et le sol. On donnera l'arrondi au degré.

- 41** **1** Construire un triangle MNL tel que $MN = 8$ cm ; $ML = 4,8$ cm et $LN = 6,4$ cm.

- 2** Démontrer que le triangle LMN est rectangle.

- 3** Calculer la mesure de l'angle $\widehat{LNM}$. Arrondir au degré.

- 4** Soit K le pied de la hauteur issue de L. Calculer la longueur LK. On donnera l'arrondi au millimètre.

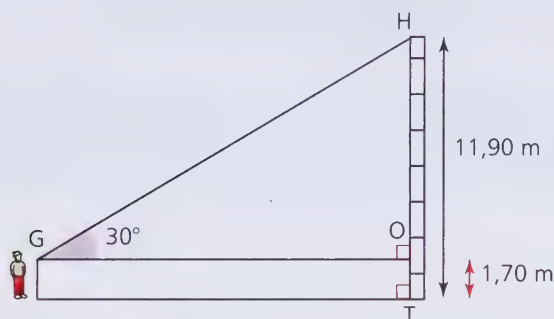
- 5** Soit R le point de [LN] tel que $NR = 2$ cm. La perpendiculaire à (LN) passant par R coupe [MN] en S ; calculer RS. On donnera l'arrondi au millimètre.

- 6** Calculer l'aire du quadrilatère KLRS. Arrondir au cm^2 .

42 Vu au brevet

- 1 Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre [BF] tel que $BF = 80$ mm.
Placer un point A tel que A appartienne au cercle $\mathcal{C}$ et $AB = 28$ mm.
- 2 Quelle est la nature du triangle ABF ?
- 3 Calculer la valeur arrondie au dixième de degré près de la mesure de l'angle $\widehat{AFB}$.
- 4 Tracer la perpendiculaire à la droite (AF) passant par O : elle coupe le segment [AF] en E.
- 5 Calculer la longueur EF. On donnera l'arrondi au millimètre.

- 43 Un géomètre doit vérifier la hauteur du mur représenté ci-dessous. En tenant compte des indications portées sur la figure, calculer à quelle distance du mur il se poste pour effectuer cette mesure. Arrondir au dm.

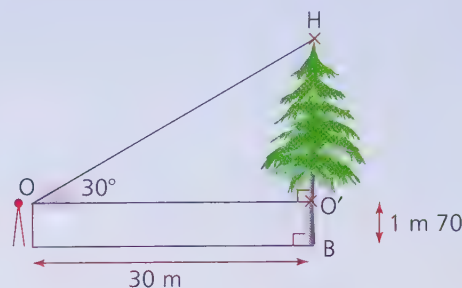


44 Vu au brevet

Soient le cercle $\mathcal{C}$ de centre F et de diamètre $AE = 6$ cm et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre E et de rayon [AE].

- 1 a. Placer sur le cercle $\mathcal{C}$ un point N tel que l'angle $\widehat{EAN}$ mesure 30° .
b. Quelle est la nature du triangle ANE ?
- 2 a. Calculer la longueur NE.
b. Calculer la longueur AN. On donnera une valeur approchée à 0,1 près.
- 3 La droite (AN) coupe le cercle $\mathcal{C}'$ en M.
a. Démontrer que les droites (FN) et (EM) sont parallèles.
b. En déduire que N est le milieu de [AM].
- 4 a. Construire la droite d tangente en N au cercle $\mathcal{C}$.
b. Démontrer que les droites d et (EM) sont perpendiculaires.
- 5 a. Construire la droite d' perpendiculaire à (EM) passant par M.
b. Que peut-on dire de la droite d' par rapport au cercle $\mathcal{C}'$?
c. Démontrer que les droites d et d' sont parallèles.
- 6 Les droites d et (ME) se coupent en un point H.
a. Démontrer que l'angle $\widehat{NMH}$ mesure 30° .
b. En utilisant le triangle NMH, calculer la valeur exacte de MH.

- 45 Pour mesurer la hauteur d'un arbre, on utilise un instrument de visée dont l'objectif est situé en un point O à 1,70 mètre du sol et à 30 mètres de l'arbre.
Quelle est la hauteur de cet arbre ? Arrondir au dm.



- 46 Une marée, en un lieu et à une date donnée, est définie par son **marnage**, c'est-à-dire la différence de hauteur d'eau entre la pleine mer (niveau le plus élevé atteint par la mer au cours d'un cycle de marée) et la basse mer (niveau le plus bas atteint par la mer au cours d'un cycle de marée), exprimée en mètres.

La plage représentée ci-dessous forme un angle de 5° avec l'horizontal.

Lorsque le marnage est de 8 mètres, quelle est la longueur de la plage PL recouverte par la mer à marée haute ? On donnera une valeur approchée au centimètre près.

À marée basse



À marée haute



Utiliser les relations trigonométriques

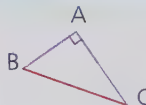
- 47 Soit $\hat{A}$ un angle aigu d'un triangle rectangle.
Recopier et compléter le tableau suivant :

	cas 1	cas 2	cas 3	cas 4
$\sin \hat{A} =$	---	0,8	---	$\frac{5}{13}$
$\cos \hat{A} =$	$\frac{8}{17}$	---	$\frac{24}{51}$	---
$\tan \hat{A} =$	---	---	---	---

- 48 Soit $\hat{B}$ un angle aigu d'un triangle rectangle.
a. Calculer la valeur exacte de $\sin \hat{B}$ sachant que $\cos \hat{B} = \frac{4}{5}$.
b. En déduire la valeur exacte de $\tan \hat{B}$.
- 49 $\hat{A}$ étant un angle aigu.
a. Montrer que $(\cos \hat{A} + \sin \hat{A})^2 = 1 + 2 \sin \hat{A} \times \cos \hat{A}$.
b. Montrer que $(\cos \hat{A} - \sin \hat{A})^2 = 1 - 2 \sin \hat{A} \times \cos \hat{A}$.
En déduire la valeur de $(\cos \hat{A} + \sin \hat{A})^2 + (\cos \hat{A} - \sin \hat{A})^2$.

Faire le point

50 QCM Indiquer, dans chaque cas, la réponse exacte parmi les trois réponses proposées.

		A	B	C
1	 Dans un triangle ABC rectangle en A, on a :	$\sin \widehat{ABC} = \frac{AB}{AC}$	$\sin \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$	$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$
2	Si $\widehat{A}$ est un angle aigu, alors :	$\sin \widehat{A} > 1$	$0 < \sin \widehat{A} < 1$	$\sin \widehat{A}$ est négatif
3	Si $\sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2}$, alors :	$\widehat{ABC} = 30^\circ$	$\widehat{ABC} = 45^\circ$	$\widehat{ABC} = 60^\circ$
4	Si $\widehat{ABC} = 65^\circ$, alors :	$\sin \widehat{ABC} = 0,9$	$\sin \widehat{ABC} = -0,9$	$\sin \widehat{ABC} \approx 0,9$
5	Si $\sin \widehat{A} = \frac{AB}{AC}$, alors :	$AB = \frac{AC}{\sin \widehat{A}}$	$AC = AB \sin \widehat{A}$	$AC = \frac{AB}{\sin \widehat{A}}$
6	Si le triangle TRI est tel que $TR = 24$ mm, $RI = 51$ mm et $IT = 45$ mm, alors :	$\tan \widehat{TRI} = \frac{24}{51}$	$\tan \widehat{TRI} = \frac{45}{24}$	$\tan \widehat{TRI} = \frac{24}{45}$
7	Si $\widehat{A}$ est un angle aigu, alors :	$\tan \widehat{A}$ est négatif	$0 < \tan \widehat{A} < 1$	$\tan \widehat{A}$ est positif
8	Si $\widehat{ABC} = 53^\circ$, alors :	$\tan \widehat{ABC} \approx -1,327$	$\tan \widehat{ABC} = 1,327$	$\tan \widehat{ABC} \approx 1,327$
9	Si $\sin \widehat{B} = \frac{9}{15}$ et $\cos \widehat{B} = \frac{12}{15}$, alors :	$\tan \widehat{B} = \frac{15}{12}$	$\tan \widehat{B} = \frac{3}{4}$	$\tan \widehat{B} = \frac{4}{3}$
10	Si $\sin \widehat{B} = \frac{1}{2}$, alors :	$\cos \widehat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \widehat{B} = \frac{1}{4}$	$\cos \widehat{B} = \frac{1}{2}$

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

• Construire un triangle connaissant la tangente de l'un de ses angles aigus et la longueur de l'un de ses côtés

51 Construire un triangle IJK rectangle en J tel que $IJ = 6$ cm et $\tan \widehat{I} = \frac{2}{3}$. On justifiera la construction.

• Déterminer une valeur approchée de la mesure d'un angle aigu

52 ① Construire un triangle TRI rectangle en T tel que $TR = 6$ cm et $RI = 9$ cm.

② Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{RIT}$. On donnera l'arrondi au dixième.

53 ① Construire un triangle ANG rectangle en A tel que $AN = 5$ cm et $AG = 8,3$ cm.

② Calculer la mesure, en degré, de chacun des angles du triangle ANG. On donnera les arrondis au dixième.

• Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

54 ① Tracer un demi-cercle de diamètre [AB] tel que $AB = 6$ cm.
Placer le point C sur le demi-cercle tel que $\widehat{BAC} = 43^\circ$.

② Quelle est la nature du triangle ABC ?

③ Calculer les longueurs AC et BC. On donnera les arrondis au millimètre.

• Utiliser les propriétés $\tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$
et $\sin^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{A} = 1$

55 Soit $\widehat{ABC}$ un angle aigu d'un triangle rectangle.

① Calculer la valeur exacte de $\sin \widehat{ABC}$ lorsque $\cos \widehat{ABC} = \frac{3}{5}$.

② En déduire $\tan \widehat{ABC}$.

56 Soit $\widehat{B}$ un angle aigu d'un triangle rectangle.

Calculer la valeur exacte de $\tan \widehat{B}$ lorsque $\cos \widehat{B} = \frac{1}{2}$ et $\sin \widehat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

57 Soit $\widehat{A}$ un angle aigu d'un triangle rectangle.

Démontrer que $(\sin \widehat{A} + \cos \widehat{A})^2 - 2 \sin \widehat{A} \times \cos \widehat{A} = 1$.

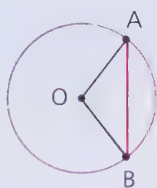
➔ Tous les exercices de cette page sont corrigés page 277.

Approfondir

58 Vrai ou faux

- 1 Si $\sin \hat{A} = 0,25$, alors $\cos \hat{A} = 0,75$.
- 2 $\sin 60^\circ = 2 \times \sin 30^\circ$.
- 3 La tangente d'un angle aigu est proportionnelle à sa mesure.
- 4 Lorsque la mesure d'un angle aigu augmente, son sinus augmente.
- 5 Lorsque la mesure d'un angle aigu augmente, son cosinus augmente.

- 59 Soient un cercle $\mathcal{C}$ et $\widehat{AOB}$ un angle au centre interceptant l'arc $\widehat{AB}$. Calculer la longueur de la corde $[AB]$ lorsque le rayon du cercle est égal à 10 cm et la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est égale à :



- a. 70° b. 100°

c. 130°

On arrondira les résultats au millimètre.

LE SAVIEZ-VOUS ?

On attribue à Hipparque de Nicée (180-125 av. J.-C.), un astronome grec, les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre la mesure de l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.

- 60 1 Construire un parallélogramme ABCD de centre O tel que : $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm et la diagonale $[AC]$ est perpendiculaire à $[AB]$.

- 2 On note H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

Calculer la longueur AC. En déduire la longueur OC.

- 3 a. Exprimer $\sin \widehat{ACB}$ de deux manières différentes.

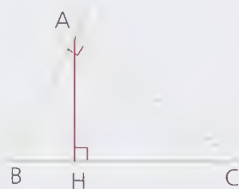
- b. En déduire la longueur OH.

- 4 Calculer les longueurs BO et BH. On donnera les arrondis au millimètre.

- 5 Calculer le périmètre du triangle HOB.

On donnera l'arrondi au millimètre.

- 61 On considère le triangle AHC rectangle en H ci-contre. La droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC) coupe la droite (HC) en B tel que : $AH = 4,8$ cm et $HC = 6,4$ cm.



- 1 Démontrer que les angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{BAH}$ sont de même mesure.

- 2 Montrer que $\tan \widehat{ACH} = \frac{3}{4}$.

- 3 Calculer la longueur BH.

- 4 Calculer le périmètre du triangle ABC.

On donnera l'arrondi au millimètre.

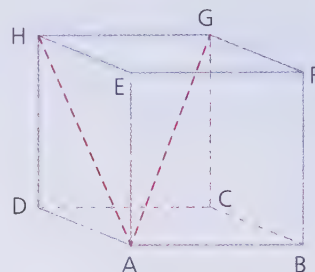
- 62 1 Construire un triangle ABC tel que :

- ses trois angles sont aigus ;
- $BC = 6,5$ cm ;
- H est le pied de la hauteur issue de B ;
- $AH = 2$ cm et $HC = 5,2$ cm.

- 2 Calculer la longueur BH.

- 3 Calculer la mesure de chacun des angles du triangle ABC. Arrondir au degré.

- 63 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 5 cm.



- 1 Quelle est la nature du triangle AHG ?

- 2 Sans effectuer de calcul, dessiner en vraie grandeur le triangle AHG.

- 3 Calculer les valeurs exactes de AH et de AG.

- 4 Calculer une valeur arrondie à 0,1 degré près de la mesure de l'angle HAG.

- 64 On considère un triangle ABC rectangle en A.

On note H le pied de la hauteur issue de A et I le milieu du segment $[AB]$.

- 1 Quelle est la nature des triangles HAI et HBI ? Justifier.

- 2 Démontrer les égalités suivantes :

a. $\widehat{IHB} = \widehat{IBH} = \widehat{HAC}$.

b. $\widehat{IAH} = \widehat{IHA} = \widehat{ACH}$.

- 3 On suppose que $CH = 3$ cm et $AH = 5$ cm.

- a. Calculer les mesures arrondies au degré, des angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{CAH}$.

- b. Calculer les longueurs AC, BH, BC et AB. On donnera les arrondis au millimètre.

- 65 Les diagonales d'un rectangle ABCD de centre O mesurent 10 cm et sont telles que $\widehat{AOB} = 42^\circ$.

- a. Construire le rectangle ABCD.

- b. Calculer AB et AD. On donnera les arrondis au millimètre.

- c. Calculer l'aire du rectangle ABCD. On donnera le résultat en cm^2 arrondi à l'unité.

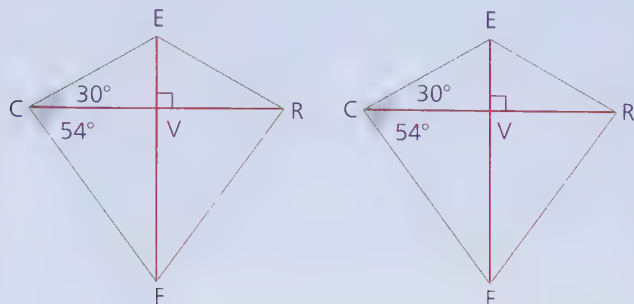
- 66 Soit un triangle NID isocèle en N tel que $\widehat{IND} = 52^\circ$ et $IN = 10$ cm.

Calculer le périmètre de NID.

On donnera l'arrondi au millimètre.

- 67** Calculer l'aire de la toile nécessaire à la réalisation de chacun de ces cerfs-volants (sur chacun d'eux, (EF) est un axe de symétrie).

- a. $CR = 84$ cm
b. $EV = 20$ cm



68 Valeurs remarquables pour les angles de 30° et 60°

On considère un triangle ABE équilatéral de côté c .

La hauteur issue de A coupe le côté [BE] en H.

- 1 Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABH}$? Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BAH}$?

- 2 Exprimer BH en fonction de c .

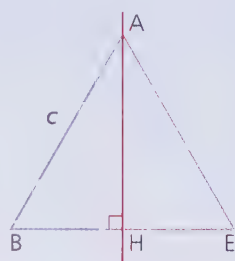
- 3 En utilisant le triangle ABH, vérifier que $AH = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

- 4 En utilisant les longueurs des côtés du triangle ABH, exprimer $\sin \widehat{ABH}$, $\cos \widehat{ABH}$ et $\tan \widehat{ABH}$.

- 5 En utilisant les longueurs des côtés du triangle ABH, exprimer $\sin \widehat{BAH}$, $\cos \widehat{BAH}$ et $\tan \widehat{BAH}$.

- 6 Recopier et compléter :

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| $\sin 60^\circ = \dots$ | $\sin 30^\circ = \dots$ |
| $\cos 60^\circ = \dots$ | $\cos 30^\circ = \dots$ |
| $\tan 60^\circ = \dots$ | $\tan 30^\circ = \dots$ |



- 69** On considère un cercle de diamètre [AB], de centre O et de rayon 4 cm. Soit M un point appartenant à ce cercle, tel que $MB = 4$ cm.

- 1 a. Quelle est la nature du triangle OMB?

- b. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{OBM}$?

- 2 a. Quelle est la nature du triangle AMB?

- b. Calculer la valeur exacte de la longueur AM.

- c. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{MAB}$?

- 3 a. Calculer la valeur exacte de $\cos \widehat{MAB}$.

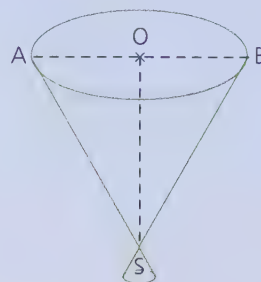
- b. En déduire la valeur exacte de $\cos 30^\circ$.

- 4 a. Calculer la valeur exacte de $\sin \widehat{MAB}$.

- b. En déduire la valeur exacte de $\sin 30^\circ$.

- 5 De la même façon, calculer les valeurs exactes de $\cos 60^\circ$ et de $\sin 60^\circ$.

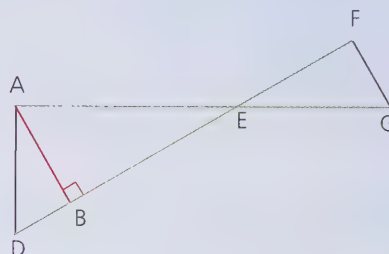
- 70** Le verre représenté ci-dessous a la forme d'un cône de révolution de diamètre 6 cm et tel que $\widehat{SAB} = 60^\circ$.



- 1 Calculer la longueur d'une génératrice et la hauteur du cône. On donnera les valeurs exactes.

- 2 Calculer la contenance de ce verre lorsqu'il est rempli aux deux tiers. On donnera un arrondi au mm^3 .

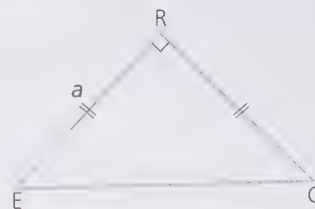
- 71** On considère le quadrilatère croisé AGFD tel que :
 $AE = 9$ cm, $EG = 6$ cm, $EF = 3\sqrt{3}$ cm, $FG = 3$ cm, $\widehat{BAD} = 30^\circ$ et $\widehat{ABE} = 90^\circ$.



- 1 Quelle est la nature du triangle EFG?
- 2 Calculer la mesure de chacun des angles du triangle EFG.
- 3 Calculer les valeurs exactes de EB et de AB.
- 4 Calculer la valeur exacte de DB.
- 5 Calculer la valeur exacte de l'aire du quadrilatère AGFD.

72 Valeurs remarquables pour un angle de 45°

Soit un triangle REC rectangle et isocèle en R.
On note a la longueur du côté [RE].



- a. Exprimer la longueur EC en fonction de a .

- b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{REC}$.

- c. Exprimer $\sin \widehat{REC}$, $\cos \widehat{REC}$ et $\tan \widehat{REC}$.

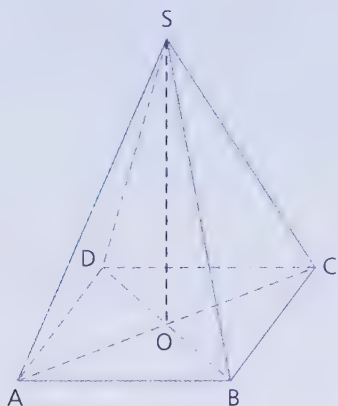
- d. Recopier et compléter :

- $\sin 45^\circ = \dots$ $\cos 45^\circ = \dots$ $\tan 45^\circ = \dots$

- 73** Calculer la valeur exacte de l'aire du carré ABCD dont les diagonales mesurent 4 cm.

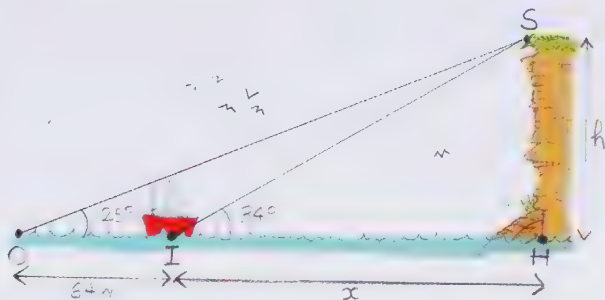
Exercices

- 74** La pyramide SABCD représentée ci-dessous est une pyramide régulière de hauteur 10 cm. La base ABCD est un carré de côté 6 cm.



- 1** Calculer la valeur exacte de AC. En déduire la valeur exacte de AO.
- 2 a.** Quelle est la nature du triangle SOA ?
- b.** Exprimer $\tan \widehat{ASO}$. En déduire une mesure approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{ASO}$.

- 75** On souhaite trouver la hauteur SH de la falaise représentée ci-dessous alors qu'on ne peut pas mesurer la distance IH.



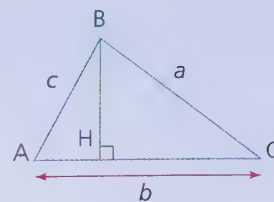
Pour cela, on se place en I et on effectue la mesure de l'angle $\widehat{SIH}$, puis on recule de 64 m en ligne droite. En O, on effectue la mesure de l'angle $\widehat{SOH}$.

- 1** Exprimer $\tan \widehat{ISH}$. En déduire la distance x en fonction de h.
- 2** Exprimer $\tan \widehat{OSH}$. En déduire la distance OH en fonction de h.
- 3** En utilisant les résultats des questions **1** et **2**, exprimer h.
- 4** Calculer h. On donnera une valeur arrondie au centième.

- 76** Dans un triangle ABC rectangle en A, [AH] est la hauteur issue de A.

- 1** En écrivant de deux manières différentes le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$, montrer que $BA^2 = BH \times BC$.
- 2** Démontrer de manière analogue que $CA^2 = CH \times CB$.
- 3** En utilisant la trigonométrie, démontrer que : $AH^2 = HB \times HC$.

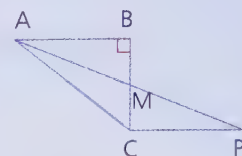
- 77** On considère le triangle quelconque ABC représenté ci-contre.



- 1 a.** Exprimer $\sin \widehat{A}$. En déduire la longueur BH.
- b.** Donner une expression de l'aire du triangle ABC en fonction de b, c et $\sin \widehat{A}$.
- 2** Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de a, b et $\sin \widehat{C}$.

- 78** **1** Reproduire la figure ci-contre en respectant les données suivantes :

- $AB = 6$ cm • $BC = 8$ cm
- $BM = 3$ cm • $(CP) \parallel (AB)$.



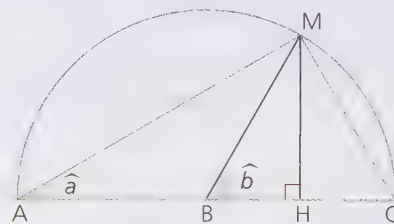
- 2** Mesurer les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{MAC}$. Pourquoi ces mesures ne permettent-elles pas d'affirmer que (AM) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$?

- 3** Dans le triangle ABC :
- a.** Calculer la longueur AC.
 - b.** Calculer la mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAM}$ le plus précisément possible.

Expliquer pourquoi les valeurs obtenues ne permettent pas d'affirmer que (AM) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

- 4 a.** En considérant les triangles ABM et MCP, calculer CP.
- b.** Quelle est la nature du triangle ACP ? En déduire que les angles MAC et CPM sont de même mesure.
- c.** Démontrer que les angles MAC et BAM sont de même mesure. En déduire que (AM) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

- 79** Le demi-cercle ci-dessous, de centre B et de diamètre [AC], a pour rayon 1.



- 1** Justifier les égalités suivantes :
- a.** $\cos \widehat{a} = \frac{AH}{AM}$ **b.** $\cos \widehat{a} = \frac{AM}{AC}$ **c.** $AH = 1 + \cos \widehat{b}$.

En déduire l'égalité : $\cos^2 \widehat{a} = \frac{1 + \cos \widehat{b}}{2}$.

- 2** Comparer les mesures des angles $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$. En déduire que, pour tout angle $\widehat{a}$ dont la mesure est comprise entre 0° et 45° ,

l'égalité $\cos^2 \widehat{a} = \frac{1 + \cos 2\widehat{a}}{2}$ est vérifiée.

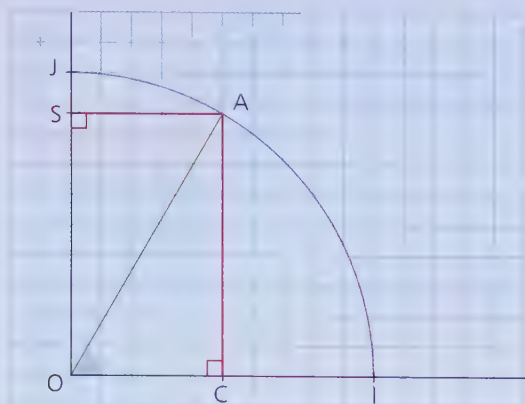
3 Application

- a.** Sachant que $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, démontrer que :

$$\cos^2 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

- b.** Vérifier que $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

80 Quart de cercle trigonométrique



1 En utilisant le graphique ci-dessus :

- Exprimer $\cos \widehat{COA}$.
- En déduire la mesure exacte de l'angle $\widehat{COA}$.

2 En utilisant une démarche analogue, reproduire le quart de cercle représenté ci-dessus et construire sans rapporteur un angle $\widehat{C'OA'}$ tel que :

- le point C' appartient au segment $[OI]$;
- le point A' appartient à l'arc $\widehat{IJ}$;
- $\widehat{C'OA'} = 30^\circ$.

81 Vrai ou faux

- Si $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont deux angles complémentaires, alors $\cos^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{B} = 1$.
- $\cos 30^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\tan 60^\circ}$.
- Si $\widehat{E}$ est un angle aigu, alors $(\cos \widehat{E} + \sin \widehat{E})^2 = 1$.

82 Calculer sans calculatrice :

- $A = \cos 10^\circ - \sin 80^\circ$
- $B = \sin 45^\circ - \cos 45^\circ$
- $C = (\cos 41^\circ - \cos 49^\circ) + (\sin 41^\circ - \sin 49^\circ)$

83 Simplifier sans calculatrice les expressions suivantes :

- $A = 3 \tan 27^\circ \sin 63^\circ$
- $B = \sin 22^\circ \times \frac{\sin 22^\circ}{\tan 22^\circ}$

84 Un angle aigu $\widehat{A}$ a pour sinus 0,96.

- Écrire 0,96 sous la forme d'une fraction irréductible.
- Calculer la valeur exacte de $\cos \widehat{A}$.
- En déduire la valeur exacte de $\tan \widehat{A}$.

85 Sachant que $\cos \widehat{B} = \frac{1}{3}$, calculer la valeur exacte de $\sin \widehat{B}$ puis de $\tan \widehat{B}$.

86 Soit $\widehat{F}$ un angle aigu d'un triangle rectangle. Calculer de deux manières différentes $\sin \widehat{F}$ sachant que $\cos \widehat{F} = \frac{3}{4}$ et $\tan \widehat{F} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

87 Sachant que $\widehat{A}$ est un angle aigu, montrer que : $\cos^2 \widehat{A} - \sin^2 \widehat{A} = 1 - 2 \sin^2 \widehat{A} = 2 \cos^2 \widehat{A} - 1$.

88 Sachant que $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, vérifier que : $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Argumenter et débattre

89 Peut-on trouver un angle $\widehat{A}$ tel que $\cos \widehat{A} = \frac{4}{5}$ et $\tan \widehat{A} = \frac{3}{5}$?

90 Sachant que la mesure de l'angle $\widehat{A}$ est inférieure à 45° , peut-on écrire l'égalité $\cos(45^\circ - \widehat{A}) = \sin(45^\circ + \widehat{A})$?

91 L'égalité suivante est-elle vraie ? $\cos 30^\circ + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ = \sin 30^\circ + \sin 45^\circ + \sin 60^\circ$.

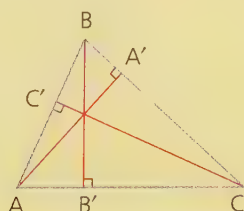
POUR LES CURIEUX

Théorème des sinus

On souhaite démontrer, dans le cas d'un triangle quelconque ABC dont les angles sont aigus, les égalités suivantes :

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}}$$

On considère le triangle ABC représenté ci-dessous.



1 a. Vérifier que :

$$\sin \widehat{A} = \frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$$

b. Exprimer de même $\sin \widehat{B}$ et $\sin \widehat{C}$.

2 Exprimer $\frac{\sin \widehat{A}}{\sin \widehat{C}}$ en fonction de AB et BC.

$$\text{En déduire l'égalité } \frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}}$$

3 Exprimer de même $\frac{\sin \widehat{A}}{\sin \widehat{B}}$ en fonction de AC et BC.

$$\text{En déduire l'égalité } \frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}}$$

4 Conclure.

Le quart de cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormal (O, I, J) , on place un point M sur un cercle de rayon $OI = 1$.

On place un point C sur l'axe des abscisses tel que M et C ont la même abscisse.

On place un point S sur l'axe des ordonnées tel que M et S ont la même ordonnée.

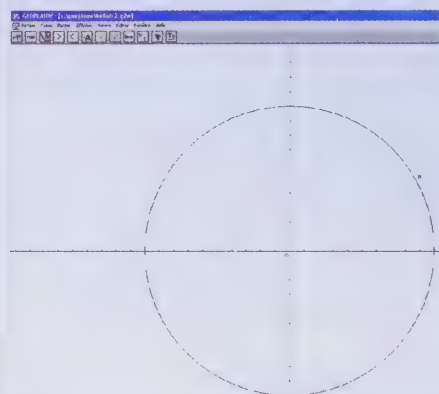
1 Exprimer $\cos \widehat{COM}$ en fonction de OC et $\sin \widehat{COM}$ en fonction de OS .

2 On veut observer les variations du sinus et du cosinus d'un angle compris entre 0° et 90° .

1.a. Créer un repère.

b. Créer un cercle de centre l'origine du repère et de rayon 1.

c. Créer un point M sur le cercle.

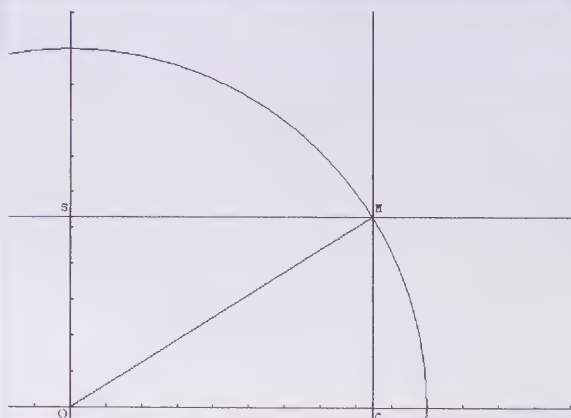


3.a. Créer une droite passant par M et parallèle à l'axe des ordonnées.

b. Créer le point C : point d'intersection de l'axe des abscisses et de la droite passant par M et parallèle à l'axe des ordonnées.

c. Créer une droite passant par M et parallèle à l'axe des abscisses.

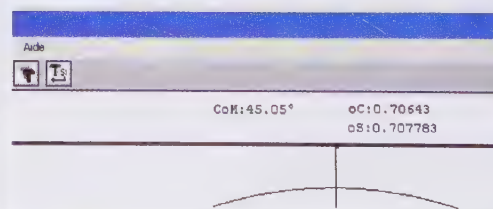
d. Créer le point S : point d'intersection de l'axe des ordonnées et de la droite passant par M et parallèle à l'axe des abscisses.



4.a. Afficher la mesure de l'angle $\widehat{COM}$.

b. Afficher la longueur du segment $[OC]$.

c. Afficher la longueur du segment $[OS]$.



5.a. Déplacer le point M de telle sorte que l'angle $\widehat{COM}$ varie entre 0° et 90° .

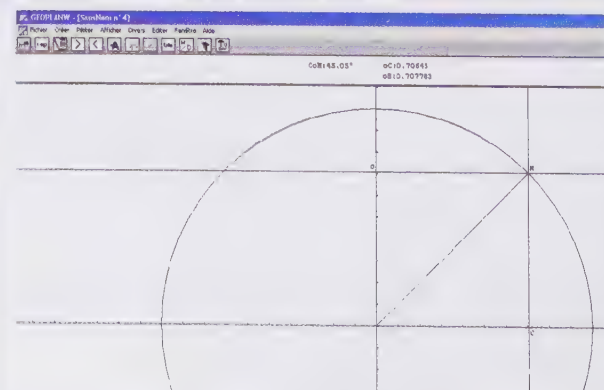
b. Comment varie la longueur OC ?

Que peut-on dire du cosinus d'un angle lorsque la mesure de l'angle augmente ?

c. Comment varie la longueur OS ?

Que peut-on dire du sinus d'un angle lorsque la mesure de l'angle augmente ?

d. Quelle est la mesure de l'angle qui semble permettre d'obtenir l'égalité entre le sinus et le cosinus ?



12

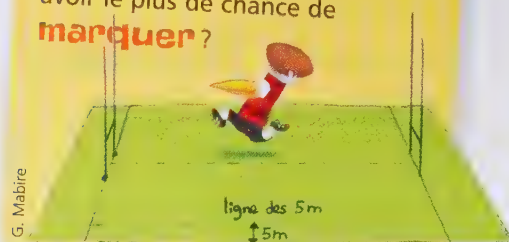
Angles inscrits Polygones réguliers



Si le ciel est clair et si vous avez **la patience** de photographier le ciel en choisissant un temps d'exposition de plusieurs heures, vous constaterez sur votre photo la **trajectoire circulaire** des étoiles autour du pôle Nord. Les angles formés par l'**étoile polaire** (au centre) et les extrémités de chaque trajectoire d'étoile sont égaux.



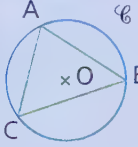
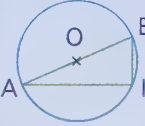
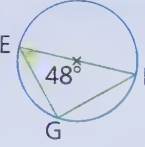
Au **rugby**, quel est le point le plus avantageux pour tirer une pénalité à partir de la ligne des 5 m ? Autrement dit, où doit-on se placer pour former **le plus grand angle** avec les poteaux du but et ainsi avoir le plus de chance de **marquer** ?



À travers les siècles, les **architectes arabes** utilisèrent beaucoup les figures géométriques pour construire leurs édifices : retrouvez sur les schémas de ces deux entrées d'édifice des figures connues.



QCM Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

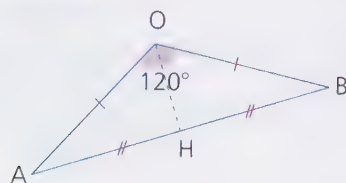
		A	B	C
1	 Les points A, B et C sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Le triangle ABC est :	inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$	circonscrit au cercle $\mathcal{C}$	rectangle
2	Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de concours des :	hauteurs de ce triangle	médianes de ce triangle	médiatrices de ce triangle
3	 Le point I appartient au cercle de centre O et de diamètre [AB]. Alors le triangle ABI est :	rectangle en B	rectangle en I	quelconque
4	 Le point G appartient au cercle de diamètre [EF] et $\widehat{FEG}$ mesure 48°. Alors :	l'angle $\widehat{EFG}$ mesure 42°	l'angle $\widehat{EFG}$ mesure 48°	on ne peut pas calculer la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$
5	 Les points U et V appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Le triangle UOV est :	inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$	isocèle mais pas équilatéral	équilatéral
6	 L'angle coloré en vert est un angle :	aigu	obtus	plat

Exercice 1 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

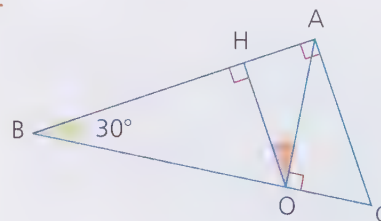
1. Si un triangle isocèle a un angle de 60° , alors il est équilatéral.
2. Si un triangle rectangle a un angle de 45° , alors il est isocèle.
3. Un triangle isocèle a un axe de symétrie.
4. Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie.
5. Un triangle équilatéral a un centre de symétrie.
6. Un carré a quatre axes de symétrie et un centre de symétrie.

Exercice 2 Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOH}$ pour chacun des deux triangles.

a.



b.



Activité 1 Cercle et angles

1 Angles au centre

A et B sont deux points du cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

On appelle **angle au centre dans le cercle $\mathcal{C}$** tout angle dont le sommet est le centre O du cercle.

a. Combien d'angles au centre déterminent les deux points A et B ?

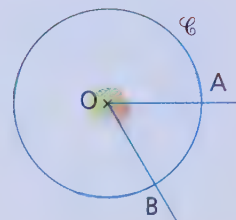
b. Avec un rapporteur déterminer la mesure de l'angle saillant $\widehat{AOB}$ (en orange), puis calculer la mesure de l'angle rentrant $\widehat{AOB}$ (en vert).

c. Combien d'arcs du cercle $\mathcal{C}$ déterminent les deux points A et B ?

L'angle au centre $\widehat{AOB}$, qui contient le petit arc $\widehat{AB}$, est appelé **l'angle au centre interceptant l'arc $\widehat{AB}$** .

L'angle au centre $\widehat{AOB}$, qui contient le grand arc $\widehat{AB}$, est appelé **l'angle au centre interceptant l'arc $\widehat{AB}$** .

d. Comment faudrait-il placer un point D sur le cercle $\mathcal{C}$ pour que l'angle au centre $\widehat{AOD}$ intercepte un demi-cercle ? Que peut-on dire alors de l'angle $\widehat{AOD}$?



Un **angle saillant** est un angle dont la mesure est comprise entre 0° et 180° .

Un **angle rentrant** est un angle dont la mesure est comprise entre 180° et 360° .

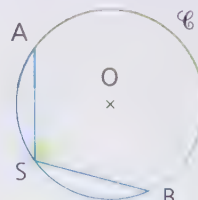
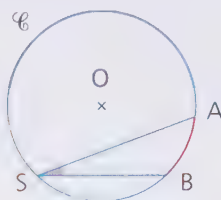


2 Angles inscrits

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O.

On appelle **angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$** un angle dont le sommet est un point du cercle $\mathcal{C}$ et dont les côtés coupent le cercle $\mathcal{C}$.

L'angle inscrit $\widehat{ASB}$ intercepte le petit arc $\widehat{AB}$.



L'angle inscrit $\widehat{ASB}$ intercepte le grand arc $\widehat{AB}$.

a. Tracer un cercle $\mathcal{C}$, puis placer sur $\mathcal{C}$ deux points E et F non diamétralement opposés.

b. Colorer un des deux arcs délimités par E et F, puis tracer l'angle au centre interceptant cet arc.

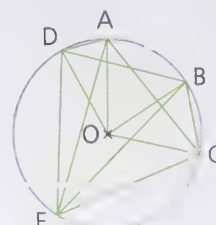
c. Tracer trois angles inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ qui interceptent l'arc choisi.

d. Reprendre la question c pour l'autre arc limité par E et F.

e. Sur la figure ci-contre, où O est le centre du cercle :

• Citer l'angle au centre et les angles inscrits qui interceptent le même arc $\widehat{AB}$.

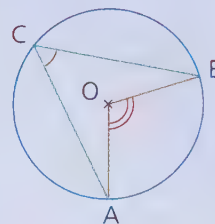
• Citer l'angle au centre et les angles inscrits qui interceptent le même grand arc $\widehat{CD}$ ne contenant pas le point A.



