

Maths 4^e

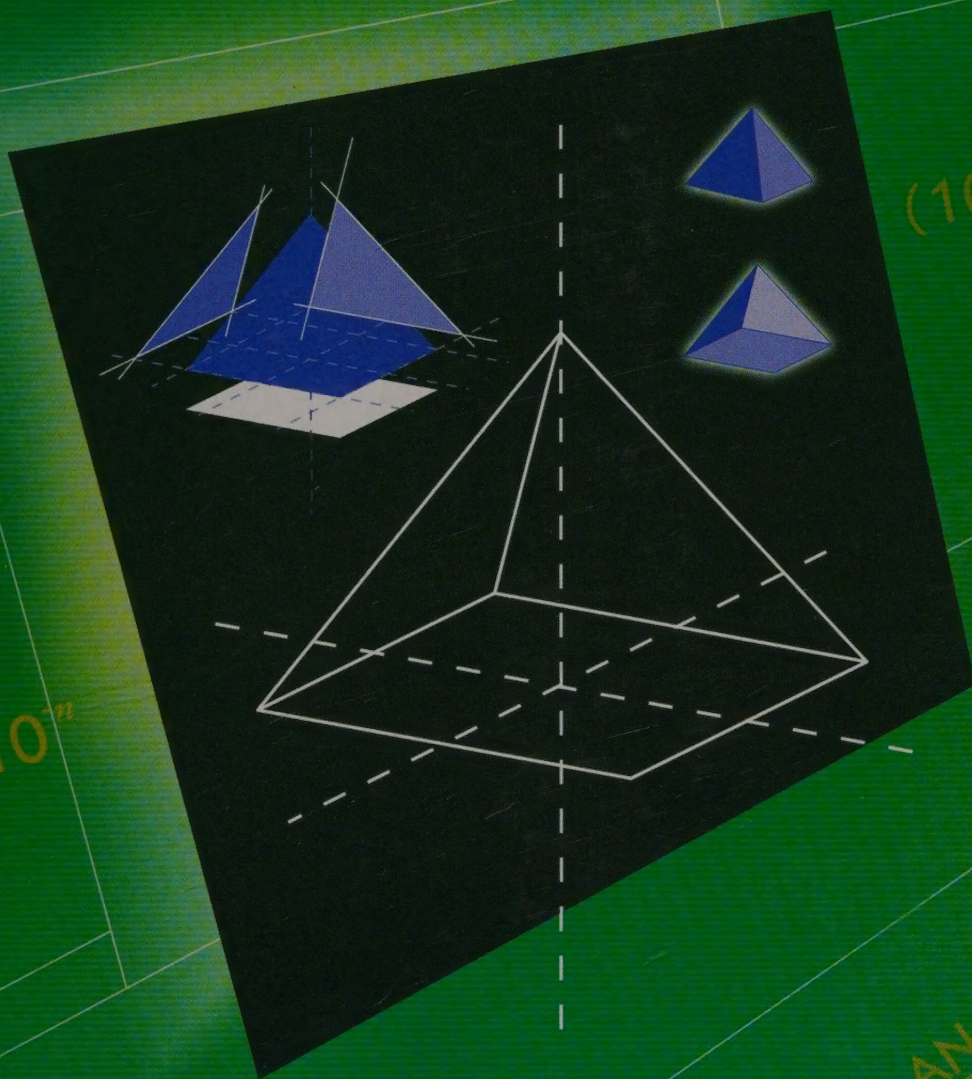
$$2x^2 - 3x + x^2 = 3x^2 - 3$$

$$(10^m)^n = 10^{mn}$$

$$\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$$

$$3x - (4x - 2) = -x + 2$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$





Maths 4^e



Sous la direction de **Jacqueline BORRÉANI**

Guillemette LE HIR - JOMIER

IUFM, Rouen - Collège Jean de la Fontaine, Bourgheroulde

Fabienne LANATA

Collège Pablo Picasso, Harfleur

Sophie HUVEY

Collège Albert Schweitzer, Neufchâtel en Bray

Dorothée DELIEZ

Collège Albert Schweitzer, Neufchâtel en Bray

TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES

	La démonstration pas à pas	Méthodes	Inter-Math
pages 7-28	p. 12	p. 16	p. 26
1 PARALLELOGRAMME ET TRANSLATION	Outils de base	• Construire l'image d'un point par une translation : - avec un compas - avec une règle graduée	• Motifs pour des pavages À travers L'Histoire • Pavage de Penrose
pages 29-50	p. 36	p. 39 et 44	p. 48
2 TRIANGLE ET PROPORTIONNALITÉ	Recherche d'une démonstration	• Comment calculer une longueur • Comment démontrer que deux droites sont parallèles	• Pantographe : agrandir ou réduire des dessins À travers L'Histoire • Thalès, un savant de l'Antiquité
pages 51-70	p. 56	p. 61 et 63	p. 68
3 DROITES REMARQUABLES D'UN TRIANGLE	Recherche et contrôle d'une démonstration	• Utilisation des propriétés des transformations • Démontrer que des droites sont perpendiculaires	• Cercle d'Euler • À la manière de Dürer À travers L'Histoire • Euler, un savant du XVIII^e siècle
pages 71-88	p. 76	p. 78	p. 86
4 CERCLE ET TRIANGLE RECTANGLE	Propriété directe et réciproque	• Construction de la tangente à un cercle passant par un point donné	• Énigmes géométriques À travers L'Histoire • Manesson Mallet, une géométrie pratique
pages 89-110	p. 94	p. 95	p. 108
5 THÉORÈME DE PYTHAGORE	Rédaction	• Calculer la mesure d'un des cotés de l'angle droit d'un triangle rectangle • Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle	• Pythapuzzle et autres curiosités À travers L'Histoire • Des Babyloniens à Pierre de Fermat
pages 111-130	p. 118	p. 118	p. 128
6 PYRAMIDE ET CÔNE	Passer de l'espace au plan	• Voir « La démonstration pas à pas », chapitre 6.	• En direct de la cité des sciences À travers L'Histoire • Représentation de solides par un architecte de la Renaissance
pages 131-148	p. 136	p. 138	p. 146
7 COSINUS D'UN ANGLE AIGU	Problème de synthèse	• Déterminer un angle dans un triangle rectangle (2 méthodes) • Déterminer une longueur dans un triangle rectangle	• Être ou ne pas être un triangle rectangle • À la recherche du carré perdu À travers L'Histoire • Des instruments pour observer le ciel

Annexes

Propriétés utiles en géométrie

p. 277-278

Réponses aux pages « Je m'évalue »

p. 279-284

TRAVAUX NUMÉRIQUES ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS

Des calculs pas à pas

Méthodes

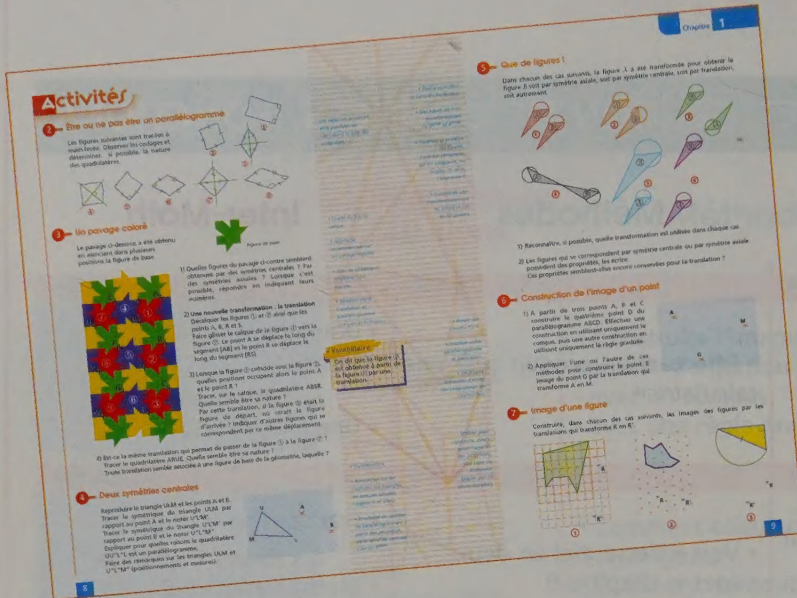
Inter-Math

pages 149-166	p. 154	p. 158	p. 164
8 NOMBRES RELATIFS ET CALCULS	Conventions d'écriture	Effectuer un produit avec une calculatrice	- Dominos et nombres relatifs - À travers L'Histoire - Une longue histoire
pages 167-182	p. 172	p. 170	p. 180
9 NOMBRES FRACTIONNAIRES ET CALCULS	Conduire un calcul à la main ou à la calculatrice	Voir « L'essentiel en deux pages », chapitre 9.	- Fractions en tout genre - À travers L'Histoire - Mathématiques et musique
pages 183-202	p. 190	p. 193 et 194	p. 200
10 PUISSANCES	Calculatrice et puissances de 10	- Écrire un nombre en notation scientifique - Trouver l'ordre de grandeur d'un résultat	- Une représentation du système solaire - À travers L'Histoire - Combien l'univers contient-il de grains de sable ?
pages 203-224	p. 210	p. 215	p. 222
11 CALCUL LITTÉRAL- ÉQUATION	Résoudre un problème	Supprimer une parenthèse précédée d'un signe moins	- Équations chimiques - À travers L'Histoire - De l'intérêt de l'usage des lettres
pages 225-244	p. 230	p. 230	p. 242
12 PROPORTIONNALITÉ	Applications de la proportionnalité	Calculer une distance, une durée, une vitesse ou un pourcentage	- Unités de mesures à travers les âges - À travers L'Histoire - Le compas de proportion
pages 245-258	p. 250	p. 250	p. 256
13 ORDRE ET ENCADREMENT	Comparaison de nombres	Comparer des nombres de la forme $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$	- De l'œil au cerveau - À travers L'Histoire - Au plus près de π
pages 259-276	p. 266	p. 266	p. 274
14 STATISTIQUES	Pour calculer une moyenne	Voir « Des calculs pas à pas », chapitre 14.	- Objectif chocolat - À travers L'Histoire - De l'astronomie aux statistiques

comment utiliser Le

Les pages Activités :

- Faire le lien avec la 6^{ème} et la 5^{ème} et découvrir de nouvelles notions.
- Des activités pour rendre l'élève acteur de son apprentissage.



L'essentiel du cours :

- Une présentation simple et concise de ce qui est à apprendre et retenir.

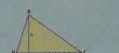
Vocabulaire

met l'accent sur la compréhension et la précision du langage en mathématiques

L'essentiel en deux pages

1- Utilisation des lettres

a) Attribuer des lettres



L'aire d'un triangle est donnée par la formule : $A = \frac{1}{2} \times b \times h$

b) Exprimer « en fonction de »

Le périmètre du rectangle ABCD s'exprime en fonction de a : $P_{ABCD} = 2a + 2b$

2- Résoudre des problèmes

« En additionnant 1,6 et le quatrième d'un nombre, on trouve 20. Quel est ce nombre ? »
Pour résoudre un tel problème, le nombre inconnu est désigné par une lettre.
Le périmètre du triangle ABC s'exprime en fonction de a : $P_{ABC} = 2a + 2b$

3- Transformations d'écritures littérales

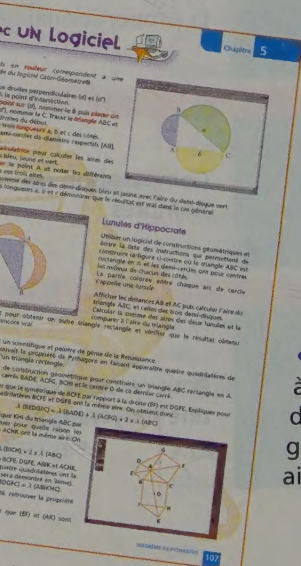
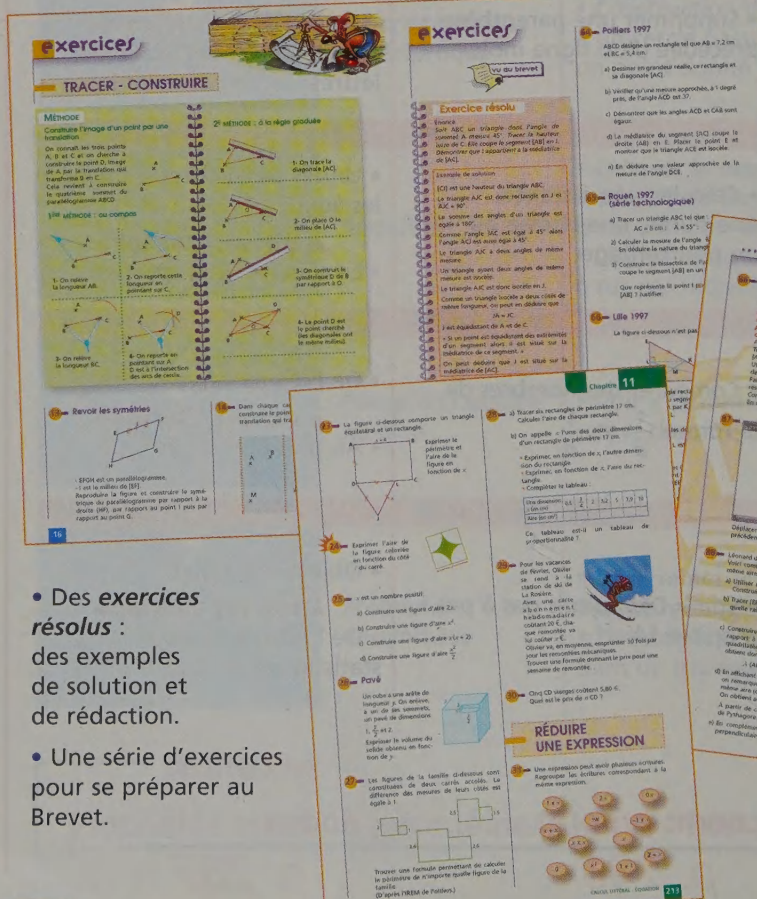
a) Simplification
 $2x + 3x = 5x$; $4x + 5x + 3x = 12x$
 $3x + 2x = 5x$; $4x + 5x + 3x = 12x$
b) Réduction
Réduire une expression littérale, c'est rassembler les termes semblables.

Exemples : $A = 4x + 5$; $B = 5x + 4x + 7$; $C = 6x + 5x + 1$
 $A + B = 9x + 12$; $B + C = 11x + 12$; $C + A = 11x + 6$
 $A + B + C = 25x + 19$

La multiplication est une opération prioritaire par rapport à l'addition et à la soustraction. Les parenthèses ont une priorité encore plus élevée.

Exercices : méthodes et exercices résolus

- De nombreux exercices, classés par thèmes, permettent de s'entraîner et de résoudre des problèmes.
- Des points méthodes : des techniques à apprendre.



- Des exercices réalisés à l'aide de logiciels de constructions géométriques pour aider à conjecturer.

PROGRAMME

(Extraits)

A. Travaux géométriques

En classe de 4^e, la représentation d'objets géométriques usuels du plan et de l'espace, le calcul de grandeurs attachées à des objets, demeurent des objectifs majeurs ; s'y ajoutent la caractérisation de certains d'entre eux.

Dans le plan, les travaux portent sur les figures usuelles déjà étudiées (triangle, cercle, quadrilatères particuliers), mais également sur une nouvelle configuration illustrant une situation fondamentale de proportionnalité : celle de triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes. À ce nouvel outil et à ceux des classes antérieures s'ajoutent le théorème de Pythagore et la translation. Ces enrichissements doivent favoriser le développement des capacités de découverte et de démonstration.

Dans l'espace, les travaux sur les solides étudiés exploitent largement les résultats de géométrie plane.

B. Travaux numériques

La résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. Les exercices de technique pure ne sont pas à privilégier.

La pratique du calcul exact ou approché sous différentes formes complémentaires (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a pour objectifs :

- la maîtrise des règles opératoires de base,
- l'acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres,
- la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre selon la situation.

Le calcul littéral sera introduit avec prudence en veillant à ce que les élèves puissent donner du sens aux activités entreprises dans ce cadre, en particulier lors de l'utilisation de formules issues des sciences et de la technologie.

C. Gestion de données, fonctions

Les notions essentielles relatives à cette rubrique ont été introduites ou approfondies en 6^e et 5^e. En 4^e ces notions seront fréquemment réinvesties dans les mêmes conditions que celles explicitées dans le programme de 5^e, avec une insistance particulière sur l'utilisation des moyens de calcul moderne.

Le lien avec les autres disciplines et avec l'éducation à la citoyenneté sera maintenu et renforcé. Comme en 5^e, le mot « fonction » sera employé, chaque fois que nécessaire, en situation, et sans qu'une définition formelle soit donnée.

PARALLÉLOGRAMME ET TRANSLATION

En 6^{ème}-5^{ème}

- Reconnaître et tracer un triangle ou un quadrilatère particulier.
- Utiliser les propriétés du parallélogramme.
- Reconnaître et construire un axe ou un centre de symétrie, le symétrique d'une figure.
- Utiliser les propriétés des symétries : conservation des longueurs, de l'alignement, des angles et des aires.

En 4^{ème}

Étant donnés deux points A et B, sachant qu'une translation transforme A en B, construire :

- l'image d'un point, appartenant ou non à la droite (AB),
- l'image d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle.

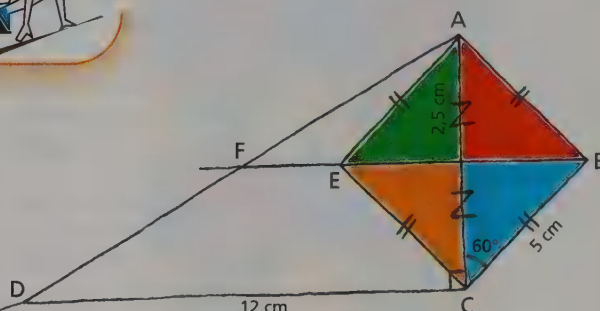
pour démarrer



1 — Dessin à main levée

• Faire la différence entre sembler et être sûr.

• Justifier en utilisant les propriétés de la 6^{ème} et de la 5^{ème} répertoriées à la fin du manuel.

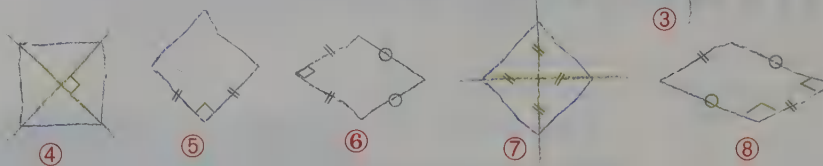


- 1) Quelles sont les informations données par le dessin et dont on est sûr ?
- 2) Certaines particularités semblent être observées sur le dessin, en choisir une et poser une question à son propos.
- 3) Rédiger la réponse en utilisant des propriétés connues en début d'année.

Activités

2 — Être ou ne pas être un parallélogramme

Les figures suivantes sont tracées à main levée. Observer les codages et déterminer, si possible, la nature des quadrilatères.



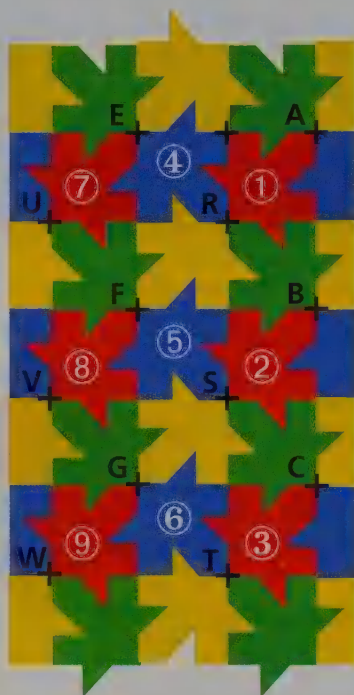
Les réponses pourront être justifiées en consultant la liste des propriétés.

3 — Un pavage coloré

Le pavage ci-dessous a été obtenu en associant dans plusieurs positions la figure de base.



Figure de base



1) Quelles figures du pavage ci-contre semblent obtenues par des symétries centrales ? Par des symétries axiales ? Lorsque c'est possible, répondre en indiquant leurs numéros.

2) **Une nouvelle transformation : la translation**
Décalquer les figures ① et ② ainsi que les points A, B, R et S.
Faire glisser le calque de la figure ① vers la figure ②. Le point A se déplace le long du segment [AB] et le point R se déplace le long du segment [RS].

3) Lorsque la figure ① coïncide avec la figure ②, quelles positions occupent alors le point A et le point R ?
Tracer, sur le calque, le quadrilatère ABSR. Quelle semble être sa nature ?
Par cette translation, si la figure ⑧ était la figure de départ, où serait la figure d'arrivée ? Indiquer d'autres figures qui se correspondent par ce même déplacement.

4) Est-ce la même translation qui permet de passer de la figure ① à la figure ⑦ ?
Tracer le quadrilatère ARUE. Quelle semble être sa nature ?
Toute translation semble associée à une figure de base de la géométrie, laquelle ?

• Usage du papier calque.

• Approche expérimentale sur un pavage régulier.

• Idée de glissement rectiligne, sans tourner.

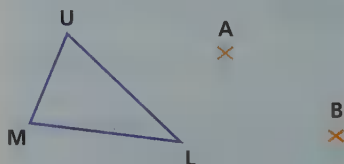
• Relation entre translation et parallélogramme (voir Livre du Professeur).

- Vocabulaire

On dit que la figure ② est obtenue à partir de la figure ① par une translation.

4 — Deux symétries centrales

Reproduire le triangle ULM et les points A et B.
Tracer le symétrique du triangle ULM par rapport au point A et le noter U'L'M'.
Tracer le symétrique du triangle U'L'M' par rapport au point B et le noter U''L''M''.
Expliquer pour quelles raisons le quadrilatère UU''L''L est un parallélogramme.
Faire des remarques sur les triangles ULM et U''L''M'' (positionnements et mesures).



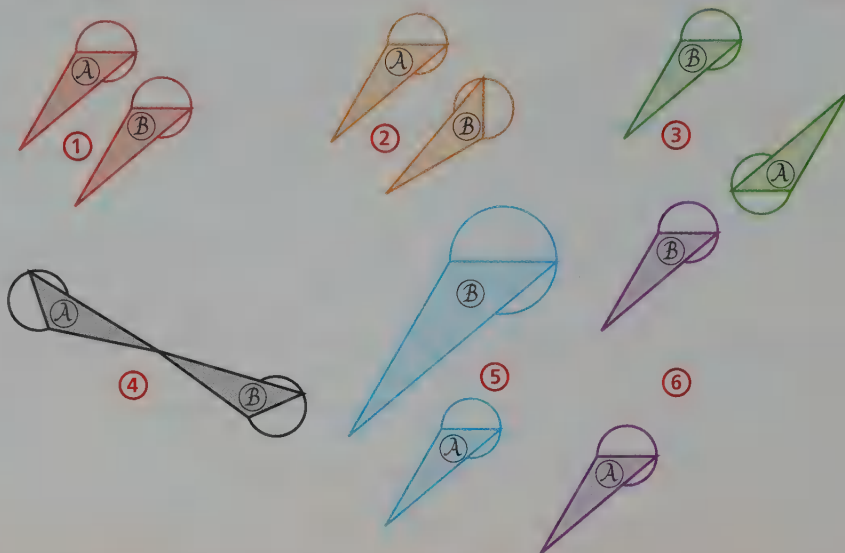
• Constructions.

• Remarques sur les positions des triangles, les mesures (angles, longueurs et aires).

• Possibilité de justifier les parallélogrammes à partir des propriétés de la symétrie centrale vues en 5^{ème}.

5 — Que de figures !

Dans chacun des cas suivants, la figure A a été transformée pour obtenir la figure B soit par symétrie axiale, soit par symétrie centrale, soit par translation, soit autrement.



- 1) Reconnaître, si possible, quelle transformation est utilisée dans chaque cas.
- 2) Les figures qui se correspondent par symétrie centrale ou par symétrie axiale possèdent des propriétés, les écrire.
Ces propriétés semblent-elles encore conservées pour la translation ?

6 — Construction de l'image d'un point

- 1) À partir de trois points A , B et C construire le quatrième point D du parallélogramme $ABCD$. Effectuer une construction en utilisant uniquement le compas, puis une autre construction en utilisant uniquement la règle graduée.

A
x

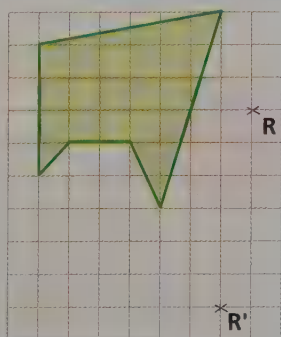
M
x

- 2) Appliquer l'une ou l'autre de ces méthodes pour construire le point E image du point G par la translation qui transforme A en M .

G
x

7 — Image d'une figure

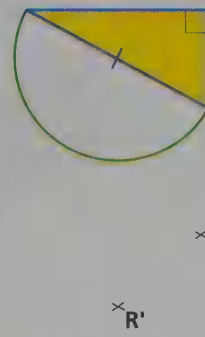
Construire, dans chacun des cas suivants, les images des figures par les translations qui transforment R en R' .



①



②



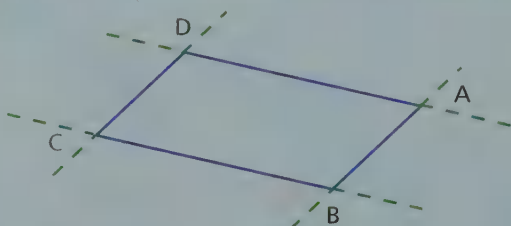
③

L'essentiel en deux pages

1- Parallélogramme (rappels de 5^{ème})

a) Définition

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



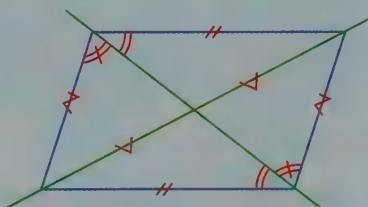
ABCD est un parallélogramme.

$(AB) \parallel (DC)$

$(AD) \parallel (BC)$

b) Propriétés d'un parallélogramme

Si un quadrilatère est un parallélogramme



alors ses diagonales ont le même milieu.

alors il a un centre de symétrie.

alors ses côtés opposés sont de même longueur.

alors ses angles opposés ont la même mesure.

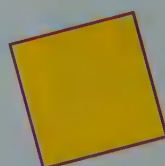
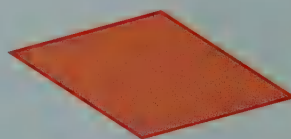
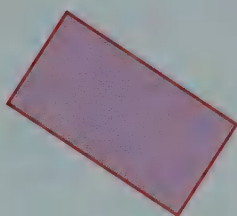
c) Propriétés permettant de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur alors c'est un parallélogramme.

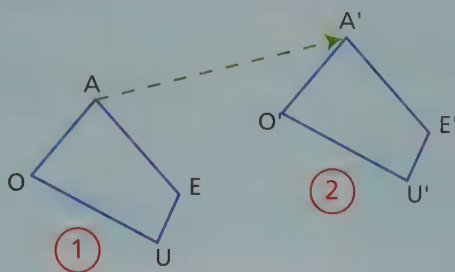
Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme.

d) Parallélogrammes particuliers



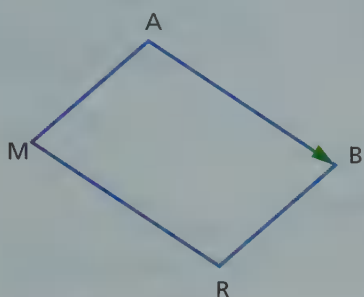
Le rectangle, le losange, le carré sont des parallélogrammes particuliers.
Les propriétés les concernant sont rappelées en page 277.

2 Translation



La figure ① se déplace de façon rectiligne et se superpose à la figure ② par la translation qui transforme A en A'. Le déplacement peut être représenté par une flèche.

Le point M a pour image le point R par la **translation** qui transforme A en B.

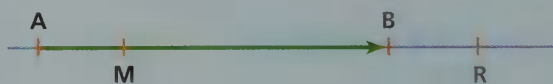


Si le point M a pour image le point R par la translation qui transforme A en B alors le quadrilatère ABRM est un parallélogramme.

Si le quadrilatère ABRM est un parallélogramme alors le point M a pour image le point R par la translation qui transforme A en B.

Remarques

- La translation qui transforme M en R est la même que celle qui transforme A en B.
- Si les points A, B et M sont alignés alors le parallélogramme est aplati.

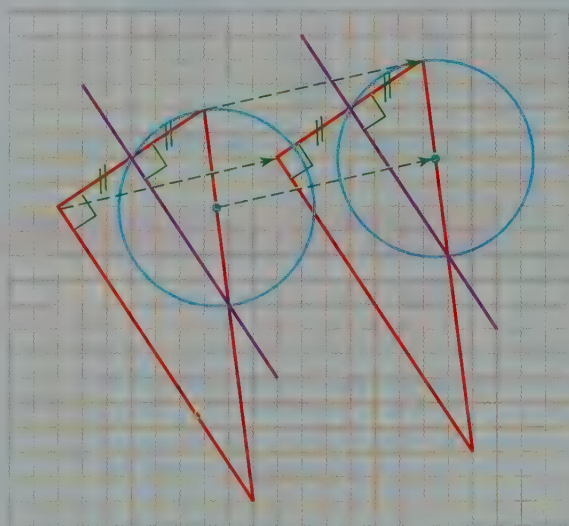


3 Propriétés d'une translation

Ces propriétés sont admises.

Par une translation :

- l'image d'une droite est une droite parallèle ;
- l'image d'un segment est un segment de même longueur ;
- l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ;
- l'image d'un angle est un angle de même mesure.

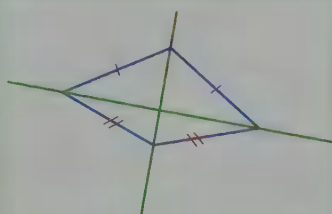




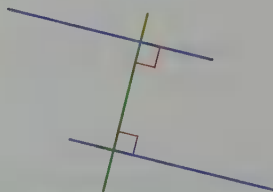
OUTILS DE BASE

Des figures à connaître

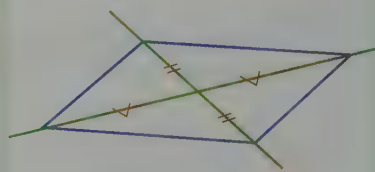
Les codages indiqués sur une figure correspondent à des propriétés.



Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.



Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles.



Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

Si...alors....

Une propriété mathématique s'énonce sous la forme **si... alors...**

Après « **si** », on écrit les conditions d'utilisation de la propriété (ce que l'on sait être vrai).

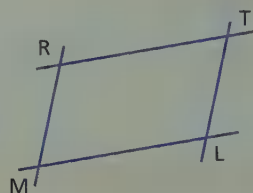
Après « **alors** », on écrit la conclusion (ce que l'on déduit).

Des présentations bien pratiques !

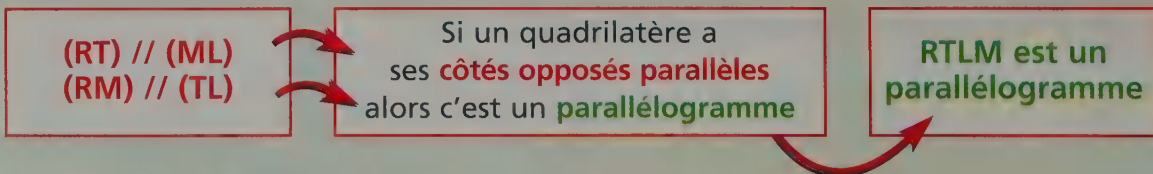
a) Des étiquettes

Deux conditions d'utilisation de la propriété

Énoncé de la propriété



La conclusion



b) Un tableau qui se remplit dans n'importe quel ordre.

Ce que je sais	Ce que j'utilise	Ce que je déduis
(RT) // (ML) (RM) // (TL)	Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme	RTLM est un parallélogramme

Des données à trouver dans ce que l'on sait être vrai (ce qui est écrit après le « si »)

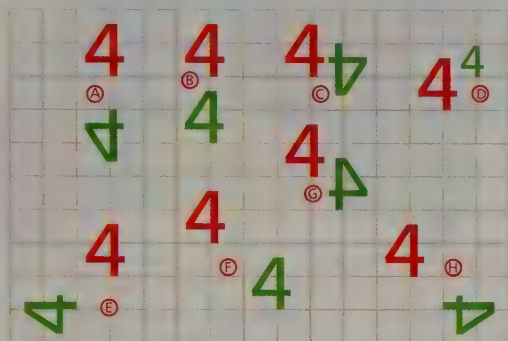
Une définition ou une propriété

Une conclusion à écrire (ce qui est écrit après le « alors »)

exercices

RECONNAITRE

- 1 Dans chacun des cas, trouver si possible le nom de la transformation qui permet de passer du 4 rouge au 4 vert.



- 2 Donner les cas où la transformation qui permet de passer de la figure 1 à la figure 2 est une translation.



Fig. 1

Fig. 2

Cas 1

Cas 2

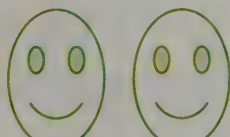


Fig. 1

Fig. 2

Cas 3

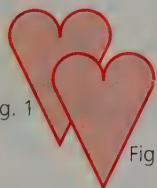


Fig. 1

Fig. 2

Cas 4

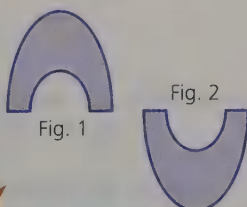


Fig. 1

Fig. 2

Cas 5



Fig. 1

Fig. 2

Cas 6

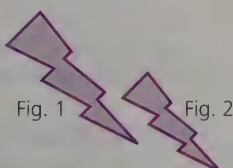
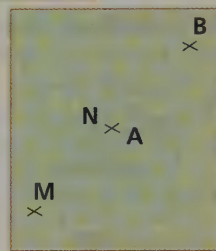
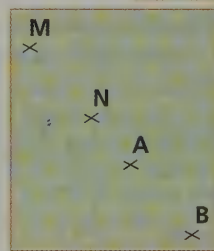
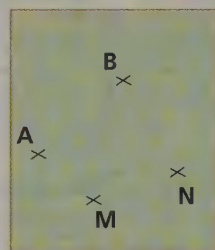
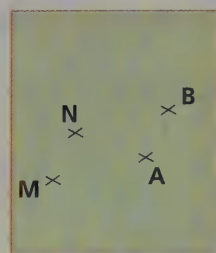
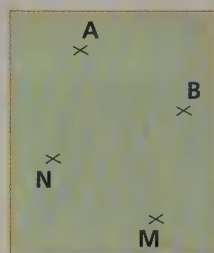


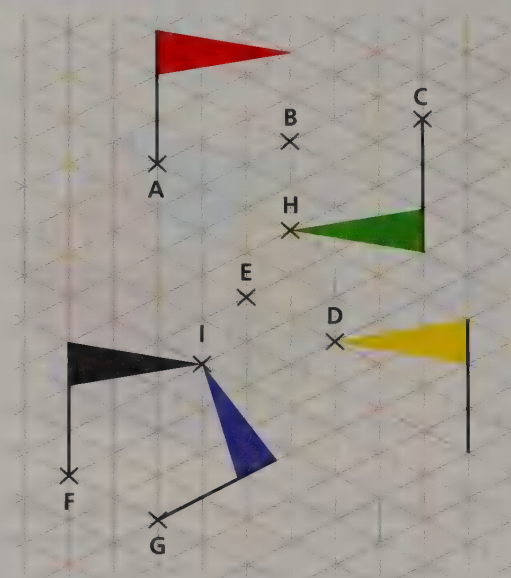
Fig. 1

Fig. 2

- 3 Dans chaque cas, indiquer si le point N est l'image du point M par la translation qui transforme A en B.



- 4 Drapeaux

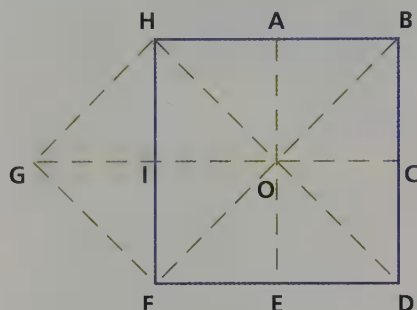


- Par quelle transformation le drapeau vert a-t-il pour image le drapeau rouge ?
- Par quelle transformation le drapeau rouge a-t-il pour image le drapeau noir ?
- Par quelle transformation le drapeau vert a-t-il pour image le drapeau bleu ?
- Indiquer d'autres transformations possibles.

exercices

RECONNAITRE (suite)

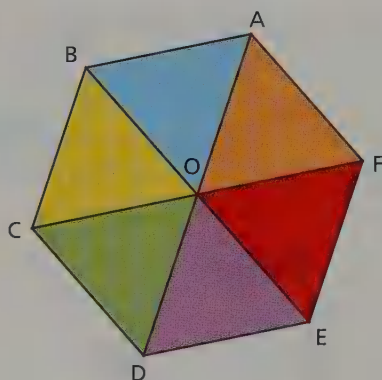
- 5 BDFH et OFGH sont deux carrés. Les points A, C, E, I sont les milieux des côtés du carré BDFH.



Observer la figure puis compléter le tableau en indiquant la transformation qui permet de passer du premier triangle au triangle image.

Triangle de départ	Triangle Image	Transformation
BOC	HOI	
CDO	IFG	
AOH	IFG	
ODE	OHA	

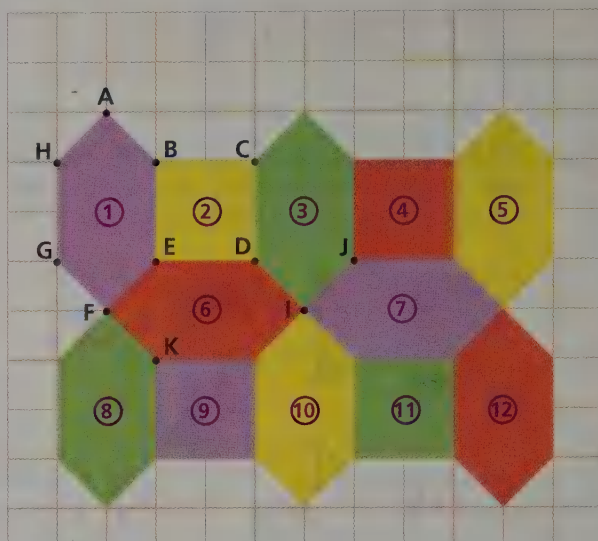
- 6 ABCDEF est un hexagone régulier de centre O.



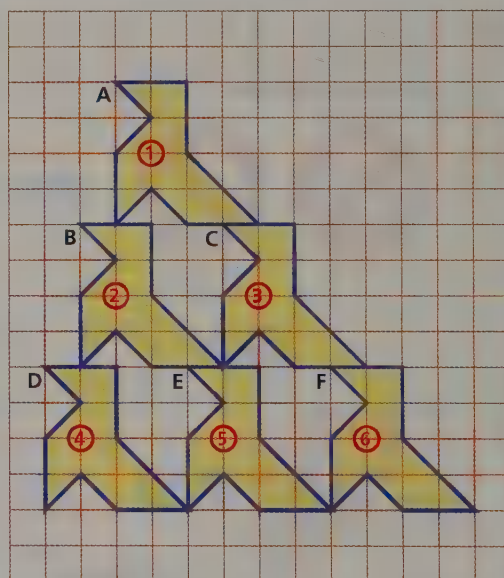
Dans chacun des cas suivants, indiquer le nom de deux transformations qui permettent de passer du triangle de départ au triangle d'arrivée.
Préciser les éléments qui caractérisent ces transformations.

Triangle de départ	Triangle d'arrivée	1 ^{ère} transformation	2 ^e transformation
triangle bleu	triangle rouge		
triangle bleu	triangle violet		
triangle vert	triangle orange		

- 7 « L'image de la figure ① par la translation qui transforme G en D est la figure ③ ».
En observant la figure ci-dessous, écrire trois phrases analogues.

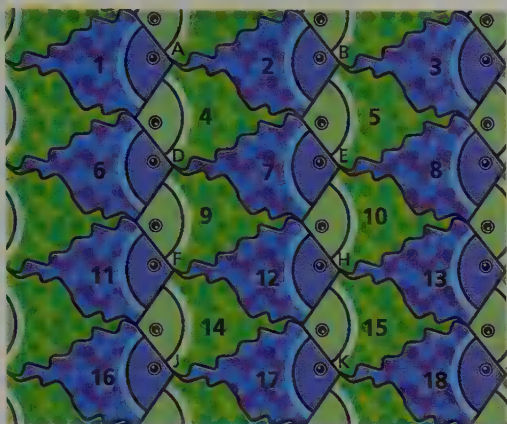


- 8 Observer la figure puis compléter.



- Par la translation qui transforme A en C, l'image de la figure ② est la figure....
- Par la translation qui transforme E en C, l'image de la figure ... est la figure ②.
- Par la translation qui transforme en C, l'image de la figure ⑤ est la figure ⑥.
- La figure ③ est l'image de la figure ... par la translation qui transforme C en F.
- Dans la translation qui transforme E en ..., l'image de la figure ③ est la figure ②.

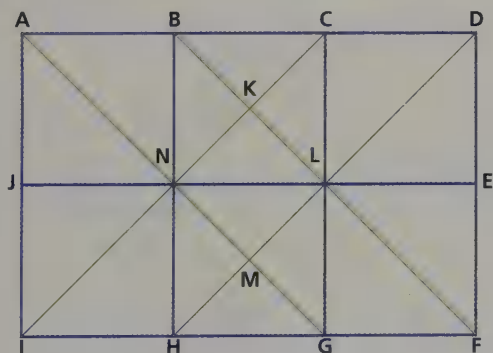
- 9 Ce pavage a été réalisé à partir d'un seul motif : un poisson.



Recopier et compléter les phrases suivantes (il peut y avoir plusieurs réponses) :

- L'image de la figure ⑦ par la translation qui transforme E en F est
- L'image de la figure ② par la translation qui transforme A en E est
- La figure ⑤ a pour image la figure ⑨ par
- La figure ⑥ est l'image de la figure par la translation qui transforme I en D.
- La figure ⑥ est l'image de la figure par la translation qui transforme C en B.

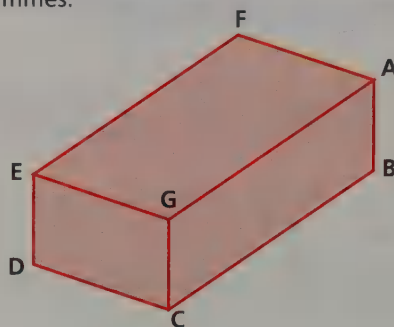
10



Recopier et compléter :

- L'image du point L par la translation qui transforme A en B est
- L'image du point par la translation qui transforme B en K est L.
- L'image du point J par la translation qui transforme en F est L.
- La translation qui transforme D en E, transforme K en
- La translation qui transforme en H, transforme N en G.
- Par la translation qui transforme A en J, le triangle BKN a pour image
- Par la translation qui transforme J en N, le triangle NLH a pour image

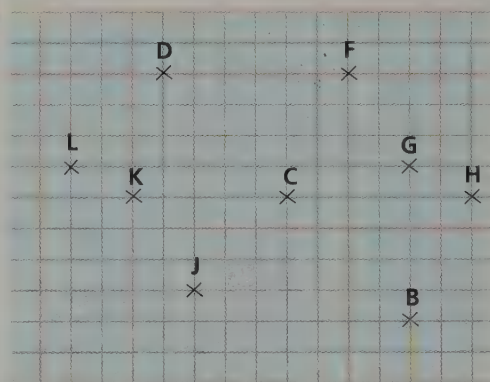
- 11 ABCG, GCDE et EGAF sont des parallélogrammes.



Recopier et compléter les phrases suivantes :

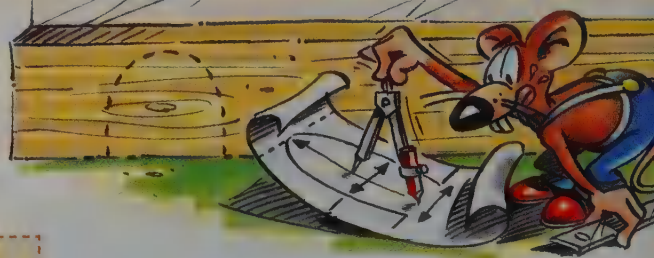
- Par la translation qui transforme A en B, le point G a pour image ...
- Par la translation qui transforme E en F, ... a pour image B.
- Par la translation qui transforme E en ..., le point F a pour image A.
- Par la translation qui transforme ... en F, le point D a pour image C.
- Par la translation qui transforme A en G, ... a pour image E.

12



Indiquer si les phrases suivantes sont vraies. Les corriger si c'est nécessaire.

- Par la translation qui transforme F en D, H a pour image C.
- Par la translation qui transforme H en F, C a pour image B.
- Par la translation qui transforme B en C, J a pour image K.
- Par la translation qui transforme G en H, K est l'image de L.
- C est l'image de J par la translation qui transforme D en L.



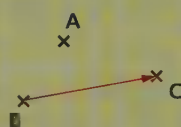
TRACER - CONSTRUIRE

MÉTHODE

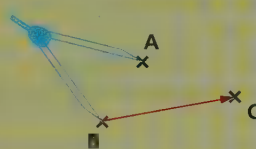
Construire l'image d'un point par une translation

On connaît les trois points A, B et C et on cherche à construire le point D, image de A par la translation qui transforme B en C.

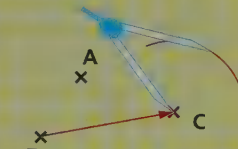
Cela revient à construire le quatrième sommet du parallélogramme ABCD.



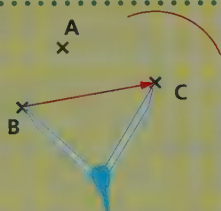
1^{ÈRE} MÉTHODE : au compas



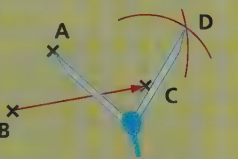
1- On relève la longueur AB.



2- On reporte cette longueur en pointant sur C.

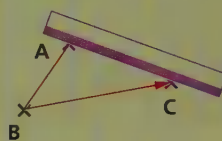


3- On relève la longueur BC.

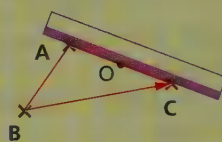


4- On reporte en pointant sur A. D est à l'intersection des arcs de cercle.

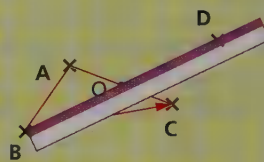
2^E MÉTHODE : à la règle graduée



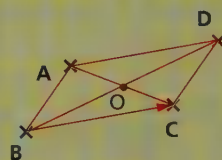
1- On trace la diagonale [AC].



2- On place O le milieu de [AC].

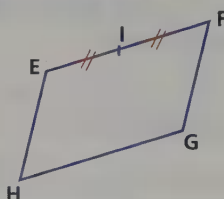


3- On construit le symétrique D de B par rapport à O.



4- Le point D est le point cherché (les diagonales ont le même milieu).

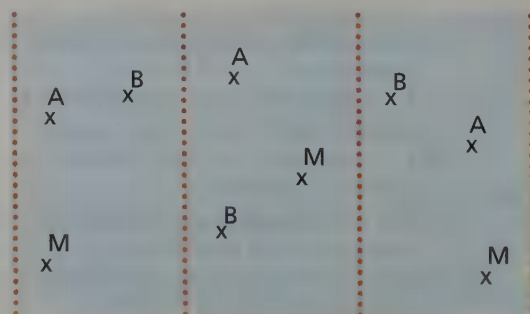
13 — Revoir les symétries



- EFGH est un parallélogramme.
- I est le milieu de [EF].

Reproduire la figure et construire le symétrique du parallélogramme par rapport à la droite (HF), par rapport au point I puis par rapport au point G.

- 14 — Dans chaque cas, reproduire le dessin et construire le point N, image du point M par la translation qui transforme A en B.



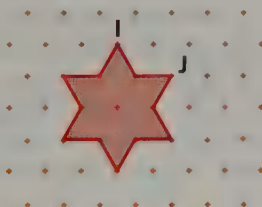
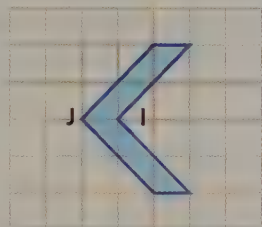
- 15 Dessiner quatre points R, S, T et V (en les espaçant davantage que sur le livre).



Construire au compas :

- l'image de V par la translation qui transforme R en T.
- l'image de R par la translation qui transforme T en S.
- l'image de R par la translation qui transforme V en T.

- 16 Tracer l'image de la figure par la translation qui transforme I en J dans chaque cas.



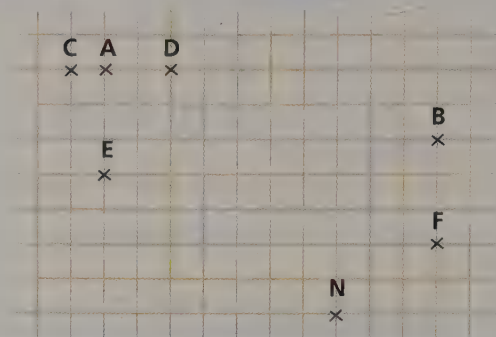
- 17 a) Tracer un triangle ABC.

b) Construire l'image du triangle ABC par la translation qui transforme A en B (triangle ①).

c) Construire l'image du triangle ABC par la translation qui transforme A en C (triangle ②).

d) Définir la translation permettant de passer du triangle ① au triangle ②.

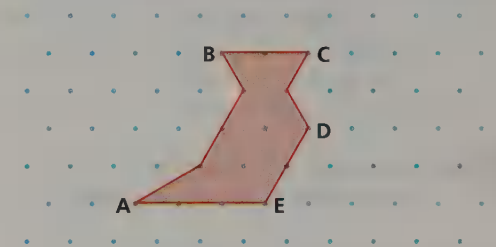
- 18 Reproduire et compléter le dessin sur une feuille quadrillée.



- Par la translation qui transforme E en B : F est l'image de O, C est l'image du cercle de centre O et de rayon OE.
- Par la translation qui transforme F en N : O a pour image M, le point B est l'image de H.
- Par la translation qui transforme C en D : H a pour image Z, le point G est l'image de M, J est l'image de N.
- Joindre C et D, AEBHZ, OMG, FNJ.

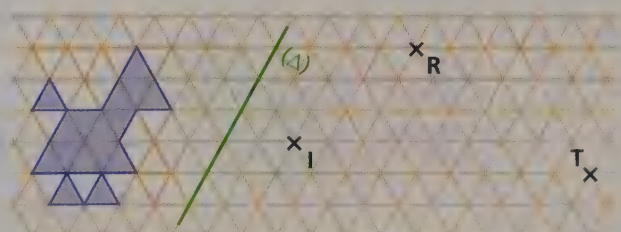
- 19 Reproduire et dessiner :

- en vert l'image du dessin par la translation qui transforme A en C ;
- en bleu l'image du dessin par la translation qui transforme D en A ;
- en jaune l'image du dessin par la translation qui transforme B en E.



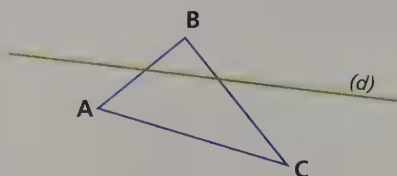
- 20 Reproduire la figure et tracer son image par :

- la symétrie d'axe (Δ) ;
- la symétrie de centre I ;
- la translation qui transforme R en T.



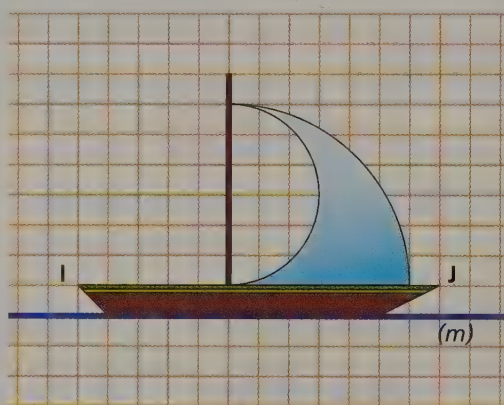
exercices

- 21** Reproduire la figure.



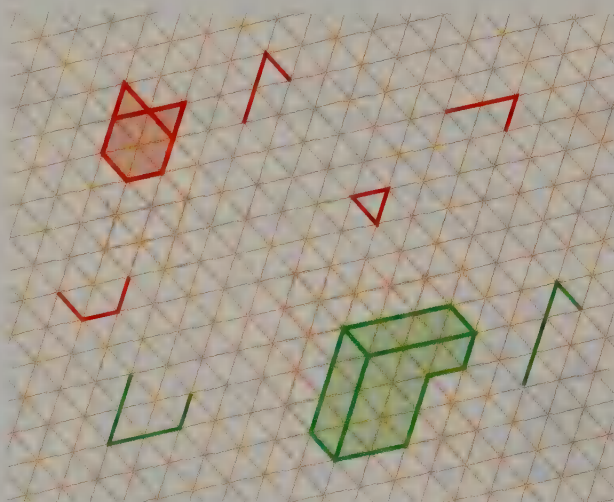
Construire le symétrique du triangle par la symétrie de centre C, le symétrique du triangle par la symétrie d'axe (d), l'image du triangle par la translation qui transforme B en A.

- 22** Reproduire le dessin.



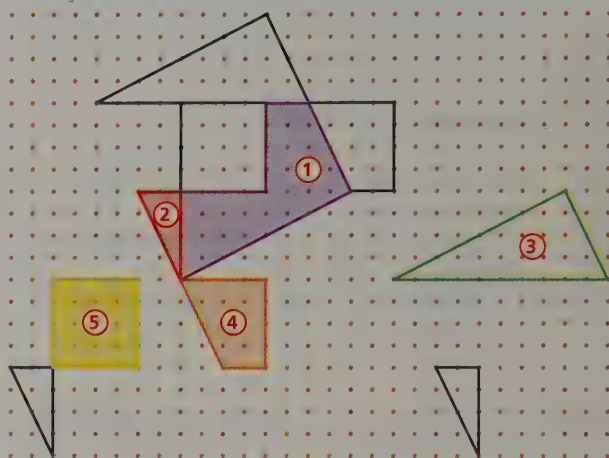
- Construire son symétrique par rapport à la droite (m).
- Construire l'image de l'ensemble du dessin obtenu à la première question par la translation qui transforme I en J.

- 23** Reproduire et compléter les figures qui se correspondent par une translation.



- 24** Cinq formes géométriques ont été utilisées pour construire le pavage qui est ici partiellement dessiné.

- Reproduire et compléter ce pavage en traduisant correctement les cinq formes à plusieurs reprises.



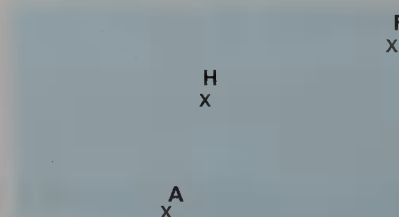
- Sur le pavage terminé, mettre en évidence des carrés, des parallélogrammes et des rectangles formés exactement par les cinq pièces.

RAISONNER ET CONSTRUIRE

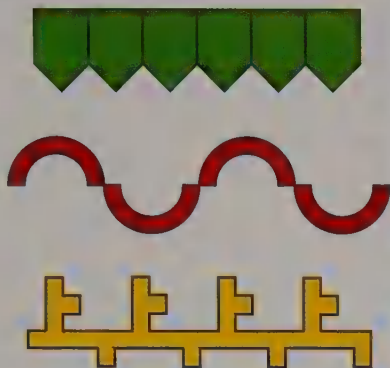
- 25** Propriétés et constructions

- Construire un rectangle ABCD tel que $AC = 6 \text{ cm}$ et $BC = 4 \text{ cm}$.
- Construire un parallélogramme EFGH tel que $EG = 6 \text{ cm}$, $FH = 5 \text{ cm}$ et $EF = 4 \text{ cm}$.
- Construire un losange IJKL tel que $IJ = 5 \text{ cm}$.
- Construire un carré MNOP tel que $MO = 7 \text{ cm}$.

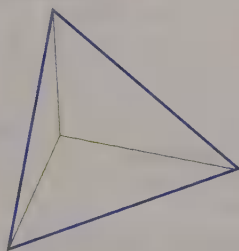
- 26** Construire l'image A' du point A par la translation qui transforme H en F en utilisant uniquement la règle graduée.



- 27** Dans chaque cas, dessiner le plus petit motif permettant de reconstituer la frise par translation de ce motif. Indiquer deux points qui caractérisent cette translation.

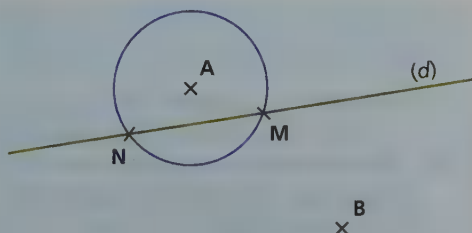


- 28** Le motif ci-dessous est constitué d'un triangle équilatéral partagé en trois zones. Celles-ci sont obtenues en joignant un point situé sur la médiatrice d'un côté avec les sommets du triangle.

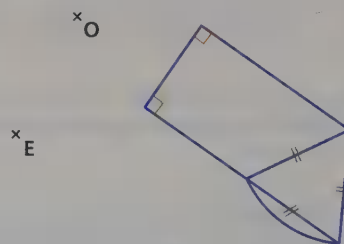


- Colorier les trois zones avec trois couleurs différentes.
- Construire le symétrique du motif par rapport à chacun des côtés du triangle. Construire les symétriques de chaque nouveau triangle par rapport à ses côtés. On obtient un pavage.
- Chercher les motifs qui se correspondent par des translations. Indiquer les éléments caractéristiques de ces translations en donnant des noms aux sommets des triangles.

- 29** Reproduire puis construire l'image de la figure par la translation qui transforme A en B.

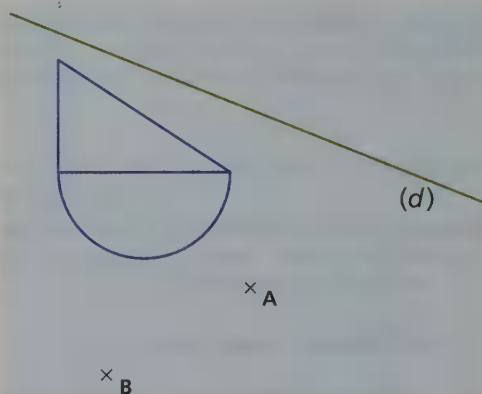


- 30** Reproduire puis construire l'image de la figure par la translation qui transforme O en E.



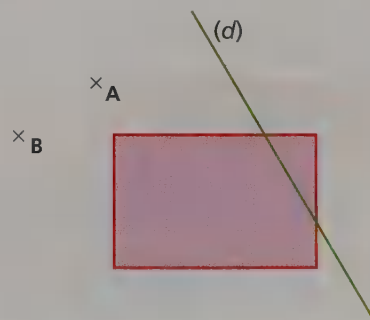
- 31** Reproduire la figure ci-dessous et tracer :

- en vert, l'image de la figure par la translation qui transforme A en B ;
- en bleu, l'image de la figure par la symétrie d'axe (d) ;
- en rouge, l'image de la figure par la symétrie de centre A.
(Attention ! Prévoir la place nécessaire.)



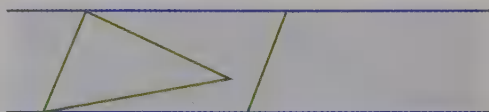
- 32** Reproduire la figure ci-dessous et tracer :

- en vert, l'image de la figure par la translation qui transforme A en B ;
- en bleu, l'image de la figure par la symétrie d'axe (d) ;
- en rouge, l'image de la figure par la symétrie de centre A.



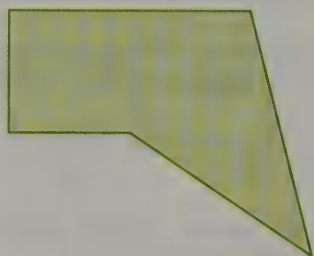
exercices

- 33** — Poursuivre les dessins dans chacune des frises, sachant qu'ils se correspondent par des translations.



- 34** — Le dessin en perspective cavalière d'un prisme est obtenu en traçant l'image par une translation d'une des bases.

- Expliquer cette phrase.
- Réaliser un dessin en perspective du prisme dont la base est le polygone ci-dessous :



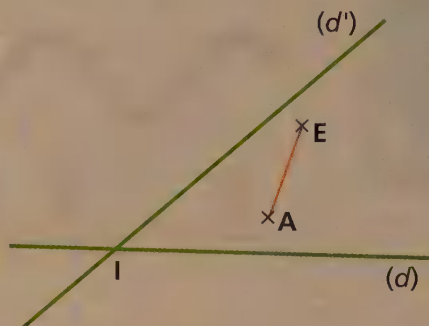
Vocabulaire

Prisme : un prisme droit est un solide ayant deux faces, de forme polygonale, superposables et parallèles. Les autres faces sont rectangulaires.

Exercice résolu

Énoncé

(d) et (d') sont deux droites sécantes en I . Les points A et E n'appartiennent ni à (d) ni à (d') .



Construire un point M sur (d) et un point M' sur (d') tel que M' soit l'image de M par la translation qui transforme A en E .

Exemple de solution

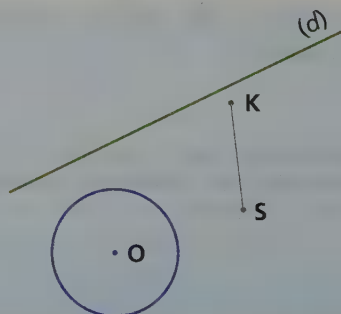
L'image d'une droite est une droite parallèle par translation.

Par la translation qui transforme A en E , on trace l'image I' de I , la droite (Δ) image de (d) qui passe par I' . La droite (Δ) coupe (d') en M' .

Le point M' est l'image de M donc $AEM'M$ est un parallélogramme.

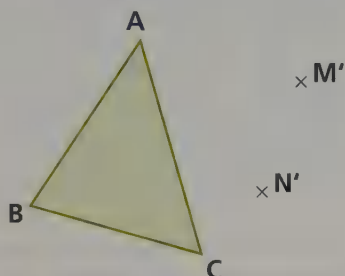
On obtient M en complétant le quatrième point du parallélogramme.

- 35** — Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et une droite (d) . Placer deux points K et S extérieurs à la droite et au cercle à peu près comme sur le livre.



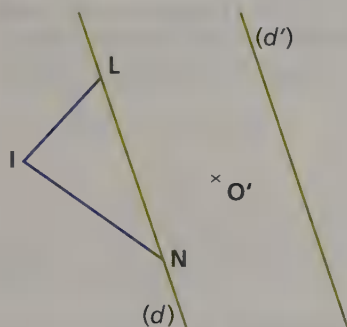
- Construire un point M sur (d) et un point M' sur $\mathcal{C}$ tel que M' soit l'image de M par la translation qui transforme K en S .
- Imaginer un dessin où une telle construction est impossible.

- 36** — ABC est un triangle quelconque.
M' est l'image d'un point M de la droite (AB) par une translation.
N' est l'image d'un point N de la droite (BC) par la même translation.



Retrouver la position des points M et N et construire l'image du triangle ABC par cette translation.

- 37** — (d) a pour image (d') par une translation. Cette même translation transforme O, point de [LI], en O' point donné sur la figure.

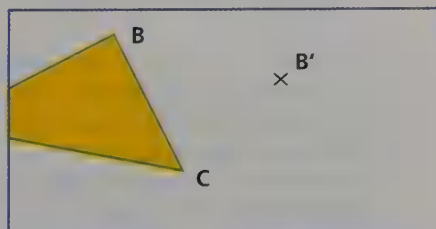


Construire L'N'I' translaté du triangle LNI.

Vocabulaire

Translaté : le translaté d'un point (ou d'une figure) est l'image de ce point (ou de cette figure) par une translation.

- 38** — Sans sortir du cadre



Reproduire la figure à peu près comme ci-dessus.

A'B'C' est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme B en B'.

Sans sortir du cadre, construire à la règle et au compas le point A' translaté du point A.

UTILISER LES PROPRIÉTÉS

- 39** — Axes et centres de symétrie

a) Reproduire le tableau suivant :

Axe de symétrie Centre de symétrie	0	1	2
0	Triangle quelconque		
1			

b) Placer dans le tableau le nom des figures géométriques suivantes en tenant compte de leurs caractéristiques (par exemple un triangle quelconque n'a ni axe ni centre de symétrie).

Liste des figures : triangle quelconque, triangle isocèle, triangle rectangle, triangle équilatéral, trapèze quelconque, trapèze isocèle, trapèze rectangle, parallélogramme quelconque, rectangle, losange, carré, cercle.

- 40** — Retrouver la propriété qui correspond à chaque figure :

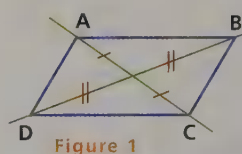


Figure 1

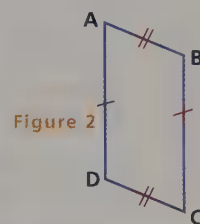


Figure 2

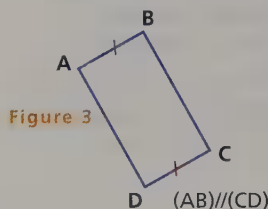


Figure 3

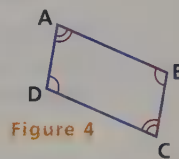


Figure 4

PROPRIÉTÉ 1 : Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ 2 : Si un quadrilatère non croisé a deux côtés parallèles et de même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ 3 : Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ 4 : Si les angles opposés d'un quadrilatère ont la même mesure, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

exercices

41 Compléter chacune des démonstrations ci-dessous.

a) On sait que A est le milieu de [EB] et que A est le milieu de [CD].

Si, alors
Donc BCED est un parallélogramme.

b) On sait que [AC] et [BD] sont deux diamètres distincts d'un même cercle.

Si les diagonales d'un quadrilatère, alors ce quadrilatère est un rectangle.
Donc est un rectangle.

c) On sait que O est le milieu de [SU] et de [VT] et que

Si les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires et, alors c'est un losange.

Donc

42 a) Tracer un rectangle EFGH dont la longueur mesure le double de la largeur.

b) Tracer les axes de symétries, ils coupent [EF] et [HG] respectivement en C et D.

c) Tracer les diagonales [FH] et [EG], elles se coupent en O.

d) Tracer l'image du triangle EOH par la translation qui transforme B en G.

e) Tracer l'image du triangle FOG par la translation qui transforme D en O.

f) Quelle est l'image du segment [FD] par la translation qui transforme D en C ?

g) Quelle est l'image de la droite (AB) par la translation qui transforme A en D ?

h) Quelle est l'image du cercle de centre C et de rayon [CA] par la translation qui transforme E en F ?

43 [AS] et [VB] sont deux segments de même longueur.

a) Construire l'image [A'S'] du segment [AS] par la translation qui transforme V en B.

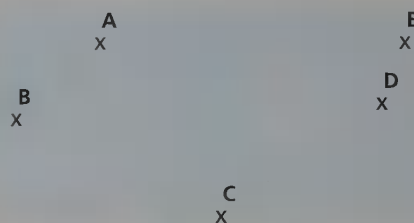
b) Prouver que le quadrilatère AA'S'S est un parallélogramme.

c) Ce parallélogramme semble être un losange. Quelle propriété permet d'en être sûr ?

44 VPRE est un parallélogramme. Par la translation qui transforme P en V, le point E a pour image M et le point V a pour image T.

Construire la figure et montrer que le quadrilatère PRMT est un parallélogramme.

45 Cinq points A, B, C, D, E sont placés comme ci-dessous.

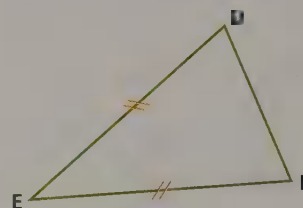


a) Construire les points C' et D' images respectives des points C et D par la translation qui transforme A en B.

b) Construire les points A' et E' images respectives des points A et E par la symétrie de centre D.

c) Démontrer que CC'DD' et EA'E'A sont des parallélogrammes.