Activité 2 Angle inscrit et angle au centre interceptant le même arc

A Conjecturer avec un logiciel de géométrie

1. a. Créer un cercle de centre O, puis créer trois points A, B et C sur ce cercle.
b. Afficher la mesure de l'angle inscrit $\widehat{ACB}$, puis la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptant le même arc que $\widehat{ACB}$. Comparer leurs mesures.
2. Reprendre la question 1 en déplaçant les points A, B et C sur le cercle.
3. Quelle conjecture peut-on émettre ?

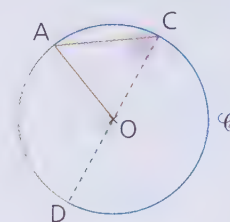


B Démontrer

1 Démonstration d'un cas particulier

Soit A un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre [CD].

- a. Citer l'angle inscrit et l'angle au centre qui interceptent le même arc $\widehat{AD}$.
- b. Montrer que : $\widehat{AOC} = 180^\circ - 2 \times \widehat{ACD}$.
- c. Montrer que : $\widehat{AOD} = 180^\circ - \widehat{AOC}$.
- d. Déduire des questions b et c une relation entre les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{AOD}$.

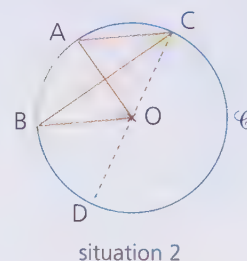
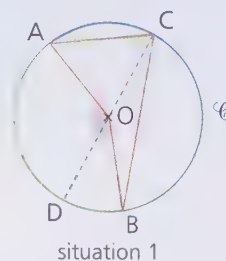


2 Démonstration du cas général

- Dans la situation 1, A et B sont placés de part et d'autre du diamètre [CD].
- Dans la situation 2, B appartient à l'arc $\widehat{AD}$.

Pour chacune des situations 1 et 2 :

- a. Citer l'angle inscrit et l'angle au centre qui interceptent le même arc $\widehat{AB}$.
- b. En utilisant la question 1, exprimer l'angle $\widehat{ACD}$ en fonction de l'angle $\widehat{AOD}$, puis l'angle $\widehat{DCB}$ en fonction de l'angle $\widehat{DOB}$.
- c. En déduire une relation entre les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$.



d. Recopier et compléter la propriété suivante :

Si, dans un cercle, un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle inscrit est égale de la mesure de l'angle au centre.

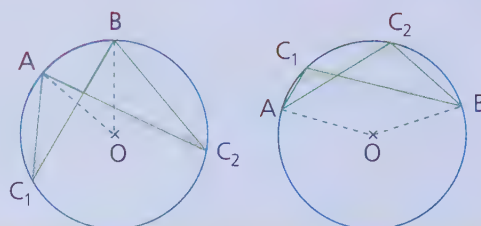
C Retrouver une propriété bien connue

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre [AB], puis placer sur $\mathcal{C}$ un point C distinct de A et de B.
2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$? À l'aide de la propriété étudiée en B, calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
3. Quelle propriété bien connue retrouve-t-on ainsi ?

Activité 3

Angles inscrits interceptant le même arc

- 1 Sur chacune des deux figures ci-contre, les angles inscrits $\widehat{AC_1B}$ et $\widehat{AC_2B}$ interceptent le même arc. Démontrer que : $\widehat{AC_1B} = \widehat{AC_2B}$.



- 2 Recopier et compléter la propriété suivante :
Si, dans un cercle, deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont

Activité 4

Polygones réguliers

Régulier ou non ?

Un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles « intérieurs » ont la même mesure est appelé **polygone régulier**.

Parmi les polygones ci-dessous, lesquels sont réguliers ?

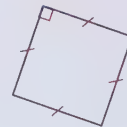
a.



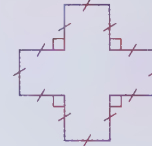
b.



c.



d.



Triangle équilatéral

- a. Tracer un triangle équilatéral ABC, puis construire son cercle circonscrit de centre O.
b. Démontrer que : $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = \frac{360^\circ}{3}$.
c. Tracer un cercle de centre O, puis construire un triangle équilatéral DEF inscrit dans ce cercle.

Carré

- a. Tracer un carré ABCD, puis construire son cercle circonscrit de centre O.
b. Démontrer que : $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = \frac{360^\circ}{4}$.
c. Tracer un cercle de centre O, puis construire un carré EFGH inscrit dans ce cercle.



Hexagone régulier

- a. Tracer un cercle de centre O, puis partager le disque de centre O en six secteurs de même angle.
b. Démontrer que ce partage permet d'obtenir six triangles équilatéraux que l'on nommera AOB, BOC, COD, DOE, EOF et FOA.
c. Démontrer que ABCDEF est un hexagone régulier.
d. Tracer un cercle de centre O, puis construire à la règle et au compas un hexagone régulier IJKLMN inscrit dans ce cercle.

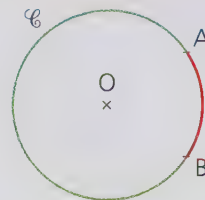
A Angles au centre et angles inscrits

1 Arcs de cercle

Propriété Deux points distincts A et B d'un cercle $\mathcal{C}$ définissent deux arcs de cercle.

Exemple

Les points A et B définissent un petit arc (en rouge) noté $\widehat{AB}$ et un grand arc (en vert) noté $\widehat{AB}$.

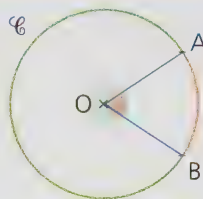


2 Angles au centre

Définition Dans un cercle, un **angle au centre** est un angle dont le sommet est le centre du cercle.

Un angle saillant a une mesure comprise entre 0° et 180° .
Un angle rentrant a une mesure comprise entre 180° et 360° .

L'angle rentrant $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre interceptant le grand arc $\widehat{AB}$.

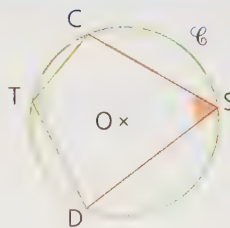


L'angle saillant $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre interceptant l'arc $\widehat{AB}$.

3 Angles inscrits dans un cercle

Définition Dans un cercle, un **angle inscrit** est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent ce cercle.

L'angle $\widehat{CTD}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{CD}$ (qui ne contient pas le point T).



L'angle $\widehat{CSD}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{CD}$ (qui ne contient pas le point S).

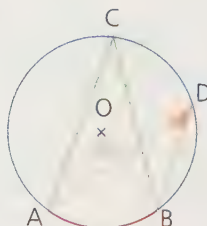
4 Propriétés des angles inscrits

Propriété 1 Si, dans un cercle, un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre.

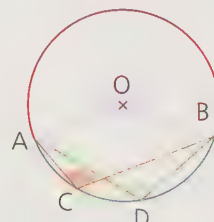
➔ Savoir-faire 1, page 224

Exemples

► Dans le cercle ci-contre, on a : $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ et $\widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$.

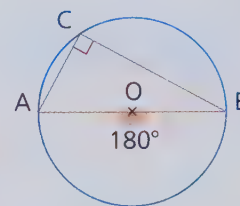


► Dans le cercle ci-contre, on a : $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ et $\widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$.



Remarque : Lorsque $[AB]$ est un diamètre du cercle, $\widehat{AOB} = 180^\circ$ et d'après la propriété 1 : $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 90^\circ$.

On retrouve la propriété vue en 4^e : « Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés, alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est ce côté. »



Propriété 2 Si, dans un cercle, deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a bien : $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

B Polygones réguliers

Définition Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles intérieurs ont la même mesure.

Exemples

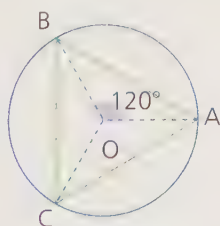
- Un triangle équilatéral est un polygone régulier à trois côtés.
- Un carré est un polygone régulier à quatre côtés.
- Un hexagone régulier est un polygone régulier à six côtés.

Propriété Tout polygone régulier est **inscritible** dans un cercle. Le centre de ce cercle est appelé **centre** du polygone régulier.

Propriété Soient A et B deux sommets consécutifs d'un polygone régulier à n côtés et de centre O. Chaque angle au centre, tel $\widehat{AOB}$, du polygone régulier a une mesure égale à $\frac{360^\circ}{n}$.

Exemples

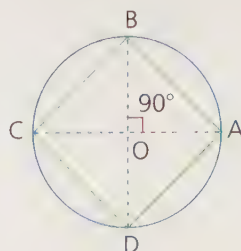
► Triangle équilatéral ABC et son cercle circonscrit



$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

Chaque angle au centre, tel $\widehat{AOB}$, mesure 120° .

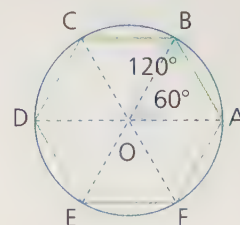
► Carré ABCD et son cercle circonscrit



$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

Chaque angle au centre, tel $\widehat{AOB}$, mesure 90° .

► Hexagone régulier ABCDEF et son cercle circonscrit



$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

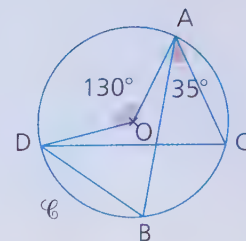
Chaque angle au centre, tel $\widehat{AOB}$, mesure 60° .

Savoir-faire 1 Appliquer les propriétés des angles inscrits

Énoncé Sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O , les points A , B , C et D sont tels que : $\widehat{BAC} = 35^\circ$ et $\widehat{AOD} = 130^\circ$.

a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$.

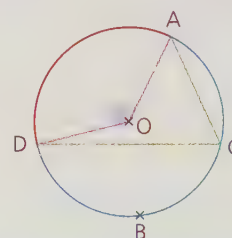
b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BDC}$.



Solution

a. Dans le cercle $\mathcal{C}$, l'angle inscrit $\widehat{ACD}$ et l'angle au centre $\widehat{AOD}$ de mesure 130° interceptent le même arc $\widehat{AD}$.

On repère un angle au centre qui intercepte le même arc de cercle que l'angle inscrit $\widehat{ACD}$. Ici on a :



Or, si, dans un cercle, un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre.

On cite la propriété utilisée.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \widehat{ACD} &= \frac{1}{2} \widehat{AOD} \\ \widehat{ACD} &= \frac{1}{2} \times 130^\circ = 65^\circ. \end{aligned}$$

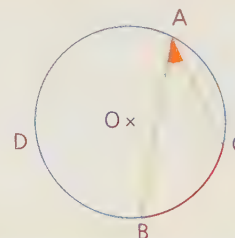
On effectue le calcul.

L'angle $\widehat{ACD}$ mesure 65° .

On conclut.

b. Dans le cercle $\mathcal{C}$, les angles $\widehat{BDC}$ et $\widehat{BAC}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc $\widehat{BC}$.

On repère un angle inscrit qui intercepte le même arc de cercle que l'angle inscrit $\widehat{BDC}$. Ici on a :



Or, si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

On cite la propriété utilisée.

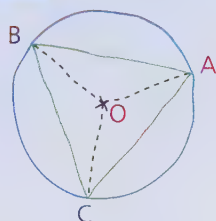
$$\begin{aligned} \text{Donc : } \widehat{BDC} &= \widehat{BAC} = 35^\circ. \\ \text{L'angle } \widehat{BDC} &\text{ mesure } 35^\circ. \end{aligned}$$

On conclut.

2 Construire un polygone régulier connaissant son centre et un de ses sommets

Énoncé 1 Placer deux points O et A, puis construire le triangle équilatéral de centre O.

Solution

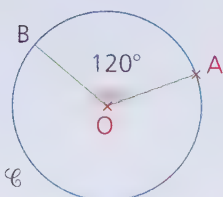


← Au brouillon, on effectue une figure à main levée.

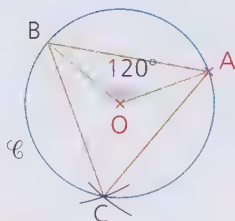
On sait que tous les angles au centre, tels $\widehat{AOB}$, d'un polygone régulier ont la même mesure ;

on calcule donc la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$:

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$



← Au propre, on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par le point A. Puis on place un point B sur $\mathcal{C}$ tel que : $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

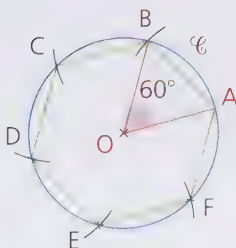


← On place le point C (distinct de A) sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que : $AB = BC$.

← On trace les cordes [AB], [BC] et [CA] ; on obtient ainsi le triangle équilatéral ABC.

Énoncé 2 Placer deux points O et A, puis construire l'hexagone régulier ABCDEF de centre O.

Solution 1



On procède comme pour la construction du triangle équilatéral de l'énoncé 1 :

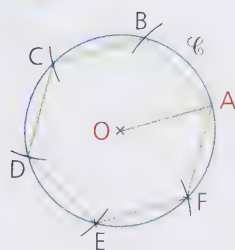
- on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par le point A.
- on calcule la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$:

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

et on place un point B sur $\mathcal{C}$ tel que : $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

- On place les points C, D, E et F du cercle $\mathcal{C}$ tels que : $AB = BC = CD = DE = EF$, puis on trace les cordes [AB], [BC], ..., [FA] et on obtient ainsi l'hexagone régulier ABCDEF.

Solution 2



← On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par le point A.

On sait que l'hexagone peut se décomposer en 6 triangles équilatéraux OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA. Donc :

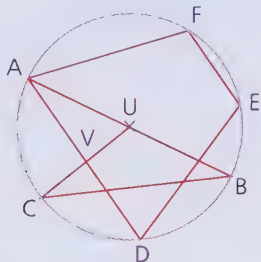
- on place les points B, C, D, E et F du cercle $\mathcal{C}$ tels que : $AB = BC = CD = DE = EF = OA$ (rayon du cercle) ;
- on trace les cordes [AB], [BC], ..., [FA] et on obtient l'hexagone régulier ABCDEF.

S'entraîner

Angles inscrits et angles au centre

- 1 Sur la figure ci-dessous, U est le centre du cercle de diamètre [AB]. On considère les angles suivants :

$\widehat{BAD}$; $\widehat{AUC}$; $\widehat{AFE}$; $\widehat{ADE}$; $\widehat{CBA}$; $\widehat{BUC}$.



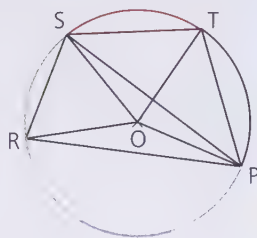
- 1 Parmi ces angles :

- quels sont les angles au centre ?
- quels sont les angles inscrits ?

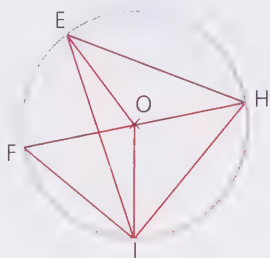
- 2 L'angle $\widehat{AVC}$ appartient-il à une des deux catégories d'angles de la question 1 ?

- 2 Sur la figure ci-contre, O est le centre du cercle. Citer un angle inscrit et l'angle au centre :

- qui interceptent l'arc $\widehat{RS}$.
- qui interceptent l'arc $\widehat{ST}$.
- qui interceptent l'arc $\widehat{RP}$.
- qui interceptent le grand arc $\widehat{SP}$ contenant le point R.



- 3 Sur la figure ci-dessous, O est le centre du cercle de diamètre [FH].



Recopier les deux listes d'angles ci-dessous, puis relier chaque angle inscrit à l'angle au centre qui intercepte le même arc.

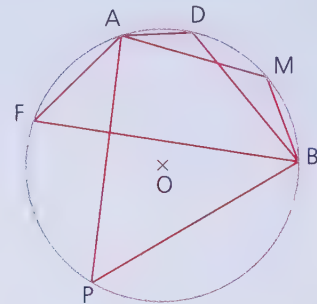
Angle inscrit

$\widehat{EIH}$ •
 $\widehat{IFH}$ •
 $\widehat{FHI}$ •
 $\widehat{EHF}$ •
 $\widehat{EHI}$ •

Angle au centre

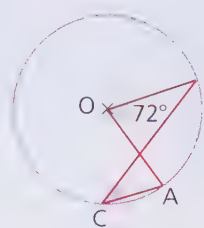
• $\widehat{IOH}$
 • $\widehat{EOI}$
 • $\widehat{EOH}$
 • $\widehat{IOF}$
 • $\widehat{EOF}$

- 4 Citer les angles inscrits qui interceptent le grand arc $\widehat{AB}$ contenant le point P.

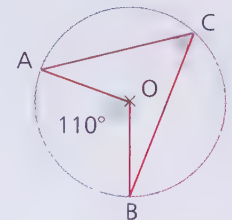


Pour les exercices 5 et 6, calculer dans chaque cas la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$. Le point O est le centre de chacun des cercles.

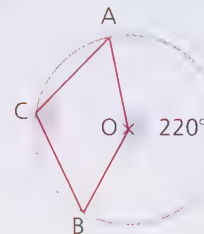
- 5 a.



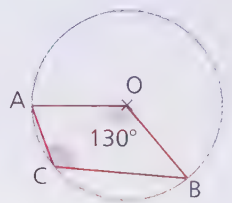
- b.



- 6 a.

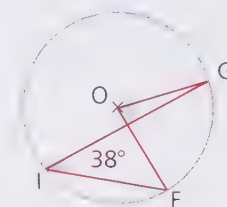


- b.

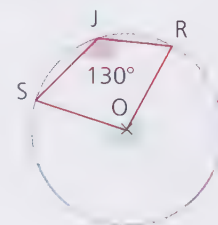


- 7 Dans les figures suivantes, O est le centre des cercles.

- 1 Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{FOG}$.



- 2 Calculer la mesure de l'angle rentrant $\widehat{SOR}$.



- 8** Soit le triangle IJK tel que :

$$IJ = 5 \text{ cm}, \widehat{JIK} = 75^\circ \text{ et } \widehat{IJK} = 50^\circ.$$

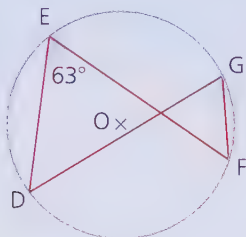
O est le centre du cercle circonscrit au triangle IJK.

1 Faire une figure.

2 Calculer la mesure de l'angle $\widehat{IOJ}$.

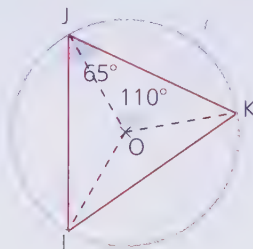
- 9** Sur la figure ci-dessous, D, E, F et G sont quatre points du cercle de centre O.

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DGF}$? Justifier.



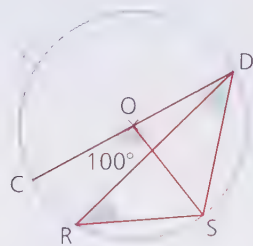
- 10** Sur la figure ci-dessous, I, J et K sont trois points du cercle $\mathcal{C}$ de centre O tels que : $\widehat{IJK} = 65^\circ$ et $\widehat{JOK} = 110^\circ$.

Calculer la mesure des angles $\widehat{IOK}$ et $\widehat{JIK}$.



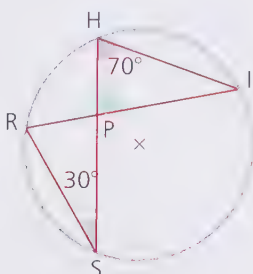
- 11** Sur la figure ci-dessous, R et S sont deux points du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre [CD] tels que $\widehat{COS} = 100^\circ$.

Calculer la mesure des angles $\widehat{CDS}$ et $\widehat{DRS}$.



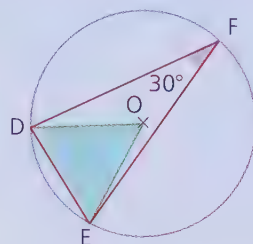
- 12** Sur la figure ci-dessous, les points H, P et S sont alignés ainsi que les points R, P et I.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HPI}$.



- 13** Sur la figure ci-dessous, D, E et F sont trois points du cercle $\mathcal{C}$ de centre O tels que $\widehat{DFE} = 30^\circ$.

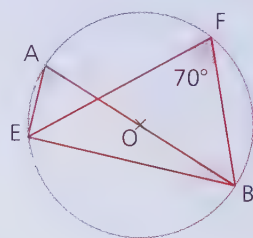
Démontrer que le triangle ODE est équilatéral.



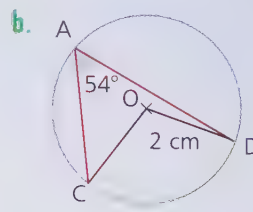
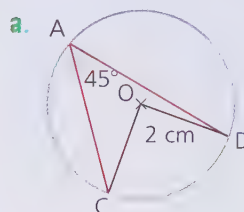
- 14** Sur la figure ci-dessous, [AB] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

E et F sont deux points du cercle $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{EFB} = 70^\circ$.

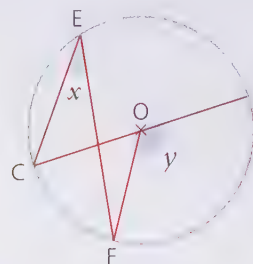
Calculer la mesure des angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABE}$.



- 15** Dans chacun des cas ci-dessous, O est le centre du cercle. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{COD}$, puis la longueur de l'arc $\widehat{CD}$ ne contenant pas le point A.

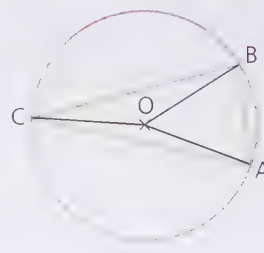


- 16** Sur la figure ci-dessous, O est le centre du cercle de diamètre [CD]. Exprimer y en fonction de x .

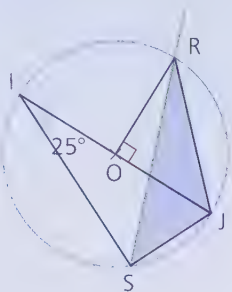


17 Vu au brevet

Déterminer la mesure des angles du triangle ABC sachant que $\widehat{AOB} = 50^\circ$ et $\widehat{BOC} = 150^\circ$, en justifiant chacune de vos réponses. Le point O est le centre du cercle passant par les points A, B et C.



- 18** Sur la figure ci-dessous :
- $[IJ]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre O ;
 - R et S sont deux points de $\mathcal{C}$ tels que :
 $\widehat{ROJ} = 90^\circ$ et $\widehat{SIJ} = 25^\circ$.



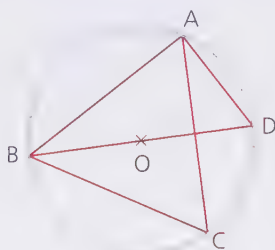
- 1 Calculer les mesures des angles du triangle JRS .
- 2 Démontrer que la demi-droite (SR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ISJ}$.

19 Vu au brevet

- 1 On trace le segment $[AB]$ tel que $AB = 7$ cm. Placer un point C tel que $\widehat{BAC} = 70^\circ$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$.
- 2 Construire le cercle circonscrit au triangle ABC , et appeler O son centre. On laissera les traits de construction.
- 3 Donner la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$ en justifiant la réponse.

20 Vu au brevet

- Sur la figure ci-dessous,
- ABC est un triangle équilatéral ;
 - le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
 - le point D est le point diamétralement opposé au point B sur ce cercle.

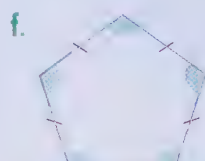
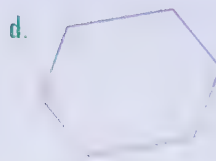
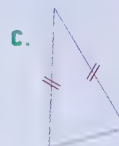
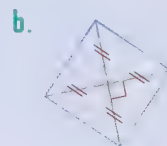
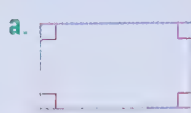


- 1 Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifier.
- 2 Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$? Justifier.

- 21** 1 Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O , puis placer sur ce cercle deux points A et B non diamétralement opposés. Placer un point M sur le grand arc $\widehat{AB}$ et un point N sur le petit arc $\widehat{AB}$.
- 2 a. Exprimer l'angle $\widehat{AMB}$ en fonction de l'angle $\widehat{AOB}$.
 - b. Exprimer l'angle $\widehat{ANB}$ en fonction de l'angle $\widehat{AOB}$.
 - c. Déduire des questions précédentes que :
 $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 180^\circ$.
- 3 a. Tracer la demi-droite (Ax) passant par le point M .
 - b. Démontrer que : $\widehat{ANB} = \widehat{BMx}$.

Polygones réguliers

- 22** Retrouver les polygones réguliers parmi les polygones ci-dessous.



- 23** Placer deux points O et A tels que $OA = 3$ cm. Construire un carré $ABCD$ de centre O en utilisant une équerre et une règle non graduée.

- 24** 1 Placer deux points O et A tels que $OA = 4$ cm. Construire un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O en utilisant un rapporteur, un compas et une règle non graduée.
- 2 Reprendre la question précédente en utilisant uniquement un compas et une règle non graduée pour la construction de l'hexagone régulier.

- 25** 1 Placer deux points O et A tels que $OA = 3$ cm. Construire un triangle équilatéral ABC de centre O en utilisant un rapporteur, un compas et une règle non graduée.
- 2 Reprendre la question précédente en utilisant uniquement un compas et une règle non graduée pour la construction du triangle équilatéral.

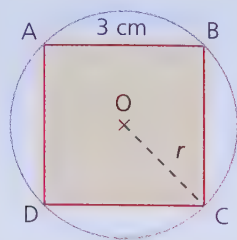
- 26** Recopier puis relier chaque polygone à son nombre de côtés.

pentagone	•	•	5
octogone	•	•	7
décagone	•	•	8
dodécagone	•	•	9
heptagone	•	•	10
ennéagone	•	•	12

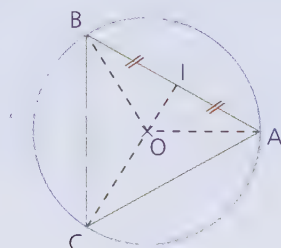
- 27** Placer deux points O et A tels que $OA = 4$ cm. Construire un octogone régulier $ABCDEFGH$ de centre O en utilisant un rapporteur, un compas et une règle non graduée.

- 28** 1 Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 cm, puis construire un carré $ABCD$ inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.
- 2 Calculer la longueur d'un côté du carré $ABCD$.
 - 3 a. Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$, en cm^2 , du carré $ABCD$.
 - b. On note $\mathcal{A}_2$ l'aire du disque de centre O et de rayon 3 cm. Démontrer que : $\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} = \frac{\pi}{2}$.

- 29** ABCD est un carré de côté 3 cm inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r . Démontrer que : $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.



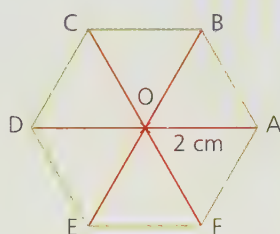
- 30** Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1,5 cm. I est le milieu de [AB].



- 1 Quelle est la mesure de chacun des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{OIA}$ et $\widehat{AOI}$? Justifier.
- 2 Démontrer que la valeur exacte de AI en cm est $1,5 \sin 60^\circ$.
- 3 Calculer la valeur exacte du périmètre p , en cm, du triangle équilatéral ABC, ainsi que son arrondi au dixième.

31 Vrai ou faux

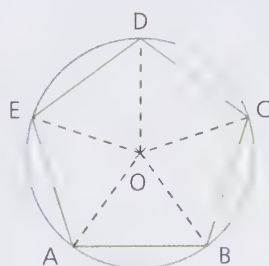
On considère l'hexagone régulier ABCDEF de centre O tel que $OA = 2$ cm.



- a. $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
- b. Le triangle AOB est équilatéral.
- c. Le périmètre de l'hexagone régulier ABCDEF est égal à 12 cm.
- d. Les points A, O et D sont alignés.

- 32** La figure ci-contre représente un pentagone régulier ABCDE inscrit dans un cercle de centre O.

- 1 Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
- 2 Construire le pentagone régulier ABCDE et son cercle circonscrit de centre O tels que $OA = 3$ cm.
- 3 Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EDC}$.
- 4 Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ qui coupe [AB] en H. Que peut-on dire des points D, O et H ? Justifier.



33 Vu au brevet

Dans ce problème, on veut calculer les aires d'un carré, d'un hexagone régulier et d'un décagone (polygone à dix côtés) régulier de même périmètre (120 m). Les trois parties du problème sont indépendantes.

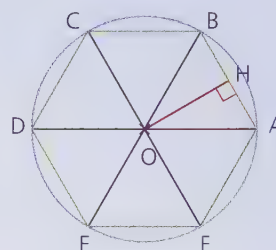
Toutes les longueurs qui interviennent sont exprimées en mètres et les aires en mètres carré. On ne fera pas les figures.

A Étude du carré

Calculer le côté puis l'aire d'un carré de 120 m de périmètre.

B Étude de l'hexagone régulier

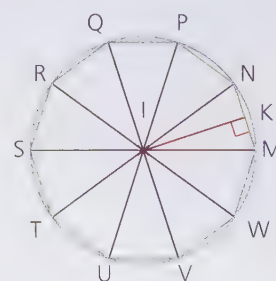
La figure ci-dessous représente un hexagone régulier ABCDEF de 120 m de périmètre. Il est inscrit dans un cercle de centre O et constitué de six triangles équilatéraux. Le segment [OH] est une hauteur du triangle équilatéral OAB.



- 1 Calculer la longueur AB du côté de l'hexagone régulier.
- 2 En déduire AH puis la valeur exacte de OH (on justifiera chaque réponse).
- 3 Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle OAB.
- 4 Calculer la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10 m^2 près de l'aire de l'hexagone régulier de 120 m de périmètre.

C Étude du décagone régulier

La figure ci-dessous représente un décagone régulier MNPQRSTUWV de 120 m de périmètre. Ce décagone est inscrit dans un cercle de centre I.

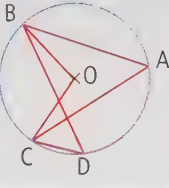
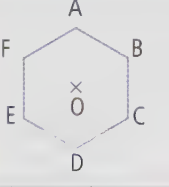
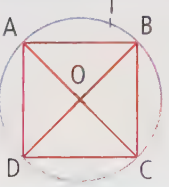


Le segment [IK] est une hauteur du triangle isocèle IMN.

- 1 Calculer la longueur MN du côté du décagone régulier.
- 2 Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MIN}$, puis de l'angle $\widehat{IMN}$.
- 3 Montrer que la valeur arrondie au cm près de IK est 18,47 mètres.
- 4 En utilisant cette valeur approchée de IK, calculer :
– l'aire du triangle MIN ;
– l'aire du décagone régulier ; donner la valeur approchée à 10 m^2 près de ce dernier résultat.

Faire le point

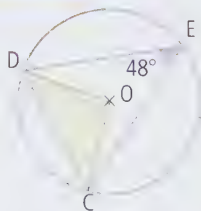
34 QCM Indiquer, dans chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les quatre réponses proposées.

			A	B	C	D
1	Les points E, F, G et H sont sur le cercle de centre I.	Parmi les angles proposés, lesquels sont des angles inscrits ?	$\widehat{EFG}$	$\widehat{GIH}$	$\widehat{EGF}$	$\widehat{GHE}$
2		Parmi les angles proposés, lesquels sont des angles au centre ?	$\widehat{EIG}$	$\widehat{GEH}$	$\widehat{GHI}$	$\widehat{HIE}$
3		Les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O. $\widehat{BAC} =$	$\widehat{BDC}$	$\widehat{BOC}$	$\frac{1}{2}\widehat{BOC}$	$2\widehat{BOC}$
4		ABCDEF est un hexagone régulier de centre O. Donc :	$\widehat{AOB} = 30^\circ$	$\widehat{AOB} = 60^\circ$	Le triangle AOB est équilatéral	$\widehat{ABC} = 120^\circ$
5		ABCD est un carré inscrit dans le cercle de centre O. I est un point de l'arc $\widehat{AB}$. Alors :	$\widehat{AOD} = 90^\circ$	$\widehat{DIC} = 45^\circ$	$\widehat{AIC} = 90^\circ$	$\widehat{AIB} = 135^\circ$

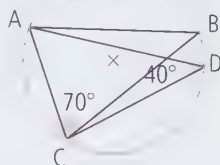
Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

• Appliquer les propriétés des angles inscrits

35 Les points C, D et E appartiennent au cercle de centre O.
Calculer la mesure de chacun des angles du triangle DOC.



36 A, B, C et D sont quatre points du cercle $\mathcal{C}$.
Démontrer que le triangle ABC est isocèle.



• Construire un polygone régulier. Calculer des longueurs

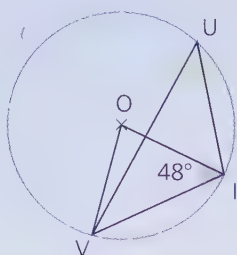
37 ① Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 4 cm, puis construire un carré DEFG inscrit dans ce cercle.
② Calculer la valeur exacte de DE, puis en donner l'arrondi au mm.

38 ① Placer deux points O et A tels que $OA = 3$ cm. Construire un triangle équilatéral ABC de centre O.
② Soit I le milieu de [AB]. Calculer la valeur exacte de la longueur AI, puis en déduire la valeur exacte de AB.

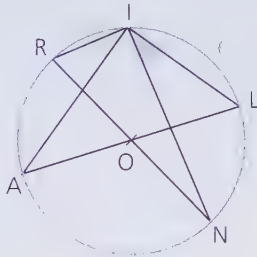
39 Placer deux points A et B tels que $AB = 3$ cm. Construire un hexagone régulier ABCDEF.

Approfondir

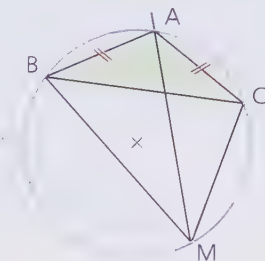
- 40** Sur la figure ci-dessous, I, U et V sont trois points du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et $\widehat{OIV} = 48^\circ$.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{IUV}$.



- 41** Sur la figure ci-dessous, [AL] et [RN] sont deux diamètres du cercle $\mathcal{C}$ de centre O.
I est un point du cercle $\mathcal{C}$ appartenant au grand arc $\widehat{AR}$.
Démontrer que : $\widehat{RIA} = \widehat{NIL}$.

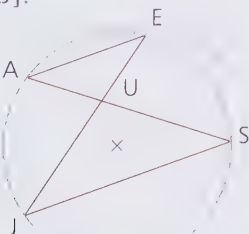


- 42** Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est isocèle en A et est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. M est un point de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A.
Démontrer que la demi-droite (MA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BMC}$.



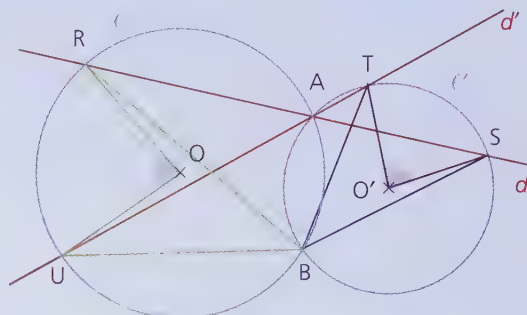
Démontrer que la demi-droite (MA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BMC}$.

- 43** Sur la figure ci-dessous, [AE] et [JS] sont deux cordes parallèles du cercle $\mathcal{C}$. U est le point d'intersection des segments [AS] et [EJ].
Démontrer que : $\widehat{AEJ} = \widehat{EJS} = \widehat{ASJ} = \widehat{EAS}$.



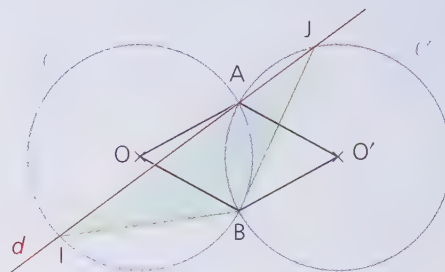
- 1** Démontrer que : $\widehat{AEJ} = \widehat{EJS} = \widehat{ASJ} = \widehat{EAS}$.
- 2 a.** Quelle est la nature des triangles EAU et JUS ?
- b.** En déduire que : $JE = AS$.

- 44** Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs O et O' sont sécants en A et B.
Deux droites d et d' passent par A : d coupe $\mathcal{C}$ en R et $\mathcal{C}'$ en S, alors que d' coupe $\mathcal{C}$ en U et $\mathcal{C}'$ en T.



- 1** Démontrer que : $\widehat{ROU} = \widehat{SO'T}$.
- 2** Démontrer que : $\widehat{UBT} = \widehat{RBS}$.

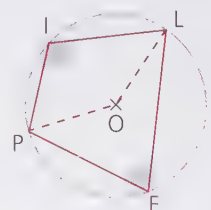
- 45** On considère la figure ci-dessous dans laquelle :
Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O', ont le même rayon et se coupent en deux points A et B.
Une droite d passant par le point A recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en I et le cercle $\mathcal{C}'$ en J.



- 1** Démontrer que le quadrilatère OAO'B est un losange.
- 2 a.** Comparer les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AJB}$.
- b.** En déduire la nature du triangle BIJ.

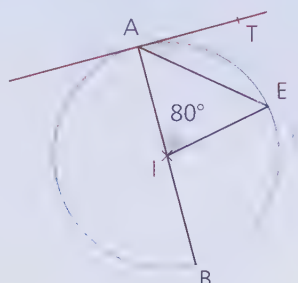
- 46** **1 a.** Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, puis un triangle ABC inscrit dans ce cercle.
b. Tracer la médiatrice d du segment [BC] ; elle coupe l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A en un point qu'on appelle R.
2 Démontrer que : $\widehat{BOR} = \widehat{ROC}$.
3 Démontrer que la demi-droite (AR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

- 47** Le quadrilatère PILE est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O.
Démontrer que les angles opposés $\widehat{PIL}$ et $\widehat{PEL}$ du quadrilatère PILE sont supplémentaires.



48 Sur la figure ci-dessous :

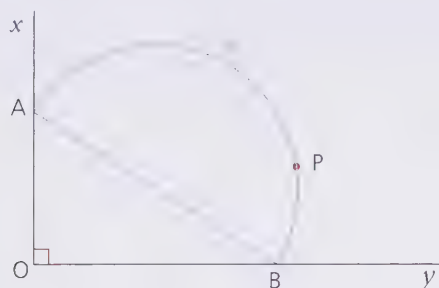
- $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre I ;
- E est un point de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{AIE} = 80^\circ$;
- la droite (AT) est la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.



Calculer la mesure de l'angle $\widehat{TAE}$, puis la comparer à celle de l'angle $\widehat{AIE}$.

49 Avec un logiciel de géométrie

- 1 a.** Avec un logiciel de géométrie, construire une figure analogue à la figure ci-dessous où :
- les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ forment un angle droit ;
 - le demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est tel que A appartient à $[Ox)$ et B appartient à $[Oy)$;
 - le point P appartient au demi-cercle $\mathcal{C}$.



b. Tracer la droite (OP) .

2 Déplacer le point A sur $[Ox)$ et le point B sur $[Oy)$ afin de changer la position du demi-cercle $\mathcal{C}$.

Que constate-t-on concernant la position du point P ?

3 Démontrer cette conjecture.

50 1 Construire un hexagone régulier $ABCDEF$ inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O .

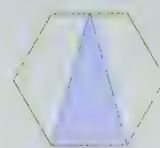
2 Démontrer que le quadrilatère $ABDE$ est un rectangle.

51 Construire un hexagone non régulier ayant tous ses côtés de même longueur.

52 Construire un hexagone non régulier ayant tous ses angles de même mesure.

53 QCM

Quelle fraction de l'hexagone régulier représente le triangle bleu ?



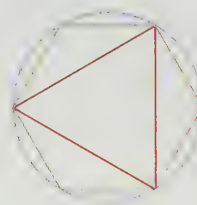
- a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{3}$
c. $\frac{3}{8}$ d. $\frac{1}{5}$ e. $\frac{1}{2}$

Concours KANGOUROU

54 QCM

Un triangle équilatéral et un hexagone sont inscrits dans un même cercle.

Si l'on divise l'aire de l'hexagone par l'aire du triangle, quel est le quotient obtenu ?



- a. 1,5 b. 2
c. 3 d. 4 e. π

Concours KANGOUROU

55 Un verre a la forme d'un prisme droit de hauteur 10 cm. Sa base est un hexagone régulier de côté 3 cm. Ce verre peut-il contenir 20 cL ?



56 1 a. Placer deux points A et B tels que $AB = 2$ cm. Donner un programme de construction permettant de construire un pentagone régulier $ABCDE$ de centre O .

b. Construire un pentagone régulier $ABCDE$ de centre O .

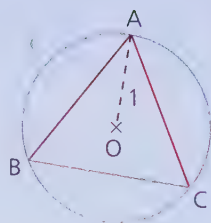
2 Soit I le milieu de $[AB]$.

a. Calculer la valeur exacte de OI .

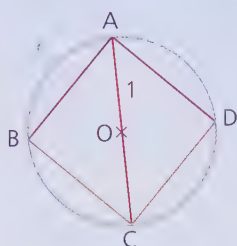
b. Calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2 , du pentagone $ABCDE$, puis son arrondi au dixième.

57 On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

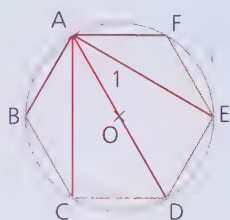
❶ Montrer que si un triangle équilatéral ABC est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ alors : $AB \times AC = 3$.



❷ Montrer que si un carré $ABCD$ est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ alors : $AB \times AC \times AD = 4$.



❸ Montrer que si un hexagone régulier $ABCDEF$ est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ alors : $AB \times AC \times AD \times AE \times AF = 6$.



❹ Si un pentagone régulier $ABCDE$ est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$, quelle conjecture peut-on émettre sur la valeur du produit $AB \times AC \times AD \times AE$? La démontrer.

Débattre et argumenter

58 Vrai ou faux

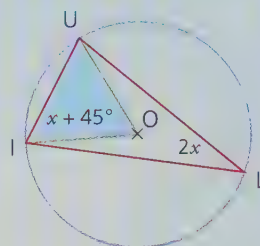
❶ Le triangle OUI est équilatéral.

❷ Si un angle mesurant 72° est inscrit dans un cercle de rayon 2,5 cm, alors il intercepte un arc de longueur 2π cm.

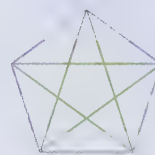
❸ Si les sommets d'un polygone appartiennent à un même cercle, alors ce polygone est régulier.

❹ Si un polygone est régulier, alors tous ses sommets appartiennent à un même cercle.

❺ Si un polygone est régulier, alors il a un centre de symétrie.



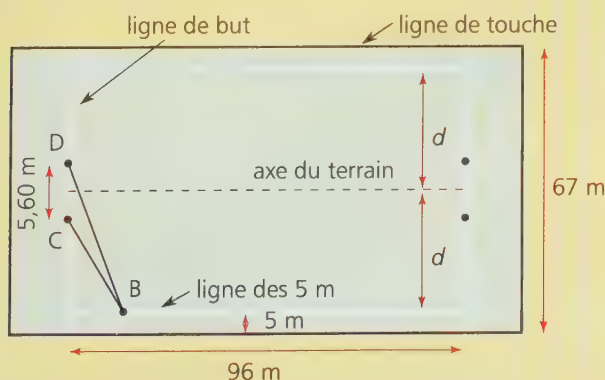
59 Luc a compté 17 vrais quadrilatères non croisés dans la figure ci-dessous (un vrai quadrilatère n'a pas trois sommets alignés). Combien en a-t-il oubliés ?



Concours KANGOUROU

POUR LES CURIEUX

La figure ci-dessous représente un terrain de rugby. Les points C et D , situés sur la ligne de but, représentent les poteaux. La ligne située à 5 mètres de la ligne de touche s'appelle la ligne des 5 mètres.



Lors d'un entraînement, un joueur doit effectuer un tir au but à partir d'un point sur la ligne des 5 mètres.

On veut répondre à la question suivante :

À quelle distance de la ligne de but le joueur doit-il se placer pour avoir l'angle maximal de tir ?

❶ Calculer la distance d entre l'axe du terrain et la ligne des 5 mètres.

❷ Reproduire la figure ci-contre, puis tracer le cercle de centre O passant par les points C , D et B .

❸ Démontrer que l'angle $\widehat{CBD}$ est maximal lorsque l'angle $\widehat{COD}$ est maximal.

❹ Quelle doit-être la position du cercle de centre O' passant par les points C , D et coupant la ligne des 5 mètres pour que l'angle $\widehat{CO'D}$ soit maximal ? Dans ce cas, à quelle distance des points C et D est situé le point O' ?

Tracer sur la figure le cercle correspondant à cette situation.

Placer le point B' pour que l'angle $\widehat{CB'D}$ soit maximal, puis calculer la distance de B' à la ligne de but. Conclure.

Bissectrice d'un angle inscrit

A et B sont deux points non diamétralement opposés d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

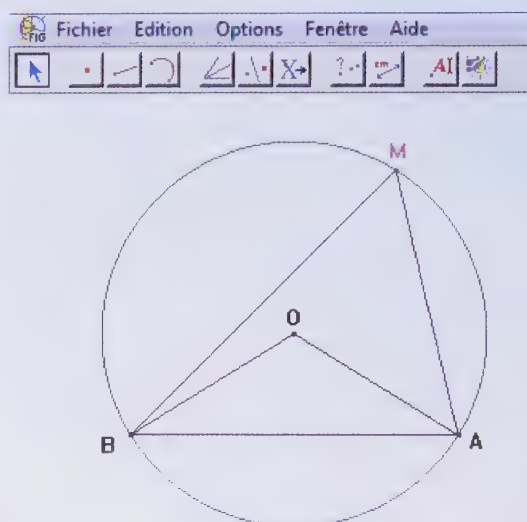
Le point M est un point « mobile » sur le grand arc de cercle $\widehat{AB}$ et distinct des points A et B.

On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$; elle coupe le petit arc de cercle $\widehat{AB}$ en I.

On se propose de déterminer la position du point I lorsque l'on déplace le point M sur le grand arc de cercle $\widehat{AB}$ (A et B exclus).

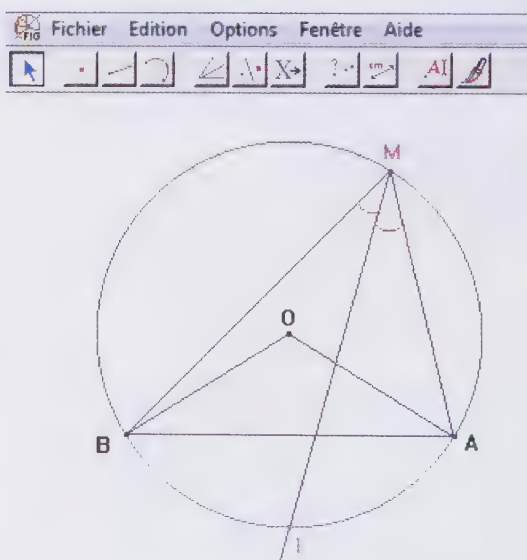
1 Conjecturer

1. a. Créer un **cercle** $\mathcal{C}$ de centre O.
- b. Créer deux **points** A et B sur le cercle $\mathcal{C}$, non diamétralement opposés.
- c. Créer les **segments** [OA] et [OB].
2. a. Créer un **point** M distinct de A et de B sur le grand arc de cercle $\widehat{AB}$.
- b. Créer les **segments** [MA] et [MB].



3. a. Créer la **bissectrice** de l'angle $\widehat{AMB}$.
- b. Créer le **point** I, point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ et du cercle $\mathcal{C}$.
- c. **Déplacer** le point M sur le grand arc de cercle $\widehat{AB}$ (A et B exclus).

Quelle conjecture peut-on émettre sur la position du point I ?



2 Démontrer

1. a. Démontrer que : $\widehat{AOI} = \widehat{IOB}$.
- b. En déduire que la droite (OI) est la médiatrice du segment [AB].
2. Conclure.

13

Sphère et boule

Carte de France corrigée en 1693



Grâce à de meilleures mesures et à une meilleure représentation de la sphère terrestre, la carte de France établie par la famille **Cassini** au XVIII^e siècle corrigeait une **erreur notoire** : la France était quelque **deux cents kilomètres** plus à l'Ouest sur le globe terrestre qu'on ne le croyait à l'époque.

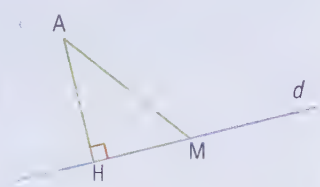
Capitaine,
ya des moutons
ce matin...



Les navigateurs avaient besoin de cartes précises pour arriver à bon port... Il leur était facile de déterminer la **latitude** (sur un **parallèle**) en **visant l'étoile polaire** et en mesurant l'angle par rapport à la verticale du point. En revanche, la **longitude** (sur un **méridien**) était autrement plus délicat à déterminer : l'écrivain Voltaire, en 1734, parle de « **l'impossible problème** des longitudes ». Pour la déterminer, des **chronomètres de précision** furent mis au point en Angleterre vers 1750 après de **multiples naufrages**.

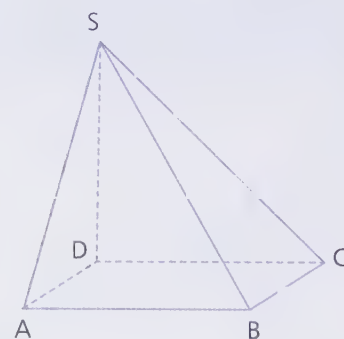
Archimède (287-212 av J.-C.), ingénieur et mathématicien, a démontré de nombreuses **formules sur les volumes** dont la plus célèbre est celle liant les volumes d'un **cylindre** et d'une **sphère** inscrite dans le cylindre : « le volume du cylindre circonscrit à la sphère vaut **une fois et demie** le volume de la sphère. »

QCM Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	Si A appartient au cercle de centre O et de rayon 3 cm, alors :	$OA = 6 \text{ cm}$	$OA = 3 \text{ cm}$	$OA = 1,5 \text{ cm}$
2	Si M appartient au disque de centre O et de rayon 5 cm, alors :	$OM \leq 5 \text{ cm}$	$OM = 5 \text{ cm}$	$OM > 5 \text{ cm}$
3	Si [AB] est un diamètre d'un cercle de centre O, alors :	$OA = AB$	OAB est un triangle rectangle en O	O est le milieu de [AB]
4	La longueur d'un cercle de rayon 10 cm est égale à :	$20\pi \text{ cm}$	$100\pi \text{ cm}$	$10\pi \text{ cm}$
5	L'aire d'un disque de rayon 8 cm est égale à :	$16\pi \text{ cm}^2$	$8\pi \text{ cm}^2$	$64\pi \text{ cm}^2$
6	$78,5 \text{ cm}^3 =$	785 mm^3	$7,85 \text{ mm}^3$	$78\,500 \text{ mm}^3$
7	$1 \text{ L} =$	1 dm^3	1 m^3	1 cm^3
8	Si MNP est un triangle rectangle en N, alors :	$MN^2 = MP^2 + PN^2$	$MP^2 = MN^2 + PN^2$	$PN^2 = MN^2 + PM^2$
9	La distance du point A à la droite d est : 	la longueur AM	la longueur AH	la longueur HM

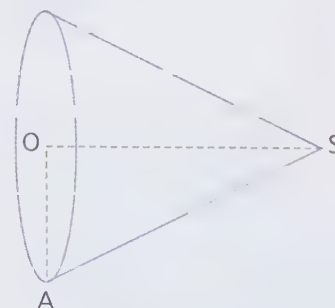
Exercice 1 On considère la pyramide SABCD représentée ci-contre de sommet S, de hauteur [SD] et dont la base ABCD est rectangulaire.

- ① Indiquer la nature de chacun des triangles suivants :
a. SDC b. SDA c. SDB d. ADC e. DCB
- ② Comparer la distance SD à chacune des distances SA, SB et SC.
- ③ Calculer le volume de cette pyramide sachant que :
 $SD = 5 \text{ cm}$, $AB = 4 \text{ cm}$ et $BC = 3 \text{ cm}$.



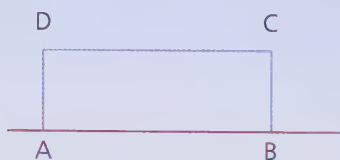
Exercice 2 On considère un cône de révolution de sommet S, dont la base est un disque de centre O et de rayon 3 cm et dont les génératrices mesurent 7 cm.

- ① Soit A un point du cercle de centre O et de rayon 3 cm. Indiquer les mesures des longueurs OA et SA.
- ② Calculer la hauteur SO de ce cône. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.
- ③ Calculer le volume de ce cône. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm^3 .



Activité 1 Sphère et boule

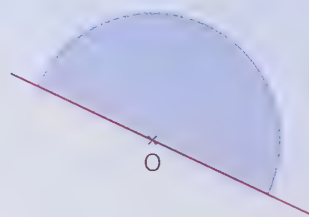
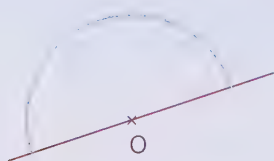
- 1 a. Décrire l'objet obtenu quand on fait tourner :
- un rectangle ABCD autour de la droite (AB).
 - un triangle KLM rectangle en K autour de la droite (KL).



- b. Recopier et compléter les phrases suivantes par « sphère » ou « boule » :

La surface obtenue lorsqu'on fait tourner un demi-cercle autour d'un de ses diamètres est appelée une

Le solide obtenu lorsqu'on fait tourner un demi-disque autour d'un de ses diamètres est appelé une



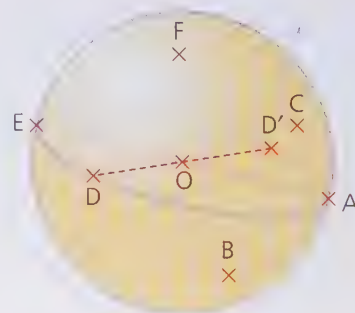
- 2 On rappelle les définitions suivantes :

« Le cercle de centre O et de rayon 3 cm est constitué de tous les points du plan situés à 3 cm de O. »

« Le disque de centre O et de rayon 3 cm est constitué de tous les points du plan situés à une distance de O inférieure ou égale à 3 cm. »

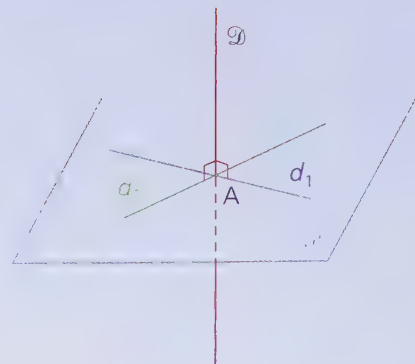
Quelles modifications doit-on apporter aux définitions précédentes pour obtenir les définitions d'une sphère et d'une boule de centre O et de rayon 3 cm ?

- 3 a. Les points A, D, E appartiennent-ils à la sphère $\mathcal{S}$ de centre O représentée ci-contre ? Justifier.
- b. A-t-on les indications nécessaires pour savoir si les points B, C et F appartiennent à la sphère $\mathcal{S}$?
- c. Que devrait-on préciser pour pouvoir affirmer que ces points appartiennent ou n'appartiennent pas à la sphère $\mathcal{S}$?
- d. Sur la droite (OD), on considère le point D' symétrique de D par rapport à O. D' est-il un point de $\mathcal{S}$?
- On dit que les points D et D' sont **diamétralement opposés** sur $\mathcal{S}$.



Activité 2 Droite perpendiculaire à un plan

- 1 a. Prendre une feuille de papier, placer un point A sur cette feuille et tracer deux droites d_1 et d_2 passant par A.
 b. À l'aide d'une équerre, vérifier qu'il n'existe qu'une seule droite $\mathcal{D}$ passant par A qui soit perpendiculaire à d_1 et à d_2 .
 On dit que la droite $\mathcal{D}$ est la **droite perpendiculaire en A au plan $\mathcal{P}$** représenté par la feuille.
 c. Soient d_3 et d_4 deux autres droites du plan sécantes en A.
 Que peut-on dire de $\mathcal{D}$ par rapport aux deux droites d_3 et d_4 ?
- 2 On considère un point O quelconque dans l'espace et la droite $\mathcal{D}'$ passant par O parallèle à la droite $\mathcal{D}$ et qui coupe le plan $\mathcal{P}$ en H. Que peut-on dire de cette droite $\mathcal{D}'$ par rapport au plan $\mathcal{P}$?



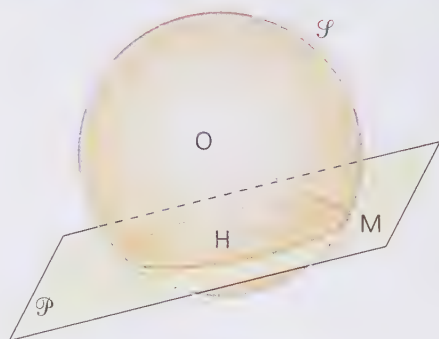
- Si une droite est perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est perpendiculaire à ce plan.
- Si une droite est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ en un point A, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par A.

Activité 3 Section d'une sphère par un plan

- 1 **Conjecture**
 Sur la photo ci-contre, on assimile les oranges à des sphères sectionnées par un plan. Quelle semble être la nature de cette section ?



- 2 **Démonstration**
 La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 4 cm représentée ci-contre a été coupée par un plan $\mathcal{P}$.
 La droite passant par O et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ coupe ce plan en un point H tel que $OH = 3$ cm.
 Le point M est un point de la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$.



La distance OH est appelée la distance du point O au plan $\mathcal{P}$.

- a. Quelle est la nature du triangle OHM ? Justifier.
 - b. Donner les mesures des segments [OM] et [OH], puis calculer la longueur exacte HM.
 - c. Soit N un autre point de la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$, que peut-on dire de la longueur HN ?
 - d. Expliquer pourquoi tous les points de la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$ appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 - e. Expliquer pourquoi tout point de ce cercle est un point de la sphère $\mathcal{S}$.
- 3 a. On considère le cas où le plan $\mathcal{P}$ passe par le centre O de la sphère. Quelle est la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$? Une telle section est appelée un **grand cercle** de la sphère $\mathcal{S}$.
 b. On considère maintenant le cas où la distance OH est 4 cm. Quelle est alors la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$? On dit alors que le plan $\mathcal{P}$ est **tangent** à la sphère $\mathcal{S}$.

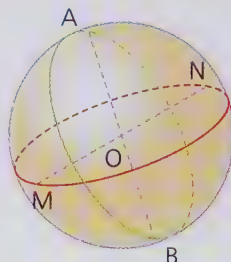
A Sphère et boule

Définitions

- La **sphère** de centre O et de rayon R est formée de tous les points de l'espace situés à une distance de O égale à R .
- La **boule** de centre O et de rayon R est formée de tous les points de l'espace situés à une distance de O inférieure ou égale à R .

Il est impossible de construire le patron d'une sphère.

Le cercle rouge et le cercle vert ont le même centre et le même rayon que la sphère : on les appelle des **grands cercles**.



O est le milieu de $[AB]$: on dit que A et B sont **diamétralement opposés**. M et N sont également diamétralement opposés.

Propriétés

- L'aire $\mathcal{A}$ d'une sphère de rayon R est donnée par la formule : $\mathcal{A} = 4\pi R^2$.
- Le volume $\mathcal{V}$ d'une boule de rayon R est donné par la formule : $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Exemple

Si $R = 5$ cm, on obtient :

$$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times R^2 = 4 \times \pi \times 5^2 = 100\pi \text{ et } \mathcal{V} = \frac{4 \times \pi \times R^3}{3} = \frac{4 \times \pi \times 5^3}{3} = \frac{500\pi}{3}.$$

L'aire d'une sphère de rayon 5 cm est égale à 100π cm², soit environ 314,16 cm².

Le volume d'une boule de rayon 5 cm est égal à $\frac{500\pi}{3}$ cm³, soit environ 523,6 cm³.

B Section d'une sphère par un plan

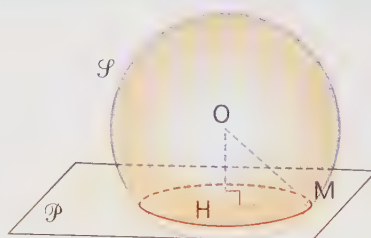
Propriété

Soient O le centre d'une sphère $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ un plan qui coupe la sphère $\mathcal{S}$ et H le point d'intersection de la droite passant par O et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

La section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$ est un cercle de centre H .

La **section** d'un solide par un plan est constituée de tous les points qui appartiennent à la fois au plan et au solide.

La distance OH est appelée la distance du point O au plan $\mathcal{P}$.



Pour tout point M de la section, le triangle OHM est rectangle en H .

Remarques : Soit R le rayon de la sphère.

- Si $OH = 0$, alors la section est un grand cercle.
- Si $OH = R$, alors la section est réduite au point H . Le plan et la sphère sont dits **tangents**.
- Si $OH > R$, alors le plan ne coupe pas la sphère.

La section d'une boule par un plan est un disque.

Calculer le rayon de la section d'une sphère par un plan

Énoncé Une sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 3 cm est coupée par un plan situé à 2 cm du centre O .

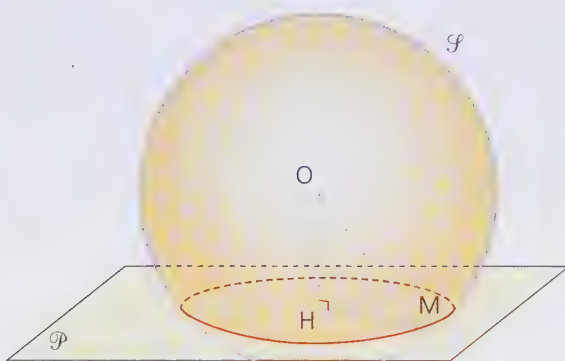
Calculer le rayon de la section obtenue. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.

Solution

Méthode Soit une sphère $\mathcal{S}$ coupée par un plan $\mathcal{P}$.

Pour calculer le rayon de la section, le rayon de la sphère ou la distance du plan au centre de la sphère, on utilise le théorème de Pythagore ou la trigonométrie dans le triangle OHM , rectangle en H tel que :

- O est le centre de la sphère ;
- H est le centre de la section ;
- M est un point quelconque de la section (M appartient par conséquent à la fois à la sphère et au plan).



On commence par tracer une figure représentant la situation.

Soient M un point de la section et H le point d'intersection du plan et de la droite passant par O perpendiculairement au plan.

La section de la sphère par le plan est le cercle de centre H et de rayon HM .

La droite (OH) est perpendiculaire au plan de coupe, donc le triangle OHM est rectangle en H . D'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2$$

D'où :

$$HM^2 = OM^2 - OH^2$$

$$HM^2 = 3^2 - 2^2$$

$$HM^2 = 9 - 4 = 5$$

$$HM = \sqrt{5}$$

La section de la sphère par ce plan est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{5}$ cm, soit environ 2,2 cm.

On utilise le triangle OHM , rectangle en H , dans lequel on pourra appliquer le théorème de Pythagore.

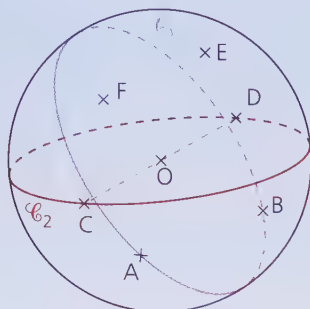
On interprète l'énoncé :

- le rayon de la sphère est 3 cm, donc : $OM = 3$ cm ;
- le plan est situé à 2 cm de O , donc : $OH = 2$ cm.

S'entraîner

Sphère et boule – Généralités

- 1 On a représenté ci-dessous une sphère de centre O et de rayon 4 cm et deux grands cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.



Les points A et B appartiennent à $\mathcal{C}_1$ et $[CD]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_2$. Déterminer, lorsque cela est possible, les longueurs OA , OB , OC , OD , OE , OF , AB et CD .

2 Vrai ou faux

On considère les points A , B , C , D , E , F tels que :
 $AB = 2$ cm, $AD = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $DE = 8$ cm, $CF = 7$ cm.
 Répondre par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

- B appartient à la sphère de centre A et de rayon 2 cm.
- B appartient à la boule de centre A et de rayon 2 cm.
- D est à l'extérieur de la boule de centre A et de rayon 2 cm.
- F appartient à la sphère de centre C et de rayon 8 cm.
- E appartient à la sphère de centre D et de rayon 8 cm.
- C appartient à la boule de centre B et de rayon 4 cm.
- A appartient à la sphère de centre B passant par C .

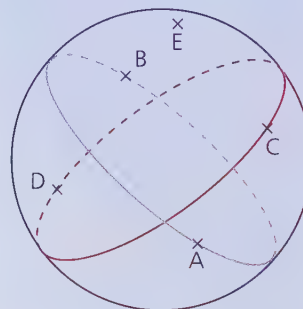
- 3 On considère une sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 3 cm, la boule $\mathcal{B}$ de même centre et de même rayon que la sphère $\mathcal{S}$ et les points A , B , C , D , E , F et G .

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en suivant le modèle de la première ligne :

	appartient-il à la sphère $\mathcal{S}$?	appartient-il à la boule $\mathcal{B}$?	est situé à une distance d de O telle que :
A	oui	oui	$d = 3$ cm
B			$d = 4$ cm
C			$d < 3$ cm
D	non	non	
E	non	oui	
F	oui		
G			$d = 0$ cm

b. Que peut-on dire du point G ?

- 4 Reproduire la figure ci-dessous représentant une sphère $\mathcal{S}$ de centre O . Les points A , B , C , D et E appartiennent à la sphère $\mathcal{S}$. Les points A et B sont diamétralement opposés ainsi que les points C et D .



- Expliquer comment tracer le point O , puis placer ce point.
- Dessiner à main levée le grand cercle passant par E .
- Construire le point F diamétralement opposé à E .

Aire et volume

- 5 Calculer l'arrondi à 0,1 cm² de l'aire d'une sphère de rayon R dans chacun des cas suivants :

- $R = 9,1$ cm
- $R = 34$ cm
- $R = 0,52$ cm
- $R = 78,25$ cm

- 6 Calculer l'arrondi au dm³ du volume d'une boule de rayon R dans chacun des cas suivants :

- $R = 6$ dm
- $R = 38$ cm
- $R = 3,4$ m
- $R = 650$ mm

7 Calcul mental

- 1 Donner un ordre de grandeur de l'aire d'une sphère de rayon R dans chacun des cas suivants :

- $R = 1$ m
- $R = 2$ m
- $R = 10$ m
- $R = 0,1$ m

- 2 Donner un ordre de grandeur du volume d'une boule de rayon R dans chacun des cas suivants :

- $R = 1$ cm
- $R = 3$ cm
- $R = 0,5$ cm
- $R = 10$ cm

- 8 Recopier et compléter le tableau suivant. Les longueurs seront arrondies au mm, les aires au mm² et les volumes au mm³.

	Rayon	Aire	Volume
1	2,7 cm		
2		12,76 cm ²	
3	1,5 cm		
4		2 324,28 cm ²	

Exercices

- 9** La grande coupole de l'Observatoire de Meudon a la forme d'une demi-sphère de diamètre 18 m. Calculer l'aire de cette coupole. Arrondir le résultat au dm^2 .



LE SAVIEZ-VOUS?

L'observatoire de Meudon a été fondé en 1876 par Jules Janssen sur les décombres du château de Meudon. Il était surtout destiné à l'observation du Soleil. La construction d'une grande lunette et de télescopes de 1 m et de 60 cm a permis d'étendre son activité à l'étude des planètes.

10 Perles

Un collier est constitué de 50 perles artificielles. Chaque perle est obtenue à partir d'une bille de diamètre 7 mm recouverte d'une couche de nacre.

Calculer la surface totale à recouvrir de nacre pour confectionner ce collier. Arrondir au mm^2 .

- 11** On a représenté ci-contre un réservoir parallélépipédique permettant de mesurer la hauteur d'eau tombée dans un jardin pendant une averse.

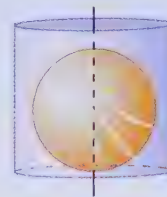
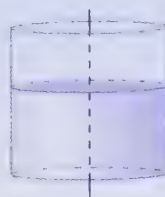


- 1** On assimile les gouttes d'eau à des boules de diamètre 4 mm. Calculer le volume d'une goutte d'eau. Donner la valeur exacte.
- 2** La hauteur d'eau tombée pendant cette averse est égale à 8 cm. Calculer le nombre de gouttes d'eau contenues dans le réservoir. On donnera la valeur approchée par défaut.

12 Vu au brevet

On note h la hauteur d'eau dans un cylindre de rayon 8 cm et de hauteur 15 cm.

On place au fond de ce cylindre une boule de rayon 6 cm et on constate que le cylindre est totalement rempli.



- 1** Calculer la valeur exacte du volume du cylindre.
- 2** Montrer que le volume de la boule est égal à $288\pi \text{ cm}^3$.
- 3** Dédurre des questions précédentes la hauteur h de l'eau dans le cylindre avant qu'on y place la boule.

B Thème de convergence

Santé : Vitamine C

- 1** Calculer la valeur exacte du volume d'une orange que l'on peut assimiler à une boule de diamètre 8 cm.
- 2** Calculer la valeur exacte du volume comestible de l'orange sachant que l'épaisseur de l'écorce est égale à 4 mm.
- 3** Le volume de jus est environ égal à 75 % du volume comestible. Calculer, en cm^3 , le volume de jus obtenu en pressant une orange (arrondir au cL).
- 4** On estime que le jus d'une orange apporte en moyenne 70 mg de vitamine C. Sachant que l'apport nutritionnel conseillé (ANC) en vitamine C est 110 mg pour un adulte, calculer la quantité de jus d'orange qu'il est recommandé de consommer par jour (arrondir au cL).

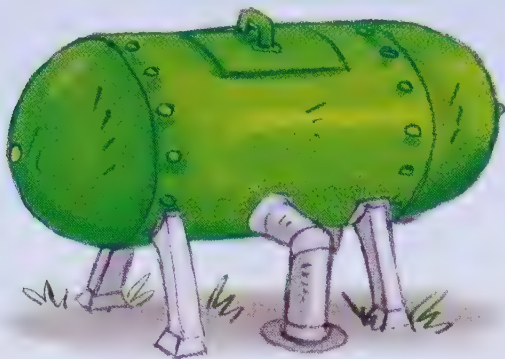
14 Vrai ou faux

- a. L'aire d'une sphère de rayon $4R$ est égale à l'aire de quatre sphères de rayon R .
- b. Le volume d'une demi-boule de rayon R est égal au volume d'un cône de hauteur $2R$ et de rayon de base R .
- c. L'aire d'une sphère est égale au produit de la longueur d'un grand cercle par son diamètre.
- d. Le rayon d'une sphère d'aire $16\pi \text{ cm}^2$ est égal à 4 cm.
- e. Le volume d'une boule de rayon 3 m est égal à $4\pi \text{ m}^3$.
- f. Si le rayon d'une sphère est doublé, alors son aire et son volume sont également doublés.

- 15** Un récipient servant à préparer un cocktail de fruits a la forme d'une demi-sphère de diamètre 30 cm.

- 1** Calculer la contenance totale de ce récipient. Arrondir au cL.
- 2** Le récipient n'est rempli qu'aux quatre cinquièmes de son volume. Calculer le nombre de verres de 20 cL que l'on pourra remplir.

- 16** Un réservoir est constitué d'un cylindre de diamètre 1,3 m et de deux demi-sphères de même diamètre accolées à chacune des bases du cylindre.
La longueur totale du réservoir est égale à 4,8 m.

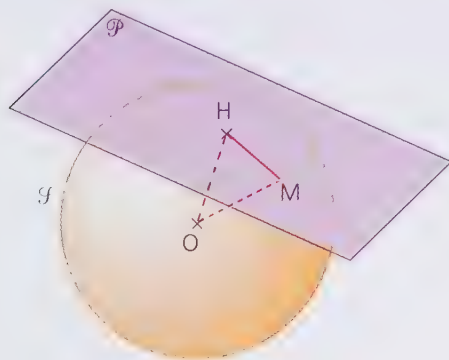


- 1 Calculer la hauteur de la partie cylindrique.
- 2 Calculer le volume de ce réservoir. Arrondir au L.
- 3 On souhaite repeindre ce réservoir. Calculer le nombre de litres de peinture nécessaires sachant que 1 L permet de recouvrir une surface de 8 m^2 environ.

Section d'une sphère par un plan

- 17** La sphère $\mathcal{S}$ de centre O représentée ci-dessous a été coupée par un plan $\mathcal{P}$. La section obtenue est un cercle $\mathcal{C}$ de centre H et de rayon $r = 6,2 \text{ cm}$.

- 1 Soit M un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$. Quelle est la nature du triangle OHM ?
- 2 Sachant que $HO = 4,3 \text{ cm}$, tracer le triangle rectangle OHM en vraie grandeur.
- 3 Calculer le rayon R de la sphère. Arrondir au mm.

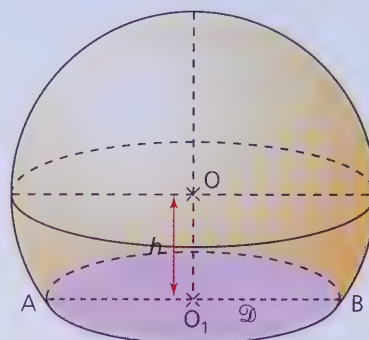


- 18** Un plan $\mathcal{P}$ coupe une sphère de centre O et de rayon 10 cm selon un cercle $\mathcal{C}$ de centre H . La distance OH du centre de la sphère à ce plan $\mathcal{P}$ est égale à 6 cm.

- 1 Représenter cette situation par un schéma.
- 2 Le point A étant un point du cercle $\mathcal{C}$, quelle est la nature du triangle OHA ?
- 3 Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

19 Vu au brevet

Un menuisier doit tailler des boules en bois de 10 cm de diamètre pour les disposer sur une rampe d'escalier.



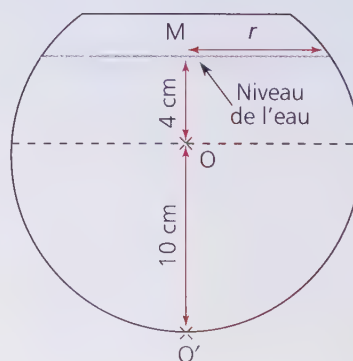
Il découpe la boule de centre O suivant un plan pour la coller sur son emplacement. La surface ainsi obtenue est un disque $\mathcal{D}$ de centre O_1 et de diamètre $AB = 5 \text{ cm}$.
Calculer à quelle distance h du centre de la boule il doit réaliser cette découpe. Arrondir au mm.

20 Vu au brevet

Léo, le poisson de Julie, est dans un bocal ayant la forme d'une sphère tronquée fixée sur un socle.

Le rayon de la sphère est de 10 cm. La distance de la surface plane de l'eau au centre O de la sphère est de 4 cm.

- 1 a. Quelle est la forme de la surface de l'eau ?
b. Calculer le rayon r de la surface de l'eau. Arrondir au mm.
c. Calculer l'aire de cette surface. Arrondir au mm^2 .
- 2 Calculer le volume d'eau nécessaire pour que la hauteur de l'eau soit égale à OO' . Arrondir au dL près.



- 21** On considère une sphère de centre O et de rayon 5 cm.

- 1 On note H un point tel que $OH = 4 \text{ cm}$.
a. Expliquer pourquoi le point H appartient à la boule de centre O et de rayon 5 cm.
b. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan passant par le point H et perpendiculaire à la droite (OH) et A un point appartenant au plan $\mathcal{P}$ et à la sphère.
Effectuer une figure à main levée.
- 2 Sans effectuer de calculs, tracer en vraie grandeur :
a. le triangle OHA ;
b. l'intersection de la sphère et du plan $\mathcal{P}$.

Exercices

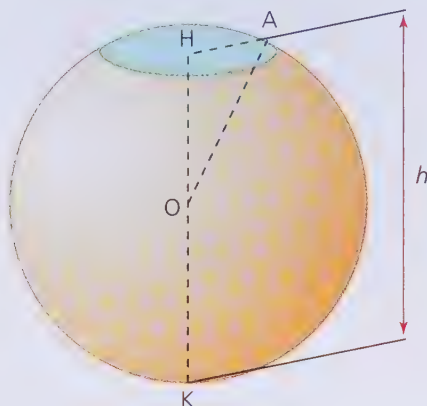
22 Vu au brevet

Une calotte sphérique est un solide obtenu en sectionnant une sphère par un plan.

Un doseur de lessive liquide, représenté ci-dessous, a la forme d'une calotte sphérique de centre O et de rayon $R = OA = 4,5$ cm.

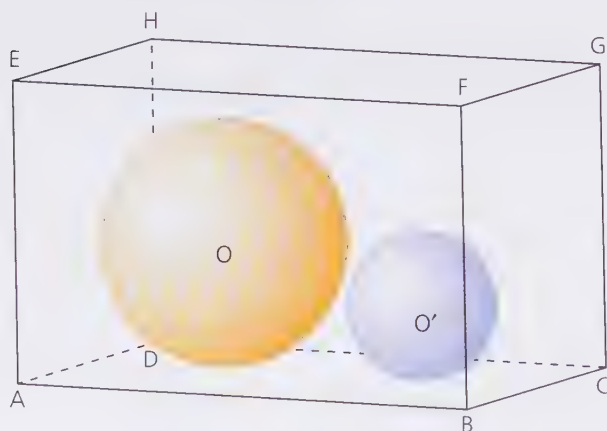
L'ouverture de ce récipient est délimitée par le cercle de centre H et de rayon $HA = 2,7$ cm.

La hauteur totale de ce doseur est HK .



- 1 Dessiner en vraie grandeur le triangle AHO .
- 2 Calculer OH , puis en déduire que la hauteur totale HK du doseur mesure exactement 8,1 cm.

- 23 On place deux boules de rayon 3 cm et 5 cm dans un récipient parallélépipédique comme indiqué dans la figure ci-dessous dans lequel on verse de l'eau.



Sachant que les boules ne flottent pas, indiquer dans chacun des cas suivants les valeurs possibles de la hauteur h de l'eau dans le récipient.

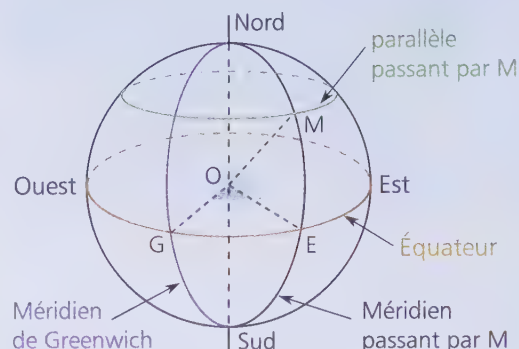
- a. Les boules sont complètement immergées.
- b. La grosse boule arrive juste au niveau de la surface de l'eau.
- c. La grosse boule émerge de l'eau mais la petite boule est complètement immergée.
- d. La petite boule arrive juste au niveau de la surface de l'eau.
- e. Les deux boules émergent de l'eau.

Sphère terrestre

24 Thème de convergence

Coordonnées géographiques

- 1 La surface de la Terre peut être assimilée à une sphère de rayon environ 6 370 km, les deux pôles Nord et Sud étant les deux extrémités d'un diamètre, noté $[NS]$.



L'**Équateur** est le grand cercle situé dans le plan perpendiculaire à l'axe (NS) passant par le centre O de la Terre. Il partage la Terre en deux hémisphères : l'hémisphère nord et l'hémisphère sud.

Les **méridiens** sont des demi-grands cercles de diamètre $[NS]$. Le **méridien de Greenwich** est le méridien-origine. Les **parallèles** sont des cercles centrés sur l'axe (NS) et situés dans des plans perpendiculaires à cet axe. Tous les parallèles sont parallèles entre eux. L'Équateur est le parallèle ayant le plus grand diamètre.

On peut considérer qu'un parallèle est « la section » de la Terre par un plan perpendiculaire à l'axe (NS) .