46 DEF est un triangle isocèle en E. Par la translation qui transforme D en F, le point E a pour image G et F a pour image H.

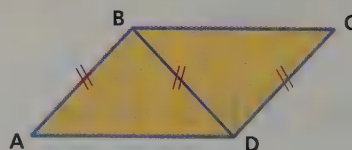


a) Reproduire le triangle et effectuer les constructions.

b) Démontrer que le triangle EFG est un triangle isocèle.

(D'après DEP, Mathématiques collège vol. 2.)

47 ABDC est un parallélogramme tel que $AB = BC = CD$.



a) Construire l'image de ABDC par la translation qui transforme A en B. Appeler E l'image de B et F l'image de D.

b) Quelle est l'image de C ?

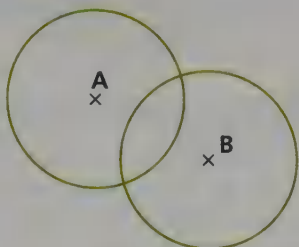
c) Déterminer la nature du quadrilatère BCDE. Justifier la réponse.

48 Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de [BC].

Tracer le symétrique de A par rapport à I, on l'appelle A'.

Montrer que ABA'C est un parallélogramme.

49 — Cercles sécants



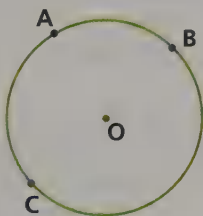
Deux cercles de centre A et B et de même rayon se coupent en C et D.
Que peut-on dire du quadrilatère ACBD (justifier la réponse) ?

50 — Triangles et symétries

- ABC est un triangle quelconque. I est le milieu de [AB]. D est la symétrique de C par rapport au point I.
Que peut-on dire du quadrilatère ACBD ?
- Que pourra-t-on conclure si ABC est un triangle isocèle en C ?
- Que pourra-t-on conclure si ABC est un triangle rectangle en C ?

Justifier toutes les réponses.

- Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 cm. Placer trois points quelconques A, B et C sur ce cercle.



- Construire le symétrique D du point A par rapport à C.
- Construire le point E tel que BCDE soit un parallélogramme.
- Construire le cercle $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par la translation qui transforme A en C.
- Expliquer pour quelles raisons le cercle $\mathcal{C}'$ passe par les points C, D et E.

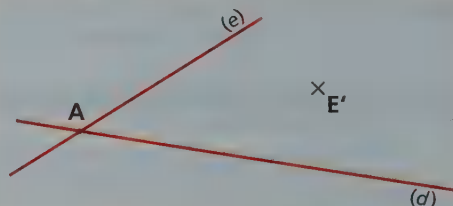
- Tracer un triangle ABC isocèle en A. Placer un point R n'appartenant pas au triangle ABC. Construire le point S tel que ACSR soit un parallélogramme. Construire le point T tel que ABTR soit un parallélogramme.

- Quelle est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme A en R ? Justifier la réponse.
- Expliquer pour quelle raison le translaté du triangle ABC est un triangle isocèle.

PROBLÈMES

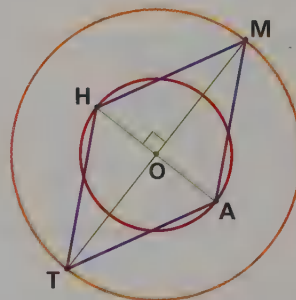
- PLEI est un trapèze de bases [EL] et [IP]. La translation qui transforme E en I, transforme L en M.
Démontrer que M est un point de la droite (PI).

- Dans la situation suivante, on considère deux droites (d) et (e) sécantes en A et un point E' n'appartenant ni à (d) ni à (e).



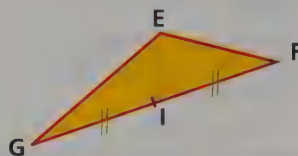
On sait que la droite (d) est sa propre image par une translation et que E' est l'image d'un point E par cette même translation.
Construire (e') l'image de (e), A' le translaté de A et le point E.
Justifier les constructions.

- Tracer deux cercles de même centre O et deux diamètres perpendiculaires [AH] et [MT].



- Montrer que MATH est un parallélogramme.
- Montrer que MATH est un losange.

- Le côté [FG] d'un triangle EFG a pour milieu I.



- Tracer la droite (d) parallèle à la droite (EF) passant par G puis tracer la droite (d') parallèle à la droite (EG) passant par F. On appelle H le point d'intersection des droites (d) et (d').
- Montrer que EFHG est un parallélogramme.
- Montrer que I est le milieu de [EH].

exercices



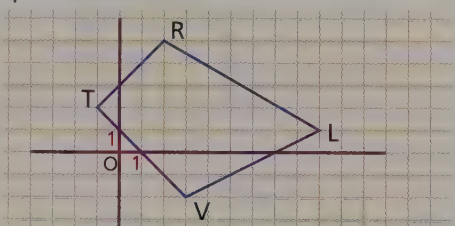
- 57** A, S et B sont trois points quelconques.
- Construire R image de B par la translation qui transforme A en S. Quelle est la nature du quadrilatère ASRB ?
 - Construire G image de B par la translation qui transforme S en A. Quelle est la nature du quadrilatère ASBG ?
 - Démontrer que B est le milieu de [RG].

- 58** Soit [AB] un diamètre d'un cercle de centre I. Soit C un point du cercle et D un point tel que C soit le milieu de [AD].
- Construire G image de D par la translation qui transforme I en A.
 - Démontrer que C est le milieu de [IG].
 - Démontrer que BDGI est un parallélogramme.
 - En déduire que (IG) est parallèle à (BD).

- 59** Soit ABO un triangle isocèle de sommet O. On appelle C le symétrique de A par rapport à O et D le symétrique de B par rapport à O. Montrer que ABCD est un rectangle.

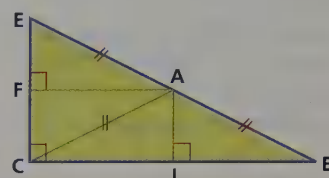
(Indication : montrer dans un premier temps que ABCD est un parallélogramme.)

- 60** a) Reproduire le repère (unités 1 cm) et le quadrilatère RLVT.



- b) Déterminer les coordonnées des quatre sommets du quadrilatère. Transformer ces coordonnées en conservant les abscisses, mais en remplaçant les ordonnées par leurs opposés. Placer les points correspondants sur le repère. Quelle transformation permet de passer du premier quadrilatère à celui qui vient d'être dessiné ?
- c) On peut obtenir d'autres transformations de la figure d'origine en prenant les opposés des abscisses, les opposés des abscisses et des ordonnées, en inversant abscisses et ordonnées, ou en ajoutant (-3) aux ordonnées et aux abscisses. Dans chaque cas, reproduire le repère et le quadrilatère et placer les points dont les coordonnées ont été transformées. Déterminer les transformations géométriques correspondantes.

- 61** BEC est un triangle rectangle en C. A est le milieu de [BE]. Les perpendiculaires aux côtés du triangle issues de A coupent [BC] et [EC] respectivement en I et F.



Indiquer les transformations qui permettent de passer du premier triangle au deuxième triangle dans chacun des cas suivants. Préciser les éléments caractéristiques de ces transformations à l'aide de points déjà nommés sur la figure.

1 ^{er} Triangle	AIC	ABI	ACF	AIB
2 ^e Triangle	AIB	EAF	AIC	FCI
Transformation				

- 62** ABCD est un trapèze de bases [AD] et [BC] et ABJD est un parallélogramme. B est le milieu de [AP] et APHD est un parallélogramme. L est l'image de C par la translation qui transforme D en J.

- Faire une figure.
- Quelle est l'image de B par la translation qui transforme A en B ? Quel point a pour image J par la même translation ?
- D se translate en H, quelle est l'image de A par cette translation ? C est le translaté de D, quel point a pour image L par cette translation ?
- Trouver des points qui se correspondent dans la translation qui transforme H en L.

- 63** ABSTUD est un hexagone régulier. I est le centre de cet hexagone.

- Quelle est l'image de D par la translation qui transforme A en B ?
- Quelle est l'image du point I par la translation qui transforme A en I ?
- B a pour translaté I. Quel est le point de la figure qui a pour image T par cette translation ?
- S est l'image de I par une translation, quel point a pour translaté B ?

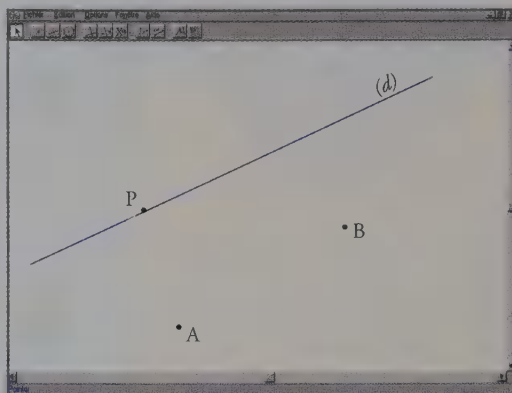


- 64** Avec un logiciel de constructions géométriques, tracer une droite (d) , deux points A et B n'appartenant pas à (d) .

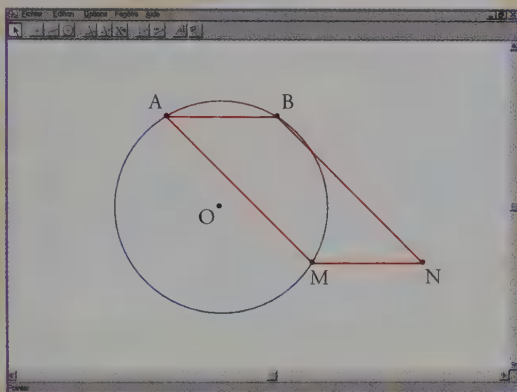
Placer un point P sur la droite (d) .

Construire le point M pour que MAPB soit un parallélogramme.

Utiliser la commande « trace » du logiciel pour faire apparaître les emplacements du point M lorsque P se déplace sur (d) : cliquer sur la commande « trace », cliquer sur le point M, déplacer le point P le long de la droite (d) . La trace du point M s'affiche sur l'écran. Comment se situent tous les points M lorsque P se déplace sur (d) ?



65



Avec un logiciel de constructions géométriques, tracer un cercle de centre O et deux points A et B du cercle.

- Placer un point M sur le cercle. Construire le parallélogramme ABNM.
- Utiliser la commande « trace » du logiciel pour faire apparaître les emplacements du point N lorsque le point M se déplace sur le cercle.
- Comment se situent tous les points N lorsque M se déplace sur le cercle ? Expliquer le résultat.

66 Avec Cabri- Géomètre

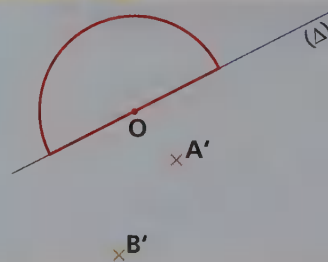
Les mots en **couleur** correspondent à une commande du logiciel Cabri-Géomètre®.

- Tracer un **triangle** ABC.
- Trouver une suite d'instructions permettant de construire le point E, image du point A par la translation qui transforme B en C.
- Placer un **point** G à l'extérieur du quadrilatère ABCE.
- Utiliser la méthode trouvée au b) pour construire le point H image du point C par la translation qui transforme E en G.
- Construire le **polygone** ABHG. Quelle semble être la nature de ce quadrilatère ?
- Déplacer** le point A, ou le point B, ou le point C. Quelle conjecture peut-on faire ?

Vocabulaire

Conjecture : supposition que l'on cherchera à vérifier.

67



Tracer une droite (Δ) et un demi-cercle $\mathcal{C}$ dont le centre O est sur (Δ) et le rayon est 2,5 cm.

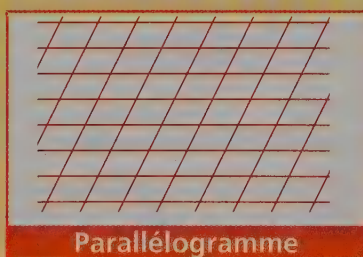
Placer deux points A' et B' n'appartenant ni à (Δ) ni à $\mathcal{C}$.

On veut construire les points A et B dont A' et B' sont les images par une même translation.

- Sachant que A est sur le demi-cercle et B est sur la droite, construire, dans cet ordre, l'image (Δ') de la droite (Δ) , O' translaté du point O, $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$, les points A et B.
- En général on peut construire deux points O'. Modifier la figure pour qu'il n'existe qu'un seul point O'. Modifier la figure pour que le point O' n'existe pas.

PAVER UNE SURFACE

Un parallélogramme (particulier ou non) pave une surface plane, c'est à dire qu'avec ce parallélogramme, on peut recouvrir la surface sans trous ni superpositions. Le pavé de base est reproduit à l'infini par des translations.



MOTIF DE BASE ET REPRODUCTIONS

Le motif de base peut-être plus petit que le pavé. On complète alors le pavé par des symétries, puis on le reproduit par des translations.

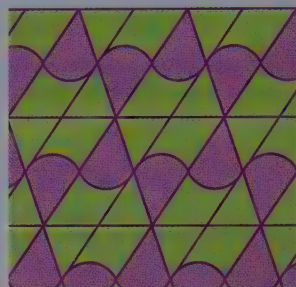
Pavé parallélogramme en utilisant un centre de symétrie



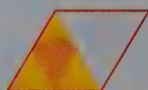
Motif de base



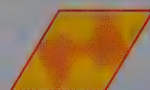
Pavé de base



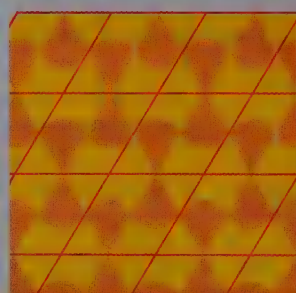
Pavé losange en utilisant un axe de symétrie



Motif de base



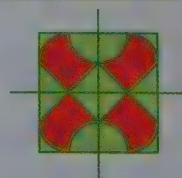
Pavé de base



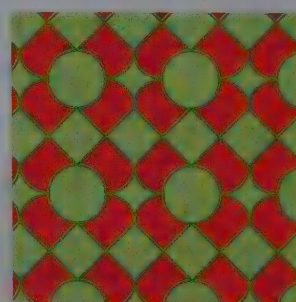
Pavé carré en utilisant deux axes de symétrie



Motif de base

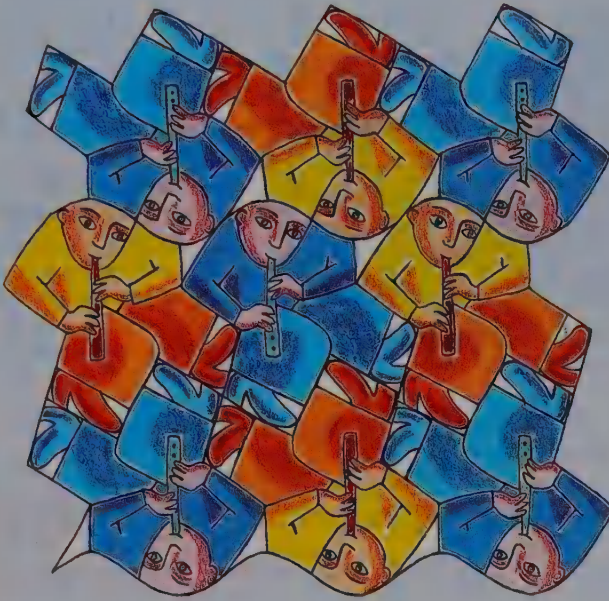
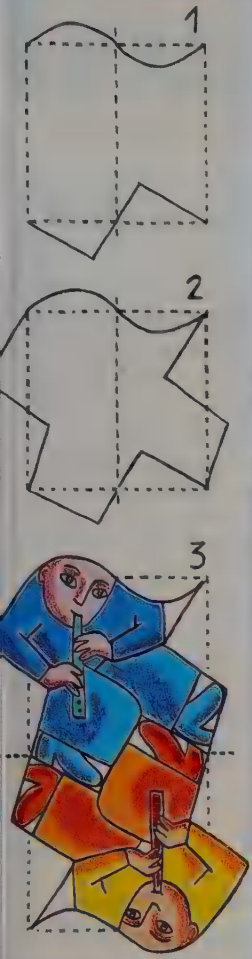


Pavé de base

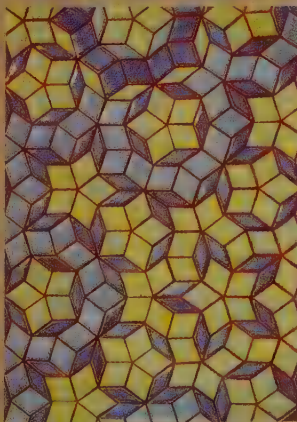


quelques
conseils
pour créer
un pavage
personnel !

- S'assurer des propriétés de symétries des parallélogrammes utilisés !
- S'aider dans un premier temps de réseau de papier pointé. On peut aussi construire le réseau de parallélogrammes sur une feuille de dessin, le résultat final sera plus esthétique.
- Les motifs géométriques sont ici remplacés par un motif plus figuratif. Des dégradés de couleur donneront de la profondeur.



À travers L'Histoire



En 1974, le mathématicien Penrose a trouvé un pavage qui utilise des formes régulières que l'on répète de façon irrégulière (voir ci-contre). Dix ans plus tard des chimistes ont découvert des quasi-cristaux dont le pavage de Penrose est un modèle. Et la poêle à frire n'attache plus puisque le revêtement Teflon® utilise les propriétés de ces quasi-cristaux.

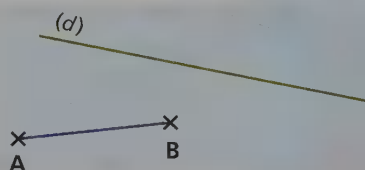
ce que je dois savoir sur...

...Les parallélogrammes et Les translations

- Connaître les propriétés des parallélogrammes et savoir les utiliser.
- Savoir construire l'image d'un point par une translation donnée.
- Savoir construire l'image d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite et d'un cercle par une translation donnée.

je m'évalue

- 1 a) Reproduire la figure.



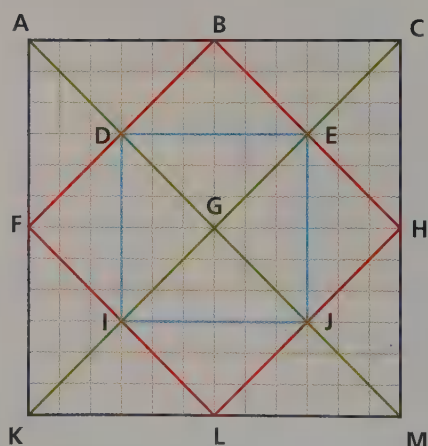
Construire le parallélogramme ABCD tel que :

- le côté [BC] est parallèle à la droite (d) ;
- le côté [BC] a la même longueur que le côté [AB].

- b) Démontrer que ABCD est un losange.

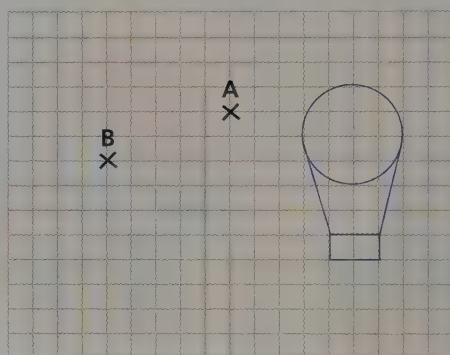
- 2 Recopier les phrases et observer la figure pour les compléter.

- a) Par la translation qui transforme E en D, C a pour image...
- b) Par la translation qui transforme M en H, ... a pour image D.
- c) Par la translation qui transforme A en F, L est l'image de ...
- d) G est l'image de K par la translation qui transforme L en ...
- e) Par la translation qui transforme A en G, ... a pour image...

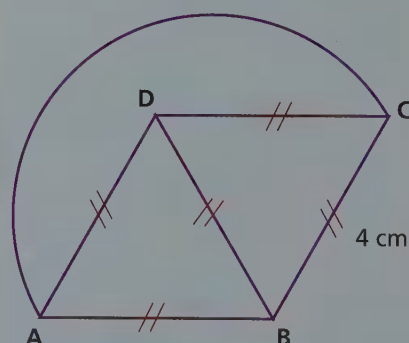


- 3 Reproduire le dessin et construire son image :

- par la translation qui transforme A en B ;
- par la symétrie de centre A.



- 4 a) Reproduire la figure en tenant compte des codages (le demi-cercle a pour diamètre [AC]).
- b) Construire en vert l'image de la figure par la translation qui transforme A en B.
- c) Construire en bleu l'image de la figure par la translation qui transforme C en A.



TRIANGLE ET PROPORTIONNALITÉ

En 6^{ème}-5^{ème}

- Construire des triangles et quadrilatères particuliers et utiliser leurs propriétés.
- Trouver, dans des situations numériques simples, le nombre par lequel diviser un nombre donné pour obtenir un résultat donné.

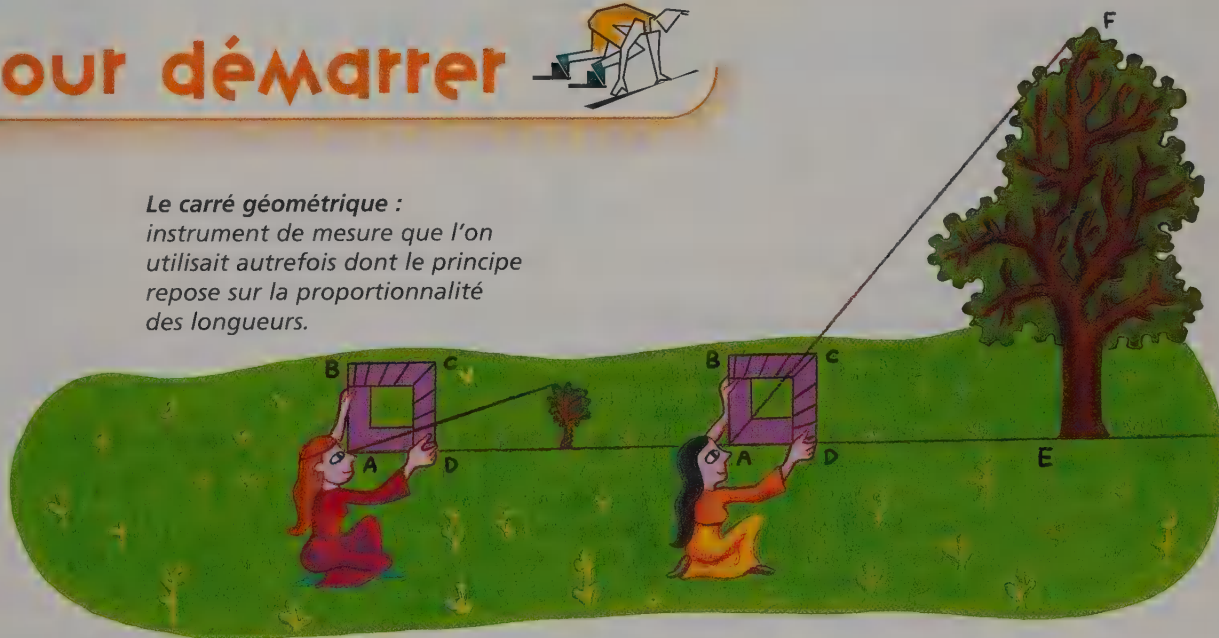
En 4^{ème}

- Connaître et utiliser les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle.
- Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes.

pour démarrer



Le carré géométrique :
instrument de mesure que l'on utilisait autrefois dont le principe repose sur la proportionnalité des longueurs.



1 Codages - Décodages ...

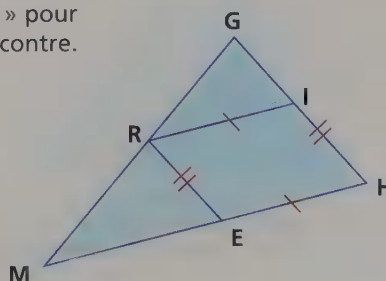
• Lire les codages sur une figure.

• Se méfier de ce qu'on peut « voir » sur un dessin.

Des géomètres ont utilisé un « carré géométrique » pour prendre des mesures, puis ils ont tracé la figure ci-contre.

Parmi ces affirmations, lesquelles sont exactes ?

- $IR = HE$
- $RE = GI$
- E est le milieu de [HM]
- IREH est un parallélogramme
- (IR) est parallèle à (HE)
- (IE) est parallèle à (GM)



Activités

2 Qui suis-je ?

Trouver le nombre manquant pour que l'égalité soit vraie.

$$\frac{a}{3} = \frac{20}{15}; \quad \frac{2}{7} = \frac{6}{b}; \quad \frac{y}{8} = \frac{3}{20}; \quad \frac{6}{t} = \frac{1,2}{5}$$

Pré-requis : quotients égaux.

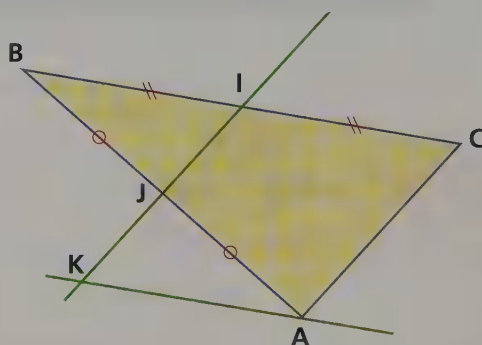
3 Un triangle et deux milieux

ÉTAPE 1 : une observation

Tracer trois triangles ABC, tous différents les uns des autres.
Dans chacun des triangles, tracer la droite (IJ) joignant le milieu I de [BC] et le milieu J de [AB]. Quelles remarques peut-on faire ?

ÉTAPE 2 : une démonstration

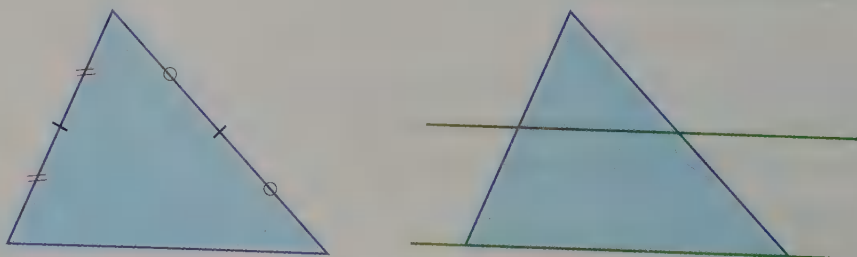
Tracer un autre triangle ABC, les points I et J puis construire le point K symétrique de I par rapport à J.



- 1) Donner la propriété qui permet de démontrer que BIAK est un parallélogramme.
- 2) Que peut-on écrire à propos des segments [CI] et [AK] ?
En déduire que AKIC est un parallélogramme.
- 3) Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
- 4) Expliquer pourquoi IJ est la moitié de AC.
- 5) Énoncer la propriété qui vient d'être démontrée et que l'on a observée à l'étape 1.

ÉTAPE 3 : ce qu'il faut retenir

Les deux figures suivantes représentent la propriété précédente.



- 1) Le codage de la première figure représente les conditions d'utilisation de la propriété. Écrire ces conditions.
- 2) La deuxième figure met en évidence la conclusion. Écrire cette conclusion.

• L'observation peut conduire à plusieurs conjectures.

• La difficulté de la recherche provient d'un enchaînement de propriétés.
Il est essentiel de laisser du temps avant la mise en commun.

• On pourra admettre les propriétés, guider la démonstration ou demander de rédiger en devoir à la maison.

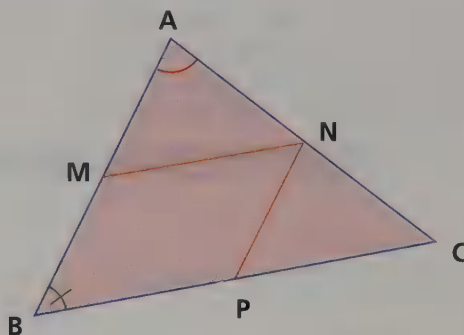
• Donner des images mentales, des représentations, d'un théorème d'une manière dynamique en distinguant les hypothèses de la conclusion.

4 Triangle, milieu et parallèle

ABC est un triangle, M est le milieu de [AB].

Tracer la parallèle à (BC) passant par M, elle coupe [AC] en N.

Construire la parallèle à (AB) passant par N, elle coupe [BC] en P.

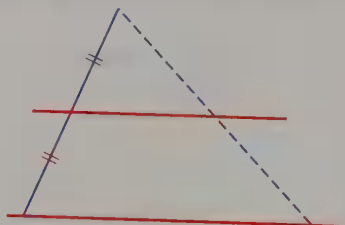


1) Démontrer que les angles $\widehat{AMN}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{NPC}$ sont égaux.
Démontrer que les angles $\widehat{MAN}$ et $\widehat{PNC}$ sont égaux.

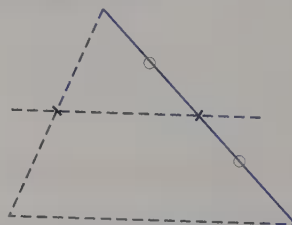
2) Utiliser des propriétés des milieux et des parallélogrammes pour démontrer que $AM = MB = NP$.

3) Dans la translation qui transforme A en N, quelle est l'image du point M ? Du triangle AMN ?
Comparer alors AN et NC et en déduire que N est le milieu de [AC].

4) Les questions précédentes permettent de démontrer une nouvelle propriété. Les deux figures ci-dessous illustrent cette propriété, l'énoncer.



Ce que je sais



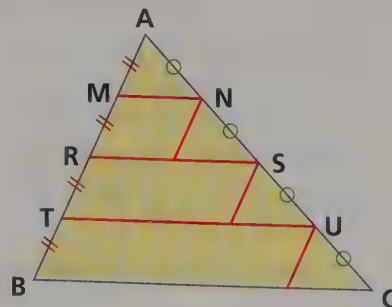
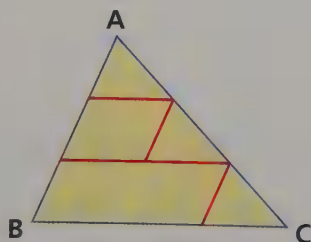
Ce que je conclus

5 Un prolongement utile

Une démonstration de l'activité précédente date du XVII^e siècle. Avec le vocabulaire de l'époque, elle figure dans les « *Éléments de géométrie* » de Clairaut. Celui-ci prolonge cette propriété à d'autres partages.

Dans les deux figures ci-dessous, les codages rouges indiquent ce dont on est sûr et les codages verts ce que l'on conclut.

Quelles propriétés Clairaut aurait-il pu écrire à propos de ces figures ?

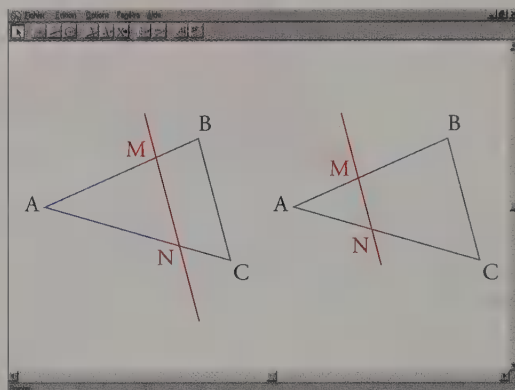


6 — Droite parallèle à un côté d'un triangle

Construire un triangle ABC. Placer un point M sur [AB] et tracer une droite parallèle à (BC) passant par M.

Cette droite coupe [AC] en un point N.

Faire varier la position du point M sur [AB].



Pour chaque position du point M :

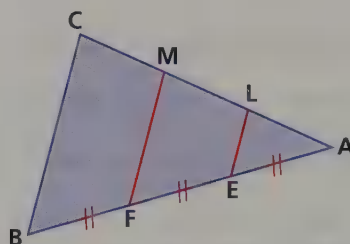
- mesurer les longueurs AB, AC, BC, puis AM, AN et MN ;
- reproduire le tableau ci-dessous et reporter les mesures.

Dans le triangle ABC	AB =	AC =	BC =
Dans le triangle AMN	AM =	AN =	MN =

Aux erreurs de mesure près, vérifier que chaque tableau correspondant à une position de M est un tableau de proportionnalité.

7 — Un partage en trois

Dans un triangle ABC, on a partagé en trois parties égales le côté [AB] et on a tracé les parallèles à (BC) passant par E et F qui coupent respectivement [AC] en L et en M.



Il semble que le segment [AC] soit aussi partagé en trois parties égales. Les questions ci-dessous permettent de le démontrer.

- 1) Démontrer que L est le milieu de [AM].
- 2) Tracer le segment [CE], il coupe [MF] en D.
Démontrer que D est le milieu de [CE].
- 3) Démontrer que M est le milieu de [CL].
- 4) Dédire que L et M partagent [AC] en trois parties égales, c'est-à-dire que $AL = LM = MC$.

Quelles sont les valeurs des rapports $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AL}{AC}$? $\frac{AF}{AB}$ et $\frac{AM}{AC}$?

UNE APPROCHE
DYNAMIQUE

• Utiliser un logiciel de constructions géométriques ou faire réaliser les dessins par les élèves avec les instruments usuels.

• La mise en commun doit permettre de dégager la propriété de proportionnalité des longueurs des côtés.

• On pourra faire écrire des égalités de quotients et donner un premier énoncé de la propriété de proportionnalité des longueurs.

PROPORTIONNALITÉ LORS
D'UN PARTAGE EN TROIS
PARTIES ÉGALES
Étape 1 : la démonstration

• Le triangle doit être partagé en plusieurs sous-figures pour pouvoir démontrer.

• Utilisation de la propriété des milieux dans deux triangles successifs.

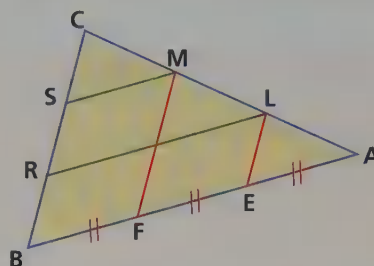
PROPORTIONNALITÉ LORS
D'UN PARTAGE EN TROIS
PARTIES ÉGALES

Étape 2 :
introduction du
troisième quotient
et démonstration

On pourra faire
une relation avec
l'activité 5.

8 — Un partage en trois... suite

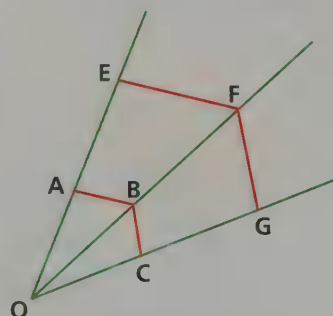
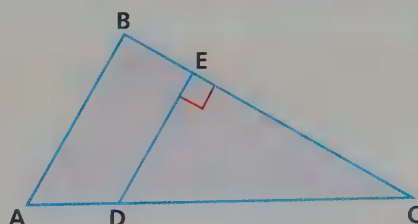
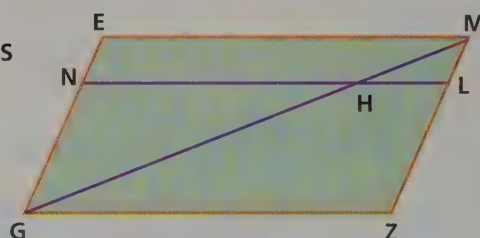
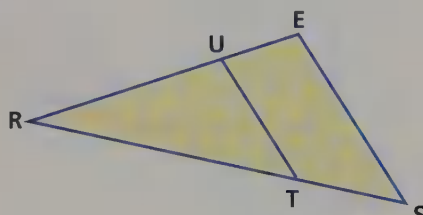
Reprendre la figure précédente et la compléter en traçant les parallèles à (AB) passant par L et M. Elles coupent [BC] en R et S.



- 1) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que R et S partagent le segment [BC] en trois parties égales.
- 2) Démontrer que ELRB est un parallélogramme.
- 3) En déduire que $\frac{EL}{BC} = \frac{1}{3}$ et que $\frac{FM}{BC} = \frac{2}{3}$.
- 4) Écrire des égalités de quotients que l'on peut trouver à partir de la figure précédente.

9 — Application

Pour chacune des figures suivantes, écrire des égalités de quotients de longueurs des côtés en précisant les triangles et en mentionnant les conditions manquantes.



• Apprendre à
regarder
les éléments utiles
d'une figure.

• Utilisation de
la propriété
découverte ci-dessus.

• Mise en évidence
des conditions
d'utilisation
d'une propriété.

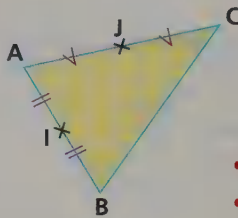
L'essentiel en deux pages

1 Droite des milieux

a) Propriété permettant de démontrer que deux droites sont parallèles

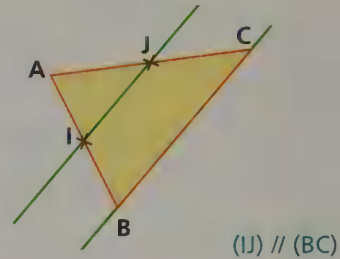
Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

DONNÉES



- ABC triangle
- I milieu de [AB]
- J milieu de [AC]

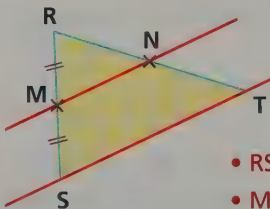
CONCLUSION



b) Propriété permettant de démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

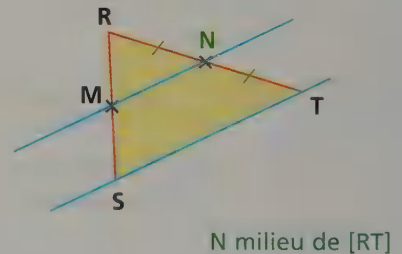
Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

DONNÉES



- RST triangle
- M milieu de [RS]
- (MN) // (ST)

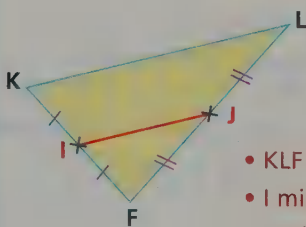
CONCLUSION



c) Propriété permettant de calculer une longueur

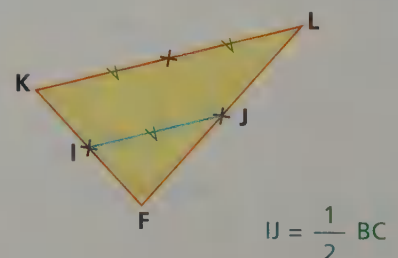
Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est la moitié de la longueur du troisième côté.

DONNÉES



- KLF triangle
- I milieu de [KF]
- J milieu de [FL]

CONCLUSION



2 Triangle et Proportionnalité

Propriété permettant de calculer des longueurs

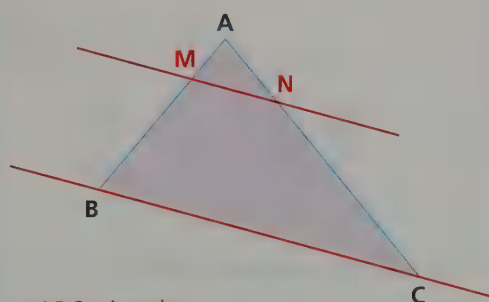
Si, dans un triangle ABC, M est un point du segment [AB], N est un point du segment [AC] et les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors on a l'égalité des quotients :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Cas où $M \in [AB]$

M est placé sur le segment [AB] et N est placé sur le segment [AC].

DONNÉES



- ABC triangle
- $M \in [AB]$
- $N \in [AC]$
- $(BC) \parallel (MN)$

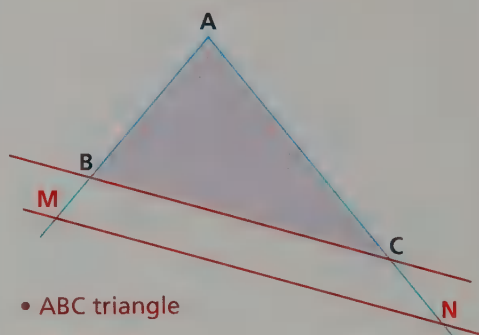
CONCLUSION

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Cas où $M \in [AB]$

Cette propriété est encore vraie dans le cas où M est placé sur la demi-droite [AB] à l'extérieur du segment [AB] et N est placé sur la demi-droite [AC] à l'extérieur du segment [AC].

DONNÉES



- ABC triangle
- $M \in [AB]$
- $N \in [AC]$
- $(BC) \parallel (MN)$

CONCLUSION

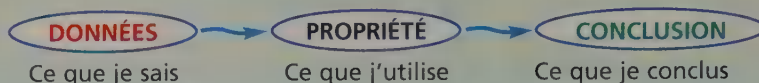
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



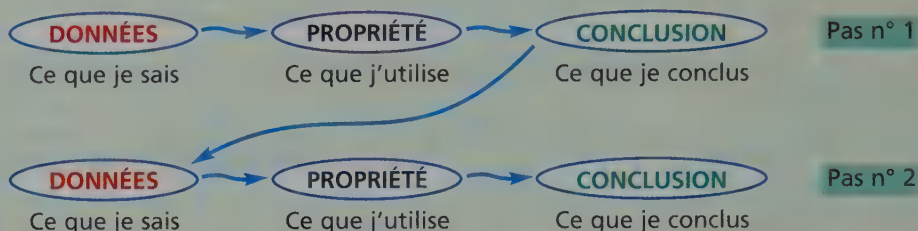
RECHERCHE D'UNE DÉMONSTRATION

Structure d'une démonstration

1) Une démonstration à un pas se présente sous la forme :



2) Une démonstration peut comporter **plusieurs pas** les uns à la suite des autres. La conclusion d'un pas devient le point de départ du pas qui le suit.



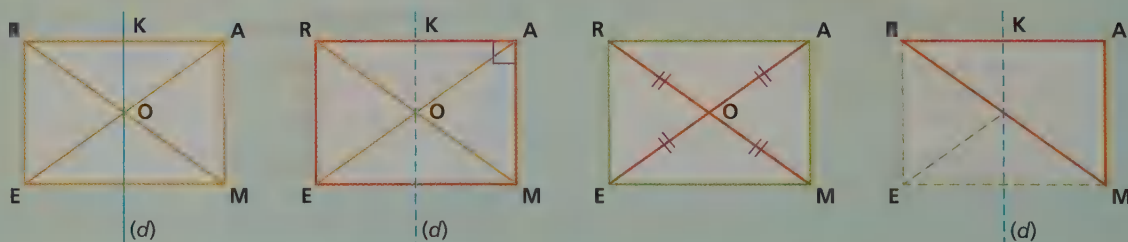
Un exemple

L'exemple suivant va permettre d'apprendre à chercher une démonstration.

Énoncé : RAME est un rectangle de centre O, avec $RA = 7$ et $RE = 3$.
La droite (d) parallèle à (AM) coupe [AR] en K. Calculer OK.

a) Voir des sous-figures utiles

On construit une figure et on cherche des parties de la figure qui peuvent être utiles.



b) Brouillon de recherche

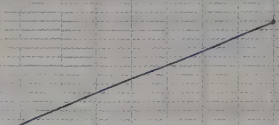
On cherche la démonstration dans l'ordre où les idées viennent.

On cherche { soit à partir de ce qui est donné dans le texte,
soit à partir de ce qu'il faut démontrer.

Certaines pistes peuvent être fausses ou aboutir à une impasse, dans ce cas on cherche une autre direction.

On remplit les cases d'un tableau de recherche dans n'importe quel ordre selon que c'est une donnée, une propriété ou une définition, une conclusion. Les mots écrits en **rouge** correspondent à ce que l'on sait et les mots écrits en **vert** correspondent à ce que l'on conclut.

Les numéros des cases correspondent à l'ordre dans lequel elles ont été remplies.

ce que je sais	ce que j'utilise	ce que je conclus	
RAME est un rectangle (1)	Un rectangle est un (2) parallélogramme qui a un angle droit.	$\widehat{RAM}$ est un angle droit (3)	(a) inutile
RAME est un rectangle (4)	Si un quadrilatère est un (5) rectangle alors ses diagonales ont le même milieu.	$RM = AE$ (6)	(b) inutile
milieu ?? milieu ??	Si dans un triangle, une (7) droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.		(c) abandon
RAM triangle (d) est parallèle à (AM) milieu ?? O milieu de [RM] (14)	Si, dans un triangle, une (8) droite passe par le milieu d'un côté, et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.	K milieu de [RA] (10)	(d)
RAME est un rectangle de (13) centre O.	Si un quadrilatère est un (11) rectangle, alors ses diagonales ont le même milieu.	O est le milieu de [AM] (12) et de [AE]	(e) ligne d'à compléter
(RA) perpendiculaire à (RM) ? perpendiculaire à ? (16)	Si deux droites sont (15) perpendiculaires à une même troisième alors les deux droites sont parallèles.	???	(f) abandon.
RAM triangle O milieu de [RM] K milieu de [RA]	(13) Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est la moitié de la longueur du troisième côté.	$OK = \frac{1}{2} AM$ (17)	(g)
$OK = \frac{1}{2} AM$ $AM = 3$	(20) Propriété de l'égalité (22) Deux quantités égales à une 3 ^{ème} .	$OK = \frac{1}{2} \times 3$; $OK = \frac{3}{2}$ (21)	(h)

c) Brouillon de rédaction

On rédige en gardant les lignes utiles et en organisant, dans l'ordre, des pas qui se suivent.

Dans cet exemple, les lignes inutiles sont : (a)-(b)-(c)-(f).

L'ordre d'écriture de la démonstration est : (e)-(d)-(g)-(h).

- (e) On sait que RAME est un rectangle de centre O.
Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont le même milieu.
Donc la diagonale [RM] a pour milieu le point O.
- (d) Dans le triangle RAM, on sait que (d) est parallèle à (RA) et que O est milieu de [RM].
Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.
Donc K est le milieu de [RA].
- (g) Dans le triangle RAM, on sait que K est le milieu de [RA] et que O est le milieu de [RM].
Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est la moitié de la longueur du troisième côté.

$$\text{Donc } OK = \frac{1}{2} AM.$$

- (h) On sait que $OK = \frac{1}{2} AM$ et $AM = 3$.

D'après une propriété de l'égalité :

$$OK = \frac{1}{2} \times 3 ; OK = \frac{3}{2}$$

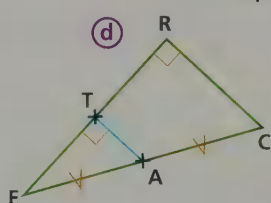
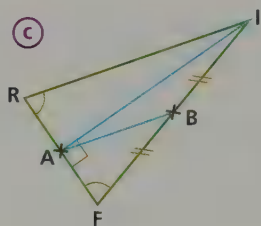
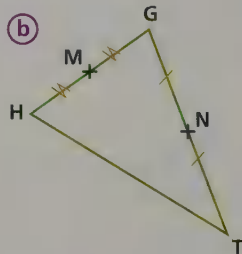
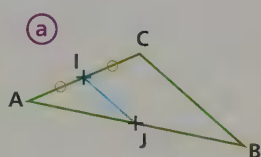
RECONNAITRE

1 Citer trois propriétés permettant de conclure qu'un point est le milieu d'un segment.

2 Voici deux propriétés :

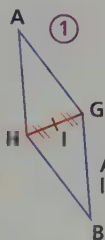
- ① Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.
- ② Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

Pour chacune des figures suivantes, indiquer la propriété qu'il est possible d'utiliser. Expliquer la réponse.

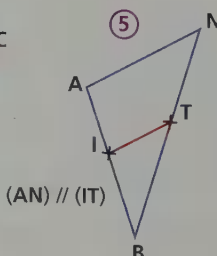
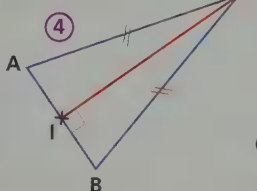
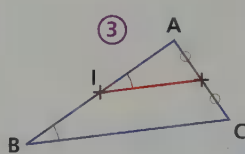


Chasser le(s) intrus

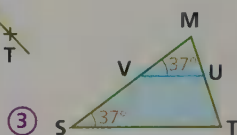
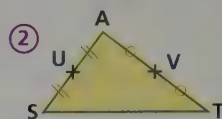
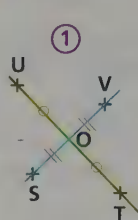
Dans quel(s) cas le point I n'est-il pas le milieu de [AB] ?



(2) $AI = IB$



4 Expliquer, dans chaque cas, pourquoi les droites (UV) et (ST) sont parallèles.



5 Tracer un triangle DEF tel que :

$EF = 9 \text{ cm}$; $DE = 5,2 \text{ cm}$; $DF = 4,8 \text{ cm}$

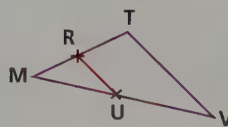


I est le milieu du segment [DE] et J le milieu du segment [DF].

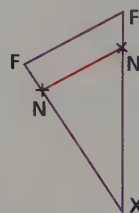
Calculer la longueur IJ.

6 Les figures ci-dessous vérifient les conditions d'une propriété du cours. Énoncer la propriété.

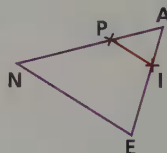
Écrire dans chaque cas les égalités de quotients.



$(RU) \parallel (TV)$



$(FF') \parallel (NN')$

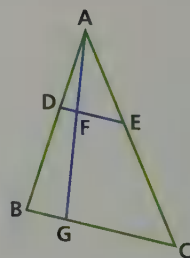


$(NE) \parallel (PI)$

7 Dans le triangle ABC, les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

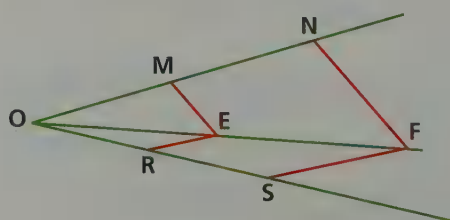
Écrire quatre quotients

égaux à $\frac{FE}{GC}$.

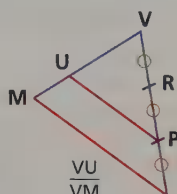
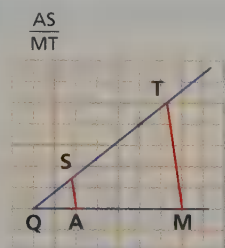
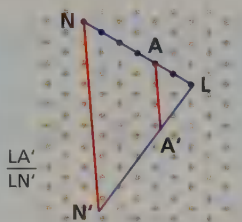
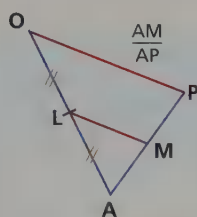


8 Dans la figure ci-dessous, on sait que $(ME) \parallel (NF)$ et que $(ER) \parallel (FS)$.

Écrire des égalités de quotients.



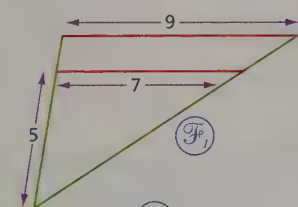
- 9 — Voici quatre dessins sur lesquels les « droites rouges » sont parallèles. Déterminer la valeur de chaque rapport.



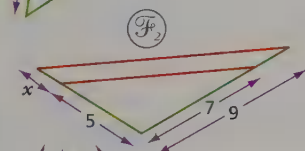
- 10 — GLJ est un triangle, R un point du segment [GJ] et K un point du segment [GL] tel que les droites (KR) et (LJ) soient parallèles. Compléter avec les symboles « = » ou « ≠ ».

- a) $\frac{GK}{GL} \dots \frac{GR}{GJ}$ b) $\frac{GK}{GL} \dots \frac{GJ}{GR}$ c) $\frac{KR}{LJ} \dots \frac{GJ}{GR}$
d) $\frac{LJ}{KL} \dots \frac{GL}{GK}$ e) $\frac{GK}{KL} \dots \frac{KR}{LJ}$

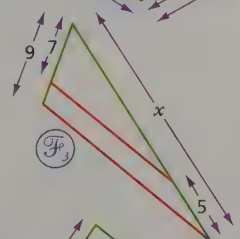
- 11 — Les « droites en rouge » sont parallèles. Associer chaque figure $\mathcal{F}_i$ à une égalité E :



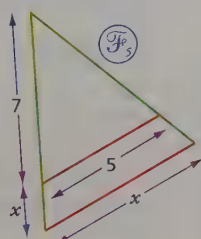
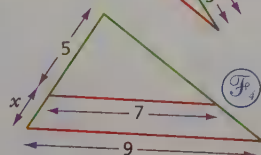
E1
 $\frac{5}{5+x} = \frac{7}{9}$



E2
 $\frac{5}{x} = \frac{7}{9}$



E3
 $\frac{x-5}{x} = \frac{7}{9}$



Méthode

Comment calculer une longueur

Énoncé

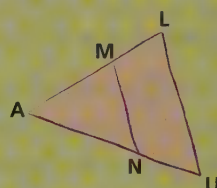
Dans le triangle ALU, on sait que M est sur [AL] et N sur [AU] avec (MN) parallèle à (BC).

AL = 12 ; AM = 5 et MN = 8.

Calculer LU.

Exemple de solution

Tracer un dessin à main levée.



Dans le triangle ALU, les points A, M et L sont alignés, les points A, N, U sont alignés et les droites (MN) et (BC) sont parallèles, d'après la propriété de proportionnalité des longueurs :

$$\frac{AM}{AL} = \frac{AN}{AU} = \frac{MN}{LU}$$

En remplaçant par les valeurs numériques :

$$\frac{5}{12} = \frac{8}{LU} \text{ d'où } 5 \times LU = 8 \times 12$$

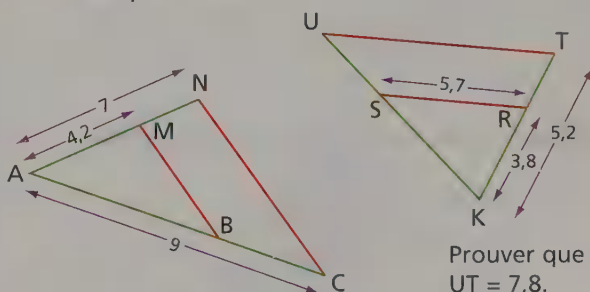
$$LU = \frac{8 \times 12}{5} \text{ donc } LU = 19,2.$$

- 12 — Trouver le nombre x tel que :

a) $\frac{2}{5} = \frac{4}{x}$ b) $\frac{x}{3} = \frac{7}{15}$

c) $\frac{4}{x} = \frac{10}{7}$ d) $\frac{2}{5} = \frac{x}{4}$

- 13 — Les dessins ci-dessous ont été réalisés sans respecter les dimensions. Les « droites en rouges » sont parallèles.



Prouver que
AB = 5,4.

Prouver que
UT = 7,8.

exercices

- 14** Les droites (RT) et (BC) sont parallèles.

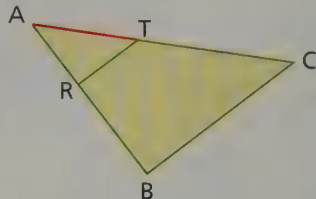
On donne :

$$AB = 5$$

$$AC = 7$$

$$AR = 2$$

Calculer AT.



- 15** Les droites (IJ) et (BO) sont parallèles.

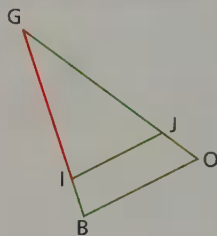
On donne :

$$GB = 9$$

$$GO = 10$$

$$GJ = 8$$

Calculer GI.



- 16** Les droites (MS) et (VR) sont parallèles.

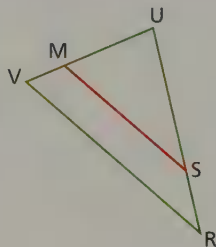
On donne :

$$UV = 6$$

$$VR = 10$$

$$UM = 4,2$$

Calculer MS.



- 17** Les droites (AB) et (LT) sont parallèles.

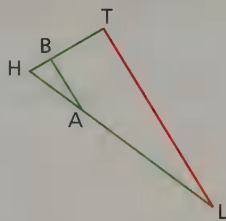
On donne :

$$HB = 1,4$$

$$HT = 4$$

$$AB = 3,5$$

Calculer LT.



- 18** Les droites (IE) et (RF) sont parallèles.

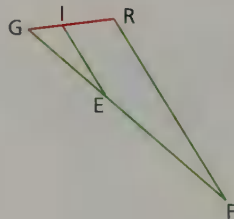
On donne :

$$GI = 7$$

$$GE = 21$$

$$GF = 54$$

Calculer GR.



- 19** Les droites (SY) et (ER) sont parallèles.

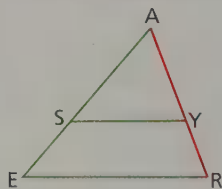
On donne :

$$AS = 5$$

$$SE = 3$$

$$AY = 4$$

Calculer AR.



- 20** Les droites (AM) et (BN) sont parallèles.

On donne :

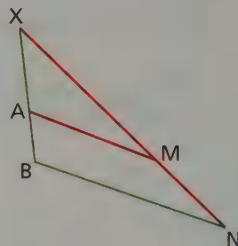
$$XA = 4$$

$$XB = 6,4$$

$$XM = 9$$

$$BN = 9,6$$

Calculer XN et AM.



- 21** Les droites (OP) et (HI) sont parallèles.

On donne :

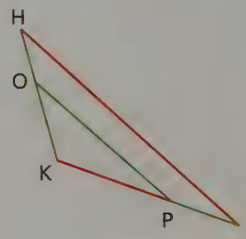
$$KO = 3$$

$$KH = 5$$

$$OP = 6,6$$

$$KI = 7$$

Calculer KP et HI.



- 22** On considère un triangle LNP, M un point de [LN], O un point de [LP] tels que les droites (MO) et (NP) soient parallèles. Dans chaque cas, calculer la longueur demandée.

1^{er} cas :

$$LP = 8,1 \text{ m} ; LM = 5 \text{ m} ; LO = 7,5 \text{ m}.$$

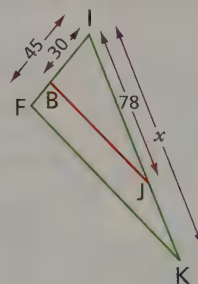
$$LN = ?$$

2^e cas :

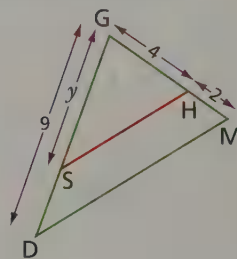
$$MN = 2,5 \text{ dm} ; LM = 5,5 \text{ dm} ; LP = 14,4 \text{ dm}.$$

$$LO = ?$$

- 23** Des équations !



Les droites (BJ) et (FK) sont parallèles. Trouver x .



Les droites (SH) et (DM) sont parallèles. Trouver y .

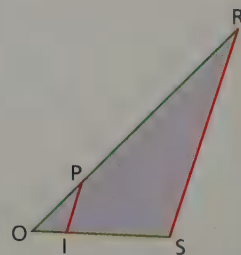
- 24** Les droites (PI) et (RS) sont parallèles.

On donne :

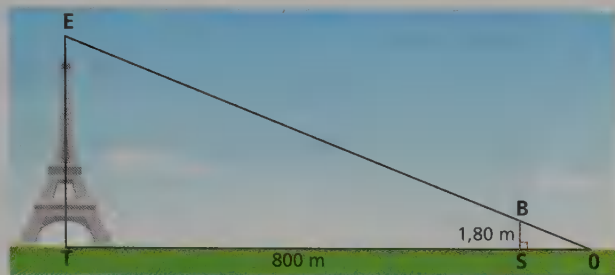
$$OP = 4 \text{ cm} ; OI = 2 \text{ cm} ;$$

$$PI = 3 \text{ cm et OS} = 8 \text{ cm}.$$

Calculer, en cm, le périmètre du triangle ORS.



- 25** Pour déterminer la hauteur de la Tour Eiffel, Bruno plante verticalement un bâton [SB] de 1,80 m et se place en O comme l'indique le schéma. Puis il relève les longueurs suivantes : OS = 4,5 m et OT = 800 m



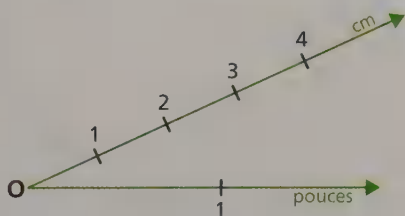
Calculer la hauteur de la Tour Eiffel.

RAISONNER ET CONSTRUIRE

- 26** Les anglo-saxons utilisent pour unité de longueur le « pouce ». 1 pouce est indiqué sur l'axe [Ox).

Découper le dessin.

En utilisant uniquement la règle non graduée et l'équerre, prolonger la graduation en pouces.



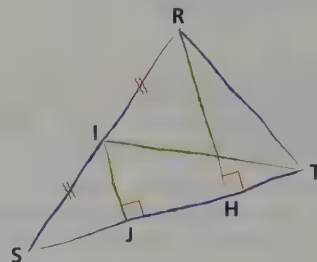
- 27** Construire un triangle ABC, le milieu I de [AB] et le milieu J de [AC]. Choisir un point V sur la droite (BC). Sans règle graduée, placer le point M milieu de [AV].

Comment justifier que le point obtenu est bien le milieu de [AV] ?

- 28** $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles sécants de centres respectifs O et O' tel que $OO' = 4$ cm. On appelle K l'un des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Construire en utilisant uniquement la règle non graduée, un segment [GH] de 8 cm tel que G soit un point du cercle $\mathcal{C}$ et H un point de $\mathcal{C}'$.

- 29** Dans le triangle RST, on appelle H le pied de la hauteur issue de R et I le milieu de [RS]. On appelle J le point d'intersection de la parallèle à (RH) passant par I avec la droite (ST).



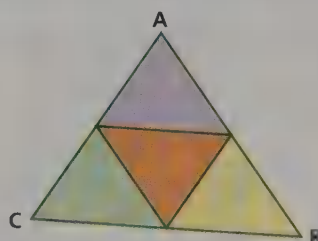
Le but de cet exercice est de construire le triangle RST avec les longueurs suivantes imposées : ST = 8 cm, RH = 5 cm et IT = 6 cm.

- Faire une figure à main levée.
- Montrer que J est le milieu de [SH].
- Montrer que $IJ = 2,5$ cm.
- Construire en grandeur réelle le triangle IJT et compléter la figure.

- 30** Le but de cet exercice est de tracer le trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] tel que AB = 6 cm ; CD = 10 cm ; BC = 5 cm et AD = 4 cm.

- Faire un dessin à main levée du trapèze ABCD en portant les dimensions.
- On appelle E le point d'intersection des droites (CB) et (DA).
 - Tracer la parallèle à (AD) passant par B qui coupe [DC] en F. Calculer CF.
 - En utilisant la propriété sur les longueurs des côtés de deux triangles, calculer EC et ED.
 - Construire le triangle ECD. En déduire la construction du trapèze BADC.

- 31** Un promoteur dispose d'un terrain triangulaire que l'on notera ABC. Il décide de le partager en quatre lots identiques. Pour cela, il joint les milieux des trois côtés du terrain ABC. Vérifier que le partage effectué permet d'obtenir quatre triangles identiques.



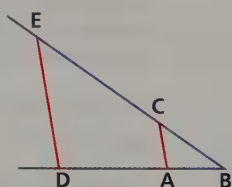
exercices

32 — La Géométrie au service du numérique



Descartes est l'un des plus grands philosophes français. C'était aussi un mathématicien, il est l'un des inventeurs de la géométrie analytique (avec des coordonnées). Descartes expliquait comment une opération peut se représenter géométriquement. Le texte ci-dessous concerne la multiplication.

« Soit par exemple AB l'unité et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ay qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication. »



Autrement dit, en langage moderne :

$$BE = BD \times BC \text{ quand } AB = 1.$$

- Démontrer ce résultat.
- « Construire » par cette méthode le produit $7,5 \times 3,2$ puis vérifier avec la calculette.
- De même, « construire » le produit $(-4,3) \times 6$ puis vérifier.
- Sur le même dessin, trouver le résultat de la division de BE par BD.
« Construire » le quotient de 7 par 5.

- 33** — Dessiner un triangle ABC. Construire un triangle AFG avec A, B, F alignés et A, C, G alignés tel que le périmètre du triangle AFG soit le double du périmètre du triangle ABC.

UTILISER LES PROPRIÉTÉS

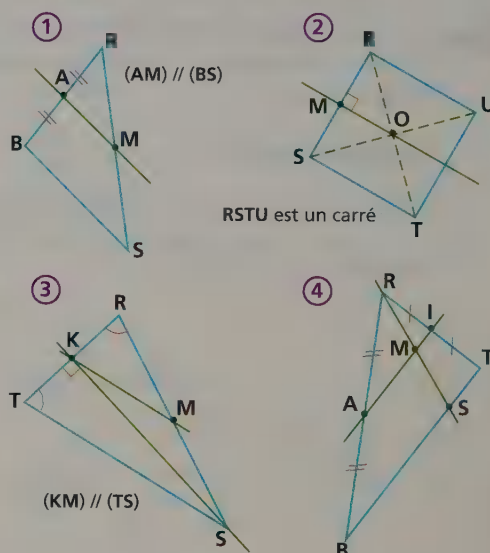
- 34** — Recopier et compléter les trois tableaux.

Ce que je sais	Ce que j'utilise	Ce que je déduis
Dans le triangle BAN, I est le milieu de [BA] et J est le milieu de [BN].	Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au 3 ^e côté.	

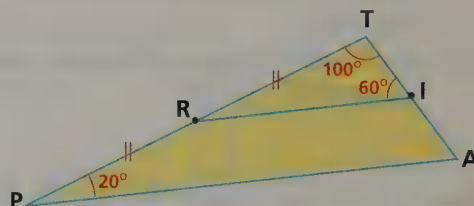
Ce que je sais	Ce que j'utilise	Ce que je déduis
Dans le triangle RVK, G est le milieu de [RV] et H est le milieu de [RK].		$GH = \frac{1}{2} \times \dots$

Ce que je sais	Ce que j'utilise	Ce que je déduis
Dans le triangle BSO, M est le milieu de [BS], T est sur [BO], les droites (MT) et (SO) sont		T est le milieu de [BO].

- 35** — Dans chaque cas, comment justifier que le point M est le milieu de [RS] ?



- 36** — En utilisant les indications portées sur la figure, prouver que I est le milieu de [TA].



- 37** — ABCD est un parallélogramme de centre O. La parallèle à (DC) passant par O coupe la droite (AD) en E. Que peut-on dire du point E ? Justifier la réponse.

- 38** — $\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O . M est un point de $\mathcal{C}$ et N est le symétrique de B par rapport à M .

Montrer que la droite (OM) est parallèle à la droite (AN) .

- 39** — $ABCD$ est un parallélogramme tel que :
 $AC = 5$ cm ; $AD = 3,8$ cm ; $DB = 8,2$ cm
 O est le point d'intersection des diagonales.
La parallèle à (DB) passant par C coupe (AD) en E .

- Construire une figure en expliquant la démarche.
- Calculer la longueur AE .
- Calculer EC .

- 40** — $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles de même centre O et de rayons respectifs R et R' tel que $R' = 2 \times R$.
 M et N sont deux points de $\mathcal{C}$ non diamétralement opposés.
 T et P sont deux points de $\mathcal{C}'$ tels que O, M, T et O, N, P soient alignés.

Montrer que les droites (MN) et (TP) sont parallèles.

- 41** — ISO est un triangle isocèle de sommet principal I . Les points L, A et G sont les milieux respectifs des côtés $[IS]$, $[SO]$ et $[OI]$.
Montrer que le quadrilatère $ILAG$ est un losange.

Exercice résolu

Énoncé

ABC est un triangle rectangle en B . I est un point de $[AB]$.

La perpendiculaire à (AB) passant par I coupe $[AC]$ en J . On donne $AC = 12$ cm ; $BC = 8$ cm et $AJ = 3$ cm.

Calculer IJ .

Exemple de solution

On sait que : $(BC) \perp (AB)$ car ABC est rectangle en B ; $(IJ) \perp (AB)$.