- a. Calculer la longueur de l'Équateur. Arrondir au km.
- b. Calculer la longueur d'un méridien. Arrondir au km.

- 2 Chaque point M situé à la surface de la Terre est situé à l'intersection d'un méridien et d'un parallèle.

On désigne par E le point d'intersection de l'Équateur et du méridien passant par M et par G le point d'intersection de l'Équateur et du méridien de Greenwich.

La **latitude** du point M est la mesure, en degrés, de

l'angle $\widehat{MOE}$ suivie de N ou de S selon que le point M est situé dans l'hémisphère Nord ou dans l'hémisphère Sud.

La **longitude** du point M est la mesure, en degrés, de

l'angle $\widehat{EOG}$ suivie de E ou de O selon que le point M est situé à l'Est ou à l'Ouest du méridien de Greenwich.

Par exemple, les coordonnées de Vancouver au Canada sont approximativement : 49° N et 123° O.

- a. Quelles sont les coordonnées géographiques du point G , du pôle Nord et du pôle Sud ?
- b. Quelles sont les coordonnées du point diamétralement opposé à G ?

25 Antipodes

On dit qu'un point de la surface terrestre est aux antipodes d'un autre si ces deux points sont diamétralement opposés.

① Les coordonnées géographiques de la ville de Saint-Petersbourg en Russie sont approximativement 60° Nord et 30° Est.

a. Déterminer les coordonnées géographiques du point situé aux antipodes de Saint-Petersbourg.

b. Chercher sur un atlas où se situe approximativement ce point.

② Reprendre les questions précédentes avec la ville de Santiago au Chili de coordonnées 33° Sud et 70° Ouest.

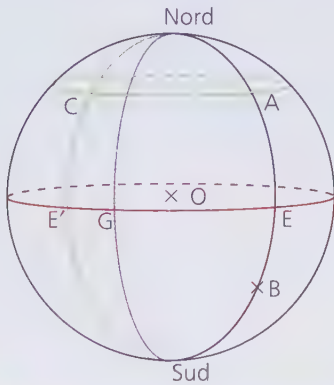
26 Sur la figure ci-dessous :

- O est le centre de la Terre ;
- G est le point d'intersection du méridien de Greenwich et de l'Équateur ;
- E est le point d'intersection de l'Équateur et du méridien passant par A ;
- E' est le point d'intersection de l'Équateur et du méridien passant par C ;
- A et B sont sur le même méridien ;
- A et C sont sur le même parallèle.

On donne les indications suivantes :

$\widehat{EOA} = 67^\circ$ et $\widehat{EOG} = 46^\circ$, $\widehat{EOB} = 24^\circ$ et $\widehat{E'OG} = 19^\circ$.

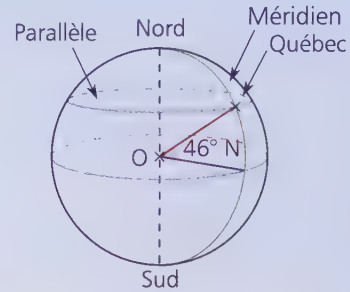
Indiquer la latitude et la longitude des points A, B et C.

**27 Vrai ou faux**

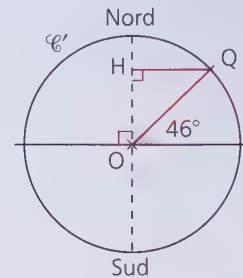
- Tous les points de l'Équateur ont une longitude égale à 0° .
- Un point de coordonnées géographiques (60° N ; 0°) est un point du méridien de Greenwich.
- La latitude d'un point est comprise entre 0° et 90° .
- La longitude d'un point est comprise entre 0° et 180° .
- Un point diamétralement opposé à un point de latitude 60° Nord a une latitude de 60° Sud.
- Un point diamétralement opposé à un point de longitude 75° Est a une longitude de 75° Ouest.
- Le point de coordonnées (0° N, 0° E) est le pôle Nord.
- Tous les méridiens ont la même longueur.
- Tous les parallèles ont la même longueur.
- Pékin en Chine (40° N ; 116° E) et Perth en Australie (32° S ; 116° E) sont situées sur le même parallèle.

28 Vu au brevet

On prendra 6 367 km comme valeur approchée du rayon de la sphère terrestre représentée par le dessin ci-dessous. Sur cette sphère figure la ville de Québec (Canada) dont la longitude est 72° O et la latitude 46° N.



On se place dans la figure ci-dessous qui représente la section de la sphère terrestre par le plan du méridien de longitude 72° O. Ce grand cercle de la sphère est noté $\mathcal{C}'$ et a donc pour rayon 6 367 km.

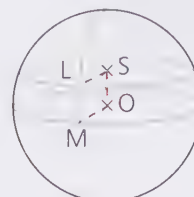


- Établir par un calcul que l'angle $\widehat{QOH}$ mesure 44° .
- En déduire que l'arrondi au kilomètre du rayon HQ du parallèle de latitude 46° N est 4 423 km.
- Dans cette question, on prendra 3,14 comme valeur approchée de π . En utilisant le résultat de la question précédente, calculer l'arrondi au kilomètre de la longueur du parallèle de latitude 46° N.

29 Vu au brevet

La figure ci-dessous représente la Terre qui est assimilée à une sphère de 6 370 km de rayon. Le cercle de centre O passant par M représente l'Équateur. Le point L représente la ville de Londres. L est situé sur la sphère et sur le cercle de centre S. On admettra que l'angle $\widehat{LSO}$ est un angle droit. On donne $OS = 4\,880$ km.

- Calculer SL au km près.
- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SOL}$ et arrondir au degré près.
- En déduire au degré près la latitude Nord de Londres par rapport à l'Équateur, c'est-à-dire l'angle $\widehat{LOM}$.



Faire le point

30 QCM Indiquer, dans chaque cas, la (les) réponses exacte(s) parmi les trois réponses proposées.

		A	B	C
1	Si A est un point de la boule de centre O et de rayon 7 cm, alors :	$OA < 7 \text{ cm}$	$OA = 7 \text{ cm}$	$OA \leq 7 \text{ cm}$
2	Si A et B sont deux points diamétralement opposés d'une sphère de centre O, alors :	O est le milieu de [AB]	un cercle de diamètre [AB] est un grand cercle	$OA = OB$
3	Si M et N sont deux points d'une sphère de centre O non alignés avec O, alors :	Le triangle MON est isocèle en O	Le triangle MON est rectangle en O	Le triangle MON est équilatéral
4	L'aire d'une sphère de diamètre 10 cm est égale à :	$100 \pi \text{ cm}^2$	$400 \pi \text{ cm}^2$	$20 \pi \text{ cm}^2$
5	Le volume d'une boule de rayon 3 cm est égal à :	$27 \pi \text{ cm}^3$	$36 \pi \text{ cm}^3$	113 cm^3
6	La section d'une sphère par un plan est :	un triangle rectangle	une ellipse	un cercle
7	Si O est le centre d'une sphère $\mathcal{S}$, H le centre de la section de $\mathcal{S}$ par un plan et M un point de cette section, alors :	le triangle OHM est rectangle en M	le triangle OHM est rectangle en O	le triangle OHM est rectangle en H

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

• Calculer l'aire et le volume d'une sphère

- 31** ① Donner les valeurs exactes de l'aire et du volume d'une sphère de diamètre 7,2 cm.
 ② Donner les arrondis des résultats précédents au mm^2 pour l'aire et au mm^3 pour le volume.

• Calculer le rayon de la section d'une sphère par un plan

- 32** Une sphère de centre O et de rayon 8 cm est coupée par un plan situé à 5 cm de O.
 ① Quelle est la nature de la section obtenue ?
 ② Soit H le centre de la section et M un point quelconque de cette section. Tracer en vraie grandeur le triangle OHM.
 ③ Calculer le rayon de la section. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.

• Calculer la distance de la section d'une sphère par un plan au centre de la sphère

- 33** Une soupière a la forme d'une sphère de centre O et de rayon 15 cm coupée par deux plans parallèles. Le diamètre de la base de la soupière est égal à 12 cm et celui de l'ouverture est égal à 20 cm.
 ① À quelle distance du centre de la sphère sont situés chacun des deux plans de coupe ?
 ② En déduire la hauteur de la soupière.

• Sphère terrestre

- 34** En partant du point de coordonnées géographiques 38° Sud et 64° Est, indiquer les coordonnées géographiques du point d'arrivée dans chacun des cas suivants :
 a. On se déplace en restant sur le même méridien de 90° vers le Nord.
 b. On se déplace en restant sur le même parallèle de 90° vers l'Ouest.
- 35** On assimile la surface de la Terre à une sphère de centre O.
 Les coordonnées géographiques de Pékin sont 40° N et 116° E et celles de Lisbonne sont 40° N et 9° O .
 ① Quelles sont les latitudes et les longitudes de Pékin et de Lisbonne ?
 ② Expliquer pourquoi ces deux villes sont situées sur un même parallèle.
 ③ On désigne par P la ville de Pékin, par L la ville de Lisbonne et par H le centre du parallèle passant par ces deux villes. L'Équateur coupe le méridien de Greenwich en G, le méridien passant par Pékin en E_P et le méridien passant par Lisbonne en E_L .
 Faire un schéma et donner la mesure de chacun des angles suivants :
 $\widehat{GOE_P}$, $\widehat{GOE_L}$, $\widehat{E_POP}$, $\widehat{E_LOL}$, $\widehat{PHL}$.

➔ Tous les exercices de cette page sont corrigés page 279.

Approfondir

- 36** On considère un triangle ABC rectangle en A tel que : $AB = 5$ cm et $AC = 8$ cm.

On appelle $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit.

1 Quel est le centre O et quel est le diamètre de la sphère $\mathcal{S}$ obtenue en faisant tourner le cercle $\mathcal{C}$ autour de la droite (BC) ? Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm du diamètre.

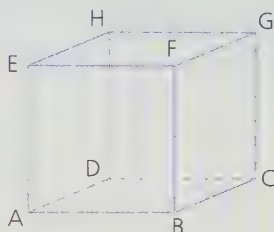
2 Le point A appartient-il à cette sphère ? Justifier.

3 On appelle D le symétrique de A par rapport à O. Le point D appartient-il à la sphère $\mathcal{S}$? Justifier.

4 E est un point de la sphère $\mathcal{S}$ distinct de B et de C. Quelle est la nature du triangle BCE ? Justifier.

5 F est le point de la sphère $\mathcal{S}$ diamétralement opposé à E. Quelle est la nature du quadrilatère EBFC ? Justifier.

37 QCM



On considère le cube ABCDEFGH d'arête 3 cm représenté ci-dessus.

Indiquer, dans chaque cas, la (les) proposition(s) exacte(s). Certains cas peuvent ne présenter aucune proposition exacte.

1 On considère la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre A et de rayon 3 cm.

- a. $A \in \mathcal{S}_1$ b. $D \in \mathcal{S}_1$ c. $F \in \mathcal{S}_1$ d. $C \in \mathcal{S}_1$

2 On considère la boule $\mathcal{B}_1$ de centre A et de rayon 3 cm.

- a. $A \in \mathcal{B}_1$ b. $D \in \mathcal{B}_1$ c. $F \in \mathcal{B}_1$ d. $C \in \mathcal{B}_1$

3 La valeur exacte de la longueur FA est :

- a. 3 cm b. 6 cm c. 4,24 cm d. $\sqrt{18}$ cm

4 On considère la sphère $\mathcal{S}_2$ de centre F et de rayon 4 cm.

- a. $A \in \mathcal{S}_2$ b. $B \in \mathcal{S}_2$ c. $E \in \mathcal{S}_2$ d. $C \in \mathcal{S}_2$

5 On considère la boule $\mathcal{B}_2$ de centre F et de rayon 4 cm.

- a. $A \in \mathcal{B}_2$ b. $B \in \mathcal{B}_2$ c. $E \in \mathcal{B}_2$ d. $C \in \mathcal{B}_2$

- 38** La hauteur d'un cône de révolution est égale au diamètre D d'une boule.

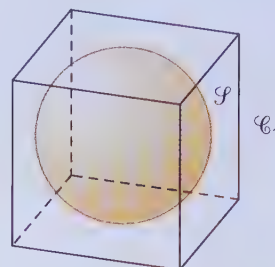
Exprimer, en fonction de D , le rayon r de la base du cône sachant que le cône et la boule ont le même volume.

- 39** Un cylindre de révolution, un cône de révolution et une boule de rayon R ont le même volume. Le rayon des bases du cylindre et de la base du cône est aussi égal à R .

Exprimer, en fonction de R , la hauteur du cylindre et la hauteur du cône.

40 1 Un cas particulier

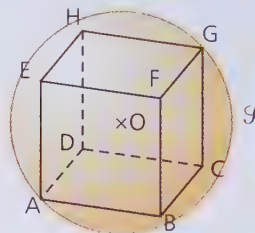
On considère le cube $\mathcal{C}_1$ d'arête 10 cm représenté ci-dessous et la sphère $\mathcal{S}$ inscrite dans ce cube, c'est-à-dire la sphère tangente à chaque face du cube.



a. Calculer le diamètre D de la sphère $\mathcal{S}$.

b. On considère maintenant le cube ABCDEFGH inscrit dans la sphère $\mathcal{S}$, c'est-à-dire le cube dont tous les sommets appartiennent à la sphère $\mathcal{S}$.

Calculer la longueur L des arêtes de ce cube.



c. Calculer la valeur exacte du quotient $\frac{D}{L}$.

2 Cas général

Reprendre la question **1** en remplaçant un cube d'arête 10 cm par un cube d'arête a . Que constate-t-on ?

41 Balles de tennis

1 On place quatre balles de tennis dans une boîte cylindrique comme indiqué sur le schéma ci-contre. Chaque balle est une sphère de rayon égal à 3,25 cm.

Calculer la hauteur et le rayon des bases de la boîte sachant que les balles sont tangentes aux parois de la boîte et tangentes entre elles.

2 a. Calculer la valeur exacte du volume V_1 de la boîte.

b. Calculer la valeur exacte du volume d'une balle de tennis.

c. En déduire le volume V_2 de la boîte non occupé par les balles.

3 Calculer le quotient $\frac{V_2}{V_1}$. Arrondir au centième.

En déduire le pourcentage du volume de la boîte non occupé par les balles.

4 Reprendre les questions précédentes en considérant une boîte parallélépipédique à la place d'une boîte cylindrique. Que remarque-t-on ?



- 42** ① Une sphère de rayon r et un cylindre de rayon r et de hauteur h ont la même aire.
 a. Exprimer h en fonction de r .
 b. Le cylindre et la boule de rayon r ont-ils le même volume ?
 ② Une boule de rayon r et un cylindre de rayon r et de hauteur h ont le même volume.
 a. Exprimer h en fonction de r .
 b. Le cylindre et la sphère de rayon r ont-ils la même aire ?

- 43** On assimile une pelote de ficelle à une boule de centre O et de rayon 6 cm dans laquelle on plante une aiguille fine et longue que l'on peut assimiler à un segment de droite. On appelle M et N les points de la boule correspondant à l'entrée et à la sortie de l'aiguille.

- ① Quelle est la nature du triangle MON ?
 ② Quelle est la plus grande longueur MN que l'on pourrait obtenir ? Décrire le cas correspondant à cette longueur.
 ③ La longueur de l'aiguille est égale à 32,4 cm.
 a. Calculer la longueur MN sachant que le tiers de l'aiguille est situé à l'intérieur de la pelote.
 b. À quelle distance du centre de la pelote l'aiguille a-t-elle été plantée ? Arrondir au centième.

- 44** Le niveau d'eau contenu dans un récipient cylindrique de rayon 9 cm et de hauteur 22 cm est de 10 cm.

- ① On place au fond de ce cylindre une boule de rayon 7 cm qui ne flotte pas. L'eau débordera-t-elle du récipient ? Si cela n'est pas le cas, calculer à quelle hauteur est située la surface de l'eau. Arrondir au mm.
 ② Si la boule avait eu un rayon de 8,2 cm, l'eau aurait-elle débordé ?

- 45** Une sphère de centre O et de rayon 8 cm est coupée par un plan selon un cercle $\mathcal{C}$ de centre H et de rayon 6,5 cm. A et B sont deux points de $\mathcal{C}$ tels que $AB = 10$ cm et I est le milieu de $[AB]$.

- ① a. Quelle est la nature du triangle OHA ?
 b. Calculer la longueur OH . Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.
 ② a. Quelle est la nature du triangle AHB ?
 b. Calculer la longueur HI . Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.
 ③ En déduire la longueur OI . Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.

- 46** Lors d'une campagne de fouilles, un archéologue a dégagé une partie d'une poterie. En supposant que cette poterie est de forme sphérique, quel serait son rayon ? Arrondir au cm.



- 47** Un plan coupe une sphère de centre O selon un cercle $\mathcal{C}$ de centre I .
 A est un point quelconque de $\mathcal{C}$.

- ① Indiquer la nature du triangle OIA .
 ② Recopier et compléter le tableau suivant. On arrondira les résultats au mm pour les longueurs et au degré pour les angles.

	OI	OA	IA	$\widehat{OIA}$	$\widehat{IAO}$
Cas n° 1	3,7 cm		4,2 cm		
Cas n° 2		9 cm	6,1 cm		
Cas n° 3		5,8 cm		48°	
Cas n° 4		10 cm			73°
Cas n° 5	8,5 cm			25°	

- 48** On assimile la Terre à une sphère de rayon 6 400 km.

- ① Les coordonnées géographiques de la ville de Boston aux États-Unis sont approximativement (42° N ; 70° O) et celles de la ville de Santiago au Chili sont approximativement (33° S ; 70° O).

Expliquer pourquoi Boston et Santiago sont situées sur un même méridien.

- ② On appelle O le centre de la Terre, G le point d'intersection de l'Équateur et du méridien de Greenwich et E le point d'intersection de l'Équateur et du méridien passant par Boston et Santiago.

On désigne par B la ville de Boston et par S la ville de Santiago.

Quelles sont les mesures des angles $\widehat{GOE}$, $\widehat{EOB}$, $\widehat{EOS}$ et $\widehat{SOB}$?

- ③ Calculer la distance séparant ces deux villes le long du méridien 70° O. Arrondir à 10 km.

- ④ a. Sans effectuer de calcul, comparer les rayons des parallèles passant par Boston et par Santiago. Justifier.
 b. Calculer les rayons de ces deux parallèles. Arrondir à 10 km.

- 49** On assimile la Terre à une sphère de centre O et de rayon 6 400 km.

- ① Le tropique du Cancer et le tropique du Capricorne sont deux parallèles de même longueur situés dans chaque hémisphère de latitude 23,45° N et 23,45° S.

- a. Calculer le rayon des ces deux tropiques. Arrondir au km.
 b. Calculer la longueur de ces deux tropiques. Arrondir au km.

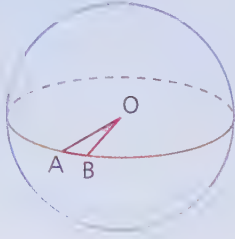
- ② Les cercles polaires ont une longueur égale à 15 993 km environ.

- a. Calculer le rayon de ces cercles. Arrondir au km.
 b. En déduire les latitudes des cercles polaires. Arrondir au degré.

50 Le mille marin

Le mille marin est une unité de mesure de distance qui est utilisée en navigation maritime et aérienne. Elle est égale à la longueur d'un arc d'un grand cercle de la sphère terrestre correspondant à un angle de $\frac{1}{60}$ degré.

Calculer la longueur d'un mille marin sachant que la longueur d'un arc de cercle $\widehat{AB}$ de centre O est proportionnelle à l'angle $\widehat{AOB}$ et que le rayon de la Terre mesure environ 6 400 km. Arrondir au mètre.



51 Retour à la case départ ?

On assimile la Terre à une sphère de centre O et de rayon 6 400 km.

Un avion part d'Athènes en Grèce de coordonnées : 23° E et 38° N.

1 L'avion se déplace de 5 000 km vers le Sud en suivant le méridien d'Athènes.

a. Quelle est la longitude du point d'arrivée noté M_1 ?

b. Calculer la latitude de M_1 .

2 Puis l'avion suit le parallèle de M_1 et parcourt 5 000 km vers l'Est. On note M_2 le point d'arrivée.

a. Quelle est la latitude du point M_2 ?

b. Calculer la longitude de M_2 . Arrondir au degré.

3 L'avion parcourt ensuite 5 000 km vers le Nord le long du méridien de M_2 , il arrive en M_3 , puis en suivant le parallèle de M_3 il parcourt 5 000 km vers l'Ouest. Revient-on au point de départ ?

POUR LES CURIEUX

Le plus court chemin

1 Tracer deux points A et B. Où se situe le centre d'un cercle passant par les deux points A et B ? Tracer trois cercles dans le même plan passant par A et par B.

Comparer la longueur des arcs $\widehat{AB}$ sur chacun des cercles. Quelle est la longueur qui semble la plus courte ? À quel rayon correspond-elle ?

2 Quel est le rayon du plus grand cercle que l'on peut tracer à la surface de la Terre ?

En déduire le chemin le plus court reliant deux points A et B à la surface de la Terre.

3 Expliquer alors pourquoi lorsqu'un avion se rend de Paris à Los Angeles, il survole le Groenland.

4 Rechercher sur un globe terrestre les villes de Tokyo au Japon et de Buenos Aires en Argentine, puis décrire les pays survolés par un avion reliant ces deux villes.

Argumenter et débattre

52 Un fabricant de boules de bain a prévu de fabriquer des boules de rayon 1 cm. Il souhaite doubler le volume de ces boules. Il prévoit donc d'augmenter le rayon de ces boules de 3 mm. Cela sera-t-il suffisant ?

53 Expliquer pourquoi il est préférable que le sol soit sec lors d'une compétition de lancer de poids.

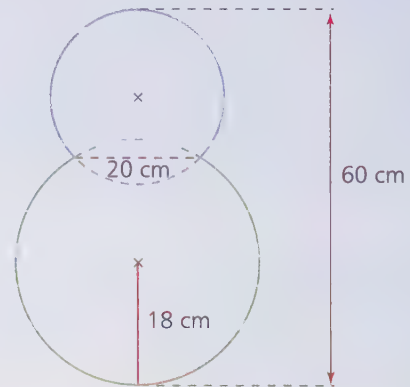
54 En 1791, sur proposition de l'Académie des sciences, l'Assemblée nationale constituante décide que « le mètre sera la dix millionième partie du quart d'un méridien terrestre. ». Qu'en pensez-vous ?

55 On sectionne deux boules pour pouvoir les coller ensemble comme indiqué sur le schéma ci-dessous. On donne les indications suivantes :

- La hauteur de l'ensemble est égale à 60 cm.
- Le rayon de la grosse boule est égal à 18 cm.
- Le diamètre de la surface collée est égal à 20 cm.

Les renseignements donnés permettent-ils de calculer le rayon de la petite boule ?

Si cela est le cas, donner l'arrondi au mm de ce rayon.



Position d'un plan de coupe en fonction du rayon de la section

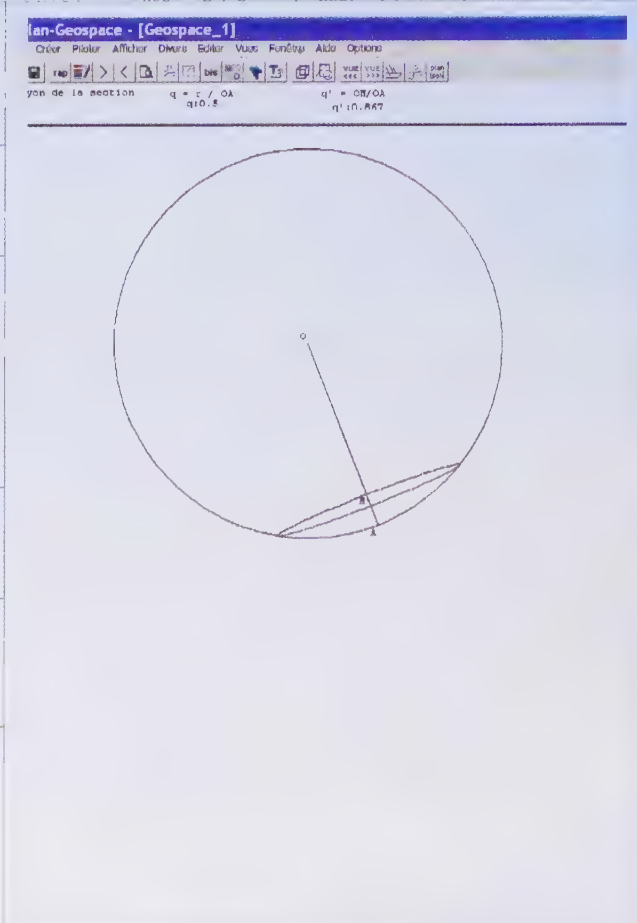
On considère une sphère de centre O et de rayon $[OA]$ et M un point du segment $[OA]$.

On coupe cette sphère par le plan passant par M et perpendiculaire à la droite (OA) .

1 Observer

On souhaite déterminer les positions du point M sur le segment $[OA]$ tel que le rayon de la section soit égal à la moitié du rayon de la sphère, puis au tiers, au quart et aux deux cinquièmes du rayon de la sphère.

- 1.a. Créer un **point** O et un **point** A dans l'espace.
 - b. Créer la **sphère** de centre O et de rayon OA .
 - c. Créer le **segment** $[OA]$.
 - d. Créer un **point** M sur le segment $[OA]$.
- 2.a. Créer le **plan** $\mathcal{P}$ passant par M et perpendiculaire à la droite (OA) .
 - b. Créer la **section** de la sphère par le plan $\mathcal{P}$.
- 3.a. **Afficher** le rayon r de la section.
 - b. **Afficher** le calcul du quotient $\frac{r}{OA}$, puis afficher le résultat.
 - c. **Déplacer** le point M jusqu'à ce que le rayon r de la section soit égal à la moitié du rayon OA de la sphère, c'est-à-dire jusqu'à obtenir $\frac{r}{OA} = 0,5$.
4. Créer le calcul du quotient $\frac{OM}{OA}$ permettant de préciser la position de M sur le segment $[OA]$, puis afficher le résultat.
5. Modifier la valeur du rayon OA de la sphère en **déplaçant** le point A .
- Que remarque-t-on ?**
6. Reprendre la démarche précédente pour déterminer la position du point M sur le segment $[OA]$ tel que le rayon de la section soit égal à :
 - a. Un tiers du rayon de la sphère
 - b. Un quart du rayon de la sphère
 - c. Deux cinquièmes du rayon de la sphère.



2 Démontrer

1. Exprimer la longueur OM en fonction du rayon r de la section et du rayon OA de la sphère.
 2. **Cas où le rayon est égal à la moitié du rayon de la sphère.**
 - a. Sachant que $r = \frac{OA}{2}$, exprimer OM en fonction de OA .
 - b. Calculer le quotient $\frac{OM}{OA}$. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au millièmes.

Vérifier que cette valeur correspond à celle donnée par le logiciel.

 - c. Quelle doit être la position du point M pour que le rayon de la section soit égal à la moitié du rayon de la sphère ?
3. **Cas général**
Soient r le rayon de la section et R le rayon de la sphère.
Soit k le quotient $\frac{r}{R}$.
Exprimer le quotient $\frac{OM}{OA}$ en fonction de k .

14

Sections planes de solides

Une **carrière** est un endroit d'où sont extraits des matériaux de construction : pierres, sable ou différents minerais non métalliques ou carbonifères. Les **blocs de pierre** extraits sont des parallélépipèdes rectangles. Si on sectionne ces blocs, les **coupes** obtenues peuvent être **rectangulaires**.



Carrière de marbre en Grèce.

Le mot « carrière » vient du latin **quadrus**, « carré ». Les carrières peuvent être à ciel ouvert (comme ici) ou souterraines.

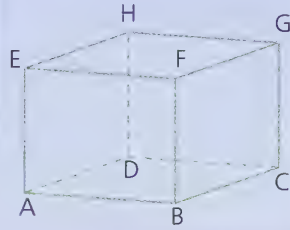


Alors, nous avons dit en sections bien planes...

Si l'on coupe un cube par un **plan perpendiculaire** à une diagonale du cube, on constate que les sections obtenues peuvent être des **triangles** ou des **hexagones**.

QCM

Dans chaque cas, une seule des trois réponses proposées est exacte. Laquelle ?

		A	B	C
1	Dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessous :	l'arête [AE] est perpendiculaire à la face CDHG	l'arête [AE] est parallèle à la face CDHG	l'arête [AE] est parallèle à l'arête [HG]
2		le triangle AEG est rectangle en E	le triangle AEG est isocèle en A	le triangle AEG est équilatéral
3		les faces ABFE et DCGH sont parallèles	les faces ABFE et DCGH sont perpendiculaires	les faces ABFE et DCGH ne sont ni parallèles ni perpendiculaires
4	Si SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de hauteur SO, alors :	le triangle SOA est isocèle en S	le triangle SOA est rectangle en S	le triangle SOA est rectangle en O
5	Le volume d'un cube d'arête 1 dm est égal à :	10 fois le volume d'un cube d'arête 1 cm	100 fois le volume d'un cube d'arête 1 cm	1 000 fois le volume d'un cube d'arête 1 cm

Exercice 1

- Construire un triangle MNL tel que : $MN = 9$ cm, $ML = 5$ cm et $NL = 7$ cm.
 - Placer le point R du segment [MN] tel que : $MR = \frac{2}{3}MN$.
 - Tracer la droite passant par R et parallèle à (NL). Elle coupe le segment [ML] en S.
- 2 Calculer les longueurs MS et RS. On donnera les valeurs exactes, puis les arrondis au mm.

Exercice 2

Soit un triangle OAB isocèle en O. On appelle H le milieu de [AB].

On donne : $OA = OB = 6$ cm et $OH = 4$ cm.

- Quelle est la nature du triangle AOH ?
- Calculer la longueur AB. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.

Exercice 3

On considère un cône de révolution de sommet S, de hauteur 5 cm et de rayon de base 4 cm.

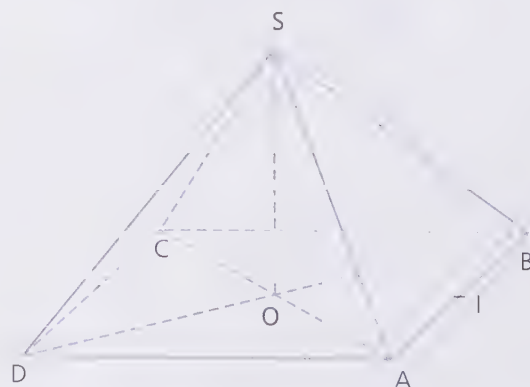
- Calculer la longueur d'une génératrice. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.
- Calculer le volume de ce cône. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au mm^3 .

Exercice 4

On considère une pyramide régulière SABCD de sommet S, de hauteur 8 cm et dont la base ABCD est un carré de côté 12 cm de centre O.

On appelle I le milieu de [AB].

- Quelle est la nature du triangle SOI ?
 - Calculer la longueur SI.
 - En déduire l'aire de la face ASB, puis l'aire de la pyramide SABCD.
- 2 Calculer le volume de la pyramide SABCD.

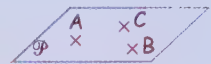


Activité 1 Droites et plans dans l'espace

A Droite et plan

- 1 a. Tracer sur une feuille de papier deux points A et B, puis tracer la droite (AB). On considère que cette feuille représente un plan $\mathcal{P}$.
 b. Tous les points de la droite (AB) appartiennent-ils au plan $\mathcal{P}$?
 On dit que la droite (AB) est **incluse**, ou contenue, dans le plan $\mathcal{P}$.
- 2 a. Placer un point C sur la feuille qui n'appartient pas à la droite (AB), puis tracer la droite d parallèle à la droite (AB) qui passe par le point C.
 b. La droite d est-elle incluse dans le plan $\mathcal{P}$?
 c. Existe-t-il des droites parallèles à la droite (AB) qui ne soient pas incluses dans le plan $\mathcal{P}$?
 Lorsqu'une droite est parallèle à une droite incluse dans un plan, on dit qu'elle est **parallèle à ce plan**. Elle peut être incluse ou non dans ce plan.
 d. Existe-t-il des droites passant par le point C et qui ne sont pas parallèles au plan $\mathcal{P}$?
 On dit que ces droites sont **sécantes en C au plan $\mathcal{P}$** .

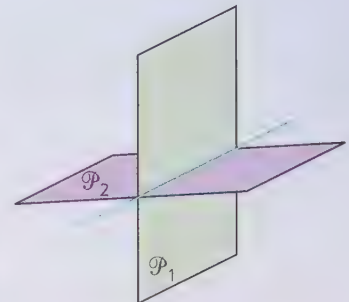
Par trois points A, B, C non alignés ne passe qu'un **seul plan**. On dit que ces trois points définissent un plan $\mathcal{P}$, noté (ABC).



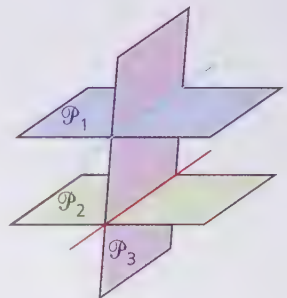
B Plans parallèles et plans sécants

On dit que deux plans sont **parallèles** s'ils sont confondus ou s'ils n'ont aucun point en commun. Deux plans qui ne sont pas parallèles sont appelés des plans **sécants**.

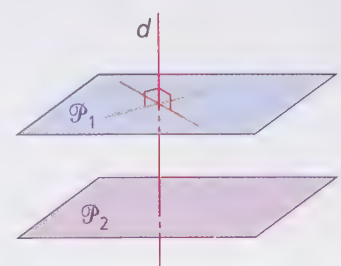
- 1 La figure ci-contre représente deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ qui ne sont pas parallèles. Quelle semble être la nature de leur intersection ?



- 2 La figure ci-contre représente deux plans parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ coupés par un plan $\mathcal{P}_3$. Que peut-on dire des intersections du plan $\mathcal{P}_3$ avec les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$?



- 3 La figure ci-contre représente deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ coupés par une droite d perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_1$.
 a. Si les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles, que peut-on dire de la droite d et du plan $\mathcal{P}_2$?
 b. Si la droite d est aussi perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_2$, que peut-on dire des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$?

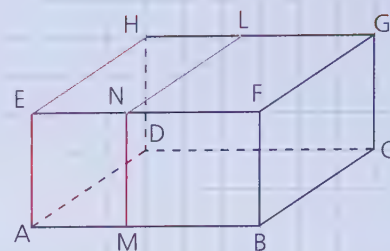


Activité 2 Section d'un parallélépipède rectangle par un plan

A Le plan est parallèle à une face

- 1 Sur le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre, on a placé les points M, N et L tels que : $M \in [AB]$, $N \in [EF]$, $L \in [HG]$, $(MN) \parallel (AE)$ et $(NL) \parallel (EH)$.

- a. À quelles faces du parallélépipède le plan (MNL) est-il parallèle ?
b. Reproduire la figure et la compléter en traçant la section MNLR du parallélépipède par le plan (MNL).



- 2 Quelle semble être la nature et les dimensions de la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face ?

B Le plan est parallèle à une arête

- 1 Construire un parallélépipède rectangle ABCDEFGH et placer les points M, N et L tels que : $M \in [AB]$, $N \in [EF]$, $L \in [HG]$, $(MN) \parallel (AE)$ et (NL) non parallèle à (EH) .

- a. À quelles arêtes le plan (MNL) est-il parallèle ?
b. Compléter la figure en traçant la section MNLR du parallélépipède par le plan (MNL).

- 2 Quelle semble être la nature de la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête ?

Activité 3 Section d'un cylindre de révolution

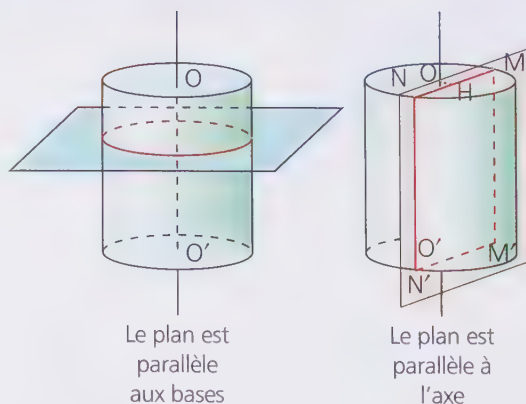
Les figures ci-contre représentent des cylindres de révolution coupés par un plan.

- 1 Quelle semble être la nature de la section d'un cylindre de révolution par un plan :

- a. lorsque le plan est parallèle aux bases ?
b. lorsque le plan est parallèle à l'axe ?

- 2 On considère un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 4 cm coupé par un plan parallèle à l'axe tel que la distance du plan à l'axe du cylindre est égale à 2 cm.

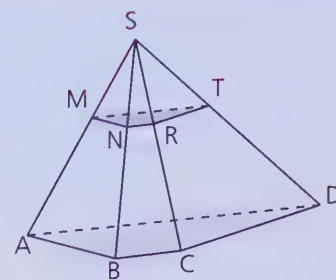
- a. Dessiner en vraie grandeur la base de centre O. Placer le point H tel que OH soit la distance de l'axe du cylindre au plan, puis les points M et N tels que $[MN]$ soit l'intersection de la base de centre O du cylindre et du plan.
b. Calculer la longueur MN. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.
c. Dessiner la section en vraie grandeur.
d. Que peut-on dire de la section si $OH = 0$ cm ? Si $OH = 3$ cm ?



Activité 4

Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base

La figure ci-contre représente une pyramide $SABCD$ coupée par un plan (MNR) parallèle à la base. Les points M , N , R et T appartiennent respectivement aux segments $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$.



- 1 Le plan (MNR) étant parallèle à la base, que peut-on dire des droites (MN) et (AB) ? (NR) et (BC) ? (RT) et (CD) ? (MT) et (AD) ?
- 2 Écrire les égalités de quotients obtenues en appliquant le théorème de Thalès aux triangles ASB , BSC , CSD et ASD .
- 3 En déduire que la section $MNRT$ est une réduction de la base $ABCD$.
- 4 Montrer que les faces latérales de la pyramide $SMNRT$ sont aussi des réductions de même coefficient des faces latérales de la pyramide $SABCD$.

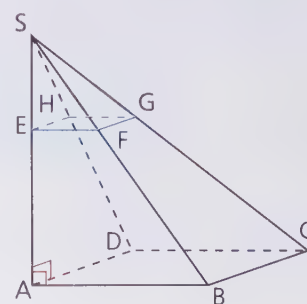
On obtient un résultat similaire pour la **section d'un cône de révolution** par un plan parallèle à la base.

Activité 5

Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les volumes

Voir le chapitre 10 pour se rappeler les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur l'aire d'une figure.

- 1
 - a. Calculer le volume d'un cube $\mathcal{C}_1$ d'arête 2 cm et d'un cube $\mathcal{C}_2$ d'arête 6 cm.
 - b. Par quel nombre faut-il multiplier la longueur de l'arête du cube $\mathcal{C}_1$ pour obtenir celle du cube $\mathcal{C}_2$?
 - c. Par quel nombre faut-il multiplier le volume du cube $\mathcal{C}_1$ pour obtenir celui du cube $\mathcal{C}_2$?
- 2
 - a. On considère un parallélépipède rectangle $\mathcal{P}$ de dimensions a , b et c . Exprimer son volume en fonction de a , b et c .
 - b. On considère l'agrandissement $\mathcal{P}'$ (ou la réduction) de facteur k du parallélépipède $\mathcal{P}$. Exprimer les dimensions du parallélépipède $\mathcal{P}'$ en fonction de k , a , b et c .
 - c. Exprimer le volume $\mathcal{V}'$ du parallélépipède $\mathcal{P}'$ en fonction du volume $\mathcal{V}$ du parallélépipède $\mathcal{P}$.
- 3 On considère la pyramide $SABCD$ ci-contre de sommet S , de hauteur SA et de base rectangulaire $ABCD$ coupée par le plan (EFG) parallèle à la base.
On donne :
 $SA = 8$ cm, $SE = 3$ cm, $AB = 5$ cm et $BC = 4$ cm.
 - a. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.
 - b. Expliquer pourquoi $EFGH$ est une réduction de $ABCD$. Calculer le facteur de réduction k .
 - c. Calculer les longueurs EF et FG .
 - d. Quelle est la hauteur de la pyramide $SEFGH$? Calculer son volume.
 - e. Par quel nombre faut-il multiplier le volume de la pyramide $SABCD$ pour obtenir celui de la pyramide $SEFGH$? Vérifier que ce nombre est égal à k^3 .