Or si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
Dans le triangle ABC :

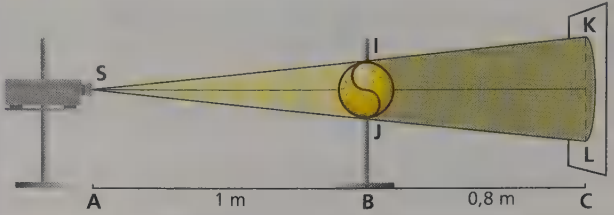
$$I \in [AB], \quad J \in [AC], \quad (IJ) \parallel (BC)$$

D'après la propriété sur la proportionnalité des longueurs des côtés de deux triangles, on a :

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC} \quad \text{donc} \quad \frac{3}{12} = \frac{IJ}{8}$$

$$IJ = \frac{3 \times 8}{12} \quad \text{donc} \quad IJ = 2 \text{ cm.}$$

- 42** — Une source de lumière S éclaire une balle de tennis de diamètre 6 cm. Les rayons lumineux $[SK]$ et $[SL]$, effleurant la balle en I , et J limitent la zone d'ombre portée sur l'écran.
On donne $AB = 1$ m et $BC = 0,8$ m.

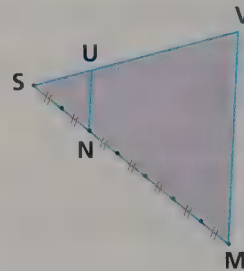


Calculer le diamètre KL de l'ombre.

- 43** — ABC est un triangle tel que $AB = 5$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 6$ cm.
 O est le point de $[AB]$ tel que $AO = 1,5$ cm et P est le point de $[AC]$ tel que $AP = 2,7$ cm.
On sait que les droites (OP) et (BC) sont parallèles.

Calculer le périmètre du quadrilatère $OPCB$.

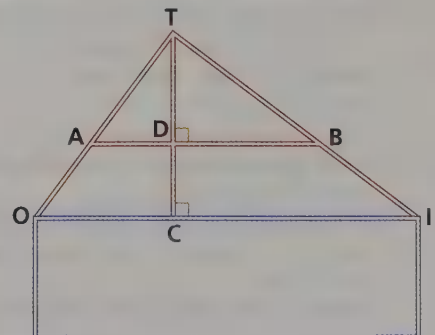
- 44** — Sur ce dessin, les droites (UN) et (VM) sont parallèles.



Calculer SM et SV sachant que :

$$SN = 3 \text{ et } SU = 2,5$$

- 45** — Voici la coupe d'une maison et de sa charpente :



On donne $TA = 9$; $AO = 6$; $OC = 9$; $CI = 16$; $TI = 20$.

Calculer TB et DB .

exercices

46 — Éclipse de lune

Une pièce de 2 euros a un diamètre de 2,5 cm. On la tend à bout de bras à 1 m de sa position un soir de pleine Lune. Elle masque entièrement le disque de la Lune.

Quel est le diamètre apparent de la Lune, sachant que la distance de la Terre à la Lune est d'environ 370 300 kilomètres.



Méthode

Comment démontrer que deux droites sont parallèles

Énoncé

$ABCD$ est un rectangle de centre I et M est le milieu de $[CD]$.

Démontrer que $[IM]$ est parallèle à (BC) .

Exemple de solution

I est le centre du rectangle. Un rectangle a ses diagonales qui ont le même milieu, donc I est milieu de $[BD]$.

Dans le triangle BCD , I est le milieu de $[BD]$ et M est milieu de $[CD]$.

D'après la propriété « si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté », on peut conclure que (IM) est parallèle à (BC) .

47 — Voici six données vérifiées par une figure :

- ① ISO est un triangle isocèle de sommet principal I .
- ② $IO = 8$ cm $SO = 6$ cm.
- ③ I' milieu de $[SO]$.
- ④ M est un point du segment $[IS]$, différent de I et de S .
- ⑤ La parallèle à (SO) passant par M coupe $[IO]$ en N .
- ⑥ La droite $(I'I)$ coupe (MN) en R .

a) Faire une figure.

b) Trouver trois configurations dans lesquelles la propriété sur la proportionnalité des longueurs des côtés de deux triangles s'applique.

Pour chaque configuration :

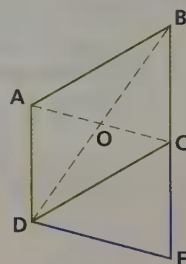
- faire une figure en n'indiquant que les points nécessaires ;
- énoncer les conditions d'utilisation de la propriété et montrer qu'elles s'appliquent à la figure ;
- en déduire les égalités de quotients.

c) En utilisant une des trois configurations, montrer que le triangle IMN est isocèle en I .

- 48 — $ABCD$ est un parallélogramme de centre O . E est le symétrique de B par rapport au point C .

Comment semblent être les droites (AC) et (DE) ?

Comment en être sûr ?



- 49 — $[GH]$ et $[NM]$ sont deux segments de même longueur 8 cm. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[GM], [MH], [HN]$ et $[GN]$.

Quel est la nature du quadrilatère $IJKL$? Justifier la réponse.

- 50 — $(\mathcal{D}_1), (\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$ sont trois droites concourantes en O .

E, F et G sont trois points placés respectivement sur $(\mathcal{D}_1), (\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$.

I est le milieu de $[OE]$.

U est le point d'intersection de la droite $(\mathcal{D}_2)$ avec la parallèle à (EF) passant par I .

T est le point d'intersection de la droite $(\mathcal{D}_3)$ avec la parallèle à (FG) passant par U .

Montrer que la droite (TI) est parallèle à la droite (GE) .

PROBLÈMES

- 51** Tracer un triangle ABC avec $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm et $BC = 8$ cm.

Placer un point D sur le segment [BC] tel que $BD = 1$ cm.

Tracer les parallèles à (AB) et (AC) passant par D. Elles coupent respectivement (AC) et (AB) en N et M.

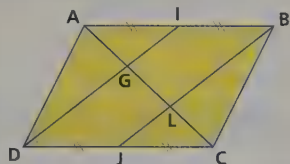
Calculer le périmètre de ANDM.

52 — Un problème du III^e siècle avant J.-C.



Euclide, mathématicien grec de l'Antiquité, dans son célèbre livre « Les Éléments » a démontré que

« les droites qui joignent deux sommets opposés d'un parallélogramme au milieu des côtés opposés divisent la diagonale qui joint deux autres sommets en trois parties égales ».



- Démontrer que IBDJ est un parallélogramme. En déduire que (DI) est parallèle à (JB).
- Utiliser le triangle ALB pour montrer que G est le milieu de [AL].
- Choisir le triangle qui convient pour démontrer que L est le milieu de [GC].
- En déduire que $GA = GL = LC$.

- 53** Le quadrilatère CARE est un carré de côté 3 cm et de centre O. M est le milieu du côté [CE]. N est le symétrique de M par rapport à E. La perpendiculaire à (CE) passant par N coupe la droite (CR) en G.

- Les droites (MO) et (ER) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.
- Les droites (ER) et (NG) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.
- Montrer que $CE = \frac{2}{3} CN$. Utiliser ce résultat pour trouver la longueur NG.

- 54** On considère un triangle quelconque TRI. Le point D est le point du segment [TI] tel que $TD = \frac{2}{3} TI$.

La parallèle à (TR) passant par D coupe (RI) en B. La parallèle à (TI) passant par B coupe (RT) en L. La parallèle à (RI) passant par L coupe (TI) en A.

- Quelle est la nature du quadrilatère IBLA ?
- Montrer que :
 $\bullet IB = \frac{1}{3} IR$ $\bullet TL = \frac{1}{3} TR$ $\bullet TA = \frac{1}{3} TI$
- En déduire que $TA = AD = DI$.

55 — Quadrilatère de Varignon

ABCD est un quadrilatère quelconque.

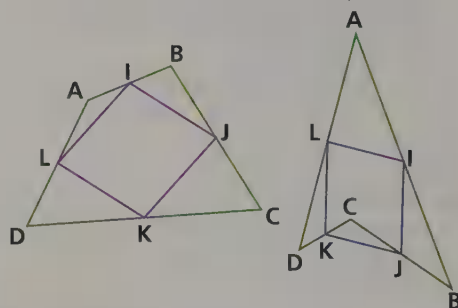
I est le milieu de [AB], K le milieu de [DC], M le milieu de [BC] et N le milieu de [AD].

- Montrer que les droites (IM) et (AC) sont parallèles et que $IM = \frac{1}{2} AC$.
- Montrer que les droites (NK) et (AC) sont parallèles et que $NK = \frac{1}{2} AC$.
- En déduire la nature du quadrilatère IMKN.
- Chercher des conditions sur ABCD pour que IJKL soit un rectangle, un losange ou un carré. (On pourra utiliser un logiciel de constructions géométriques.)

56 — Quadrilatère de Varignon (bis)

Tracer un quadrilatère ABCD et joindre les milieux I, J, K, L des côtés consécutifs.

Pierre Varignon, mathématicien français (1654-1722) a démontré le premier que IJKL est un parallélogramme. C'est ce qui vient d'être démontré dans l'exercice précédent.



- Démontrer que le périmètre du parallélogramme de Varignon est égal à la somme des longueurs des diagonales du quadrilatère de départ.
- Démontrer que l'aire du quadrilatère est le double de l'aire du parallélogramme de Varignon.

- 57** CRE est un triangle rectangle en R tel que $RE = 5,4$ cm et $RC = 7,2$ cm.

M est un point du segment [RE].

On pose $EM = x$ cm avec x inférieur à 5,4.

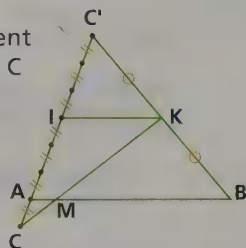
La parallèle à (RC) passant par M coupe (CE) en T.

La parallèle à (RE) passant par T coupe (CR) en V.

- Montrer que MTRV est un rectangle.
- En exprimant le quotient $\frac{ET}{EC}$ de deux façons différentes, montrer que $\frac{EM}{ER} = \frac{RV}{RC}$.
- En déduire que $RV = \frac{4}{3} x$.
- Exprimer l'aire de VTMR en fonction de x .

exercices

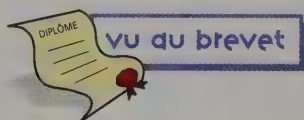
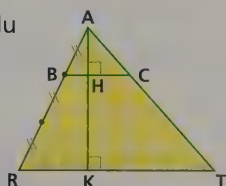
- 58** — Construire un segment $[AB]$ et placer un point C extérieur au segment. Construire un point C' tel que $AC' = 6 AC$. Placer I milieu de $[AC']$ et K milieu de $[BC']$.



- Quelle est la position des droites (AB) et (IK) ? Quelle est la relation entre IK et AB ?
- Calculer les quotients $\frac{AM}{IK}$ puis $\frac{AM}{AB}$.
- En déduire que le point M reste à la même position quel que soit le point C choisi.

- 59** — VERT est un rectangle. $(AB) \parallel (ET)$. I est le milieu de $[ET]$. J est le milieu de $[TR]$. Les longueurs sont données dans la même unité. Le dessin n'est pas tracé à l'échelle.
- Calculer l'aire de la surface hachurée.

- 60** — Montrer que l'aire du triangle ART est égale à 9 fois l'aire du triangle ABC .



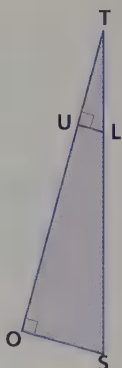
- 61** — Grenoble 1997



Une personne observe une éclipse de soleil. Cette situation est schématisée par le dessin ci-contre.

L'observateur est en T . Les points S (centre du Soleil), L (centre de la Lune) et T sont alignés. Le rayon SO du Soleil mesure 695000 km. Le rayon LU de la Lune mesure 1736 km. La distance TS est 150 millions de kilomètres.

Calculer la distance TL de la Terre à la Lune (on donnera l'arrondi au km).



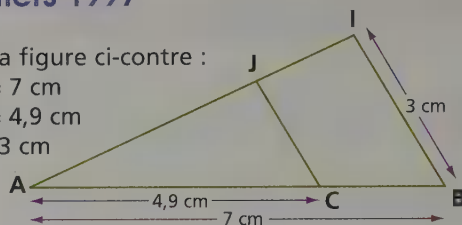
- 62** — Poitiers 1997

Sur la figure ci-contre :

$AB = 7$ cm

$AC = 4,9$ cm

$IB = 3$ cm



Les droites (JC) et (IB) sont parallèles. Démontrer que le triangle JCB est isocèle.

- 63** — Lille 1999

Dans ce problème, l'unité utilisée est le centimètre.

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O tel que : $AB = 8$ et $BC = 6$.

Soit E un point du segment $[AB]$ distinct de A et B . La parallèle à (BD) passant par E coupe $[AD]$ en F . On appelle G , le point du segment $[CD]$, symétrique de E par rapport à O , et H le point du segment $[BC]$, symétrique de F par rapport à O .

- Construire la figure.
- Démontrer que $EBGD$ est un parallélogramme.
- Soit K le point d'intersection de la droite (EF) et de la droite (CD) . Démontrer que $BEKD$ est un parallélogramme.
- Démontrer que D est le milieu de $[GK]$.
- Que représente la droite (AD) pour le segment $[GK]$? Justifier. En déduire que $FG = FK$. Démontrer que $BD = EF + FG$.
- Démontrer que $EFGH$ est un parallélogramme. Démontrer que son périmètre est égal à $2BD$.
- On rappelle que $AB = 8$, $BC = 6$ et on pose : $AE = x$. Exprimer AF en fonction de x .

- 64** — Amérique du Nord 2000

Pour trouver la hauteur BD d'un arbre, on dispose des renseignements suivants :

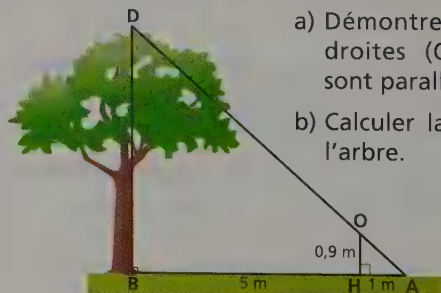
$HA = 1$ m, $BH = 5$ m et $OH = 0,9$ m.

Les points A , H et B sont alignés, ainsi que les points O , A et D .

Les angles $\widehat{AHO}$ et $\widehat{ABD}$ sont droits.

- Démontrer que les droites (OH) et (BD) sont parallèles.

- Calculer la hauteur de l'arbre.





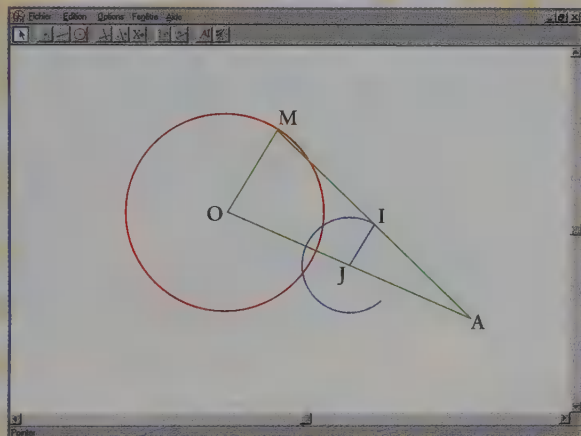
Dans les exercices suivants, les mots en **couleur** correspondent à une commande du logiciel Cabri-Géomètre®.

65 — Problème de déplacement (1)

- Tracer une **droite** (d).
- Placer un **point** A non situé sur la droite (d).
- Placer un **point** M **sur** la droite (d).
- Construire le **milieu** I de $[AM]$.
- Appliquer la fonction **trace** du logiciel au point I et **déplacer** le point M sur la droite (d).
- Pourquoi la droite obtenue est-elle parallèle à la droite (d) ?



66 —



Problème de déplacement (2)

Tracer un **cercle** $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r . Placer un **point** M **sur** le cercle et un **point** A extérieur au cercle. Tracer le **milieu** I de $[AM]$. Appliquer la fonction **trace** du logiciel au point I et **déplacer** le point M sur le cercle $\mathcal{C}$. On voit apparaître un cercle comme trace du point I .

Quel est le centre de ce cercle sur lequel se déplace I et quel est son rayon ?

Démontrer les résultats trouvés en utilisant la figure apparaissant sur l'écran.

67 — Un curieux point fixe ! (D'après la revue Hypercube n° 28)

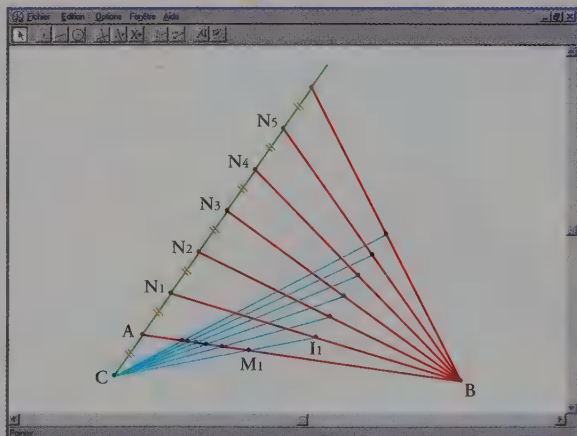
Tracer un **segment** $[AB]$ et placer un **point** C extérieur à ce segment. Tracer une **demi-droite** $[CA)$ et placer sur cette demi-droite des points N situés à égale distance (N_1 est le **symétrique** de C par rapport à A , N_2 est le **symétrique** de A par rapport à N_1 , ...).

Construire le **milieu** I_1 de $[N_1B]$ puis les **milieux** de tous les segments $[N_2B]$, $[N_3B]$, $[N_4B]$, ...

Tracer les **segments** $[I_1C]$, $[I_2C]$, $[I_3C]$, $[I_4C]$, ... Ils coupent $[AB]$ en des points notés M_1 , M_2 , M_3 , M_4 ...

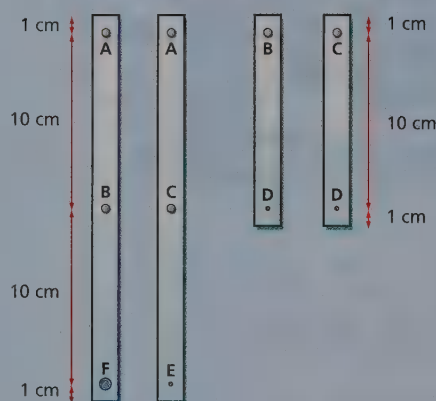
Déplacer le point C . Constater que les points M restent fixes.

(La démonstration est faite à l'exercice 58.)



Un pantographe simplifié

Le pantographe est un instrument permettant de reproduire un dessin à une échelle voulue. Dans le cas présent, le pantographe va servir à doubler les mesures du dessin initial.



■ Matériel

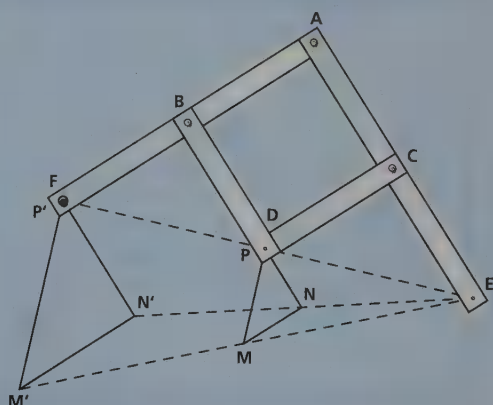
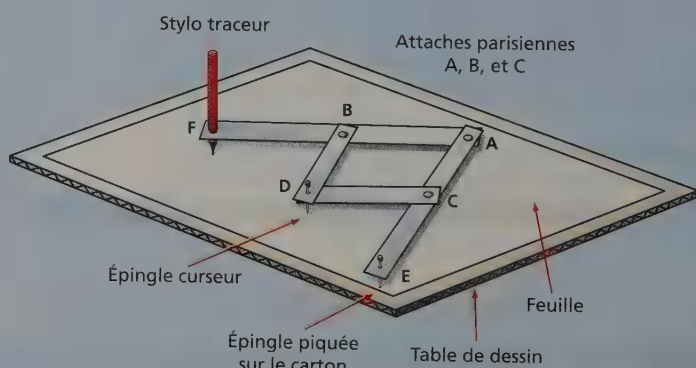
Il faut du carton léger, trois attaches parisiennes, deux épingles de couturière, une plaque de carton qui servira de « **table de dessin** », un stylo et des feuilles de papier.

■ Préparation

Découper dans le carton léger quatre rectangles (voir ci-contre), deux de 22 cm sur 2 cm, et deux de 12 cm sur 2 cm. Marquer les repères sur les quatre rectangles.

■ Montage

- Percer des trous aux repères A, B et C et placer les attaches parisiennes comme sur la légende (A sur A, B sur B, C sur C).
- Poser une feuille de papier sur la **table à dessin** et fixer le pantographe par une épingle plantée sur le repère E.
- Superposer les repères D et piquer l'autre épingle à travers ces repères. L'épingle servira de **curseur** pour suivre le dessin initial.
- Percer un trou au repère F suffisant pour y glisser la pointe d'un stylo. Ce stylo donnera la trace du dessin agrandi.



■ Utilisation

Dessiner un triangle MNP sur la feuille et placer le **curseur** sur M. Faire une marque avec le stylo pour repérer le point correspondant M'.

Placer le **curseur** sur N et repérer N', puis sur P et repérer P'. Construire le triangle M'N'P'.

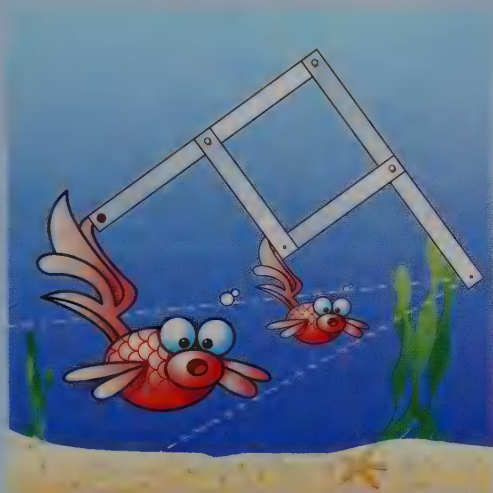
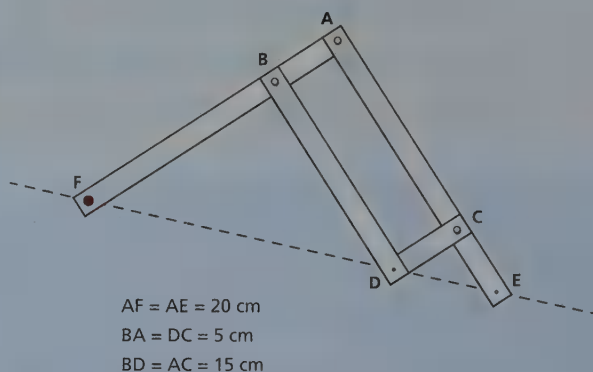
Vérifier que les longueurs des côtés du triangle M'N'P' sont les doubles des longueurs des côtés du triangle MNP.

■ Observation

Observer les traits dessinés en pointillés sur la figure précédente et retrouver la propriété de proportionnalité des longueurs des côtés.

■ Pour aller plus loin

Ce pantographe est rudimentaire et ne peut que doubler les dimensions (ou réduire de moitié en inversant curseur et stylo). On peut changer les proportions des triangles ECD et EAF pour agrandir les dessins à d'autres échelles. On peut aussi reproduire des dessins plus compliqués, il faut alors placer les repères en pointillés.

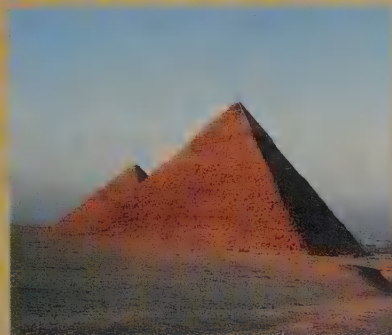


À travers L'Histoire

Thalès de Milet

Thalès naquit vers 625 avant J.-C. à Milet, ville importante de la côte ouest de l'Asie Mineure. C'était un savant et un philosophe. Il a travaillé sur la géométrie des triangles et sur les proportions. Selon la légende, Thalès aurait utilisé les propriétés étudiées dans ce chapitre pour trouver la hauteur de la pyramide de Khéops.

Comme beaucoup de savants, ses connaissances scientifiques l'on porté à se poser des questions philosophiques sur la nature de notre planète. Il s'est rendu célèbre par la prédiction d'une éclipse de Soleil, mais n'a laissé aucun écrit. Il est considéré comme l'un des fondateurs des mathématiques et de l'astronomie moderne.



ce que je dois savoir sur...

...Les triangles et La proportionnalité

- Connaître et utiliser les propriétés des milieux dans un triangle.
- Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs des côtés dans des triangles.
- Calculer la longueur d'un segment.
- Démontrer qu'un point est milieu d'un segment.
- Démontrer que des droites sont parallèles.

je m'évalue

- 1 ABCD est un parallélogramme de centre I. Le point M est le milieu de [AD].

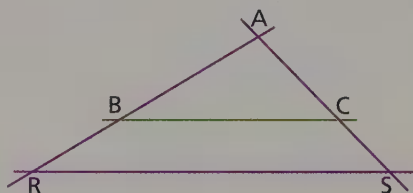
Citer les deux propriétés qui permettent de démontrer que la droite (IM) est parallèle à (AB).

- 2 Le triangle DUO est un triangle isocèle de sommet principal O. Par J milieu de [DO], on trace la parallèle à (OU) qui coupe [DU] en H.

Démontrer que H est situé sur la médiatrice de [DU].

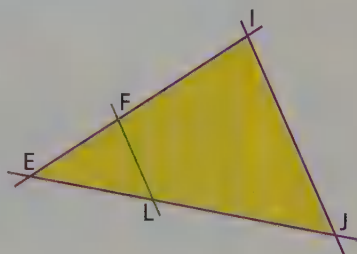
- 3 a) Dans la figure suivante, calculer AS, sachant que :

$AR = 7$; $AB = 4,2$; $AC = 3$; $(BC) \parallel (RS)$



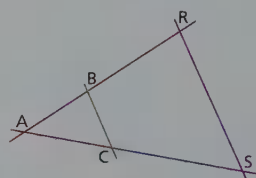
- b) Dans la figure suivante, calculer FE, sachant que :

$EI = 50$; $EL = 24$; $LJ = 36$; $(FL) \parallel (IJ)$



- 4 Dans la figure suivante, calculer AR, sachant que :

$RS = 7$
 $AB = 6$
 $BC = 3$
 $(BC) \parallel (RS)$



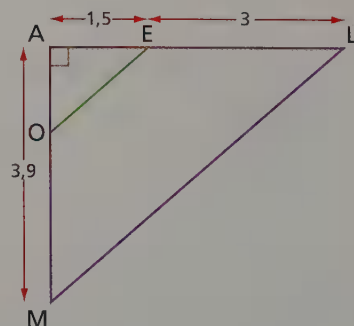
- 5 GZV est un triangle. Le point L est le milieu de [GZ], le point K est le milieu de [GV]. Le point M est le symétrique de L par rapport au point Z. La droite (KM) coupe (ZV) en X.

a) Démontrer que (LK) est parallèle à (ZV).

b) Dans le triangle MLK, démontrer que X est le milieu du segment [KM].

- 6 AML est un triangle rectangle en A.

Le dessin n'est pas tracé à l'échelle. L'alignement des points est lu sur le dessin. Les longueurs sont données dans la même unité.



Calculer l'aire du trapèze OELM.

Les solutions se trouvent à partir de la page 279.

En 6^{ème}-5^{ème}

- ## En 4^{ème}

- 



51

Activités

2 — Conjecturer avec un logiciel de géométrie

Les mots en *couleur* correspondent à des commandes du logiciel Cabri-Géomètre®.

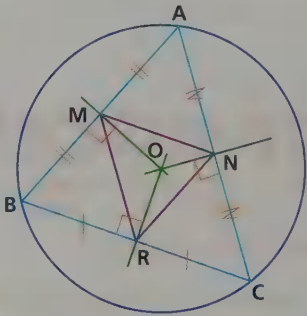
- 1) Dessiner un *triangle* ABC. Tracer la droite (d_1) *perpendiculaire* à (BC) passant par A. Quel est le nom de cette droite ?
- 2) Tracer la droite (d_2) *perpendiculaire* à (AC) passant par B. Nommer H le point d'intersection de (d_1) et (d_2) .
- 3) Tracer la droite (d_3) *perpendiculaire* à (AB) passant par C. Quelle position particulière semble occuper H ?
- 4) Vérifier la conjecture en déplaçant les sommets du triangle ou en *interrogeant* le logiciel. Rédiger une phrase pour présenter cette conjecture.
- 5) *Mesurer* les trois angles du triangle. Déplacer le point A pour que les trois mesures soient inférieures à 90° . Observer la position de H lorsqu'un des trois angles mesure 90° , puis lorsqu'un des trois angles mesure plus de 90° . Rédiger un petit texte pour présenter ces observations.

• Utiliser un logiciel de géométrie ou faire réaliser les dessins avec les instruments usuels.

• Débat sur la position de l'orthocentre : intérieur ou extérieur au triangle.

3 — Médiatrices de l'un ou hauteurs de l'autre ?

En observant la figure ci-contre, Yasmine et Mehdi ne sont pas d'accord, l'un pense que O est le point de concours des trois hauteurs du triangle MNR et l'autre pense que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Qui a raison ? Afin de les départager, reproduire la figure (en plus grand), recopier et compléter le tableau ci-dessous.



• Nécessité d'un raisonnement.

Ce que je sais	Ce que j'utilise	Ce que je déduis
M est le milieu de [AB] et (MO) est perpendiculaire à (AB).	Définition de la médiane.	
	Définition de la médiane.	(NO) est médiane de [AC].
R est le milieu de [BC] et (RO) est perpendiculaire à (BC).		(RO) est médiane de [BC].
	Les trois médianes d'un triangle sont concourantes, le point d'intersection est le centre du cercle circonscrit.	
M est milieu de [AB], N est milieu de [AC].		(MN) est à (BC).
(BC) perpendiculaire à (OR), (MN) parallèle à (BC).		(RO) est perpendiculaire à (MN).
	Définition de la hauteur.	(RO) est une hauteur du triangle MNR.

• Prendre des informations sûres à partir des codages d'une figure.

• Expliciter les propriétés utiles, les hypothèses ou les conclusions.

De même, démontrer que (MO) et (NO) sont des hauteurs du triangle MNR. Alors, qui a raison ? Énoncer une propriété concernant les hauteurs d'un triangle.

4 Étude d'un nouveau point

Pour cette étude, on pourra s'aider d'un logiciel de constructions géométriques.

- 1) Créer un triangle ABC. Placer D, E et F les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].
- 2) Tracer les segments [AD], [BE] et [CF]. Comment appelle-t-on ces segments ?
- 3) Nommer G le point d'intersection de [BE] et [CF]. Quelle semble être la position du point G par rapport au segment [AD] ? Vérifier la conjecture en déplaçant les sommets du triangle ou en interrogeant le logiciel. Rédiger une phrase pour rendre compte de cette observation.

Construire les segments [AG], [BG], [CG], [DG], [EG] et [FG]. Mesurer ces segments. Recopier et compléter le tableau ci-dessous pour relever ces mesures. Déplacer les sommets du triangle et recommencer deux autres fois. Compléter les autres lignes du tableau.

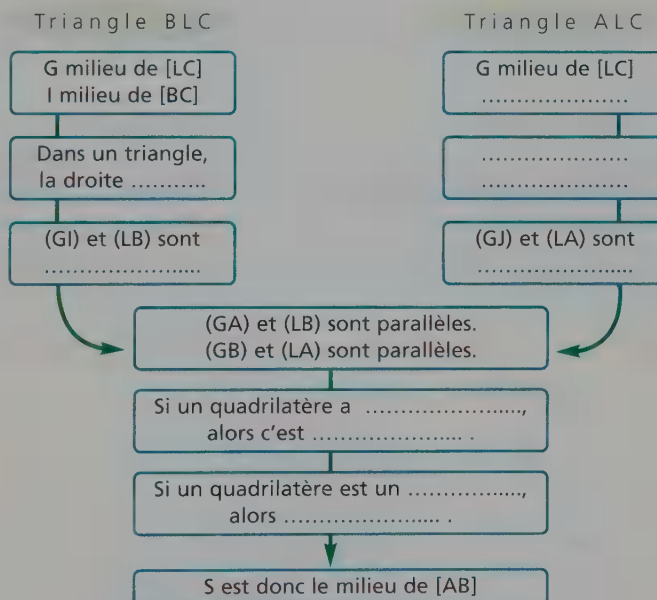
AG	DG	BG	EG	CG	FG

- 4) Comparer AG et DG, BG et EG, CG et FG.
Rédiger une phrase pour rendre compte de ces comparaisons.

5 Une démonstration pour les médianes

Tracer un triangle ABC et deux de ses médianes [AI] et [BJ] qui se coupent en G. Le point L est le symétrique du point C par rapport au point G. La droite (CL) coupe (AB) en S.

Recopier et compléter l'organigramme suivant :



Énoncer une propriété des médianes et démontrer que $GC = 2 GS$ et $GC = \frac{2}{3} CS$.

6 Et les bissectrices ?

Tracer plusieurs triangles GHE. Construire avec le compas les trois bissectrices des trois angles.

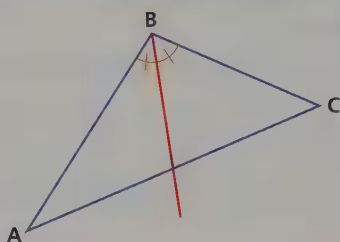
Quelle conjecture peut-on faire ? (Celle-ci sera démontrée au chapitre 4.)

L'essentiel en deux pages

1 — Droites remarquables d'un triangle

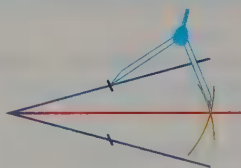
a) Bissectrice d'un angle d'un triangle

Définition : la bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage un angle en deux angles de même mesure.



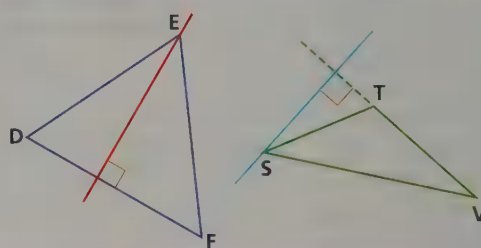
- La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de l'angle.

- Construction (rappel) :



b) Hauteur d'un triangle

Définition : dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

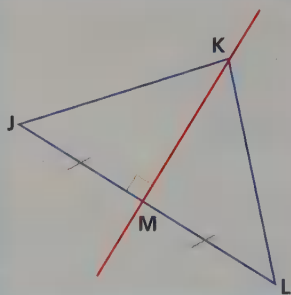


- La hauteur du triangle DEF, représentée en rouge sur la figure, est relative au côté [DF] ou est issue de E.

- La hauteur du triangle TSV, représentée en bleu sur la figure, est relative au côté [VT] ou est issue de S.

c) Médiane d'un triangle

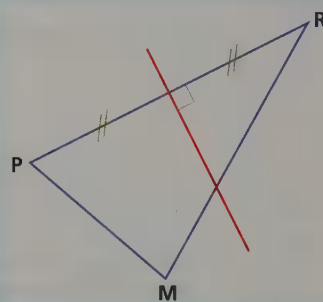
Définition : dans un triangle, une médiane est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.



- On dit que la médiane, représentée en rouge sur la figure, est relative au côté [JL] ou est issue de K.

d) Médiatrice du côté d'un triangle

Définition : la médiatrice d'un côté du triangle est la droite perpendiculaire à ce côté et passant par son milieu.



- La médiatrice du côté d'un triangle est l'axe de symétrie de ce côté.

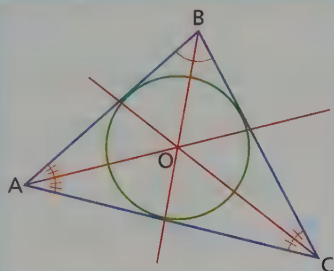
2 Propriétés des droites remarquables

Vocabulaire

Droites **concourantes** : droites qui se coupent en un même point.

a) Bissectrices

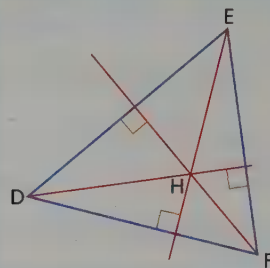
Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.



- Le point d'intersection est le **centre du cercle inscrit** dans le triangle.

b) Hauteurs

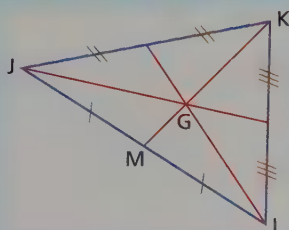
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.



- Le point d'intersection H des hauteurs s'appelle l'**orthocentre** du triangle.

c) Médianes

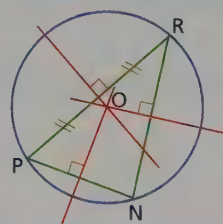
Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.



- Le point d'intersection G est le **centre de gravité** du triangle.

d) Médiatrices

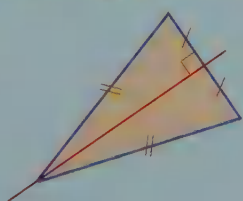
Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.



- Le point d'intersection O est le **centre du cercle circonscrit** au triangle.

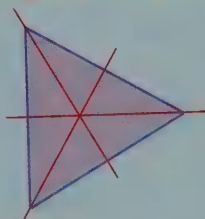
3 Triangles particuliers

a) Triangle isocèle



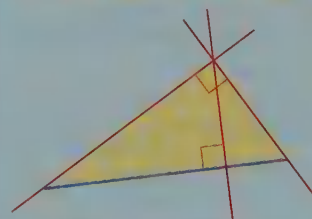
- La médiatrice du côté opposé au sommet principal passe par ce sommet principal.
- Cette médiatrice est l'axe de symétrie du triangle isocèle.
- Cette médiatrice est aussi hauteur, médiane et bissectrice.

b) Triangle équilatéral



- Les bissectrices, hauteurs, médianes, et médiatrices d'un triangle équilatéral sont confondues.
- Ces droites sont les trois axes de symétrie du triangle équilatéral.

c) Triangle rectangle



- Deux des hauteurs d'un triangle rectangle sont confondues avec les côtés de l'angle droit.
- L'orthocentre est confondu avec le sommet de l'angle droit.



RECHERCHE ET CONTRÔLE D'UNE DÉMONSTRATION

Les différentes étapes du travail de la démonstration

On construit la figure correspondante à l'énoncé.

On cherche des propriétés qui pourraient être utiles en relation avec les mots importants du texte.

On organise la recherche avec un tableau (comme page 37) ou d'autres diagrammes (comme activité 5 page 53).

On rédige avec des phrases en organisant l'ordre des pas de démonstration qui ont été trouvés.

On contrôle la rédaction :

- Y a-t-il des affirmations sans preuve ?
- Les propriétés utiles sont-elles énoncées ?
- Y a-t-il accord entre la conclusion d'un pas et le début du pas suivant ?

Un exemple

a) Énoncé

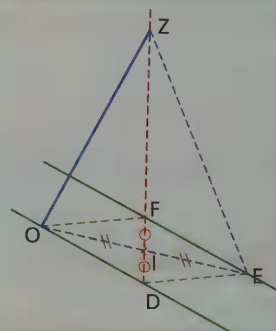
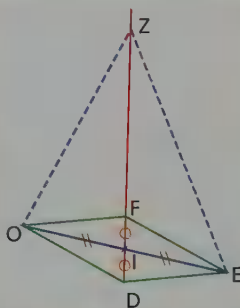
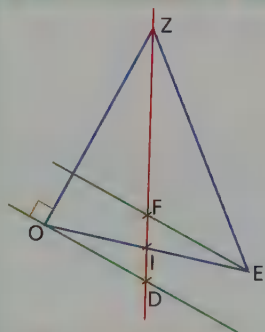
Soit un triangle ZOE et I le milieu du segment $[OE]$.

La droite perpendiculaire à (ZO) passant par O coupe la droite (ZI) en D .

Le point F est le symétrique du point D par rapport à I .

Démontrer que la droite (EF) est la hauteur issue de E du triangle ZOE .

b) Recherche de figures utiles



c) Recherche de propriétés utiles

Si A' est le symétrique d'un point A par rapport à un point I alors I est le milieu de $[AA']$. ①

Si deux droites sont parallèles et qu'une troisième est perpendiculaire à la première alors la troisième est perpendiculaire à la deuxième. ④

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont de même longueur. ⑦

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles. ②

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles. ⑤

Si, dans un triangle, une droite passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé alors elle est une hauteur du triangle. ⑧

Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont même milieu alors c'est un parallélogramme. ③

Une symétrie centrale conserve les distances. ⑥

Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors les points A, I, B sont alignés. ⑨

d) Recherche de la démonstration

Les propriétés utiles sont les propriétés ① ; ③ ; ⑤ ; ④ ; ⑧.

On les organise au cours de la recherche dans un tableau ou un organigramme.

Ce que je sais	Ce que j'utilise	Ce que je déduis
F symétrique de D par rapport à I	Définition du symétrique d'un point	I milieu de [DF]
I milieu de [DF] I milieu de [OE]	Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu alors c'est un parallélogramme .	DOFE est un parallélogramme.
DOFE est un parallélogramme.	Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles .	$(OD) \parallel (EF)$
$(OD) \parallel (EF)$ $(ZO) \perp (OD)$	Si deux droites sont parallèles et une troisième perpendiculaire à la première alors elle est perpendiculaire à la deuxième.	$(EF) \perp (ZO)$
$(EF) \perp (ZO)$ E sommet et [ZO] côté du triangle ZOE	Définition d'une hauteur	(EF) est une hauteur du triangle issue de E.

e) Rédaction au brouillon de la démonstration

• Ce qui m'a fait trouver :
Pour prouver que (EF) est une hauteur, il faut que je prouve que (EF) est perpendiculaire à (ZO). Comme j'ai un angle droit en O, il suffit que je prouve que (EF) est parallèle à (OD). Et ça peut être avec un parallélogramme.

• Je rédige :
Comme on dit dans le texte que F est le symétrique de D par rapport à I, d'après la définition du symétrique d'un point, j'en déduis que I est le milieu de [DF].
Mais on me dit aussi que I est le milieu de [OE], alors j'ai deux milieux de deux diagonales d'un quadrilatère, donc je peux dire que ce quadrilatère est un parallélogramme. Ici c'est OFED.

Je sais qu'un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles alors j'en conclus que $(OD) \parallel (EF)$.

J'applique à $(OD) \parallel (EF)$ et $(ZO) \perp (OD)$ la propriété "Si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre", j'en déduis que les droites (EF) et (ZO) sont perpendiculaires.

On obtient que, dans le triangle ZOE, la droite (EF) passe par le sommet F et est perpendiculaire à (ZO), donc [EF] est une hauteur du triangle ZOE.

f) Contrôle de la rédaction

Chaque paragraphe contient-il une donnée, une propriété, une conclusion ?

Chacun des paragraphes qui se suivent peuvent-ils se relier ? C'est-à-dire, est-ce que la conclusion d'un pas est le départ du pas suivant ?

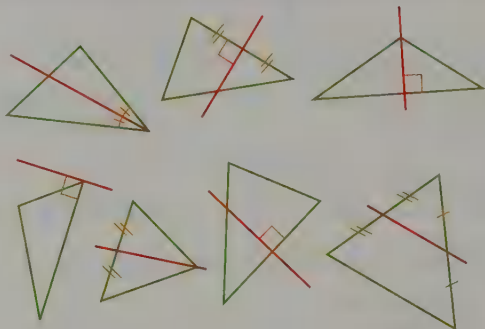
g) Écriture correcte de la démonstration (sera approfondie au chapitre 5)

On rédige la démonstration en employant les termes mathématiques appropriés.

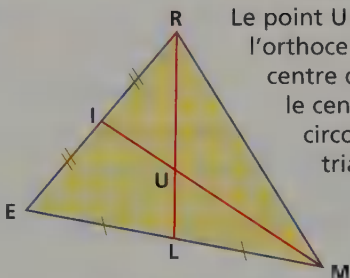
exercices

RECONNAÎTRE

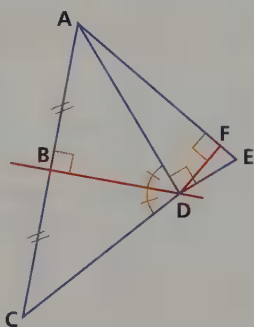
- 1 Observer les codages pour déterminer si les droites dessinées en rouge sont bissectrice, hauteur, médiane ou médiatrice.



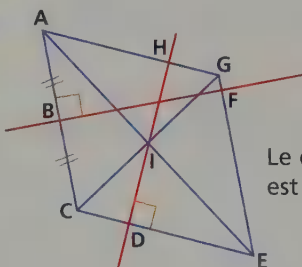
- 2 Le point U est-il l'orthocentre, le centre de gravité ou le centre du cercle circonscrit au triangle REM ?



- 3 Observer la figure et, en tenant compte de ses codages, nommer une bissectrice, une médiatrice et une hauteur.



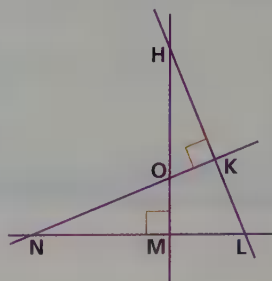
- 4 Le quadrilatère ACEG est un losange.



Recopier et compléter les phrases suivantes en utilisant les mots « bissectrice », « hauteur », « médiane » ou « médiatrice » :

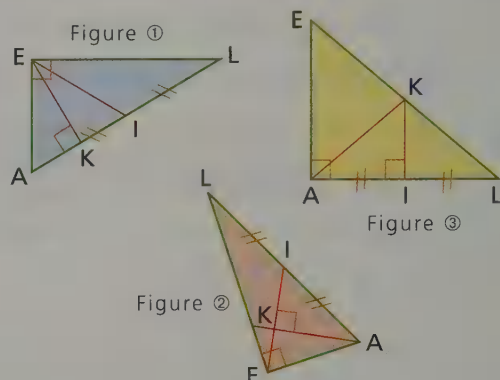
- (FB) est du triangle ACI.
- (DH) est du triangle CIE.
- (AE) est du triangle CGE.

- 5 Observer la figure ci-dessous.



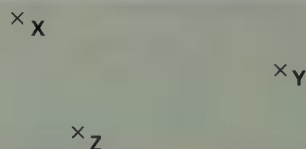
Nommer des triangles, des hauteurs, et des orthocentres visibles sur cette figure.

- 6 Dans quelles figures peut-on employer les mots « médiane », « médiatrice » ou « hauteur » ?



TRACER ET CONSTRUIRE

- 7 a) Trois enfants, Xuhan, Yedhi et Zara, jouent au ballon. Sur le dessin, leurs positions sont indiquées par les lettres respectives X, Y et Z. Faire un dessin représentant la situation.

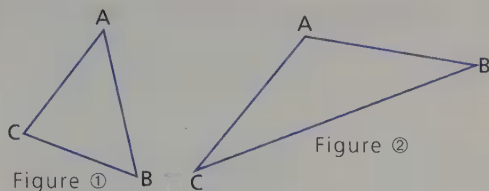


- b) Le ballon B se trouve à égale distance de chacun des enfants.
Placer le point B.
- c) Que représente le point B pour le triangle XYZ ?

- 8 Construire un triangle DEF tel que [EF] mesure 8 cm, l'angle $\widehat{DEF}$ mesure 56° et l'angle $\widehat{DFE}$ mesure 43° .

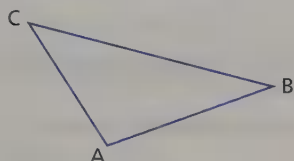
Construire la hauteur issue de E, la bissectrice de l'angle $\widehat{EDF}$ et la médiatrice du côté [DF].

- 9 Reproduire les deux triangles à peu près comme sur le dessin suivant :



Construire l'orthocentre H du triangle ABC dans les deux cas de figure.

- 10 Tracer un triangle à peu près comme sur le dessin ci-dessous (en plus grand).



Construire l'orthocentre du triangle ABC.
Construire le cercle inscrit dans le triangle ABC.

- 11 Construire un triangle MNP tel que $MN = 9$ cm, $MP = 7,5$ cm et $PN = 5,5$ cm. Construire le cercle circonscrit au triangle MNP.

- 12 Construire un triangle équilatéral RAL de côté 4,8 cm.
Construire avec le moins de tracés possibles son centre de gravité et son orthocentre.

- 13 a) Construire un triangle EJO isocèle en O tel que $OJ = 4$ cm, $EJ = 3,5$ cm et $\widehat{OJE} = 55^\circ$.
b) Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{OJE}$ et la médiatrice de $[OE]$.

- 14 SOC est un triangle isocèle en C tel que $SC = 40$ mm et $\widehat{SCO} = 130^\circ$.
Construire la hauteur issue de S et la bissectrice de l'angle $\widehat{CSO}$.

RAISONNER ET CONSTRUIRE

- 15 Construire un triangle ABC tel que :
le point A est sur la médiatrice de $[BC]$;
 $BC = 5$ cm et $AB = 3,5$ cm.
- 16 Construire un triangle ABC tel que :
M est le milieu de $[AC]$;
B est sur la médiatrice de $[AM]$;
 $AC = 4$ cm ; $BC = 5$ cm .

- 17 Dans le *Livre des Abaques* écrit par Léonard de Pise en 1202, on trouve l'exercice suivant, traduit du latin :



« Deux tours, l'une haute de 30 pas et l'autre de 40, sont distantes de 50 pas. Entre les deux tours est une fontaine vers laquelle deux oiseaux, volant de chaque tour en descendant à la même vitesse, arrivent en même temps. Quelle est la distance de la fontaine à chaque tour ? »



- a) Faire un dessin correspondant à la situation sur du papier millimétré en utilisant une échelle appropriée.
b) Déterminer l'emplacement de la fontaine par une construction géométrique.
c) Mesurer les deux distances sur le dessin et donner une valeur approchée des deux distances en grandeur réelle.
(On pourra calculer exactement les distances après avoir étudié le chapitre 5.)

Exercice résolu

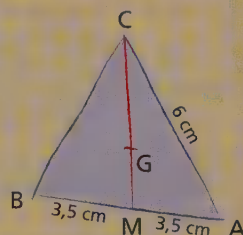
Énoncé

Construire un triangle ABC de centre de gravité G sachant que : $AB = 7$ cm ; $AC = 6$ cm ; M milieu de $[AB]$ et $MG = 3$ cm.

Exemple de solution

On construit une figure à main levée en supposant le problème résolu.

On trace un segment $[AB]$ de 7 cm et on place son milieu M.



Une propriété utile

Le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir des sommets. (Voir Activité 2, page 52.)

Comme $MG = 3$ cm alors $MC = 9$ cm.

Un point C possible est donc situé sur un cercle de centre M et de rayon 9 cm.

De plus comme $AC = 6$ cm, un point C possible est donc situé sur un cercle de centre A et de rayon 6 cm.

Les deux cercles se coupent en deux points. On obtient deux points C qui répondent à la question, d'où deux triangles ABC possibles.

exercices

RAISONNER ET CONSTRUIRE (suite)

- 18** a) Construire un triangle ABC et son centre de gravité G sachant que $AC = 8$ cm, I milieu de [AC] et $IG = 3$ cm.
b) Y a-t-il plusieurs constructions possibles ?
c) Combien mesure le segment [GB] ? Justifier.

- 19** a) Construire un triangle ABC sachant que M est le milieu de [BC], que $BM = 2$ cm et $AB = AM = 6$ cm.
b) Y a-t-il plusieurs constructions possibles ?
c) Placer le point G, centre de gravité du triangle ABC, avec uniquement la règle graduée. Expliquer cette construction.

- 20** Construire cinq points TRUCS tels que :

$$\begin{array}{ll} TR = 7,3 \text{ cm} ; & UC = 1,9 \text{ cm} \\ US = 3,8 \text{ cm} ; & \widehat{UCR} = 120^\circ \end{array}$$

C est le milieu de [TR] ; les points SUC sont alignés dans cet ordre.
Que dire du point U ?

- 21** Sur la feuille était dessiné un triangle DEF et ses médianes. Une partie du dessin a été effacé, il ne reste que les sommets E et F ainsi que le centre de gravité G.

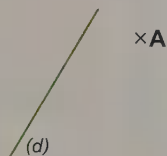


Expliquer les étapes de la construction permettant d'obtenir le sommet D.

- 22** Avec une droite et un point

Reproduire la droite (d) et le point A.

Construire un triangle ABC tel que la droite (d) soit l'une des médianes du triangle ABC.



- 23** Avec un segment et un point

Reproduire le segment [AB] et le point H.



Construire le triangle ABC dont le point H est l'orthocentre.

- 24** Avec un segment et un point (bis)

a) Reproduire le segment [BC] et le point M.

M ×



- b) Construire le triangle ABC dont le point M est le point de concours des bissectrices.
c) Refaire un dessin et construire, si possible, le triangle ABC dont le point M est le point de concours des hauteurs.

- 25** Avec un segment et un point (ter)

a) Reproduire le segment [BC] et le point M.

M ×



- b) Construire le triangle ABC dont le point M est le point de concours des hauteurs.
c) Refaire un dessin et construire, si possible, le triangle ABC dont le point M est le point de concours des médiatrices.

- 26** Avec deux droites sécantes

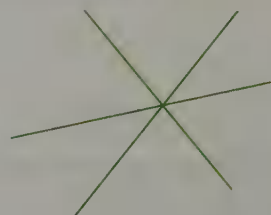
Reproduire les deux droites sécantes dessinées ci-dessous.



Construire un triangle tel que les droites soient deux médiatrices du triangle.

- 27** Avec trois droites concourantes

Reproduire les trois droites concourantes dessinées ci-dessous.



Construire un triangle tel que les trois droites soient les hauteurs de ce triangle.

- 28** a) Construire un triangle NUL avec $UN = 5$ cm, $\widehat{LNU} = 20^\circ$ et $\widehat{NUL} = 32^\circ$.
 b) Compléter la figure pour que le triangle SUN ait le point L comme point d'intersection des bissectrices.

- 29** a) Construire un triangle SOF tel que $SO = 6$ cm, $\widehat{SOF} = 20^\circ$ et $\widehat{OSF} = 45^\circ$.
 b) Construire le point I pour que F soit le centre du cercle inscrit dans le triangle SOI.

- 30** a) Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 cm et placer un point A sur $\mathcal{C}$.
 b) Placer deux points B et C tels que $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et de façon à ce que O soit le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
 c) Tracer toutes les solutions possibles. Combien y en a-t-il ?

Méthode

Utilisation des propriétés des transformations

Énoncé

A, B, C, D sont quatre points situés sur un même cercle de centre O.

Les points I et J sont les milieux respectifs de [AB] et de [BC]. Les points E et F sont les symétriques respectifs de D par rapport à I et à J.

Construire en utilisant seulement le compas, le centre O' du cercle circonscrit au triangle EBF.

Exemple de solution

On trace une figure.

I est le milieu commun de [AB] et de [DE] donc AEBD est un parallélogramme.

E est donc l'image de A par la translation qui transforme D en B.

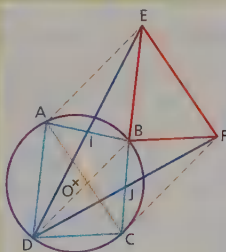
J est le milieu commun de [BC] et de [DF] donc DBFC est un parallélogramme.

F est donc l'image de C par la translation qui transforme D en B.

Par la translation qui transforme D en B, l'image du triangle ADC est le triangle EBF.

Une translation transforme un cercle en un cercle de même rayon. Le centre du cercle image est le translaté du centre du cercle de départ.

Le point O' est donc l'image de O par la translation qui transforme D en B.



- 31** Construire le point E pour que le point H soit l'orthocentre du triangle EFG situé sur la médiatrice de [EF].

F × ————— × G

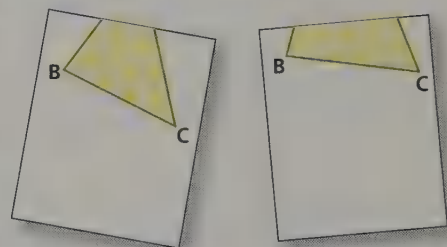
H ×

- 32** ARET est un carré de centre O et de côté 5 cm.

- a) Utiliser la règle et le compas pour construire M, point d'intersection des bissectrices du triangle ART.
 b) Utiliser uniquement la règle pour construire le point N, point de concours des bissectrices du triangle TRE.
 c) On utilise seulement la règle. Peut-on construire la bissectrice de l'angle ORE ? Pourquoi ?

33 Sans sortir du cadre

Sur des feuilles de papier on a dessiné des triangles ABC incomplets.



Trouver un maximum de procédés pour construire, dans chaque cas et sans sortir du cadre, la hauteur issue de A, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, le centre du cercle circonscrit, le point de concours des médianes.

Comment trouver le périmètre de ce triangle ?

- 34** Construire un triangle ABC tel que $AB = 9$ cm, $AC = 7$ cm et $BC = 11$ cm.

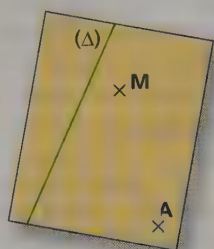
- a) On veut construire le point M de [AB] tel que la droite parallèle à (BC) et passant par M coupe [AC] en N avec $MB = MN$.

Compléter la figure à main levée. La droite (BN) occupe une position particulière pour le triangle ABC, laquelle et pourquoi ?

- 2) Construire exactement les points N et M.

exercices

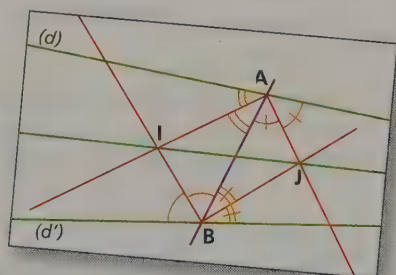
- 35** — On a malencontreusement découpé une feuille de papier. Il ne reste plus que deux points M et A ainsi qu'une droite (Δ) , médiatrice du segment $[AB]$. Le point B ne figure pas sur la feuille.
Expliquer comment mesurer la longueur MB.



36 — Bissectrice sans sommet

Les deux droites (d) et (d') déterminent un angle dont le sommet est situé en dehors du cadre.

Expliquer comment a été tracée la bissectrice (IJ) de l'angle dont le sommet est inconnu.

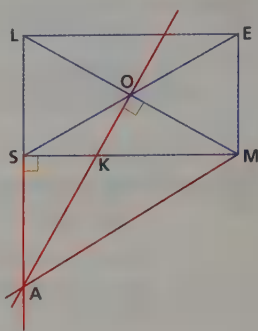


UTILISER LES PROPRIÉTÉS

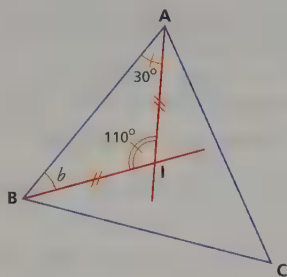
- 37** — Sur un papier déchiré, on a retrouvé un arc de cercle.



Expliquer comment retrouver la mesure du rayon du cercle.

- 38** — a) Tracer un triangle IJK tel que $IJ = 5$ cm, $IK = 1,5$ cm et $JK = 6$ cm, puis construire son orthocentre O.
b) Quel est l'orthocentre du triangle JKO ? Justifier.
- 39** — LEMS est un rectangle de centre O.
- 
- a) Sur la figure, indiquer quels points sont des orthocentres de triangles à préciser.
- b) Quel est l'orthocentre du triangle LKM ?
- 40** — a) Construire un parallélogramme GRAM de centre O.
b) Construire P milieu de $[GM]$ et L point d'intersection de (PR) et (GO) .
c) Que représente L pour le triangle GRM ? Justifier.
d) Démontrer que (LM) coupe le segment $[GR]$ en son milieu.
- 41** — Tracer un triangle DEF et construire le point O, centre du cercle circonscrit à ce triangle. Construire le symétrique O' du point O par rapport à la droite (DF) .
Quelle est la nature du quadrilatère $DOFO'$?
- 42** — On trace trois points A, B, M non alignés et on construit la perpendiculaire à (AB) passant par M.
- a) Est-ce possible de construire un triangle ABF tel que M soit le point de concours de ses hauteurs ?
- b) Quelle condition supplémentaire faut-il indiquer sur l'emplacement des points A, B, M pour construire un triangle ABF tel que M soit le point de concours de ses médiatrices ? Combien obtient-on de solutions pour le triangle ABF ?
- c) Quelles conditions supplémentaires faut-il indiquer sur l'emplacement des points A, B, M pour construire un triangle ABF tel que M soit le point de concours de ses médiatrices et en même temps de ses hauteurs ? Combien obtient-on de solutions pour le triangle ABF ?

- 43 On considère la figure suivante :



En utilisant les codages utiles, expliquer comment calculer la mesure b de l'angle $\widehat{ABI}$.

- 44 Quelle(s) conclusion(s) peut-on écrire pour chacun des textes ci-dessous ?

- ABC est un triangle et [AM] est une médiane.
- RST est un triangle et [TL] est une hauteur.
- IJK est un triangle, deux bissectrices issues de I et de J se coupent en U.

- 45 Compléter les raisonnements suivants par les expressions appropriées.

- ABC est un triangle, I est le milieu de [BC] et (d) est la médiatrice de [BC].
M est un point de (d).
Si un point
Je peux donc conclure que $MB = MC$.
- Dans le triangle ZXY,
Dans un triangle, le centre de gravité d'un triangle est situé
Alors je peux écrire $ZG = \frac{2}{3} ZM$.

PROBLÈMES

- 46 LOSA est un losange de centre N. La perpendiculaire à (LO) passant par A coupe (LN) en H.

- Faire une figure.
- Quel est l'orthocentre du triangle LOA ? Justifier.
- Tracer la troisième hauteur du triangle LOA.

- 47 RECT est un rectangle de centre A. La perpendiculaire à (RC) passant par A coupe la droite (TC) en N et la droite (RT) en G.

- Faire une figure.
- Quel est l'orthocentre du triangle RGC ? Justifier.
- Tracer la troisième hauteur du triangle RGC.

Méthode

Démontrer que des droites sont perpendiculaires

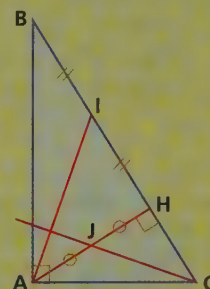
Énoncé

ABC est un triangle rectangle en A. Le segment [AH] est une hauteur du triangle ABC. Le point I est milieu du segment [HB] et le point J est le milieu du segment [AH]. Démontrer que les droites (CJ) et (AI) sont perpendiculaires.

Exemple de solution

- Faire une figure.

- Dans le triangle ABH, le point I est milieu du segment [HB] et le point J est le milieu du segment [AH].



D'après la propriété :

« Dans un triangle, la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté », on peut dire que la droite (IJ), qui joint les milieux de deux côtés [BH] et [AH], est donc parallèle à la droite (AB).

- Le triangle ABC est rectangle en A, on peut donc dire que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

- La droite (AB) est parallèle à la droite (IJ) et la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AC).

D'après la propriété : « Deux droites étant parallèles toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre ».

On peut conclure que (IJ) est perpendiculaire à (AC).

- Dans le triangle ACI, (AH) est perpendiculaire à (CI), (AH) est donc une hauteur et (IJ) est perpendiculaire à (AC). (IJ) est donc une hauteur, et H est l'orthocentre.

Dans un triangle les trois hauteurs sont concourantes, donc la droite (CJ) est la troisième hauteur. Elle est donc perpendiculaire à (AI).

- 48 a) Construire un triangle REC rectangle en R. Placer un point T sur [CE], puis tracer la perpendiculaire à (CE) passant par T. Elle coupe (RE) en A et (RC) en N.

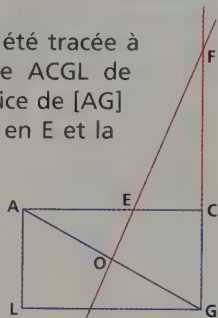
- Démontrer que (CA) et (NE) sont perpendiculaires.

exercices

PROBLÈMES (suite)

- 49** — La figure suivante a été tracée à partir d'un rectangle $ACGL$ de centre O . La médiatrice de $[AG]$ coupe la droite (AC) en E et la droite (CG) en F .

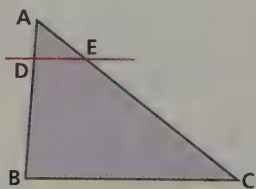
Démontrer que les droites (GE) et (AF) sont perpendiculaires.



- 50** — Construire un triangle ABC tel que $\widehat{ABC} = 54^\circ$, $BC = 10$ cm et $BA = 7,5$ cm. Construire la hauteur $[AH]$, la médiane $[BM]$ et la médiatrice (Δ) du côté $[AB]$.

- (Δ) coupe $[AB]$ en P et $[BC]$ en E . Quelle est la nature du triangle EAB ?
- Déterminer la longueur du segment $[PM]$.
- Démontrer que (PM) et (AH) sont perpendiculaires.

- 51** — Construire le triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm et $AC = 9,6$ cm. Placer le point D sur le segment $[AB]$ tel que $AD = 2$ cm.



- Construire la parallèle à (BC) passant par D . Cette droite coupe $[AC]$ en E . Calculer la mesure de la longueur du segment $[DE]$.
- La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe la droite (DE) en F . Montrer que les angles $\widehat{DFB}$ et $\widehat{DBF}$ sont égaux. En déduire la nature du triangle DBF .

- 52** — Tracer un triangle ABC et construire la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ qui coupe $[BC]$ en L .

- Tracer la parallèle à (AL) passant par C qui coupe (AB) en U .
- Démontrer que le triangle UCA est isocèle. On considère un triangle équilatéral ABC .

- 53** — Les droites (OA) , (OB) et (OC) sont les médiatrices du triangle ABC . La longueur OB est 6 cm. La droite (OA) coupe le segment $[BC]$ en I .

- Faire une figure à main levée.
- Justifier que l'angle $\widehat{OBI}$ mesure 30° .
- Démontrer que la longueur du segment $[OI]$ est 3 cm.
- Faire une figure en grandeur réelle.
- Le cercle circonscrit au triangle ABC recoupe la droite (AI) en un point noté L . Démontrer que le quadrilatère $OBLC$ est un losange.

- 54** — ABC est un triangle quelconque. Tracer I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[AC]$. Construire $[AK]$ une médiane du triangle. On appelle M le point d'intersection de (IJ) et de (AK) .

Est-on sûr que (MK) est une médiane du triangle IJK ? Pour quelles raisons ?

- 55** — ABC est un triangle quelconque. Construire deux médianes $[AI]$ et $[BJ]$ qui se coupent en G . Construire M et N les milieux respectifs de $[AG]$ et $[BG]$. L'objectif du problème est de démontrer que le point G occupe une position particulière.

- Démontrer que $IJMN$ est un parallélogramme.
- Que peut-on en déduire pour la position du point G sur chacune des médianes $[AI]$ et $[BJ]$?

Vocabulaire

Respectif : qui tient compte de l'ordre d'écriture ; le premier objet de la première liste est associé au premier objet de la seconde liste.

- 56** — $ABCD$ est un parallélogramme de centre O .

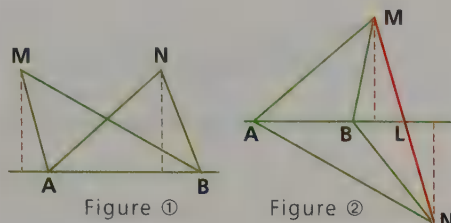
Comparer les aires des triangles AOB , BOC , COD et AOD .

- 57** — $RSTU$ est un parallélogramme. M est le milieu de $[RS]$, N est le milieu de $[ST]$, I est le milieu de $[TU]$ et J est le milieu de $[RU]$. Les droites (RN) et (MT) se coupent en G et les droites (RI) et (TJ) se coupent en K . On admet que $RGTK$ est un parallélogramme.

Quelle fraction de l'aire du parallélogramme $RSTU$ représente l'aire de $RGTK$?

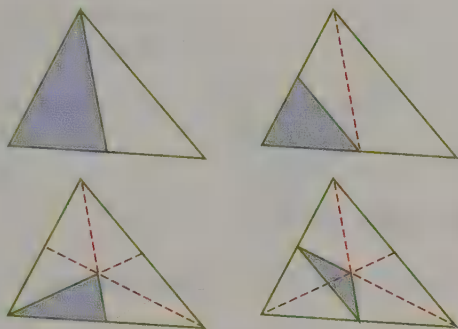
58 — Même aire !

À partir d'un segment $[AB]$, si on sait que deux triangles ABM et ABN ont la même aire, alors on peut construire deux cas de figures. On dit que l'on peut construire deux configurations.



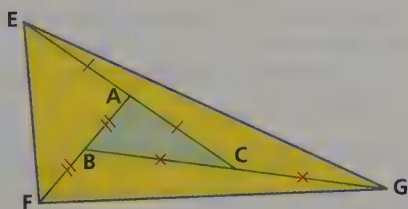
- a) Dans le cas de la figure ①, les deux triangles sont situés du même côté par rapport à (AB) .
Déterminer la position de (MN) par rapport à (AB) . Justifier.
- b) Dans le cas de la figure ②, démontrer que $[AL]$ est une médiane du triangle AMN .

- 59 — Les triangles colorés en bleu ci-dessous sont obtenus en traçant des médianes dans des triangles.



Quelle fraction de l'aire du grand triangle représente l'aire de chacune des parties colorées ?

- 60 — ABC est un triangle. Sur les prolongements de ses côtés, on a placé les points E , F et G tels que $AC = AE$, $AB = AF$ et $BC = CG$.



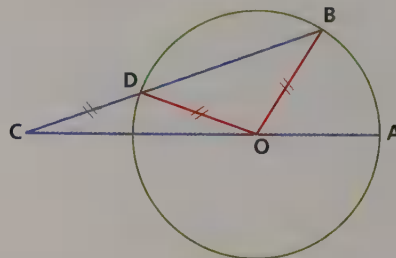
Démontrer que l'aire du triangle EFG est 7 fois plus grande que l'aire du triangle ABC .

61

Trisection d'un angle



Construire la trisectrice d'un angle, c'est-à-dire partager un angle en trois angles de même mesure, est un problème recherché depuis l'Antiquité. Le mathématicien français Wantzel a démontré, en 1837, qu'il n'est pas possible de construire la trisectrice exactement à la règle et au compas. Au cours des recherches, la figure suivante a souvent été utilisée.

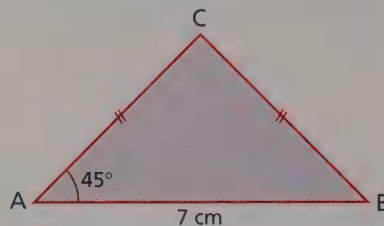


D'une part, les points A , O et C sont alignés, et d'autre part, les points B , C et D sont alignés. Les triangles OCD et OAB sont isocèles de sommets respectifs D et O .

- a) Démontrer que l'angle $\widehat{ODB}$ est le double de l'angle OCB .
- b) Démontrer que $\widehat{AOB} = 3 \times \widehat{ACB}$.

62

ABC est un triangle isocèle de sommet principal B tel que $\widehat{BAC} = 45^\circ$ et $AC = 7$ cm.



- a) Construire la hauteur $[BH]$ du triangle ABC .
- b) Démontrer que H est le milieu du segment $[AB]$.
- c) Tracer la perpendiculaire à (BC) passant par H ; elle coupe $[BC]$ en I .
Démontrer que (HI) est la médiatrice de $[BC]$.
- d) Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par H ; elle coupe $[AB]$ en J .
Démontrer que (HJ) est la médiane du triangle AHB .
- e) Démontrer que $BJHI$ est un carré.
- f) Par quelles transformations le triangle AJH a-t-il pour image le triangle HIC ?

Préciser les éléments caractéristiques de ces transformations.



Exercice résolu

Énoncé

Soit ABC un triangle dont l'angle de sommet A mesure 45° . Tracer la hauteur issue de C . Elle coupe le segment $[AB]$ en J . Démontrer que J appartient à la médiatrice de $[AC]$.

Exemple de solution

$[CJ]$ est une hauteur du triangle ABC .

Le triangle AJC est donc rectangle en J et $\widehat{AJC} = 90^\circ$.

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

Comme l'angle $\widehat{JAC}$ est égal à 45° alors l'angle $\widehat{ACJ}$ est aussi égal à 45° .

Le triangle AJC a deux angles de même mesure.

Un triangle ayant deux angles de même mesure est isocèle.

Le triangle AJC est donc isocèle en J .

Comme un triangle isocèle a deux côtés de même longueur, on peut en déduire que :

$$JA = JC$$

J est équidistant de A et de C .

« Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il est situé sur la médiatrice de ce segment. »

On peut déduire que J est situé sur la médiatrice de $[AC]$.

63 — La Réunion 2001

On sait que :

- $MATH$ est un carré de centre E et de 12 cm de côté ;
- O est le milieu du segment $[MH]$;
- S appartient à $[EO]$ et $SO = 4$ cm ;
- les droites (EO) et (MH) sont perpendiculaires.

- Faire la figure en vraie grandeur.
- Montrer que le triangle MSH est isocèle en S .

64 — Poitiers 1997

$ABCD$ désigne un rectangle tel que $AB = 7,2$ cm et $BC = 5,4$ cm.

- Dessiner en grandeur réelle, ce rectangle et sa diagonale $[AC]$.
- Vérifier qu'une mesure approchée, à 1 degré près, de l'angle $\widehat{ACD}$ est 37° .
- Démontrer que les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux.
- La médiatrice du segment $[AC]$ coupe la droite (AB) en E . Placer le point E et montrer que le triangle ACE est isocèle.
- En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{DCE}$.

65 — Rouen 1997 (série technologique)

- Tracer un triangle ABC tel que :
 $AC = 6$ cm ; $\widehat{A} = 55^\circ$; $\widehat{C} = 70^\circ$

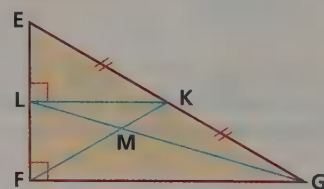
- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{B}$.
En déduire la nature du triangle ABC .

- Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$; elle coupe le segment $[AB]$ en un point I .

Que représente le point I pour le segment $[AB]$? Justifier.

66 — Lille 1997

La figure ci-dessous n'est pas à reproduire.



- EFG est un triangle rectangle en F .
- K est le milieu du segment $[EG]$.
- La droite passant par K et perpendiculaire à (EF) coupe $[EF]$ en L .

- Démontrer que les droites (LK) et (FG) sont parallèles.
Démontrer que L est le milieu du segment $[EF]$.
- Les droites (FK) et (GL) se coupent en M .
Que représentent les droites (FK) et (GL) pour le triangle EFG ?
En déduire que la droite (EM) coupe le segment $[FG]$ en son milieu.



Dans les exercices suivants, les mots en **couleur** correspondent à une commande du logiciel Cabri-Géomètre®. Ces exercices peuvent être réalisés avec un autre logiciel.

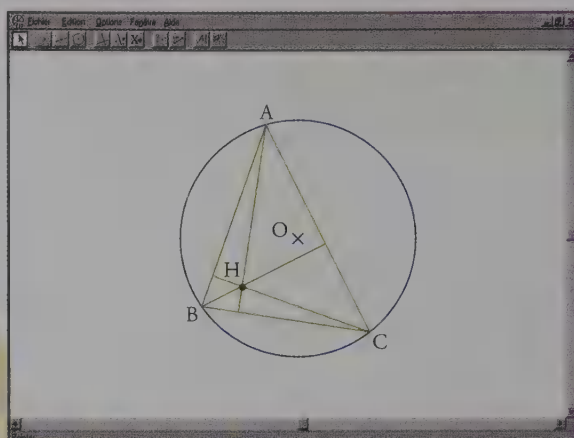
- 67 a) Avec un logiciel de constructions géométriques, tracer un **cercle** $\odot$ de centre O. **Placer sur** le cercle trois points A, B et C.

b) Construire les hauteurs avec l'aide du logiciel, et **nommer** H l'orthocentre du triangle.

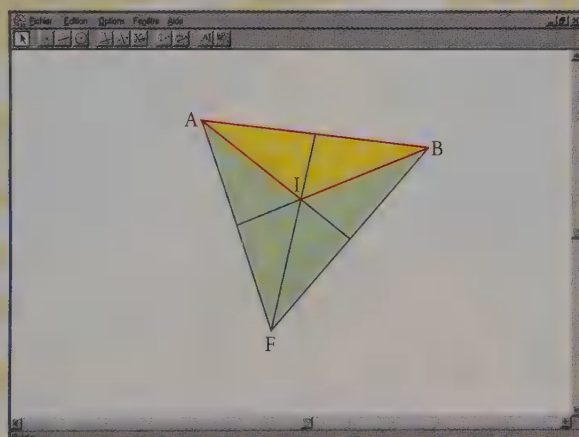
- c) **Déplacer** le point A sur le cercle et appliquer la fonction **trace** du logiciel au point H.

Le point H semble se déplacer sur un cercle (ce résultat sera démontré au lycée).

Préciser le centre et le rayon de ce cercle.



68



- a) Avec un logiciel de constructions géométriques, tracer trois points A, B et I.

b) Construire un triangle ABF tel que I soit le point de concours des bissectrices.

- c) Pointer sur le point I et faire varier sa position.

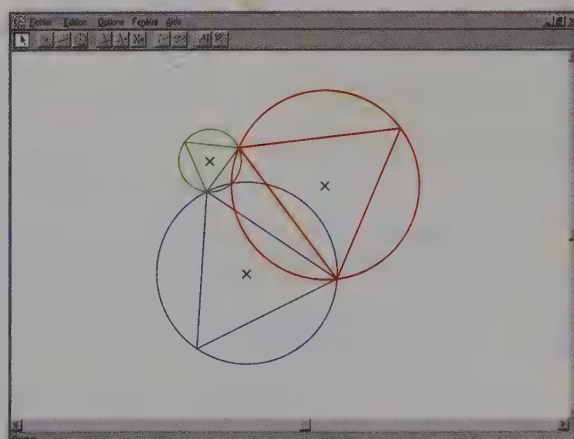
Existe-t-il une position de I pour laquelle le triangle ABF n'existe pas ?

- 69 a) Avec un logiciel de constructions géométriques, tracer un **triangle** ABC quelconque et trois **points** R, S, T, extérieurs au triangle, tels que les triangles ABR, BSC et ACT soient équilatéraux.

b) Tracer les **cercles** circonscrits à ces trois triangles. Vérifier que les trois cercles se coupent en un même point I.

- c) **Pointer** sur le point A et déplacer-le. Les trois cercles se coupent-ils toujours en un même point ?

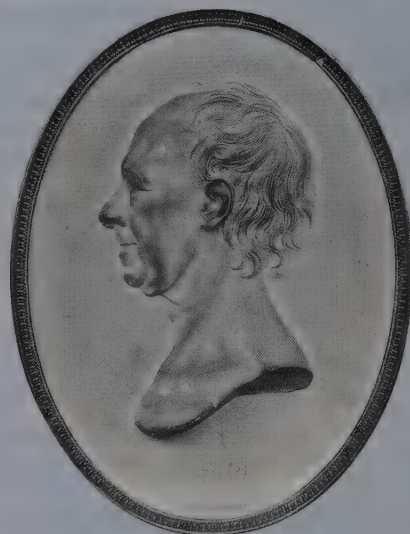
d) Il semble, sur le dessin, que [AI] soit la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Le vérifier en utilisant les commandes du logiciel.



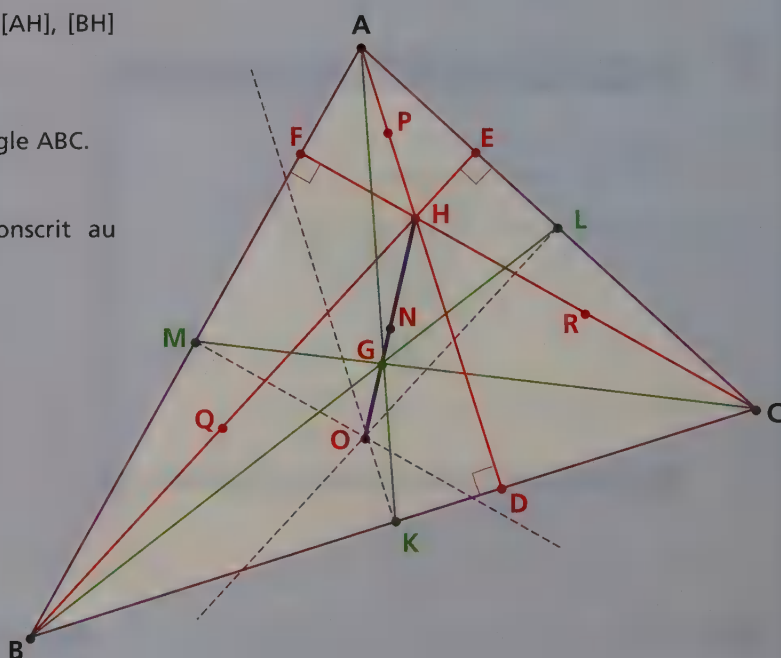
■ DROITES ET CERCLES D'EULER

Construction

- Construire un très grand triangle ABC ou travailler avec un logiciel de géométrie.
- Construire les trois hauteurs [AD], [BE] et [CF]. Appeler H l'orthocentre du triangle ABC.
- Placer K, L et M les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].
- Placer P, Q et R les milieux respectifs de [AH], [BH] et [CH].
- Construire le centre de gravité G du triangle ABC.
- Construire le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.
- Repasser en bleu le segment [OH].



Léonard Euler (1707-1783)



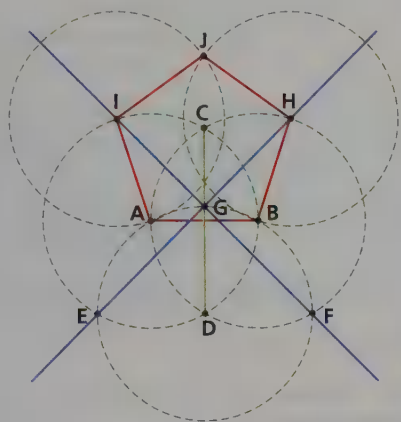
Observations

- Le point G doit être sur le segment [OH]. Mesurer la longueur des segments [OG] et [GH] et comparer ces deux longueurs*. La droite (OH) porte le nom de **droite d'Euler**.
- Placer N le milieu de [OH] et tracer le cercle de centre N et passant par D. Ce cercle passe par huit autres points de la figure**. Il porte le nom de **cercle des neuf points** ou **cercle d'Euler**.

Solutions : * $GH = 2OG$; ** les points D, R, L, E, P, F, M, Q, et D sont sur le cercle.

■ À LA MANIÈRE DE DÜRER

Albrecht Dürer est un peintre et architecte allemand de la Renaissance. Comme beaucoup de ses contemporains, il s'est posé bien des problèmes concernant la représentation sur une feuille de papier de ce que l'on voit dans l'espace. Dans ses recherches, il a été amené à faire des études sur les carrés magiques et à réaliser des constructions géométriques de polygones réguliers. En particulier, le pentagone joue un grand rôle dans les constructions à l'équilibre harmonieux d'églises et d'abbayes. Voici comment Dürer explique la construction approchée d'un pentagone régulier.



AB est un côté donné du pentagone.

Tracer les deux cercles de centres respectifs A et B passant par B et A. Ils se coupent en C et D.

Le cercle de centre D et de rayon AB coupe celui de centre A en E, celui de centre B en F et la droite (CD) en G.

Tracer (EG) qui coupe le cercle de centre B en H.

Tracer (FG) qui coupe le cercle de centre A en I.

Tracer les cercles de centre H et I qui se coupent en J.

À travers L'Histoire

Léonard Euler

Léonard Euler est un très grand mathématicien suisse ayant vécu au XVIII^e siècle (1707-1783).

Ses travaux ont en grande partie porté sur l'analyse : cette science mathématique permet d'étudier les relations qui peuvent exister entre deux séries de données (la vitesse par exemple, qui associe des distances et des temps).

Euler applique ses découvertes dans le domaine de la physique et de l'astronomie (théorie du mouvement des planètes et des comètes).

Pour clarifier ses théories, Euler a introduit des symboles nouveaux. On lui doit notamment la lettre π , les notations **sin**, **cos**, **tang** (remplacée par « tan » depuis quelques années).

Le dodécaèdre régulier dessiné par Léonard de Vinci.



Ses travaux sont moins importants en géométrie, mais on lui doit la formule reliant le nombre d'arêtes, de faces et de sommets d'un polyèdre. Il a établi et démontré les propriétés mises en évidence lors des constructions de la page précédente.

ce que je dois savoir sur...

...Les droites remarquables d'un triangle

- Reconnaître les médiatrices, médianes, hauteurs, bissectrices d'un triangle.
- Construire les médiatrices, médianes, hauteurs, bissectrices d'un triangle.
- Connaître les noms des points de concours des différentes droites remarquables d'un triangle : centre du cercle circonscrit, centre du cercle inscrit, centre de gravité, orthocentre.
- Utiliser les propriétés des droites remarquables dans un triangle ou un triangle particulier.

je m'évalue

- 1** Voici quatre phrases incomplètes et quatre figures.

Recopier et compléter chaque phrase par l'expression appropriée et associer chaque phrase à une figure.

Phrase a

Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes en un point appelé du triangle.

Phrase b

Dans un triangle, les trois bissectrices sont concourantes en un point appelé du triangle.

Phrase c

Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point appelé du triangle.

Phrase d

Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé du triangle.

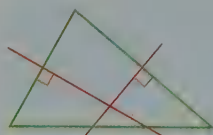


Figure ①

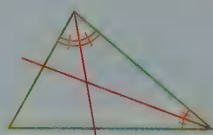


Figure ②



Figure ③

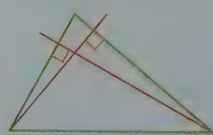
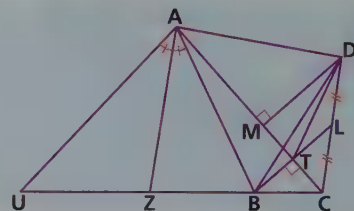


Figure ④

2



Sur la figure ci-dessus, reconnaître :

- a) une hauteur du triangle ABC et du triangle ADC ;
- b) une bissectrice et préciser dans quel triangle ;
- c) une médiane du triangle DCB ;
- d) une autre médiane et préciser dans quel triangle ;
- e) des droites parallèles.

3

Construire un triangle ABC tel que :
 $BC = 5,4$ cm ; $AB = 7,3$ cm ; $AC = 4$ cm.
 Construire la hauteur issue de A, la médiane issue de B, la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

4

- a) Construire un triangle ABC isocèle en B tel que $AB = 5$ cm et $\widehat{ACB} = 70^\circ$.
- b) Les bissectrices de ce triangle se coupent en I. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AIC}$.

5

On considère une droite (d) et deux points E et F situés du même côté de la droite (d). U est le symétrique de E par rapport à (d). La médiatrice de [EF] coupe (d) en I. La perpendiculaire à (UF) passant par I coupe (UF) en G.

- a) Faire la figure.
- b) Démontrer que G est le milieu de [UF].

CERCLE ET TRIANGLE RECTANGLE

En 6^{ème}-5^{ème}

- Tracer des parallèles et des perpendiculaires.
- Reconnaître et construire un triangle particulier.
- Caractériser un cercle et connaître le vocabulaire associé.
- Utiliser la propriété de la somme des angles d'un triangle.

En 4^{ème}

- Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un demi-cercle.
- Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.
- Construire la tangente à un cercle en l'un de ses points.
- Savoir que le point d'une droite le plus proche d'un point donné est le pied de la perpendiculaire menée du point à la droite.

pour démarrer



1 Un jardinier géomètre

RÉVISIONS

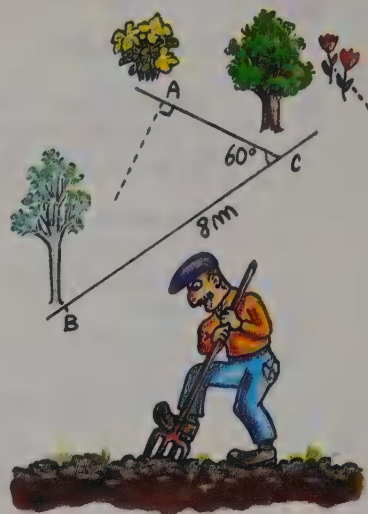
- Cercle : ensemble de points équidistants d'un point.
- Médiatrice : ensemble des points équidistants de deux points.

Jean-Michel, dont le grand-père était jardinier, a la passion des jardins. C'est aussi un géomètre. Aussi il utilise des constructions géométriques pour composer son jardin.

Il sait qu'entre le chêne situé en C et le bouleau situé en B il y a 8 mètres. Il trace d'abord une ligne quelconque (l) reliant B et C.

Faire le dessin correspondant aux plantations que va effectuer le jardinier en utilisant une échelle au $\frac{1}{100}$. Jean-Michel veut planter :

- a) quelques tulipes oranges, notées T, à 3 mètres du chêne ;
- b) un mélange de fleurs de toutes les couleurs, entre 3 et 4 mètres autour du chêne ;
- c) une azalée, notée A, située exactement au pied de la perpendiculaire à la droite faisant un angle de 60° avec la droite (BC) ;
- d) un jasmin, noté J, à égale distance de A et de B et situé sur la ligne (l).

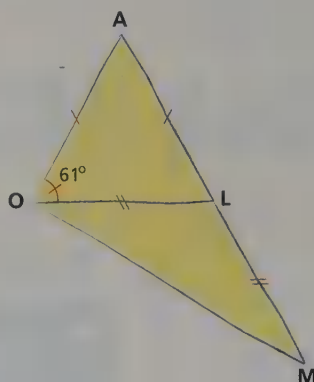


Activités

2 — Des doutes pour un triangle rectangle

La figure ci-contre a été réalisée à main levée.

- 1) Construire la figure en vraie grandeur, sachant que les points A, L et M sont alignés et en respectant les codages. Harry, qui a reproduit le dessin, dit que le triangle AOM est rectangle. A-t-il raison ?
- 2) Construire plusieurs triangles rectangles ainsi que leurs cercles circonscrits. Énoncer une conjecture concernant la position du centre du cercle circonscrit.



• Différence entre sembler et être sûr.

• La première question peut se traiter par les angles.

• Utilisation des propriétés des diagonales du rectangle.

• Différence entre sembler et être sûr.

• Réciproque de la propriété précédente.

• On pourra insister sur les différences entre propriété directe et propriété réciproque.

3 — Une démonstration à propos d'une médiane

Tracer un triangle ABC rectangle en A. Placer I le milieu de son hypoténuse [BC]. Construire le symétrique D de A par rapport à I.

- 1) Démontrer que le quadrilatère ACDB est un rectangle.
- 2) Démontrer que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point I.
- 3) Énoncer une propriété concernant le triangle rectangle sous forme de « si » « alors »
- 4) Énoncer une autre propriété concernant une médiane d'un triangle rectangle.

4 — Une réciproque à propos d'un triangle rectangle

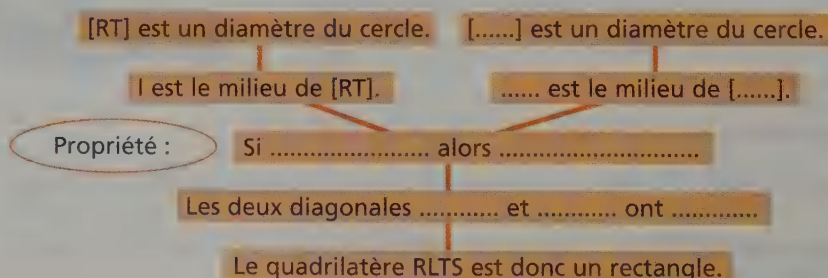
1) Une conjecture

Tracer un cercle de centre I puis un triangle RLT dont un côté [RT] est le diamètre du cercle et un sommet L est situé sur ce cercle. De quelle nature semble être le triangle RLT ?

2) Une démonstration

- a) Tracer un cercle de centre I et de diamètre [RT]. Placer un point L sur le cercle. Construire le point S diamétralement opposé au point L.

- b) Recopier et compléter l'organigramme de démonstration :



- c) En déduire la nature du triangle RLT.

5 Distance d'un point à une droite

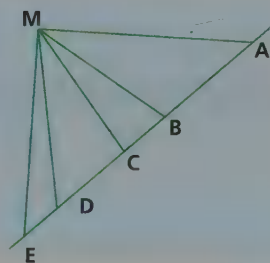
• Approche par tâtonnement mais la construction semble naturelle.

1) Une conjecture

Marie devait trouver le plus court chemin pour aller du point M, indiquant l'emplacement de sa maison, à la route tracée en ligne droite sur la carte.

Elle a fait plusieurs tentatives.

Quel point semble le plus proche de Marie ?
Comment peut-elle construire exactement ce point ?

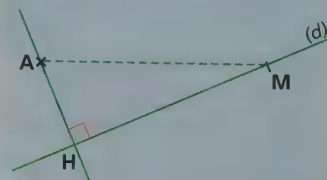


2) Une démonstration

a) Tracer une droite (d) , un point A extérieur à la droite et un point M situé sur la droite. Puis compléter la figure par le point A' symétrique de A par rapport à la droite (d) .

b) Justifier chacune des égalités et inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} AH &= A'H ; & AM &= MA' ; & AA' &= AH + HA' \\ AA' &< AM + MA' ; & 2 \times AH &< 2 \times AM \end{aligned}$$



3) Une application

Tracer une droite (d) et construire un point A situé à 3 cm de cette droite.

6 Deux conjectures et une preuve

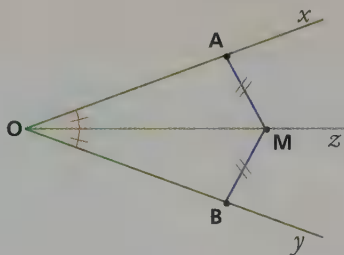
• Retour sur la propriété de la bissectrice, ensemble des points équidistants de deux demi-droites.

1) Bissectrice

On sait qu'une bissectrice est une demi-droite axe de symétrie d'un angle. Que dire d'un point situé sur la bissectrice ?

a) Tracer un angle $\widehat{xOy}$ et sa bissectrice $[Oz)$. Placer un point M situé sur cette bissectrice.

Comparer les distances de M à $[Ox)$ et de M à $[Oy)$.



b) Utiliser les propriétés de la symétrie axiale pour démontrer que ces deux distances sont égales.

c) Énoncer une propriété de la bissectrice.

2) Tangente

Tracer une droite (d) et placer un point A situé à 4 cm de cette droite.

Tracer des cercles de centre A et de rayons 2,8 cm, 3,8 cm, 4 cm, 4,2 cm et 7 cm. Combien chacun de ces cercles a-t-il de point commun avec la droite (d) ?

Remarque : dans le cas où il n'y a qu'un point commun on dit que la droite est tangente au cercle.

Tracer alors le rayon ayant un point commun avec la droite. Quelle semble être la mesure de l'angle formé par la droite et le rayon ?

• Propriété directe et réciproque à approcher.

• Approche qui reste au niveau de la conjecture.

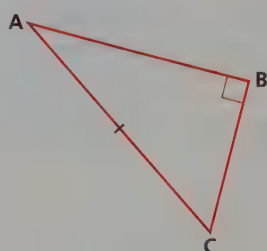
L'essentiel en deux pages

1 Cercle circonscrit et triangle rectangle

a) Cercle circonscrit à un triangle rectangle

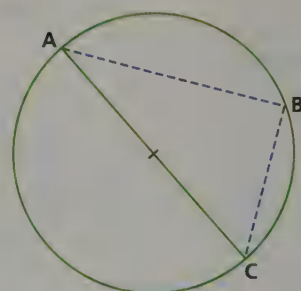
Si un triangle est rectangle alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.

DONNÉES



ABC triangle rectangle en B

CONCLUSION



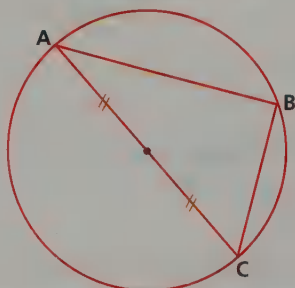
[AC] diamètre du cercle circonscrit

Cette propriété permet de démontrer qu'un triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle. Le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.

b) Triangle inscrit dans un demi-cercle

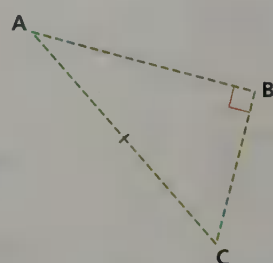
Si le cercle circonscrit à un triangle a pour diamètre un côté du triangle alors ce triangle est rectangle.

DONNÉES



- [AC] diamètre du cercle circonscrit
- B point du cercle

CONCLUSION



ABC triangle rectangle en B

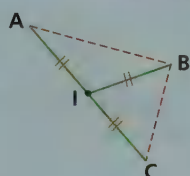
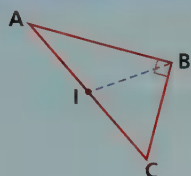
Remarque

Cette propriété est la propriété réciproque de la précédente (voir « La démonstration pas à pas », page 76).

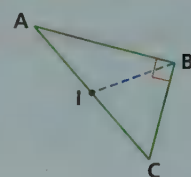
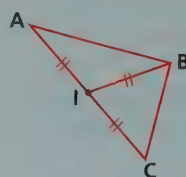
Cette propriété permet de démontrer qu'un triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle. Le diamètre du cercle est l'hypoténuse du triangle rectangle.

2 Médianes d'un triangle rectangle

Si un triangle est rectangle alors la longueur de la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.



Si, dans un triangle, la longueur de la médiane issue d'un sommet est égale à la moitié de la longueur du côté opposé à ce sommet alors ce triangle est rectangle en ce sommet.

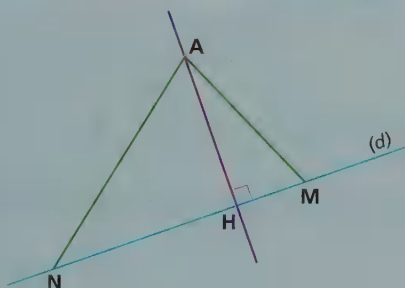


3 Distance d'un point à une droite

Soient un point A et une droite (d).

Le point le plus proche du point A et situé sur la droite (d) est le point H, pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.

La distance AH est appelée **distance** du point A à la droite (d).



Quel que soit le point M de (d) distinct de H, $AH < AM$.

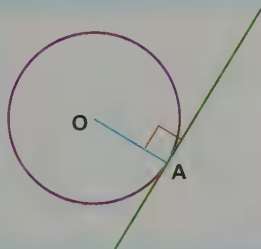
Vocabulaire

Distinct : qui n'est pas confondu.

4 Tangente à un cercle

Soient un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un point A du cercle.

La **tangente** en A au cercle $\mathcal{C}$ est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon [OA].

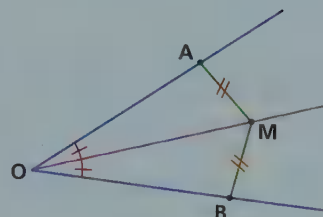


Le cercle $\mathcal{C}$ et la tangente en A ont un seul point commun : le point A.

5 Bissectrice

Si un point est situé sur la bissectrice d'un angle alors il est équidistant des côtés de l'angle.

Si un point est équidistant des côtés d'un angle alors il est situé sur la bissectrice de cet angle.





PROPRIÉTÉ DIRECTE ET PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

Propriété directe

Une propriété mathématique est souvent obtenue à la suite d'une démonstration.
Une propriété s'énonce sous la forme « si » « alors »

Propriété réciproque

La propriété réciproque s'énonce aussi sous la forme « si » « alors »
On permute donnée et conclusion de la propriété directe.
On permute ce qui s'écrit après le « si » et ce qui s'écrit après le « alors ».

Propriété directe	Si alors
Propriété réciproque	Si alors

Exemple

Propriété directe :

« Si un triangle est rectangle alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit. »

Propriété réciproque :

« Si le cercle circonscrit à un triangle a pour diamètre un côté du triangle alors le triangle est rectangle. »

Remarque

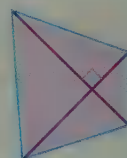
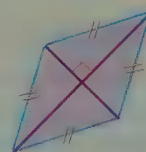
Toute propriété n'admet pas toujours une propriété réciproque vraie.

Par exemple :

« Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires ».

Par contre, si les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires on ne peut pas toujours dire que c'est un losange.

Dans ce cas, la propriété réciproque n'est pas vraie.



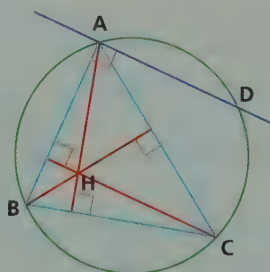
Exemple d'application

Énoncé

Un triangle ABC est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$, le point H est le point de concours des hauteurs du triangle. La droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en D.

1) Démontrer que le segment [BD] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

2) Démontrer que la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (BC).



Exemple de solution

1) La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AD) donc le triangle ABD est rectangle.

Les trois points A, B et D sont sur le cercle $\mathcal{C}$ donc ce cercle est le cercle circonscrit au triangle ABD. D'après la propriété directe, le segment [BD] est donc un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

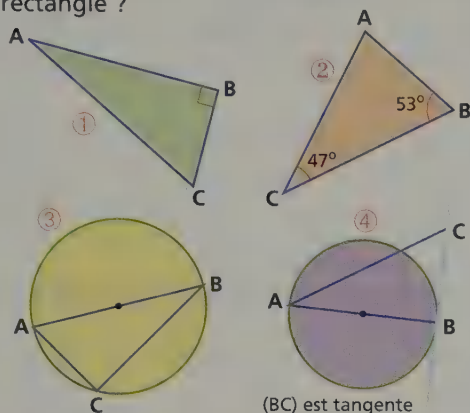
2) Les trois points B, C et D sont sur le cercle $\mathcal{C}$. Ce cercle $\mathcal{C}$ est donc le cercle circonscrit au triangle BCD dont un diamètre est [BD].

D'après la propriété réciproque, ce triangle BCD est rectangle en C. On en déduit que la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (BC).

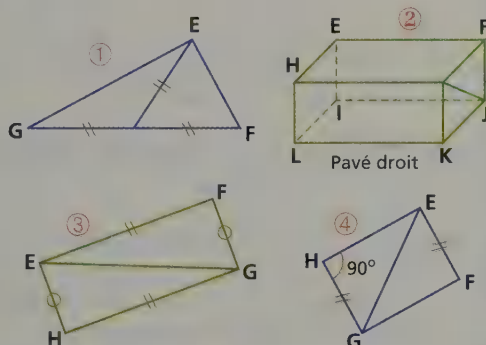
exercices

RECONNAÎTRE

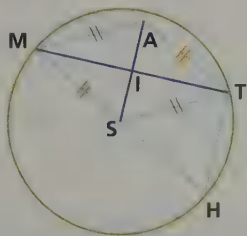
- 1 Quelles figures comportent un triangle rectangle ?



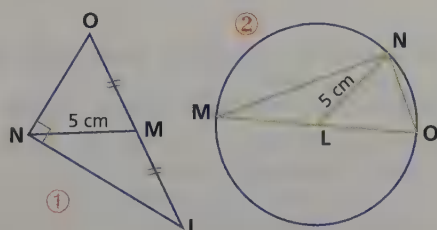
- 2 Quelles figures comportent un triangle rectangle ? La ou les nommer.



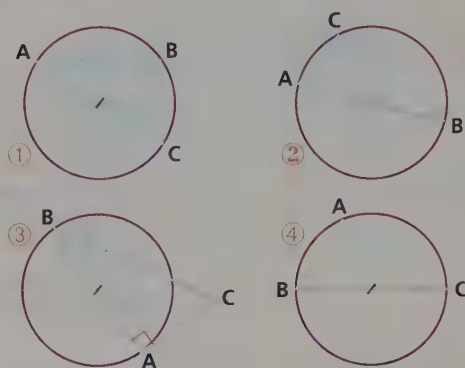
- 3 Quels sont les triangles rectangles contenus dans la figure ci-dessous ?



- 4 Calculer OM dans chacun des cas suivants :

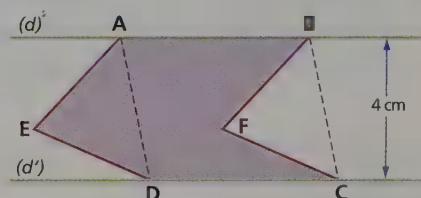


- 5 Le théorème « si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit » s'applique-t-il aux cas de figures ci-dessous ?



- 6 Deux droites parallèles (d) et (d') sont distantes de 4 cm.

Un triangle ADE a deux sommets respectivement sur les droites (d) et (d') . B est un point de (d) . Le triangle BCF est l'image de ADE par la translation qui transforme A en B.

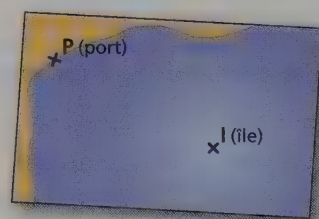


Exprimer, en fonction de AB, l'aire de la figure ABFCDE.

TRACER ET CONSTRUIRE

- 7 Au bord de la mer

Sur le dessin, 1 cm représente 1 km.
Reproduire le dessin, le segment [PI] mesure 6 cm.

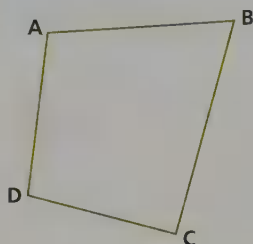


- a) L'île étant entourée de récifs dangereux, il ne faut pas s'en approcher à moins de 3 km. Colorier en rouge la zone dangereuse.

- b) Le voilier doit rester plus près du port que de l'île. Colorier en vert la zone où peut naviguer le voilier.

exercices

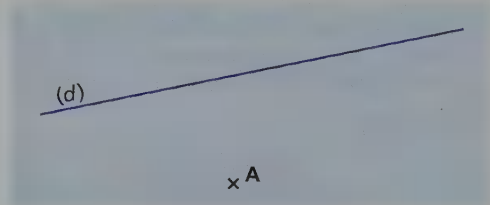
- 8 — ABCD est un quadrilatère quelconque.



Reproduire la figure et colorer, à l'intérieur du quadrilatère, la zone où se situent les points plus près de A que de D et plus près de B que de D.

- 9 — Une droite et un point

Le point A est situé à 1,5 cm de la droite (d).



Reproduire la figure. Construire les points situés à 2 cm de la droite (d) et à 4 cm du point A.



- 10 — Construire un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $AC = 7,3$ cm et $BC = 3,4$ cm.

Construire son cercle circonscrit et la tangente à ce cercle passant par A.

- 11 — Construire un triangle RAI tel que $RA = 6$ cm, $RI = 3,5$ cm et $AI = 6,6$ cm.

Placer un point N situé à 5 cm de A et à l'extérieur du triangle.

Construire les tangentes au cercle circonscrit au triangle RAI passant par N.

- 12 — Construire un triangle DEF tel que $\widehat{DEF} = 105^\circ$, $EF = 5$ cm et $ED = 8$ cm.

Construire le cercle inscrit à ce triangle.

Méthode

Construction de la tangente à un cercle passant par un point donné

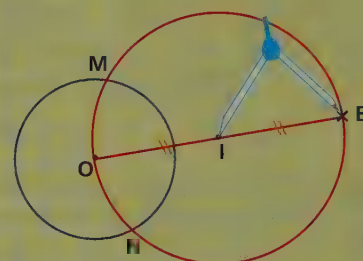
Énoncé

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et un point E extérieur au cercle.



Exemple de solution

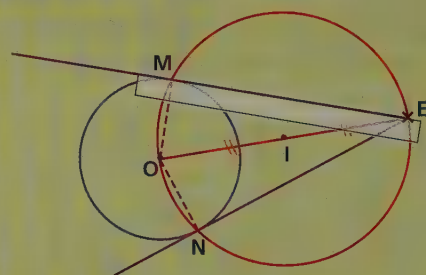
- On trace le cercle de diamètre [OE].



Ce cercle $\mathcal{C}'$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points que l'on nomme M et N.

- En utilisant la propriété du triangle inscrit dans un demi-cercle, il est facile de démontrer que (ME) et (OM) sont perpendiculaires ainsi que (NE) et (NO).

- On trace les droites (EM) et (EN) et on obtient les tangentes cherchées.



- 13 — a) Construire un triangle équilatéral ABC de 6 cm de côté.
b) Construire le cercle circonscrit et le cercle inscrit de ce triangle.
c) Quelle est la particularité des deux centres ?

RAISONNER ET CONSTRUIRE

Pour les exercices n° 14 à 18, construire d'abord une figure à main levée en indiquant les données du texte.

- 14** Construire un triangle ABC sachant que :
AB = 6 cm ; BC = 5 cm ; aire du triangle = 10 cm^2 .

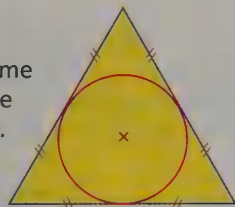
- 15** Construire un triangle ABC rectangle en A tel que :
AB < AC ; BC = 5 cm et l'aire est égale à 5 cm^2 .

- 16** Construire un triangle ABC de hauteur [AH] et de médiane [AM] sachant que :
BC = 4 cm ; AH = 3,4 cm ; AM = 4,1 cm

- 17** a) Tracer une droite (D) et placer un point F à 1 cm de (D).
b) Construire un point A à 3 cm de (D) et à 4 cm de F.
c) Construire un losange FACO tel que C soit sur (D).
Combien y a-t-il de solutions ?

- 18** Construire un parallélogramme d'aire 20 cm^2 et dont un côté mesure 8 cm.

- 19** Écrire le programme de construction de la figure suivante.



- 20** Avec deux droites parallèles

Construire deux droites parallèles (d_1) et (d_2) puis construire un cercle tangent à ces deux droites.

- 21** Avec deux droites sécantes (1)

Construire deux droites sécantes (d_1) et (d_2) puis construire un cercle tangent à ces deux droites.

- 22** Avec deux droites sécantes (2)

Construire deux droites sécantes (d_1) et (d_2) puis construire un cercle tangent à (d_1) dont le centre est situé sur (d_2) .

- 23** Avec deux droites sécantes et un point

Reproduire à peu près le dessin ci-dessous.



Construire un cercle tangent aux deux droites (d_1) et (d_2) et passant par M.

- 24** Avec trois droites

Construire trois droites puis construire un cercle tangent à ces trois droites.

Combien existe-t-il de cas possibles de figures ?

- 25** Avec un cercle

Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 cm. Construire un cercle $\mathcal{C}'$ tangent au cercle $\mathcal{C}$.

Combien existe-t-il de possibilités ?

- 26** Avec un cercle et un point

Tracer un cercle de centre O et de rayon 3 cm. Placer un point A à 4 cm de O.

Construire un cercle de centre A et tangent au cercle $\mathcal{C}$.

- 27** Avec deux cercles

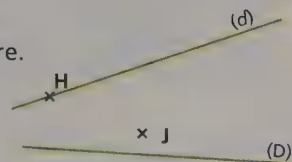
Construire deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de même centre I.

Construire un cercle tangent aux deux cercles.

- 28** Un cercle et un triangle

Tracer un cercle de centre O et de rayon 5 cm. Construire un triangle dont les côtés sont tangents au cercle et dont les angles mesurent 80° , 60° et 40° .

- 29** Reproduire le dessin ci-contre.

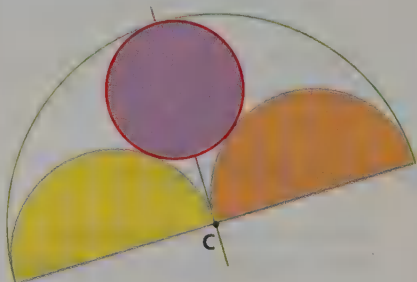


Tracer un cercle tangent à (D) et dont le centre I est équidistant de H et de J.

Combien de solutions pouvez-vous obtenir ? En existe-t-il une dont le centre est sur (d) ?

exercices

- 30** — On trace deux demi-disques de même rayon dans un demi-disque de centre C et de 6 m de rayon. Tracer un disque tangent aux trois demi-disques. Expliquer la construction.



31 — La règle et le compas

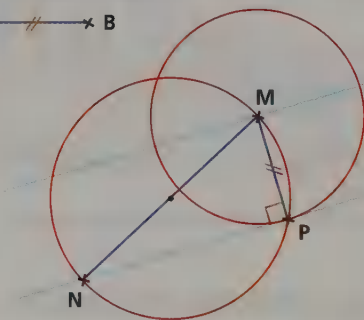
Dans un magazine, Thomas a lu le problème de constructions suivant :

« Soient deux points M et N et un segment [AB].

Utiliser une simple règle non graduée et un compas pour construire deux droites parallèles situées à la distance AB l'une de l'autre et passant l'une par M et l'autre par N. »

Thomas a réalisé la construction ci-dessous, solution du problème.

A * — // — * B



Expliquer la construction de Thomas.

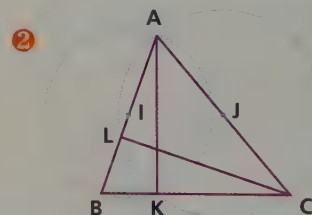
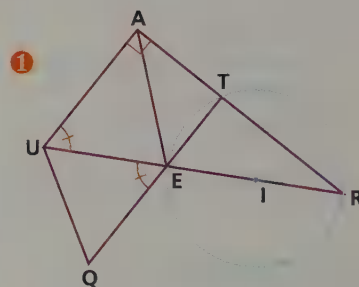
UTILISER DES PROPRIÉTÉS

- 32** — Trouver le maximum de méthodes pour prouver que :
- une droite est tangente à un cercle ;
 - des points sont sur un même cercle.

- 33** — Recopier et compléter les parties de raisonnement manquantes :

- a) • On sait que (AB) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A et que le cercle admet [AC] comme diamètre.
 • D'après
 • Donc (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- b) • On sait que KTS
 • Si un triangle est rectangle alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.
 • Donc le centre du cercle est I milieu de l'hypoténuse [KT].
- c) • On sait que ABC est un triangle rectangle et que
 • Si
 • On peut dire que $AM = \frac{1}{2} BC$.

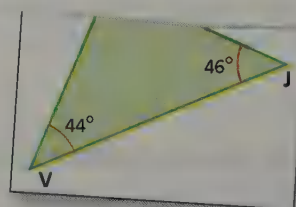
- 34** — Dans les cas de figures suivants, citer les théorèmes que l'on pourrait employer :



- 35** — Ronald avait dessiné un triangle EJV, de telle façon que :

$\widehat{EJV} = 46^\circ$, $\widehat{EVJ} = 44^\circ$, $VJ = 5,3$ cm et L est le milieu de [VJ].

La feuille a été déchirée malencontreusement en E.



Sans faire de constructions, indiquer quelle est la longueur du segment [EL].

- 36** — Construire un triangle ABC rectangle en A et son cercle circonscrit.
Construire la hauteur issue de A. Elle coupe le segment [BC] en H.
Construire la tangente (Δ) au cercle au point C.

Que peut-on dire des droites (Δ) et (AH) ? Justifier.

- 37** — Construire un triangle équilatéral FRA et le cercle de centre F et de rayon FR.
Construire la tangente en R à ce cercle qui coupe (FA) en N.

Le triangle ARN est isocèle. Expliquer pour quelles raisons.

- 38** — ABC est un triangle et [AI] est une médiane de ce triangle.
[HC] est la hauteur issue de C

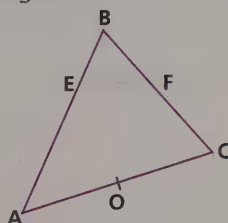
a) Faire une figure de telle façon que H soit entre A et B.

b) Démontrer que le triangle BHI est isocèle.

- 39** — ISO est un triangle isocèle en I. Le point R est le symétrique de S par rapport à I.

Le triangle SOR est-il toujours rectangle ?

- 40** — ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AC] a pour centre O. Les points E et F sont les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et des deux autres côtés du triangle.



Émettre trois conjectures à propos de cette figure et utiliser des propriétés pour les démontrer.

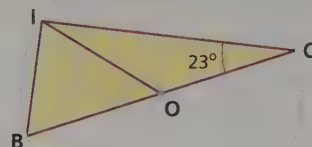
- 41** — Tracer un triangle quelconque ABC.

Placer le point H, pied de la hauteur issue de A. Construire les cercles de diamètres [AB] et [AC].

Il semble que ces cercles se coupent en H. Prouver le.

42 — Calculs de mesures d'angles

Le cercle a pour diamètre [BC].

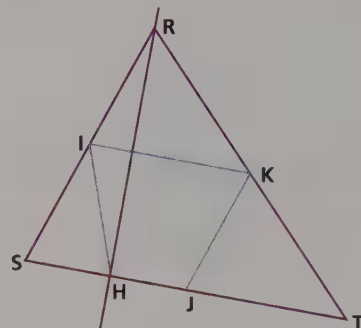


Calculer la mesure des angles $\widehat{CIO}$ et $\widehat{IBO}$.

- 43** — ABC est un triangle rectangle en A. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

Quelle est la nature du quadrilatère AJIK ? Justifier par trois démonstrations différentes.

- 44** — Tracer un triangle RST et sa hauteur [RH]. Tracer les milieux I, J et K respectivement des côtés [RS], [ST] et [RT].



Démontrer que le quadrilatère IHJK est un trapèze isocèle.

(Indication : respecter la position des points sinon le quadrilatère à utiliser est IJHK.

Les notions utiles sont les notions de médiane, hauteur, droite des milieux, propriété « si un triangle est rectangle alors la longueur de la médiane issue de l'angle droit est la moitié de la longueur de l'hypoténuse ».)

Vocabulaire

Un **trapèze isocèle** est un quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles et les deux autres côtés ont même longueur.

PROBLÈMES

45 — Construire un triangle DEF. La hauteur issue de D coupe (EF) en H.

- Soit G le milieu de [DF]. Montrer que le triangle FGH est isocèle.
- Rechercher un autre triangle isocèle dans la figure.

46 — ABC est un triangle équilatéral. Le point H est le pied de la hauteur issue de A.

- Construire le triangle BDE symétrique du triangle BHA par rapport à B.
- Démontrer que le triangle CDE est un triangle rectangle.
- Démontrer que le triangle CAE est un triangle rectangle.

47 — Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Deux points A et B sont diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}$. Le point D est un point du cercle tel que $BD = 2$ cm. Le point E est le symétrique de B par rapport à D.

- Démontrer que (AD) est la médiatrice de [EB].
- Soit F le symétrique de O par rapport à la droite (AD). Démontrer que A, F et E sont alignés.
- Déterminer la nature du quadrilatère AODF.

48 — On donne deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres O et O', sécants en A et B. Soit [CA] un diamètre de $\mathcal{C}$ et [DA] un diamètre de $\mathcal{C}'$.

- Faire une figure.
- Démontrer que les triangles ABC et ABD sont rectangles.
- En déduire que les points C, B, D sont alignés.
- Démontrer que (OO') est médiatrice de [AB].

49 — $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de diamètre [AB]. La médiatrice (d) de [AO] coupe le cercle en R et S. Le point O' est le symétrique de O par rapport à A.

- Quelle est la nature du quadrilatère AROS? Justifier la réponse.
- Démontrer que (O'R) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en R.
- Démontrer que (O'B) est bissectrice de $\widehat{RO'S}$.

Exercice résolu

Énoncé

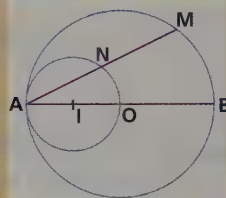
$\mathcal{C}_2$ est un cercle de diamètre [AO] et de centre I.

M est un point du cercle $\mathcal{C}_1$ distinct de A et de B. Le segment [AM] recoupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en N.

Démontrer que les droites (ON) et (MB) sont parallèles.

Exemple de solution

Le triangle AMB est pour côté [AB] un diamètre du cercle $\mathcal{C}_1$ et un sommet M un point de ce cercle, d'après la propriété « tout triangle inscrit dans un cercle en ayant pour sommets les extrémités d'un diamètre et un point du cercle est rectangle », on peut conclure que le triangle AMB est rectangle en M.



C'est-à-dire que les droites (NO) et (AM) sont perpendiculaires.

De la même façon, on peut démontrer que le triangle ANO est rectangle en N. C'est-à-dire que les droites (MB) et (AM) sont perpendiculaires.

On a donc deux droites (NO) et (MB) perpendiculaires à une même troisième (AM).

D'après la propriété « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles », on peut en déduire que les droites (NO) et (MB) sont parallèles.

50 — a) Sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, marquer trois points A, B et C. Soient $\mathcal{C}'$ le cercle de diamètre [BC] et D le milieu de [AB]. Le cercle $\mathcal{C}'$ coupe (AB) en B et I.

- Démontrer que les droites (OD) et (CI) sont parallèles.

- 51** $\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre [UT].
 $\mathcal{C}'$ est un autre cercle de centre O, qui passe par U et T.
 Une droite (d) qui passe par U recoupe $\mathcal{C}$ en L et $\mathcal{C}'$ en E.
 Le point M est le milieu de [EU].

- Construire une figure.
- Démontrer que les droites (OM) et (EU) sont perpendiculaires.
- Démontrer que le triangle ULT est rectangle en L.
- Justifier le parallélisme des droites (TL) et (OM).

- 52** Tracer un cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [RS] et de centre I. Tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre [RI]. Placer un point M sur $\mathcal{C}_2$ distinct de R et de I et tracer la droite (MI). La droite parallèle à (MI) et passant par S coupe $\mathcal{C}_1$ en N.

Démontrer que les points R, M, N sont alignés.

- 53** Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de diamètre [AB].

- Placer un point M quelconque sur le cercle $\mathcal{C}$. Tracer la parallèle à (OM) passant par B. Elle coupe la droite (AM) en E.
- Montrer que $EM = MA$.
- Dire pour quelles raisons $BE = 2 \times OM$ et $BE = BA$.
- Démontrer que les droites (MB) et (MA) sont perpendiculaires.
- Quelle est la nature du triangle AMB ? Du triangle AEB ?

- 54** a) Construire un triangle RST rectangle en S tel que $RS = 4,5$ cm et $RT = 7,5$ cm.

- Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre R et de rayon 4,5 cm. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe le segment [RT] en K.
- Quelle est la position de la droite (TS) par rapport au cercle.
- Tracer la droite (d) passant par K et parallèle à la droite (RS). Cette droite (d) coupe le segment [TS] en un point L. Placer ce point sur la figure.
- Calculer KL.

- 55** Dans un triangle ABC rectangle en A, on construit la hauteur [AH], le point H étant le pied de cette hauteur. Le cercle de diamètre [BH] recoupe [AB] en S et le cercle de diamètre [HC] recoupe [AC] en T.

- Faire une figure.
- Quelle est la nature du quadrilatère ASHT ? Justifier la réponse.

- 56** ELM est un triangle rectangle en E, on appelle H le pied de la hauteur issue de E dans le triangle ELM. Le point A est un point du segment [LM] distinct de L, de H et de M.

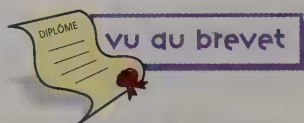
- Faire une figure et construire le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AE] qui coupe [EL] en U et [EM] en R.
- Démontrer que H est un point situé sur le cercle $\mathcal{C}$.
- Démontrer que EUAR est un rectangle.

- 57** a) Construire un cercle $\mathcal{C}$ et un triangle OBI dont les sommets sont situés sur le cercle. Construire l'orthocentre H du triangle OBI. Tracer la perpendiculaire au côté [BI] passant par I, elle recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en M.
- Démontrer que le cercle $\mathcal{C}$ admet [BM] comme diamètre.
 - Le quadrilatère OHIM semble être un parallélogramme. Démontrer le.



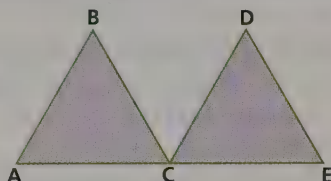
- 58** Tracer un angle $\widehat{xAy}$ de 60° .

- Tracer la bissectrice de $\widehat{xAy}$. Placer sur cette bissectrice un point B tel que $AB = 7$ cm et I milieu de [AB].
- La perpendiculaire issue de B au côté [Ax] coupe [Ax] en M et la perpendiculaire issue de B au côté [Ay] coupe [Ay] en N. Démontrer que $BM = BN$ et que $AM = AN$.
- Donner les mesures des angles du triangle AMB en justifiant les réponses.
- Démontrer que le triangle BIM est équilatéral.
- Démontrer que MBNI est un losange.
- Démontrer que les droites (AM) et (AN) sont tangentes au cercle de centre B et de rayon BI.
- Démontrer que le triangle AMN est équilatéral.
- Démontrer que [MN] est bissectrice de l'angle $\widehat{IMB}$.



59 — Dijon 1996

ABC et CDE sont deux triangles équilatéraux de côté 3 cm. A, C et E sont alignés.



- Faire une figure exacte, en respectant les longueurs données et la compléter au fur et à mesure.
- Prouvez que les points A, B, D, E sont sur un même cercle ; indiquez le centre et le rayon de ce cercle.
- Prouvez que ABE est un triangle rectangle.
- Calculez les mesures des angles du triangle ABE.
- Prouvez que BCD est un triangle équilatéral.

60 — Afrique 1996

L'unité est le centimètre.

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que le côté [AB] mesure 7,5 et le côté [BC] mesure 12. Soit M le milieu du segment [BC]. On trace la perpendiculaire à (AC) passant par B, elle coupe (AC) en N.

- Construire la figure en vraie grandeur.
- Que représente la droite (BN) pour le triangle ABC ? Pourquoi ?
- Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABN. On désigne par O le centre de ce cercle $\mathcal{C}$.
 - Démontrer que le triangle AMB est rectangle en M.
 - Démontrer que O est le milieu du segment [AB].
 - Démontrer que le point M est sur le cercle $\mathcal{C}$.
 - Soit P le symétrique du point N par rapport au point O. Placer le point P et démontrer que le quadrilatère ANBP est un rectangle.

61 — Limoges 2000

- Construire un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon 3 cm.
- Placer sur $\mathcal{C}$ deux points E et F tels que le triangle OEF soit équilatéral.
- Tracer la tangente en cercle $\mathcal{C}$ passant par E ; elle coupe (OF) en A.
- Montrer que OEA est rectangle.
- Calculer les mesures des angles du triangle AEF.
- Démontrer que F est le milieu de [OA].

62 — Asie 1999

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre AD = 8 cm. B est un point de $\mathcal{C}$ tel que AB = 6 cm et E est le point de [AD] tel que ED = 3 cm. La parallèle à (BE) passant par D coupe (AB) en F.

- Faire une figure.
- Quelle est la nature du triangle ABD ?
- Calculer la valeur exacte de AF.

63 — Bordeaux 1998

L'unité de longueur est le centimètre.

Soit un triangle ADB rectangle en D, tel que BA = 10 et DB = 8.

- Construire le triangle ADB.
- Placer le point C du segment [BA] tel que BC = 4. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [BC]. Le cercle recoupe la droite (BD) en E.
 - Démontrer que le triangle BEC est rectangle en E.
 - En déduire que les droites (AD) et (CE) sont parallèles.
 - Calculer BE.
- On note M le milieu de [AB], et H le point d'intersection des droites (EC) et (DM). La droite passant par B perpendiculaire à la droite (DM) coupe la droite (EH) en F.
 - Que représente le point H pour le triangle BDF ?
 - En déduire que les droites (BH) et (DF) sont perpendiculaires.



Dans les exercices suivants, les mots en *couleur* correspondent à une commande du logiciel Cabri-Géomètre®. Ils peuvent être réalisés avec un autre logiciel.

- 64** Tracer un *cercle* de centre O et placer un *point* C extérieur au cercle.

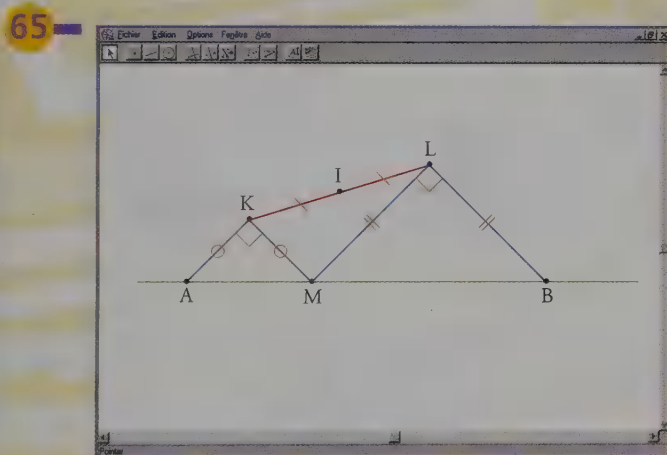
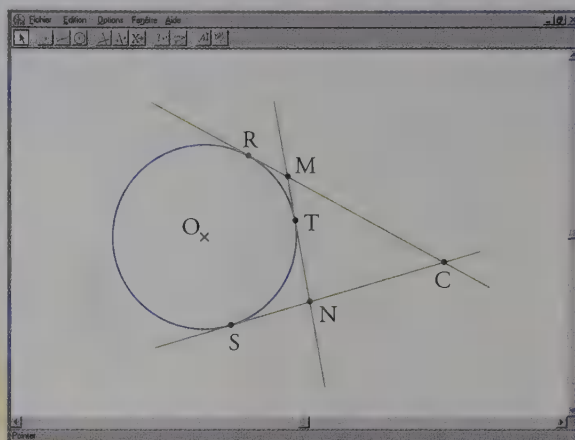
Tracer les tangentes (CR) et (CS) au cercle.

Placer un *point sur* le cercle, *nommer*-le T et tracer la tangente au cercle qui coupe (CR) en M et (CS) en N .

Mesurer CM , CN , MN , CR et CS .

Calculer le périmètre du triangle CMN .

Déplacer le point C plusieurs fois, reprendre les mesures, comparer les différentes valeurs trouvées pour le périmètre de CMN avec celles de CR .



Tracer deux *points* A et B . Placer un *point sur* le segment $[AB]$ et *nommer*-le M .

Construire avec l'aide des commandes du logiciel deux triangles rectangles isocèles AMK et BML .

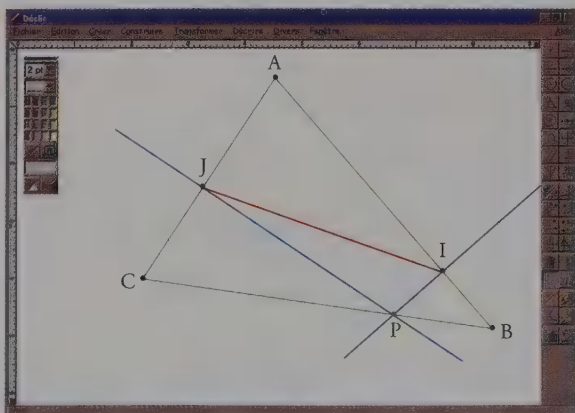
Placer le *milieu* de $[KL]$ et *nommer*-le I .

Déplacer le point M sur $[AB]$.
Comment semble se déplacer le point I ?
Démontrer-le.

- 66** La figure ci-contre a été réalisée avec le logiciel Déclic, téléchargeable gratuitement à l'adresse <http://mathcollege.free.fr/logiciels/logiciels.html>.

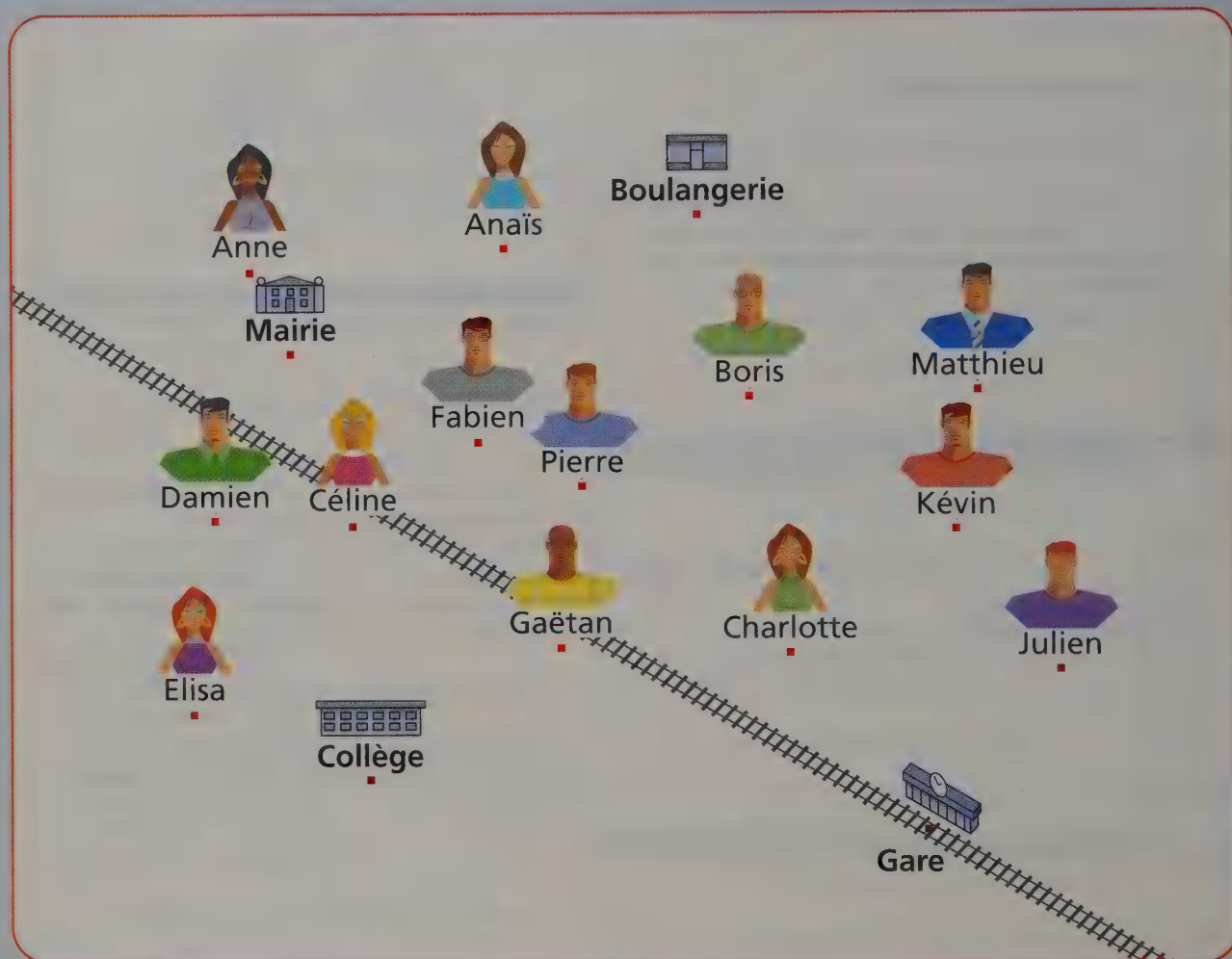
Tracer un triangle ABC rectangle en A . Placer un point P sur l'hypoténuse $[BC]$. Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par P , elle coupe $[AB]$ en I . Tracer la perpendiculaire à (AC) passant par P , elle coupe $[AC]$ en J .

Déplacer le point P et considérer la figure $AIPJ$.
Où placer le point P pour que IJ soit minimum ?
Démontrer-le.



■ DE QUI S'AGIT-IL ?

La figure indique l'emplacement du domicile de treize personnes. La gare et la ligne de chemin de fer, la mairie, le collège et une boulangerie sont aussi placés sur cette carte. Un centimètre représente cent mètres dans la réalité.



- Découper précisément la figure.
- Retrouver l'identité de la personne dont le domicile correspond aux indications suivantes en effectuant les constructions nécessaires. Il ou elle habite :
 - à moins de 200 m de la ligne de chemin de fer ;
 - à moins de 700 m de la gare et de la boulangerie ;
 - plus près de la mairie que du collège.
- Rédiger un texte de ce type pour localiser les domiciles d'Élisa, de Céline, d'Anaïs, de Kévin.