De manière générale, soient $\mathcal{P}$ un solide et $\mathcal{P}'$ son agrandissement ou sa réduction de facteur k . Par quel nombre faut-il multiplier le volume de $\mathcal{P}$ pour obtenir celui de $\mathcal{P}'$?

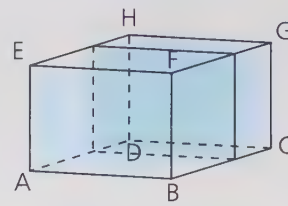
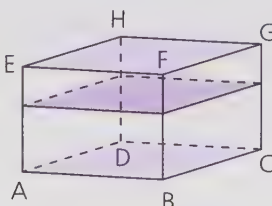
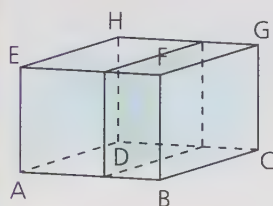
A Sections d'un parallépipède rectangle

Propriétés

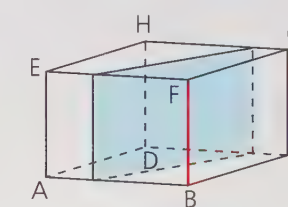
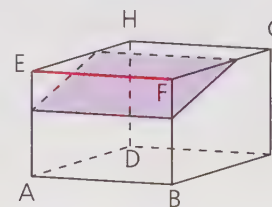
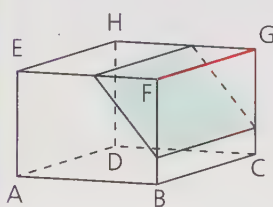
- La section d'un parallépipède rectangle par **un plan parallèle à une face** est un rectangle de mêmes dimensions que cette face.
- La section d'un parallépipède rectangle par **un plan parallèle à une arête** est un rectangle dont une dimension est égale à la longueur de cette arête et dont l'autre dimension dépend de la position du plan.

Exemples

► Dans les figures ci-dessous, le plan est parallèle à une face du parallépipède. Les sections sont des rectangles de mêmes dimensions que cette face.



► Dans les figures ci-dessous, le plan est parallèle à une arête du parallépipède. Les sections sont des rectangles dont une dimension dépend de la position du plan.



► Savoir-faire 1, page 258

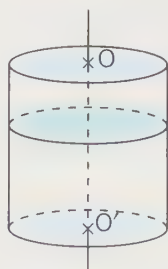
B Sections d'un cylindre de révolution

Propriétés

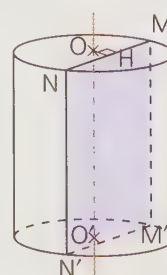
- La section d'un cylindre de révolution par **un plan parallèle aux bases** est un disque de même rayon que celui des deux bases.
- La section d'un cylindre de révolution par **un plan parallèle à l'axe** est un rectangle dont une dimension est la hauteur du cylindre et dont l'autre dépend de la position du plan.

Exemples

► Le plan est parallèle aux bases du cylindre. La section est un disque de même rayon que celui des deux bases.



► Le plan est parallèle à l'axe du cylindre. La section est un rectangle dont la longueur est égale à la hauteur du cylindre.



► Savoir-faire 2, page 259

Sections d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base

Propriété

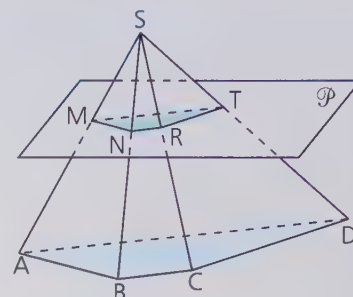
La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est une réduction de la base de facteur k .

k est le facteur de réduction tel que $M = kSA$, $SN = kSB$, etc.

Exemples

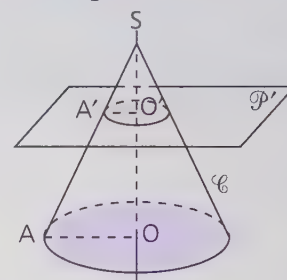
► La section de la pyramide $SABCD$ par le plan $\mathcal{P}$ parallèle à la base est la réduction de la base $ABCD$ de facteur k tel que :

$$k = \frac{MN}{AB} = \frac{NR}{BC} = \frac{RT}{CD} = \frac{MT}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SR}{SC} = \frac{ST}{SD}.$$

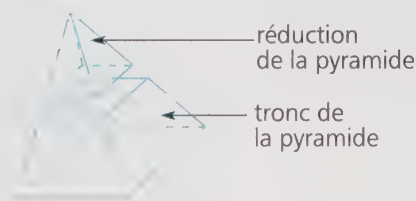


► La section du cône $\mathcal{C}$ par le plan $\mathcal{P}'$ parallèle à la base est la réduction de la base de facteur k' tel que :

$$k' = \frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA}.$$



Remarque : En sectionnant une pyramide (ou un cône de révolution) par un plan parallèle à la base, on obtient deux solides : une pyramide (ou un cône), réduction de la pyramide (ou du cône) de départ et un autre solide appelé tronc de pyramide (ou de cône).



Effets d'un agrandissement ou d'une réduction

Propriété

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de facteur k d'un solide $\mathcal{S}$:

- chacune des longueurs du solide $\mathcal{S}'$ obtenu est égale au produit de la longueur correspondante du solide $\mathcal{S}$ par k ;
- chacune des aires du solide $\mathcal{S}'$ obtenu est égale au produit de l'aire correspondante du solide $\mathcal{S}$ par k^2 ;
- le volume du solide $\mathcal{S}'$ obtenu est égal au produit du volume du solide $\mathcal{S}$ par k^3 .

k est aussi appelé **rapport** ou **coefficient** d'agrandissement ou de réduction.
Si $k > 1$, on effectue un agrandissement.
Si $0 < k < 1$, on effectue une réduction.

Exemple

Lorsque toutes les longueurs d'un solide sont multipliées par 2, on obtient un solide dont le volume est huit fois plus grand que le volume du solide initial.

1 Construire en vraie grandeur la section d'un parallélépipède par un plan

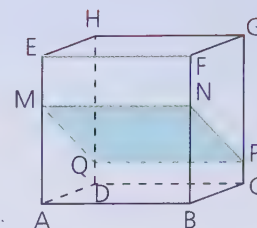
Énoncé Le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre est coupé par le plan (MNP) parallèle à l'arête [EF].

On donne : $BF = 3 \text{ cm}$, $BC = 2 \text{ cm}$,

$EF = 4 \text{ cm}$, $FN = 1 \text{ cm}$ et $CP = 0,5 \text{ cm}$.

Dessiner en vraie grandeur la section MNPQ :

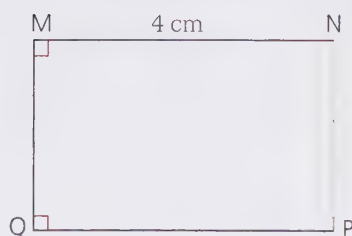
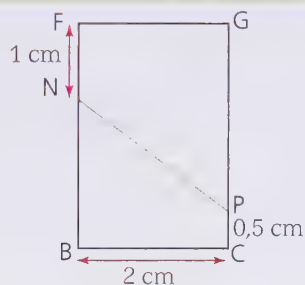
- en n'utilisant que les outils de géométrie.
- en commençant par calculer NP.



Solution

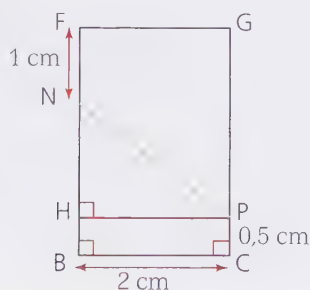
Le plan (MNP) est parallèle à l'arête [EF], donc la section MNPQ est un rectangle tel que : $MN = EF = 4 \text{ cm}$.

a. Détermination graphique de NP



b. Calcul de NP

Soit H le point du segment [BF] tel que (PH) soit perpendiculaire à (BF).



Le quadrilatère BCPH a trois angles droits donc BCPH est un rectangle et par conséquent : $HP = BC = 2 \text{ cm}$ et $BH = CP = 0,5 \text{ cm}$.

La seule donnée qu'il manque pour dessiner la section MNPQ en vraie grandeur est la longueur NP.

On trace la face rectangulaire BFGC telle que : $BC = 2 \text{ cm}$ et $BF = 3 \text{ cm}$. Puis on place le point N du segment [BF] tel que : $FN = 1 \text{ cm}$ et le point P du segment [CG] tel que $CP = 0,5 \text{ cm}$.

On trace la section MNPQ sachant que c'est un rectangle de longueur $MN = 4 \text{ cm}$ et de largeur NP que l'on reporte au compas à partir de la figure précédente.

Pour calculer NP, on travaille avec la face BCGF.

On trace un point supplémentaire H permettant de faire apparaître un triangle rectangle d'hypoténuse [NP].

On calcule la longueur HP en constatant que le quadrilatère BCPH est un rectangle.

Les points B, H, N, F étant alignés dans cet ordre, on obtient : $HN = BF - NF - HB$
soit : $HN = 3 - 1 - 0,5$.
D'où : $HN = 1,5$ cm.

On calcule la longueur HN en utilisant l'alignement des points B, H, N, F.

Le triangle NHP est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :
 $NP^2 = HN^2 + HP^2$
 $NP^2 = 1,5^2 + 2^2 = 6,25$
 $NP = \sqrt{6,25}$
 $NP = 2,5$ cm.

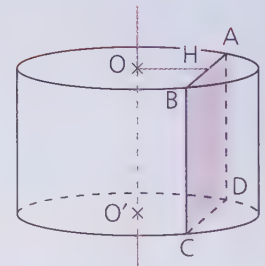
On connaît les longueurs NH et HP donc on peut calculer NP en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle NHP rectangle en H.

La section MNPQ est donc un rectangle tel que : $MN = 4$ cm et $NP = 2,5$ cm.

On peut maintenant tracer la section MNPQ.

Savoir-faire 2 Calculer les dimensions de la section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à l'axe

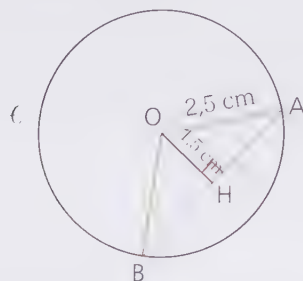
Énoncé Le cylindre ci-contre de hauteur 3 cm et de diamètre 5 cm est coupé par un plan parallèle à son axe situé à 1,5 cm de l'axe.
Calculer les dimensions de la section.



Solution

Le plan est parallèle à l'axe (OO'), donc la section ABCD est un rectangle tel que : $AD = OO' = 3$ cm.

Une des deux dimensions de la section est la hauteur du cylindre (ici $AD = OO'$). Il reste à calculer l'autre dimension du rectangle ABCD : on va calculer la longueur AB.



Pour calculer AB, on travaille dans le cercle de base de centre O et de rayon 2,5 cm.

A et B sont des points du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2,5 cm, donc :

$$OA = OB = 2,5 \text{ cm.}$$

Le triangle AOB est donc isocèle en O.

Le point H est le pied de la hauteur issue du sommet principal O, donc H est le milieu de [AB].

Le point H étant le milieu de [AB], on commence par calculer AH, puis on obtiendra AB en multipliant AH par 2.

Le triangle OHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$OA^2 = OH^2 + HA^2$$

$$\text{D'où : } HA^2 = OA^2 - OH^2$$

$$HA^2 = 2,5^2 - 1,5^2 = 4$$

$$HA = 2 \text{ cm.}$$

H est le milieu de [AB], donc

$$AB = 2 \times AH = 2 \times 2$$

$$AB = 4 \text{ cm.}$$

On connaît OH et OA, donc pour calculer AH, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHA.

On connaît AH, donc on peut maintenant calculer AB.

La section ABCD est donc un rectangle de dimensions 3 cm et 4 cm.

3

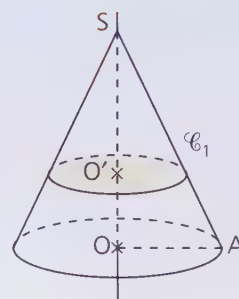
Calculer le volume d'un cône en utilisant un facteur de réduction

Énoncé Un cône de révolution $\mathcal{C}_1$ de hauteur 6 cm et dont la base a pour rayon 3 cm est coupé par un plan parallèle à la base situé à 4 cm du sommet.

1. Calculer le volume du cône $\mathcal{C}_1$. On arrondira le résultat au mm^3 .

2. a. Quel est le facteur de réduction qui permet d'obtenir le cône $\mathcal{C}_2$ de hauteur $SO' = 4 \text{ cm}$ à partir du cône $\mathcal{C}_1$?

b. En déduire le volume du cône $\mathcal{C}_2$. On arrondira le résultat au mm^3 .



Solution

1. Soit $\mathcal{V}$ le volume du grand cône.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times SO = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6 = 18\pi$$

Le volume d'un cône est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$$\mathcal{V} = 18\pi \text{ cm}^3, \text{ soit } \mathcal{V} \approx 56,549 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Rappel : } 1 \text{ mm}^3 = 0,001 \text{ cm}^3$$

2. a. Le cône $\mathcal{C}_1$ est coupé par un plan parallèle à la base, donc la section est une réduction de la base et le « petit » cône obtenu est une réduction du cône initial.

Soit k le facteur de réduction.

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Pour calculer le facteur de réduction, on utilise les deux hauteurs SO' et SO du cône réduit et du cône initial.

b. Soit $\mathcal{V}'$ le volume du cône réduit. On obtient ainsi :

$$\mathcal{V}' = k^3 \mathcal{V} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 18\pi = \frac{8}{27} \times 18\pi$$

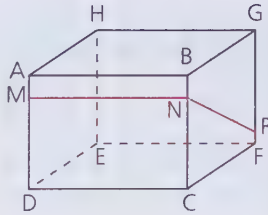
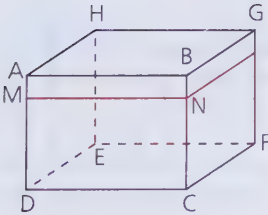
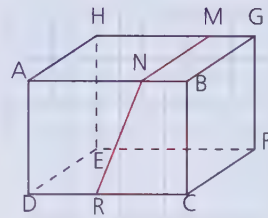
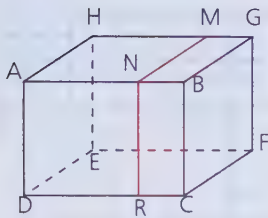
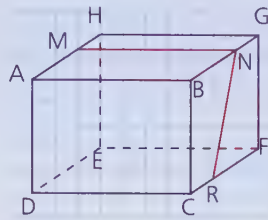
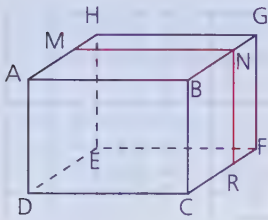
Dans une réduction de facteur k , les longueurs sont multipliées par k et les volumes par k^3 .

$$\mathcal{V}' = \frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3, \text{ soit } \mathcal{V}' \approx 16,755 \text{ cm}^3.$$

S'entraîner

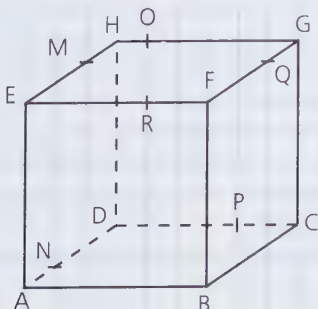
Sections de parallélépipèdes rectangles

1 Recopier les figures suivantes puis terminer la représentation de la section du parallélépipède rectangle par le plan (MNR).

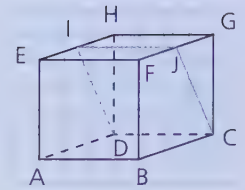


2 Recopier la figure suivante trois fois. Puis compléter chaque figure en traçant la section du cube dans chacun des cas suivants :

- le cube est coupé par le plan parallèle à l'arête [AB] passant par les points M et N.
- le cube est coupé par le plan parallèle à l'arête [BC] passant par les points O et P.
- le cube est coupé par le plan parallèle à l'arête [BF] passant par les points Q et R.



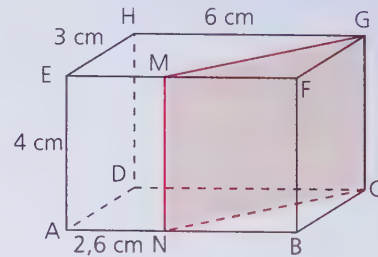
3 On considère le cube ABCDEFGH d'arête 5 cm. I est le milieu du segment [EH] et J est le milieu du segment [FG].



Le quadrilatère CDIJ est la section du cube ABCDEFGH par un plan $\mathcal{P}$.

- Indiquer les arêtes parallèles au plan $\mathcal{P}$.
 - Quelle est la nature du quadrilatère CDIJ ?
- Tracer en vraie grandeur :
 - le triangle GJC ;
 - le quadrilatère CDIJ.
- Calculer la longueur CJ. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.
- Quelle est la nature des solides ABCDEFJI et HIJGCD ?

4 Le quadrilatère MNCG est la section du parallélépipède rectangle ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [AE].

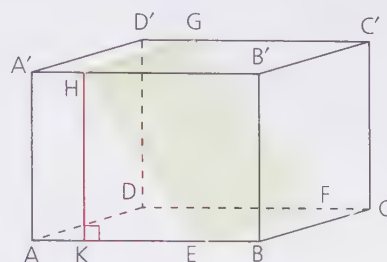


- Quelle est la nature du quadrilatère MNCG ?
- Tracer la face ABCD en vraie grandeur et placer le point N, puis mesurer la longueur NC.
- Calculer la longueur BN, puis la longueur NC. Donner la valeur exacte puis l'arrondi au mm.
 - Comparer ce résultat avec la mesure obtenue à la question 2.

5 Vu au brevet

Le parallélépipède rectangle de la figure ci-dessous a été coupé par un plan parallèle à l'arête [BC]. On donne : $EF = 25$ cm, $HK = 20$ cm et $KE = 15$ cm.

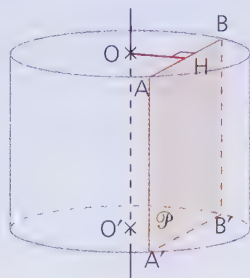
- Quelle est la nature de la section plane EFGH ?
- Calculer HE.
- Que peut-on déduire des questions précédentes pour le quadrilatère EFGH ? Justifier la réponse.



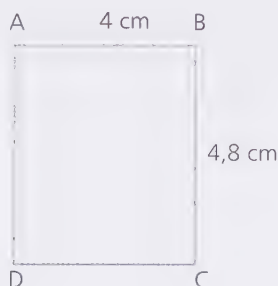
Exercices

Sections de cylindres de révolution

- 6** 1 Faire un schéma d'un cylindre de révolution de rayon 3 cm coupé par un plan parallèle aux bases.
2 Dessiner la section en vraie grandeur.
- 7** Le cylindre de révolution de rayon 4 cm et de hauteur 6 cm représenté ci-dessous est coupé par un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'axe du cylindre et situé à 2 cm de l'axe.



- 1 Donner les valeurs des longueurs OO' , OA , OB , OH , AA' , BB' , $O'A'$ et $O'B'$.
2 Quelle est la nature du triangle AOB ?
3 Que représente le point H pour le segment $[AB]$? Justifier.
4 Dessiner en vraie grandeur la base de centre O , puis placer les points H , A et B .
5 Quelle est la nature de la section $ABB'A'$?
6 Sans effectuer de calcul, construire en vraie grandeur la section $ABB'A'$ de ce cylindre par le plan $\mathcal{P}$.
- 8** Un cylindre de révolution de rayon 3,4 cm et de hauteur 8 cm est coupé par un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'axe du cylindre et situé à 1,8 cm de l'axe.
- 1 Représenter cette situation par un schéma.
2 Quelle est la nature de la section obtenue?
3 Quelles sont les dimensions de cette section? On arrondira les longueurs au mm.
- 9** Le rectangle $ABCD$ ci-dessous est la section d'un cylindre de révolution de hauteur 4,8 cm et de rayon 2,5 cm par un plan $\mathcal{P}$ parallèle à son axe $[OO']$. Les points A et B appartiennent à la face de centre O . On appelle H le milieu de $[AB]$.

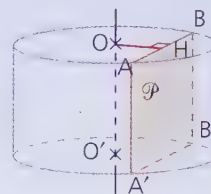


- 1 Représenter cette situation par un schéma.
2 Représenter en vraie grandeur la face de centre O et placer les points A et B .
3 Calculer la distance entre le point O et le plan de coupe.

- 10** Un cylindre de révolution de hauteur 7 cm est coupé par un plan $\mathcal{P}$ parallèle à son axe et situé à 1 cm de l'axe. La section obtenue est un rectangle de dimensions 6 cm et 7 cm.

- 1 Représenter cette situation par un schéma.
2 Calculer le rayon du cylindre. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.

- 11** Un cylindre de révolution de rayon r est coupé par un plan $\mathcal{P}$ parallèle à son axe et situé à une distance OH de l'axe.



Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4
r	5 cm	6,5 cm		2,8 cm
OH	3 cm		8,4 cm	
AB		10,4 cm	22,4 cm	5,6 cm

Agrandissement et réduction

- 12** Les cinq premiers formats des châssis des toiles de peinture pour les paysages sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Format	N° 0	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4
Dimensions (en cm)	18 × 12	22 × 14	24 × 16	27 × 19	33 × 22

- 1 Le format n° 1 est-il un agrandissement du format n° 0?
2 Le format n° 2 est-il un agrandissement du format n° 1?
3 Le format n° 3 est-il un agrandissement du format n° 2?
4 Le format n° 4 est-il un agrandissement du format n° 3?



- 13** On considère une sphère $\mathcal{S}$ de rayon 5 cm et une sphère $\mathcal{S}'$ de rayon 6 cm.

- 1 a. Calculer les valeurs exactes de l'aire $\mathcal{A}$ de la sphère $\mathcal{S}$ et du volume $\mathcal{V}$ de la boule de même centre et de même rayon que $\mathcal{S}$.
b. Calculer les valeurs exactes de l'aire $\mathcal{A}'$ de la sphère $\mathcal{S}'$ et du volume $\mathcal{V}'$ de la boule de même centre et de même rayon que $\mathcal{S}'$.
2 On pose : $k = \frac{6}{5}$. Exprimer en fonction de k les quotients $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}$ et $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}}$.

- 14** Un parallélépipède rectangle de dimensions 3 cm, 5 cm et 8 cm est agrandi avec le facteur d'agrandissement 3.

1 Quelles sont les nouvelles dimensions du parallélépipède ?

2 a. Calculer l'aire de chaque face du parallélépipède initial.

b. Utiliser le facteur d'agrandissement pour calculer l'aire de chaque face du parallélépipède agrandi.

c. Vérifier le résultat obtenu en utilisant les nouvelles dimensions.

3 a. Calculer le volume du parallélépipède initial.

b. Utiliser le facteur d'agrandissement pour calculer le volume du parallélépipède agrandi.

c. Vérifier le résultat obtenu en utilisant les nouvelles dimensions.

15 Vu au brevet

On réalise une maquette d'une pièce à l'échelle 1/200.

1 Rappeler ce que signifie « à l'échelle 1/200 ».

2 Quelle sera, sur la maquette, la longueur en cm d'un mur de 12 m ?

3 La surface réelle au sol de cette pièce est de 48 m^2 .

Quelle est la surface du sol de cette pièce dans la maquette (en cm^2) ?

4 Le volume de cette pièce sur la maquette est égal à $13,125 \text{ cm}^3$.

Quel est le volume réel de la pièce (en cm^3 , puis en m^3) ?

- 16** Le volume de marbre d'une statue est environ égal à 380 dm^3 .

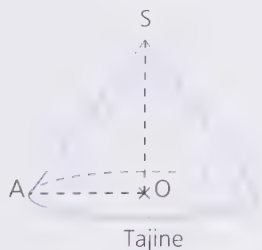
On souhaite réaliser une reproduction à l'échelle $\frac{1}{3}$ de cette statue.

Quel volume de marbre sera nécessaire à la réalisation de cette reproduction ? Donner la valeur approchée au cm^3 par excès.

17 Vu au brevet

Un tajine est un plat composé d'une assiette circulaire et d'un couvercle en forme de cône qui s'emboîte parfaitement dans l'assiette.

L'assiette de ce tajine a un rayon $[OA]$ qui mesure 15 cm et la génératrice du cône $[SA]$ mesure 25 cm.



1 Calculer la hauteur SO du cône.

2 Montrer que la valeur exacte du volume V du cône est égale à $1\,500\pi \text{ cm}^3$.

3 Un modèle réduit de ce tajine a une assiette de rayon 6 cm.

a. Déterminer le facteur de réduction qui transforme le grand tajine en modèle réduit.

b. En déduire la valeur arrondie au cm^3 du volume V' du tajine en modèle réduit.

18 Vrai ou faux

1 Un disque de rayon 6 cm a une aire deux fois plus grande qu'un disque de rayon 3 cm.

2 Un cube d'arête 1 cm a un volume huit fois plus petit qu'un cube d'arête 2 cm.

3 Un cube de 2 dm^3 a une arête 10 fois plus grande qu'un cube de 2 m^3 .

4 Le rayon d'une sphère d'aire 4 cm^2 est trois fois plus petit que le rayon d'une sphère d'aire 36 cm^2 .

Sections de pyramides et de cônes de révolution

19 Vu au brevet

La figure 1 ci-dessous représente le pommeau de levier de vitesse d'une automobile.

Il a la forme d'une demi-boule surmontant un cône dont on a sectionné l'extrémité comme l'indique la figure 2.

On appelle $\mathcal{C}_1$ le cône dont la base est le cercle de rayon $[AH]$ et $\mathcal{C}_2$ le cône dont la base est le cercle de rayon $[EK]$.

Ces deux cercles sont situés dans des plans parallèles.

On donne : $SK = 4 \text{ cm}$, $SH = 10 \text{ cm}$ et $AH = 2 \text{ cm}$.



Figure 1

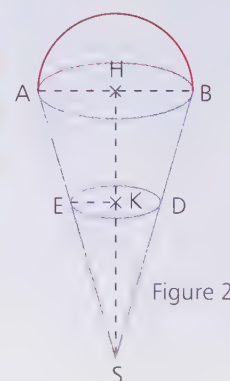


Figure 2

1 En se plaçant dans le triangle rectangle SAH , calculer la tangente de l'angle $\widehat{ASH}$. En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{ASH}$.

2 En se plaçant dans le triangle rectangle ESK et en utilisant la tangente de l'angle $\widehat{ESK}$, montrer que $EK = 0,8 \text{ cm}$.

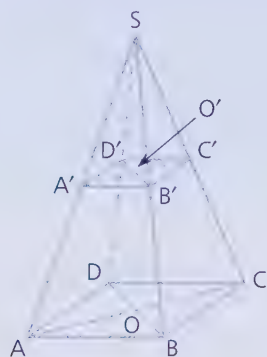
3 a. Calculer les volumes V_1 et V_2 des cônes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On donnera les arrondis au cm^3 des deux volumes demandés.

b. Calculer le volume V_3 de la demi-boule ; en donner l'arrondi au cm^3 .

c. Déduire des résultats précédents l'arrondi au cm^3 du volume du pommeau.

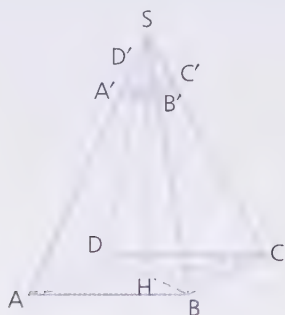
Exercices

- 20** On considère la pyramide $SABCD$ de base rectangulaire $ABCD$ et de hauteur $[SO]$ représentée ci-dessous. On donne : $AB = 3$ cm, $BD = 5$ cm et $SO = 6$ cm.



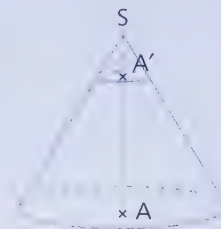
- 1 Calculer la longueur AD .
- 2 Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.
- 3 Soit O' le milieu de $[SO]$. On coupe la pyramide par un plan passant par O' et parallèle à sa base.
 - a. Quelle est la nature de la section $A'B'C'D'$ obtenue ?
 - b. La pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de la pyramide $SABCD$. Quel est le facteur de cette réduction ?
 - c. En déduire le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$.

- 21** La pyramide $SABCD$ représentée ci-dessous est une pyramide à base rectangulaire, de hauteur $[SH]$, où H est le centre du rectangle $ABCD$. On donne : $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm et $SH = 12$ cm.



- 1 Calculer la longueur AC , puis la longueur AH .
- 2 Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.
- 3 Calculer la longueur SA .
- 4 On note A' le point de $[SA]$ tel que $SA' = 3,25$ cm. On coupe la pyramide par le plan parallèle à la base et passant par A' . On obtient la pyramide $SA'B'C'D'$, réduction de la pyramide $SABCD$ de facteur k .
 - a. Calculer le facteur de réduction k .
 - b. En déduire les longueurs $A'B'$ et $B'C'$, puis le volume de $SA'B'C'D'$.
- 5 On coupe la pyramide $SABCD$ par un plan parallèle à la base et passant par un point E du segment $[SA]$ tel que le volume de la pyramide obtenue est huit fois plus petit que celui de la pyramide $SABCD$. Calculer la longueur SE .

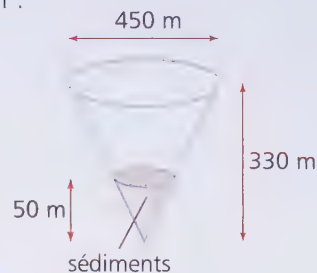
- 22** Le cône de révolution représenté ci-dessous a une hauteur SA égale à 12 cm. Un plan parallèle à la base coupe le segment $[SA]$ en un point A' tel que $SA' = 3$ cm.



- 1 Le rayon du disque de base du grand cône est de 7 cm. Calculer la valeur exacte du volume du grand cône.
- 2 a. Quel est le facteur de réduction qui permet de passer du grand cône au petit cône ?
b. En déduire la valeur exacte du volume de ce petit cône, puis en donner la valeur arrondie au cm^3 .

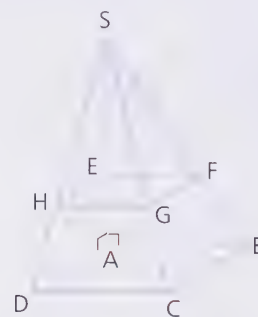
23 Math et géographie

On assimile le cratère d'un volcan à un cône de révolution de 450 m de diamètre et de 330 m de profondeur. Le fond du cratère est rempli de sédiments sur une hauteur de 50 m. Calculer le volume de sédiments au fond du cratère. On arrondira au m^3 .



24 Vu au brevet

La figure ci-dessous représente une pyramide $\mathcal{P}$ de sommet S . Sa base est un carré $ABCD$ tel que $AB = 6$ cm ; sa hauteur $[SA]$ est telle que $SA = 9$ cm.



- 1 Calculer le volume de la pyramide $\mathcal{P}$.
- 2 E est le point de $[SA]$ défini par $SE = 6$ cm. $EFGH$ est la section de la pyramide $\mathcal{P}$ par un plan parallèle à sa base ; la pyramide $\mathcal{P}_1$ de sommet S et de base $EFGH$ est donc une réduction de la pyramide $\mathcal{P}$. Calculer le facteur k de cette réduction.
- 3 Calculer le volume de la pyramide $\mathcal{P}_1$.

- 25** On considère un cône de révolution $\mathcal{C}_1$ de hauteur 12 cm et de rayon de base 7 cm.
On souhaite couper ce cône par un plan parallèle à sa base pour obtenir une section de rayon 4 cm. À quelle distance du sommet doit être situé le plan de coupe ? Arrondir au mm.

- 26** On considère un cône de révolution de sommet S dont la base a pour centre O et pour rayon 3 cm. On donne : $SO = 8$ cm.

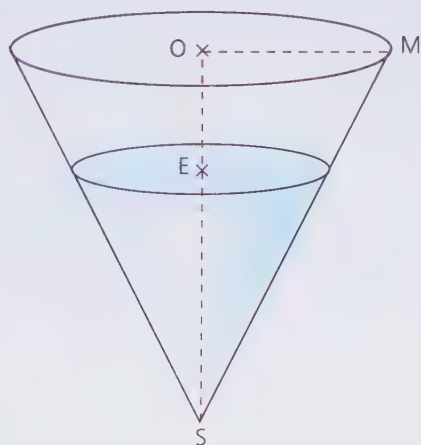
- 1 Calculer la longueur exacte d'une génératrice.
- 2 Calculer le volume $\mathcal{V}_1$ du cône. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au cm^3 .
- 3 On considère le point O' du segment $[SO]$ tel que $SO' = 4$ cm.

On coupe le cône par un plan parallèle à la base passant par O' . On obtient ainsi un petit cône.

- a. Quel est le facteur de réduction k ?
- b. Calculer le volume $\mathcal{V}_2$ du petit cône. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au cm^3 .

27 Vu au brevet

Un bassin a la forme d'un cône de révolution qui a pour base un disque de rayon OM égal à 3 m et dont la hauteur SO est égale à 6 m.

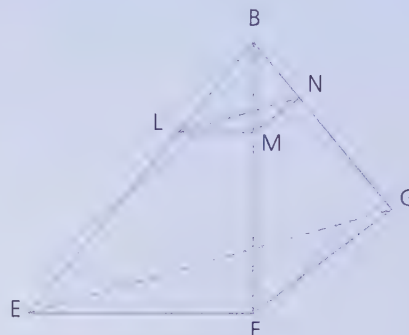


- 1 a. Montrer que son volume exact $\mathcal{V}$, en m^3 , est égal à 18π . En donner l'arrondi au dm^3 .
- b. Ce volume représente-t-il plus ou moins de 10 000 litres ?
- 2 a. Combien de temps faudrait-il à une pompe débitant 15 litres par seconde pour remplir complètement ce bassin ? Donner le résultat arrondi à la seconde.
- b. Cette durée est-elle inférieure à une heure ?
- 3 On remplit ce bassin avec de l'eau sur une hauteur de 4 m. On admet que l'eau occupe un cône qui est une réduction du bassin.
- a. Quel est le facteur de la réduction ?
- b. En déduire le volume d'eau exact $\mathcal{V}'$ contenu dans le bassin.

28 Vu au brevet

On a représenté ci-dessous une pyramide BEFG. On sait que :

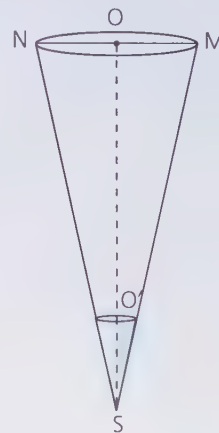
- EFG, EFB et BFG sont trois triangles rectangles en F ;
- $EF = FG = 5$ cm ; $BF = 6$ cm.



- 1 a. Calculer la longueur EG. On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au mm.
- b. Calculer l'aire du triangle EFG.
- c. Prouver que le volume de la pyramide BEFG est 25 cm^3 .
- 2 M est le point de l'arête $[BF]$ tel que $BM = 2$ cm.
On coupe la pyramide BEFG par le plan passant par M et parallèle à la base EFG. On obtient la pyramide BLMN, réduction de la pyramide BEFG.
- a. Quel est le facteur de cette réduction ?
- b. En déduire le volume de la petite pyramide BLMN. On donnera la valeur exacte et l'arrondi au mm^3 .

29 Vu au brevet

Un cône de révolution a pour rayon de base $OM = 3$ cm et pour hauteur $OS = 14$ cm.



- 1 On appelle $\mathcal{V}$ le volume de ce cône en cm^3 . Montrer que $\mathcal{V} = 42\pi$.
- 2 Dans ce cône, on verse d'abord du chocolat fondu jusqu'au point O' , puis on complète avec de la crème glacée à la pistache jusqu'au point O.
Le cône formé par le chocolat fondu de volume $\mathcal{V}'$ en cm^3 , est une réduction du cône initial, de volume $\mathcal{V}$ en cm^3 .
Sachant que $O'S$ vaut 3,5 cm, par quel calcul simple passe-t-on de OS à $O'S$? de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}'$?
En déduire la valeur de $\mathcal{V}'$ en fonction de π .
- 3 Quel est le pourcentage de chocolat fondu dans ce cône ?

Faire le point

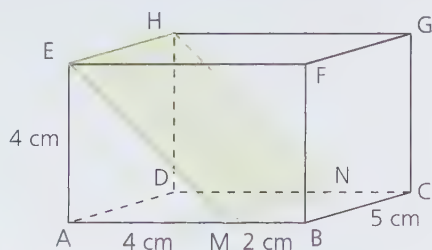
30 QCM Indiquer, dans chaque cas, la (les) réponse(s) exacte(s) parmi les quatre réponses proposées.

		A	B	C
1	La section d'un parallélépipède rectangle par un plan est un rectangle lorsque :	le plan est parallèle à une face	le plan est parallèle à une arête	le plan n'est parallèle ni à une face, ni à une arête
2	La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle aux bases est :	un disque	un rectangle	un cylindre
3	La section d'un cylindre de révolution de diamètre 4 cm et de hauteur 10 cm par un plan parallèle à son axe peut être :	un rectangle de dimensions 4 cm et 10 cm	un rectangle de dimensions 3 cm et 8 cm	un rectangle de dimensions 3 cm et 10 cm
4	Le volume d'un solide est égal à 3 cm^3 . Si on agrandit ce solide avec un coefficient d'agrandissement égal à 2, alors le volume de ce nouveau solide est égal à :	6 cm^3	9 cm^3	24 cm^3
5	Si un cône de révolution de hauteur 9 cm et de rayon 5 cm est coupé par un plan parallèle à sa base et situé à 4,5 cm du sommet, alors la section est un disque de rayon :	2,5 cm	5 cm	4,5 cm
6	Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base, alors :	la section est une réduction de la pyramide	la section est une réduction de la base de la pyramide	la section est un tronc de pyramide

Je rédige Pour chacun des exercices suivants, on demande une solution rédigée.

Section d'un parallélépipède rectangle

31 Le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessous a été coupé par un plan parallèle à l'arête [BC]. La section obtenue est le quadrilatère EHNM.



- Quelle est la nature du quadrilatère EHNM ?
- Calculer la longueur EM. Donner la valeur exacte et l'arrondi au mm.
- Dessiner la section EHNM en vraie grandeur.

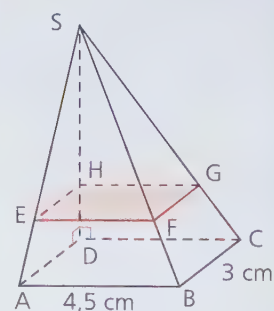
Section d'un cylindre

32 Un cylindre de révolution de diamètre 6 cm et de hauteur 8 cm est coupé par un plan parallèle à son axe. La section obtenue est un rectangle de dimensions 4 cm et 8 cm.

- Représenter la situation par un schéma.
- À quelle distance de l'axe le plan de coupe est-il situé ?

Section d'une pyramide

33 La pyramide SABCD ci-contre est à base rectangulaire et sa hauteur SD est égale à 6 cm. Cette pyramide est coupée par un plan parallèle à la base passant par le point H du segment [SD] tel que : $HD = 1,5 \text{ cm}$.



- La section EFGH obtenue est une réduction de la base ABCD de facteur k . Calculer le facteur de réduction.
- En déduire l'aire de la section EFGH et le volume de la pyramide SEFGH. Arrondir au dixième.

Section d'un cône de révolution

34 Un cône de révolution de volume 64 cm^3 est coupé par un plan parallèle à sa base aux deux tiers de sa hauteur à partir du sommet.

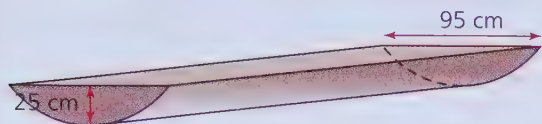
- Représenter la situation par un schéma. Quelle est la nature de la section ?
- Calculer le volume du petit cône obtenu. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au cm^3 .