■ DESSIN MYSTÉRIEUX

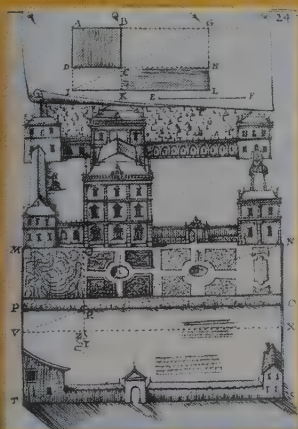
Effectuer les constructions décrites ci-dessous au crayon à papier et sans trop appuyer. Toutes les lettres et plusieurs traits seront effacés pour ne garder que les contours du dessin final. Trois couleurs seront utilisées : ocre jaune, terre de Sienne et marron.

- Construire un segment $[AB]$ de longueur 10 cm et de milieu C.
- Construire la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$. Du même côté du segment $[AB]$ et sur (Δ) , placer les points D et G tels que $CG = 5$ cm et $CD = 8$ cm.
- Construire les cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ respectivement de centre C et D et de rayon 5 cm. Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en E et F. Le cercle $\mathcal{C}_2$ coupe le segment $[CG]$ en H.
- Construire le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre G et de rayon $[GE]$. Construire la droite (d) tangente au cercle $\mathcal{C}_3$ au point E et la droite (d') tangente au cercle $\mathcal{C}_3$ en F. Les droites (d) et (d') se coupent en K.
- Construire I le symétrique de G par rapport à (d) et J le symétrique de G par rapport à (d') .
- Colorer en terre de Sienne tous les points situés à la fois plus près de G que de I, plus près de G que de J, à plus de 5 cm de D et à moins de 5 cm de G.
- Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{EKG}$ et les bissectrices des deux angles obtenus. Procéder de la même façon pour l'angle $\widehat{FKG}$. Colorer en marron foncé les portions de ces six bissectrices situées dans la zone colorée à l'étape précédente ainsi que le segment $[CH]$.
- Colorer en terre de Sienne tous les points situés à la fois à moins de 1,5 cm de la droite (Δ) , à plus de 5 cm du point G et à moins de 5 cm du point H.
- Colorer en ocre jaune tous les points situés à moins de 5 cm de D et à moins de 5 cm de C.
- Colorer en marron foncé l'arc de cercle $\widehat{EF}$ du cercle $\mathcal{C}_2$.
- Effacer toutes les lettres et les traits de construction extérieurs au dessin coloré.

(Solution : ancêtre du téléphone sans fil.)



À travers L'Histoire



À côté des grands ouvrages de géométrie, comportant propriétés des figures et théorèmes, on trouve des livres de géométrie pratique. Manesson Mallet, maître de mathématiques des pages de la petite écurie du roi Louis XIV, est un des auteurs de cette géométrie pratique. Il explique comment se servir d'instruments et de propriétés bien utiles à ceux qui doivent mesurer des distances inaccessibles sur le terrain. Bien sûr, il cite l'exemple célèbre de Thalès qui aurait mesuré la hauteur de la pyramide de Khéops et fait référence au théorème du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle, attribué également à Thalès.

Les architectes et arpenteurs du XVII^e siècle se servent d'une toise pour mesurer. La toise est un bâton gradué dont la longueur mesure six pieds, soit près de deux mètres. Un pied vaut douze pouces, un pouce de roi vaut douze lignes et une ligne est la longueur de douze points. Et le point qu'est-ce que c'est ? ... C'est la douzième partie de l'épaisseur d'un moyen grain d'orge !!!

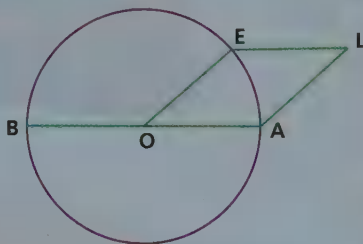
ce que je dois savoir sur...

...Le cercle et Le triangle rectangle

- Utiliser la propriété du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle.
- Utiliser la propriété des points d'un cercle de diamètre donné en formant un triangle dont un angle est droit.
- Construire la tangente à un cercle en l'un de ses points.
- Déterminer la distance d'un point à une droite.

je m'évalue

- 1 Un cercle $\mathcal{C}$ de centre O a pour diamètre $[AB]$. Le point E est un point du cercle et $OELA$ est un losange.

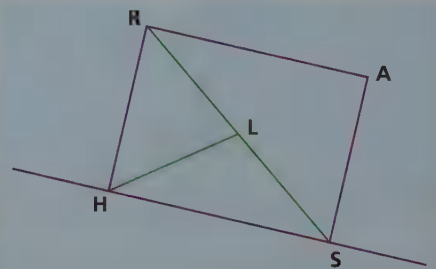


- a) Reproduire la figure en prenant $OA = 5$ cm.
- b) Démontrer que le triangle ABE est rectangle et préciser l'angle droit.
- c) Tracer la hauteur issue de A dans le triangle AEO . Elle coupe (OE) en S .
- d) Par quels points passe le cercle de diamètre $[OA]$?

- 2 Tracer une droite (d) .

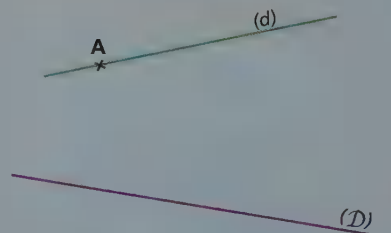
- a) Placer un point A à 4 cm de (d) .
- b) Placer les points à 5 cm de A et à 5 cm de (d) .

- 3 Un rectangle $RASH$ de centre L est tel que $AS = 3,6$ cm et $RS = 6$ cm.



- a) Quelle est la distance du point R à la droite (SH) ?
- b) Quelle est la longueur de $[LH]$?

- 4 Reproduire la figure à peu près comme sur le dessin ci-dessous.



Construire le cercle dont le centre est sur (D) et qui est tangent à (d) en A .

THÉORÈME DE PYTHAGORE

En 6^{ème}-5^{ème}

- Reconnaître et tracer un triangle ou un quadrilatère particulier.
- Prendre l'arrondi à l'unité, au dixième ou au centième.
- Connaître et utiliser une définition du parallélogramme et des propriétés relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles.
- Calculer l'aire des figures usuelles et le volume des prismes droits.

En 4^{ème}

- Caractériser le triangle rectangle par la propriété de Pythagore et sa réciproque.
- Calculer la longueur du côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.
- En donner, s'il y a lieu, une valeur approchée, en faisant éventuellement usage de la touche $\sqrt{\quad}$ d'une calculatrice.

pour démarrer



1 — Hypoténuses à gogo !

• Introduction du mot « hypoténuse ».

• Reconnaître des triangles rectangles et leur associer les hypoténuses correspondantes.

Vocabulaire

Dans un triangle rectangle, on appelle **hypoténuse** le côté opposé à l'angle droit.

Nommer les hypoténuses de la figure ci-contre ainsi que les triangles rectangles auxquels elles appartiennent.



2 — Constructions de triangles rectangles

Dans chaque cas, construire le triangle ABC rectangle en A :

- a) $AB = 4 \text{ cm}$; $AC = 5 \text{ cm}$ b) $AC = 4 \text{ cm}$; $BC = 5 \text{ cm}$
c) $AB = 6 \text{ cm}$; $\widehat{ABC} = 45^\circ$ d) $BC = 7 \text{ cm}$; $\widehat{BCA} = 30^\circ$

3 — Arrondis

Donner l'arrondi à 0,1 près, puis à 0,01 près des quotients suivants :

$$\frac{3}{7} ; \quad \frac{7}{15} ; \quad \frac{19}{12} ; \quad \frac{5}{9} ; \quad \frac{1449}{500}$$

Révision de notions de 6^{ème} et 5^{ème} comme pré-requis à ce chapitre : constructions de triangles et recherche d'arrondis.

Activités

4 Usage de la calculatrice

1) Le carré de 7 se calcule par 7×7 . On note $7^2 = 7 \times 7 = 49$.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

x	1	2,5	7	11	12,5	20
x^2			49			

Avec la calculatrice, on utilise la touche x^2 .

2) Un carré a pour aire 9 cm^2 , quelle est la longueur de son côté ?

Quelle méthode utilise-t-on ?

Même question pour un carré d'aire $6,25 \text{ cm}^2$.

Avec la calculatrice, on utilise la touche $\sqrt{x}$.

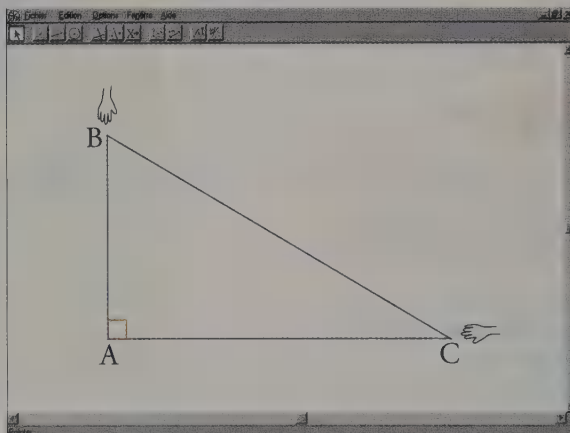
3) Recopier et compléter le tableau suivant (arrondir au centième) :

AB^2	12,25	36	50	53,29	82	144	104,4	122
AB								

La calculatrice est-elle toujours utile ?

5 Observation avec logiciel

Construire un triangle ABC rectangle en A. Afficher les mesures de AB, BC et AC. Fixer le point A. Déplacer les points B et C à l'aide de la souris de l'ordinateur.



Recopier le tableau ci-dessous. Pour chaque cas, choisir une position de B et C, puis relever les valeurs des longueurs AB, BC et AC, et compléter le tableau.

	AB	AC	BC	AB^2	AC^2	$AB^2 + AC^2$	BC^2
Cas 1							
Cas 2							
Cas 3							
Cas 4							
Cas 5							

Que constate-t-on ?

• Usage de la calculatrice, en particulier de la touche $\sqrt{x}$.

• Distinguer valeur exacte et valeur approchée.

• Reconnaître la pertinence de l'utilisation de la calculatrice.

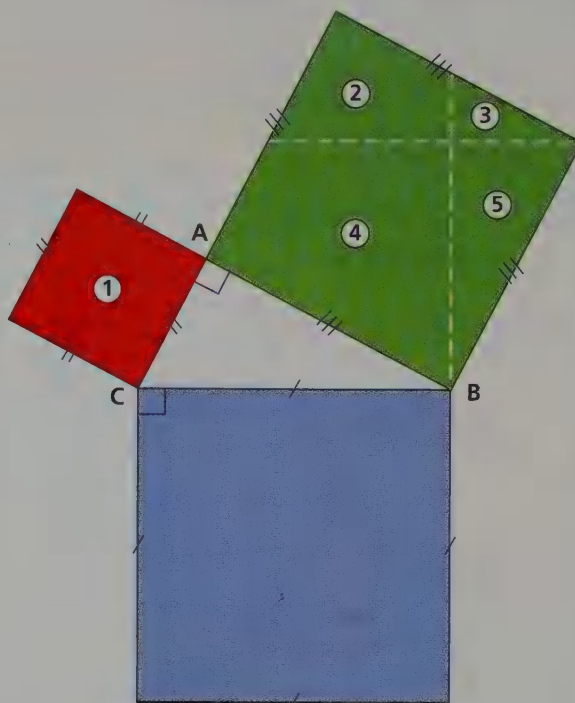
• Approche de la relation de Pythagore. L'activité peut être également réalisée avec des constructions avec règle et équerre.

• En conclusion, on pourra insister sur l'approximation des mesures et la nécessité d'une preuve pour démontrer.

6 — Un puzzle pour prouver

Donner une preuve du théorème de Pythagore est un objectif de cette activité. Cette preuve étant basée sur l'égalité d'aires, on pourra, suivant le niveau de la classe, admettre cette égalité ou faire sentir la différence entre preuve et démonstration (voir exercice 9, p. 96).

- 1) Reproduire la figure ci-dessous à partir d'un triangle ABC rectangle en A et découper les pièces ①, ②, ③, ④, ⑤.



- Vocabulaire

Prouver, c'est donner des explications pour reconnaître que quelque chose est vraie.

- 2) Avec ces cinq pièces, reconstituer le grand carré bleu.
Quelle relation y-a-t-il entre l'aire du carré vert, l'aire du carré rouge et l'aire du carré bleu ?

- 3) En utilisant les sommets du triangle ABC, exprimer l'aire des trois carrés.

Aire du carré rouge =

Aire du carré vert =

Aire du carré bleu =

Réécrire la relation trouvée au 2) à l'aide de ces trois expressions.

7 — Les triangles sont-ils toujours rectangles ?

Construire les triangles ①, ②, ③, ④ et ⑤ dont les mesures des côtés [AB], [AC] et [BC] sont indiquées dans le tableau.

Recopier, puis compléter le tableau ci-dessous.

	AB	AC	BC	AB^2	AC^2	$AB^2 + AC^2$	BC^2	Le triangle semble-t-il rectangle ?
Triangle ①	1,2	1,6	2					
Triangle ②	3	4	5					
Triangle ③	3,5	4,5	6					
Triangle ④	4,5	6	7,5					
Triangle ⑤	5	7	8,5					

Que remarque-t-on ?

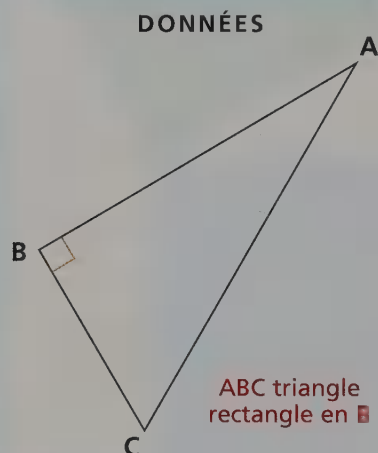
• Approche de la réciproque et de la contraposée (sans introduire le mot auprès des élèves) de la propriété de Pythagore.

• Un dessin ne permet pas de conclure mais donne une indication du résultat.

L'essentiel en deux pages

1 - Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.



CONCLUSION

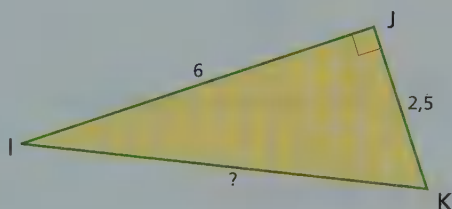
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Remarque

On dit et on écrit « carrés des cotés », il faut comprendre « carrés des mesures des cotés ».

2 - Utilisation de la touche $\sqrt{\quad}$ de la calculatrice

Le théorème de Pythagore permet de calculer une longueur.



Le triangle IJK est rectangle en J, d'après le théorème de Pythagore :

$$IK^2 = IJ^2 + JK^2$$

$$IK^2 = 6^2 + 2,5^2$$

$$IK^2 = 42,25$$

Pour trouver la valeur de IK, on tape, suivant le modèle de la calculatrice,

$\sqrt{\quad}$ 4 2 • 2 5 ou 4 2 • 2 5 $\sqrt{\quad}$.

On obtient ainsi : $IK = 6,5$.

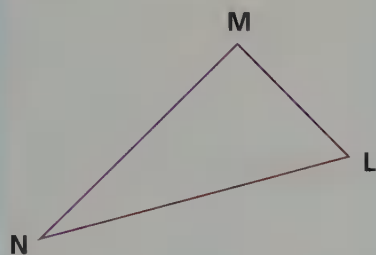
Cette valeur 6,5 obtenue ici pour IK est une valeur exacte.

Pour d'autres types de réponses, voir Méthode ① page 95.

3 — Réciproque du théorème de Pythagore

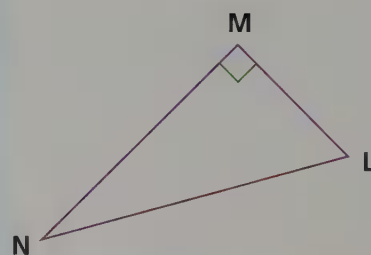
Si dans un triangle, le carré du côté le plus grand est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

DONNÉES



LMN est un triangle
 $LN^2 = LM^2 + MN^2$

CONCLUSION



Le triangle LMN
 est rectangle en M

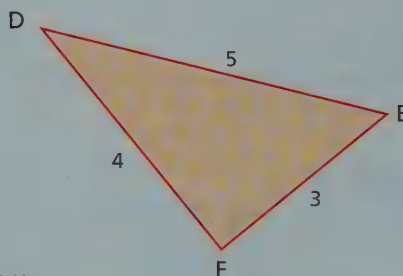
Application

La réciproque du théorème de Pythagore est une propriété permettant de montrer qu'un triangle est rectangle.

Dans le triangle DEF,
 [DE] est le plus long des côtés,

$$\begin{aligned} DE^2 &= 5^2 = 25 \\ EF^2 + DF^2 &= 3^2 + 4^2 \\ EF^2 + DF^2 &= 9 + 16 \\ EF^2 + DF^2 &= 25 \end{aligned}$$

Comme $DE^2 = EF^2 + DF^2$,
 d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
 le triangle DEF est rectangle en F.



4 — Propriété permettant de démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Si, dans un triangle, le carré du côté le plus grand n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

Voir Méthode ② page 95.



RÉDACTION

- Une démonstration est une suite de démonstrations à un pas (donnée - propriété - conclusion).
- Une rédaction correcte d'une démonstration est une suite de phrases qui s'enchaînent.

Des mots utiles

Avant la donnée on peut trouver des mots :

JE SAIS QUE

SOIT

SI

Entre une propriété utilisée et sa conclusion, on utilise des mots de liaison :

DONC

PAR CONSÉQUENT

ALORS

Entre chaque pas, on utilise des mots de liaison :

OR

COMME

DE PLUS

Un exemple

Énoncé

ABC est un triangle tel que
 $AB = 8$, $BC = 10$ et $AC = 6$.
Soit I le milieu de $[AB]$ et
soit O le centre du cercle
circonsrit au triangle ABC.
Calculer OI .

Exemple de solution

Dans le triangle ABC, $[BC]$ est le côté le plus long.

$$AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$BC^2 = 10^2 = 100$$

Comme on trouve la même valeur numérique alors

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Comme le triangle ABC est rectangle en A, alors $[BC]$ est l'hypoténuse.

De plus, si un triangle est rectangle alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

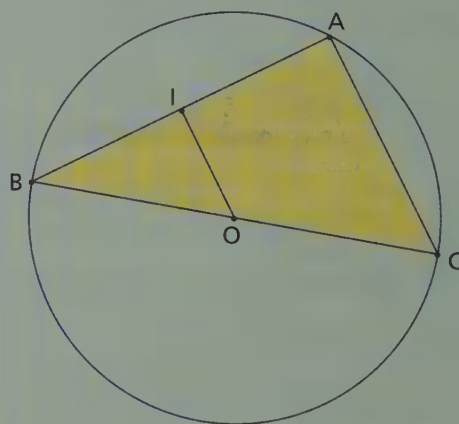
Par conséquent O , centre du cercle circonscrit, est le milieu de $[BC]$.

Dans le triangle ABC, le point O est le milieu du côté $[BC]$ et I est le milieu du côté $[AB]$.

On utilise la propriété: si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est la moitié de la longueur du troisième côté.

On peut donc dire que $OI = \frac{1}{2} AC$.

En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient que $OI = 3$.



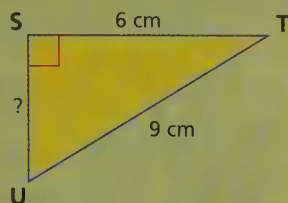
exercices

Méthode

1 Calculer la mesure d'un des cotés de l'angle droit d'un triangle rectangle

Énoncé

Calculer SU, donner un arrondi au dixième.



Exemple de solution

- Le triangle STU est rectangle en S, d'après le théorème de Pythagore :

$$UT^2 = SU^2 + ST^2$$

- ST = 6 cm et TU = 9 cm. Par conséquent :

$$9^2 = SU^2 + 6^2$$

$$81 = SU^2 + 36$$

$$SU^2 = 81 - 36 = 45$$

- On utilise la touche $\sqrt{\quad}$ de la calculatrice et on arrondit au dixième :

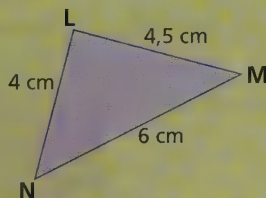
$$SU \approx 6,7 \text{ cm}$$

Méthode

2 Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Énoncé

Le triangle LMN est-il rectangle ?



Exemple de solution

Dans le triangle LMN, [MN] est le plus long des côtés,

$$MN^2 = 6^2 = 36$$

$$LN^2 + LM^2 = 4^2 + 4,5^2 = 16 + 20,25$$

$$LN^2 + LM^2 = 36,25$$

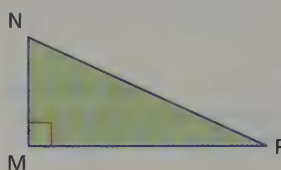
$$36,25 \neq 36, \text{ donc } LN^2 + LM^2 \neq MN^2.$$

Par conséquent, le triangle LMN n'est pas rectangle.

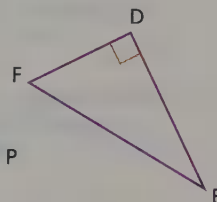
RECONNAITRE

1 Écrire la relation de Pythagore dans les figures ci-dessous :

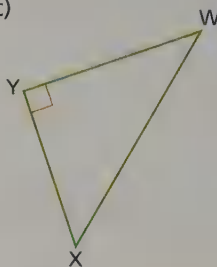
a)



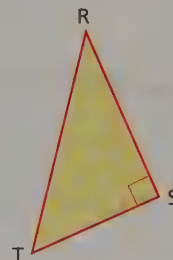
b)



c)



d)



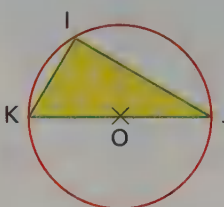
2 Recopier et compléter :

a) $MN^2 = MP^2 + NP^2$ donc le triangle MNP est rectangle en

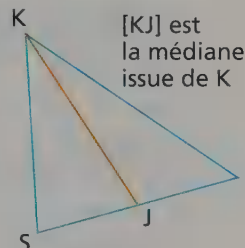
b) $RS^2 = TR^2 + ST^2$, donc le triangle RST est rectangle en

3 Appliquer, lorsque c'est possible, le théorème de Pythagore dans les figures ci-dessous. (Justifier et écrire la relation obtenue.)

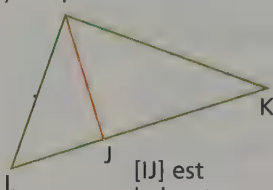
a)



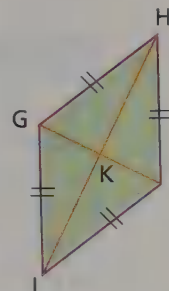
b)



c)



d)



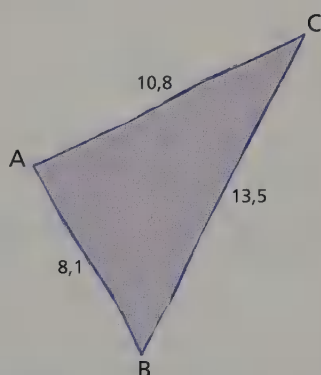
exercices

4 — Recopier et compléter (il peut y avoir plusieurs possibilités) :

- Le triangle ABC est rectangle en
d'après le théorème de Pythagore,
.....² = AB² + BC².
- Le triangle est rectangle en K,
d'après le théorème de Pythagore,
..... L² = AK² +².
- Le triangle RST est rectangle en
d'après le théorème de Pythagore,
.....² = ST² +².

5 — Trois élèves

Un professeur a dessiné le triangle à main levée et demande à ses élèves de déterminer s'il est rectangle ou non.



Voici le travail de trois élèves. Quel pourrait être le commentaire du professeur pour chacun d'eux ?

Premier élève	Deuxième élève
$AC^2 = 10,8^2$ $AC^2 = 116,64$ $AB^2 + BC^2 = 8,1^2 + 13,5^2$ $AB^2 + BC^2 = 65,61 + 182,25$ $AB^2 + BC^2 = 247,86$ Comme $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ le triangle n'est pas rectangle.	$BC^2 = 13,5^2$ $BC^2 = 182,25$ $AC^2 + AB^2 = 8,1^2 + 13,5^2$ $AC^2 + AB^2 = 21,6^2$ $AC^2 + AB^2 = 466,56$ Comme $AC^2 + AB^2 \neq BC^2$ le triangle n'est pas rectangle.
Troisième élève	
$BC^2 = 13,5^2$; $BC^2 = 182,25$ $AC^2 + AB^2 = 8,1^2 + 13,5^2$ $AC^2 + AB^2 = 116,64 + 65,61$ $AC^2 + AB^2 = 182,25$ Comme $AC^2 + AB^2 = BC^2$, le triangle ABC est rectangle en A.	

RAISONNER ET CONSTRUIRE

6 —



- Construire un segment [AC] de longueur 7 cm.
 - Placer I le milieu de [AC] et construire la médiatrice de [AC].
 - Placer un point E sur cette médiatrice tel que IE = 6 cm.
- Construire le point F symétrique de E par rapport à (AC).
Quelles sont les particularités de cette figure ?

7 —

- Construire, si possible, trois triangles ABC tels que AB = 7 cm, AC = 5 cm et tels que, dans chaque cas, ABC soit :
- rectangle en A.
 - rectangle en B.
 - rectangle en C.

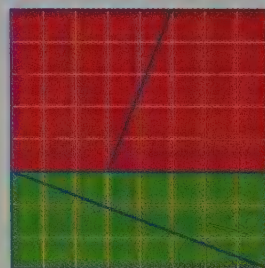
8 —

- Placer deux points A et B distants de 8 cm.
- Construire un point C tel que :
- le triangle ABC soit rectangle en C ;
 - la hauteur relative à l'hypoténuse mesure 3 cm.
- Préciser le nombre de solutions.

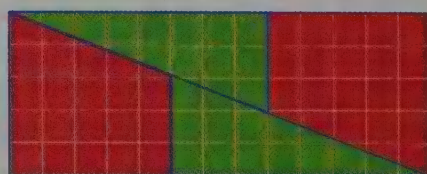
9 —

64 égale 65 ?

Un carré est découpé comme sur le dessin ci-dessous, son aire est 64 carreaux.



Avec les quatre pièces, on reconstitue un rectangle. Son aire est alors 65 carreaux.

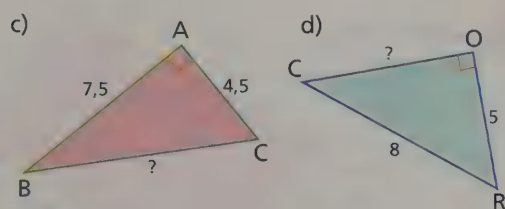
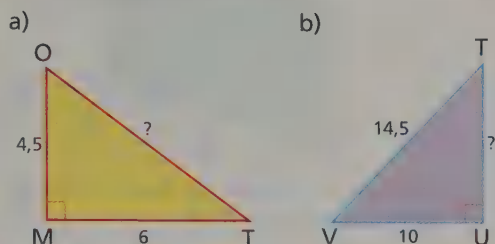


Comment expliquer cette différence ?

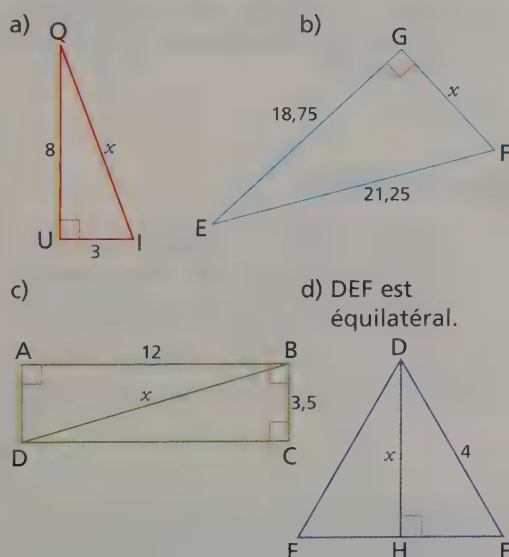
UTILISER LES PROPRIÉTÉS

Théorème de Pythagore

- 10** Calculer dans chaque cas la valeur manquante (arrondir à 0,1 près) :



- 11** Calculer dans chaque cas la valeur x manquante (arrondir à 0,1 près) :



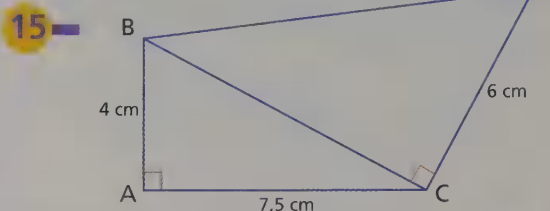
- 12** a) Tracer le triangle FGH rectangle en F tel que $FG = 9$ cm et $FH = 6$ cm.
b) Calculer GH.

- 13** a) Tracer le triangle IJK rectangle en K, tel que $IJ = 9,1$ cm et $IK = 3,5$ cm.
b) Calculer JK.

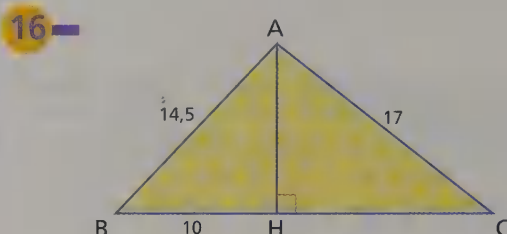
- 14** ABC est un triangle rectangle en A. Les longueurs sont en cm. Calculer une valeur du troisième côté dans chaque cas. Préciser si elle est exacte ou en donner un arrondi.

a) $AB = 1,7$; $BC = 2,5$

b) $AB = \frac{3}{5}$; $AC = \frac{4}{5}$

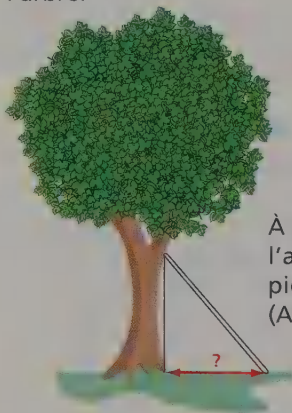


Calculer la longueur BD à 0,01 cm près.



- a) Calculer AH puis HC en précisant si les valeurs sont exactes ou approchées.
b) Calculer l'aire du triangle ABC.

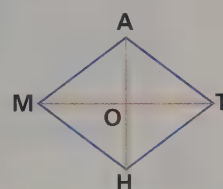
- 17** Une échelle de 3 m est posée contre un arbre. Le haut de l'échelle est à 2 m 80 du pied de l'arbre.



À quelle distance de l'arbre est placé le pied de l'échelle ? (Arrondir au cm près.)

- 18** MATH est un losange de centre O, tel que :
 $AH = 6,4$ cm et
 $MA = 7,2$ cm.

Calculer la longueur de la diagonale [MT].



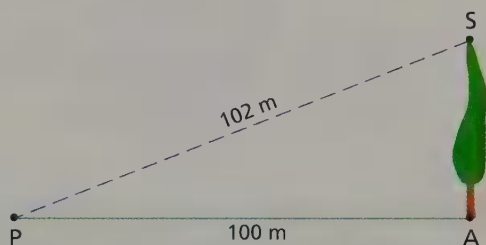
exercices

- 19** — Un rectangle ABCD est tel que $AB = 5$ cm et $AC = 7$ cm.
Ce rectangle semble être un carré. Est-ce vrai ?

- 20** — a) La diagonale d'un carré mesure 8 cm.
Calculer une mesure arrondie à 0,1 cm près du côté du carré.
b) Faire les mêmes calculs pour une diagonale de 13 cm puis de 24 cm.

- 21** — Tracer un triangle équilatéral ABC de 8 cm de côté.
Calculer la mesure de sa hauteur [AH].

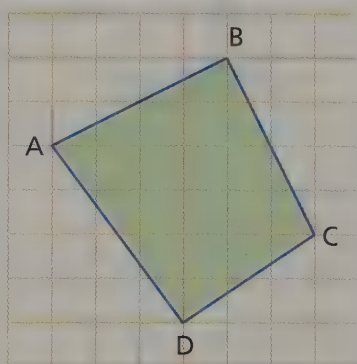
- 22** — Dans le lotissement, tous les arbres doivent mesurer moins de 20 mètres de haut. Le voisin de Patricia lui demande d'êtêter un arbre de son jardin car il dépasse la hauteur réglementaire. Patricia prend quelques mesures qu'elle porte sur un plan.



Elle répond à son voisin : « Je ne suis pas d'accord, mon arbre mesure exactement 20 m. » A-t-elle raison ?

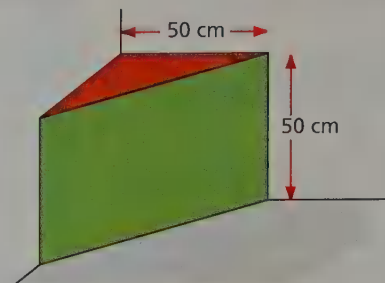
23 — Sur un quadrillage

Calculer l'aire et le périmètre de ce quadrilatère, sachant que les carrés du quadrillage ont pour côté 1 cm.



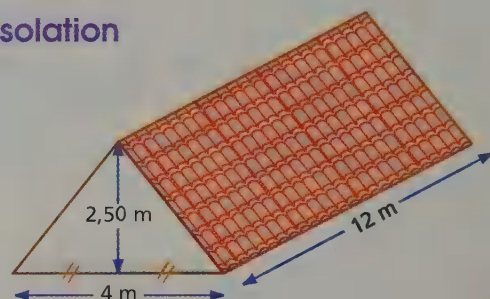
24 — Coffre à jouets

Jean veut construire un coffre de rangement pour les jouets de sa petite fille. Il veut donner au coffre la forme d'un prisme droit **sans couvercle** dont la base est un triangle rectangle isocèle.



Calculer la surface de bois nécessaire à la fabrication de ce coffre.

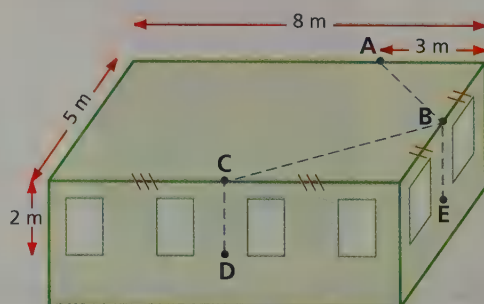
25 — Isolation



Quelle surface de plaque d'isolation faut-il commander pour pouvoir isoler le plafond de ces combles ?

26 — Câblage

Dans un atelier, le câblage de commande des volets électriques doit être remplacé pour être dissimulé dans les doubles parois.



L'atelier a la forme d'un parallélépipède rectangle.

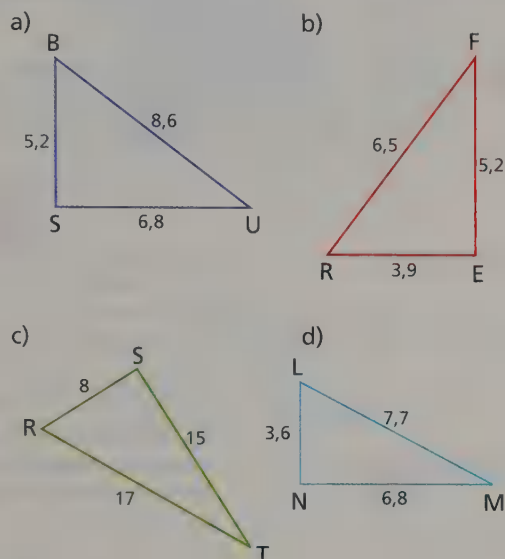
B et C sont les milieux des arêtes.

Le point A correspond à l'arrivée du courant.

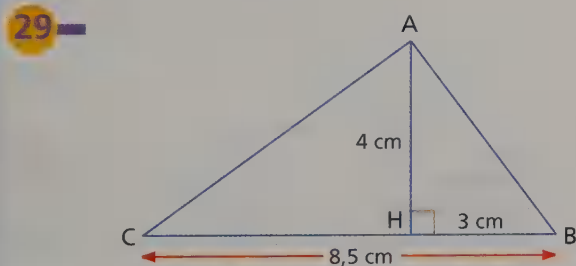
Calculer la longueur de câble nécessaire à cette transformation.

Réciproque du théorème de Pythagore

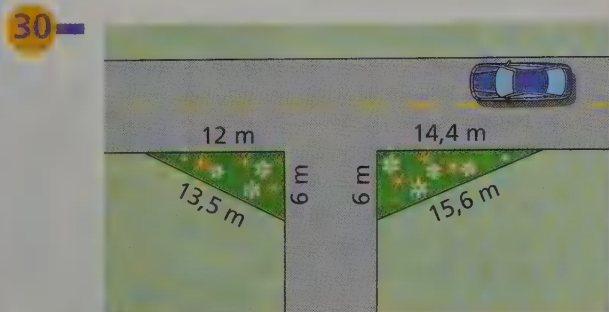
- 27** Les triangles suivants sont-ils rectangles ? Justifier.



- 28** a) Tracer le triangle EFG tel que $EF = 3,5$ cm, $FG = 5$ cm et $GE = 6$ cm.
 b) Sur le dessin, le triangle EFG semble-t-il rectangle ?
 c) Vérifier la vraisemblance de la réponse précédente par le calcul.



Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.



Les angles formés par les deux chemins sont-ils droits ?

- 31** Recopier le tableau, puis de la même manière que dans les deux premières lignes, indiquer si l'égalité de Pythagore est vérifiée dans le triangle DER.

Écrire une conclusion.

DE	DR	ER	L'égalité de Pythagore est-elle vérifiée? (oui/non)	
2,5	3	3,5	NON	$3,5^2 = 12,25$ $3^2 + 2,5^2 = 15,25$
2,5	6	6,5	OUI	$6,5^2 = 42,25$ $2,5^2 + 6^2 = 42,25$
3,5	3	4,5		
6,5	6	5		
7,5	4,5	6		
8	12	10		

- 32** Recopier et compléter le tableau en indiquant si l'égalité de Pythagore est vérifiée ou non dans le triangle SUD.

Écrire une conclusion.

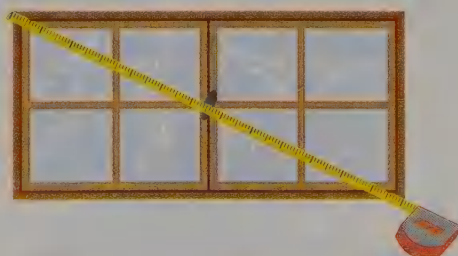
SU	DU	SD	L'égalité de Pythagore est-elle vérifiée? (oui/non)	
9	12	15		
49	23	54		
49	483	67		
264	348,5	227,5		

- 33** Étudier les trois cas suivants et préciser quels triangles sont rectangles :

- a) ABC tel que $AB = 2,6$; $AC = 1$; $BC = 2,4$
 b) MNP tel que $MN = 3$; $NP = \frac{8}{5}$; $MP = \frac{17}{5}$
 c) SEL tel que $SE = \frac{7}{3}$; $SL = \frac{5}{2}$; $EL = \frac{41}{12}$

- 34** Un menuisier a construit un quadrilatère comme encadrement de fenêtre. Deux côtés mesurent 60 cm et les deux autres mesurent 1,30 m. Il mesure la diagonale et trouve 143 cm.

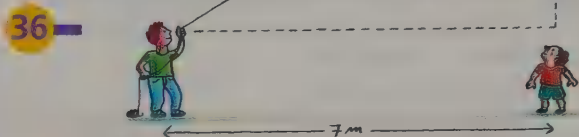
La fenêtre est-elle bien rectangulaire ?



exercices

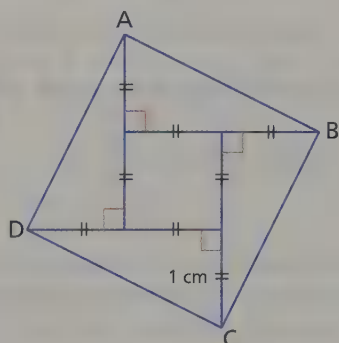
- 35** Parmi les nombres suivants : 7 ; 8 ; 15 ; 17 ; 20 ; 24 ; 25
quels sont ceux qui correspondent aux mesures des côtés de triangles rectangles ?

PROBLÈMES

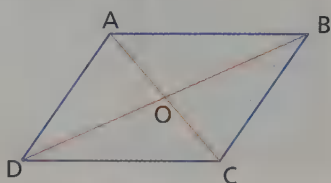


Julien et Mélanie jouent au cerf-volant. Ils sont à 7 m l'un de l'autre. Julien, qui mesure 1 m 50, tient le cerf-volant à bout de bras et lâche 8 m de ficelle. Mélanie se trouve juste en dessous du cerf-volant.
À quelle hauteur du sol est le cerf-volant ? (Arrondir au mètre près.)

- 37** Quel est le périmètre du carré ABCD ? (Arrondir au dixième près.)



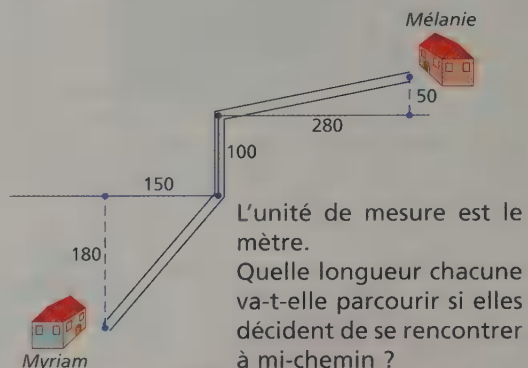
- 38** ABCD est un parallélogramme de centre O. $DB = 9$ cm ; $AC = 12$ cm et $BC = 7,5$ cm. (La figure ci-dessous n'est pas exacte.)



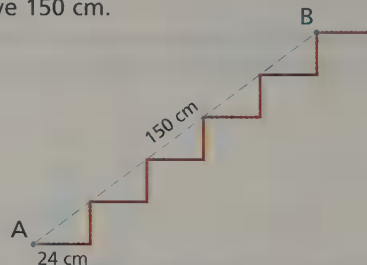
Montrer que ABCD est un losange.

- 39** La référence d'un téléviseur est donnée à partir de la diagonale de son écran rectangulaire. Avec quelle référence sera vendu chacun des téléviseurs suivants : Écrans de 48,7 cm sur 40 cm, de 39,4 cm sur 32,4 cm, de 27,8 cm sur 22,9 cm ?

- 40** Myriam et Mélanie sont deux grandes amies. Pour se rendre de la maison de l'une à celle de l'autre, elles empruntent le chemin suivant :



- 41** On veut poser une moquette sur les marches d'un escalier entre le point A et le point B. Si l'on mesure en ligne droite entre A et B, on trouve 150 cm.



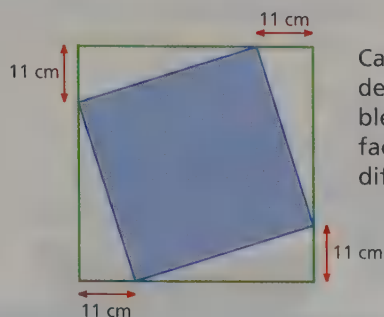
Les marches ont toutes la même hauteur et toutes la même profondeur.
Quelle longueur de moquette faut-il commander ?

- 42** Arnaud veut bétonner la descente de son garage. Il sait que la porte d'entrée de sa maison est située à 3,50 m du portail et que la hauteur du plafond du garage est à 2,30 m.



Sur quelle longueur devra-t-il couler du béton ?

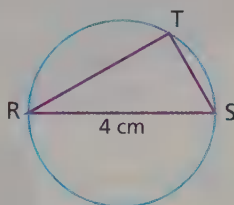
- 43** À l'intérieur d'un carré de 46 cm de côté, on trace un carré de la façon suivante :



Calculer l'aire de la partie bleue de deux façons différentes.

- 44** ABCD est un rectangle tel que $AB = 4$ cm et $BC = 8$ cm.
L est un point de [BC] tel que $BL = 2$ cm.
E est un point de [AB] tel que $AE = 1$ cm.
- Faire la figure.
 - Calculer DE^2 , LE^2 et DL^2 .
 - Montrer que le triangle DEL est rectangle.

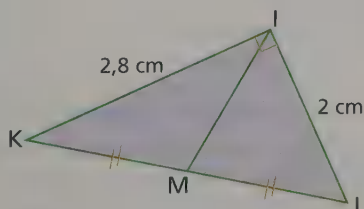
- 45** [RS] est un diamètre du cercle.
T est un point du cercle.
Calculer $TS^2 + TR^2$.



- 46** Tracer un cercle de diamètre de diamètre [AB] mesurant 6 cm.
Placer un point C sur le cercle tel $AC = 3$ cm.
Calculer BC.

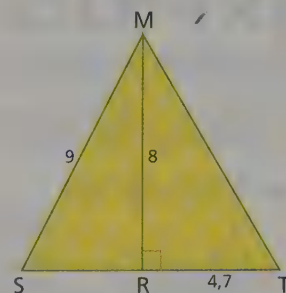
- 47**
-
- Le triangle RST est-il rectangle ?
 - Calculer RI.

- 48** Le triangle KIJ est rectangle en I et M est le milieu de l'hypoténuse.



Le point I est-il sur le cercle de centre M et de rayon 1,7 cm ?

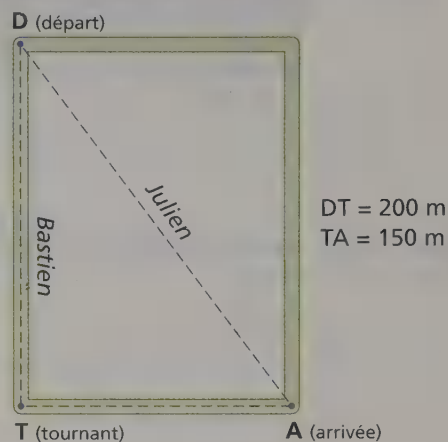
- 49** a) Construire la figure, les points S, R et T étant alignés.



- b) Le triangle STM est-il isocèle ?

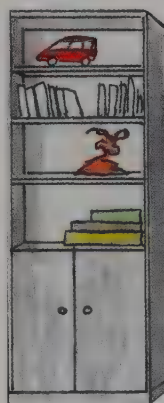
50 Jeu de plein air

Bastien et Julien font la course sur la place.



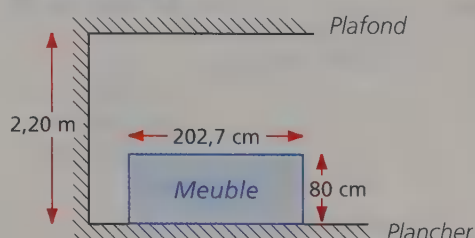
Bastien parcourt le trajet D-T-A en vélo à la vitesse moyenne de 15 km/h. Julien va directement de D à A en roller à la vitesse moyenne de 12 km/h.
Ils partent ensemble. Qui arrivera le premier ?

51 Bricolage



Ce meuble mesurant 202,7 cm de haut et 80 cm de large a été monté à plat sur le plancher. Le plafond est à 2,20 m du sol.

Le meuble pourra-t-il être redressé ?

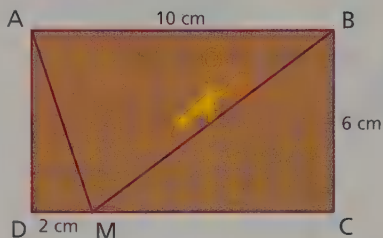


exercices

PROBLÈMES (suite)

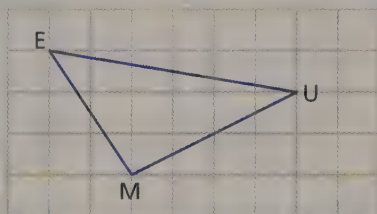
52 — Découpage

Dans un carton épais de la forme d'un rectangle, on découpe trois triangles, comme l'indique la figure ci-dessous.



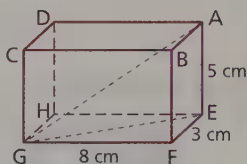
Quelles particularités ont chacun des trois triangles ADM, BCM et ABM ? Démontrer les.

53 — Avec un quadrillage à maille carrée



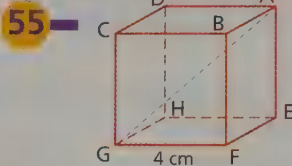
Les points M, U, E sont situés sur des nœuds du quadrillage. Le triangle MUE est-il rectangle ?

54 — ABCDEFGH est un pavé droit dont les dimensions sont notées ci-contre.



a) Calculer la longueur EG.

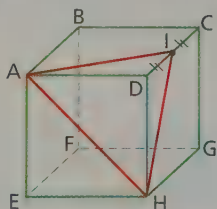
b) Calculer la longueur AG.



ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm.

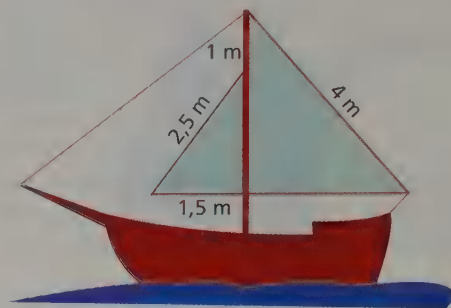
Calculer la longueur de la diagonale [AG].

56 — Le cube ABCDEFGH a une arête de 10 cm.

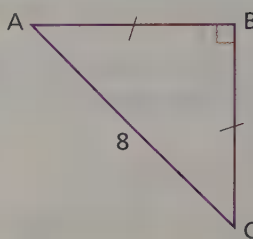


Calculer le périmètre du triangle AIH au mm près.

57 — Calculer la surface de voile arrondie au m^2 (sachant que chaque voile est de la forme d'un triangle rectangle).

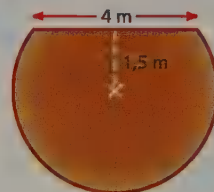


58 — Calculer AB. (Arrondir au dixième).



59 — À la tronçonneuse

Un bûcheron débite le tronc d'un arbre de la façon suivante :



Si on suppose que le tronc de l'arbre est circulaire, quel est le rayon de ce disque ? Arrondir le résultat au cm.

60 — Je lis facilement l'anglais

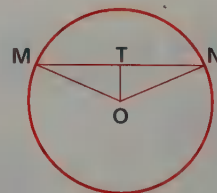


Jimmy le correspondant anglais d'Adeline lui a envoyé le texte de son devoir pour qu'elle le corrige.

Traduire le texte de Jimmy en français, préciser ce qui manque et corriger les erreurs.

L'énoncé de l'exercice envoyé :

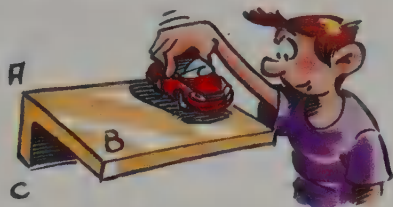
If a chord 24.0 inches long is 4.0 inches from the center, what is the radius of the circle ?



La réponse de l'exercice envoyée :

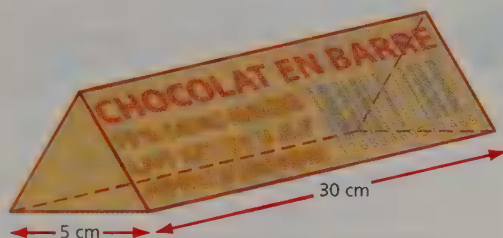
We know that OTN is a right triangle.
 $ON^2 = OT^2 + TN^2$ (Pythagorean)
 $ON^2 = 4^2 + 12^2$ (TN half MN because T is the mid-point of [MN]).
 $ON^2 = 16 + 144$, $ON^2 = 160$, $ON = 40$.
 The radius of the circle is exactly 40 inches.

- 61** Tristan veut ranger ses voitures de collection sur la tablette qu'il vient de fabriquer. La planche [AB] mesure 41 cm. La planche [AC] mesure 30 cm.



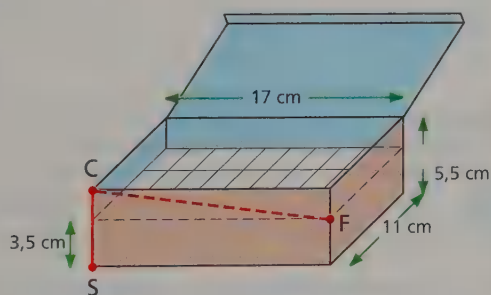
Tristan mesure la distance BC avec le mètre de son père, il trouve 0,5 m. Les voitures vont-elles tenir sur l'étagère ?

- 62** L'emballage d'une friandise chocolatée a la forme d'un prisme droit de longueur 30 cm, dont la base est un triangle équilatéral de côté 5 cm.



Calculer le volume de cette boîte (arrondir au dixième de cm^3).

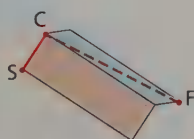
63



Une petite fourmi s'est introduite en F dans une boîte de sucre en morceaux. Elle ressort en suivant le segment [FC] à l'intérieur de la boîte, puis l'arête [CS] sur l'extérieur.

- Calculer la longueur de son trajet.
- Déterminer le parcours le plus court pour rejoindre F à S et en calculer la longueur.

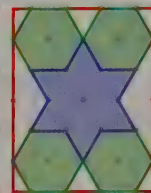
(Indication : faire comme si la face de la boîte était formée d'une plaque de carton pliée en deux suivant l'arête supérieure. En dépliant cette plaque, le trajet de la fourmi se trouve mis à plat.)



64 La Lonja de Valencia

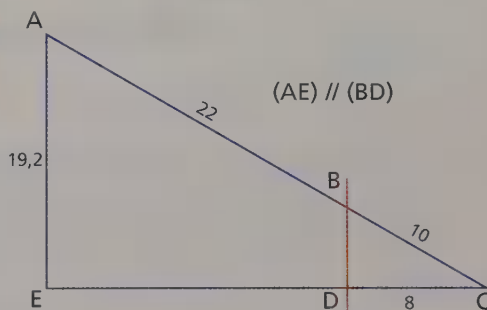


Le motif de la porte ouvragée a été reporté sur du papier pointé. Calculer l'aire de l'étoile centrale et l'aire d'un hexagone lorsque le côté d'un hexagone mesure 2 cm.



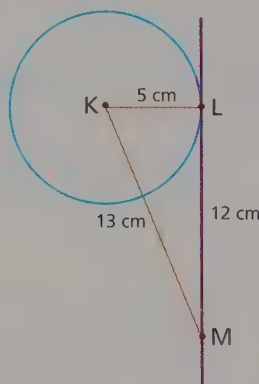
- Tracer un cercle de centre O et placer deux points A et B sur ce cercle, non diamétralement opposés.
- Tracer en A et en B les tangentes à ce cercle, elles se coupent en H. En utilisant les triangles OHA et OHB, démontrer que $HA = HB$.
- En déduire que (OH) est la médiatrice de [AB].

66



- Calculer CE.
- Le triangle ACE est-il rectangle?
- Calculer BD de deux manières.

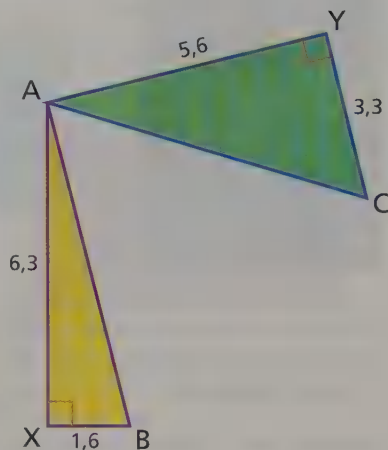
- 67** (LM) est-elle tangente au cercle ?



exercices

PROBLÈMES (suite)

- 68** — Le point A est-il sur la médiatrice de [BC] ?



- 69** — Benoît veut tracer deux triangles ABC et ABD de mêmes dimensions :

$AB = 61$ mm, $BC = BD = 47$ mm
et $AC = AD = 77$ mm.

Les points C et D sont disposés de chaque côté de (AB).

Il suit le raisonnement suivant :

« Comme (AB) est la médiatrice de [CD], je trace d'abord [AB] avec $AB = 61$ mm. Je trace la perpendiculaire en B à (AB) et j'aligne dessus les points C et D en les plaçant à 47 mm de B. »

Hanane lui répond :

« Le début est juste, mais après tu as fait une erreur. »

Indiquer ce qui est juste et quelle erreur Benoît a faite.

- 70** — ELMR est un rectangle tel que $EL = 6$ et $ER = 4$. T est un point de la demi-droite (LM) tel que $ET = 10$.

Quelle est la nature du quadrilatère EMTR ?

- 71** — Dans un triangle TRI rectangle en I, le point H est le pied de la hauteur issue de I.

Expliquer pour quelle raison $IT \times IR = IH \times TR$.

72 — Une propriété métrique

Sur un livre datant de 1954, on peut lire :

« ABC est un triangle rectangle en A. Le point H est le pied de la hauteur issue de A. Démontrer que $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$. »

Rédiger la solution de cet exercice.

73 — Une propriété métrique bis

Construire un quadrilatère ABCD dont les diagonales sont perpendiculaires en I.

Démontrer que $AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$.

74 — En Chine ancienne



Jiu Zhang Suan Shu est un mathématicien qui a vécu en Chine vers l'an 100 av. J.-C. Il a écrit un traité sur l'Art mathématique qui comporte plusieurs problèmes utilisant le théorème de Pythagore.

« Soit un bambou haut de 1 toise. Son extrémité se brise et touche le sol à 3 pieds du bambou. Quelle est la hauteur du tronçon subsistant ? »

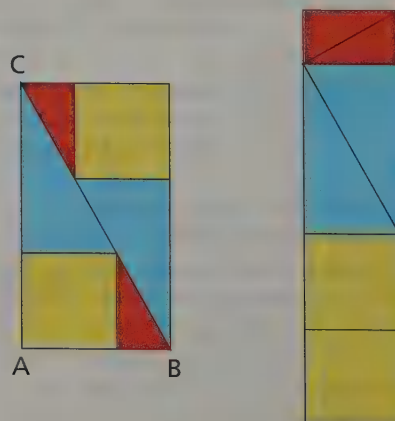
(Une toise vaut 10 pieds.)



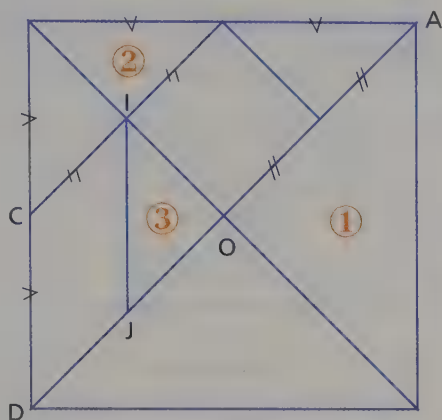
- 75** — Liu Hui est un mathématicien chinois du III^e siècle de notre ère. En assemblant les jetons de formes différentes constituant deux triangles identiques au triangle ABC rectangle en A, il construit un rectangle.



En utilisant des aires, expliquer comment on peut trouver la longueur du côté du carré jaune inscrit dans le triangle ABC.



76 — Tangram



Les pièces du tangram sont fabriquées dans un carré de côté 7 cm, $(CD) \parallel (IJ)$.

Calculer OA, puis inscrire les dimensions des triangles rectangles du tangram.

Triangle	côté 1	côté 2	côté 3
①	7		
②			
③			

77 — Construire un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre [MN] avec $MN = 6$ cm.

Construire sur le cercle $\mathcal{C}$ un point E tel que :

$$ME = 4,8 \text{ cm}$$

- Quelle est la nature du triangle MEN ? Justifier la réponse.
- Calculer la longueur NE.
- Soit I le milieu de [OM]. Tracer la parallèle à la droite (EM) passant par I ; elle coupe le segment [EN] en K.

Calculer la longueur du segment [NK].

- Calculer la longueur du segment [IK].
On pourra envisager deux démonstrations différentes.

78 — Tracer un triangle ABC tel que :

$$AB = 7,9 \text{ cm} ; AC = 5,4 \text{ cm} ; BC = 6,2 \text{ cm}$$

- Construire le point M de [AC] tel que :
 $AM^2 + BM^2 = AB^2$
- Construire le point N de [BC] tel que :
 $AN^2 + BN^2 = AB^2$
- Les droites (AN) et (BM) se coupent en H. Démontrer que (CH) est perpendiculaire à (AB).

79 — Un triangle ABC est tel que :

$$AB = 7,8 \text{ cm} ; AC = 7,2 \text{ cm} ; BC = 3 \text{ cm}$$

- Faire une figure à main levée qui sera complétée au fur et à mesure.
- Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
- Soit D le point du segment [AB] tel que :
 $AD = 5,85 \text{ cm}$
Le cercle de diamètre [AD] recoupe le segment [AC] en E.
Quelle est la nature du triangle ADE ?
- Démontrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
- Calculer la longueur du segment [DE].
En déduire la longueur du segment [AE].
- Faire une figure exacte et expliquer la construction.



Exercice résolu

Énoncé

Dans un cercle de centre I et de rayon 3 cm, [BL] est un diamètre et O est un point du cercle tel que $OL = 3,6 \text{ cm}$.

- Quelle est la nature du triangle BOL ?
- Calculer BO.

Exemple de solution

1) Le triangle BOL est rectangle en O car si un triangle a pour sommets les extrémités d'un diamètre d'un cercle et un autre point du cercle, alors il est rectangle en ce point.

2) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BOL rectangle en O, on a :

$$BL^2 = BO^2 + OL^2$$

$$6^2 = BO^2 + 3,6^2$$

$$36 = BO^2 + 12,96$$

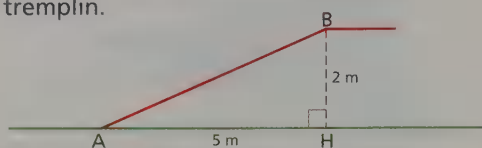
$$BO^2 = 36 - 12,96 = 23,04$$

$$BO = 4,8 \text{ cm}.$$

exercices

80 — Amérique du Nord 2000

Des amateurs de skate-board construisent un tremplin de 2 m de haut pour pratiquer leur sport. Voici un croquis rapide de leur tremplin.



- Faire la figure à l'échelle 1/100.
- Calculer l'arrondi au centimètre de la longueur AB de la planche.

81 — Polynésie 1999

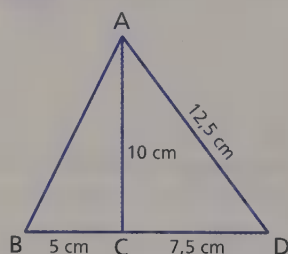
$\mathcal{C}$ est un cercle de 2,5 cm de rayon.
Le segment $[AB]$ est un diamètre de ce cercle.
D est un point de ce cercle tel que $AD = 3$ cm.

- Construire la figure.
- Démontrer que le triangle ABD est rectangle.
- Calculer la longueur DB.

82 — Groupe Est 2001 (série technologique)

- Construire un triangle ABC rectangle en A sachant que l'hypoténuse BC est égale à 8,5 cm et la longueur du côté AB vaut 7,5 cm.
- Calculer la mesure du côté $[AC]$.
- Construire le symétrique B' du point B par rapport au point A.
Quelle est la nature du triangle $BB'C$?
- Calculer l'aire de la surface $BB'C$.

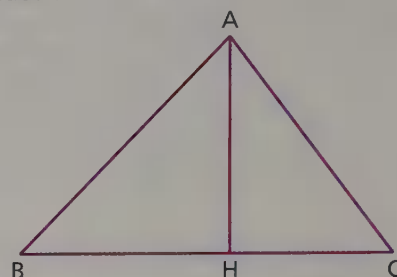
83 — Rouen 1997



- Faire la figure aux dimensions exactes.
- Montrer que le triangle ACD est rectangle en C.
- Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifier.
- Calculer l'aire du triangle ABD en cm^2 .

84 — Afrique 2000

La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur.

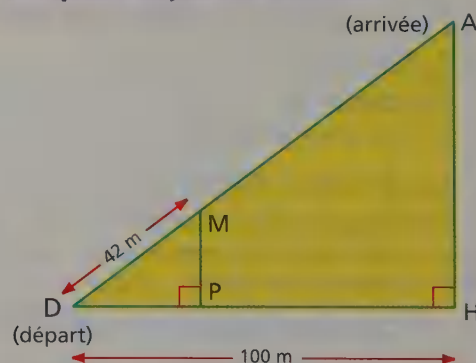


On donne les longueurs suivantes en cm :

$BH = 5,8$; $HC = 4,5$; $AC = 7,5$; $AH = 6$

- En utilisant uniquement une droite graduée et un compas, construire cette figure en vraie grandeur (laisser les traits de construction apparents).
- Démontrer que le triangle ACH est rectangle en H.
- Calculer l'aire du triangle ABC.
- Soit M le milieu de $[AC]$ et D le symétrique de H par rapport à M. Placer M et D sur la figure réalisée à la question a).
Démontrer que le quadrilatère ADCH est un rectangle.

85 — Le funiculaire (d'après sujet de brevet)



Funiculaire : chemin de fer à traction par câble pour la desserte des voies à très forte pente.

La longueur AD de la voie du funiculaire est de 125 m.

- De quelle hauteur AH s'est-on élevé à l'arrivée ?
- Lorsque le funiculaire a parcouru 42 m, il s'est élevé d'une hauteur MP.
 - Faire un dessin à l'échelle 1/1 000.
 - Que peut-on dire des droites (MP) et (AH) ? (Justifier.)
 - Calculer MP.
- Calculer DP.



- 86** Les mots en **couleur** correspondent à une commande du logiciel Cabri-Géomètre®.

Tracer deux droites perpendiculaires (d) et (d').

Nommer A le point d'intersection.

Placer un point sur (d), nommer-le B puis **placer un point sur** (d'), nommer-le C. Tracer le **triangle** ABC et **cacher** les droites du début.

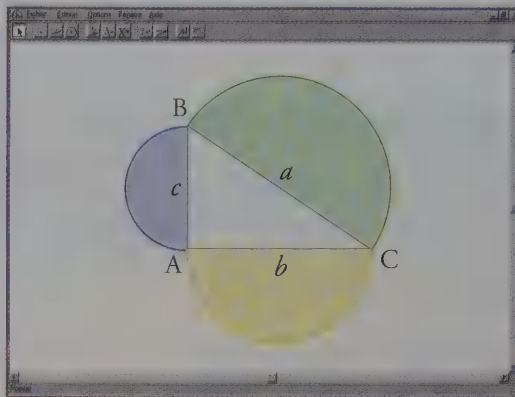
Afficher les trois **longueurs** a , b et c des côtés.

Tracer les demi-cercles de diamètre respectifs [AB], [AC] et [BC].

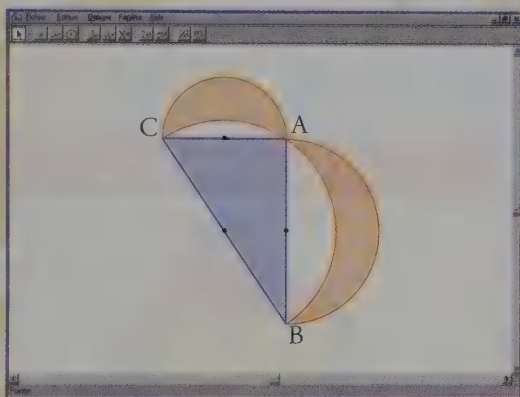
Utiliser la **calculatrice** pour calculer les aires des demi-disques bleu, jaune et vert.

Faire **déplacer** le point A et noter les différents résultats pour ces trois aires.

Comparer la somme des aires des demi-disques bleu et jaune avec l'aire du demi-disque vert. En utilisant les longueurs a , b et c démontrer que le résultat est vrai dans le cas général.



87



Déplacer un point pour obtenir un autre triangle rectangle et vérifier que le résultat obtenu précédemment est encore vrai.

Lunules d'Hippocrate

Utiliser un logiciel de constructions géométriques et écrire la liste des instructions qui permettent de construire la figure ci-contre où le triangle ABC est rectangle en A et les demi-cercles ont pour centres les milieux de chacun des côtés.

La partie colorée entre chaque arc de cercle s'appelle une **lunule**.

Afficher les distances AB et AC puis calculer l'aire du triangle ABC, et celles des trois demi-disques.

Calculer la somme des aires des deux lunules et la comparer à l'aire du triangle.

88

Léonard de Vinci est un scientifique et peintre de génie de la Renaissance.

Voici comment il prouvait la propriété de Pythagore en faisant apparaître quatre quadrilatères de même aire à partir d'un triangle rectangle.

- a) Utiliser un logiciel de constructions géométriques pour construire un triangle ABC rectangle en A. Construire les trois carrés BADE, ACFG, BCHI et le centre O de ce dernier carré.

- b) Tracer [EF] et vérifier que le symétrique de BCFE par rapport à la droite (EF) est DGFE. Expliquer pour quelle raison les quadrilatères BCFE et DGFE ont la même aire. On obtient donc :

$$\lambda(\text{BEDGFC}) = \lambda(\text{BADE}) + \lambda(\text{ACFG}) + 2 \times \lambda(\text{ABC})$$

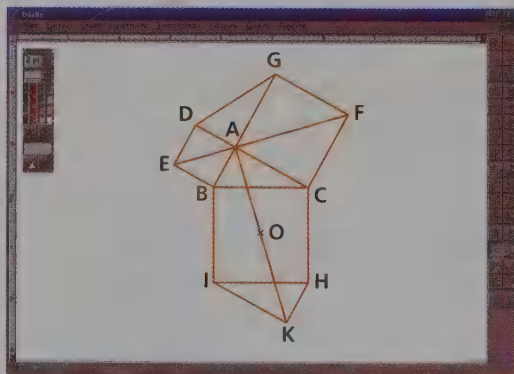
- c) Construire le symétrique KHI du triangle ABC par rapport à O. Expliquer pour quelle raison les quadrilatères ABIK et ACHK ont la même aire. On obtient donc :

$$\lambda(\text{ABIKHC}) = \lambda(\text{BICH}) + 2 \times \lambda(\text{ABC})$$

- d) En affichant les aires de BCFE, DGFE, ABIK et ACHK, on remarque que les quatre quadrilatères ont la même aire (ce résultat sera démontré en 3^{ème}). On obtient alors : $\lambda(\text{BEDGFC}) = \lambda(\text{ABIKHC})$.

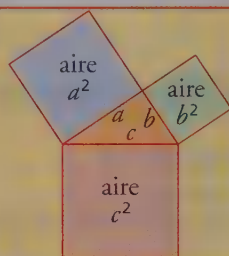
À partir de cette égalité, retrouver la propriété de Pythagore.

- e) En complément, vérifier que (EF) et (AK) sont perpendiculaires.



PYTHAPUZZLES

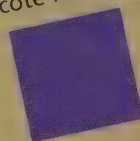
Le théorème de Pythagore peut être justifié par des puzzles mettant en évidence des égalités d'aires.



a^2 , b^2 , et c^2 correspondent respectivement à l'aire des carrés de côté a , b et c .

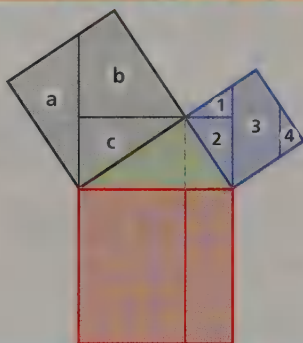
Pour prouver l'égalité du théorème de Pythagore, il faut recouvrir exactement le carré de côté c par les carrés de côté a et b ($c^2 = a^2 + b^2$).

a^2 désigne l'aire d'un carré dont le côté mesure a .



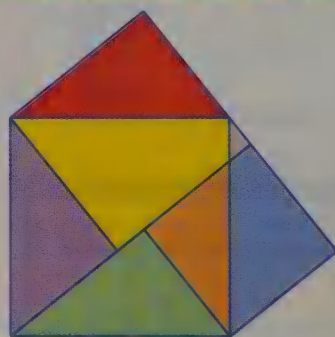
côté : a
aire : a^2

Puzzle n° 1



Les pièces du carré noir doivent remplir le grand rectangle et celles du carré bleu doivent remplir le petit rectangle.

Puzzle n° 2

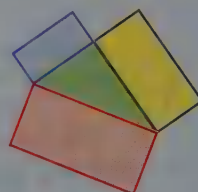
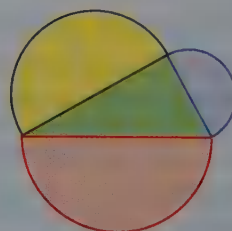
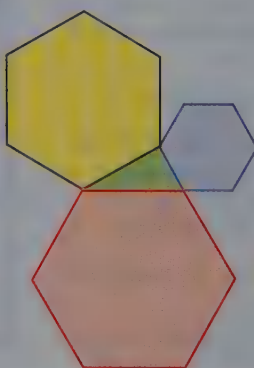


Retrouver le triangle rectangle et les trois carrés. Recomposer le carré d'aire c^2 à partir des carrés d'aire a^2 et b^2 .

PYTHACOUSINS

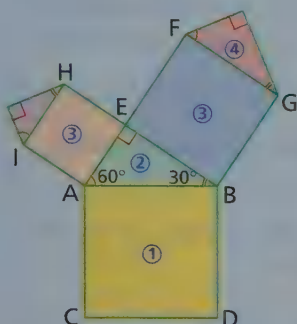
Les figures construites sur les côtés du triangle rectangle ont des mesures de longueur proportionnelles.

Dans chaque cas, l'aire de la figure qui est construite le long de l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux autres figures.



PYTHARBRE

L'« arbre » a été obtenu en utilisant un logiciel permettant de reproduire successivement un même dessin à des échelles différentes. La figure obtenue est ce qu'on nomme un fractal.



Construire à la main les premières étapes de l'arbre :

- construire un carré ABCD de 5 cm de côté ;
- construire le triangle rectangle ABE d'angles 60° et 30° ;
- construire les carrés AEHI et EBGF ;
- reprendre à ② en construisant deux triangles rectangles de mêmes angles aigus que le triangle AEB à partir des segments [IH] et [FG].



À travers L'Histoire



Pythagore est un personnage célèbre du vi^e siècle avant notre ère. Le théorème qui porte son nom est connu depuis très longtemps et a sans doute été découvert avant Pythagore lui-même. Au cours de l'histoire, ce fameux théorème a pris différents noms, il s'est appelé « *théorème de la mariée* » dans l'antiquité grecque, « *chaise de la mariée* » chez les Hindous, et sa réciproque a été nommée « *sœur de l'épousée* » en Perse, « *maître de la mathématique* » au Moyen-Âge.

Les Égyptiens avaient remarqué que l'application de ce théorème est pratique pour tracer des angles droits et donc construire leurs pyramides. Ils utilisaient souvent une corde à treize nœuds, qu'ils disposaient de la façon ci-contre.

On a découvert des tablettes d'argile babyloniennes datant de plus de mille ans avant Pythagore qui semble utiliser la relation $a^2 + b^2 = c^2$, en langage moderne, dans des triangles rectangles.

On sait trouver, depuis longtemps, des nombres a , b , c entiers, appelés « triplets pythagoriciens » car ils vérifient $a^2 + b^2 = c^2$. Existe-t-il des nombres entiers qui vérifient $a^n + b^n = c^n$, où n est un entier supérieur ou égal à 2 ? Ce problème, Fermat, un Toulousain du $xvii^e$ siècle, s'était contenté d'écrire dans la marge d'un cahier qu'il était impossible. Il a fallu attendre quatre siècles pour qu'un anglais, Andrew Wiles, démontre cette impossibilité ... en une centaine de pages.

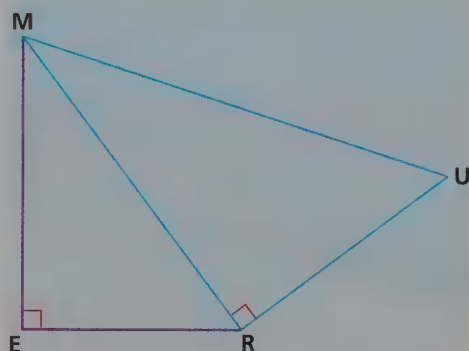
ce que je dois savoir sur...

...Le théorème de Pythagore

- Calculer des longueurs dans un triangle rectangle.
- Reconnaître si un triangle est rectangle ou non.
- Choisir entre le théorème de Pythagore et sa réciproque.
- Donner des valeurs approchées avec la touche $\sqrt{\quad}$ de la calculatrice.

je m'évalue

- 1 MRU et MRE sont deux triangles respectivement rectangles en R et E.



On sait que :

$ME = 8 \text{ mm}$; $ER = 6 \text{ mm}$; $RU = 7 \text{ mm}$.

Calculer MR et MU.

Dire si les réponses sont des valeurs exactes ou arrondies.

- 2 Dans chacun des cas suivants déterminer si le triangle ABC est rectangle ou non.

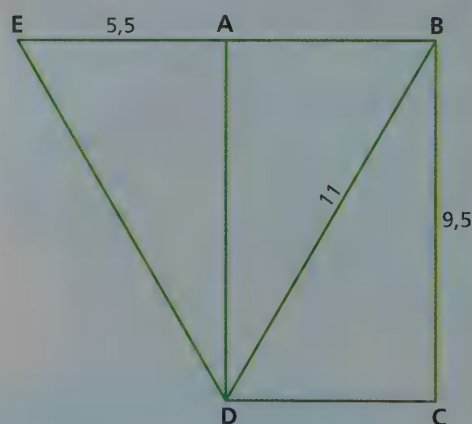
- a) $AB = 48$; $AC = 55$; $BC = 73$
 b) $AB = 12$; $AC = 10$; $BC = 7$
 c) $AB = 4,5$; $AC = 7,5$; $BC = 6$

- 3 ABCD est un carré de côté 12 cm.
 F est un point de [BC] tel que $BF = 3 \text{ cm}$.
 G est un point de [AB] tel que $DG = 13 \text{ cm}$.

Le triangle DGF est-il rectangle ?

- 4 ABCD est un rectangle et E est un point de la demi droite [BA).

- a) Faire une figure avec les mesures en cm indiquées ci-dessous.



- b) Le triangle EBD est-il
 - isocèle en D ?
 - isocèle en E ?

- c) Calculer un arrondi à 0,1 près de l'aire du triangle EBD.

- 5 ABCD est un rectangle tel que :

$AD = 18 \text{ m}$ et $AB = 24 \text{ m}$

On place un point M tel que $AM = 31,5 \text{ m}$ et $MC = 43,5 \text{ m}$.

Démontrer que les droites (AM) et (AC) sont perpendiculaires.

PYRAMIDE ET CÔNE

En 6^{ème}-5^{ème}

- Décrire, représenter, un prisme droit et un cylindre de révolution. Dessiner des patrons.
- Calculer le volume et l'aire latérale d'un prisme droit et d'un cylindre de révolution.

En 4^{ème}

- Voir dans l'espace.
- Calculer des longueurs, des aires.
- Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = \frac{Bh}{3}$.

pour démarrer



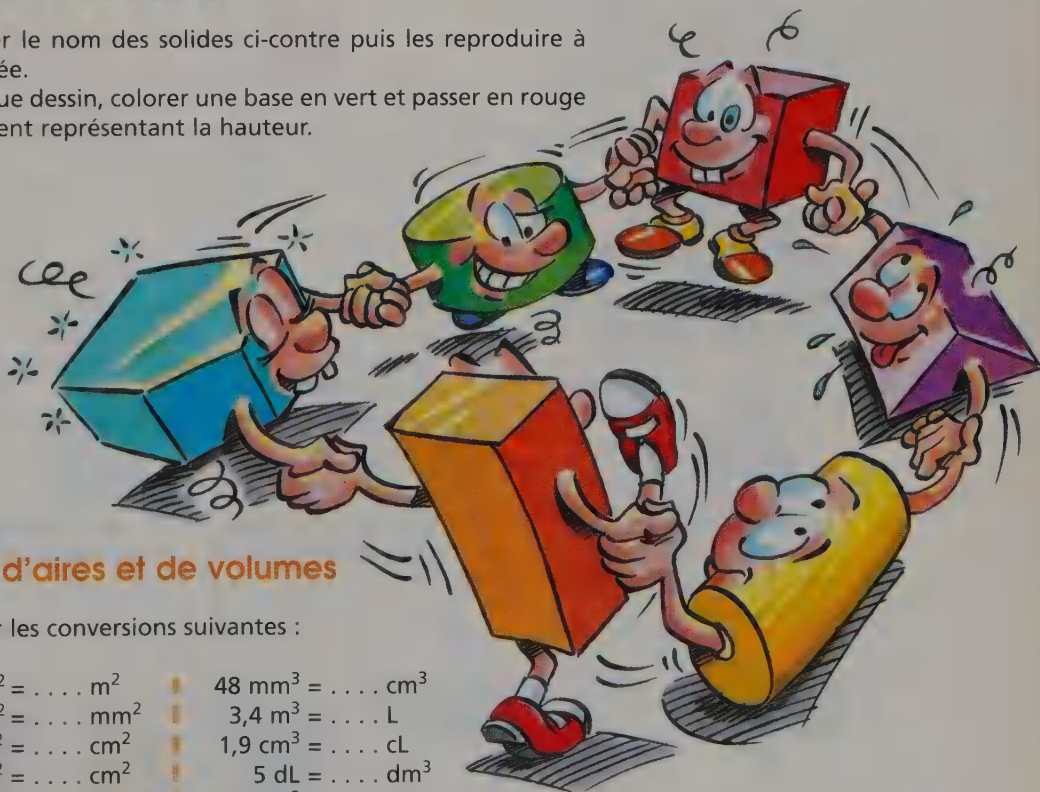
1 De vieilles connaissances

- Dessin à main levée.

Retrouver le nom des solides ci-contre puis les reproduire à main levée.

Sur chaque dessin, colorer une base en vert et passer en rouge un segment représentant la hauteur.

- Revoir le vocabulaire des années précédentes.



2 Unités d'aires et de volumes

- Conversions utilisant des unités usuelles d'aires et de volumes.

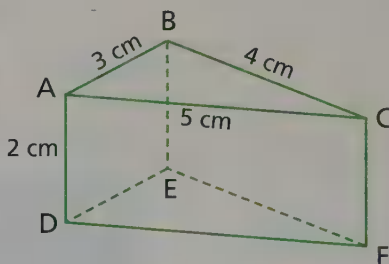
Effectuer les conversions suivantes :

$3 \text{ cm}^2 = \dots \text{ m}^2$	$48 \text{ mm}^3 = \dots \text{ cm}^3$
$0,9 \text{ cm}^2 = \dots \text{ mm}^2$	$3,4 \text{ m}^3 = \dots \text{ L}$
$450 \text{ mm}^2 = \dots \text{ cm}^2$	$1,9 \text{ cm}^3 = \dots \text{ cL}$
$0,06 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$	$5 \text{ dL} = \dots \text{ dm}^3$
$72,3 \text{ dm}^3 = \dots \text{ L}$	$67 \text{ mm}^3 = \dots \text{ mL}$
$2 \text{ L} = \dots \text{ cL}$	$41 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3$

Activités

3 — Un prisme droit à base triangulaire

- 1) Nommer les sommets, les bases, les faces latérales et les arêtes latérales du prisme.
- 2) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
- 3) Nommer les arêtes perpendiculaires à [BC]. Trouver toutes les paires d'arêtes parallèles. Citer les faces parallèles. Citer des faces perpendiculaires.
- 4) Calculer le volume du prisme.
- 5) Construire un patron du prisme.
- 6) Calculer l'aire latérale du prisme.



• Notion de parallélisme et d'orthogonalité.

• Passer de la vision du dessin en perspective cavalière à l'image mentale du dessin en 3D.

• Utiliser une propriété de géométrie plane.

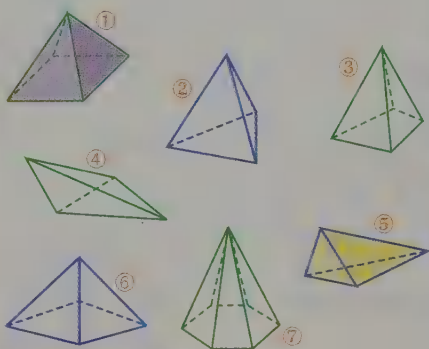
• Aire et volume d'un prisme et d'un cylindre.

• Construction de patrons. (On pourra faire le même exercice avec un cylindre.)

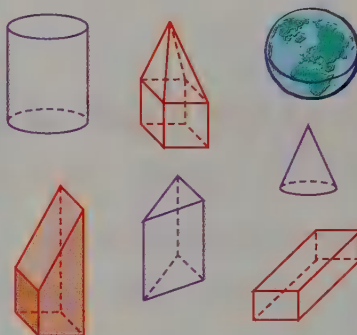
4 — Être ou ne pas être une pyramide

Dans les exemples « OUI » les solides présentés sont des pyramides, dans les exemples « NON » ils ne le sont pas. Déterminer les caractéristiques des pyramides et rédiger un texte pour en donner la définition.

Exemples « OUI »



Exemples « NON »



Les pyramides ①, ② et ⑦ sont des « pyramides régulières ». En déterminer les caractéristiques.

• Amener les élèves à s'approprier les caractéristiques des pyramides, en positif et en négatif, pour prendre conscience des confusions à ne pas commettre.

• L'élaboration de la définition peut être travaillée en groupe, la mise en commun des productions se concluant par la définition.

5 — Patrons de pyramides

Retrouver quels sont les patrons qui correspondent à l'une ou l'autre des pyramides présentées.

Pyramide régulière à base carrée

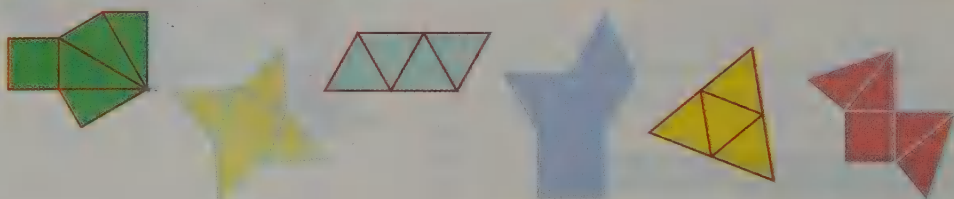
Le sommet est à la verticale du centre de la base. Les côtés et les angles de la base sont égaux.

Pyramide à base carrée

Le sommet est à la verticale de l'un des sommets de la base.

Tétraèdre régulier

Les quatre faces sont des triangles équilatéraux.



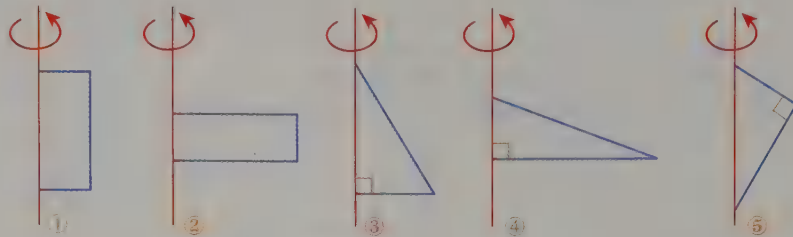
• Il peut être intéressant de reproduire ces patrons en les agrandissant et de donner la possibilité aux élèves de les découper et de les manipuler.

• Ne pas omettre de rappeler l'existence de plusieurs patrons différents pour un même solide.

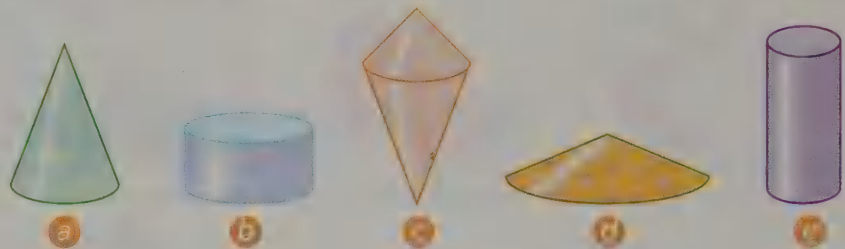
6 Révolution mathématique

- Vision du cône obtenue par une révolution, comme il l'a été vu en 5^{ème} pour le cylindre.

En mathématiques, une révolution signifie qu'un objet tourne d'un tour complet autour d'un axe immobile. Deux rectangles et trois triangles rectangles effectuent une révolution autour d'un axe situé le long d'un de leur côté, comme le montrent les figures ci-dessous.



- 1) Parmi les cinq solides présentés ci-dessous, retrouver celui qui est associé à chacun des exemples précédents, en imaginant le plus petit solide dans lequel chaque polygone peut tourner.

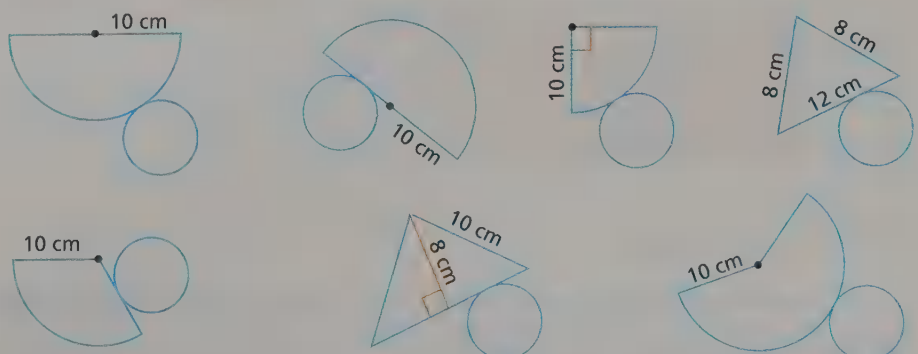
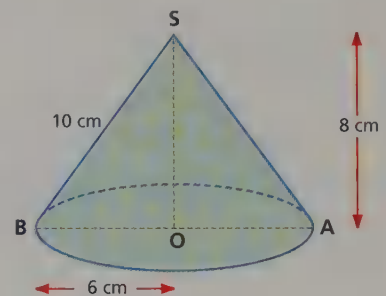


- 2) Quel nom donne-t-on aux solides **b** et **e** ?
Les solides **a** et **c** sont appelés « cônes de révolution ».
Quelles sont les caractéristiques d'un cône de révolution ?

7 Patron de cône....lequel est le bon ?

Un cône a pour base un disque de 6 cm de rayon et pour hauteur 8 cm.

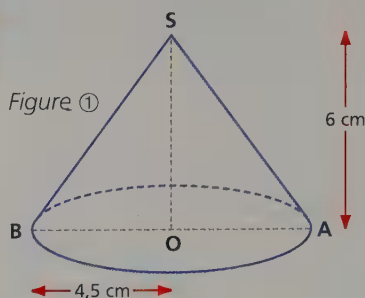
Parmi les dessins proposés, lequel ou lesquels semblent correspondre à un patron du cône ?
Vérifier la réponse en construisant le patron aux mesures indiquées.



8 Construction du patron d'un cône

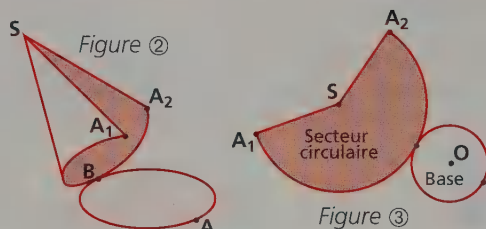
1) Un découpage

La hauteur $[SO]$ du cône mesure 6 cm.
La base a pour rayon 4,5 cm. $[AB]$ est un diamètre de la base.



• Il est fortement recommandé de présenter la manipulation aux élèves.

Pour obtenir la forme du patron du cône, on découpe en suivant le tour de la base, puis le long du segment $[SA]$. La cône est ainsi « mis à plat ». Avec ce découpage, le point A est placé à trois endroits sur le patron, notés A, A_1 et A_2 .



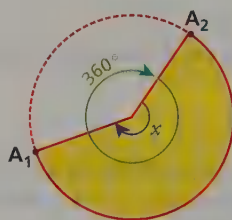
Le patron est constitué du disque de base et de la surface latérale correspondant à une portion de disque appelée secteur circulaire (voir « L'essentiel en deux pages » page 117). Le point B est commun à ces deux surfaces.

• Dans un premier temps, les élèves doivent se construire une représentation mentale du passage du cône à son patron.

2) Des calculs

- Quelle est la mesure du segment $[OB]$?
- Calculer la longueur du segment $[SB]$ (utiliser la figure ①).
- La longueur de l'arc $\widehat{A_1A_2}$ est égale au périmètre de la base. Calculer la longueur de cet arc.
- Il reste à déterminer la mesure x de l'angle $\widehat{A_1SA_2}$ du secteur circulaire.

La mesure x de l'angle est proportionnelle à la longueur de l'arc $\widehat{A_1A_2}$.
Un angle de 360° correspond au périmètre du cercle de rayon SB.



• Mise en œuvre de la proportionnalité.

Le tableau de proportionnalité permet de calculer la mesure x . Reproduire ce tableau en y indiquant les résultats des questions précédentes et calculer x .

Mesure du secteur circulaire en degré	360°	x
Longueur de l'arc en cm	$2 \times \pi \times SB$	Longueur de l'arc $\widehat{A_1A_2}$

3) La construction

Construire le patron à partir de la figure ③ avec les mesures exactes de SO , SB et x . Découper et fermer le patron.
Vérifier qu'il est conforme au cône présenté au début de l'activité.

• La construction finale ne doit pas être omise pour conforter la démarche calculatoire.

VOLUME D'UNE

PYRAMIDE

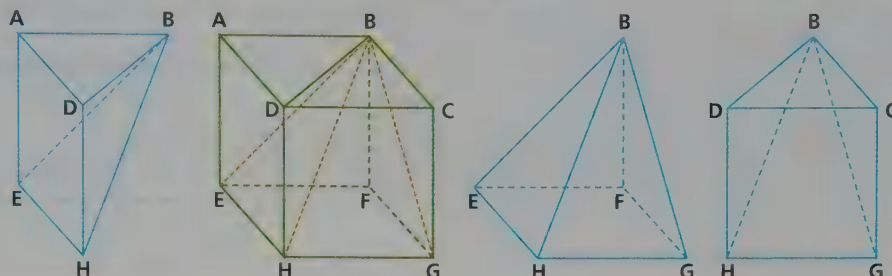
Étape 1 : une
approche
expérimentale

• Présenter
réellement ces
pyramides améliore
la compréhension
des découpages du
cube.

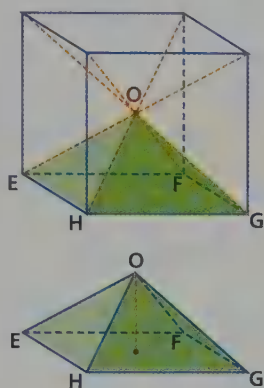
9 — Partage d'un cube

1) Exemple n° 1

Un cube de 1 m de côté est partagé en trois pyramides identiques, comme l'indique la figure ci-dessous. Le volume de chaque pyramide représente quelle fraction du volume du cube ?



2) Exemple n°2



Un cube de 1 m de côté est partagé en six pyramides identiques, l'une d'elles est représentée sur la figure.

Le volume de chaque pyramide représente quelle fraction du volume du cube ?

3) Découvrir la formule

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous, concernant les deux exemples précédents :

	Aire de la base d'une pyramide (en m ²)	Hauteur d'une pyramide (en m)	Aire de la base multipliée par la hauteur	Volume d'une pyramide en fraction de m ³
Exemple n°1				
Exemple n°2				

Observer les deux dernières colonnes du tableau et déterminer par quel coefficient il faut multiplier le produit de l'aire de la base par la hauteur pour obtenir le volume.

10 — Utiliser la formule

La formule $\text{Volume} = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$ retrouvée précédemment permet aussi de calculer le volume d'un cône.

Utiliser cette formule pour calculer le volume des solides suivants (pour les questions 2) et 3), arrondir le résultat au mm³ près) :

- 1) Une pyramide de base rectangulaire de dimensions 7,8 cm sur 5 cm et de hauteur 9 cm.
- 2) Un cône dont le rayon de la base mesure 4,5 cm et la hauteur 10 cm.
- 3) Une pyramide de hauteur 5 cm et de base un triangle équilatéral de 6 cm de côté.

VOLUME D'UNE

PYRAMIDE

Étape 2 : utilisation
de la formule

Question 3) :
exemple du choix
pertinent de
propriétés de
géométrie plane
dans l'espace (voir
Livres du Professeur).

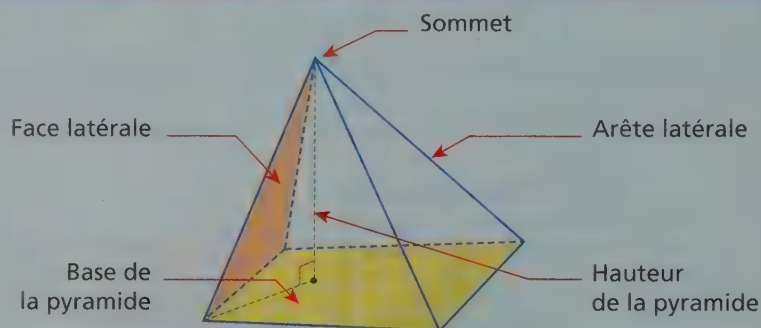
L'essentiel en deux pages

1 — Pyramide

a) Définition

Une **pyramide** est un solide dont :

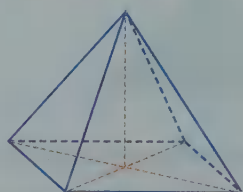
- une face est un polygone appelé la **base** de la pyramide ;
- toutes les faces latérales sont des triangles ayant un sommet commun, le sommet de la pyramide.



b) Cas particulier de la pyramide régulière

Une pyramide régulière est une pyramide dont :

- la base est un polygone régulier, c'est à dire que ses sommets sont sur un même cercle et ses côtés sont égaux ;
- le sommet est à la verticale du centre de la base.



Pyramide régulière à base carrée

Les quatre faces latérales sont des triangles isocèles superposables.

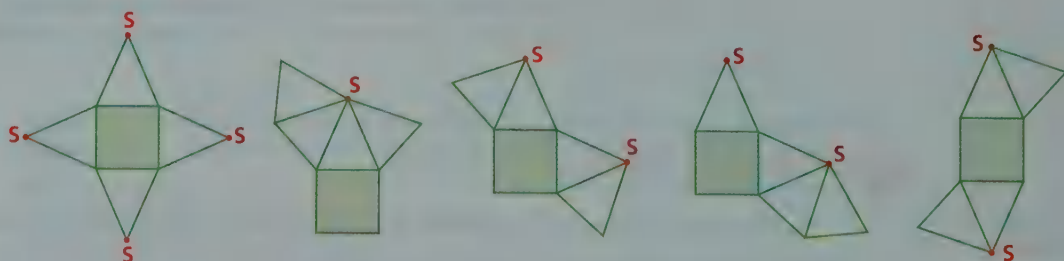


Tétraèdre régulier

Les quatre faces sont des triangles équilatéraux superposables.

c) Patrons d'une pyramide régulière à base carrée

S est le sommet de la pyramide et la base est coloriée en vert.



d) Volume d'une pyramide

$$\text{Volume d'une pyramide} = \frac{1}{3} \text{ Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

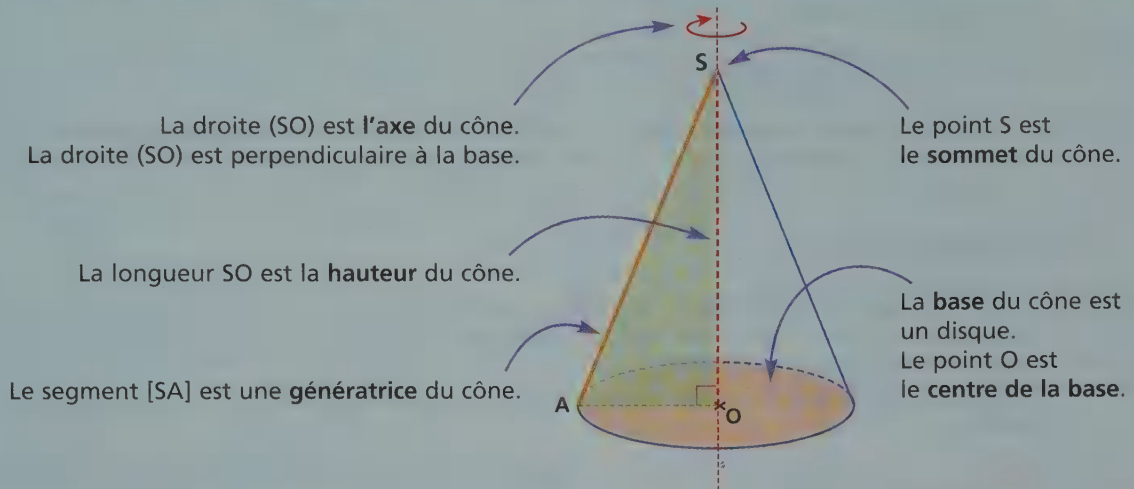
$$V = \frac{B \times h}{3}$$

B est l'aire de la base, h est la hauteur de la pyramide

2 - Cône de révolution

a) Définition

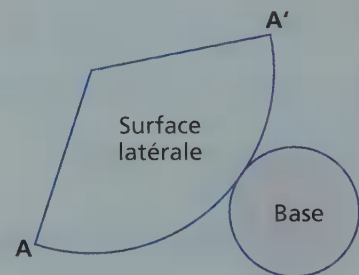
Un **cône** est un solide engendré par un triangle rectangle effectuant un tour complet autour d'un côté de l'angle droit.



b) Patron de cône

Le patron d'un cône est constitué :

- du disque de base du cône ;
- de la surface latérale qui est un secteur circulaire.



La longueur de l'arc $\widehat{AA'}$ est égale au périmètre de la base.

Vocabulaire

Un **secteur circulaire** est une portion de disque délimitée par un angle dont le sommet est le centre du disque.

c) Volume d'un cône

Volume d'un cône = $\frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

r est le rayon de la base
 h est la hauteur du cône



PASSER DE L'ESPACE AU PLAN

Principes de base

a) Choisir le bon plan

- En géométrie dans l'espace, les calculs se ramènent souvent à des calculs de géométrie plane après avoir choisi le plan dans lequel on « travaille ».
- On recherche des triangles rectangles dans lesquels on peut appliquer le théorème de Pythagore (chapitre 5), ou des triangles et des droites parallèles pour pouvoir appliquer la propriété de proportionnalité des longueurs des côtés (chapitre 2).

b) Utiliser les hauteurs

- Pour trouver un triangle rectangle dans un solide de l'espace, on sait que la hauteur de ce solide est perpendiculaire au plan de base. Elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan passant par le point de contact avec la hauteur.
- On cherche donc, dans la figure, un ou des triangles rectangles dont un des côtés est la hauteur du solide.



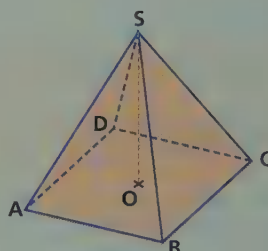
Les angles droits de la réalité n'apparaissent pas tous droits sur un dessin en perspective cavalière.

Un exemple

a) Énoncé

La pyramide $SABCD$ dessinée ci-contre, de sommet S , a une base carrée $ABCD$ de côté 5 cm. Ses faces sont des triangles isocèles superposables. Son arête $[SA]$ mesure 13 cm.

Quelle est la mesure de sa hauteur ?



b) Exemple de solution

- On cherche un triangle rectangle.
On appelle O le centre de la base $ABCD$ carrée.
La hauteur (SO) est perpendiculaire au plan de base, donc perpendiculaire à (OA) .
Le triangle SOA est donc rectangle en O .

- On peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$SO^2 + OA^2 = SA^2$$

On cherche la mesure de la hauteur $[SO]$.

On connaît SA , mais il manque la mesure du segment $[OA]$.

- Ce segment est la demi-diagonale du carré $ABCD$.
Dans le triangle ABC rectangle et isocèle en B , on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ or } AB = BC \text{ donc } AC^2 = 2 AB^2.$$

Comme O est le centre du carré $ABCD$, O est le milieu de la diagonale $[AC]$.

$$OA = \frac{1}{2} AC; \quad OA^2 = \frac{1}{4} AC^2 = \frac{1}{4} \times 2 AB^2 = \frac{1}{2} AB^2.$$

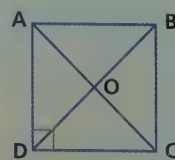
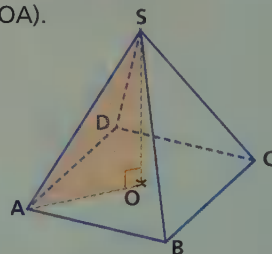
En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient :

$$OA^2 = \frac{1}{2} \times 25 = 12,5$$

$$\bullet \quad SO^2 + 12,5 = 13^2; \quad SO^2 = 169 - 12,5 = 156,5$$

En utilisant la calculatrice on obtient une valeur arrondie de SO , soit 12,51.

La hauteur de la pyramide a une longueur arrondie à 12,5 cm.



exercices

RECONNAITRE

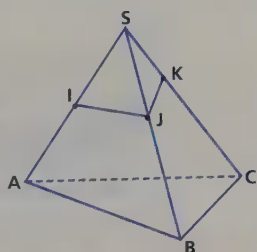
1 Effectuer les conversions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 178 \text{ mm}^2 = \dots \text{ cm}^2 ; & 1500 \text{ mm}^2 = \dots \text{ m}^2 \\ 6,4 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2 ; & 9 \text{ cm}^2 = \dots \text{ m}^2 \\ 4,3 \text{ cm}^2 = \dots \text{ mm}^2 ; & 0,3 \text{ m}^2 = \dots \text{ mm}^2 \end{array}$$

2 Effectuer les conversions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 250 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dL} ; & 0,08 \text{ dm}^3 = \dots \text{ mm}^3 \\ 4 \text{ cL} = \dots \text{ dm}^3 ; & 0,5 \text{ L} = \dots \text{ cm}^3 \\ 7,2 \text{ dm}^3 = \dots \text{ cm}^3 ; & 110 \text{ mm}^3 = \dots \text{ cL} \end{array}$$

3 Une pyramide SABC est représentée en perspective cavalière. I est le milieu du segment [SA], J est un point du segment [SB] et K est un point du segment [SC].

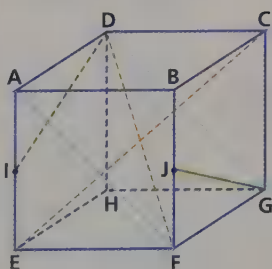


Recopier et compléter le tableau par « VRAI » ou « FAUX ».

	... la face (SAB).	... la face (SAC).	... la face (SBC).
Le point I appartient à...			
Le point J appartient à...			
Le point K appartient à...			

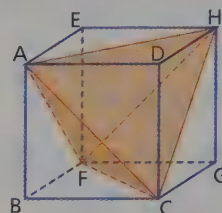
4 Des pyramides dans un cube (1)

Les points I et J sont respectivement les milieux des arêtes [AE] et [BF] du cube ci-contre.



- Les droites (DG) et (AF) semblent être parallèles. Est-ce vrai ?
- Les droites (DG) et (EC) sont-elles sécantes ? Parallèles ?
- Les droites (CE) et (DF) sont-elles sécantes ?
- Les segments [ID] et [JG] ont-ils la même longueur ?
- Les droites (CG) et (EG) sont perpendiculaires. Pourquoi ?

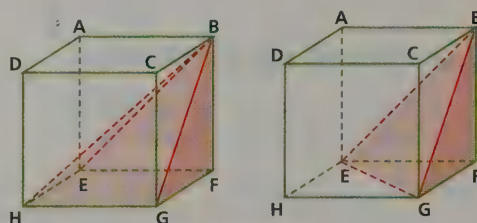
5 Des pyramides dans un cube (2)



- Le cube a pour côté 5 cm et les arêtes de la pyramide HAFC sont les diagonales des faces du cube. Décrire la pyramide (sommet, bases et faces latérales).
- Décrire de la même façon la pyramide ABCF.

6 Des pyramides dans un cube (3)

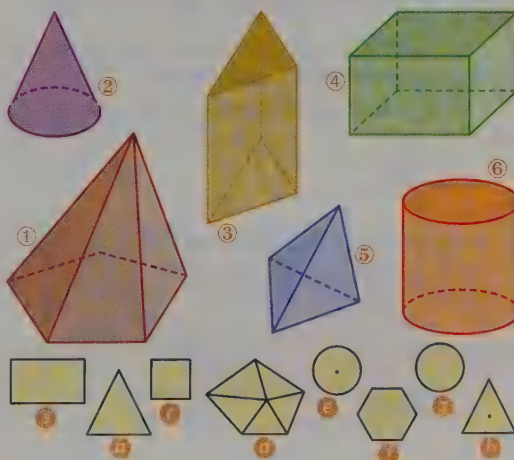
Les pyramides BEFGH et BEFG de sommet B sont construites à l'intérieur d'un cube d'arête 4 cm.



- Décrire ces pyramides. Calculer l'aire de leur base et déterminer leur hauteur.
- La deuxième pyramide peut être définie différemment suivant qu'on considère comme sommet E, F ou G. Déterminer dans chaque cas la nature de la base.

7 Différents points de vue

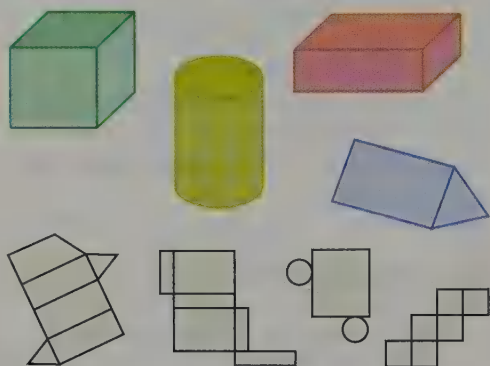
Lorsque c'est possible, déterminer pour chaque solide (indiqués par des chiffres), quelles sont ses vues de dessus et de dessous (indiquées par des lettres).



exercices

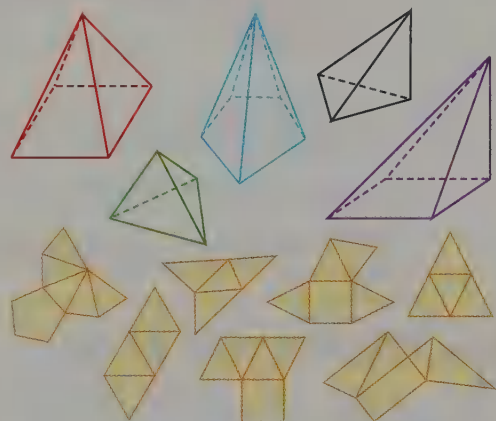
8 — Patrons et solides

Associer chacun des solides ci-dessous à son patron, quand c'est possible. Indiquer les erreurs éventuelles.



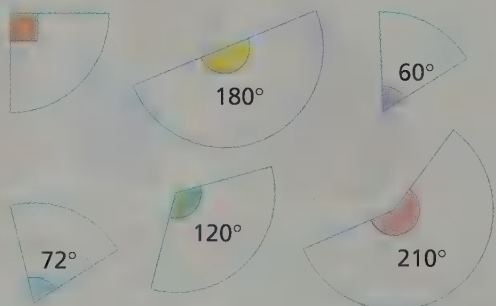
9 — Patrons de pyramides

Associer, lorsque c'est possible, un patron avec la pyramide correspondante.



10 — Angles et arcs de cercle

Les secteurs circulaires sont construits dans des cercles de rayon 6 cm. Indiquer la longueur de chaque arc de cercle.



TRACER ET CONSTRUIRE

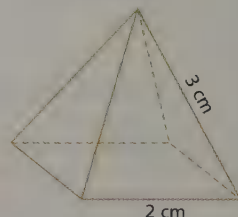
11 — Du triangle à la pyramide

a) Construire un triangle quelconque et placer les milieux de ses côtés. Construire l'orthocentre du triangle. Joindre les milieux des côtés et replier suivant ces segments. Vérifier qu'on obtient bien une pyramide dont le sommet est à la verticale de l'orthocentre.



b) Reprendre la construction à partir d'un triangle rectangle, d'un triangle équilatéral, d'un triangle rectangle isocèle. Observer alors les particularités des pyramides obtenues.

12 — Construire trois patrons différents de cette pyramide régulière à base carrée : le côté de la base mesure 2 cm et les arêtes latérales 3 cm.



13 — Construire en perspective cavalière un pavé droit de dimensions 5 x 5 x 8 (en cm) posé sur sa face carrée. Dessiner le plus grand cône de révolution possible contenu dans ce pavé, la base du cône étant située sur une des faces carrées du pavé droit.

14 —

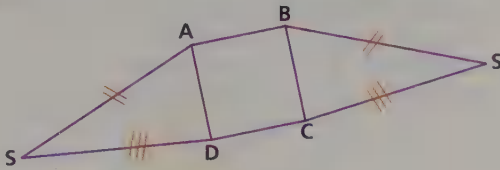


a) Reproduire le triangle isocèle aux bonnes dimensions.

b) Construire un patron de la pyramide régulière à base carrée de côté 3 cm à partir de la face dessinée.

15 — Une pyramide a pour base un hexagone de côté 3 cm. Ses faces sont des triangles isocèles, les arêtes latérales ont pour longueur 5 cm. Construire deux patrons de cette pyramide.

- 16 Reproduire la figure : ABCD est un carré de côté 3 cm, $SA = SB = 5$ cm, $SD = SC = 4,5$ cm.



- a) Compléter cette figure pour obtenir un patron de la pyramide de base ABCD et de sommet S.
- b) Reproduire une deuxième fois la figure du livre et construire un autre patron de cette pyramide.

RAISONNER ET CONSTRUIRE

Exercice résolu

Énoncé

Reproduire et compléter la figure pour obtenir le patron de la pyramide de base le carré MNOP et de sommet S.

$MN = 3$ cm ; $SM = 4$ cm
 $SN = 4,5$ cm.



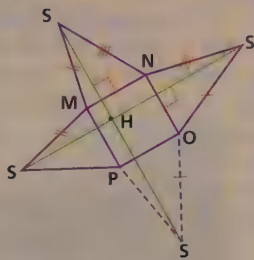
Exemple de solution

• Le segment [SN] doit avoir la même longueur sur les faces SMN et SNO. De même pour le segment [SM].

• Mais pour que la pyramide se referme correctement, il faut déterminer le point H de la base situé à la verticale du sommet. On construit les hauteurs issues de S dans les triangles SMN et SNO. Leur intersection détermine le point H.

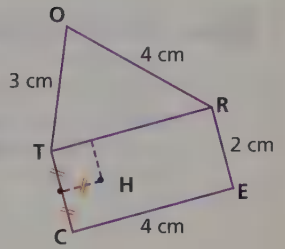
• Le point S de la face SMP doit être situé sur la droite (SH).

• En reportant la mesure des segments [SP] et [OS], on construit la 4^e face latérale.



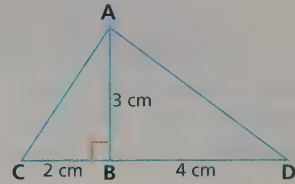
- 17 Le point H est le point de la base situé à la verticale du sommet de la pyramide.

- a) Reproduire et compléter ce patron de pyramide à base rectangulaire en tenant compte des indications portées sur la figure.



- b) Construire un deuxième patron de cette pyramide.

- 18 Les deux triangles rectangles ABC et ABD sont deux faces latérales consécutives d'une pyramide dont la base est le rectangle CBDE et le sommet est A.

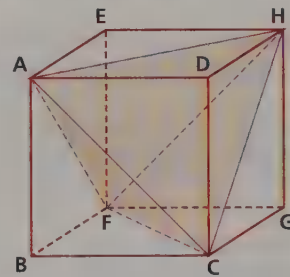


Reproduire la figure et compléter le patron de la pyramide.

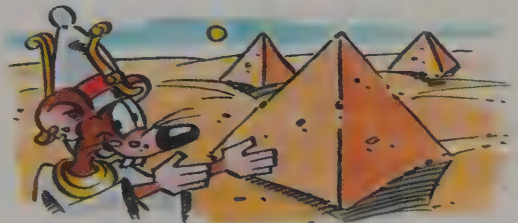
- 19 Comment réaliser le patron d'un cône dont l'angle au sommet mesure 90° ?

20 Construction à la règle et au compas

Le tétraèdre régulier ci-dessous est construit dans un cube d'arête 6 cm.



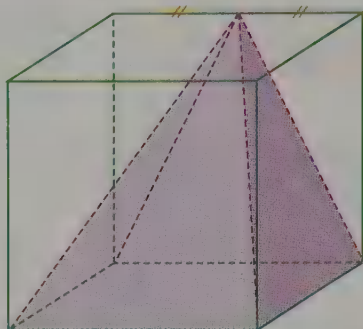
Construire le carré ABCD, relever la longueur AC au compas et construire un patron du tétraèdre uniquement à la règle et au compas.



exercices

21 — Avec compas, règle et équerre

La figure ci-dessous est une représentation en perspective cavalière et aux dimensions exactes (échelle 1) d'une pyramide dessinée dans un cube.



Construire un patron de la pyramide sans utiliser la règle graduée et en relevant au compas sur le livre les mesures nécessaires.

UTILISER LES PROPRIÉTÉS

22 — Une pyramide à base carrée de côté 4 cm a une hauteur de 5 cm. Son volume est-il égal à 20 cm^3 , 80 cm^3 , $4^2 \times 5 \text{ cm}^3$, $\frac{80}{3} \text{ cm}^3$ ou $\frac{20}{3} \text{ cm}^3$?

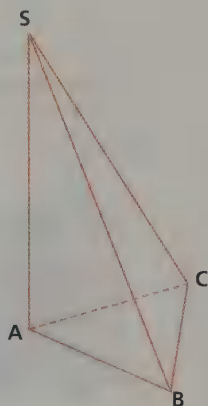
23 — SABC est une pyramide dont la base est un triangle équilatéral de 5 cm de côté.

La hauteur [SA] de cette pyramide mesure 12 cm ; les triangles SAB et SAC sont rectangles en A.

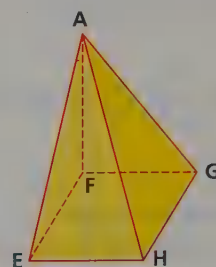
a) Construire en vraie grandeur le triangle ABC.

b) Soit H le milieu de [BC]. Calculer la valeur approchée à 0,01 près de AH et de SH.

c) Calculer une valeur approchée de l'aire totale de la pyramide (c'est à dire la somme des aires des quatre faces).



24 — L'unité de longueur est le centimètre. Dans la pyramide AEFGH représentée ci-dessous, l'arête [AF] est verticale. On donne $AF = 12$; $EF = 5$; $FG = 6$ (en cm).



a) Calculer les mesures des segments [AE], [FH], [AH]. Arrondir les résultats au mm près.

b) Calculer le volume de la pyramide.

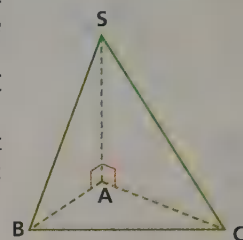
25 — Soit la pyramide SABC de sommet S et de base ABC.

Les triangles SAB et SAC sont rectangles en A.

Les dimensions sont données en millimètres :

$AS = 65$; $AB = 32$

$AC = 60$; $BC = 68$



a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

b) Calculer le volume de la pyramide SABC.

c) Tracer un patron de cette pyramide.

26 — Sur le toit d'un bâtiment, il y a des petites et des grandes pyramides en verre qui donnent de la clarté à l'intérieur. Ces pyramides sont régulières et à bases carrées.



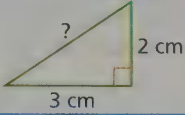
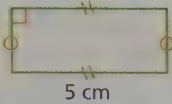
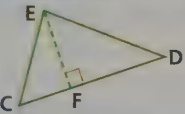
Les petites pyramides ont pour côté 20 cm et pour hauteur 30 cm.

Les grandes pyramides ont pour côté 40 cm et pour hauteur 60 cm.

La grande pyramide a-t-elle un volume double de la petite pyramide ?

27 — Pyramides et calculs

Effectuer les calculs nécessaires pour compléter le tableau suivant (l'unité de longueur est le cm) :

	Nature de la base de la pyramide	Longueur des côtés de la base	Hauteur de la pyramide	Aire de la base de la pyramide	Volume
①			5 cm		
②	Base carrée		7 cm	9 cm ²	
③			6 cm		20 cm ³
④		Un côté CD = 4,5 cm Une hauteur EF = 3,2 cm			21,6 cm ³

28 — Cônes et calculs

Recopier le tableau ci-dessous et effectuer les calculs nécessaires pour le compléter. L'unité de longueur est le cm. On effectuera les calculs avec $\pi \approx 3,14$.

	Rayon de la base	Hauteur	Aire de la base	Volume
①	3 cm	4 cm		
②		7,2 cm	78,5 cm ²	
③			113,04 cm ²	376,8 cm ³
④	2 cm			11,304 cm ³

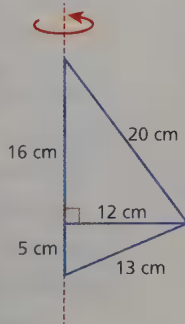
PROBLÈMES

- 29 — La base d'une pyramide régulière est un hexagone de côté 6 cm ; une arête latérale mesure 10 cm.
Un cône de révolution a pour base un disque de rayon 6 cm. La génératrice mesure 10 cm.

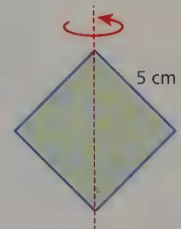
Comparer leurs volumes.

- 30 — En tournant, les deux triangles ci-contre engendrent un solide composé de deux cônes.

- a) Faire un dessin en perspective cavalière du solide obtenu à l'échelle $\frac{1}{2}$.
b) Calculer le volume du solide.



- 31 — Quel est le volume du solide engendré par un carré de côté 5 cm, tournant autour d'un axe confondu avec la direction d'une diagonale ?



- 32 — En développant la surface latérale d'un cône de révolution, on obtient un secteur circulaire de 35 cm de rayon et dont l'angle ayant pour sommet le centre du secteur circulaire est de 80°.

- Quel est le volume de ce cône ?
- Quelle est son aire latérale ?

- 33 — Un verre à pied conique contient $\frac{1}{4}$ de litre. Quelle est la profondeur du verre sachant qu'il a un diamètre de 7 cm ?

exercices

PROBLÈME (suite)

- 34** — Un disque de carton de 15 cm de rayon est découpé en deux morceaux, on obtient deux secteurs circulaires. On fabrique deux chapeaux de clown de forme conique. Un chapeau a une hauteur de 12 cm.

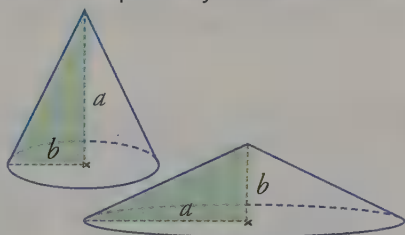
Quelle est la hauteur de l'autre ?

35 — Exprimer avec des lettres

- Un prisme droit et une pyramide ont pour base un décagone (polygone à dix côtés). Combien l'un et l'autre ont-ils de sommets, d'arêtes et de faces ?
- Un prisme droit et une pyramide ont pour base un polygone à n côtés. Exprimer en fonction de n le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de l'un et de l'autre.

36 — Exprimer en fonction de π

- Un cône a pour hauteur 4 cm et sa base a pour rayon 5 cm. Un deuxième cône a pour hauteur 5 cm et pour rayon de base 4 cm. Exprimer le volume des deux cônes en fonction de π . Exprimer la différence des volumes en fonction de π .
- Un cône a pour hauteur a et le rayon de sa base est b . Un deuxième cône a pour hauteur b et pour rayon de base a .



- Exprimer le volume des deux cônes en fonction de a , b et π .
- Exprimer la différence des volumes en fonction de a , b et π .

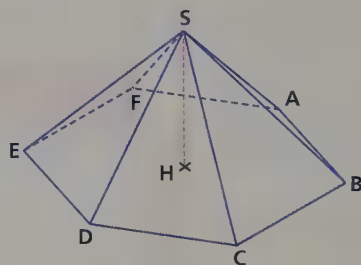
- 37** — SABCD est une pyramide à base carrée, de hauteur [SA].

- Faire un dessin en perspective.
- On sait que $SC = 15$ cm, $AC = 12$ cm et que le triangle SAC est rectangle en A. Calculer SA.
- Les diagonales de la base se coupent en O. Montrer que l'aire du triangle AOB est 18 cm^2 . En déduire l'aire de la base ABCD.
- Calculer le volume de la pyramide.

- 38** — On considère une pyramide régulière de sommet S, de base carrée ABCD et dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. O est le centre du carré ABCD. Le segment [AB] mesure 2,5 cm.

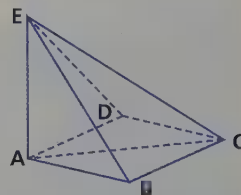
- Faire une figure. Placer H, le pied de la hauteur issue de S dans le triangle SBC.
- Calculer une valeur approchée à 0,01 cm près de la mesure du segment [SH].
- Déterminer la mesure du segment [OH] et montrer que le triangle SOH est rectangle en O. Calculer la hauteur de la pyramide.
- Calculer le volume de la pyramide et arrondir le résultat au cm^3 .
- Calculer la valeur approchée au cm^2 près de l'aire totale de cette pyramide.

- 39** — Une tour est surmontée d'un toit qui a la forme d'une pyramide régulière SABCDEF. Cette pyramide a pour base un hexagone régulier. La hauteur [SH] de la pyramide mesure 2,5 m et ses arêtes 5,5 m.



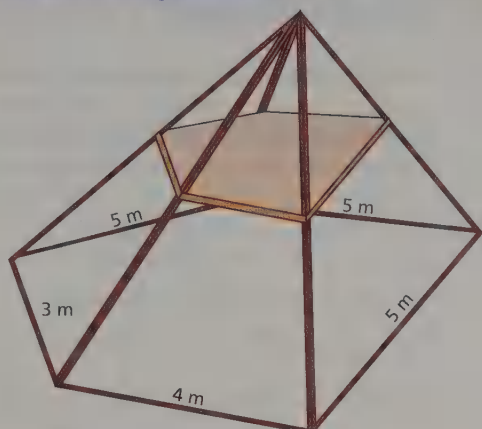
- Dessiner la base à l'échelle $\frac{1}{100}$.
- I est le milieu du segment [AB]. Montrer que le triangle HIA est rectangle et calculer HI.
- Calculer l'aire du triangle HAB et en déduire l'aire de la base de la pyramide.
- Calculer le volume de cette pyramide.

- 40** — La figure ci-contre représente une pyramide EABCD de base carrée ABCD et de hauteur [AE]. $AE = AB = 6$ cm.



- Expliquer pourquoi les triangles AEC, AEB et AED sont rectangles.
- Calculer la longueur de la diagonale [AC] du carré ABCD. En déduire la longueur CE.
- Démontrer que le triangle EBC est rectangle en B.
- Construire un patron de cette pyramide.

41 — Stand d'exposition



Une structure en bois de forme pyramidale supporte une étagère pentagonale. Cette étagère est accrochée au milieu des tasseaux formant les arêtes latérales.

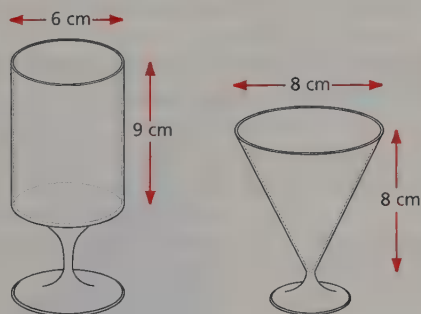
On veut installer une rampe lumineuse sur le périmètre de l'étagère.

Quelle sera la longueur de cette rampe ?

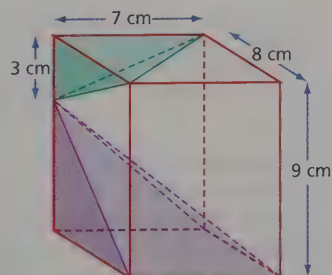
42 — Verres de lait

Noémie dispose de ces deux verres. Elle désire mesurer un demi-litre de lait avec le premier verre.

Combien de fois doit-elle le remplir ? Même question si elle utilise le deuxième verre.



- 43 — Un professeur désire découper deux pyramides dans un parallélépipède rectangle en bois, l'une à base triangulaire colorée en vert, l'autre à base rectangulaire, colorée en rouge.



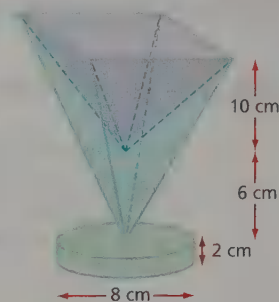
Calculer le volume des deux pyramides et le volume du bois non utilisé.

44 — Coupe en cristal

Le pied de la coupe est un cylindre de diamètre 8 cm et de hauteur 2 cm.

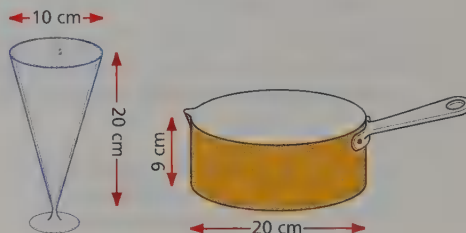
L'intérieur de la coupe a la forme d'une pyramide régulière à base carrée de côté et de hauteur 10 cm.

Cette pyramide est creusée dans une autre pyramide régulière de hauteur 16 cm.



Calculer le volume du cristal et la masse de la coupe sachant que ce cristal pèse 3,35 kg par dm^3 .

- 45 — On remplit d'eau le verre doseur et on verse le liquide dans une casserole. Quelle hauteur d'eau y a-t-il dans la casserole ?



46 — Pyramide de Pei au Louvre

Cette pyramide en verre permet d'éclairer la grande salle d'entrée du musée. Calculer l'aire de la surface vitrée (les faces latérales) sachant que la pyramide est régulière, avec une base carrée de 35 m de côté, et une hauteur de 21,64 m.

47 — La campagne d'Égypte



Voici un problème que Bonaparte se serait posé lors de la campagne d'Égypte (1798).

La pyramide de Khéops a une hauteur de 148 m et sa base a pour côté 230 m.

Quelle serait la longueur d'un mur de un mètre de large et un mètre de haut construit avec les pierres de cette pyramide? (Le volume des couloirs et chambres funéraires peut être considéré comme négligeable.)



exercices

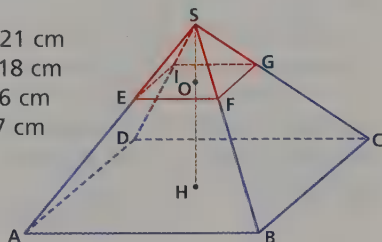
50

Groupe Est 1999
(texte aménagé)

48 — Boîte de caramels

Une boîte de caramels a la forme d'une pyramide régulière à base carrée dont le couvercle est une petite pyramide à base carrée. Les caramels sont placés dans la partie inférieure.

$AB = 21$ cm
 $SH = 18$ cm
 $SO = 6$ cm
 $EF = 7$ cm



- Calculer le volume intérieur de la partie contenant les caramels.
- Calculer l'aire totale de la boîte.
- Le carton utilisé pèse 600 g/m^2 . Calculer la masse de la boîte en négligeant les languettes nécessaires à l'encollage.



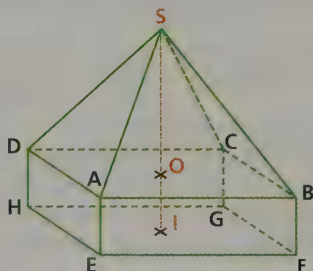
vu du brevet

49 — Amérique du Nord 2001

Un solide est constitué d'un parallélépipède surmonté d'une pyramide à base rectangulaire.

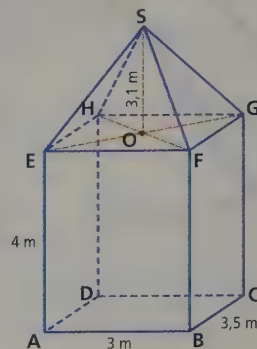
La hauteur totale du solide est $SI = 12$ cm.

Le parallélépipède a pour longueur $EF = 10$ cm, pour largeur $HE = 6$ cm et pour hauteur $BF = x$ cm.



- Exprimer le volume V_1 du parallélépipède en fonction de x .
- Montrer que le volume V_2 de la pyramide est égal à $240 - 20x$.
- Entre quelles valeurs x peut varier ?
- Trouver x pour que $V_1 = V_2$.
Quelle est alors la valeur commune de ces volumes ?
- Pour quelles valeurs de x le volume de la pyramide est-il inférieur à 200 cm^3 ?

Un pigeonnier est composé d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH et d'une pyramide SEFGH dont la hauteur [SO] mesure 3,1 m. On sait que $AB = 3$ m, $BC = 3,5$ m et $AE = 4$ m.

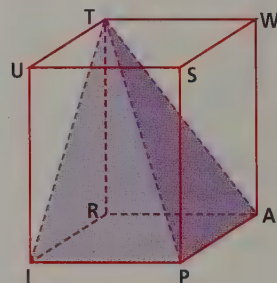


- Calculer la longueur BD. En déduire celle de [BH]. (On donnera des valeurs approchées de ces résultats à 10^{-1} près).
- Calculer en m^3 le volume V de ce pigeonnier.
- Un modéliste désire construire une maquette à l'échelle $\frac{1}{24}$.

Effectuer les calculs nécessaires à la construction de la maquette, construire un patron et calculer le volume de cette maquette.

51

On considère la pyramide PIRAT, schématisée ci-dessous, de sommet T et de hauteur TR.

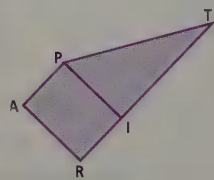


Cette pyramide est inscrite dans le parallélépipède rectangle IPARTUSW.

On donne : $PI = 8$; $AP = 6$; $UI = 12$.

Les dimensions sont en centimètres.

- Calculer le volume de la pyramide PIRAT.
- Calculer les valeurs de AT et de IT, en donnant des valeurs décimales arrondies au dixième.
- La figure ci-contre représente le début d'un patron de la pyramide PIRAT.
Dessiner un patron complet de la pyramide PIRAT à l'échelle $\frac{1}{2}$.





52 — On calcule le volume de différents cônes :

- les uns ont tous pour hauteur 6 cm et le rayon de la base varie de 1 cm à 10 cm (colonne C de la feuille du tableau) ;
- les autres ont tous une base de 3 cm de rayon et leur hauteur varie de 1 cm à 10 cm (colonne D de la feuille du tableau).

a) Préparer la feuille sur un tableur et écrire les deux formules indiquées.

- Formule à entrer dans la case C2 $(3,14*B2^2*6)/3$

- Formule à entrer dans la case D2 $(3,14*3^2*A2)/3$

b) Utiliser la poignée de recopie pour compléter le tableau.

c) Construire les graphiques de ces deux variations de volumes sur une même feuille. Quels commentaires peut-on faire sur ces graphiques ?

	A	B	C	D	E
	Hauteur	Rayon	Volume pour h = 6	Volume pour r = 3	
1					
2	1	1	6,28	9,42	
3	2	2			
4	3	3			
5	4	4			
6	5	5			
7	6	6			
8	7	7			
9	8	8			
10	9	9			
11	10	10			
12					
13					
14					
15					
16					

53 — Construction d'une pyramide à base rectangulaire

Les mots en **couleur** correspondent à une commande du logiciel GeospaceW®.

a) Construction de la base ABCD

Pont repéré dans un plan

plan (3 points ou deux d'un repère) : xoy

Abscisse : 2

Ordonnée : 1

Nom du point : A

Aide Annuler Ok

Cliquer sur **Créer, Point, Point repéré, dans un plan**.

Compléter alors les cases du tableau qui s'affiche :

« xoy » pour plan, « 2 » pour Abscisse,

« 1 » pour Ordonnée, « A » pour Nom du point.

Cliquer sur **bis** et remplir les cases pour les points B (2 ; -1), C (-2 ; -1), D (-2 ; 1).

b) Construction du sommet S et de la pyramide SABCD

Cliquer sur **Créer, Point, Point repéré, sur une demi-droite**.

Compléter alors les cases du tableau qui s'affiche :

« oz » pour Demi-droite, « 4 » pour Distance/origine, « S » pour Nom du point.