Tous les exercices de cette page sont corrigés page 279.

Approfondir

- 35** Un tronc d'arbre cylindrique a été découpé en planches. Les morceaux « arrondis » ne peuvent pas être utilisés en tant que planches.

Une des chutes est représentée ci-dessous :



Calculer le rayon du tronc d'arbre. Arrondir au mm.

- 36** Un étudiant des Beaux-Arts souhaite effectuer une copie à l'échelle du tableau d'Eugène Delacroix *La liberté guidant le peuple* (1830).



Les dimensions de ce tableau sont 260 cm sur 325 cm. Il choisit une toile de dimensions 73 cm sur 100 cm.

- 1** Pourra-t-il réaliser sa copie dans un rapport 0,27 ? 0,28 ? 0,29 ? 0,30 ?

2 a. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du tableau et l'aire $\mathcal{A}'$ de la toile.

b. Calculer le quotient $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}$.

c. On pose : $k = \sqrt{\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}}$.

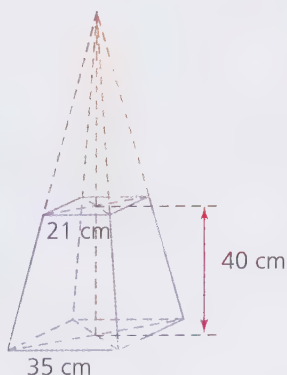
Donner l'arrondi au centième de k , puis comparer cette valeur aux résultats obtenus à la question **1**.

- 37** Un tabouret a la forme d'un tronc de pyramide régulière à base carrée.

La hauteur du tabouret est égale à 40 cm, les côtés de la grande base mesurent 35 cm et ceux de la petite base mesurent 21 cm.

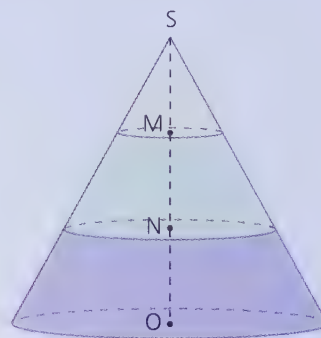
1 Calculer la hauteur de la pyramide initiale.

2 Calculer le volume du tabouret. Arrondir au cm^3 .



- 38** Une bougie décorative a la forme d'un cône de révolution de sommet S , de hauteur 27 cm. Sa base est un disque de centre O et de rayon 15 cm.

Les points M et N appartiennent au segment $[SO]$ tels que : $SM = MN = NO$.



Les trois parties de cette bougie sont de trois couleurs différentes. La partie supérieure est en cire de couleur jaune, la partie intermédiaire est verte et la partie inférieure est bleue.

1 Calculer le volume $\mathcal{V}_1$ de cire utilisée pour la partie supérieure. Donner la valeur exacte.

2 a. Calculer le volume $\mathcal{V}_2$ de cire utilisée pour la partie intermédiaire. Donner la valeur exacte.

b. Exprimer le volume $\mathcal{V}_2$ en fonction du volume $\mathcal{V}_1$.

3 a. Calculer le volume $\mathcal{V}_3$ de cire utilisée pour la partie bleue. Donner la valeur exacte.

b. Exprimer le volume $\mathcal{V}_3$ en fonction du volume $\mathcal{V}_1$.

39 Vu au brevet

Dans le fond d'un vieux tiroir, on a trouvé la bobine en bois ci-après (figure 2).

Elle est constituée de deux troncs de cône identiques et d'une partie cylindrique.

Chaque tronc de cône pourrait être obtenu en sectionnant, parallèlement à sa base et à 1 cm de hauteur, un grand cône $\mathcal{C}_1$ de base 9 cm^2 et de hauteur 3 cm, et en retirant le petit cône $\mathcal{C}_2$ (figure 1).

1 Quel est le volume du cône $\mathcal{C}_1$?

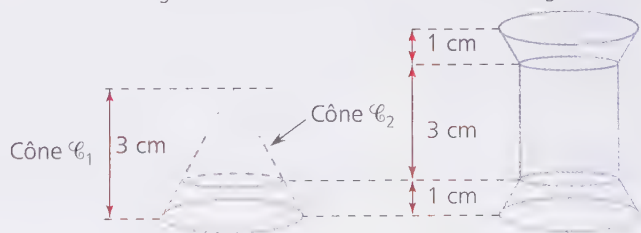
2 a. Quel est le facteur de réduction qui permet de passer du cône $\mathcal{C}_1$ au cône $\mathcal{C}_2$?

b. En déduire l'aire de la base du cône $\mathcal{C}_2$, puis le volume de la partie cylindrique de la bobine.

3 Déduire des questions précédentes le volume de la bobine. En donner une valeur arrondie au cm^3 .

Figure 1

Figure 2



40 Un cône de révolution a un volume de 63 cm^3 . On effectue un agrandissement de ce cône et on obtient un cône de volume 504 cm^3 .

- 1 Quel est le facteur d'agrandissement ?
- 2 La hauteur du grand cône est égale à 13 cm. Quelle était la hauteur du petit cône ?
- 3 Calculer les aires des bases des deux cônes. Arrondir au mm^2 .

41 On considère la pyramide régulière SABCD de hauteur 9 cm dont la base est le carré ABCD de côté 5 cm et de centre O.

- 1 Calculer le volume de la pyramide SABCD.
- 2 La pyramide SABCD est coupée par un plan parallèle à la base qui coupe les arêtes latérales [SA], [SB], [SC] et [SD] respectivement en E, F, G et H tels que : $\frac{SE}{SA} = \frac{4}{5}$.
 - a. Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ?
 - b. Calculer la longueur EF.
 - c. Calculer le volume de la pyramide SEFGH.
- 3 La pyramide SABCD est coupée par un plan parallèle à la base qui coupe les arêtes latérales [SA], [SB], [SC] et [SD] respectivement en I, J, K et L tels que le volume de la pyramide SIJKL est égal à $9\,375 \text{ mm}^3$.
 - a. Calculer le coefficient de réduction $\frac{SI}{SA}$.
 - b. En déduire les longueurs SI et IJ. Arrondir au mm.

42 Volume d'un tronc de cône

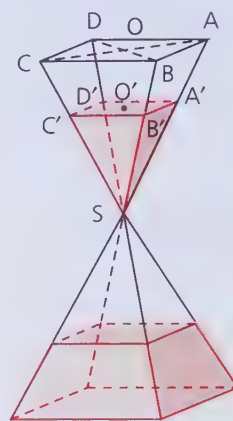
On considère un cône de révolution $\mathcal{C}$ de sommet S et dont la base est un disque de centre O et de rayon $OA = r$. On pose $SO = h$.

- 1 Exprimer en fonction de r et de h le volume de ce cône.
- 2 On coupe ce cône par un plan parallèle à sa base. Ce plan coupe la droite (SO) en O' et la droite (SA) en A' . On pose $SO' = h'$ et $O'A' = r'$.
 - a. Exprimer h' en fonction de r , r' et h , puis h en fonction de r , r' et h' .
 - b. Exprimer en fonction de r' et de h' le volume du cône $\mathcal{C}'$ de sommet S et dont la base est le disque de centre O' et de rayon r' .
 - c. En déduire l'expression en fonction de r , r' , h et h' du volume du tronc de cône obtenu en enlevant le cône $\mathcal{C}'$ au cône $\mathcal{C}$.
 - d. On pose $H = h - h'$. Exprimer h , puis h' en fonction de H , r et r' .
 - e. En déduire l'expression du volume du tronc de cône en fonction de H , r et r' .
- 3 Application : Calculer le volume d'un tronc de cône de hauteur 8 cm et dont les bases ont des diamètres de 8 cm et 12 cm. Arrondi au cm^3 .

Problèmes de synthèse

43 Un sablier est constitué de deux pyramides superposées comme le montre la figure ci-dessous. Le sable s'écoule au niveau du point S.

La surface du sable est représentée par le plan $A'B'C'D'$ horizontal et parallèle aux bases des pyramides. On suppose qu'au départ, le volume du sable occupe la totalité de la pyramide SABCD.



La pyramide SABCD est régulière, sa base est un carré ABCD et on rappelle que la hauteur (SO) est perpendiculaire au plan ABCD.

Le niveau du sable est repéré par la longueur SA' sur l'arête de la pyramide SABCD.

On donne : $OA = 27 \text{ mm}$ et $SO = 120 \text{ mm}$.

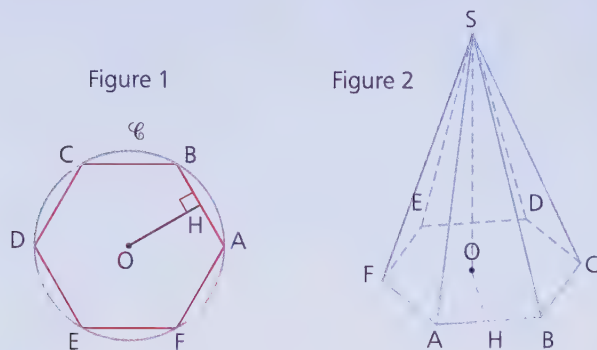
Dans tout ce problème, A' est le milieu de [SA].

- 1 Représenter la base ABCD en vraie grandeur.
- 2 a. Justifier que le triangle AOB est rectangle isocèle.
b. Montrer que $AB = 27\sqrt{2} \text{ mm}$.
- 3 a. Calculer l'aire du carré ABCD.
b. En déduire que le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide SABCD est $58\,320 \text{ mm}^3$.
- 4 Le triangle SOA est rectangle. Montrer que $SA = 123 \text{ mm}$.
- 5 La pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de la pyramide SABCD.
 - a. Que peut-on dire des droites (OA) et (O'A') ?
 - b. Déterminer le coefficient de la réduction $\frac{SO'}{SO}$.
- 6 On note $\mathcal{V}'$ le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$. Calculer $\mathcal{V}'$. Arrondir au mm^3 .
- 7 On admet que le volume du sable descendu est proportionnel au temps écoulé. Tout le sable s'écoule en 4 minutes. Au bout de combien de temps le niveau de sable est-il dans la position étudiée ?

44 Vu au brevet

A Première partie

ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $r = 26$ cm. On rappelle que tous les côtés de cet hexagone mesurent 26 cm (figure 1 ci-dessous).

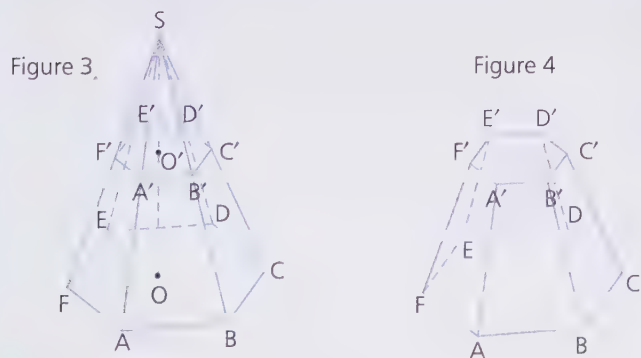


L'hexagone ABCDEF est la base d'une pyramide régulière de sommet S et de hauteur $SO = 83$ cm (figure 2). Le point H est le milieu de [AB]. (On rappelle que les faces latérales de cette pyramide sont des triangles isocèles en S.)

- 1 Le triangle SOB est rectangle en O. Calculer SB^2 .
- 2 Que représente la droite (SH) pour le triangle SAB ? Justifier.
- 3 Montrer que $SH = 86$ cm.
- 4 Calculer, en cm^2 , l'aire du triangle SAB.
- 5 En déduire que l'aire latérale de la pyramide (aire de la pyramide sans la base) est $6\,708 \text{ cm}^2$.

B Deuxième partie

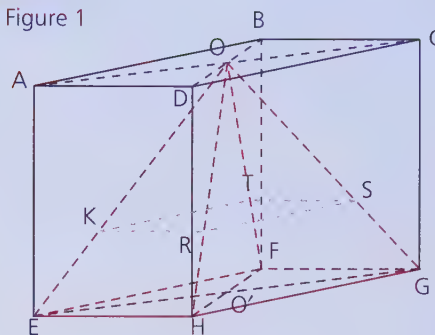
Pour fabriquer l'abat-jour d'une lampe, on a coupé cette pyramide par un plan parallèle à la base (figure 3). On obtient ainsi un tronc de pyramide qui servira d'abat-jour (figure 4). La pyramide $SA'B'C'D'E'F'$ est donc une réduction de la pyramide SABCDEF.



- 1 On donne $SO' = 33,2$ cm.
Calculer $\frac{SO'}{SO}$ et expliquer comment obtenir l'aire latérale de $SA'B'C'D'E'F'$ à partir de l'aire latérale de SABCDEF.
Calculer alors l'aire latérale de l'abat-jour en cm^2 .
- 2 On suppose maintenant que $SO' = x$, avec $0 < x < 83$.
Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ de l'abat-jour vérifie :
$$\mathcal{A} = 6\,708 - \frac{6\,708}{6\,889}x^2.$$

45 Vu au brevet

Figure 1



La figure 1 représente une boîte en forme de parallélépipède rectangle ABCDEFGH de mesures : $AB = 28$ cm, $BC = 14$ cm et $AE = 20$ cm.

Les diagonales de la face ABCD se coupent en un point O, les diagonales de la face EFGH se coupent en un point O'. À l'intérieur de cette boîte est posée une pyramide de sommet O et de base EFGH. Notons K le point de [OE] tel que $OK = 17$ cm.

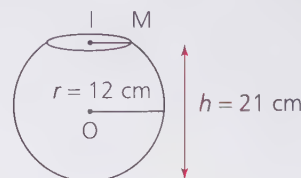
On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base EFGH et passant par le point K. On désigne par KRST le rectangle section de la pyramide par ce plan, où R, respectivement S et T, est le point d'intersection de ce plan avec l'arête [OH] de la pyramide, respectivement [OG] et [OF].

La droite (KR), respectivement les droites (RS), (ST), (TK), est parallèle à la droite (EH), respectivement (HG), (GF), (FE). Le triangle OO'E est rectangle en O'.

- 1 Calculer O'E. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.
- 2 Calculer OE. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.
- 3 Calculer KR et KT. Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au mm.
- 4 On remplit de sable la partie de la boîte non occupée par la pyramide.
Calculer le volume de sable utilisé. On arrondira au cm^3 .

- 5 On veut reverser ce sable dans un aquarium représenté par la figure 2 qui a la forme d'une calotte sphérique de centre O, de rayon $r = 12$ cm, de hauteur h égale à 21 cm, dont l'ouverture est un cercle de centre I et de rayon IM.

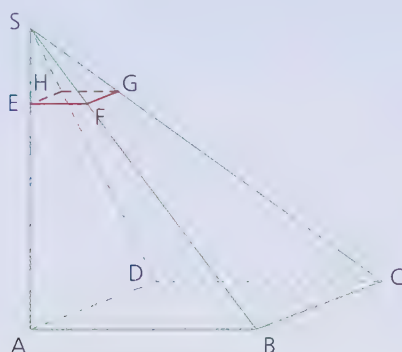
Figure 2



- a. Calculer IM. Arrondir au mm.
 - b. Calculer le volume de l'aquarium, sachant que le volume d'une calotte sphérique est donné par la formule :
$$v = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$
 Arrondir au cm^3 .
- L'aquarium est-il assez grand pour contenir tout le sable qu'on a utilisé à la question 4 ?

- 46** Sur la figure ci-dessous, SABCD est une pyramide à base carrée de hauteur [SA] telle que $AB = 9$ cm et $SA = 12$ cm. Le triangle SAB est rectangle en A.

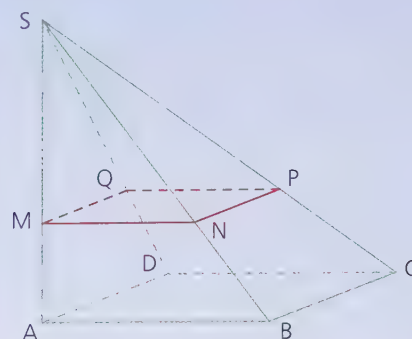
A Première partie



EFGH est la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base et telle que $SE = 3$ cm.

- 1 a.** Calculer EF.
- b.** Calculer SB.
- 2 a.** Calculer le volume de la pyramide SABCD.
- b.** Donner le facteur de réduction permettant de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SEFGH.
- c.** En déduire le volume de SEFGH. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au cm^3 .
- 3 a.** Calculer l'aire de la section EFGH.
- b.** Utiliser le résultat précédent pour calculer le volume de la pyramide SEFGH et vérifier que l'on retrouve le même résultat que celui obtenu à la question **2 c.**

B Seconde partie



Soit M un point de [SA] tel que $SM = x$ cm, où x est compris entre 0 et 12.

On appelle MNPQ la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base passant par M.

- 1** Montrer que $MN = 0,75x$.
- 2** Soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire du carré MNPQ. Montrer que $\mathcal{A}(x) = 0,5625x^2$.
- 3** Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

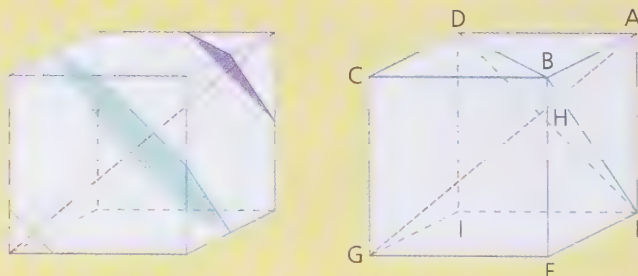
Longueur x (en cm)	0	2	4	6	8	10	12
Aire $\mathcal{A}(x)$ du carré MNPQ							

- 4** Dans un repère orthogonal, on prend les unités suivantes :
 - sur l'axe des abscisses, 1 cm représente 1 unité ;
 - sur l'axe des ordonnées, 1 cm représente 10 unités.
 Placer dans ce repère les points d'abscisse x et d'ordonnée $\mathcal{A}(x)$ données dans le tableau.
- 5** L'aire de MNPQ est-elle proportionnelle à la longueur SM ? Justifier à l'aide du graphique.

POUR LES CURIEUX

ABCDEFGH est un cube.

- 1** Étude de la pyramide ABDE
 - a.** Représenter la pyramide ABDE telle que le plan (BDE) soit horizontal.
 - b.** Pourquoi a-t-on $AB = AD = AE$?
 - c.** On appelle H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $HB^2 = AB^2 - AH^2$.
 - d.** Justifier que : $HB = HD = HE$.
 - e.** Montrer que le triangle BDE est équilatéral. Que représente le point H dans ce triangle ?
- 2** Étude de la pyramide GBDE
 - a.** Justifier que : $GB = GD = GE$.
 - b.** Que représente le point H pour cette pyramide ?
 - c.** Pourquoi la droite (GA) est-elle perpendiculaire au plan (BDE) ?
- 3** Déduire des deux questions précédentes la nature de la section du cube par un plan perpendiculaire à la grande diagonale [GA] lorsque le point d'intersection avec ce plan appartient au segment [AH].



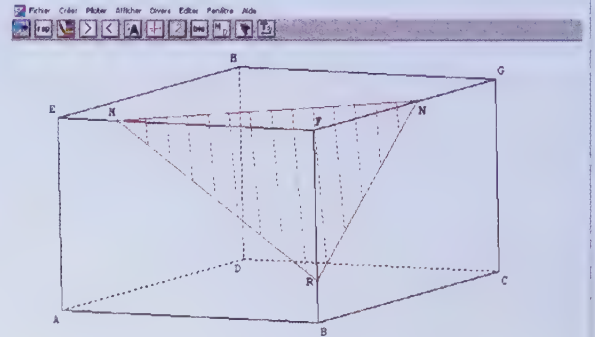
Henri Bergson est un philosophe influent qui eut une carrière exemplaire couronnée par le prix Nobel de Littérature en 1928. Sa première publication fut « mathématique ». Aussi brillant en sciences qu'en lettres, il obtint en 1876 le premier prix du Concours général de mathématiques pour son étude sur les sections planes d'un cube : sa solution fut publiée l'année suivante dans les Annales de Mathématiques.

Sections de solides par un plan

1 Sections d'un parallélépipède rectangle par un plan non parallèle à une face ou à une arête

On se propose de montrer que lorsque le plan de coupe n'est pas parallèle à une face ni à une arête, la section obtenue n'est pas un rectangle.

1. Créer un **parallélépipède** rectangle (ou pavé) ABCDEFGH.
 2. Créer trois **points** M, N et R appartenant respectivement aux segments [EF], [FG] et [FB].
 3. Créer le **plan** défini par les trois points M, N et R.
 4. Créer la **section** du parallélépipède rectangle par ce plan.
 5. **Déplacer** les points M, N et R.
- Quelle est la nature de cette section ?

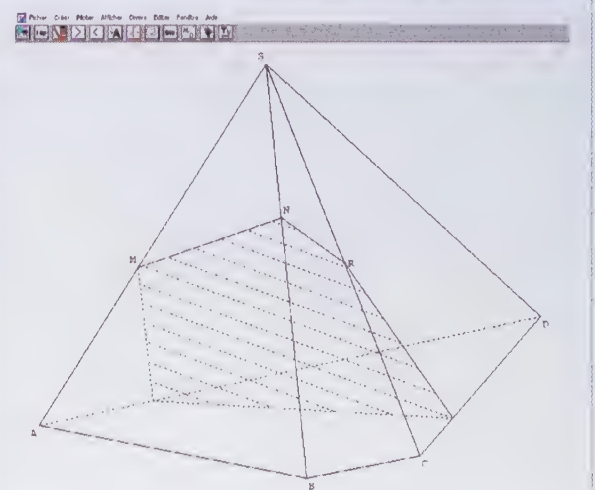


6. Reprendre les questions précédentes avec des points M, N et R appartenant respectivement aux segments :
 - a. [EF], [HG] et [FB].
 - b. [EH], [HG] et [FB].
 - c. [EH], [HG] et [AB].
- Quelles semblent être les différentes natures de la section d'un parallélépipède par un plan ?

2 Sections d'une pyramide par un plan non parallèle à la base

On se propose de montrer que lorsque le plan de coupe d'une pyramide n'est pas parallèle à la base, la section obtenue n'est pas une réduction de la base.

1. Créer une **pyramide** SABCD.
 2. Créer trois **points** M, N et R appartenant respectivement aux segments [SA], [SB] et [SC] et tels que la droite (MN) ne soit pas parallèle à la droite (AB).
 3. Créer le **plan** défini par les trois points M, N et R.
 4. Créer la **section** de la pyramide SABCD par le plan (MNR).
 5. **Déplacer** les points M, N et R de telle sorte que le plan (MNR) ne soit pas parallèle au plan de la base ABCD.
- Quelle est la nature des sections obtenues ?



Faire le point : corrigés

Chapitre 1

64 QCM

- 1 A, B, C (le nombre A est égal à 3). 2 B. 3 C. 4 A. 5 C.
6 B, C ($84 = 156 - 72$), D (12 est le reste de la division euclidienne de 156 par 72). 7 A, B, D. 8 C.

Je rédige

- 65 a. $\frac{7}{50} = \frac{14}{100} = 0,14$. $\frac{7}{50}$ est un nombre décimal non entier.
b. $-\frac{108}{4} = -27$. $-\frac{108}{4}$ est un nombre entier relatif.
c. $\frac{19}{20} = \frac{95}{100} = 0,95$. $\frac{19}{20}$ est un nombre décimal non entier.
d. $-\frac{75}{48} = -\frac{25}{16} = -\frac{15\,625}{10\,000} = -1,5625$. $-\frac{75}{48}$ est un nombre décimal non entier.

- 66 A = $7 - \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{70}{10} - \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{71}{10}$.
B = $\frac{12}{7} - \frac{9}{2} = \frac{24}{14} - \frac{63}{14} = -\frac{39}{14}$.
C = $\frac{8}{3} + \frac{11}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{3} + \frac{44}{27} = \frac{72}{27} + \frac{44}{27} = \frac{116}{27}$.
D = $\frac{\frac{6}{5} - 4}{\frac{4}{3} + \frac{7}{18}} = \frac{\frac{6}{5} - \frac{20}{5}}{\frac{24}{18} + \frac{7}{18}} = \frac{-\frac{14}{5}}{\frac{31}{18}} = -\frac{14}{5} \times \frac{18}{31} = -\frac{252}{155}$.

- 67 Fraction des élèves du collège qui ont choisi l'anglais en seconde langue vivante :

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Un quart des élèves du collège ont choisi l'anglais en seconde langue vivante.

- 68 a. $532 = 285 \times 1 + 247$; $285 = 247 \times 1 + 38$; $247 = 38 \times 6 + 19$; $38 = 19 \times 2 + 0$. D'où : PGCD (532 ; 285) = 19.
b. $442 = 136 \times 3 + 34$; $136 = 34 \times 4 + 0$. D'où : PGCD (442 ; 136) = 34.
c. $609 = 391 \times 1 + 218$; $391 = 218 \times 1 + 173$; $218 = 173 \times 1 + 45$; $173 = 45 \times 3 + 38$; $45 = 38 \times 1 + 7$; $38 = 7 \times 5 + 3$; $7 = 3 \times 2 + 1$; $3 = 1 \times 3 + 0$. D'où : PGCD (609 ; 218) = 1.
d. $1\,435 = 1\,050 \times 1 + 385$; $1\,050 = 385 \times 2 + 280$; $385 = 280 \times 1 + 105$; $280 = 105 \times 2 + 70$; $105 = 70 \times 1 + 35$; $70 = 35 \times 2 + 0$. D'où : PGCD (1 435 ; 1 050) = 35.

- 69 1 $1\,404 = 416 \times 3 + 156$; $416 = 156 \times 2 + 104$; $156 = 104 \times 1 + 52$; $104 = 52 \times 2 + 0$. D'où : PGCD (1 404 ; 416) = 52.

2 $\frac{416}{1\,404} = \frac{416 : 52}{1\,404 : 52} = \frac{8}{27}$

3 $\frac{416}{1\,404} - \frac{14}{9} = \frac{8}{27} - \frac{14}{9} = \frac{8}{27} - \frac{42}{27} = -\frac{34}{27}$

- 70 1 Tous les bonbons et tous les chocolats sont utilisés et tous les sachets contiennent un même nombre de bonbons et un même nombre de chocolats, donc le nombre de sachets est un diviseur commun à 1 615 et 969.

Le nombre maximal de sachets est donc le plus grand diviseur commun de 1 615 et 969.

$$1\,615 = 969 \times 1 + 646 ; 969 = 646 \times 1 + 323 ; 646 = 323 \times 2 + 0$$

D'où : PGCD (1 615 ; 969) = 323.

Les élèves pourront donc confectionner au maximum 323 sachets identiques utilisant tous les bonbons et tous les chocolats.

- 2 $1\,615 : 323 = 5$ et $969 : 323 = 3$. Chaque sachet sera donc composé de cinq bonbons et de trois chocolats.

Chapitre 2

84 QCM

- 1 A. 2 B. 3 C. 4 B.
5 C. 6 B. 7 A.

Je rédige

- 85 Les solutions sont représentées en rouge sur chaque droite graduée.

a. $8x + 9 < -1$
 $8x < -1 - 9$
 $8x < -10$
 $x < -\frac{10}{8}$
soit $x < -\frac{5}{4}$

b. $7x + \frac{5}{3} \geq 2$
 $7x + \frac{5}{3} - \frac{5}{3} \geq 2 - \frac{5}{3}$
 $7x \geq \frac{70}{3}$
 $7x \times \frac{1}{7} \geq \frac{70}{3} \times \frac{1}{7}$
soit $x \geq \frac{10}{3}$



c. $2x + 7 \leq 9 - 6x$
 $2x + 7 - 7 \leq 9 - 6x - 7$
 $2x \leq 2 - 6x$
 $2x + 6x \leq 2 - 6x + 6x$
 $8x \leq 2$
 $x \leq \frac{2}{8}$
soit $x \leq \frac{1}{4}$

d. $3x - \frac{8}{5} > 42 - x$
 $3x - \frac{8}{5} + \frac{8}{5} > 42 - x + \frac{8}{5}$
 $3x > \frac{218}{5} - x$
 $3x + x > \frac{218}{5} - x + x$
 $4x > \frac{218}{5}$
 $4x \times \frac{1}{4} > \frac{218}{5} \times \frac{1}{4}$
soit $x > \frac{109}{10}$



- 86 1 L'expression donnant le coût d'une course en taxi est : $y = 1,95x + 1,9$.
2 $y \leq 37$ s'écrit : $1,95x + 1,9 \leq 37$ soit $1,95x \leq 35,1$ ou $x \leq 18$.
3 D'après la question 2, un client qui dépense au plus 37 euros pourra parcourir une distance maximale de 18 km.

- 87 a. $\begin{cases} 2x + y = -1 & (1) \\ 5x - y = 4 & (2) \end{cases}$ On résout le système par combinaison :

En faisant (1) + (2), on déduit : $2x + 5x = -1 + 4$
soit $7x = 3$
d'où $x = \frac{3}{7}$

Puis on multiplie (1) par 5 et (2) par -2 ; on obtient

$$\begin{cases} 10x + 5y = -5 & (1') \\ -10x + 2y = -8 & (2') \end{cases}$$

On additionne (1') et (2') ; on obtient : $7y = -13$ d'où $y = -\frac{13}{7}$.

On vérifie que le couple $(\frac{3}{7} ; -\frac{13}{7})$ est bien solution du système proposé :

$$2 \times \frac{3}{7} + \left(-\frac{13}{7}\right) = \frac{6}{7} - \frac{13}{7} = -\frac{7}{7} = -1.$$

$$5 \times \frac{3}{7} - \left(-\frac{13}{7}\right) = \frac{15}{7} + \frac{13}{7} = \frac{28}{7} = 4.$$

b. $\begin{cases} 5x + 2y = 11 & (1) \\ 4x + 3y = 13 & (2) \end{cases}$ On résout le système par combinaison.

On multiplie (1) par 4 et (2) par -5 ; on obtient :

$$\begin{cases} 20x + 8y = 44 & (1') \\ -20x - 15y = -65 & (2') \end{cases}$$

On additionne (1') et (2') ; on obtient : $-7y = -21$ d'où $y = 3$.

On multiplie (1) par 3 et (2) par -2 ; on obtient :

$$\begin{cases} 15x + 6y = 33 & (1'') \\ -8x - 6y = -26 & (2'') \end{cases}$$

On additionne (1'') et (2'') ; on obtient : $7x = 7$ d'où $x = 1$.

On vérifie que le couple (1 ; 3) est solution du système proposé :

• $5 \times 1 + 2 \times 3 = 5 + 6 = 11$.

• $4 \times 1 + 3 \times 3 = 4 + 9 = 13$.

c. $\begin{cases} 3x + 5y = 63 & (1) \\ 2x - y = 25 & (2) \end{cases}$ On résout le système par substitution.

De (2) on déduit : $y = 2x - 25$.

On remplace dans (1) :

$$3x + 5(2x - 25) = 63$$

$$3x + 10x - 125 = 63$$

$$13x = 188$$

d'où $x = \frac{188}{13}$.

d'où $y = 2 \times \frac{188}{13} - 25$

$$y = \frac{376}{13} - \frac{325}{13}$$

$$y = \frac{51}{13}$$

On vérifie que le couple $(\frac{188}{13}; \frac{51}{13})$ est solution du système :

$$3 \times \frac{188}{13} + 5 \times \frac{51}{13} = \frac{564}{13} + \frac{255}{13} = \frac{819}{13} = 63.$$

$$2 \times \frac{188}{13} - \frac{51}{13} = \frac{376}{13} - \frac{51}{13} = \frac{325}{13} = 25.$$

d. $\begin{cases} 4x - 4y = 16 & (1) \\ 3x + 2y = 47 & (2) \end{cases}$ On résout le système par substitution.

L'équation (1) s'écrit aussi : $x - y = 4$.

De l'équation $x - y = 4$, on déduit : $y = x - 4$, que l'on remplace

dans (2) : $3x + 2(x - 4) = 47$

$$3x + 2x - 8 = 47$$

$$5x = 55$$

$$x = 11.$$

d'où : $y = 11 - 4$

$$y = 7.$$

On vérifie que le couple (11 ; 7) est solution du système :

$$4 \times 11 - 4 \times 7 = 44 - 28 = 16$$

$$3 \times 11 + 2 \times 7 = 33 + 14 = 47.$$

88 ① L'équation $3x + 2y = 5,05$ traduit la phrase « 3 baguettes et 2 croissants coûtent 5,05 euros ».

② L'équation demandée est : $2x + 3y = 5,2$.

③ $\begin{cases} 3x + 2y = 5,05 & (1) \\ 2x + 3y = 5,2 & (2) \end{cases}$ On résout ce système par combinaison.

On multiplie (1) par 2 et (2) par (-3) ; on obtient :

$$\begin{cases} 6x + 4y = 10,1 & (1') \\ -6x - 9y = -15,6 & (2') \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 10,1 & (1') \\ -6x - 9y = -15,6 & (2') \end{cases}$$

On additionne (1') et (2') : $-5y = -5,5$ d'où $y = 1,1$.

On multiplie (1) par 3 et (2) par (-2) ; on obtient :

$$\begin{cases} 9x + 6y = 15,15 & (1'') \\ -4x - 6y = -10,4 & (2'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 6y = 15,15 & (1'') \\ -4x - 6y = -10,4 & (2'') \end{cases}$$

On additionne (1'') et (2'') : $5x = 4,75$ d'où $x = 0,95$.

On vérifie que le couple (0,95 ; 1,1) est bien solution du système :

$$3 \times 0,95 + 2 \times 1,1 = 2,85 + 2,2 = 5,05$$

$$2 \times 0,95 + 3 \times 1,1 = 1,9 + 3,3 = 5,2.$$

④ Une baguette coûte 0,95 € et un croissant coûte 1,10 €.

Chapitre 3

59 QCM

① A, C et D. ② A et B. ③ B et D. ④ B et D. ⑤ A et C.

⑥ A. ⑦ B et D. ⑧ A et B. ⑨ B et D. ⑩ C. ⑪ A et C.

Je rédige

60 $A = 10^5 \times 10^{-6} \times 10^8 = 10^{5-6+8} = 10^7.$

$$B = \frac{1}{0,2^4 \times 0,2^{-2}} = \frac{1}{0,2^{4-2}} = \frac{1}{0,2^2} = 0,2^{-2}.$$

$$C = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3-5}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-(-2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

$$D = \frac{7^2 \times 7^{-1} \times 7^3}{7^5 \times 7^{-7}} = \frac{7^{2-1+3}}{7^{5-7}} = \frac{7^4}{7^{-2}} = 7^{4-(-2)} = 7^6.$$

61 $A = (1,5)^3 \times (1,5)^{-1}$

$$A = (1,5)^{2 \times 3} \times (1,5)^{-1 \times (-1)}$$

$$A = (1,5)^6 \times (1,5)^1$$

$$A = (1,5)^{6+1} = 1,5^7.$$

$$B = (2^4)^{-1} \times (2^{-2})^3$$

$$B = (2)^{-4} \times (2)^{-6}$$

$$B = (2)^{-4+(-6)} = 2^{-10}.$$

$$C = (15^0)^3 \times (15^8)^0$$

$$C = 15^0 \times 15^0$$

$$C = 1 \times 1 = 1.$$

$$D = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^6\right)^2 \times \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{-2}$$

$$D = \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$D = \left(\frac{1}{3}\right)^{12+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{14}.$$

62 $A = 10^{12} \times 0,1^{12} = (10 \times 0,1)^{12} = 1^{12} = 1.$

$$B = \frac{1}{16} \times 6^4 = \frac{1}{2^4} \times 6^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 6^4 = \left(\frac{1}{2} \times 6\right)^4 = 3^4.$$

$$C = a^5 \times \left(\frac{12}{a}\right)^5 = \left(a \times \frac{12}{a}\right)^5 = 12^5.$$

$$D = 2^{-6} \times 3^{-6} \times 5^{-6} = (2 \times 3)^{-6} \times 5^{-6} = 6^{-6} \times 5^{-6}$$

$$D = (6 \times 5)^{-6} = 30^{-6}.$$

63 $A = 3 \times 10^4 - 2 \times 10^4 = 10^4(3 - 2) = 10^4.$

$$B = a^7 - a^5 = a^{5+2} - a^5 = a^5 \times a^2 - a^5$$

$$B = a^5(a^2 - 1)$$

$$C = 3^2 \times 5^2 - 3^4 = 3^2 \times 5^2 - 3^2 \times 3^2 = 3^2(5^2 - 3^2)$$

$$D = 2^5 \times 7^6 - 2^3 \times 7^8 = 2^3 \times 2^2 \times 7^6 - 2^3 \times 7^6 \times 7^2$$

$$D = 2^3 \times 7^6(2^2 - 7^2).$$

64 $A = 2^3 \times 5^2 - 3^5 = 8 \times 25 - 243 = -43.$

$$B = 2^3 + 5^2 - 3^5 = 8 + 25 - 243 = -210.$$

$$C = 2^3 \times (5^2 - 3^5) = 8(25 - 243) = -1\,744.$$

$$D = 2^3 - 5^2 \times 3^5 = 8 - 25 \times 243 = -6\,067.$$

Chapitre 4

90 QCM

- 1 A. 2 B. 3 C. 4 C. 5 B et C.
6 B. 7 B et C. 8 B. 9 A et B.

91 $\sqrt{2,89} = \sqrt{289 \times 10^{-2}} = \sqrt{289} \times \sqrt{10^{-2}} = \sqrt{289} \times \sqrt{\frac{1}{10^2}} = 17 \times \frac{1}{10}$
 $= 17 \times 10^{-1} = 1,7$

$\sqrt{2\,890 \times 10^3} = \sqrt{289 \times 10^4} = \sqrt{289} \times \sqrt{10^4} = 17 \times 10^2 = 1\,700$

$\sqrt{0,0289} = \sqrt{289 \times 10^{-4}} = \sqrt{289} \times \sqrt{10^{-4}} = 17 \times 10^{-2} = 0,17$

$\sqrt{28,9 \times 10^5} = \sqrt{289 \times 10^{-1} \times 10^5} = \sqrt{289} \times \sqrt{10^4} = 17 \times 10^2 = 1\,700$

$\sqrt{28,9 \times 10^{-3}} = \sqrt{289 \times 10^{-1} \times 10^{-3}} = \sqrt{289} \times \sqrt{10^{-4}} = 17 \times 10^{-2} = 0,17.$

92 $A = 2\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{500}$

$A = 2\sqrt{9 \times 5} + 3\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{100 \times 5}$

$A = 2\sqrt{9} \times \sqrt{5} + 3\sqrt{4} \times \sqrt{5} - \sqrt{100} \times \sqrt{5}$

$A = 2 \times 3\sqrt{5} + 3 \times 2 \times \sqrt{5} - 10\sqrt{5}$

$A = 6\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 10\sqrt{5}$

$A = \sqrt{5}(6 + 6 - 10)$

$A = 2\sqrt{5}.$

- 93 a. $x = 11$, $x = -11$. b. Pas de solution.
c. $x^2 = 36$ d'où $x = 6$, $x = -6$. d. $x^2 = 0$ d'où $x = 0$.

94 $A = \sqrt{\sqrt{72+49} + \sqrt{10+3\sqrt{25}}}$

$A = \sqrt{\sqrt{121} + \sqrt{10+3 \times 5}}$

$A = \sqrt{11 + \sqrt{25}} = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4.$

95 $\bullet \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$ $\bullet \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$
 $\bullet \frac{21}{\sqrt{7}} = \frac{3 \times 7}{\sqrt{7}} = 3\sqrt{7}$
 $\bullet \frac{\sqrt{8} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{4 \times 2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$
 $\bullet \frac{6}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$ $\bullet \frac{3\sqrt{7}}{7} = \frac{3\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

Tous les nombres sont égaux $\frac{3}{\sqrt{7}}$ sauf $\frac{21}{\sqrt{7}}$ qui est donc l'intrus.

- 96 1 a. Soit d la longueur de la diagonale du carré ; d'après le théorème de Pythagore :

$d^2 = (\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 = 2(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2$

$d^2 = 2(2\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 = 2(3\sqrt{2})^2 = 2 \times 9 \times 2$

$d^2 = 36$. De plus, $d > 0$, donc $d = 6$ cm.

b. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de ce carré.