Cliquer sur **Solide, Polyèdre convexe, défini par ses sommets**.

Compléter alors les cases du tableau qui s'affiche :

« ABCDS », dans cet ordre, pour Liste des sommets, « pyra » pour Nom du solide.

c) Autres points de vue

Pour mettre les traits cachés en pointillés, cliquer sur Divers, Style crayon, O, cliquer sur le polyèdre, cliquer sur fermer puis sur la case

Pour faire tourner la pyramide, cliquer sur le bouton droit de la souris, le maintenir enfoncé en déplaçant la souris.

d) Construction du patron de la pyramide

• Créer un coefficient d'ouverture du patron en cliquant sur **Créer, Numérique, Variable réelle libre dans un intervalle**. Compléter alors les cases du tableau qui s'affiche :

entrer « 0 », puis deux clic sur la barre d'espace et entrer « 1 » pour Bornes, « a » pour Nom de la variable.

« 0 » correspond au patron refermé sur la pyramide, « 1 » correspond au patron mis à plat.

• Créer le patron en cliquant sur **Créer, Solide, Patron d'un polyèdre**.

Compléter alors les cases du tableau qui s'affiche :

« pyr » pour Nom du polyèdre, « a » pour Coefficient

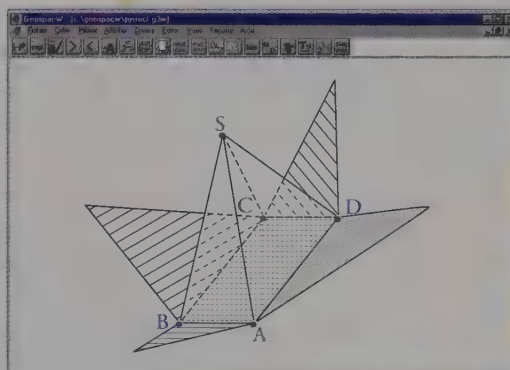
d'ouverture, « pat » pour Nom du patron.

Cliquer sur Divers, Style crayon, sélectionner la case , fermer puis cliquer sur un des triangles du patron.

• Piloter au clavier avec les flèches pour faire varier le coefficient a et faire s'ouvrir ou se fermer le patron autour de la pyramide.

• Refaire la même construction mais en nommant, dans cet ordre, SABCD, la liste des sommets dans le tableau qui définit la pyramide.

Obtient-on le même patron ?



en direct de La cité des sciences – La Villette

Ces trois expériences sont présentées dans l'espace « Mathématiques » de l'exposition permanente Explora.

■ LE THÉORÈME DE PYTHAGORE EN MOUVEMENT

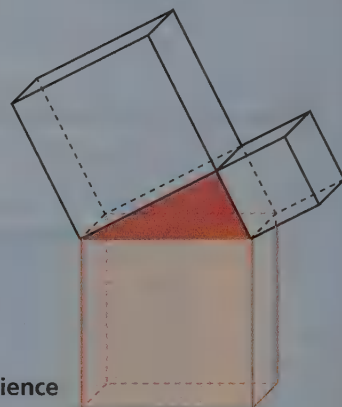


Le triangle rectangle est entouré de trois réservoirs parallélépipédiques qui communiquent entre eux. Leurs bases carrées ont pour côtés les côtés du triangle rectangle. Les hauteurs sont identiques.

L'ensemble du dispositif tourne sur lui-même.

Au début de l'expérience le grand réservoir est plein et les deux autres sont vides.

Au bout d'un demi-tour, le liquide s'est déversé dans les deux petits réservoirs qu'il remplit exactement.



Montrer que le volume du grand réservoir est bien égal au volume des deux petits.

Au début de l'expérience

■ UN JEU D'ALIGNEMENT EN 3D

Le jeu ci-contre se joue à deux joueurs. Ceux-ci allument à tour de rôle l'une des 64 boules. Le but est de former un alignement de quatre boules allumées. Les alignements peuvent être verticaux et horizontaux, mais aussi obliques. Un tel jeu de morpion dans l'espace peut être réalisé assez simplement :

Matériel nécessaire

- Un socle de bois,
- 16 tiges métalliques,
- 64 perles de deux couleurs différentes, (32 de chaque couleur).

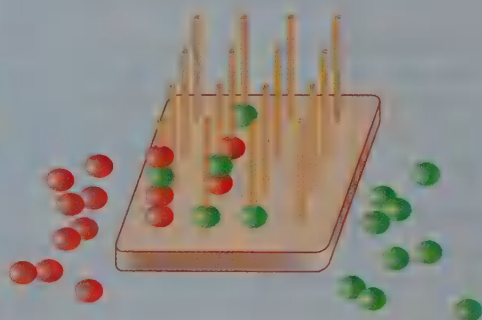
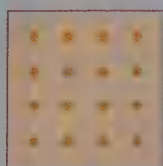
Bien lire les explications de montage avant de se procurer le matériel.



Montage

- Les tiges doivent être assez hautes pour pouvoir y enfiler 4 perles.
- Marquer l'emplacement des 16 tiges sur le socle de bois : rapprocher les tiges pour conserver la forme du cube, les espacer suffisamment pour que les perles puissent glisser facilement.
- Percer le socle et fixer les tiges.

Pour jouer, les joueurs enfilent leurs perles à tour de rôle sur les tiges en essayant de créer des alignements de quatre perles tout en empêchant l'adversaire d'y parvenir.



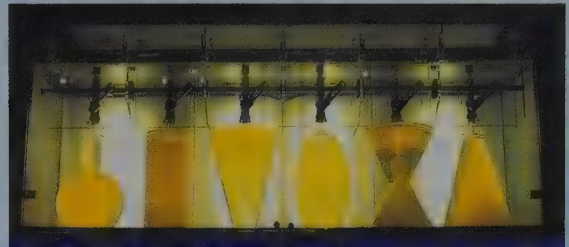
RÉCIPIENT ET COURBES

• Les six récipients ont la même capacité (volume intérieur).
Le débit de l'eau est le même aux six robinets, le remplissage débute et se termine en même temps pour tous.

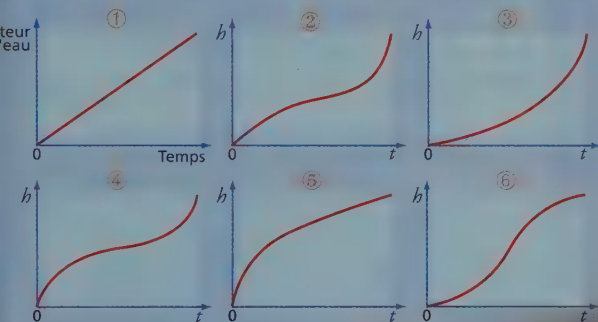
• Les formes étant différentes, le niveau ne monte pas pareillement partout.

Par exemple, le niveau monte vite au début dans le 3^e récipient car sa base est étroite. Petit à petit, la montée ralentit car la forme s'évase. Ce sera tout le contraire dans le 6^e récipient.

• Sous les récipients figurent six graphiques représentant la variation des niveaux en fonction du temps.

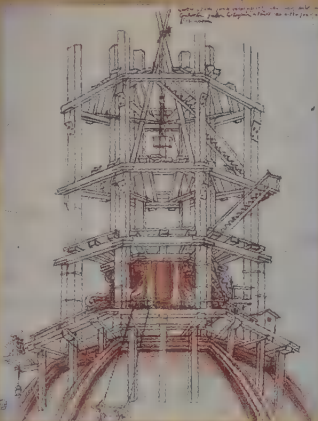


Graphiques de remplissage



Associer chaque récipient à son graphique de remplissage en tenant compte de la forme : plus elle est étroite, plus le niveau monte vite, plus elle est large, plus le niveau s'élève doucement.

À travers L'Histoire



Construction de la coupole du Dôme de Florence par Filippo Brunelleschi.

Un premier problème s'est lentement résolu au cours de l'histoire : comment représenter un objet de l'espace ? Divers procédés ont été créés pour aider à cette représentation d'un objet sur une feuille de papier. En particulier, Filippo Brunelleschi, architecte de la Renaissance, a mis au point un ingénieux système, vers 1415, pour permettre de montrer les principes de la perspective. Sur une petite planchette, une « tavoletta », il a peint le baptistère situé face à la cathédrale de Florence. Si on se place face à ce baptistère, en regardant par un petit trou aussi gros qu'une lentille, percé dans la tavoletta, et que l'on met un miroir à la hauteur du trou en cachant l'édifice, on a l'impression de voir exactement le baptistère, alors que l'on voit le reflet dans la glace de la peinture située au dos de la tavoletta. Il faut dire que Brunelleschi avait choisi l'emplacement exact où l'on voit le tableau sous un angle idéal qui repose sur les principes de la perspective à un point de fuite que l'on utilise beaucoup en peinture.

Tout polyèdre pouvant se partager en pyramides à base triangulaire, calculer le volume d'une pyramide est aussi un problème très ancien. Les premières démonstrations du volume d'une pyramide reposent

sur un découpage en petits prismes ou en tranches parallèles. Dans son livre « Les éléments », Euclide, au III^e siècle avant notre ère, montre qu'un prisme à base triangulaire peut être découpé en trois pyramides de même volume. Il les compare deux à deux et démontre qu'elles ont même hauteur et des bases d'aires égales. On en arrive donc à la formule bien connue pour une pyramide à base triangulaire équivalente au tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur. Pour généraliser à d'autres solides, on ne peut éviter de faire appel à une méthode de calcul infinitésimal qui met en œuvre des mathématiques « supérieures ».

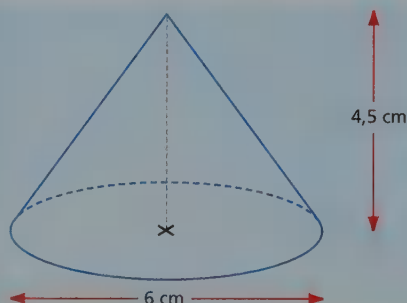
ce que je dois savoir sur...

...Les pyramides et les cônes

- Savoir représenter une pyramide et un cône de révolution.
- Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution.
- Savoir reconnaître le parallélisme et l'orthogonalité dans l'espace pour pouvoir appliquer les propriétés de géométrie plane.
- Utiliser les propriétés de géométrie plane pour calculer des longueurs, des aires et des volumes.

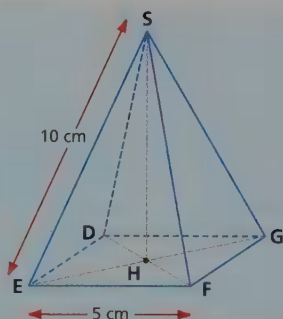
je m'évalue

- 1 Calculer le volume du cône de révolution de hauteur 4,5 cm et dont le diamètre de la base mesure 6 cm.



Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à $0,1 \text{ cm}^3$ près en prenant 3,14 pour valeur de π .

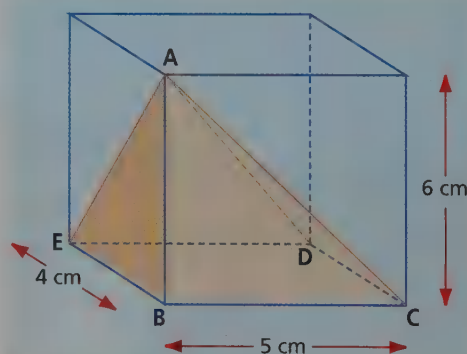
- 2 La pyramide régulière ci-dessous a pour base un carré de 5 cm de côté. L'arête latérale mesure 10 cm.



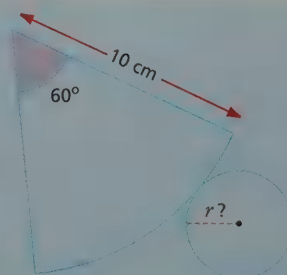
- Calculer la valeur approchée à $0,01 \text{ cm}$ près de la hauteur SH de la pyramide.
- Calculer le volume de la pyramide, arrondir au cm^3 .

- 3 La pyramide ABCDE est construite dans un pavé droit de longueur 5 cm, de largeur 4 cm et de hauteur 6 cm.

- Calculer une valeur approchée à $0,01 \text{ cm}$ près des arêtes [AE], [AC] et [AD].
- Construire un patron de cette pyramide.



- 4 Calculer une valeur approchée à $0,1 \text{ cm}$ près du rayon de la base et de la hauteur du cône, la figure suivante en représentant un patron.



Les solutions se trouvent à partir de la page 279.

COSINUS D'UN ANGLE AIGU

En 6^{ème}-5^{ème}

- Reconnaître et tracer un triangle ou un quadrilatère particulier.
- Utiliser la somme des angles d'un triangle, savoir l'appliquer à des triangles particuliers.
- Prendre l'arrondi à l'unité, au dixième ou au centième.
- Connaître et utiliser une définition du parallélogramme et des propriétés relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles.
- Déterminer périmètres et aires des figures usuelles.

En 4^{ème}

- Utiliser, pour un triangle rectangle, la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des deux côtés adjacents.
- Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée :
 - du cosinus d'un angle aigu donné ;
 - de l'angle aigu dont on connaît le cosinus.

pour démarrer



1 Constructions

PRÉ-REQUIS :

- constructions ;

Dans chaque cas, construire si possible le triangle ABC rectangle en A :

- a) $AB = 5 \text{ cm}$; $AC = 3 \text{ cm}$
- b) $AB = 5 \text{ cm}$; $BC = 6 \text{ cm}$
- c) $AB = 5 \text{ cm}$; $\widehat{ABC} = 30^\circ$
- d) $BC = 7 \text{ cm}$; $\widehat{ABC} = 50^\circ$
- e) $AC = 6 \text{ cm}$; $\widehat{ABC} = 100^\circ$

2 Équations

- résolution des équations

$$\frac{x}{a} = b \text{ ou } \frac{a}{x} = c ;$$

Calculer x dans chacun des cas suivants :

- a) $\frac{3}{x} = 12$ b) $\frac{x}{9} = 3$ c) $\frac{5}{x} = 0,625$ d) $\frac{x}{5} = 8$

3 Arrondis

- arrondis.

Donner un arrondi de chaque fraction à 10^{-2} près :

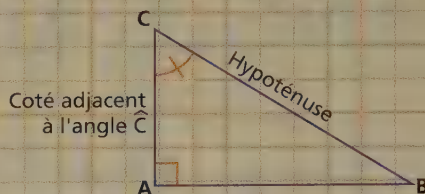
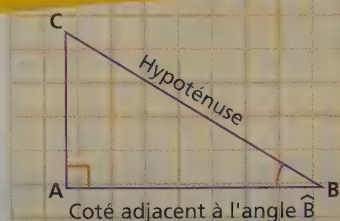
$$\frac{2}{8} ; \quad \frac{4}{9} ; \quad \frac{2}{3} ; \quad \frac{3}{7} ; \quad \frac{2}{7} ; \quad \frac{1}{8}$$



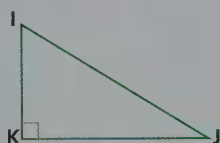
Activités

4 Côté adjacent

Vocabulaire

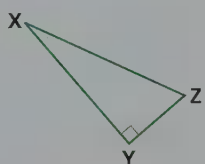


Recopier et compléter les pointillés :



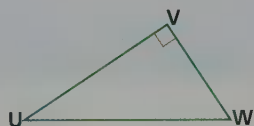
[IK] est le côté adjacent de l'angle

[IJ] est le côté adjacent de l'angle



Le côté adjacent de l'angle $\widehat{X}$ est

L'hypoténuse du triangle XYZ est



[UW] est

[UV] est

[VW] est

5 Construire, mesurer, observer

- 1) Construire un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 10$ cm et $\widehat{ABC} = 30^\circ$.
- 2) Placer un point M sur [AB].
- 3) Tracer la droite perpendiculaire à (AB) passant par M, elle coupe (BC) en N.
- 4) Mesurer le plus précisément possible les segments [BM] et [BN], puis recopier le tableau ci-dessous et compléter la deuxième colonne (cas ①) :

	Cas ①	Cas ②	Cas ③	Cas ④	Cas ⑤
BM					
BN					
$\frac{BM}{BN}$ (arrondir à 10^{-1})					

- 5) Placer un deuxième point M sur le segment [AB] et reprendre les questions 3) et 4) en complétant la troisième colonne du tableau (cas ②). Renouveler les mesures à partir de trois autres positions de M sur le segment [AB]. Que peut-on constater en observant le tableau ?
- 6) Quelles sont les particularités communes aux triangles BMN ?
- 7) Que représentent les côtés [BM] et [BN] pour les triangles BMN ?
- 8) Construire un autre triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 10$ cm et choisir une mesure d'angle pour $\widehat{ABC}$ autre que 30° . Refaire les mesures et répondre aux mêmes questions, depuis la question 2).

Apprendre à utiliser le vocabulaire.

RAPPORT DE LONGUEUR CONSTANT : une conjecture

• On pourra utiliser la fiche photocopiée dans le livre du professeur ou utiliser un logiciel de constructions (voir ex. 62 p. 145)

• Conjectures :
- dans des triangles rectangles,
à un angle correspond un rapport des longueurs du côté adjacent et de l'hypoténuse ;
- ce rapport varie en fonction de l'angle.

6 Une démonstration

RAPPORT DE
LONGUEUR CONSTANT :
démonstration

• Utilisation de la
proportionnalité des
longueurs des côtés
dans deux triangles
pour approcher le
cosinus d'un angle
aigu.

D'après l'activité précédente, il semble que, pour un même angle,

les rapports $\frac{BM}{BN}$ sont égaux.

Les rapports $\frac{BM}{BN}$ ne semblent dépendre que de l'angle.

C'est ce qui va être démontré dans ce qui suit.

Soit ABC un triangle rectangle en A. L'angle $\widehat{ABC}$ est un angle aigu.

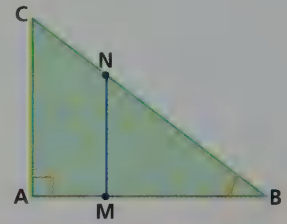
1) Quelle est l'hypoténuse de ce triangle ? Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$?

2) M est un point de [AB] et N le point de [AC] tels que les droites (MN) et (AC) soient parallèles.

Pourquoi a-t-on $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}$?

3) En utilisant des propriétés des égalités de quotients,

expliquer pourquoi $\frac{BM}{BN} = \frac{BA}{BC}$.



Conclusion :

- Le rapport $\frac{BM}{BA}$ ne varie pas.
- Le rapport $\frac{BM}{BA}$ ne dépend que de l'angle $\widehat{ABC}$.

Vocabulaire

Ce rapport $\frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$

s'appelle le **cosinus** de l'angle $\widehat{ABC}$ et on le note $\cos \widehat{ABC}$.

7 Usage de la calculatrice en mode degré

1) Détermination du cosinus d'un angle aigu

Pour déterminer le cosinus de 30° , on utilise une calculatrice en tapant successivement sur les touches $\boxed{\cos} \boxed{3} \boxed{0}$. L'affichage permet d'écrire $\cos 30^\circ \approx 0,86$.

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de :
 $\cos 32^\circ$; $\cos 25^\circ$; $\cos 5^\circ$; $\cos 60^\circ$

2) Calcul d'un angle connaissant son cosinus

Suivant les modèles on utilise la seconde fonction de la touche $\boxed{\cos}$ (appelée $\cos^{-1}$ ou Acs) ou on cherche $\cos^{-1}$ dans le menu.

En tapant $\boxed{2nd} \boxed{\cos} \boxed{0} \boxed{,} \boxed{5}$, la calculatrice affiche 60.
Cela signifie que $\cos 60^\circ = 0,5$.

En tapant sur la calculatrice $\boxed{shift} \boxed{\cos} \boxed{0} \boxed{,} \boxed{5}$
Elle affiche 60. Cela signifie que $\cos 60^\circ = 0,5$.

De la même manière, donner une valeur arrondie au degré près, si possible, des angles $\widehat{B}$, $\widehat{A}$, $\widehat{H}$, $\widehat{K}$:

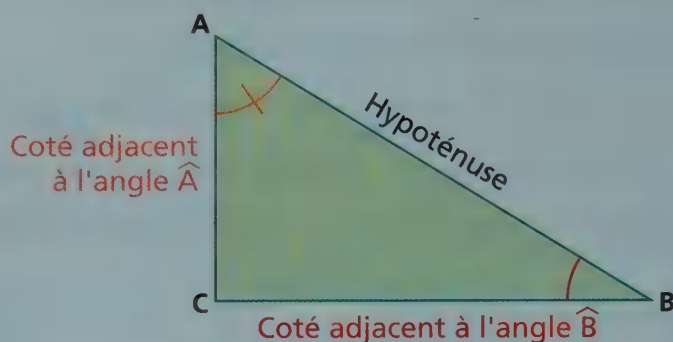
$$\cos \widehat{B} = 1 ; \quad \cos \widehat{A} = 0,15 ; \quad \cos \widehat{H} = 0,78 ; \quad \cos \widehat{K} = 2$$

• Travail sur valeur
exacte et valeur
arrondie.

• On pourra insister
sur le fait que le
cosinus d'un angle
aigu est un nombre
positif.

L'essentiel en deux pages

1 - Vocabulaire



2 - Cosinus d'un angle aigu

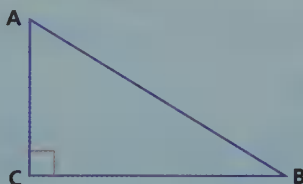
Dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle aigu est égal au quotient :

$$\frac{\text{Longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$$

Remarques

- Le cosinus d'un angle aigu est un quotient qui ne dépend que de cet angle.
- Le cosinus d'un angle aigu $\widehat{M}$ se note $\cos \widehat{M}$.

Application



Le triangle ABC est rectangle en C :

$$\cos \widehat{A} = \frac{AC}{AB} ; \quad \cos \widehat{B} = \frac{BC}{AB}$$

L'hypoténuse [AB] étant le côté le plus long du triangle rectangle, les quotients $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{BC}{AB}$ sont toujours inférieurs à 1.

Ces quotients sont des quotients de longueurs.

Le cosinus d'un angle aigu est un nombre toujours compris entre 0 et 1.



3 — Cosinus et calculatrice

a) Déterminer le cosinus quand on connaît l'angle

On utilise la touche $\boxed{\cos}$.

Exemple : $\cos 37^\circ$

On tape $\boxed{\cos} \boxed{3} \boxed{7} \boxed{=}$ (ou suivant le modèle : $\boxed{3} \boxed{7} \boxed{\cos}$).

On arrondit généralement à 10^{-3} près :

$\cos 37^\circ \approx 0,799$ (arrondi à 10^{-3} près).



Vérifier auparavant que la calculatrice est en « MODE DEGRÉ ».

b) Déterminer l'angle quand on connaît le cosinus

Selon les modèles les plus courants, on utilise la seconde fonction de la touche $\boxed{\cos}$.

On y accède par la touche $\boxed{\text{shift}}$ (ou $\boxed{2\text{nd}}$, ou $\boxed{\text{inv}}$).

Pour certains autres modèles, on y accède par le menu de trigonométrie.

Vocabulaire

« Trigonométrie » vient de mots grecs voulant dire « mesures dans un triangle ».

Exemple

$\cos \widehat{B} = 0,978$; combien vaut l'angle (au degré près) ?

On tape $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\cos} \boxed{0,978} \boxed{=}$ (ou $\boxed{0,978} \boxed{2\text{nd}} \boxed{\cos} \boxed{=}$ selon les modèles).

La calculatrice affiche **12.0406774**

On écrit $\widehat{B} \approx 12^\circ$ au degré près.

Le cosinus permet de calculer des longueurs ou des angles.

Voir Méthode page 138.





PROBLÈME DE SYNTHÈSE

Les étapes nécessaires pour résoudre un problème

- 1 Lire attentivement le texte et faire une figure à main levée à compléter au fur et à mesure des questions.
- 2 Chercher au brouillon en faisant appel aux propriétés connues ou à chercher dans le cahier de cours.
- 3 Rédiger et faire une figure avec les instruments.
- 4 Relire en vérifiant que chaque réponse justifiée comporte les trois pas d'une démonstration.

Un exemple pour illustrer cette démarche

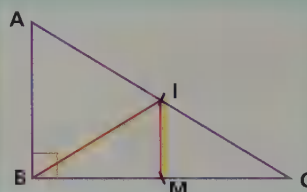
a) Énoncé

ABC est un triangle rectangle tel que $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $AC = 8$ cm et $BC = 7$ cm.

- a) Calculer AB à 0,01 cm près.
- b) Soit I le milieu de [AC]. Calculer IB.
- c) La droite parallèle à (AB) passant par I coupe [BC] en M. Calculer IM au mm près.
- d) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ au degré près.
- e) Construire le point D symétrique de A par rapport à M.
Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

b) Exemple de solution

- a) ABC est un triangle rectangle en B,
d'après le théorème de Pythagore $AB^2 + BC^2 = AC^2$
 $AB^2 + 7^2 = 8^2$; $AB^2 = 64 - 49$; $AB^2 = 15$
 $AB \approx 3,87$; un arrondi de AB est 3,87 cm.



- b) I est le milieu de l'hypoténuse [AC].
Dans un triangle rectangle, la longueur de la médiane issue de l'angle droit est la moitié de celle de l'hypoténuse.

Donc $BI = \frac{1}{2} AC$. En remplaçant par les valeurs numériques, $BI = 4$ cm.

- c) Dans le triangle ABC, (IM) est parallèle à (AB) et I est le milieu de [AC].
Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté
Donc on peut dire que M est le milieu de [BC].

Dans le triangle ABC, M est le milieu de [BC] et I est le milieu de [AC].

Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa mesure est la moitié de celle du troisième côté.

Donc on peut dire que $IM = \frac{1}{2} AB$.

En remplaçant par les valeurs numériques, $IM \approx 1,9$.

- d) Le triangle ABC est rectangle, on peut utiliser la définition du cosinus :

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{BC}{AC}; \quad \cos \widehat{ACB} = \frac{7}{8}$$

En utilisant les touches « seconde » de la calculatrice, on obtient $\widehat{ACB} \approx 28,95$.

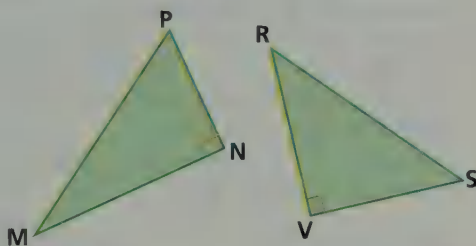
Au degré près la valeur de $\widehat{ACB}$ est 29° .

- e) D est le symétrique de A par rapport à M, par définition on peut donc dire que M est le milieu de [AD]. M est le milieu de [BC].
Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
On peut conclure que ABDC est un parallélogramme.

exercices

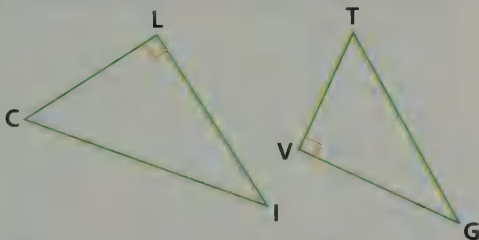
RECONNAÎTRE

- 1 En utilisant les expressions « hypoténuse » et « côté adjacent », écrire cinq phrases suivant le modèle donné et en observant les triangles rectangles MNP et RVS.



Modèle : [MN] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{M}$ dans le triangle MNP.

- 2 Les triangles LCI et TGV sont rectangles.



Recopier et compléter les phrases suivantes :

- [CI] est triangle LCI.
- est le côté adjacent à l'angle $\widehat{T}$ dans le triangle
- [VG] est dans le triangle
- est l'hypoténuse du triangle VGT.
- [LC] est

- 3 Recopier et compléter (donner un arrondi à 10^{-3} près) :

- a) $\cos 5^\circ \approx \dots$ d) $\cos 40^\circ \approx \dots$
 b) $\cos 15^\circ \approx \dots$ e) $\cos 55^\circ \approx \dots$
 c) $\cos 35^\circ \approx \dots$ f) $\cos 65^\circ \approx \dots$

- 4 Recopier et compléter (donner un arrondi au degré près) :

- a) $\cos \widehat{A} = 0,99$; $\widehat{A} \approx \dots$
 b) $\cos \widehat{B} = 0,292$; $\widehat{B} \approx \dots$
 c) $\cos \widehat{C} = 0,914$; $\widehat{C} \approx \dots$
 d) $\cos \widehat{D} = 0,469$; $\widehat{D} \approx \dots$
 e) $\cos \widehat{E} = 0,719$; $\widehat{E} \approx \dots$

- 5 Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

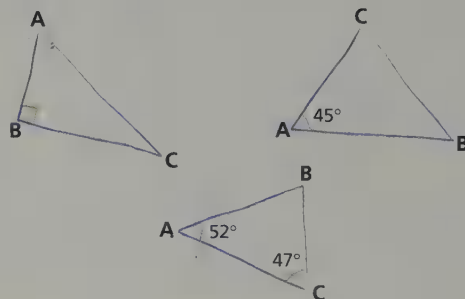
$\widehat{A}$	90°	73°	21°	7°				
$\cos \widehat{A}$					0,97	0	0,75	0,26

- 6 Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

$\widehat{A}$	0°	23°	48°	86°				
$\cos \widehat{A}$					0,8	0,66	0,44	0,19

- 7 Dans un triangle EUO tel que l'angle $\widehat{OEU}$ mesure 62° et l'angle $\widehat{OUE}$ mesure 29° connaît-on une propriété qui permet de calculer le cosinus de $\widehat{OEU}$?

- 8 Dans quels triangles ABC pourrait-on calculer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ si l'on connaissait les mesures des côtés ?



- 9 Attention erreurs !

Quelles sont les erreurs commises lorsque l'on écrit :

- 1 $\cos \widehat{UJH} = 2,12$ 2 $47 \cos = 0,682$
 3 $\cos \widehat{RAS} = 0,913 \text{ cm}$
 4 $\frac{AB}{BC} = 1,48$ donc 1,48 est le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

- 10 Tracer un triangle ABC rectangle en B tel que : AB = 5 cm et AC = 7 cm.

- a) Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$?
 b) Le quotient $\frac{5}{7}$ est le cosinus de quel angle ?

- 11 Tracer un triangle ANG rectangle en G tel que : AG = 8 cm et GN = 4 cm.

- a) Quel calcul faut-il effectuer avant de trouver le cosinus de l'angle $\widehat{NAG}$?
 b) Calculer le cosinus de $\widehat{NAG}$.

UTILISER LES PROPRIÉTÉS



MÉTHODE

Déterminer un angle dans un triangle rectangle (1^{ère} méthode)

Énoncé

Un triangle STU rectangle en S est tel que $SU = 4$ cm et $UT = 6$ cm. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{SUT}$? Arrondir au degré près.

Exemple de solution

Le triangle STU est rectangle, on peut utiliser la définition du cosinus :

$$\cos \widehat{SUT} = \frac{SU}{UT}$$

En remplaçant par les valeurs numériques :

$$\cos \widehat{SUT} = \frac{4}{6}$$

En utilisant les touches « seconde » de la calculatrice, on obtient :

$$\widehat{SUT} \approx 48^\circ$$

Déterminer une longueur dans un triangle rectangle

Énoncé

Un triangle EFG rectangle en F est tel que $FG = 3$ cm et $\widehat{FGE} = 55^\circ$. Quelle est la mesure de l'hypoténuse [EG] ? Arrondir au millimètre près.

Exemple de solution

Le triangle EFG est rectangle on peut utiliser la définition du cosinus.

$\cos \widehat{FGE} = \frac{FG}{EG}$ c'est à dire côté adjacent à

l'angle $\widehat{FGE}$ sur l'hypoténuse.

En remplaçant par les valeurs numériques :

$$\cos 55^\circ = \frac{3}{EG}$$

Les propriétés des égalités permettent d'écrire :

$$EG \times \cos 55^\circ = 3 ; \quad EG = \frac{3}{\cos 55^\circ}$$

En utilisant les touches de la calculatrice, on obtient :

$$EG \approx 5,2 \text{ cm}$$

Déterminer un angle dans un triangle rectangle (2^e méthode)

Énoncé

Un triangle HIJ rectangle en I est tel que $IJ = 5$ cm et $JH = 13$ cm. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{IHJ}$? Arrondir au degré près.

Première solution

Le triangle HIJ est rectangle, on peut utiliser la définition du cosinus :

$$\cos \widehat{IHJ} = \frac{IH}{JH}$$

Il manque la valeur de IH, on va utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle HIJ rectangle en I :

$$IJ^2 + IH^2 = JH^2$$

$$5^2 + IH^2 = 13^2$$

$$25 + IH^2 = 169$$

$$IH^2 = 169 - 25$$

$$IH^2 = 144$$

$$IH = 12$$

On remplace IH par sa valeur dans le quotient :

$$\cos \widehat{IHJ} = \frac{12}{13}$$

En utilisant les touches « seconde » de la calculatrice, on obtient :

$$\widehat{IHJ} \approx 23^\circ$$

Deuxième solution

Le triangle HIJ est rectangle on peut utiliser la définition du cosinus :

$$\cos \widehat{IJH} = \frac{IJ}{JH}$$

En remplaçant par les valeurs numériques :

$$\cos \widehat{IJH} = \frac{5}{13}$$

En utilisant les touches « seconde » de la calculatrice, on obtient :

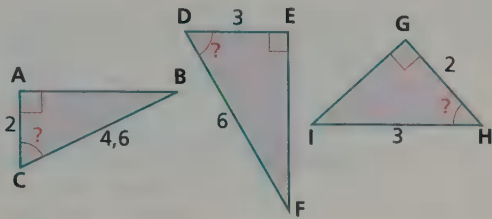
$$\widehat{IJH} \approx 67^\circ$$

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° donc :

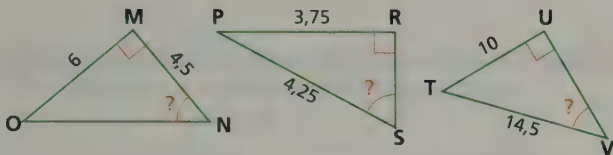
$$\widehat{IJH} \approx 180 - (90 + 67)$$

$$\widehat{IJH} \approx 23^\circ$$

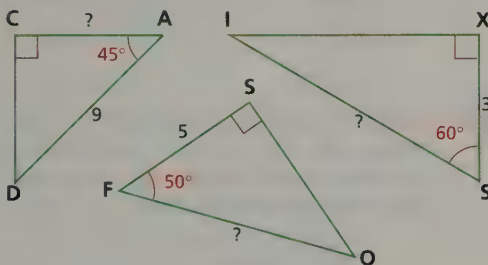
- 12** Dans chaque cas, calculer l'angle demandé au degré près (les figures ne sont pas en vraie grandeur) :



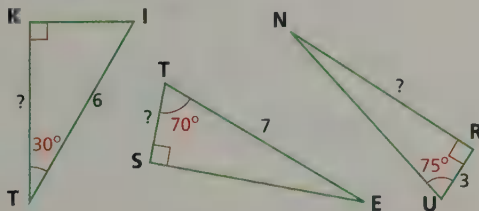
- 13** Dans chaque cas, calculer l'angle demandé au degré près (les figures ne sont pas en vraie grandeur) :



- 14** Dans chaque cas, calculer la longueur demandée au mm près (les figures ne sont pas en vraie grandeur) :



- 15** Dans chaque cas, calculer la longueur demandée au mm près (les figures ne sont pas en vraie grandeur) :



- 16** a) Tracer un triangle ZUV rectangle en Z tel que $ZU = 6$ cm et $\widehat{ZUV} = 35^\circ$.

b) Calculer UV, puis ZV au mm près.

- 17** a) Tracer un triangle ZUV rectangle en Z tel que $ZU = 6$ cm et $\widehat{VUZ} = 35^\circ$.

b) Calculer ZU, puis ZV au mm près.

- 18** Calculer les angles et les côtés des triangles MNP rectangles en M dans chacun des cas ci-dessous (arrondir les angles au degré près et les longueurs au mm près).

a) $MN = 5$ cm et $NP = 13$ cm.

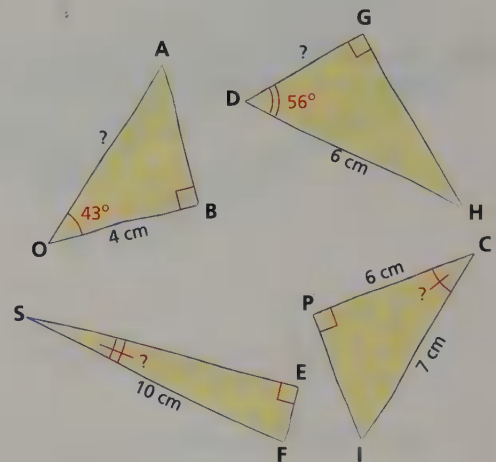
b) $MN = 4,5$ cm et $\widehat{MPN} = 40^\circ$.

- 19** Calculer les angles et les côtés des triangles IJK rectangles en K dans chacun des cas ci-dessous (arrondir les angles au degré près et les longueurs au mm près).

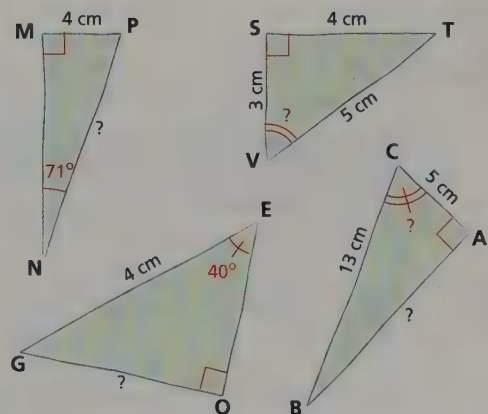
a) $KJ = 4$ cm et $IJ = 5$ cm.

b) $IK = 4$ cm et $\widehat{KIJ} = 44^\circ$.

- 20** En tenant compte des indications portées sur les figures, calculer OA, DG, ESF et PCI.

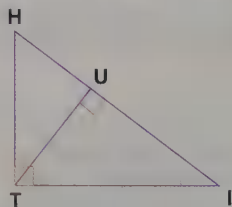


- 21** En tenant compte des indications portées sur les figures, calculer NP, SVT, GO, BA et BCA.



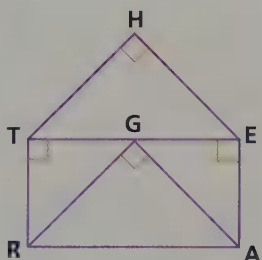
exercices

- 22** Recopier et compléter les égalités suivantes après avoir observé la figure ci-dessous :



- Dans le triangle HIT rectangle en T,
 $\cos \widehat{THI} = \frac{\dots}{\dots}$
- Dans le triangle HUT rectangle en U,
 $\cos \widehat{HTU} = \frac{\dots}{\dots}$ et $\cos \widehat{THU} = \frac{\dots}{\dots}$
- Dans le triangle ..., $\cos \widehat{ITU} = \frac{\dots}{\dots}$

- 23** Recopier et compléter les égalités suivantes après avoir observé la figure ci-dessous :



- Dans le triangle ..., $\cos \widehat{TGR} = \frac{\dots}{\dots}$
- Dans le triangle ..., $\cos \dots = \frac{RG}{RA}$
- Dans le triangle ..., $\cos \widehat{EAG} = \frac{\dots}{\dots}$
- Dans le triangle ..., $\cos \dots = \frac{HE}{ET}$

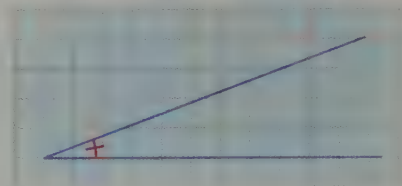
- 24** $AR = AS \times \cos \widehat{RAS}$ est une égalité que l'on peut écrire dans le triangle RAS rectangle en S.

Faire une figure à main levée, puis écrire cinq autres égalités mathématiques que l'on peut trouver dans cette figure.

- 25** Si possible, tracer un triangle ABC rectangle en A tel que :

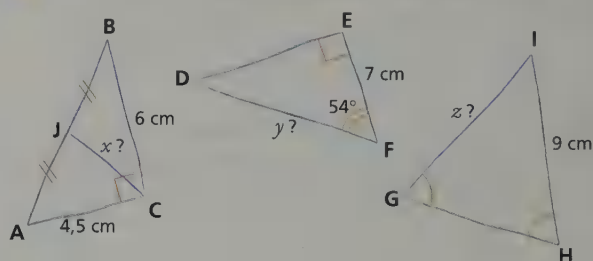
- a) $\cos \widehat{ABC} = \frac{2}{3}$ b) $\cos \widehat{ABC} = \frac{5}{6}$
c) $\cos \widehat{ABC} = 0,25$ d) $\cos \widehat{ABC} = \frac{6}{5}$

- 26** Mamoudi a oublié son rapporteur. Comment peut-il calculer un arrondi de la mesure de l'angle ci-dessous ?

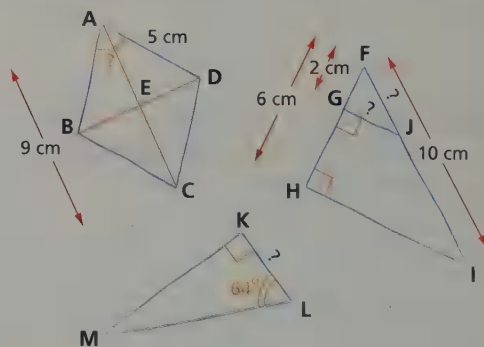


- 27** Tracer, sans rapporteur, un triangle rectangle dont un angle mesure 60° .

- 28** Calculer les mesures inconnues en tenant compte des indications portées sur les figures.

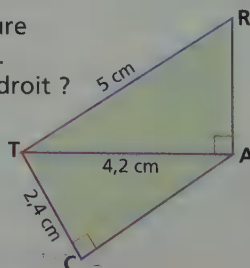


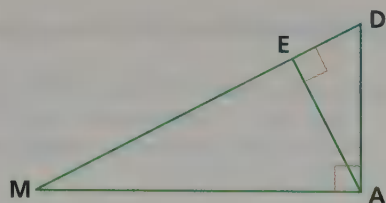
- 29** Lorsque c'est possible, calculer les mesures inconnues en tenant compte des indications portées sur les figures : les longueurs FJ, GJ et KL, les angles BAD et HJI.



PROBLÈMES

- 30** a) Reproduire la figure en vraie grandeur.
b) L'angle RTC est-il droit ? Justifier.



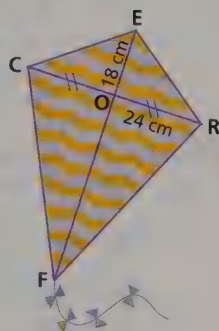


- En se plaçant dans le triangle MAD, écrire ce que vaut $\cos D$.
- Même question en se plaçant dans le triangle EDA.
- Faire une figure avec $DA = 5 \text{ cm}$ et $DM = 8 \text{ cm}$.
- En utilisant les expressions trouvées aux a) et b), calculer DE.

- 32** Calculer la longueur des baguettes [EF] et [CR] nécessaires à la fabrication de ce cerf-volant.

(Indication (pour le calcul de EF) :

- calculer ER ;
- calculer $\cos \widehat{FER}$ dans le triangle EOR ;
- calculer EF.)

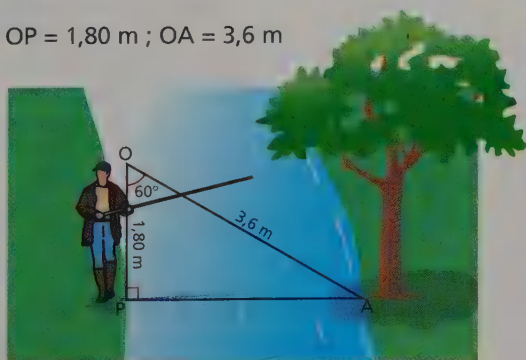


- 33** Tracer un cercle de rayon 3,5 cm et un diamètre [AC] de ce cercle. Placer un point R sur le cercle pour que $AR = 6 \text{ cm}$.

- Montrer que le triangle ACR est rectangle.
- Calculer $\widehat{CAR}$ (arrondir au degré près).
- Calculer RC (arrondir au mm près).
- Tracer la hauteur issue de R, elle coupe (AC) en E. Calculer EC.

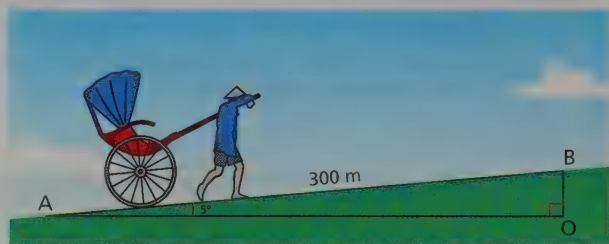
- 34** Quelle est la largeur de la rivière (au dm près) ?

$OP = 1,80 \text{ m}$; $OA = 3,6 \text{ m}$

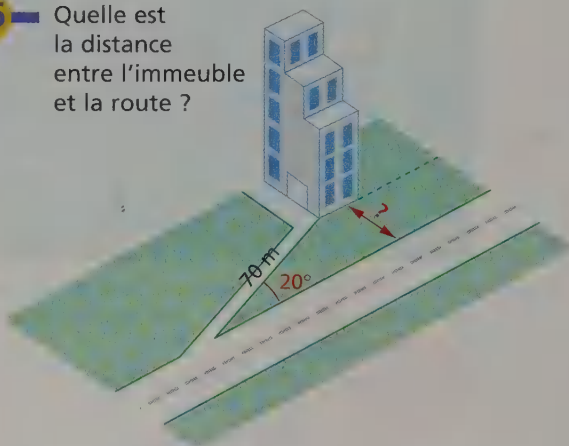


- 35** Avec son pousse-pousse, Tchang a parcouru 300 mètres dans une côte rectiligne qui fait un angle de 5° avec l'horizontale.

De combien de mètres s'est-il élevé ? (Arrondir au dm près.)



- 36** Quelle est la distance entre l'immeuble et la route ?



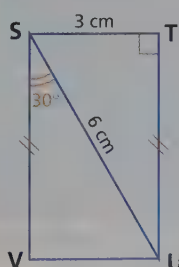
- 37** a) Construire un losange ABCD de centre O et tel que : $AB = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$.

- b) Calculer l'aire de ce losange (arrondir au mm près).

- 38** a) Construire un parallélogramme GRAM tel que : $GR = 6 \text{ cm}$, $RA = 3 \text{ cm}$ et $\widehat{GRA} = 40^\circ$.

- b) Calculer l'aire de ce parallélogramme (arrondir au mm près).

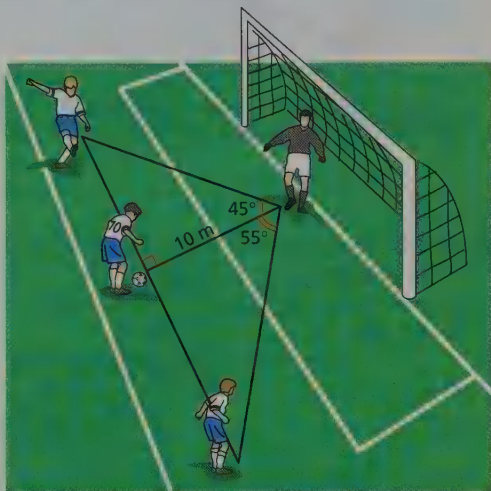
- 39** Montrer que STUV est un rectangle.



exercices

PROBLÈMES (suite)

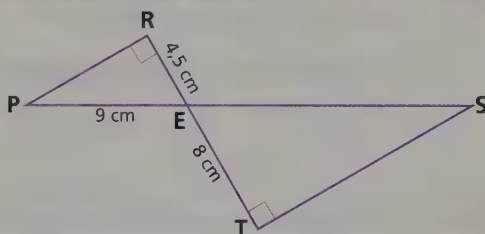
- 40** — Trois attaquants de l'équipe, Vérel, Danzi et Gueztré sont face au but adverse sur la ligne de hors-jeu (voir disposition des joueurs sur l'image arrêtée ci-dessous).



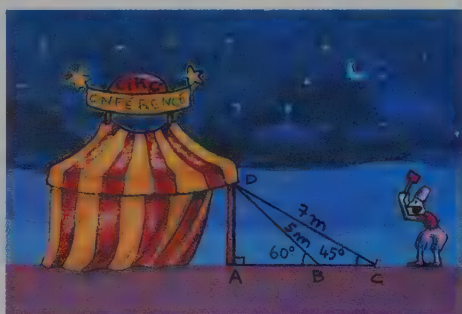
Le joueur n°10, placé face au gardien de but, souhaite passer le ballon à son coéquipier le plus près du gardien.

À quel joueur doit-il faire la passe ?

- 41** — Déterminer la longueur exacte de $[ES]$ sachant que les points R, E, T d'une part et P, E, S d'autre part sont alignés.



- 42** — Pour dresser son chapiteau, le Cirque On'Férence utilise des câbles d'acier. Voir dessin ci-dessous.



Déterminer la distance BC entre les deux fixations au sol des câbles.

- 43** — Un segment $[AB]$ a une longueur égale à 10 cm.



- a) Construire un triangle rectangle ABC où $[AB]$ est l'hypoténuse et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 20° . Calculer AC en arrondissant au dixième de cm près.

- b) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant au degré près pour les angles et à 0,1 cm près pour les longueurs.

AC en cm					1	4	5,2	7,5
$\widehat{BAC}$ en degré	20°	30°	40°	50°				

- c) Faire une représentation graphique de la variation de l'angle $\widehat{BAC}$ en fonction de la longueur AC . Prendre 1 cm en abscisse pour représenter une longueur de 1 cm et prendre 1 cm en ordonnée pour représenter 1° .

Y a-t-il proportionnalité entre la longueur AC et la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$?

- 44** — Judith a tracé deux séries de triangles OAB rectangles en A .

- Série ①

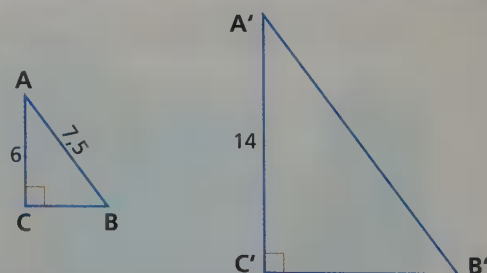
Triangle n°	①	②	③	④
OA	3	4,2	4,8	2,7
OB	5	7	8	4,5

- Série ②

Triangle n°	①	②	③	④
OA	3,5	4,2	2,9	7
OB	5	6	4	10

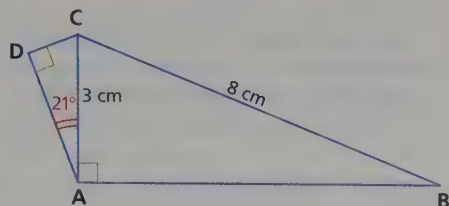
Chaque série a la même particularité, expliquer pour quelle raison, Judith s'est trompée en dessinant une des deux séries.

- 45** — Le triangle ABC est rectangle en C . On sait que $AC = 6$ cm et que $AB = 7,5$ cm. On a dessiné $A'B'C'$ un agrandissement de ce triangle ABC , de telle façon que $A'C' = 14$ cm.



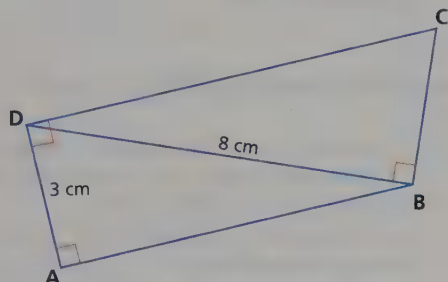
- a) Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.
b) Calculer $A'B'$.

- 46 — $CB = 8$ cm, $AC = 3$ cm, $\widehat{DAC} = 21^\circ$.



- Calculer AB à 0,1 cm près.
- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ au degré près.
- Calculer AD à 0,1 cm près.

- 47 — $ABCD$ est un trapèze, les angles $\widehat{CDA}$, $\widehat{CBD}$ et $\widehat{DAB}$ sont droits, $AD = 3$ cm et $DB = 8$ cm.



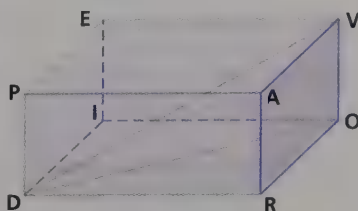
- Construire la figure aux bonnes mesures.
- Calculer AB à 0,1 cm près.
- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$ puis la mesure de l'angle $\widehat{BDC}$ à 0,01 degré près.
- Calculer DC à 0,1 cm près.
- Calculer l'aire du trapèze $ABCD$.

- 48 — ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ cm et $BC = 6$ cm.

- Construire la figure.
- Calculer AC à 0,1 cm près.
- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
- Construire le point E symétrique de B par rapport au point A . Démontrer que le triangle BEC est équilatéral.
- Construire le point F symétrique de E par rapport à la droite (BC) . Démontrer que le quadrilatère $BECF$ est un losange.

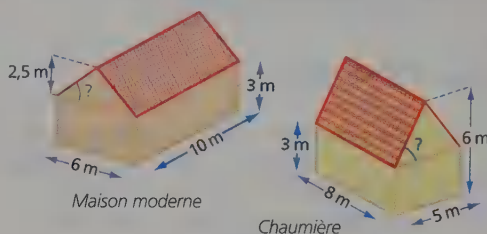
49 — Dans un pavé

$DR = 7$ cm
 $RO = 5$ cm
 $VO = 3$ cm



Calculer VD et DO à 0,01 cm près.
 Calculer la mesure de l'angle $\widehat{VDO}$ au degré près.

50 — Pente de toits



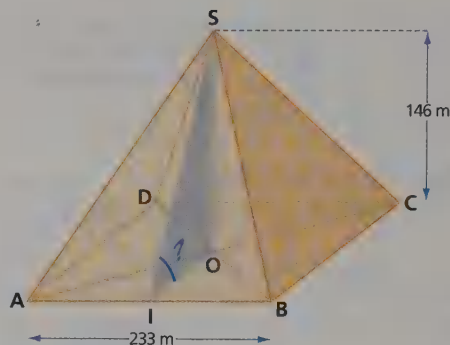
Pour que les tuiles restent en place, la pente d'un toit ne doit pas faire avec l'horizontale un angle dépassant 50° .

Les toits de ces deux maisons sont-ils aux normes?

51 — Pyramide d'Égypte



À l'origine, la pyramide de Khéops avait une hauteur de 146 m et le côté de sa base mesurait 233 m.

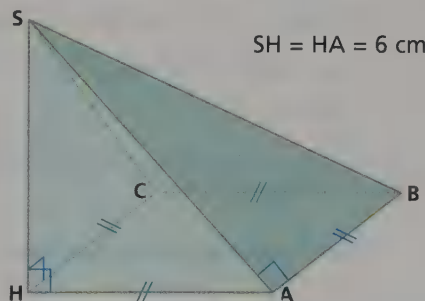


I est le milieu du côté $[AB]$ et O est le centre de la base.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SIO}$ que forme une face de la pyramide avec l'horizontale.

52 — Pyramide non régulière

Le segment $[SH]$ est vertical et le quadrilatère $HABC$ est un carré.



- Calculer la longueur des arêtes $[SA]$ et $[SB]$.
- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SBA}$.
- Représenter la face SAB en vraie grandeur.

exercices

53 — Pyramide

Une pyramide SABCD a une base ABCD carrée de côté mesurant 12 m et ses faces sont des triangles équilatéraux.

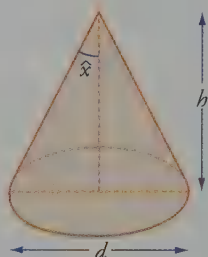
Quel est l'angle entre la base ABCD et la face SAB ?

54 — Cône

Un cône est aussi haut que large.

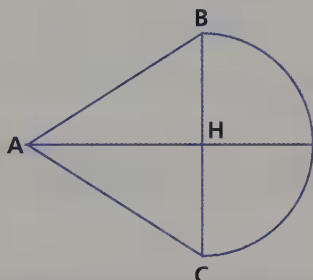
$$h = d = 5 \text{ cm.}$$

L'angle $\hat{x}$ mesure-t-il 30° , 45° , 60° ou 90° ?



55 — Rouen 1998 (série professionnelle)

On considère la figure ci-dessous :



ABC est un triangle isocèle en A. Sur le côté [BC] est construit un demi-disque de diamètre BC.

On donne $AB = 15 \text{ cm}$; $BH = 8 \text{ cm}$.

- En utilisant le théorème de Pythagore, calculer AH à 0,01 cm près.
- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABH}$ au degré près.
- En déduire les mesures des angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{BAC}$.
- Calculer le périmètre du demi-disque. (On prendra 3,14 pour valeur approchée de π .)
- Calculer l'aire du triangle ABC.

56 — Amiens 1998

Pour tout l'exercice, l'unité de longueurs est le centimètre.

Construire un triangle ABC tel que :

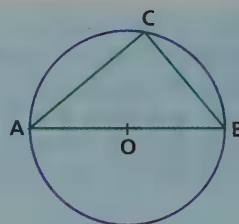
$$AB = 4,5 ; \quad BC = 6 ; \quad AC = 7,5$$

- Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
- Montrer, par un calcul, que l'arrondi au degré de la mesure de l'angle $\hat{A}$ est 53° .
- Construire le cercle de centre A et qui passe par C ; il coupe la demi-droite [AB) en un point D. Quelle est la nature du triangle ADC ? Justifier.

57 — Groupe Est 2000

Sur un cercle de centre O et de diamètre [AB] tel que $AB = 10 \text{ cm}$, on a placé un point C tel que l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 50° .

Sur le dessin ci-dessous, les dimensions ne sont pas respectées.



- Montrer que le triangle ABC est rectangle.
- Calculer les longueurs BC et AC. (On donnera les valeurs arrondies au millimètre.)

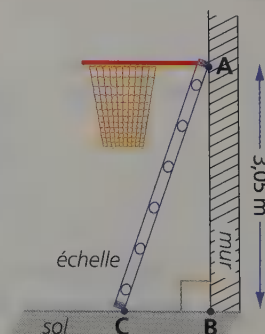
58 — Rennes 1999

- Paul veut installer chez lui un panier de basket. Il doit le fixer à 3,05 m du sol. L'échelle dont il se sert mesure 3,20 m de long.

À quelle distance du pied du mur doit-il placer l'échelle pour que son sommet soit juste au niveau du panier ?

(Donner une valeur approchée au cm près.)

- Calculer l'angle formé par l'échelle et le sol. (Donner une valeur approchée au degré près.)

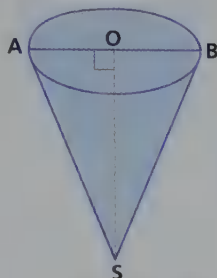


59 — Bordeaux 1998

L'unité de longueur est le centimètre.

Un réservoir d'eau a la forme d'un cône de révolution de sommet S , et de base le disque de centre O et de diamètre $[AB]$.

$AB = 5$ et $SA = 6,5$.



- Calculer la valeur, arrondie au degré, de la mesure de l'angle $\widehat{OAS}$.
- Démontrer que $SO = 6$.
- Donner la valeur approchée au millièmè près du volume de ce réservoir.

- 60** — Construire un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ avec $AB = 6$ cm. Placer sur ce cercle un point C tel que $BC = 3,6$ cm.

- Quelle est la nature du triangle ACB ? Justifier.
Démontrer que la longueur AC est égale à 4,8 cm.
- Déterminer par le calcul la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$. (On arrondira à l'unité.)
- Soit E le milieu du segment $[OB]$. Tracer la parallèle à (BC) passant par E ; elle coupe le segment $[AC]$ en F . Calculer les longueurs exactes des segments $[AF]$ et $[FE]$.

- 61** — Construire le cercle $\mathcal{C}$ de centre U et de rayon 4 cm. Tracer un diamètre $[AB]$ de ce cercle. Construire le symétrique du point U par rapport au point A , puis le cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[US]$. Le cercle $\mathcal{C}'$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points T et T' .

- Démontrer que le triangle SUT est rectangle en T .
Que représente la droite (ST) pour le cercle $\mathcal{C}$? Justifier.
- Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{SUT}$.
- La droite passant par B et parallèle à la droite (UT) coupe la droite (ST) en P .
 - Construire la droite (BP) .
 - Calculer BP .

- 62** — Cet exercice est à réaliser avec un logiciel de constructions géométriques et un tableur ou une calculatrice. Les figures sont ici réalisées avec GéoplanW®.

a) Constructions

Placer un point O .

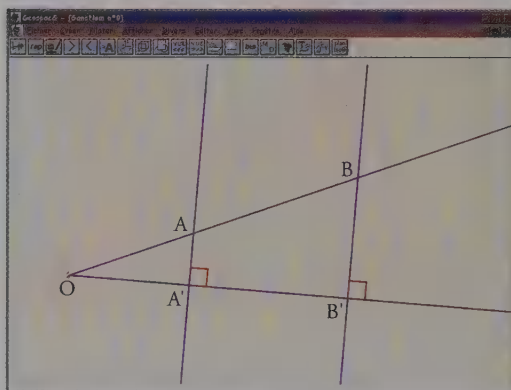
Tracer deux demi-droites issues du point O .

Sur la première, placer un point A .

Tracer la perpendiculaire passant par A à la deuxième demi-droite. Elles se coupent en A' .

Sur la première, placer un point B .

Tracer la perpendiculaire passant par B à la deuxième demi-droite. Elles se coupent en B' .



b) Mesures

Avec l'aide des commandes appropriées, mesurer OA , OA' , OB et OB' .

Déplacer les points A et B sur la première demi-droite et noter les nouvelles valeurs des mesures.

c) Observation et calculs

- Utiliser un tableur pour compléter le tableau ci-dessous.

OA	OA'	$\frac{OA'}{OA}$

- La relation liant OA' et OA est-elle une relation de proportionnalité ?

d) Variations

Faire varier l'angle entre les deux demi-droites.

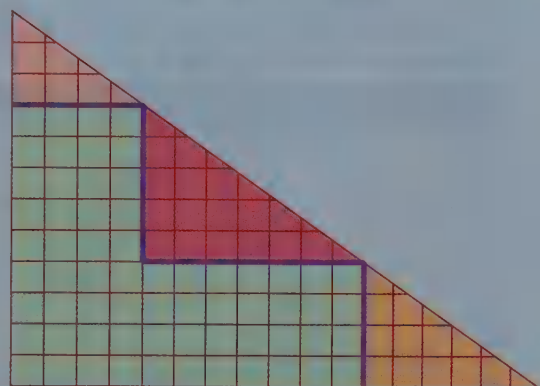
Refaire les mêmes constructions et mesures.

A-t-on le même résultat que la question précédente ?

Qu'est-ce qui change ? Qu'est-ce qui ne change pas ?

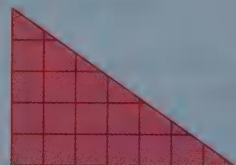
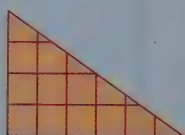
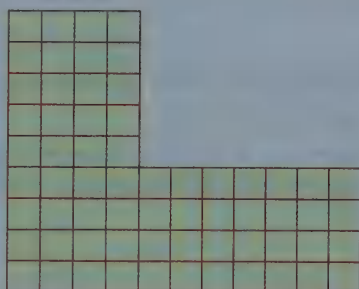
Certaines propriétés mathématiques peuvent être démontrées en utilisant des découpages astucieux, par exemple ceux évoqués au chapitre 5 pour le théorème de Pythagore. Ces découpages doivent être rigoureux sinon la preuve n'est pas valide. Voici deux exemples qui pourraient sembler magiques....mais qui sont explicables ! !

■ ÊTRE OU NE PAS ÊTRE UN TRIANGLE RECTANGLE

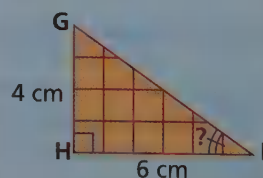
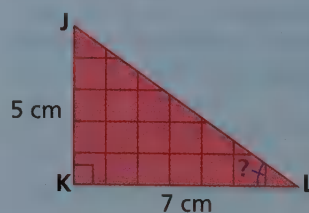
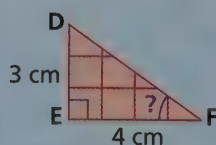
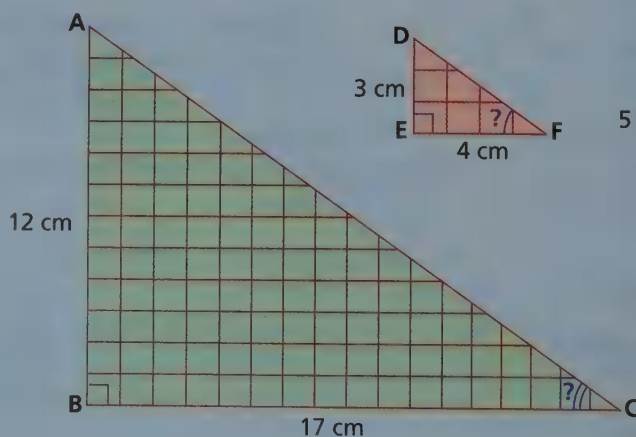


Cette figure semble être un triangle rectangle. Les calculs suivants vont permettre de s'en assurer.

- a) Calculer l'aire des éléments constituant la figure complète. Les carrés du quadrillage ont 1 cm de côté.



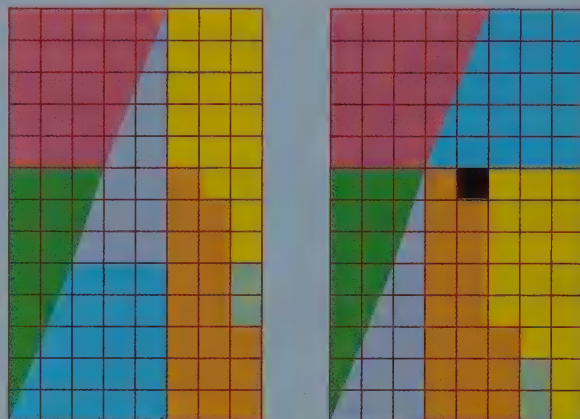
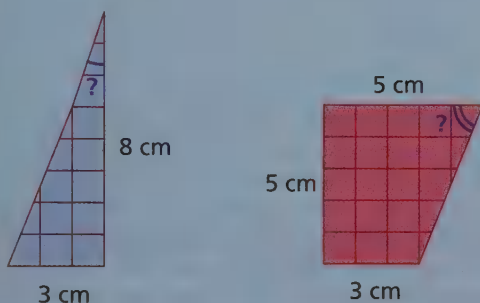
- b) Calculer l'aire totale de la figure. Comparer ce résultat avec l'aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 12 cm et 17 cm. La figure proposée est-elle un triangle rectangle ?
- c) Calculer la mesure à 0,01 cm près de la longueur des hypoténuses des quatre triangles rectangles suivants. En déduire la mesure des angles à 0,1 degré près. Expliquer pourquoi la figure n'est pas un triangle rectangle.



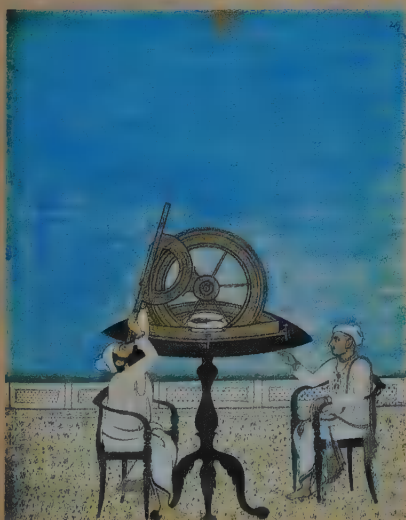
■ À LA RECHERCHE DU CARRÉ PERDU

Un rectangle de 8 cm sur 13 cm est recouvert par sept pièces de deux façons différentes.

Entre le premier et le deuxième assemblage, un petit carré a disparu. Pour obtenir l'explication de cette « disparition », calculer la mesure des angles indiqués sur les figures suivantes (les carrés du quadrillage ont pour côté 1 cm).



À travers L'Histoire



Astronomes indiens observant le ciel à l'aide d'un théodolite.