$\mathcal{A} = (\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$. D'où $\mathcal{A} = 18$ cm².

2 Soit a la longueur du côté de ce carré ; d'après le théorème de Pythagore : $(\sqrt{40})^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ d'où $40 = 2a^2$ donc $a^2 = 20$.

De plus, $a > 0$ donc $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. D'où $a = 2\sqrt{5}$ cm.

97 1 $\mathcal{A} = \sqrt{27} \times \sqrt{75} = \sqrt{9 \times 3} \times \sqrt{25 \times 3} = 3\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 15(\sqrt{3})^2$
 $= 15 \times 3 = 45$. D'où $\mathcal{A} = 45$ cm².

2 Soit a la longueur du côté de ce carré ; on a : $a^2 = 45$.

De plus, $a > 0$ donc $a = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$. D'où $a = 3\sqrt{5}$ cm.

Soit d la longueur de la diagonale du carré ; d'après le théorème de Pythagore : $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 2 \times 45 = 90$.

De plus, $d > 0$ donc $d = \sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10} = 3\sqrt{10}$.

D'où $d = 3\sqrt{10}$ cm.

Chapitre 5

98 QCM

- 1 D. 2 D. 3 C. 4 C. 5 A.
6 B. 7 C. 8 A. 9 C. 10 D.

Je rédige

99 $A = (4 - 3x)^2 - (x - 3)(5x + 1)$
 $A = 16 - 24x + 9x^2 - (5x^2 + x - 15x - 3)$
 $A = 16 - 24x + 9x^2 - 5x^2 - x + 15x + 3$
 $A = 9x^2 - 5x^2 - 24x - x + 15x + 16 + 3$
 $A = 4x^2 - 10x + 19.$

$B = (7x + 2)(7x - 2) - (5x + 2)^2$

$B = 49x^2 - 4 - (25x^2 + 20x + 4)$

$B = 49x^2 - 4 - 25x^2 - 20x - 4$

$B = 49x^2 - 25x^2 - 20x - 4 - 4$

$B = 24x^2 - 20x - 8.$

$C = (2 + 3x)^2 - (4x - 1)^2$

$C = 4 + 12x + 9x^2 - (16x^2 - 8x + 1)$

$C = 4 + 12x + 9x^2 - 16x^2 + 8x - 1$

$C = 9x^2 - 16x^2 + 12x + 8x + 4 - 1$

$C = -7x^2 + 20x + 3.$

100 1 $A = (a - 4)^2 - (a - 8)(a - 2)$
 $A = a^2 - 8a + 16 - (a^2 - 2a - 8a + 16)$
 $A = a^2 - 8a + 16 - a^2 + 2a + 8a - 16$
 $A = a^2 - a^2 - 8a + 2a + 8a + 16 - 16$
 $A = 2a.$

2 Pour $a = 1\,000$, $A = 996^2 - 992 \times 998$.

Ainsi : $996^2 - 992 \times 998 = 2 \times 1\,000 = 2\,000$.

101 1 $A = 8x + 4x^2 = 4x \times 2 + 4x \times x = 4x(2 + x)$.
 $B = (x + 3)^2 + 4x(x + 3) = (x + 3)[(x + 3) + 4x] = (x + 3)(5x + 3)$.
 $C = (3x + 5)(x + 2) - (3x + 5)(3x - 7)$
 $C = (3x + 5)[(x + 2) - (3x - 7)]$
 $C = (3x + 5)(x + 2 - 3x + 7)$
 $C = (3x + 5)(-2x + 9).$

2 $D = 49 - 100x^2 = (7 + 10x)(7 - 10x)$

$E = (25x^2 + 4 + 20x) = (5x + 2)^2$

$F = (4x - 1)^2 - 9x^2$

$F = (4x - 1 + 3x)(4x - 1 - 3x)$

$F = (7x - 1)(x - 1)$

$G = \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2$

3 $H = 4x^2 - 4x + 1 + (x + 5)(2x - 1)$

$H = (2x - 1)^2 + (x + 5)(2x - 1)$

$H = (2x - 1)[(2x - 1) + (x + 5)]$

$H = (2x - 1)(3x + 4)$

$I = (3x - 2)(4x + 3) - (9x^2 - 4)$

$I = (3x - 2)(4x + 3) - (3x + 2)(3x - 2)$

$I = (3x - 2)[(4x + 3) - (3x + 2)]$

$I = (3x - 2)(4x + 3 - 3x - 2)$

$I = (3x - 2)(x + 1)$

102 a. $5x^2 + 2x = 0$ soit $x(5x + 2) = 0$.

On reconnaît une équation produit nul. Or, dire qu'un produit est nul équivaut à dire que l'un de ses facteurs est nul.

$x(5x + 2) = 0$ équivaut donc à :

$x = 0$ ou $5x + 2 = 0$

$5x = -2$

$x = -\frac{2}{5}$

L'équation admet deux solutions : 0 et $-\frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} \text{b. } 2x+3+(x-2)(2x+3) &= 0 \\ (2x+3)[1+(x-2)] &= 0 \\ (2x+3)(x-1) &= 0 \\ 2x+3=0 &\quad \text{ou} \quad x-1=0 \\ 2x=-3 &\quad | \quad x=1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions : $-\frac{3}{2}$ et 1.

$$\begin{aligned} \text{c. } 9x^2-4 &= 0 \\ (3x+2)(3x-2) &= 0 \\ 3x+2=0 &\quad \text{ou} \quad 3x-2=0 \\ 3x=-2 &\quad | \quad 3x=2 \\ x=-\frac{2}{3} &\quad | \quad x=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions : $-\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{d. } x^2-(1+3x)^2 &= 0 \\ [x+(1+3x)][x-(1+3x)] &= 0 \\ (x+1+3x)(x-1-3x) &= 0 \\ (4x+1)(-2x-1) &= 0 \\ 4x+1=0 &\quad \text{ou} \quad -2x-1=0 \\ 4x=-1 &\quad | \quad -2x=1 \\ x=-\frac{1}{4} &\quad | \quad x=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions : $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{2}$.

103 a. $R = (2x+5)^2 - 16$.
b. Factorisons R : $R = (2x+5-4)(2x+5+4)$
Ainsi : $R = (2x+1)(2x+9)$.
c. $R = 0$ équivaut à $(2x+1)(2x+9) = 0$.
On reconnaît une équation produit nul. Or, dire qu'une produit est nul équivaut à dire que l'un de ses facteurs est nul.
 $(2x+1)(2x+9) = 0$
 $2x+1=0$ ou $2x+9=0$
 $2x=-1$ | $2x=-9$
 $x=-\frac{1}{2}$ | $x=-\frac{9}{2}$

R est nul si l'on choisit comme nombre de départ $-\frac{1}{2}$ ou $-\frac{9}{2}$.

Chapitre 6

33 **QCM**
1 B. **2** C. **3** A. **4** B. **5** C.

Je rédige

34 **1** 1 mile = 1,609 km, donc 60 miles = $60 \times 1,609 = 96,54$ km.
Donc une vitesse de 60 miles $\cdot h^{-1}$ est environ égale à 96,5 km $\cdot h^{-1}$.

2 On a 1 km = $\frac{1}{1,609}$ mile, donc 45 km = $45 \times \frac{1}{1,609}$ miles.
Donc une vitesse de 45 km $\cdot h^{-1}$ est environ égale à 28 miles $\cdot h^{-1}$.

3 On a 2 miles = 3,218 km et 1 min = $\frac{1}{60}$ h, donc :
 $v = \frac{3,218}{\frac{1}{60}} = 193,08$.

Donc la vitesse d'une balle de service est environ égale à 193 km $\cdot h^{-1}$.

4 $\frac{300\,000 \text{ km}}{1 \text{ s}} = \frac{\frac{300\,000}{1,609} \text{ miles}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = \frac{300\,000}{1,609} \times 3600 \text{ miles} \cdot h^{-1}$.

Donc la vitesse de la lumière est environ égale à 671 224 363 miles $\cdot h^{-1}$.

35 **1** a. L'activité est égale à 78×182 , soit 14 196 tonnes $\times$ km.
b. Sachant que 1 tonne = 1 000 kg = 10^3 kg, cette activité est aussi égale à $14\,196 \times 1\,000$ ou $1,4196 \times 10^7$ kg $\times$ km.
On a 1 km = 1 000 m = 10^3 m, donc cette activité est égale à $1,4196 \times 10^7 \times 10^3 = 1,4196 \times 10^{10}$ kg $\times$ m.
2 $2,109 \times 10^6$ tonnes $\times$ m = $2,109 \times 10^6$ tonnes $\times \frac{1}{1000}$ km
= $2,109 \times 10^3$ tonnes $\times$ km.

36 **1** La distance moyenne parcourue par les usagers est égale au quotient de l'activité par le nombre de voyageurs (égal au nombre de tickets compostés),

soit : $\frac{153 \times 10^6}{43,7 \times 10^6}$, soit environ 3,5 km.

2 L'activité de la ligne B est : $35,2 \times 10^6 \times 4,2$, c'est-à-dire $147,5 \times 10^6$ ou 147,5 millions de voyageur $\times$ kilomètre. Donc la ligne A a eu une activité plus importante cette année là.

37 **1** La masse volumique est donnée par la formule : $\rho = \frac{m}{V}$.

Le volume du dé est égal à 1 cm³ donc la masse volumique de l'aluminium est : $\rho = \frac{2,7}{1} = 2,7$ g/cm³.

Puis : $\frac{2,7 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3} = \frac{2,7 \times 10^6 \text{ g}}{1 \times 10^6 \text{ cm}^3} = \frac{2\,700 \times 10^3 \text{ g}}{1 \text{ m}^3} = \frac{2\,700 \text{ kg}}{1 \text{ m}^3}$, donc la masse volumique de l'aluminium est égale à 2 700 kg/m³.

2 $\rho = \frac{m}{V}$, donc $m = \rho \times V$. La masse volumique est donnée en kg/m³, donc on exprime le volume en m³. Le plateau a la forme d'un pavé droit, donc son volume est le produit des trois dimensions :
 $V = 1,8 \text{ m} \times 0,85 \text{ m} \times 0,04 \text{ m} = 0,0612 \text{ m}^3$.
D'où $m = 2700 \times 0,0612 = 165,24$.
La masse du plateau de table est environ 165 kg.

Chapitre 7

34 **QCM**
1 B. **2** C. **3** A. **4** B. **5** C.

Je rédige

35 **1**

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	4	5
f(x)	-20	-4	1	4	5	4	1	-11	-20

2 $f(-4) = 5 - (-4)^2 = 5 - 16$ donc $f(-4) = -11$.

$f(3) = 5 - 3^2 = 5 - 9$ donc $f(3) = -4$.

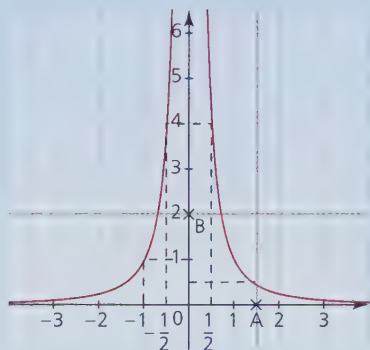
$f\left(\frac{8}{3}\right) = 5 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 5 - \frac{64}{9}$ donc $f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{19}{9}$.

3 $f(-6) = 5 - (-6) = 5 - 36 = -31$ donc -6 est un antécédent de 31.

4 On résout l'équation : $5 - x^2 = 1$, soit $x^2 - 4 = 0$ ou encore $(x+2)(x-2) = 0$.

Dire qu'un produit de facteurs est nul revient à dire que l'un au moins des facteurs est nul ; donc : $x+2 = 0$ ou $x-2 = 0$, soit $x = -2$ ou $x = 2$.

Le nombre 1 admet donc deux antécédents : -2 et 2.



1 a. Cette droite rencontre la courbe représentant f en un, et un seul, point.

b. L'image de 1,5 s'obtient graphiquement en traçant la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point A.

Cette droite rencontre la courbe en un point (qui est unique).

D'après la question 1 a., le nombre 1,5 admet donc une image par f .

2 a. Cette droite rencontre la courbe représentant f en deux points.

b. Les antécédents de 2 s'obtiennent graphiquement en traçant la parallèle à l'axe des abscisses passant par 2 : cette droite rencontre la courbe en deux points distincts.

D'après la question 2 a., le nombre 2 admet deux antécédents par f .

3 Par lecture graphique : $f(-1) = 1$.

Les antécédents de 4 sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Chapitre 8

51 QCM

- 1 B. 2 A. 3 A. 4 B. 5 C.
6 B. 7 B. 8 B. 9 B.

Je rédige

52 1 $g(0) = 2,5 \times 0 - 4 = -4$.

$$g(-2) = 2,5 \times (-2) - 4 = -5 - 4 = -9.$$

$$g(5) = 2,5 \times 5 - 4 = 12,5 - 4 = 8,5.$$

2 On cherche x tel que $g(x) = 0$ soit $2,5x - 4 = 0$ d'où $2,5x = 4$ et $x = \frac{4}{2,5} = \frac{8}{5} = 1,6$.

L'antécédent de 0 par g est 1,6.

On cherche x tel que $g(x) = 1$ soit $2,5x - 4 = 1$ d'où $2,5x = 5$ et $x = \frac{5}{2,5} = 2$.

L'antécédent de 1 par g est 2.

On cherche x tel que $g(x) = 10$ soit $2,5x - 4 = 10$ d'où $2,5x = 14$ et $x = \frac{14}{2,5} = \frac{28}{5} = 5,6$.

L'antécédent de -10 par g est 2,4.

53 f est une fonction affine donc $f(x) = ax + b$.

$$a = \frac{f(6) - f(-1)}{6 - (-1)} = \frac{-2 - 1}{6 + 1} = -\frac{3}{7} \text{ et } f(-1) = -\frac{3}{7}(-1) + b = 1 \text{ donc}$$

$$b = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

$$\text{Donc } f(x) = -\frac{3}{7}x + \frac{4}{7}.$$

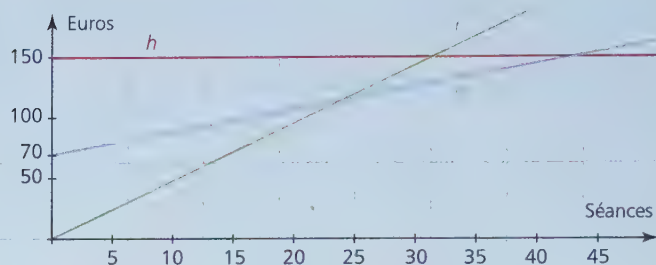
54 1 Tarif A : 5 € par séance donc $f(x) = 5x$.

Tarif B : 2 € par séance et abonnement de 70 € donc $g(x) = 2x + 70$.

Tarif C : 150 € donc $h(x) = 150$.

2 La fonction f est une fonction linéaire telle que $f(10) = 5 \times 10$, elle est représentée par la droite passant par les points O et A(10 ; 50). La fonction g est une fonction affine telle que $g(0) = 70$ et $g(10) = 70 + 2 \times 10 = 90$, elle est représentée par la droite passant par les points B(0 ; 70) et C(10 ; 90).

La fonction h est la fonction constante égale à 150, elle est représentée par la droite parallèle à l'axe des abscisses du repère passant par le point E(0 ; 150).



3 a. D'après le graphique, pour $x \geq 24$ la droite représentant la fonction g est en dessous de la droite représentant la fonction f , donc pour $x \geq 24$ le tarif B est plus intéressant que le tarif A.

b. D'après le graphique, pour $x \geq 40$, la droite représentant la fonction h est en dessous de la droite représentant la fonction g , donc pour $x \geq 40$ le tarif C est plus intéressant que le tarif B.

4 • $g(x) \leq f(x)$ équivaut à $2x + 70 \leq 5x$ d'où $70 \leq 3x$ donc $x \geq \frac{70}{3} \approx 23,3$.

Le plus petit entier naturel supérieur à $\frac{70}{3}$ est 24, donc si l'on va à au moins 24 séances, le tarif B est plus avantageux que le tarif A.

• $h(x) \leq g(x)$ équivaut à $150 \leq 2x + 70$ d'où $150 - 70 \leq 2x$ donc $x \geq \frac{80}{2} = 40$.

Donc si l'on va à au moins 40 séances, le tarif C est le plus intéressant.

Chapitre 9

36 QCM

- 1 C. 2 B. 3 B. 4 A. 5 C.
6 A. 7 C. 8 B. 9 B. 10 C.

Je rédige

37 1

Classe d'âge	Effectif	Fréquence en pourcentage
[15 ; 25[	118	30,4
[25 ; 35[	69	17,8
[35 ; 45[	97	25
[45 ; 55[	59	15,2
[55 ; 65[	45	11,6
Total	388	100

La fréquence d'une classe est le quotient de l'effectif de cette classe par l'effectif total.

La fréquence de la classe [15 ; 25[est donc : $\frac{118}{388} \approx 0,304$, soit 30,4 %.

Effectif de la classe [55 ; 65[: $388 \times \frac{11,6}{100} = 388 \times 0,116 = 45,008$ soit environ 45.

2 Une valeur approchée de la moyenne est une moyenne pondérée par les effectifs des centres des classes :

$$m = \frac{118 \times 20 + 69 \times 30 + 97 \times 40 + 59 \times 50 + 45 \times 60}{388}$$

$m \approx 35,98$ donc l'âge moyen des spectateurs est environ 36 ans.

3 L'âge médian est la valeur de la série ordonnée de rang $\frac{388}{2} = 194$.

L'effectif cumulé croissant de la classe $[25 ; 35[$ est $118 + 69 = 187$, donc l'âge médian se trouve dans la classe $[35 ; 45[$.

4 La probabilité de croiser un spectateur de moins de 25 ans correspond à la fréquence de la classe $[15 ; 25[$, donc la probabilité est 0,304. La probabilité de croiser un spectateur qui a plus de 45 ans est égale à la somme des fréquences des classes $[45 ; 55[$ et $[55 ; 65[$, soit $0,152 + 0,116$. Donc la probabilité cherchée est 0,268.

38 1 a. Il y a 12 numéros pairs compris entre les nombres 1 et 25.
b. On extrait la bille au hasard, donc toutes les billes ont la même chance d'être tirées. La probabilité d'un événement est alors égale au quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

La probabilité d'obtenir un numéro pair est $\frac{12}{25} = 0,48$.

2 a. Les diviseurs de 24 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 et 24.
Il y a 8 cas favorables pour l'événement « extraire une bille portant un diviseur de 24 », donc la probabilité de cet événement est $\frac{8}{25} = 0,32$.

b. L'événement « extraire une bille ne portant pas un diviseur de 24 » est l'événement contraire de l'événement précédent, donc sa probabilité est égale à $1 - 0,32$, soit 0,68.

Chapitre 10

41 QCM

1 A et B. 2 A. 3 B. 4 B, C et D.

Je rédige

42 Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
Donc d'après le théorème de Thalès, on en déduit que :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

Or $A \in [MC]$, donc $AC = CN - AN = 35 - 7 = 28$ cm.

On a alors : $\frac{7}{28} = \frac{5}{AB} = \frac{3}{BC}$. Donc $AB = \frac{5 \times 28}{7} = 20$ cm

On a aussi $A \in [BM]$, donc $BM = AB + AM = 20 + 5 = 25$ cm.

Donc : $BC = \frac{3 \times 28}{7} = 12$ cm.

43 a. Les points T, I et L sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points S, I et M.

$$\frac{SI}{IM} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{TI}{IL} = \frac{13}{19,5} = \frac{2}{3}$$

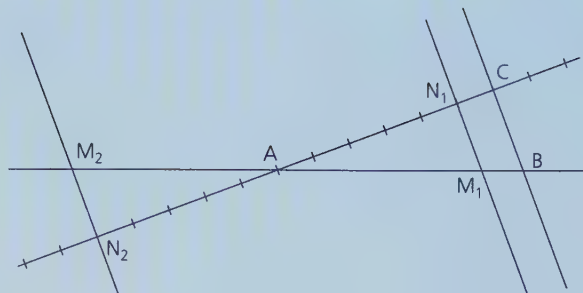
On constate que : $\frac{SI}{IM} = \frac{TI}{IL}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (TS) et (LM) sont parallèles.

b. Les points T, I et J sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points S, I et K.

$$\frac{TI}{IJ} = \frac{13}{3,75} \approx 3,4667 \quad \text{et} \quad \frac{SI}{IK} = \frac{10}{2,3} \approx 4,3478$$

On constate que : $\frac{TI}{IJ} \neq \frac{SI}{IK}$. Si les droites (TS) et (JK) étaient parallèles, les quotients seraient égaux d'après le théorème de Thalès. Donc les droites (TS) et (JK) ne sont pas parallèles.

44 Sur la droite graduée, C est un point d'abscisse 6, N_1 est un point d'abscisse 5 et N_2 est un point d'abscisse -5. Les droites (BC), (M_1N_1) et (M_2N_2) sont parallèles et (M_1N_1) coupe (AB) en M_1 , (M_2N_2) coupe (AB) en M_2 .



45 $AB'C'$ est un agrandissement du triangle ABC de facteur k .
Donc : $AB' = kAB$.

$$\text{On en déduit que : } k = \frac{AB'}{AB} = \frac{7,5}{7}$$

On a donc :

$$\mathcal{A}_{AB'C'} = k^2 \times \mathcal{A}_{ABC} = k^2 \times \frac{AB \times AC}{2} = \left(\frac{7,5}{7}\right)^2 \times \frac{7 \times 5}{2}$$

Soit : $\mathcal{A}_{AB'C'} \approx 20,09 \text{ cm}^2$.

Chapitre 11

50 QCM

1 C. 2 B. 3 A. 4 C. 5 C.
6 B. 7 C. 8 C. 9 B. 10 A.

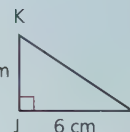
Je rédige

51 À l'échelle $\frac{1}{4}$:

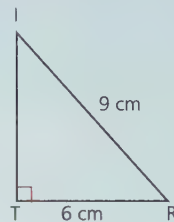
Le triangle IJK est rectangle en J, donc 4 cm

$$\tan \widehat{I} = \frac{JK}{JI}; \tan \widehat{I} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

On peut donc tracer un triangle IJK rectangle en J tel que $JK = 4$ cm et $JI = 6$ cm.



52 1 À l'échelle $\frac{1}{3}$:



2 Le triangle TRI est rectangle en T, donc $\sin \widehat{RIT} = \frac{TR}{RI}$.

$$\sin \widehat{RIT} = \frac{6}{9}, \text{ d'où } \widehat{RIT} \approx 41,8^\circ$$

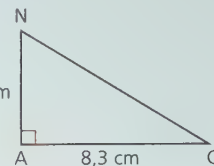
53 1 À l'échelle $\frac{3}{10}$:

Le triangle ANG est rectangle en A, 5 cm
donc :

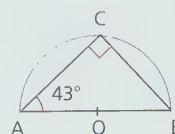
$$\tan \widehat{ANG} = \frac{AG}{AN} \quad \text{et} \quad \tan \widehat{AGN} = \frac{AN}{AG}$$

$$\tan \widehat{ANG} = \frac{8,3}{5} \text{ d'où } \widehat{ANG} \approx 58,9^\circ$$

$$\tan \widehat{AGN} = \frac{5}{8,3}, \text{ d'où } \widehat{AGN} \approx 31,1^\circ$$



54 1 À l'échelle $\frac{1}{3}$:



2 et 3 Le triangle ABC est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AB] ; le triangle ABC est donc rectangle en C.

Donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$; on en déduit : $AC = AB \cos \widehat{BAC}$.

Donc : $AC = 6 \times \cos 43^\circ \approx 4,4$ cm.

$\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$; on en déduit : $BC = AB \sin \widehat{BAC}$.

Donc : $AC = 6 \times \sin 43^\circ \approx 4,1$ cm.

55 1 On utilise la propriété : $\sin^2 \widehat{ABC} + \cos^2 \widehat{ABC} = 1$.

D'où : $\sin^2 \widehat{ABC} = 1 - \cos^2 \widehat{ABC} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$

d'où $\sin \widehat{ABC} = \frac{4}{5} = 0,8$.

$\tan \widehat{ABC} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\cos \widehat{ABC}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$.

56 $\tan \widehat{B} = \frac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

57 $(\sin \widehat{A} + \cos \widehat{A})^2 = \sin^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{A} + 2 \times \sin \widehat{A} \times \cos \widehat{A}$
d'où $(\sin \widehat{A} + \cos \widehat{A})^2 - 2 \sin \widehat{A} \times \cos \widehat{A} = \sin^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{A} = 1$.

Chapitre 12

34 QCM

- 1 A, C et D. 2 A et D. 3 A et C.
4 B, C et D. 5 A, B, C et D.

Je rédige

35 • Dans le cercle de centre O, l'angle inscrit $\widehat{DEC}$ et l'angle au centre $\widehat{DOC}$ interceptent le même arc $\widehat{DC}$; de plus, $\widehat{DEC} = 48^\circ$.

Or, si dans un cercle, un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre.

Donc : $\widehat{DEC} = \frac{1}{2} \widehat{DOC}$.

Soit : $\widehat{DOC} = 2\widehat{DEC} = 2 \times 48^\circ = 96^\circ$. L'angle $\widehat{DOC}$ mesure 96° .

• D et C étant deux points du cercle de centre O, le triangle DOC est isocèle en O.

Ainsi : $\widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \frac{180^\circ - 96^\circ}{2} = \frac{84^\circ}{2} = 42^\circ$. Les angles $\widehat{ODC}$ et $\widehat{OCD}$ mesurent chacun 42° .

36 • Dans le cercle $\mathcal{C}$, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc $\widehat{AC}$; de plus, $\widehat{ADC} = 40^\circ$.

Or, si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

Donc : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 40^\circ$. L'angle $\widehat{ABC}$ mesure 40° .

• On calcule la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ dans le triangle ABC :

$\widehat{BAC} = 180^\circ - (70^\circ + 40^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Ainsi : $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 70^\circ$.

On en déduit que le triangle ABC est isocèle en B.

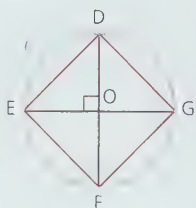
37 1 À l'échelle $\frac{1}{4}$:

2 On applique le théorème de Pythagore dans le triangle DOE isocèle et rectangle en O :

$DE^2 = DO^2 + OE^2 = 2^2 + 2^2 = 8$.

Ainsi : $DE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm

$DE \approx 2,8$ cm (arrondi au mm).



38 1 À l'échelle $\frac{1}{2}$:

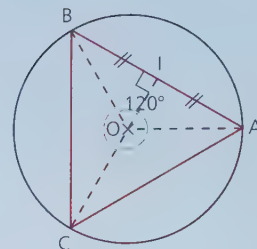
On construit le cercle de centre O et de rayon $OA = 3$ cm.

Comme $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$,

on place sur le cercle les points B et C

tels que : $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 120^\circ$.

On trace le triangle équilatéral ABC.



2 Dans le triangle OAB isocèle en O, la médiane (OI) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ et la hauteur issue de O.

Par conséquent, $\widehat{IOA} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = 60^\circ$ et dans le triangle IOA rectangle

en I on a : $\sin \widehat{IOA} = \frac{IA}{OA}$.

Ainsi : $IA = 3 \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

D'où : $AB = 2IA = 3\sqrt{3}$ cm.

39 • On construit un triangle équilatéral ABO, tel que $AB = 3$ cm.

• On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OA.

• On place sur le cercle $\mathcal{C}$ les points C, D, E et F tels que :

$AB = BC = CD = DE = EF$.

• On trace l'hexagone régulier ABCDEF.

Chapitre 13

30 QCM

- 1 C. 2 A, B, C. 3 A. 4 A.
5 B. 6 C. 7 C.

Je rédige

31 1 $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 3,6^2 = 51,84\pi$ cm².

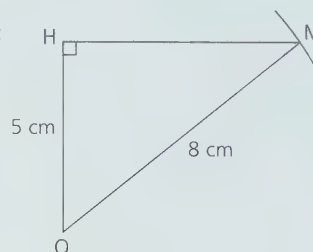
$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3,6^3 = 62,208\pi$ cm³.

2 $\mathcal{A} \approx 162,86$ cm² et $\mathcal{V} \approx 195,432$ cm³.

32 1 La section est un cercle.

2 Le triangle OHM est un triangle rectangle en H tel que :
 $OH = 5$ cm et $OM = 8$ cm.

À l'échelle $\frac{1}{2}$:



3 D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle OHM, rectangle en H, on a : $OM^2 = OH^2 + HM^2$,

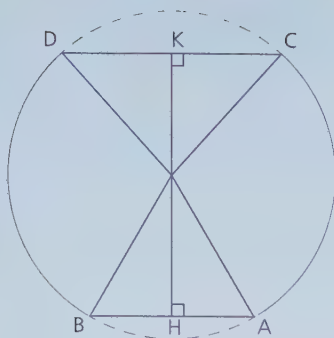
d'où : $HM^2 = OM^2 - OH^2 = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$.

On obtient ainsi : $HM = \sqrt{39}$ cm, soit $HM \approx 6,2$ cm.

33 Soit O le centre de la sphère, [AB] un diamètre de la base de la soupière et [CD] un diamètre de l'ouverture de la soupière. Soit H le milieu de [AB] et K le milieu de [CD].

On a ainsi : $AB = 12$ cm, $CD = 20$ cm, $AH = 6$ cm, $CK = 10$ cm, $OA = OB = OC = OD = 15$ cm.

Les triangles AOB et COD sont isocèles en O, donc H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB et K est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle COD.



1 • Calcul de OH :

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AOH, on a : $OA^2 = OH^2 + HA^2$, d'où : $OH^2 = OA^2 - HA^2 = 15^2 - 6^2 = 189$, d'où : $OH = \sqrt{189}$ cm, soit $OH \approx 13,7$ cm.

• Calcul de OK :

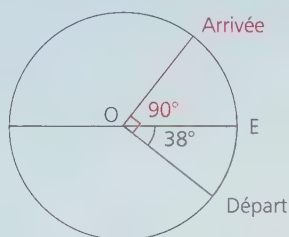
D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle COK, on a : $OC^2 = OK^2 + KC^2$, d'où : $OK^2 = OC^2 - KC^2 = 15^2 - 10^2 = 125$, d'où : $OK = \sqrt{125}$ cm, soit $OK \approx 11,2$ cm.

2 Calcul de la hauteur de la soupière : $HK = HO + PK$

$HK = \sqrt{189} + \sqrt{125}$, d'où : $HK \approx 24,9$ cm.

34 a. • On se déplace sur le même méridien, donc la longitude du point d'arrivée est la même que celle du point de départ, soit 64° Est.

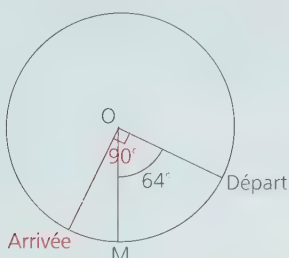
• La figure ci-dessous représente le plan du méridien de longitude 64° Est. E est le point d'intersection de l'équateur avec le méridien de longitude 64° Est. La latitude du point d'arrivée est donc égale à $(90 - 38)^\circ$ Nord, soit 52° Nord.



b. • On se déplace sur le même parallèle, donc la latitude du point d'arrivée est la même que celle du point de départ, soit 38° Sud.

• La figure ci-dessous représente le plan du parallèle de latitude 38° Sud. M est le point d'intersection du méridien de Greenwich et du parallèle 38° Sud.

La longitude du point d'arrivée est donc égale à $(90 - 64)^\circ$ Ouest, soit 26° Ouest.



35 1 La longitude de Pékin est 117° Est et sa latitude est 40° Nord. La longitude de Lisbonne est 9° Ouest et sa latitude est 40° Nord.

2 Pékin et Lisbonne sont situées sur un même parallèle car elles ont la même latitude.

3 $\widehat{GOE_P} = 117^\circ$; $\widehat{GOE_L} = 9^\circ$; $\widehat{E_POP} = 40^\circ$; $\widehat{E_LOL} = 40^\circ$;

$\widehat{PHL} = 117^\circ + 9^\circ = 126^\circ$.

Chapitre 14

30 QCM

- 1 A et B. 2 A. 3 A et C. 4 C. 5 A. 6 B.

Le rédige

31 1 Le plan de coupe est parallèle à l'arête [BC], donc la section EHNM du parallélépipède rectangle ABCDEFGH par le plan (EHN) est un rectangle.

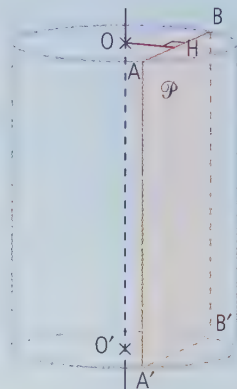
2 D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle EAM, rectangle en A, on a :

$EM^2 = EA^2 + AM^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, d'où : $EM = \sqrt{32}$ cm, soit $EM \approx 5,7$ cm.

3 Le rectangle EHNM est tel que :

$EH = MN = 5$ cm et $EM = HN = \sqrt{32}$ cm $\approx 5,7$ cm.

32 1



2 Soient O le centre d'une base du cylindre, [AB] l'intersection de cette base et du plan de coupe, H le milieu de [AB].

On a : $OA = OB = 3$ cm et $AB = 4$ cm, donc $AH = HB = 2$ cm.

Le triangle AOB est isocèle en O, donc le milieu H de [AB] est aussi le pied de la hauteur issue de O. D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle OHA, rectangle en H, on a : $OA^2 = OH^2 + HA^2$, d'où : $OH^2 = OA^2 - HA^2 = 3^2 - 2^2 = 5$.

$OH = \sqrt{5}$ cm, soit $OH \approx 2,2$ cm.

Le plan de coupe est situé à $\sqrt{5}$ cm de l'axe du cylindre, soit environ 2,2 cm.

33 1 Le plan de coupe est parallèle à la base, donc la section EFGH est une réduction de la base ABCD de coefficient k.

$$k = \frac{SH}{SD} = \frac{6 - 1,5}{6} = \frac{4,5}{6} = 0,75.$$

2 • $A_{ABCD} = AB \times BC = 4,5 \times 3 = 13,5$ cm².

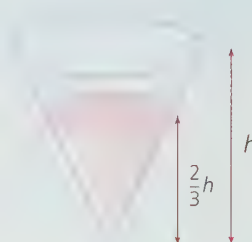
$$A_{EFGH} = k^2 \times A_{ABCD} = 0,75^2 \times 13,5 = 7,59375 \text{ cm}^2,$$

soit $A_{EFGH} \approx 7,6$ cm².

$$\bullet V_{SEFGH} = \frac{1}{3} A_{EFGH} \times SH = \frac{1}{3} \times 7,59375 \times 4,5 = 11,390625 \text{ cm}^3.$$

Soit $V_{SEFGH} \approx 11,4$ cm³.

34



Le plan de coupe est parallèle à la base, donc la section du cône est une réduction de la base du cône initial de facteur k égal à $\frac{2}{3}$.

Soit V' le volume du petit cône et V celui du grand cône. On a : $V' = k^3 V$.

$$\text{D'où : } V' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 64 = \frac{8}{27} \times 64 = \frac{512}{27} \text{ cm}^3, \text{ soit } V' \approx 19 \text{ cm}^3.$$

Géoplan

Les tableaux suivants explicitent les instructions contenant un ou plusieurs mots en vert, rencontrées dans le manuel, lors des différentes activités utilisant un logiciel de géométrie.

Les expressions en **rouge** sont à saisir au clavier.

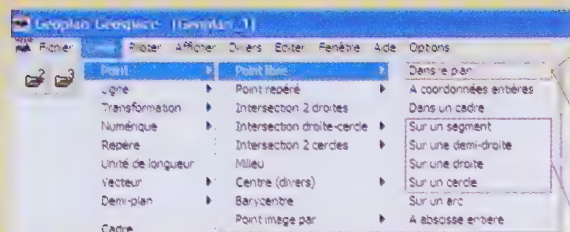
Les expressions en **bleu** sont à sélectionner à l'aide de la souris.

Avant de créer une droite, un triangle, un cercle, il faut commencer par créer des points.

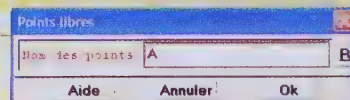
Lorsque l'on a complété une boîte de dialogue, on valide en cliquant sur **Ok**.

Mais avant de valider, il faut nommer les objets.

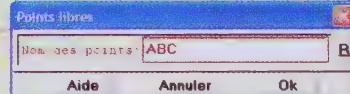
1 Créer des points



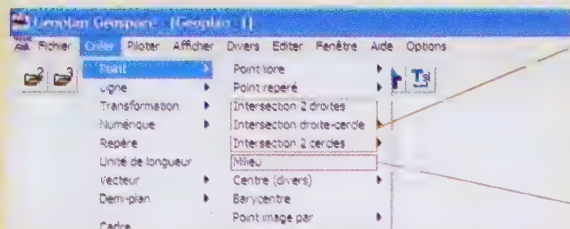
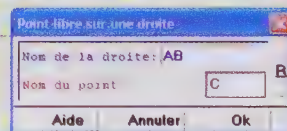
Un point **A**
Dans le plan



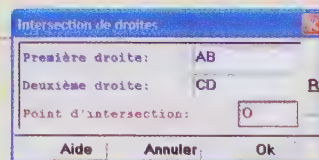
Trois points **A**, **B** et **C**
Dans le plan



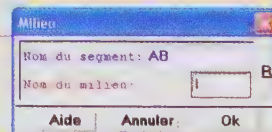
Un point **C** sur la droite (**AB**)
Sur une droite



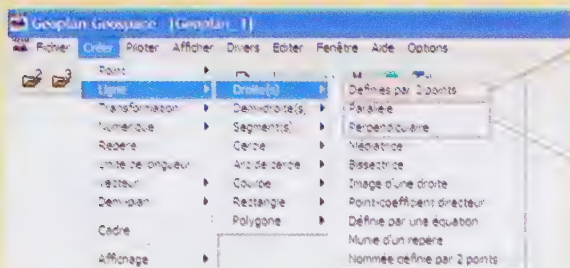
Le point **O**,
point d'intersection
des droites (**AB**) et (**CD**)
Intersection 2 droites



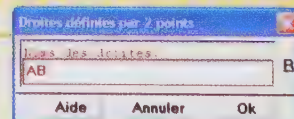
Le point **I**,
milieu du segment [**AB**]
Milieu



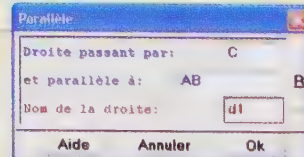
2 Créer des droites



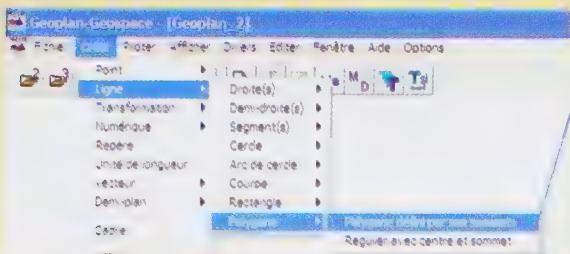
La droite (**AB**)
Définies par 2 points



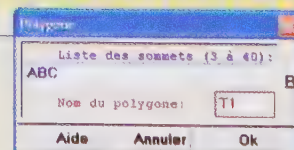
La parallèle à (**AB**)
passant par **C**, nommée **d1** (par exemple)
Parallèle



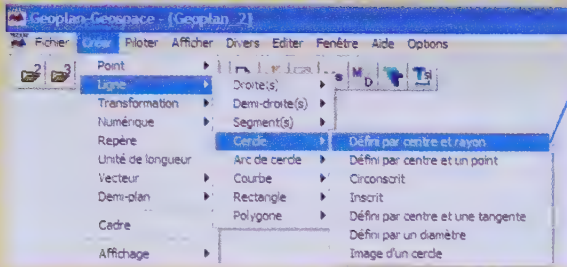
3 Créer des triangles



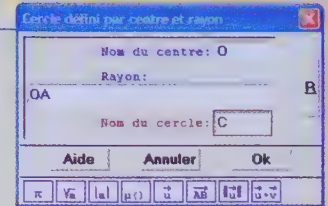
Un triangle **ABC**,
nommé **T1** (par exemple)
Polygone défini
par ses sommets



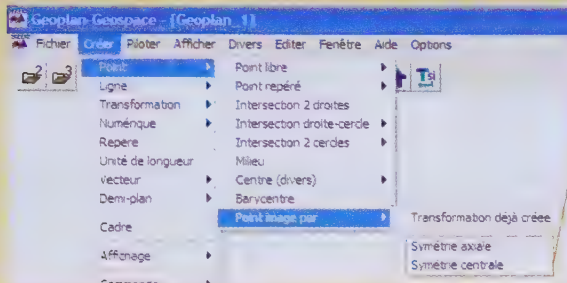
4 Créer des cercles



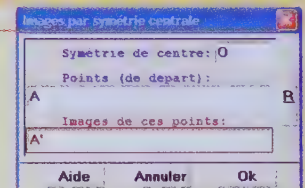
Un cercle de centre **O**
et de rayon **OA**,
nommé **C** (par exemple)
Défini par centre et rayon



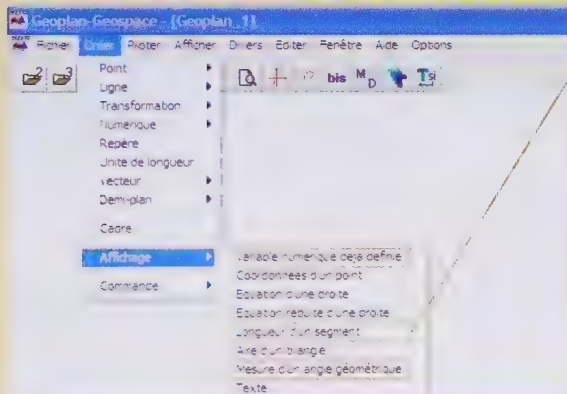
5 Créer un symétrique par une symétrie axiale ou par une symétrie centrale



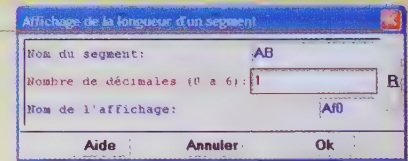
A' symétrique de **A**
par rapport à **O**
Symétrie centrale



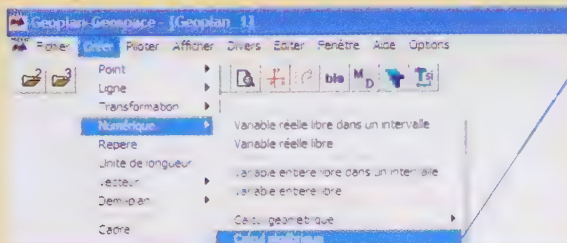
6 Afficher une mesure ou un calcul



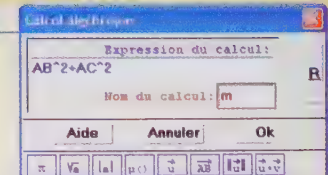
Afficher la **longueur**
du segment **[AB]**, en précisant
le nombre de décimales **1**
Longueur d'un segment



7 Utiliser la calculatrice du logiciel

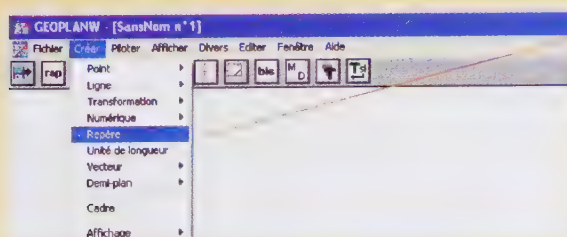


À l'aide de la **calculatrice**,
calculer la valeur de
 $AB^2 + AC^2$,
nommée **m** (par exemple)
Calcul algébrique

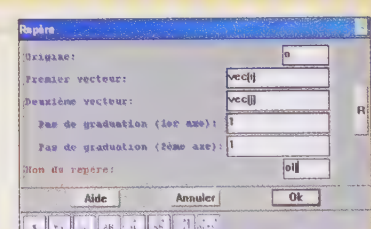


Pour l'affichage du résultat,
voir 6 avec choix « Variable
numérique déjà définie »

8 Créer un repère



Créer un **repère** (**O, I, J**)
d'origine **O** tel que
 $OI = OJ = 1$ (par exemple)



Cabri Géomètre II Plus

Les tableaux suivants explicitent les instructions contenant un ou plusieurs **mots en vert**, rencontrés dans le manuel, lors des différentes activités utilisant un logiciel de géométrie.

Les expressions **en bleu** sont à sélectionner à l'aide de la souris dans les menus.

Les expressions **en orange** sont les objets à sélectionner : positionner le curseur sur l'objet (le curseur prend une nouvelle forme et un texte apparaît) puis cliquer avec la souris.

Les expressions **en rouge** sont à saisir au clavier.

1 Créer des points

Point
Point sur un objet
Point(s) d'intersection

Un **point A**

Point

Déplacer le pointer  cliquer **A**

Pour nommer un point déjà créé :

 **nommer le point A**

 Un **point C** sur la droite (AB)

Point sur un objet

(AB)  « Sur cette droite » **C**

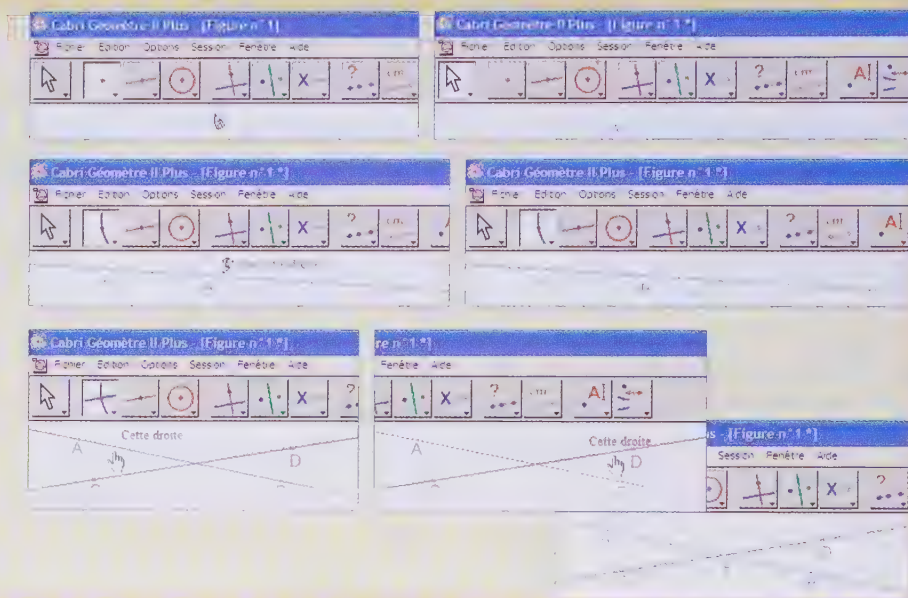
 Le point E, **point d'intersection** des droites (AB) et (CD)

Point(s) d'intersection

(AB)  « Cette droite »

(CD)  « Cette droite »

E



2 Créer des droites, des segments, des triangles ou des polygones

Droite
Segment
Demi-droite
Vecteur
Triangle
Polygone
Polygone régulier

La **droite** (AB)

Droite

A  « Par ce point »

B  « et ce point »

Un **triangle** ABC

Triangle

Créer un **point A**. Créer un **point B**.

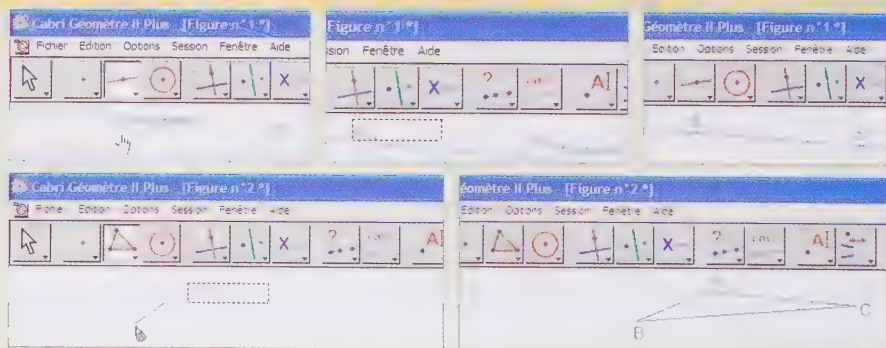
Créer un **point C**. (voir le )

Si les points A, B et C sont déjà créés :

Triangle

A  « Ce point comme sommet »

B  « et ce sommet » C  « et ce sommet »



3 Créer des cercles

Cercle
Arc
Conique

Un **cercle** de centre O et de rayon OA

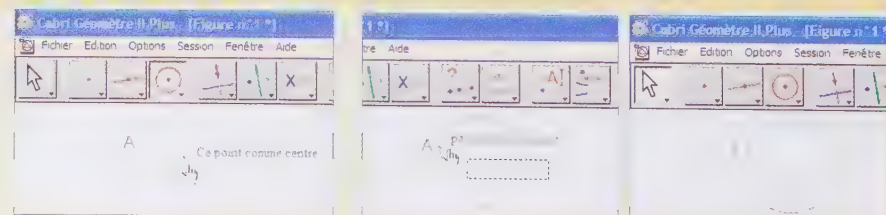
Cercle

O  « Ce point comme centre »

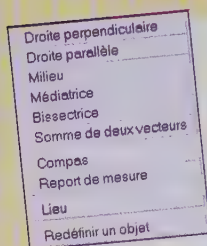
A  « passant par ce point »

Si les points O et A ne sont pas créés :

Cercle, créer un **point O**, puis créer un **point A**



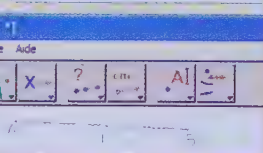
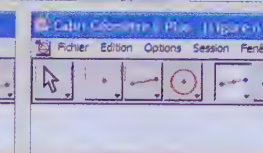
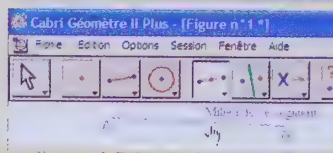
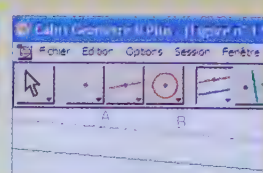
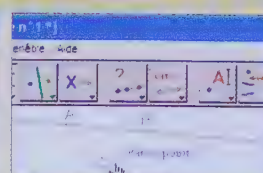
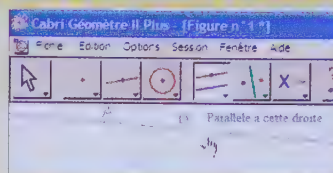
4 Créer des droites perpendiculaires, des droites parallèles, le milieu d'un segment, la bissectrice d'un angle



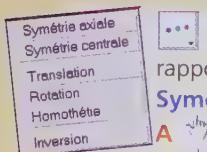
La **droite parallèle** à (AB) passant par C
Droite parallèle (AB) « Parallèle à cette droite »
 C « Par ce point »
 Le **milieu** I de [AB]

Milieu

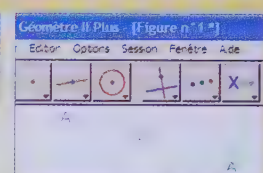
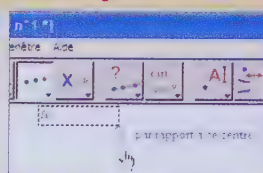
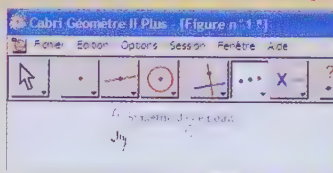
[AB] « Milieu de ce segment » I



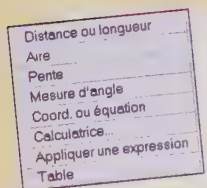
5 Créer un symétrique par une symétrie axiale ou par une symétrie centrale



Le **symétrique** A' de A par rapport à O
Symétrie centrale
 A « Symétrie de ce point »
 O « par rapport à ce centre »
 A'



6 Afficher la longueur d'un segment, la mesure d'un angle, l'aire d'un polygone ou d'un disque, utiliser la calculatrice du logiciel



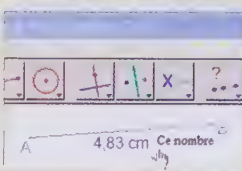
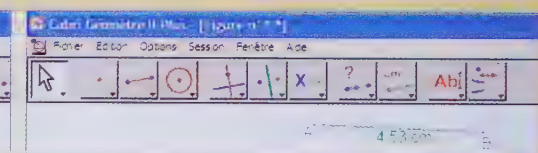
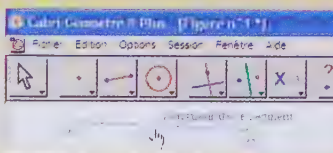
Afficher la **longueur** du segment [AB]
Distance ou longueur
 [AB] « Longueur de ce segment »

À l'aide de la **calculatrice** du logiciel, calculer AB^2
 Afficher la **longueur** du segment [AB]

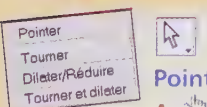
Calculatrice

[AB] « Ce nombre » $\wedge 2$

Placer le résultat



7 Déplacer un point

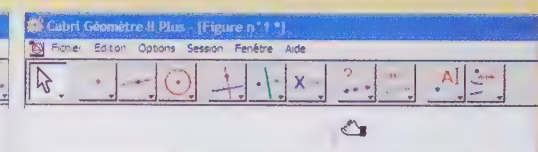
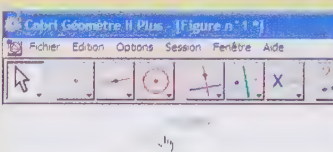


Déplacer le point A
Pointer
 A « Ce point »

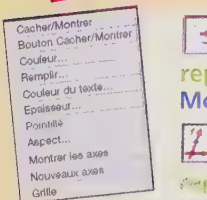
L'objet clignote

Le déplacer à l'aide de la souris (clic gauche enfoncé)

en maintenant le clic gauche enfoncé



8 Créer un repère

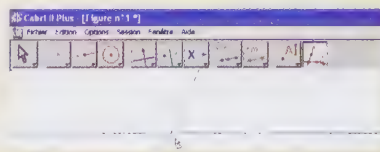
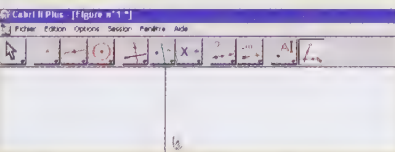
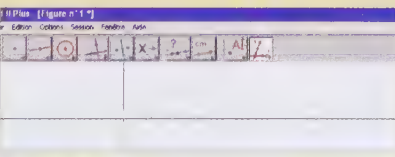


Montrer les axes d'un **repère** orthogonal
Montrer les axes

Construire deux axes d'un **repère**

Nouveaux axes

Cliquez à l'endroit où doit être placée l'origine puis orienter l'axe comme souhaité, cliquer puis orienter le second axe.



Ils utilisent les maths au quotidien

Les mathématiques ne doivent pas effrayer et conduire à rejeter certains métiers. Dès lors qu'on en perçoit l'utilité au quotidien, ces craintes s'estompent et l'on apprécie leur aide pour résoudre des problèmes concrets.

SANTÉ

Profession économétricien

● **Pour être économétricien**, mieux vaut aimer l'économie et les mathématiques appliquées. L'économétrie consiste en effet à appliquer des techniques statistiques à l'analyse de phénomènes économiques. Cette discipline s'applique à différents secteurs.

● **Dans le domaine de la santé**, elle est sollicitée sur le volet économique du développement de médicaments. Exemple: un laboratoire pharmaceutique vient de mettre au point une nouvelle molécule et l'avant-dernière phase d'essai s'achève. À quel prix commercialiser ce futur médicament ?

Un grand nombre de paramètres interviennent: son efficacité, ses effets secondaires, la population concernée, l'existence ou pas de médicaments concurrents... Sur la base de ces données, l'économétricien doit produire les arguments quantitatifs qui permettront au laboratoire de négocier avec les autorités de santé le prix de vente et le taux de remboursement par la Sécurité sociale.

● **L'économétricien joue donc un rôle clé**. Mais, chacun l'aura compris, il est souhaitable qu'il se passionne aussi pour le secteur de la santé.



Quelques formations

- Master d'ingénierie statistique appliqué à la santé
- École nationale de statistique et d'analyse de l'information (ENSAI)
- Institut de statistique de l'université de Paris (ISUP)

Où travaillent les économétriciens ?

- Dans tous les domaines nécessitant des analyses économiques quantitatives: évaluation et prévision de phénomènes économiques, depuis l'échelle de l'entreprise à celle d'une nation, d'un continent ou de la planète.

FINANCE

Profession expert-comptable

● L'expert-comptable a la réputation de vivre dans un monde de chiffres, ce n'est pas faux. Mais **sa mission est beaucoup plus multiforme** qu'on ne l'imagine. En outre, ce métier peut s'exercer de différentes manières: soit en libéral, soit dans un cabinet, soit en entreprise. Quand on le choisit, on fait donc aussi un choix de vie, plus ou moins indépendante.

● **Quel rôle joue l'expert-comptable ?** Il contrôle les comptes, bien sûr, mais doit s'adapter à chaque situation. La gestion comptable d'une entreprise artisanale diffère de celle d'un grand groupe industriel, celle d'une association de celle d'une collectivité locale... Si dans chaque cas il examine les comptes annuels et établit les bilans, l'étendue de ses responsabilités est variable. Par exemple dans le secteur associatif ou au sein des collectivités locales, il pourra aussi avoir un rôle de conseil en gestion, en organisation, voire en stratégie. Dans les grandes entreprises, il est généralement l'un de leurs cadres à part entière.

● **Autre avantage et pas des moindres**: les experts-comptables sont très recherchés car on en manque.



Quelques formations en comptabilité

- Diplôme de comptabilité et de gestion (DCG)
- Diplôme supérieur de comptabilité et gestion (DSCG)
- Diplôme d'expert-comptable (DEC)
- BTS

Où travaillent les experts comptables ?

- Dans les grandes entreprises, les organismes publics, les collectivités territoriales ou bien, dans un cadre libéral, pour tout type de société industrielle, artisanale ou commerciale, d'association...



AGROALIMENTAIRE

Profession qualitecien

aliments en respectant les normes en vigueur et les procédures de la production, depuis la réception des matières premières jusqu'au stockage des produits finis. Sans un être un homme-orchestre, le qualitecien doit toutefois acquérir une maîtrise suffisante des techniques mises en œuvre au cours du processus de fabrication. Sinon, comment pourrait-il dialoguer avec les acteurs impliqués à chaque étape ?

● **Plus encore, ils savent manier les outils de contrôle de qualité et de gestion des stocks**, qui s'appuient sur des statistiques, des méthodes de résolution de problèmes, des techniques de mesure et de traitement de données. Son travail ne risque pas de sombrer dans la routine, c'est ce qui fait son charme.

● **Qu'ils soient techniciens ou ingénieurs**, les qualiteciens ont du pain sur la planche. Ces messieurs « zéro défaut » suivent à la loupe les étapes de la production, chassant le moindre défaut sans négliger les exigences actuelles en matière de diététique.

● **Leur mission** : définir les critères de qualité des

Quelques formations

- Pour être **technicien qualité** : BTS, BTSA ou DUT (bioanalyses, biotechnologies, industries agroalimentaires...)
- pour être **ingénieur qualité** : master pro ou diplôme d'école d'ingénieur (industrie agroalimentaire, sécurité alimentaire, sciences et techniques des aliments...)

Où travaillent les qualiteciens ?

- Dans toutes les entreprises où il s'agit d'assurer la qualité, depuis les processus de fabrication jusqu'aux relations avec la clientèle.

ASSURANCE

Profession actuair

● **Les risques, il connaît** : l'actuaire a pour fonction première de les prévoir et de les évaluer, qu'il s'agisse de risques humains ou de risques matériels. Il travaille en effet pour les compagnies d'assurances, de toutes natures et intervenant en maintes circonstances : accidents de la route, catastrophes naturelles, incendies, feux de forêts... Comment anticiper ? Autrement dit, quelle prime d'assurance demander à chaque assuré ?

● C'est en particulier ce difficile problème que l'actuaire est chargé de résoudre. Il faut que les primes soient acceptables par le client, afin que celui-ci ne soit pas tenté d'aller chez un concurrent. Il faut aussi que les compagnies d'assurance, souvent privées, fassent des profits. Autant dire que **l'actuaire est un grand utilisateur de l'informatique** et qu'il met en œuvre tout un arsenal de **techniques statistiques et probabilistes**.

● Si son métier est à risque, ce n'est pas celui du chômage : **le marché de l'assurance ne cesse de se développer**. La profession s'est en outre organisée. Il existe un institut des actuaires qui regroupe l'ensemble des professionnels diplômés et qui se porte garant de l'éthique professionnelle.



Quelques formations

- Institut de science financière et d'assurances (ISFA) de l'université Claude-Bernard, Lyon 1
- Institut de statistique de l'université de Paris VI (ISUP)
- École nationale de la statistique et de l'administration économique (ENSAE)
- IRIAF de Poitiers
- EURIA de Brest...

Où travaillent les actuaires ?

- Partout où il y a des risques financiers : assurances, banques, organismes de retraite...

Faut-il des maths pour exercer...



... dans la santé ?

La santé, c'est une multitude de métiers : des médecins généralistes ou spécialistes aux infirmiers et infirmières, en passant par les aide-soignant(e)s...

- Les mathématiques sont évidemment loin d'être leur pain quotidien et les **qualités exigées sont d'un tout autre ordre** : savoir faire un diagnostic, soulager les malades, les rassurer, identifier les bons remèdes, sans compter les qualités humaines.

- **Des notions de mathématiques sont toutefois présentes** dans les formations, surtout dans celle des médecins. Pour ces derniers, il s'agit essentiellement de mathématiques appliquées (par exemple les statistiques), enseignées au cours des deux premières années. L'avantage de dispenser une culture générale, notamment mathématique, aux futurs soignants est de leur donner les moyens de

pouvoir s'adapter aux évolutions actuelles de la médecine, qui devient **de plus en plus scientifique** et qui s'appuie sur des techniques **de plus en plus sophistiquées**, comme l'imagerie médicale.

Quelques formations

- **Pour être infirmier(ère) :** instituts de formation en soins infirmiers (IFSI) pour la préparation du diplôme d'État (bac+3)

- **pour être médecin généraliste :**

université : neuf ans d'étude pour obtenir le diplôme d'État de docteur en médecine (bac+9)

... dans l'architecture et la construction ?

Le métier d'architecte est l'un de ceux qui font rêver. Construire des maisons, des écoles, des bâtiments industriels, des immeubles de bureaux... : à chaque fois il faut inventer tout en **conciliant esthétique et respect des contraintes** imposées par l'usage prévu des locaux.

- L'architecte utilise donc nécessairement des connaissances de **géométrie dans l'espace**, pour concevoir les formes, mais il doit être aussi en mesure de **calculer** toutes sortes de contraintes : contraintes d'exécution et de coût, contraintes techniques, etc.

- Il travaille avec d'autres professionnels de la construction. Notamment le **charpentier**, spécialisé dans la réalisation des toitures, doit lui être capable de dessiner chaque projet avant toute mise en chantier. Au-delà des toitures, le charpentier conçoit des hangars ou des granges en bois, des chalets..., il restaure même des maisons anciennes. Ce n'est pas un matheux bien sûr, mais il doit maîtriser un minimum de **notions de géométrie et de calcul**, ne serait-ce que pour évaluer la robustesse de ses projets.



Quelques formations

- **Pour être charpentier :** CAP et BEP (deux ans d'étude après la 3^e), bac professionnel, BTS (bac+2)...

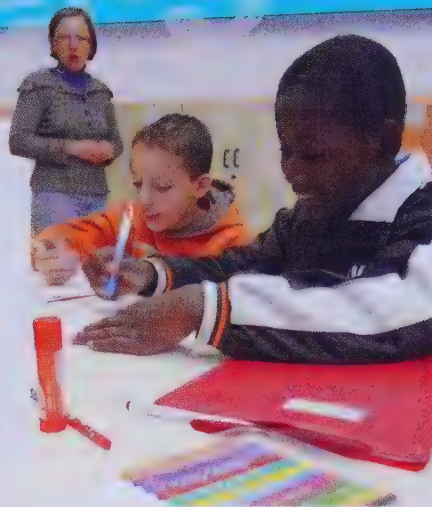
- **pour être architecte :** Diplôme d'État d'architecture (bac+5) préparé en écoles d'architecture.

... dans l'enseignement primaire ?

Les professeurs des écoles sont investis d'une très lourde responsabilité. Une responsabilité qui nécessite une vraie passion, plus sans doute que dans tout autre métier.

● C'est en effet à eux que revient **la mission d'initier** les petits, depuis la classe maternelle jusqu'à l'entrée en sixième, **à toutes les disciplines**, y compris aux mathématiques. Pour chaque âge, le professeur des écoles doit adapter ses méthodes, que ce soit pour le calcul ou l'orthographe. Alors bien sûr il faut connaître un peu de mathématiques, car si on n'a pas compris un minimum d'éléments en la matière, comment les enseigner ?

● Mais **la difficulté n'est pas tant dans la sophistication des maths à connaître que dans la pédagogie**, toute en finesse, qu'il faut mettre en œuvre. L'objectif est de faire en sorte que les petits comprennent en faisant attention de ne pas les rebuter à vie pour cette discipline. Pour obtenir le Certificat d'aptitude au professorat des écoles (CAPE), le candidat à ce métier a donc une épreuve de mathématiques. Mais avant de se lancer pour de bon, il aura fait des stages dans différentes écoles.



La formation

- Institut universitaire de formation des maîtres (IUFM) : deux ans après une licence (bac+3) pour obtenir le Certificat d'aptitude au professorat des écoles (CAPE)

Rencontre avec...

... Frédéric Durieu

« J'utilise les mathématiques pour créer de la poésie sur ordinateur », répond Frédéric Durieu quand on lui demande de décrire son métier.

Belge d'origine et aujourd'hui installé dans le sud de la France, il crée des œuvres animées interactives. Elles sont exposées dans le monde entier.

Comment un scientifique devient-il artiste ?

Il est vrai que j'ai plutôt une formation d'ingénieur. Si les mathématiques m'ont toujours intéressé, c'est surtout en tant qu'outil. Avec la physique, elles me permettent de comprendre les lois de la nature et le monde dans lequel je vis. Grâce aux formules mathématiques, je peux exprimer ma vision des choses en créant toutes sortes de formes étranges et extraordinaires. Je fais des programmes avant tout pour me faire plaisir, mais aussi pour faire plaisir aux autres.

Faut-il connaître beaucoup de mathématiques pour réussir une œuvre ?

Pas nécessairement. Les mathématiques que j'utilise le plus souvent sont celles qu'on apprend au lycée. Par contre, la logique pour résoudre les problèmes de logique que je me crée est celle d'un ingénieur. Puis, il y a ma part de création. Plutôt que d'éliminer les erreurs, je les cultive ! Là, c'est la démarche inverse de l'ingénieur. Personne ne voudrait qu'un pont soit construit avec des calculs « poétiques » !

Quel type d'œuvres réalisez-vous ?

Mon objectif est de créer mes propres jouets interactifs. Un exemple simple : mon « kaléidoscope interactif ». Sur l'écran, on voit une image multicolore, analogue à celle d'un kaléidoscope réel. Et sous l'effet de la voix d'un observateur, d'un air de musique, ou d'un mouvement de la souris, elle change de forme, à l'infini. C'est ce que l'on appelle parfois du net-art : toute personne reliée au réseau internet peut visualiser mes œuvres et interagir avec elles (voir : www.lecielestbleu.com).

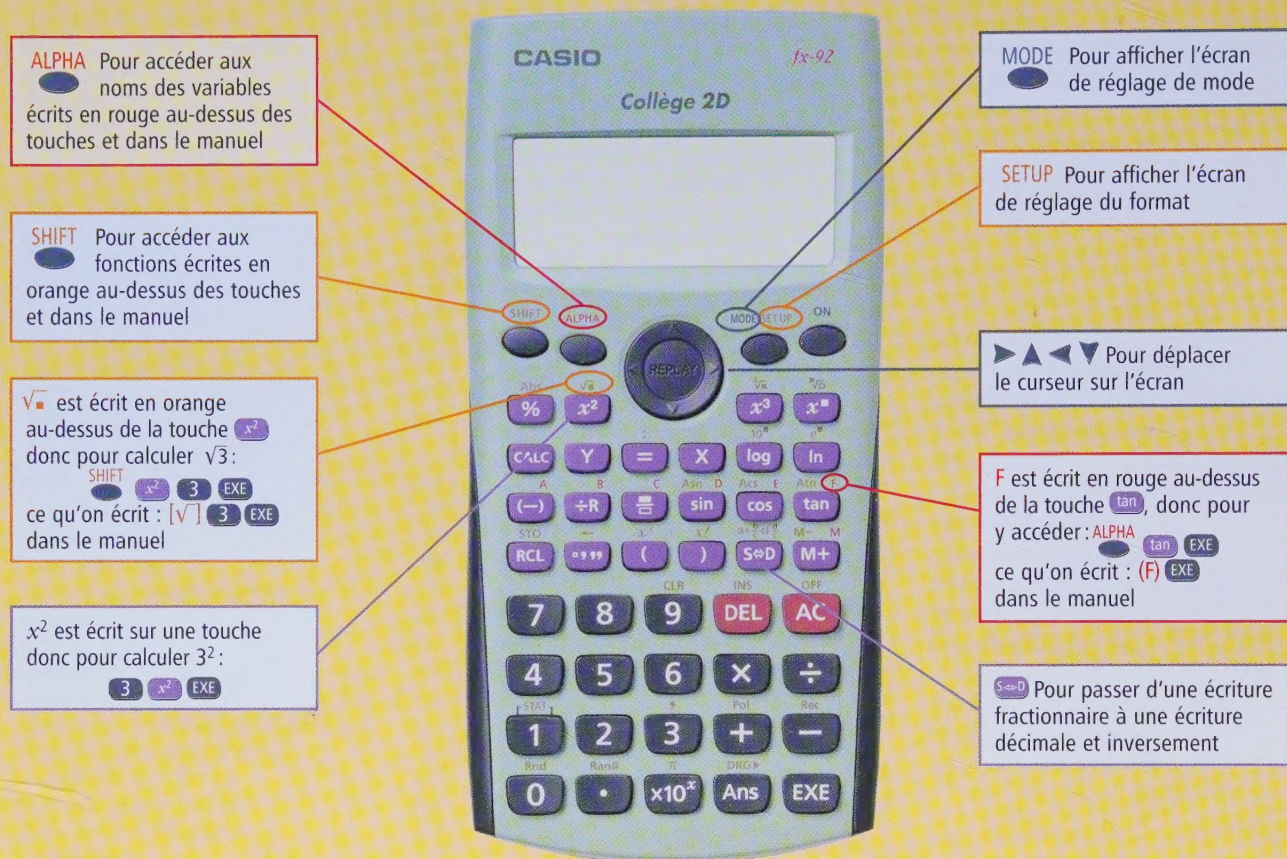


Index

A		
Accroissement	140	
Adjacent (côté)	202	
Agrandissement de figures	185, 257	
Aire (agrandissement, réduction)	185	
Aire (calculs)	188	
Aire d'une sphère	239	
Algorithme d'Euclide	15	
Algorithme des différences	15	
Angle aigu	202	
Angle au centre	222	
Angle inscrit	222	
Angle rentrant	222	
Angle saillant	222	
Antécédent d'un nombre	122	
Arbre de probabilité	170	
Arbre de probabilité pondéré	170	
Arc de cercle	222	
Augmentation en pourcentage	139	
B, C		
Boule	239	
Carré d'une différence	86	
Carré d'une somme	86	
Carré d'un nombre	68	
Centre d'un polygone régulier	223	
Cercle circonscrit	223	
Cercle et angle	222-223	
Changement d'unité	106	
Coefficient directeur	139	
Combinaison (méthode de résolution)	37	
Cône de révolution (section d'un)	257	
Coordonnées d'un point	122	
Coordonnées géographiques	237	
Cosinus d'un angle aigu	202	
Côté adjacent	202	
Côté opposé	202	
Couple de solutions	34	
Courbe représentative	122, 139	
Cylindre de révolution (section d'un)	256	
D		
Développement	70, 86	
Distance d'un point à un plan	239	
Distributivité	86	
Diviseur	13	
Diviseurs communs	13	
E		
Épreuves successives	162	
Équateur	237	
Équation à deux inconnues	34	
Équation du 1 ^{er} degré	32	
Équation produit nul	87	
Équation $x^2 = a$	68	
Équiprobabilité	166	
Étendue d'une série statistique	164	
Événement	165	
Événement contraire	165	
Événement élémentaire	165	
Événements incompatibles	165	
Éventualité	165	
Expérience aléatoire	165	
Exposant	54	
F		
Facteur commun	86	
Facteur d'agrandissement	185	
Facteur de réduction	185	
Factorisation	70, 86	
Fonction	122	
Fonction affine	140	
Fonction linéaire	139	
Formules trigonométriques	203	
Fraction irréductible	14	
Fréquence	165	
G		
Grand cercle	239	
Grandeur	105	
Grandeur composée	106	
Grandeur produit	106	
Grandeur quotient	106	
H		
Hexagone régulier	223	
Hypoténuse	202	
I		
Identités remarquables	86, 87	
Image d'un nombre	122	
Inconnue	32	
Inégalité	32	
Inéquations du 1 ^{er} degré	32	
Interprétation graphique		
d'un système d'équations	138	
Issue	165	
L		
Latitude	237	
Longitude	237	
M		
Médiane d'une série statistique	163	
Méridien	237	
Mesure	105	
Multiple	13	
N		
Nombres décimaux	12	
Nombres entiers	12	
Nombres entiers naturels	12	
Nombres entiers relatifs	12	
Nombres premiers	13	
Nombres premiers entre eux	14	
Nombres rationnels	12	
O		
Ordonnée à l'origine	140	
Opposé (côté)	202	
P		
Parallèle (terrestre)	237	
Parallélogramme rectangle (section d'un)	256	
PGCD (plus grand diviseur commun)	13	
Plan tangent à une sphère	239	
Points diamétralement opposés	239	
Polygone des effectifs cumulés	160	
Polygone régulier	223	
Pourcentage	139	
Probabilité	165	
Proportionnalité des accroissements	140	
Puissance	54	
Puissance d'un même exposant	54	
Puissance d'un même nombre	54	
Pyramide (section d'une)	257	
Q		
Quartile	163	
R		
Racine carrée	68	
Racine carrée d'un produit	69	
Racine carrée d'un quotient	69	
Racine carrée d'une somme	69	
Radical	68	
Réciproque du théorème de Thalès	184	
Réduction de figures	185, 257	
Réduction en pourcentage	139	
Règle du produit nul	87	
Relations trigonométriques	203	
Représentation graphique		
d'une fonction	122, 139-140	
Résolution d'un système d'équations	34	
Résolution d'une équation	32, 87	
Résolution d'une inéquation	33	
S		
Section planes de solides	239, 256-257	
Sinus d'un angle aigu	202	
Solution d'un système	34	
Solution d'une équation	32	
Solution d'une inéquation	33	
Sphère	239	
Sphère terrestre	237	
Sphère (section d'une)	239	
Statistiques	163	
Substitution (méthode de résolution)	36	
Système de deux équations	34	
T		
Tableau de valeurs d'une fonction	122	
Tangente d'un angle aigu	202	
Théorème de Thalès	184	
Triangle équilatéral	223	
Triangle rectangle	202	
U, V		
Unités	106	
Variable	122	
Volume (agrandissement, réduction)	257	
Volume d'une boule	239	



Mode d'emploi des calculatrices



[MODE] (choix du mode)

1 pour effectuer des calculs avec les nombres relatifs, les fractions, les puissances...

1:COMP 2:STAT
3:EQN 4:TABLE

2 pour effectuer le calcul d'une moyenne

[SETUP] (choix du format)

1 pour afficher les fractions telles qu'elles sont écrites

7 pour afficher la notation scientifique du résultat d'un calcul

1:MthIO 2:LineIO
3:Deg 4:Rad
5:Gra 6:Fix
7:Sci 8:Norm

3 pour des calculs d'angles en degré

8 puis 2 pour afficher le résultat d'un calcul sous la forme habituelle

[SETUP] ▼ (suite du choix du format)

3 pour utiliser le procédé de calcul de la moyenne pondérée

1:ab/c 2:d/c
3:STAT 4:CONT

2 pour choisir l'affichage des fractions

4 puis ◀ ou ▶ pour régler le contraste



2^{nde} Permet d'accéder aux fonctions écrites en orange au-dessus des touches et dans le manuel

F<=>D Permet de passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale et inversement

$\sqrt{}$ est écrit en orange au-dessus de la touche x^2 , donc pour calculer $\sqrt{3}$:
2^{nde} x^2 **3** **ENTRER**
 ce qu'on écrit : $\sqrt{3}$ **3** **ENTRER**
 dans le manuel

x^2 est écrit sur une touche, donc pour calculer 3^2 :
3 x^2 **ENTRER**

Pour sélectionner une fonction affichée à l'écran (**écrite en rouge dans le manuel**), déplacer le curseur jusqu'à ce qu'elle soit surlignée. Le symbole $\rightarrow$ indique qu'il y a d'autres éléments à droite ; pour y accéder : **▶**

◀ ▶ ◂ ◃ pour déplacer le curseur sur l'écran

[MODE] (choix du mode)

(SCI/ING) **ENTRER** pour régler le format d'affichage des nombres

(FIX) **ENTRER** pour régler le nombre de décimales du résultat, la valeur affichée étant éventuellement complétée par des zéros

SCI/ING FIX⁻

SCI/ING FIX⁻

FLO SCI/ING

F 123456789

(FLO) **ENTRER** pour afficher le résultat d'un calcul sous sa forme habituelle

(SCI) **ENTRER** pour afficher la notation scientifique du résultat d'un calcul

(F) **ENTRER** pour choisir la notation standard

[MODE] ▶ (suite du choix du mode)

(FracMod) **ENTRER** pour choisir le mode d'affichage des fractions

(DRG) **ENTRER** pour choisir l'unité d'angle

FracMod DRG

FracMod DRG

Manuel Auto

DEG RAD GRD

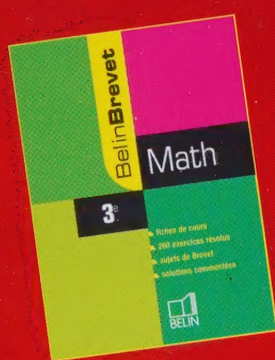
(Auto) **ENTRER** pour afficher les résultats sous la forme d'une fraction irréductible

(DEG) **ENTRER** pour des calculs d'angles en degré

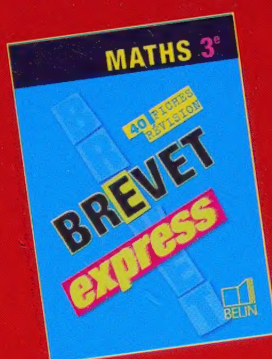
Le cahier d'exercices pour s'entraîner



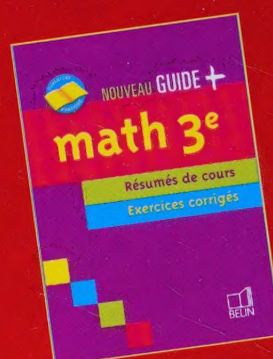
Pour s'entraîner...



Les méthodes
pour réussir le Brevet



L'essentiel
pour le Brevet



Un accompagnement
pour un travail autonome

nouveau

Tous les compléments pédagogiques
de la méthode sur www.editions-belin.com/math3



**Les Éditions Belin s'engagent, avec leurs partenaires,
pour l'environnement et le développement durable.**

Elles garantissent :

- l'utilisation de papier recyclé ou de pâte à papier issue de forêts gérées de façon durable ;
- un processus de blanchiment du papier sans chlore ;
- des imprimeurs respectant l'environnement (label Imprim'Vert ou norme ISO 14001).

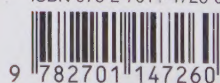


Éditeur
indépendant
depuis 1777

www.editions-belin.com



ISBN 978-2-7011-4726-0



9 782701 147260

Code **004726**