La trigonométrie est une partie des mathématiques qui étudie les relations entre les mesures des côtés et des angles dans un triangle. C'est une science très ancienne qui remonte aux Babyloniens et qui répond aux besoins de l'astronomie. Comme les trajectoires des planètes étaient assimilées à des cercles, les calculs figurant sur les tables de données astronomiques ont été établis à partir des longueurs de cordes qui sous-tendent des arcs dans des cercles. L'Inde est le pays d'origine des calculs de cordes particulières et de mesures qui préfigurent le cosinus.

Au cours de l'histoire, de nombreux instruments de calculs ou d'observation ont été inventés, en particulier des astrolabes, et des monuments ont été construits, comme l'observatoire du calife Al-Ma'mûn à Bagdad vers l'an 820. Les astrolabes permettent tous les calculs de relations entre position des étoiles et du temps. C'est important en navigation pour calculer sa position (en latitude et en longitude), et, dans le monde musulman, pour déterminer l'heure du début du jour, les heures des prières et l'apparition du premier croissant lunaire pour connaître le début du mois de l'Hégire.

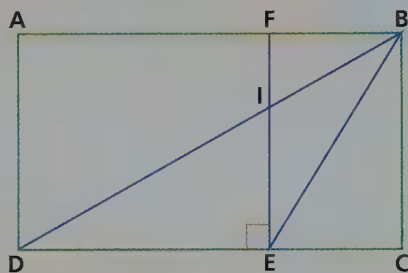
ce que je dois savoir sur...

...Le cosinus d'un angle aigu

- ▶ Déterminer le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- ▶ Déterminer des valeurs approchées du cosinus d'un angle aigu à l'aide d'une calculatrice.
- ▶ Déterminer des valeurs approchées d'un angle aigu dont on connaît le cosinus à l'aide d'une calculatrice.
- ▶ Calculer la longueur du côté adjacent à un angle aigu ou de l'hypoténuse dans un triangle rectangle connaissant la mesure de l'angle.

je m'évalue

- 1 ABCD est un rectangle. Recopier et compléter les égalités se rapportant à la figure ci-dessous :



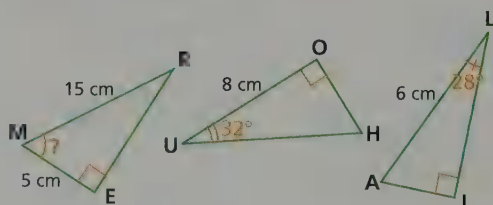
$$\frac{BF}{IB} = \cos \dots ; \quad \cos \widehat{EDI} = \dots$$

$$\cos \widehat{CBD} = \dots ; \quad \cos \widehat{FEB} = \dots$$

- 2 Avec une calculatrice scientifique, donner un arrondi à 10^{-3} près des valeurs des cosinus suivants :

$$\cos 42^\circ \approx \dots ; \quad \cos 67^\circ \approx \dots ; \quad \cos 9^\circ \approx \dots$$

- 3 Donner les arrondis des mesures d'angle ou de longueur à 1° près ou à 0,1 cm près dans chacun des triangles ci-dessous. Les figures ne respectent pas les mesures.



- Calculer la mesure de $\widehat{EMR}$.
- Calculer UH.
- Calculer LI.

- 4 Avec une calculatrice scientifique, donner un arrondi à $0,1^\circ$ près, puis à 1° près, des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$:

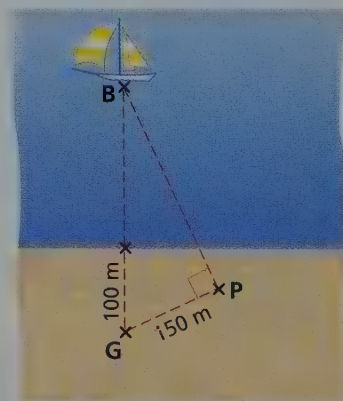
$$\cos \widehat{A} = 0,521$$

$$\cos \widehat{B} = 0,19$$

- 5 Monsieur Géométrix est à la plage, il regarde un bateau en ligne droite et sa petite fille Pia qui est située à 150 mètres de lui. Il est à 100 mètres du bord de l'eau. Si on traçait des droites entre Géométrix et le bateau et entre le bateau et Pia, elles feraient un angle de 70° . Si on traçait des droites entre Pia et le bateau et entre Géométrix et Pia, elles seraient perpendiculaires.

Pourtant en vacances, il ne peut pas s'empêcher de faire des calculs et cherche la distance entre le bord de mer et le bateau.

Quelle valeur au dm près va-t-il trouver ?



Les solutions se trouvent à partir de la page 279.

NOMBRES RELATIFS

En 6^{ème}-5^{ème}

- ▶ Dans le plan repéré, lire les coordonnées d'un point donné, placer un point de coordonnées données.
- ▶ Effectuer somme et différence de nombres relatifs.

En 4^{ème}

- Calculer le produit de nombres relatifs simples dans les différents cas de signe qui peuvent se présenter.
- Sur des expressions numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs. Organiser et effectuer à la main ou à la calculatrice les séquences de calcul correspondantes.

pour démarrer



1 Nombres croisés

• Revoir sous forme ludique les opérations de base.

• La mise en commun permet de réactiver les priorités des calculs.

• On pourra donner la convention $5^2 = 5 \times 5$.

Écrire dans le tableau les résultats correspondants à chaque expression.

	E	F	G	H
A				
B				
C				
D				

Horizontalement :

$$A = 40 \times 65 + 65 \times 10,2$$

$$B = 3 \times (399 \times 7)$$

$$C = 3000 - 894 + 20$$

$$D = 58 + 150 \times \frac{252}{7}$$

Verticalement :

$$E = (21 - 4) \times 15^2$$

$$F = 11,57 : 0,01 \times 2$$

$$G = 269 : 2 \times (1 + 7 \times 7)$$

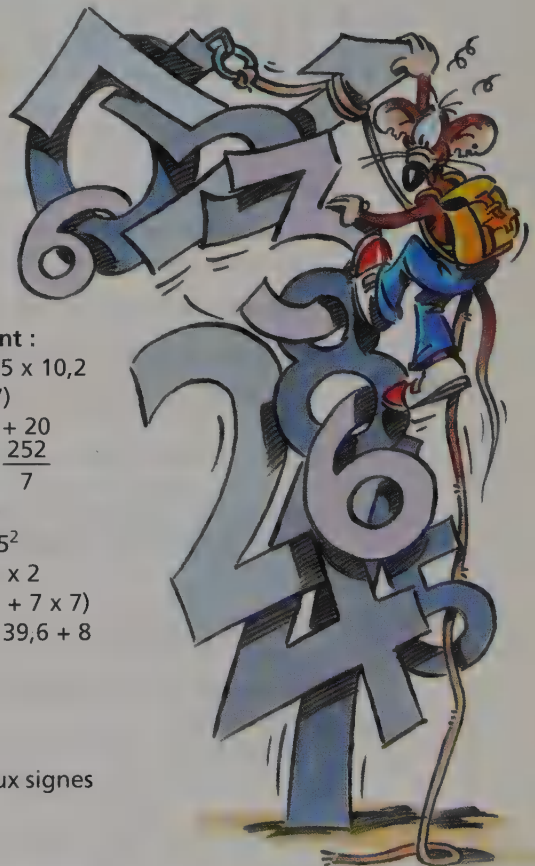
$$H = (47 + 53) \times 39,6 + 8$$

2 Des signes encadrés

Voici une expression comportant trois nombres et deux signes opératoires qui seront à placer dans les cadres.

1 4 2

Trouver tous les résultats différents qu'on peut obtenir en complétant les cadres par les signes opératoires : +, -, x et :



Activités

3 — Je me rappelle



1) Additions

a) Rappeler la règle d'addition de deux nombres relatifs.

b) Effectuer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{ll} (-5) + (+12) ; & (+5) + (+12) \\ (-12) + (-5) ; & (-12) + (+5) \end{array}$$

3) Soustractions

a) Rappeler la règle de soustraction de deux nombres relatifs.

b) Effectuer les soustractions suivantes :

$$\begin{array}{ll} -8,5) - (+7,5) ; & 5,3 - (-4,7) \\ (-9) - (-6,1) ; & (+5,3) - (-4) \\ (+6) - (+10,2) ; & -7,8 - 13,4 \end{array}$$

2) Opposés

a) Qu'est-ce que l'opposé d'un nombre ?

b) Donner l'opposé des nombres suivants :

$$2 ; (-3) ; 0 ; -2,3$$

Notation

L'opposé d'un nombre x se note $\text{opp } x$.

4) D'autres écritures

a) Recopier et compléter la première colonne du tableau.

b) Sur le modèle des deux premières lignes du tableau, écrire les expressions de la première colonne avec le moins de signe possible. Effectuer les calculs.

$(-6,2) - (-7) = -6,2 + 7 = 0,8$	$-6,2 - (-7) = -6,2 + 7 = 0,8$
$(+8,3) + (-9,7) = -1,4$	$8,3 - 9,7 = -1,4$
$(+3) - (-2) =$	
$(-3) - (+5,1) =$	
$(+5,4) + (-3) =$	
$(-5,4) - (-6,1) =$	
$(-7) + (+3) =$	

• Revoir la règle des signes pour l'addition.

• Revoir la règle de soustraction.

• Commencer à simplifier les signes en distinguant signe opératoire et signe du nombre.

• Approche par additions successives du produit de deux nombres, deux positifs, un positif et un négatif.

• Insister sur la notion de propriété admise, quelques exemples ne suffisent pas pour prouver.

• Application de la propriété.

• Produit de deux nombres négatifs :
- le modèle concret ne donne plus satisfaction.
- différentes approches du produit pouvant permettre de donner des idées correctes sur la notion de nombre.
- prolongement de la table de multiplication.

4 — De longues additions

On donne les expressions suivantes :

$$A = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$$

$$B = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$$

$$C = (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6)$$

$$D = (-11) + (-11) + (-11) + (-11) + (-11) + (-11) + (-11) + (-11)$$

1) Calculer A, B, C et D.

2) On peut écrire $A = 8 \times 5 = 40$.

De la même manière, écrire les expressions B, C et D sous forme de produits. Donner les résultats à l'aide de la question 1).

Compléter la règle suivante (admise) :

Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est un nombre

3) Calculer les expressions suivantes :

$$E = 5 \times (-8) ; F = 3 \times (-14) ; G = (-5) \times 12 ; H = (-9) \times 7 ; I = (-1) \times 15$$

$$J = -2,8 \times 3 ; K = 7,1 \times (-5) ; L = (-13,4) \times 2,1 ; M = 5,7 \times (-9,2) ; N = 13,75 \times (-1)$$

5 — Diverses approches

1) On a établi une partie d'une table de multiplication. Expliquer son mode de construction.

$$(-3) \times 4 = -12$$

$$(-3) \times 3 = -9$$

$$(-3) \times 2 = -6$$

$$(-3) \times 1 = -3$$

$$(-3) \times 0 = 0$$

$$(-3) \times (-1) = 3$$

$$(-3) \times (-2) = 6$$

$$(-3) \times (-3) = 9$$

$$(-3) \times (-4) = 12$$

• Équation à résoudre
comme une égalité
à vérifier.

• La mise en commun
peut permettre de
dégager des propriétés
de la multiplication.

• Mise en évidence de
la règle des signes et
application.

2) À la recherche de nombres

a) Quel nombre multiplié par (-3) donne 18 ?

b) Existe-t-il un nombre remplaçant la case $\square$ tel que $(-1,5) \times \square = 9$?

3) Sachant que le quotient $\frac{a}{b}$ est le nombre n tel que $a = b \times n$,
trouver un nombre a tel que $\frac{a}{-4} = 17$.

4) Sachant que $\text{opp } (+4) = -4 = (-1) \times 4$, expliquer les étapes du calcul ci-dessous.

$$-4 \times (-13) = [(-1) \times 4] \times (-13) = (-1) \times [4 \times (-13)] = (-1) \times (-52) \\ = \text{opp } (-52) = 52$$

5) On sait que $4 \times 3 = 12$;

$$4 \times (-3) = (-12) ; (-4) \times 3 = (-12).$$

À votre avis, que vaut $(-4) \times (-3)$? Vérifier avec la calculatrice.

Compléter la règle suivante (admise) :

Le produit de deux nombres relatifs négatifs est un nombre

6) Effectuer les calculs suivants sans calculatrice :

$$(-7) \times (-3) ; (-5) \times (-9) ; (-4) \times (-8) ; (-1) \times (-14) ; 0 \times (-10)$$

6 — Toute une technique



1) Trouver une technique, sans calculatrice, permettant de trouver rapidement le signe des résultats des expressions suivantes :

$$G = (-2,7) \times (-2,7)$$

$$H = (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7)$$

$$I = (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7)$$

$$J = (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7)$$

$$K = (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7) \times (-2,7)$$

Écrire une phrase expliquant cette technique.

2) Calculer les expressions G, H, I, J et K.

3) Donner le signe des expressions suivantes :

$$L = (-5) \times (-1) \times (+6) \times (-1) \times (-2) \times (+12) \times (+4)$$

$$M = \underbrace{(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times \dots \times (-2)}_{2001 \text{ facteurs égaux à } (-2)}$$

2001 facteurs égaux à (-2)

7 — Attention priorités !

1) Indiquer la bonne réponse en effectuant les calculs sans calculatrice.

	Réponse A	Réponse B
$(50 - 72) - (27 - 49)$	-98	0
$-5 + (-5) \times 3$	-30	-20
$3 - 6 \times (-1)$	3	9
$-12 + (-10) : (-2)$	-7	11
$8 \times (-4) - (-6) : 2$	-29	-13

2) Retrouver les réponses en utilisant la calculatrice.

3) Calculer les expressions suivantes en précisant chacune des étapes :

$$N = (-8) + 5 \times (-3) ;$$

$$P = (-3 - 8) \times 7 + 4$$

$$R = 7 - 2 \times (4 - 9) ;$$

$$S = -32 - (4 - 20) \times 2$$

$$T = 33 : 11 - 10 \times (-2) ;$$

$$U = 4 + (-7) \times (-3) + 2 \times (-10)$$

L'essentiel en deux pages

1 – Addition de deux nombres relatifs

Si les deux nombres ont le même signe, on ajoute les distances à zéro et le résultat est de même signe.

$$(+5) + (+1,3) = (+6,3) ; \quad (-5) + (-1,3) = (-6,3)$$

Si les deux nombres ont des signes contraires, on soustrait les distances à zéro et le résultat est du même signe que celui qui a la plus grande distance à zéro.

$$(+7,6) + (-9,1) = (-1,5) ; \quad (-2,3) + (+5,4) = (+3,1)$$

2 – Soustraction de deux nombres relatifs

Soustraire un nombre relatif, c'est ajouter l'opposé de ce nombre.

$$\begin{aligned} -1,3 - 2,9 &= -1,3 + (-2,9) ; & 1,7 - (-7) &= 1,7 + 7 \\ &= -4,2 & &= 8,7 \end{aligned}$$

3 – Multiplication de deux nombres relatifs

On multiplie les distances à zéro et on détermine le signe de la manière suivante :

- Le produit de deux nombres relatifs de même signe est un nombre positif.
- Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est un nombre négatif.

$$\begin{aligned} (-2) \times (-7) &= 14 ; & (-2) \times (+7,3) &= (-14,6) \\ (+0,3) \times (+5) &= 1,5 ; & (+3,2) \times (-5,7) &= (-18,24) \end{aligned}$$

4 – Multiplication de plusieurs nombres relatifs

- Si le nombre de facteurs négatifs est pair, alors le produit est un nombre positif.
- Si le nombre de facteurs négatifs est impair, alors le produit est un nombre négatif.

$$\underbrace{(+4) \times (-3) \times (-7) \times (+5)} = +420$$

Il y a deux facteurs négatifs. Comme 2 est pair, le produit est positif.

$$\underbrace{(-2) \times (-2) \times (-1) \times (-1) \times (-1)} = (-4)$$

Il y a cinq facteurs négatifs. Comme 5 est impair, le produit est négatif.

5 — Division de deux nombres relatifs

On divise les distances à zéro et on applique la règle de signes de la multiplication.

$$36 : (-4) = \frac{36}{-4} = -9 ;$$

$$(-42) : (-7) = \frac{-42}{-7} = 6$$

6 — Priorités des calculs

En l'absence de parenthèses, il faut effectuer les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions.

$$A = 13 + (-7) \times (-2)$$

$$A = 13 + 14$$

$$A = 27$$

$$B = -20 - 12 : (+4)$$

$$B = -20 - 3$$

$$B = -23$$

En présence de parenthèses, il faut effectuer les calculs entre parenthèses en premier.

$$C = (-8 + 5) \times (-2) + 9$$

$$C = (-3) \times (-2) + 9$$

$$C = 6 + 9$$

$$C = 15$$





CONVENTIONS D'ÉCRITURE

Les lettres c'est pratique !

En mathématiques, on utilise souvent des lettres : en géométrie pour des points, en calcul pour remplacer des nombres et pour généraliser des propriétés.

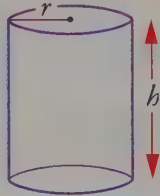
Des formules

Le volume d'un cylindre est donné par la formule :

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

$$V = \pi \times r \times r \times h$$

r est le rayon du disque de base
 h est la hauteur



Des propriétés

k , a et b désignent des nombres quelconques, les égalités suivantes sont toujours vraies :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Mais il faut respecter quelques conventions

a) On peut supprimer le signe de multiplication $\times$ entre :

- un nombre et une lettre : $(-7) \times a = -7a$
- deux lettres : $b \times c = bc$
- un nombre et une parenthèse : $5 \times (8 + a) = 5(8 + a)$
- une lettre et une parenthèse : $k \times (a + b) = k(a + b)$
- deux parenthèses : $(5 - c) \times (d + a) = (5 - c)(d + a)$

b) On garde le signe de multiplication $\times$ entre deux nombres :

$$98 \times 27 ; \quad -1,3 \times 56 ; \quad 8 \times (-9) ; \quad -2,3 \times (-2,76)$$

c) On garde les parenthèses entre deux symboles :

$$8 \times (-9) ; \quad -7,2 \times (-9,21) ; \quad (-52) \times (-23) ; \quad (-36) \times (-2,37)$$

Des preuves

« Quel que soit un nombre relatif choisi, si ce nombre est inférieur à 4 alors son carré est inférieur à 16 ».

Éva a écrit :

C'est vrai car quand on multiplie deux nombres négatifs on trouve un résultat positif.

Exemple : $(-3) \times (-3) = 9$
et $(-1,2) \times (-1,2) = 1,44$.
Les nombres 9 et 1,44 sont positifs et inférieurs à 16.

Tommy a écrit :

C'est faux car un nombre peut être négatif ou positif.
Exemple : $(-5,2) \times (-5,2) = 27,04$

Il existe d'autres nombres inférieurs à 4, des négatifs qui ont comme carrés des nombres plus grands que 16.

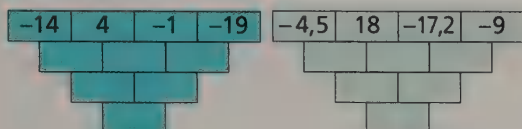
La réponse n'est pas satisfaisante car un ou plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver qu'une propriété est vraie. Il faudrait la vérifier pour tous les nombres.

La réponse est satisfaisante car un seul exemple suffit pour prouver qu'une propriété est fausse.

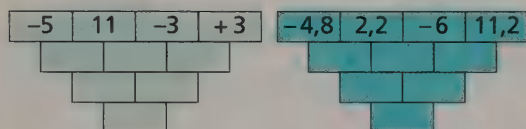
exercices

ADDITION ET SOUSTRACTION

- 1 Compléter les cases pour que chaque nombre soit la somme des deux nombres situés au dessus de lui.



- 2 Compléter les cases pour que chaque nombre soit la somme des deux nombres situés au dessus de lui.



- 3 Calculer :

$$\begin{aligned} a &= (-6) + (-9) ; & d &= (+6) - (+9) \\ b &= (-6) + (+9) ; & e &= (+6) + (-9) \\ c &= (-6) - (-9) ; & f &= (+6) - (-9) \end{aligned}$$

- 4 Calculer :

$$\begin{aligned} a) & (-10) + 13 ; & & (-2) + (-5) \\ b) & 7 + (-15) ; & & 8 + (-11) \\ c) & 3 - (-4) ; & & (-13) - 20 \\ d) & 10 - 15 ; & & (-40) - (-20) \end{aligned}$$

- 5 Calculer :

$$\begin{aligned} a) & (-10) + 5 - 4 ; & & -3 + (-15) - (+8) \\ b) & -7 + (-19) - (-33) ; & & 9 - 3 + 12 - 5 \end{aligned}$$

- 6 Calculer :

$$\begin{aligned} a) & (3,5 - 7,5) - (-8 + 2) ; & & (-4,3) + (-9,6) - (-7,2) \\ b) & (-7 + 2) - (-3 - 5) ; & & 3,8 - (-3,8 + 16) \end{aligned}$$

- 7 Calculer (astucieusement) :

$$\begin{aligned} a) & -5,3 + 7,8 - 1,7 + 2,2 - 5 \\ b) & 7,6 - 3,25 + 5,5 - 0,25 + 1,4 \end{aligned}$$

MULTIPLICATION ET DIVISION

- 8 Effectuer les calculs suivants :

$$\begin{aligned} a) & 3 \times (-7) ; & f) & (-4) \times (-12) \\ b) & (-5) \times (-8) ; & g) & 100 \times (-13) \\ c) & (-9) \times (+2) ; & h) & (-5) \times 14 \\ d) & (+11) \times (-11) ; & i) & (-7) \times (-7) \\ e) & (-8) \times 6 ; & j) & (-4) \times (+9) \end{aligned}$$

- 9 Recopier et compléter le tableau :

x	-2	0	+5	+10
-10				
-5				
-1				
+1				

- 10 Calculer :

$$\begin{aligned} a) & (-3) \times (+5) ; & & (-3,5) \times (-2) ; & & 0,5 \times (-4) \\ b) & 10 \times (-5) ; & & 0 \times (-400) ; & & (-1) \times (-20) \\ c) & 3,2 \times (-4) ; & & (-7) \times (-0,3) ; & & (-1,5) \times (+3) \end{aligned}$$

- 11 Calculer :

$$\begin{aligned} a) & 3,6 \times (-100) ; & & (-5,01) \times 4 ; & & (-2,5) \times (-8) \\ b) & 12 \times (-0,01) ; & & (-50) \times (-0,2) ; & & (-9,439) \times 0 \\ c) & 0,1 \times (-124) ; & & (-1\,000) \times (-0,37) ; & & (-4) \times 0,9 \end{aligned}$$

- 12 a) Dans un repère du plan, placer les points S, A, R, D, I, N et E dont les coordonnées sont indiquées dans le tableau, puis relier les points dans cet ordre en terminant par le segment [ES].

S	A	R	D	I	N	E
(2 ; -0,5)	(1,5 ; -0,5)	(1 ; 0)	(1 ; 1)	(0,5 ; 0,5)	(1,5 ; 0,5)	(2 ; 0)

- b) On obtient les coordonnées des points S', A', R', D', I', N' et E' en multipliant celles des points S, A, R, D, I, N et E par (-4). Recopier et compléter le tableau suivant, puis placer ces sept nouveaux points dans le même repère qu'au a) et les relier :

S'	A'	R'	D'	I'	N'	E'

(D'après IREM - Poitiers.)

exercices

MULTIPLICATIONS ET DIVISIONS (suite)

- 13 a) Donner le signe des produits ci-dessous.

$$A = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$

$$B = 5 \times (-8) \times (-1) \times (+2) \times (-1)$$

$$C = -3 \times 3 \times (-3)$$

$$D = (-2) \times 5 \times (-5) \times 2 \times (-2)$$

$$E = 10 \times (-10) \times (-3) \times 10 \times (-10) \times (-1)$$

- b) Calculer A, B, C, D, E.

- 14 Calculer astucieusement :

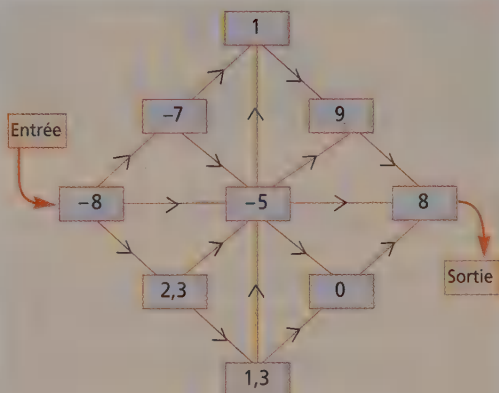
a) $(-2) \times 3 \times 2,5 \times (-8) \times (-2)$

b) $(-5) \times (-1,2) \times (-0,25) \times (-3) \times (-4)$

c) $(-2,5) \times 7 \times (-8) \times (-4) \times (-1,25)$

d) $(-1,25) \times (-3,48) \times 5 \times 0 \times (-4)$

- 15 Sur chaque parcours, on multiplie les nombres que l'on rencontre :



Trouver quatre parcours dont les résultats sont positifs, deux parcours dont les résultats sont négatifs et des parcours dont les résultats sont nuls.

- 16 Les valeurs numériques ont été effacées. Déterminer, si possible, le signe du résultat.

a) $(-?) + (-?)$ d) $(-?) + (+?)$

b) $(-?) \times (+?)$ e) $(-?) \times (-?)$

c) $(+?) - (-?)$ f) $(-?) - (-?)$

- 17 Les valeurs numériques ont été effacées. Déterminer, si possible, le signe du résultat.

a) $(+?) \times (-?) + (-?)$ c) $(-?) \times (-?) + (-?)$

b) $[(+?) - (-?)]: (-?)$ d) $(-?) - (-?) \times (-?)$

18 VRAI ou FAUX

a) Pour tout nombre relatif x , $-2x$ est toujours négatif.

b) Pour tout nombre relatif x , l'opposé de x est négatif.

c) Pour tout nombre relatif x , le produit $x \times x$ est du signe de x .

d) Pour tout nombre relatif x , le produit $x \times x \times x$ est du signe de x .

- 19 Effectuer les divisions suivantes :

a) $100 : (-5)$

f) $60 : (-5)$

b) $(-5) : (-5)$

g) $120 : (+12)$

c) $(-32) : 8$

h) $-16 : 8$

d) $81 : (-9)$

i) $63 : (-9)$

e) $(-56) : (-7)$

j) $(-64) : (-8)$

- 20 Recopier et compléter le tableau suivant :

a	b	$a \times b$	$a : b$
-6	2		
10	-5		

- 21 Recopier et compléter le tableau suivant :

a	b	$a \times b$	$a : b$
-10	-20		
12	-4		

- 22 Compléter, si possible, les cases vides par le nombre ou le signe opératoire qui convient :

a) $(-3) \times \square = (-9)$

b) $(-11) \square (-2) = (-13)$

c) $9 \square (-3) = -3$

d) $(-2) \square (-2) = (-4)$

e) $\square : (-5) = 2$

f) $(-4) \square (-2) = (-2)$

- 23 Recopier et compléter le tableau suivant :

-1		10		-8		-3
	12		-40		-8	

$\times (-4)$

24 Recopier et compléter le tableau suivant :

-49		70		-21		-56
	-3		4		-7	

: 7

25 Recopier et compléter le tableau suivant :

12	-12			5		
		12	-12		30	-48

 $\times (-6)$

26 Chaque nombre inscrit dans une case est le produit des deux nombres inscrits dans les deux cases du dessous, compléter :

a)

		-15
2	-3	

b)

12	6	
	-6	

c)

		-54
	-6	
-2		

d)

		-48
6		
		-4

27 Placer dans les cases vides les nombres relatifs permettant d'obtenir (-40) en multipliant les trois nombres situés sur une même ligne horizontale ou verticale.

-1		
-4	-5	
		-1

	1	
	-8	-5
		-2

2	1	
-4	-5	

28 Recopier et compléter par le chiffre ou le signe manquant :

a) $(-15) \times (\square) 4 = -60$

b) $(-2) \times (-1) \times (\square) 2 = (-\square)$

c) $3 \times (-\square) \times (-\square) = (\square) 27$

d) $(-4) \times (\square \square) \times (-1) = -4$

e) $-3 \times (\square) 100 \times (\square) 2 = 600$

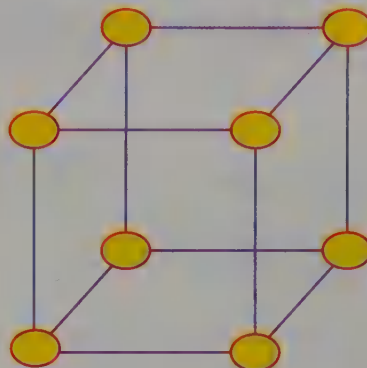
f) $(-\square) \times 7 \times (-\square) = \square 42$

Il y a deux solutions pour les signes du e) et deux solutions pour les valeurs numériques du f).

29 Cube magique



Placer les nombres $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ dans les boules jaunes pour que le produit des nombres de chaque face du cube soit le même.



30 Carrés magiques



On dit qu'un carré est magique si les produits de ses lignes, colonnes et diagonales sont égaux.

a) Vérifier que le carré suivant est magique :

3	2,5	4
1,6	-6	3,75
6,25	2,4	2

b) Compléter les cases vides pour que les carrés suivants soient magiques :

1

	2	
	-5	
-1	12,5	

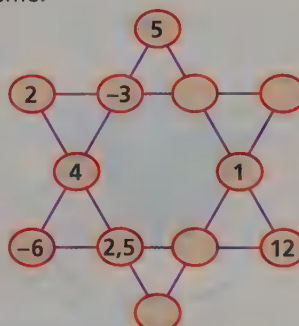
2

-12	1	-18
-2		

31 Étoile magique



Compléter l'étoile de telle façon que, sur chaque alignement, le produit des nombres soit le même.



AVEC UNE CALCULATRICE



Méthode

Effectuer un produit avec une calculatrice

Selon le modèle de calculatrice, le produit $6,56 \times (-7,2)$ se calcule en tapant les séquences suivantes :

1^{ÈRE} MÉTHODE

6 . 5 6 x 7 . 2 +/- =

2^E MÉTHODE

6 . 5 6 x (-) 7 . 2 =

3^E MÉTHODE

6 . 5 6 x 7 . 2 -x =

(la touche $-x$ voulant dire que l'on prend l'opposé du nombre).

- 33 — Soit le calcul $A = 75,8 - (-58,2 \times 2,1 + 123)$. Retrouver la séquence correspondant au calcul de A :

a) 7 5 . 8 - (- 5 8 . 2 x 2 . 1 + 1 2 3) =

b) 7 5 . 8 - (5 8 . 2 (-) x 2 . 1 + 1 2 3) =

c) 7 5 . 8 - ((-) 5 8 . 2 x 2 . 1 + 1 2 3) =

- 34 — Écrire, pour chacune des séquences suivantes, la ligne de calcul et le résultat correspondant :

a) 2 . 8 +/- - (7 x 5 . 5 - 8) =

b) (-) 2 x 1 1 . 6 - 6 x 4 2 . 3 =

c) 1 5 . 8 +/- - 2 +/- x 5 +/- =

- 32 — Utiliser votre modèle de calculatrice et calculer :

$$A = (-7,53) \times 48,56 - (-4,12 - 51,564)$$

$$B = -89,121 + 23,57 \times (-5,18 + 4,2)$$

$$C = [-75 \times (13 \times 18 - 58) - 12] - 58 \times (-23)$$



PRIORITÉS

35 Effectuer les calculs suivants :

$$a = (-1) \times (+2) - 3 + (-4); \quad c = (-1) \times (-1) - 1 \times (-1)$$

$$b = 4 : (-2) + 3 \times (-1); \quad d = 2 : (-2) - 2 \times (-2)$$

36 Effectuer les calculs suivants :

$$a) 3 - 4 \times (-1) \times (-2) \quad c) [3 - 3 : (-3)] \times 3$$

$$b) 3 \times (-4) \times (-1) - 2 \quad d) 4 : [-4 \times 4 : (-4)]$$

37 Effectuer les calculs suivants :

$$a) 3 + 4 \times (-5) \quad b) 7 - 28 : (-4)$$

$$c) -12 - 6 \times 3 \quad d) (-3) \times 7 + 1$$

$$e) 15 : (-3) + 3 \times (-7)$$

38 Effectuer les calculs suivants :

$$a) 30 : (-6) - 6 : (-1) \quad b) (-32) : (-4) \times (-2)$$

$$c) -4 + 4 \times (-4) \quad d) 6 \times (-7) - 3 \times (-10)$$

$$e) 22 - 3 \times (-1) \times (-7)$$

Exercice résolu

Énoncé

On sait que :

$$a = (-5,4); \quad b = 3,2; \quad c = (-7,4)$$

Calculer :

$$A = -a - 7c - 3b$$

$$B = a(c - b)$$

Exemple de solution

Je remplace chaque lettre par le nombre qu'elle représente.

Je complète les signes de multiplication aux endroits utiles.

$$A = -(-5,4) - 7 \times (-7,4) - 3 \times 3,2$$

$$A = 5,4 + 51,8 - 9,6$$

$$A = 47,6$$

$$B = (-5,4) \times [(-7,4) - 3,2]$$

$$B = -5,4 \times (-7,4 - 3,2)$$

$$B = -5,4 \times (-10,6)$$

$$B = 57,24$$

39 Pour $a = -1,5$; $b = 2$; $c = -5$, calculer :

$$abc; \quad ab + c; \quad a(b + c); \quad 2a + 3b - 4c$$

40 Pour $a = -2,5$; $b = -6$; $c = 0,5$, calculer :

$$a - (b - c); \quad \frac{a + b}{c}$$

41 Calculer les expressions

$$A = xy - z; \quad B = (y - z)x; \quad C = (z - y) : x$$

dans chacun des cas suivants :

$$a) x = -1; \quad y = 3; \quad z = -5$$

$$b) x = 2; \quad y = -4; \quad z = 6$$

42 Recopier et compléter le tableau :

a	b	c	$a - b \times c$	$(a - b) \times c$	$b - a : c$
-12	-4	3			
40	7	-5			
-48	4	-8			
49	-5	7			
-15	-10	-1			

43 Recopier et compléter le tableau :

a	b	c	d	$a \times b - c \times d$	$(ab - c) : d$
-4	4	-4	-4		
5	-7	10	-9		
-6	-6	-6	-5		
-7	4	5	-11		
8	-3	4	7		

44 $A = 6 \times (-5) + 3 \times (-4) + 10$

1) Calculer A.

2) Placer des parenthèses dans l'expression A pour que le résultat soit égal à :

$$a) 370$$

$$b) -750$$

45 Recopier et ajouter des parenthèses pour que les égalités suivantes soient justes :

$$a) -4 : (-12) : 3 = 1$$

$$b) 20 : (-4) - (-5) \times 10 = 0$$

$$c) -10 + 6 : (-2) = 2$$

$$d) -3 \times (-2) + (-1) = 9$$

$$e) 14 : (-7) \times 2 = -4$$

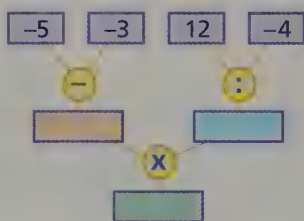
exercices

46 Recopier et compléter en mettant le signe d'opération, +, -, x, :, qui convient.

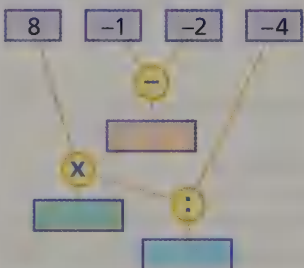
- a) $-5 \square (-6) \times 2 = 7$
- b) $-5 \square (-6) \times 2 = 60$
- c) $-5 \times 2 \square (-6) = -16$
- d) $-6 \square 2 - (-5) = 2$
- e) $3 + (-1) \square (-10) = 13$
- f) $[-10 \square (-1)] \times 3 = -33$
- g) $-10 \square 3 : (-1) = -7$
- h) $-1 \times (-10 \square 3) = 13$

47 Calculer chaque expression à l'aide du diagramme correspondant.

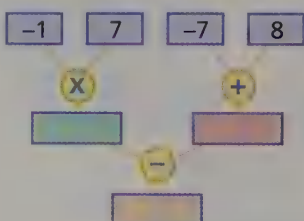
A $A = [-5 - (-3)] \times [12 : (-4)]$



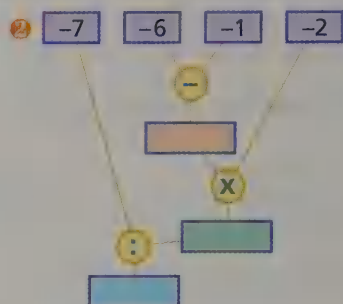
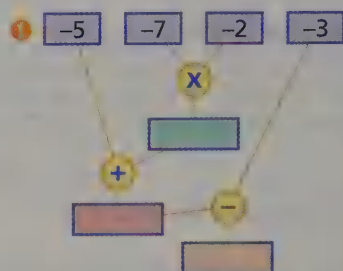
B $B = 8 \times [-1 - (-2)] \times (-4)$



C $C = (-1) \times 7 - (-7 + 8)$



48 Retrouver l'expression correspondant à chaque diagramme (en utilisant le moins de parenthèses possibles) :



PROBLÈMES

Exercice résolu

Énoncé

L'égalité $5x - 7y = 6z$ est-elle vraie pour :

- 1) $x = (-1,3)$; $x = 2$; $z = 1,25$
- 2) $x = 1,3$; $y = 2$; $z = (-1,25)$

Exemple de solution

Je calcule chaque membre de l'égalité en remplaçant chaque lettre par sa valeur :

$$\begin{aligned} 1) \quad & 5 \times (-1,3) - 7 \times 2 = -6,5 - 14 \\ & 5 \times (-1,3) - 7 \times 2 = -20,5 \\ & 6 \times 1,25 = 7,5 \end{aligned}$$

-20,5 n'est pas égal à 7,5 ; l'égalité n'est pas vérifiée pour ces valeurs de x , de y et de z .

$$\begin{aligned} 2) \quad & 5 \times 1,3 - 7 \times 2 = 6,5 - 14 \\ & 5 \times 1,3 - 7 \times 2 = -7,5 \\ & 6 \times (-1,25) = -7,5 \end{aligned}$$

On trouve la même valeur, l'égalité est vérifiée.

49 — L'égalité $5a + 3b - 7c = -12$ est-elle vraie pour :

- 1) $a = 3$; $b = -5$; $c = 2$
 2) $a = -4$; $b = 5$; $c = 1$
 3) $a = -0,4$; $b = 6$; $c = 4$

50 — L'inégalité $-4a + 7b < 3c + 5$ est-elle vérifiée pour :

- 1) $a = 3$; $b = 6,2$; $c = 5,4$
 2) $a = -4$; $b = 2,1$; $c = 8,2$
 3) $a = 2,7$; $b = -1,2$; $c = -8,7$

51 — Les trois nombres $\boxed{5,4}$, $\boxed{-1,3}$ et $\boxed{-3,5}$ ont été multipliés deux à deux de toutes les façons possibles.

a) Donner le nombre de produits possibles.

b) Des élèves ont trouvé les résultats suivants :

$\boxed{7,02}$ $\boxed{-18,9}$ $\boxed{4,55}$ $\boxed{-7,02}$

Dire lesquels sont justes et lesquels sont faux.

52 — La phrase « le produit de (-4) par la somme de (-6) et de 5 » se traduit par le calcul $(-4) \times (-6 + 5)$.

Écrire les calculs correspondants aux phrases suivantes et donner leurs résultats :

- a) Le double de (-4) ajouté à $25,4$.
 b) La somme de $(-3,61)$ et de $25,4$ multipliée par $(-35,1)$.
 c) Le produit de la somme de 14 et de (-5) par $(-27,4)$.

53 — On a multiplié la somme de (-5) et de $7,2$ par la différence de $(-6,1)$ et de $(-13,4)$.

Choisir, parmi les expressions suivantes, celle qui correspond à la phrase ci-dessus :

- a) $(-5) + 7,2 \times (-6,1) - (-13,4)$
 b) $(-5) + 7,2 \times [(-6,1) - (-13,4)]$
 c) $[(-5) + 7,2] \times [(-6,1) - (-13,4)]$

54 — La somme de $(-4,8)$ et du produit de $(-8,4)$ par $13,2$ correspond à quels calculs ?

- a) $(-4,8) \times (-8,4) + 13,2$ b) $(-4,8) + (-8,4) \times 13,2$
 c) $(-8,4) \times 13,2 + (-4,8)$ d) $13,2 \times (-4,8) + (-8,4)$

55 — Voici un programme de calcul :

« Prendre un nombre b , le multiplier par (-5) puis ajouter le produit de (-4) par (-3) . »

Exécuter ce programme en prenant :

$b = 1$; $b = -7$; $b = 0$; $b = 3,5$

56 — Associer chaque phrase numérotée avec l'expression a , b , ou c qui lui convient, où x représente le nombre choisi.

$$a = (x - 4) \times (-7)$$

$$b = x \times (-7) - 4$$

$$c = (4 - x) \times (-7)$$

- ① Choisir un nombre, le multiplier par (-7) puis soustraire 4 .
 ② Choisir un nombre, effectuer le produit de (-7) par la différence du nombre et de 4 .
 ③ Choisir un nombre, le soustraire de 4 et multiplier le résultat par (-7) .



57 — On a fait tourner le programme de calcul suivant :

« Prendre un nombre, le multiplier par (-4) puis ajouter 12 au résultat. »

- ① Écrire l'expression associée au programme ci-dessus, en prenant la lettre a comme nombre choisi.
 ② Quel est le résultat en remplaçant a par 5 , puis en remplaçant a par $(-1,7)$?
 ③ Si on trouve comme résultat 36 , quel est le nombre a de départ ? Et si on trouve 0 comme résultat ?

58 — Dans les égalités suivantes, chaque lettre représente un nombre relatif. Préciser si le nombre est positif ou négatif.

$$7 \times a = -4 ; \quad -11 \times b = 7$$

$$-27 \times c = 5 ; \quad -2 \times d = 13$$

$$e \times 15 = 47 ; \quad f \times (-23) = 12$$

$$g \times 3 = -49 ; \quad h \times (-7) = (-13)$$

exercices

59 — Le facteur manquant dans l'égalité



$3 \times \square = -18$ peut s'écrire (-6) ou $-\frac{18}{3}$.

Trouver mentalement le nombre manquant dans chaque égalité puis l'écrire sous forme d'un quotient comme dans l'exemple.

$$4 \times \square = -28$$

$$-12 \times \square = -36$$

$$0,6 \times \square = -3,6$$

$$\square \times (-7) = 4,2$$

$$\square \times (-12) = 4,8$$

$$0,8 \times \square = -3,2$$

60 — Trouver toutes les solutions des deux problèmes ci-dessous.

a) Chercher deux nombres entiers relatifs tels que leur produit soit égal à 8.

b) Chercher deux nombres entiers relatifs tels que leur produit soit égal à (-8) .

61 — Est-il possible que deux nombres relatifs aient leur produit positif et leur somme négative ?

Si c'est possible, caractériser leurs signes et donner quelques exemples de ces nombres.

62 — Est-il possible que deux nombres relatifs aient leur produit négatif et leur somme positive ?

Si c'est possible, caractériser leurs signes et donner quelques exemples de ces nombres.

63 — Est-il possible que deux nombres relatifs aient leur produit négatif et leur somme négative ?

Si c'est possible, caractériser leurs signes et donner quelques exemples de ces nombres.

64 — La température de fusion est la température qui permet le passage d'un corps solide à l'état liquide. Le mercure bout à 357°C et devient liquide à $(-38,84)^\circ\text{C}$. En raffinant du zinc, on produit industriellement du cadmium.



On appelle t_m la température de fusion du mercure, t_z celle du zinc et t_c celle du cadmium. On sait que :

$$t_z = -11 \times t_m + 7,84 ; t_c = t_m \times (-9) - 28,66$$

Calculer les températures de fusion du zinc et du cadmium.

65 — Au large de la Floride, il existe une dépression sous-marine qui atteint 5 850 m de profondeur. Un engin aquatique télécommandé s'enfonce sous l'eau par palier de (-850) m. Il réalise quatre plongées successives.

- De combien de mètres devra-t-il encore descendre sous l'eau ?
- Cela nécessitera encore combien de plongées ?



66 — Iakoutsk est une ville de Sibérie. Les températures moyennes mensuelles figurent dans le tableau :

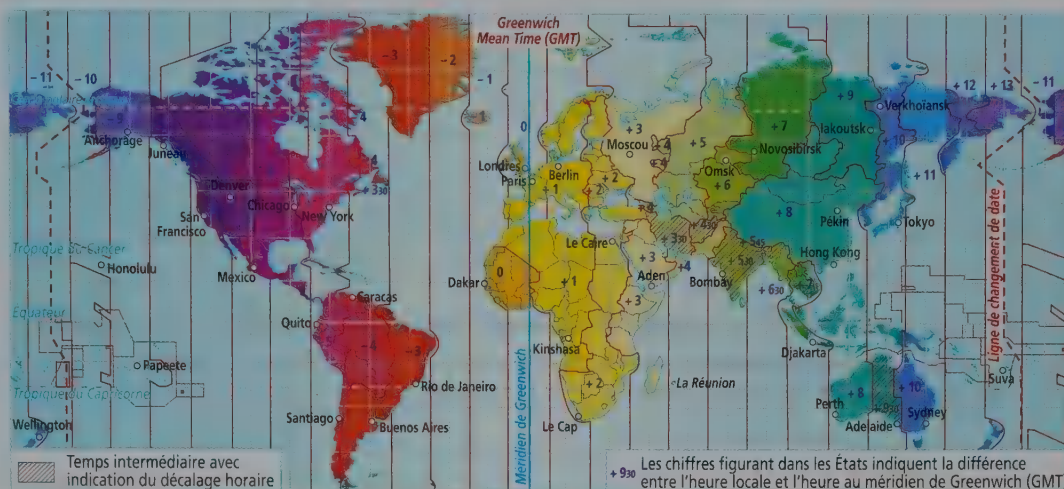


J	F	M	A	M	Jn
-42	-32	-20	-7	5	15
Jl	A	S	O	N	D
20	18	8	-5	-25	-36

Calculer la moyenne annuelle des températures de cette ville.

67 — Fuseaux horaires

Les heures notées sur la carte indiquent les différences en plus ou en moins par rapport à l'heure du Méridien de Greenwich.



- Il est midi à Londres. À cet instant, un avion décolle de New-York et vole pendant sept heures pour atteindre Londres. Quelle heure sera-t-il à Londres quand il atterrira ? Quelle heure sera-t-il alors à New-York ?
- Le 31 décembre à 15 h un avion décolle de la Réunion. Il atteindra Paris 10 heures plus tard. Les passagers pourront-ils fêter la nouvelle année à minuit dans la capitale ?
- Durant les J.O. de 2008 à Pékin, à quelle heure faudra-t-il allumer sa télévision à Toulouse pour suivre une compétition d'athlétisme débutant à 20 h à Pékin ?

68 — Dépenses et nombres relatifs

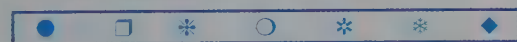
Amélie a reçu 80 € pour ses étrennes. Avec cet argent, elle compte acheter trois CD coûtant chacun 18,65 € et un pull coûtant 22,34 €. Elle profite d'une réduction de 7,55 € sur le pull en raison des soldes de janvier.

- Comment exprimer par un nombre relatif cette dépense qu'elle envisage d'effectuer ?
- Écrire une expression qui permet de calculer ce qui lui reste de ses étrennes. Effectuer les calculs.
- Compléter la phrase suivante qu'Amélie pourrait dire en rentrant chez elle : dépenser moins c'est avoir de l'argent en ».

TRAVAILLER SEUL

69 — Mot codé

Effectuer les calculs, puis remplacer chaque résultat trouvé par la lettre de l'alphabet correspondante (A = 1, B = 2, C = 3, ...).



- : $(-32) : 8 + (-30) : (-6)$
- : $23 + 6 \times (-3)$
- ◆ : $-15 + 35 + 7 \times (-2)$
- * : $-81 : (-9)$
- * : $-9 \times (-4) : 3$
- : $(-4) \times (-5) - (-1) \times (-2)$
- * : $-40 - 12 \times (-5)$

70 — QCM « Mots mystère »

a) Trouver la bonne réponse pour chaque calcul et trouver le mot mystère.

	Réponse ①	Réponse ②	Réponse ③
$5 - 3 \times (-2)$	-4 V	11 P	-1 A
$12 : (-3) \times 4$	0 Q	-1 O	-16 A
$4 \times (-7) + 7$	-35 U	0 I	-21 Q
$(-6) \times (-5) + 4 \times (-2)$	-12 L	-68 A	22 U
$-8 : (-2) + (-24) : (-4)$	5 I	10 E	-2 R
$5 - 8 + 4 : (-4)$	-4 B	2 I	8 E
$-30 - 7 - (-10)$	-33 U	-27 O	-47 R
$3 \times (-9) - 1 \times 3$	-30 T	-84 M	-90 S

b) En ajoutant une paire de parenthèses bien placée à chaque calcul, on obtient le mot VOILIERS.

Réécrire les huit calculs avec ces parenthèses.

c) Quel est le troisième mot à écrire avec les lettres restantes ?

■ DOMINOS ET NOMBRES RELATIFS

Sur chaque domino est écrite une opération où figure un nombre inconnu. Ce nombre inconnu est inscrit sur un autre domino. Le jeu consiste à associer opérations et nombres correspondants.

Voici deux exemples d'association :

$$4,5 \text{ } \bullet \text{ } -2 + 5 = \text{ } \blacksquare$$

$$3 \text{ } \bullet \text{ } 7 + \text{ } \blacksquare = 1$$

$$-6 \text{ } \bullet \text{ } 2 \times 5 = \text{ } \blacksquare$$

Dans le jeu proposé ici, plusieurs associations sont parfois possibles, mais toutes ne permettent pas de placer les 32 dominos. Les dominos ont été codés par des lettres majuscules ou minuscules pour faciliter leur repérage.

A

$$-12,8 \text{ } \bullet \text{ } 5 - 8 = \text{ } \blacksquare$$

B

$$1,5 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } \times 2 = -24$$

C

$$2,25 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } - (-2) = 3,5$$

D

$$7 \text{ } \bullet \text{ } 2,25 + \text{ } \blacksquare = 3,75$$

E

$$4,5 \text{ } \bullet \text{ } 9 \times (-3) = \text{ } \blacksquare$$

F

$$-3 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } - 4,5 = -6$$

G

$$0,4 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } \times (-4,5) = -18$$

H

$$-4,5 \text{ } \bullet \text{ } -5 + 0,4 = \text{ } \blacksquare$$

I

$$-1,5 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } \times 5 = -40$$

J

$$3 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } : (-5) = 0,8$$

K

$$-27 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } : -2 = -1,5$$

L

$$3,75 \text{ } \bullet \text{ } -2 \times \text{ } \blacksquare = 4,5$$

M

$$-6 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } + 9 = 5$$

N

$$4 \text{ } \bullet \text{ } -12 - \text{ } \blacksquare = -12,8$$

P

$$1,5 \text{ } \bullet \text{ } -9 + 3 = \text{ } \blacksquare$$

Q

$$-2,25 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } \times 3 = 11,25$$

R

$$-4,6 \text{ } \bullet \text{ } -2 - \text{ } \blacksquare = -6$$

S

$$0,8 \text{ } \bullet \text{ } -9 : 4 = \text{ } \blacksquare$$

T

$$3,75 \text{ } \bullet \text{ } 3 - \text{ } \blacksquare = 0,75$$

V

$$4 \text{ } \bullet \text{ } 11,25 + \text{ } \blacksquare = 13,5$$

a

$$-2,25 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } - 2,25 = 1,5$$

b

$$2,25 \text{ } \bullet \text{ } -5 - (-12) = \text{ } \blacksquare$$

d

$$-8 \text{ } \bullet \text{ } 11,25 : 3 = \text{ } \blacksquare$$

e

$$0,8 \text{ } \bullet \text{ } 3 : \text{ } \blacksquare = 7,5$$

f

$$-12 \text{ } \bullet \text{ } 12 : \text{ } \blacksquare = -1,5$$

g

$$-4 \text{ } \bullet \text{ } 0,4 - 4,5 = \text{ } \blacksquare$$

h

$$-8 \text{ } \bullet \text{ } 9 : \text{ } \blacksquare = 3$$

k

$$3,75 \text{ } \bullet \text{ } 12 - \text{ } \blacksquare = 7,5$$

p

$$3 \text{ } \bullet \text{ } 9 : -2 = \text{ } \blacksquare$$

q

$$0,8 \text{ } \bullet \text{ } -0,8 - 12 = \text{ } \blacksquare$$

r

$$-4,1 \text{ } \bullet \text{ } -0,4 \times (-2) = \text{ } \blacksquare$$

t

$$-4 \text{ } \bullet \text{ } \text{ } \times 3 = 2,4$$

À travers L'Histoire

Avant de devenir de véritables nombres, les relatifs ont vécu une histoire longue et tortueuse. Il leur a fallu franchir bien des obstacles.

I^{er} siècle

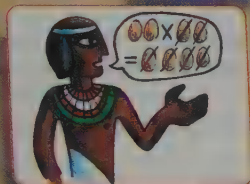


En Chine : Résolution de problèmes (calcul d'impôts, commerce, ...).

Manipulation de nombres négatifs dans des opérations.

Utilisation de baguettes à calculer, rouges pour les positifs et noires pour les négatifs. La comparaison de la disposition des baguettes donne les règles de calculs d'addition et de soustraction.

III^e siècle



À Alexandrie, en Égypte, Diophante écrivait la fameuse règle suivante :

« Ce qui est de manque, multiplié par ce qui est de manque, donne ce qui est positif ; tandis que ce qui est de manque, multiplié par ce qui est positif, donne ce qui est de manque ».

Jusqu'au XIV^e siècle

En Occident : RIEN ! Le nombre négatif n'est pas encore apparu.

Tous les textes anciens n'ont pas été découverts. Ce qui bloque, c'est la vision héritée des Grecs : tous les nombres sont entiers ou fractions d'entiers.

À la Renaissance-XV^e siècle

Chuquet, mathématicien lyonnais, résout des problèmes concrets.

Dans « *Triparty en la science des nombres* » et « *La géométrie* » écrits en 1484, on voit apparaître des calculs où par exemple (-4) est interprété comme une dette. Usage de nombres négatifs et de toutes les règles de calculs sur ces nombres.

Jusqu'au XVII^e siècle

L'usage des négatifs ne se généralise pas et même semble retombé dans l'oubli.

XVII^e siècle

Descartes, en 1637 rejette ces « faux nombres » car « est-il possible qu'il existe des quantités moindres que rien ? »

XVIII^e siècle-XIX^e siècle



Et l'histoire continue ... avec autant d'erreurs.

Euler (1748), Carnot (1803), Cauchy (1821, ci-contre), grands mathématiciens de leurs temps ont des scrupules, chaque définition qu'ils utilisent entraîne des conséquences pour eux inacceptables.

« -3 serait moindre que 2 , cependant $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2 ; c'est à dire qu'entre deux quantités inégales 2 et (-3) , le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, et réciproquement, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se formuler de la quantité. »

Fin du XIX^e siècle

Découverte de propriétés, construction formalisée des nombres.

En 1867, Haenkel démontre que : pour deux nombres quelconques, leur produit est égal au produit de leurs opposés.

Tout ceci sera étudié plus tard au lycée.

Repérer les expressions utilisées et les fautes faites au cours de l'histoire.

ce que je dois savoir sur...

... Les nombres relatifs

- Calculer les produits et les quotients de deux nombres relatifs avec ou sans calculatrice.
- Trouver le signe d'un produit.
- Organiser un calcul et utiliser les règles de priorités.
- Résoudre des problèmes utilisant les nombres relatifs.

je m'évalue

1 Effectuer les calculs suivants :

$$A = (-6) \times 4$$

$$B = 7 \times (-8)$$

$$C = 15 : (-3)$$

$$D = (-24) : (-4)$$

$$E = (-8) \times (-9) \times 0,25 \times 4$$

$$F = (-56) \times (-23) \times 0 \times (-8)$$

2 Quels sont les signes des produits suivants (ne pas calculer) ?

$$M = (-15) \times (-24) \times (-21) \times (-13) \times 49 \times (-5)$$

$$N = 13 \times (-25) \times (-8) \times (-83) \times 19 \times (-740)$$

$$R = (-16) \times (-56) \times 36 \times (-19)$$

$$S = (-17) \times (-17) \times (-17) \times \dots \times (-17)$$

(S contient 17 facteurs égaux à (-17) .)

3 Calculer les expressions suivantes :

$$A = -5 - (-9) \times 17$$

$$B = 7 \times (-3) + 5 \times (-4)$$

$$C = (-10) \times [(-6) + (-11)]$$

$$D = 9 : (-3) - (-15 + 5 \times 2)$$

4 Remplacer les lettres par leurs valeurs et effectuer les calculs :

$$a = (-6) ; \quad b = (-2,1) ; \quad c = (-1,6)$$

$$T = 2a - 5b - c ; \quad U = a + bc$$

5 Trouver le nombre manquant dans chacune des égalités :

$$(-6) = \square \times (-2) ; \quad 8 \times \square = -64$$

$$\square : (-4) = -20 ; \quad -9 \times \square = 72$$

6 Brevet Nantes 1999

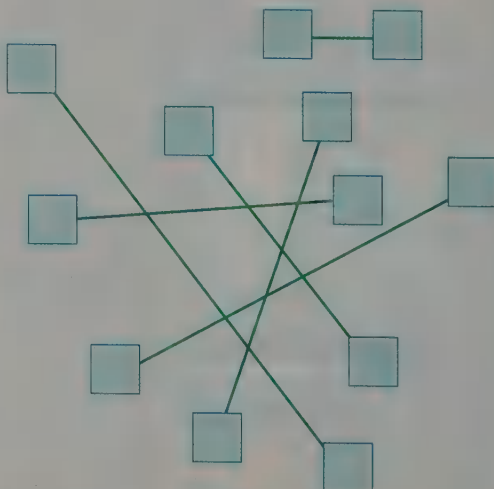
Reproduire et compléter le tableau en appliquant le programme de calcul aux nombres indiqués.

On a utilisé le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Calculer son double.
- Soustraire 1.
- Calculer le carré du résultat
- Soustraire 36.

Nombre choisi	4	0	3,5	x
Résultat final				

7 Le produit des nombres reliés par chaque segment est égal à (-12) . Compléter toutes les cases.



Les solutions se trouvent à partir de la page 279.

NOMBRES FRACTIONNAIRES ET CALCULS

En 6^{ème}-5^{ème}

- Effectuer la division d'un nombre décimal par un nombre entier et donner des valeurs approchées du quotient.
- Calculer le produit de deux nombres positifs en écriture fractionnaire.
- Additionner et soustraire deux nombres en écriture fractionnaire, dans les cas où les dénominateurs sont les mêmes ou l'un des dénominateurs est multiple de l'autre.

En 4^{ème}

- Savoir que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.
- Déterminer une valeur approchée du quotient de deux nombres décimaux (positifs ou négatifs).
- Utiliser sur des exemples numériques les égalités :

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} ; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} ; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$
 où a, b, c et d sont des décimaux relatifs.
- Calculer la somme de nombres relatifs en écriture fractionnaire.

pour démarrer



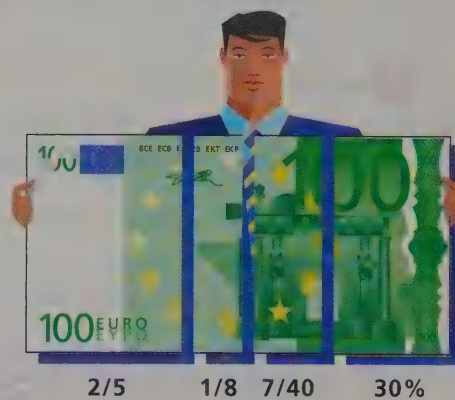
1

Budget fractionné

• Voir diverses formes de fractions et de somme de fractions.

Monsieur Général partage son budget en plusieurs catégories. Il consacre $\frac{2}{5}$ de ses ressources au loyer.

$\frac{1}{8}$ est consacré aux loisirs. $\frac{7}{40}$ du budget est réservé à la nourriture. 30 % du budget est réservé à l'habillement.



2/5

1/8

7/40

30%

- Écrire 30 % sous forme de fraction ayant 100 comme dénominateur.
- Monsieur Général décide de regrouper les catégories nourriture et loyer. Quelle part du budget de Monsieur Général cette nouvelle catégorie représente-t-elle ?
- Le loyer est en fait partagé en deux parties égales. Une partie est pour le logement et l'autre partie est pour les dépenses d'électricité, d'eau et de taxes diverses. Quelle part du budget de Monsieur Général est consacrée au logement ?
- Il voudrait créer deux catégories dans la part consacrée à la nourriture, aussi il partage cette catégorie en deux fractions inégales. Écrire trois exemples de deux fractions dont la somme est égale à $\frac{7}{40}$.

Activités

2 — Quotients égaux

- 1) Donner l'écriture fractionnaire puis, si possible, l'écriture décimale des quotients suivants :

quotient de 8 par 5 ; quotient de 0,3 par 1,07 ; quotient de 6,32 par 2,5.

- 2) Dans les égalités ci-dessous, les lettres représentent des nombres. Indiquer si ces nombres sont positifs ou négatifs.

$$15 \times a = 47 ; \quad -11 \times b = 7 ; \quad -2 \times c = -13 ; \quad 3 \times d = -49$$

- 3) Associer chacune des égalités précédentes et des nombres a, b, c, d , à un des quotients suivants :

$$\frac{7}{-11} ; \quad \frac{-49}{3} ; \quad \frac{-13}{-2} ; \quad \frac{47}{15}$$

En utilisant la réponse de la question précédente, indiquer le signe de chacun de ces quotients.

- 4) Proposer l'écriture d'une règle, que l'on admettra, pour les signes d'un quotient.

- 5) Écrire, comme dans la question 2), des égalités correspondantes aux quotients :

$$\frac{-98}{6} ; \quad \frac{39}{6} ; \quad \frac{-35}{55} ; \quad \frac{-188}{-60}$$

Indiquer à quels nombres a, b, c, d , ces quotients sont égaux.

• Revoir des écritures de quotients.

• Signe d'un produit.

• Vers une règle de signe d'un quotient.

• Égalité de quotients.

3 — Valeur exacte ou valeur approchée ?

- 1) La calculatrice affiche un nombre pour la division de 13 par 5. Lequel ? Cette valeur est-elle exacte ou approchée ? Donner la valeur exacte ou des arrondis.

- 2) La calculatrice affiche un nombre pour la division de 13 par 7. Lequel ? Cette valeur est-elle exacte ou approchée ? Donner la valeur exacte ou des arrondis.

• Revoir arrondis et troncatures.

4 — Additionner et soustraire

- 1) Effectuer les calculs suivants et donner une écriture décimale des résultats :

$$\frac{6}{25} + \frac{13}{10} ; \quad \frac{-8}{10} - \frac{-32}{25} ; \quad \frac{-25}{-4} - \frac{9}{-6}$$

Donner une écriture fractionnaire des résultats de la question précédente.

- 2) Donner une méthode pour additionner ou soustraire des nombres écrits sous forme fractionnaire sans utiliser l'écriture décimale.

- 3) Appliquer cette règle pour calculer les sommes et différences ci-dessous. Donner les résultats sous une forme simplifiée.

$$A = \frac{25}{1,3} + \frac{18}{1,3} ; \quad B = \frac{2}{7} - \frac{9}{-21} ; \quad C = \frac{8}{24} - \frac{-75}{-45}$$
$$D = -5 - \frac{11}{12} ; \quad E = \frac{-40}{70} + \frac{12}{21}$$

- 4) Parmi les sommes précédentes, laquelle est égale à zéro ?

• Approche de la somme de nombres fractionnaires.

• Réduction au même dénominateur.

• Application.

5 — Multiplier

- 1) Effectuer les calculs suivants et donner une écriture décimale des résultats.

$$\frac{6}{25} \times \frac{13}{10} ; \quad \frac{-8}{10} \times \frac{-32}{5} ; \quad \frac{-25}{-4} \times \frac{9}{-6}$$

- 2) Donner une écriture fractionnaire des résultats de la question précédente.

• Approche du produit.

• *Dénominateurs égaux inutiles.*

• *Application.*

- 3) Donner une méthode pour multiplier des nombres écrits sous forme fractionnaire sans utiliser l'écriture décimale.
- 4) Appliquer cette règle pour calculer les produits ci-dessous. Donner les résultats sous une forme simplifiée.

$$A = \frac{25}{3} \times \frac{8}{6}; \quad B = \frac{2}{7} \times \frac{9}{-21}; \quad C = \frac{8}{24} \times \frac{-75}{-25}$$

$$D = -5 \times \frac{11}{12}; \quad E = \frac{-40}{70} \times \frac{12}{21}; \quad F = \frac{6}{7} \times \frac{5}{7}$$

- 5) Parmi les produits précédents, lequel est égal à 1 ?

6 — Opposés ou inverses ?

• *Approche de la notion d'opposés.*

1) Opposés

Calculer les sommes suivantes : $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$; $-\frac{7}{4} + \frac{7}{4}$; $\frac{5}{3} + \frac{5}{-3}$

Dans chaque cas, les deux nombres sont opposés car leur somme est égale à 0.

2) Inverses

a) Calculer les produits suivants : $5 \times 0,2$; $-4 \times (-2,5)$; $1,25 \times 0,8$

b) Associer chacun des produits précédents à deux des égalités suivantes :

$$5 \times x = 1; \quad -4 \times x = 1; \quad (-2,5) \times x = 1$$

$$1,25 \times x = 1; \quad 0,2 \times x = 1; \quad 0,8 \times x = 1$$

c) Écrire, sous forme de quotients, les valeurs de x obtenues à la question 2 b).

On rappelle que le quotient de deux nombres relatifs a et b (b non nul) est le nombre x égal à $\frac{a}{b}$ tel que $bx = a$.

• *Approche de la notion d'inverses.*

• *Application*

Vocabulaire

On dit que 2 et 0,5 sont des nombres **inverses** car $2 \times 0,5 = 1$.

On écrit que $\frac{1}{2}$ est l'inverse de 2 et que 2 est l'inverse de $\frac{1}{2}$.

d) Donner les inverses des nombres intervenant dans la question 2 b).

e) Donner une écriture fractionnaire des inverses de 7, de (-11) , de $\frac{3}{2}$, de $\frac{-5}{7}$ et de $(-\frac{7}{3})$.

f) Quelle est la touche de la calculatrice qui permet d'obtenir des valeurs approchées de l'inverse d'un nombre ?

7 — Diviser

• *Produit et quotient associé.*

1) Devinette

Le produit de $\frac{2}{3}$ et d'un autre nombre est égal à $\frac{7}{5}$. De quel nombre s'agit-il ?

On rappelle que si a , b et x sont des nombres relatifs (b non nul) tels que $bx = a$, alors $x = \frac{a}{b}$ ou $x = a : b$.

- 2) Trouver les nombres représentés par x , y , z , et t dans les égalités ci-dessous. Les écrire d'abord sous la forme $a : b$ puis sous forme fractionnaire simplifiée.

$$\frac{-3}{5} \times x = \frac{-21}{25}; \quad \frac{2}{7} \times y = \frac{-50}{49}; \quad \frac{4}{9} \times z = \frac{3}{5}; \quad \frac{12}{13} \times t = \frac{47}{55}$$

- 3) Donner une méthode pour diviser des nombres écrits sous forme fractionnaire.

- 4) Appliquer cette règle pour calculer les quotients ci-dessous. Donner les résultats sous une forme fractionnaire simplifiée.

$$A = \frac{25}{3} : \frac{8}{6}; \quad B = \frac{2}{7} : \frac{9}{-21}; \quad C = \frac{8}{24} : \frac{-75}{-25}; \quad D = -5 : \frac{11}{12}; \quad E = \frac{-40}{70} : \frac{12}{21}; \quad F = \frac{6}{7} : 5$$

• *Application.*

L'essentiel en deux pages

1 — Quotients égaux

a) Égalité de quotients

Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur par le même nombre relatif non nul.

a , b et c sont des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

Exemples

$$\frac{4}{-0,3} = \frac{4 \times (-10)}{0,3 \times (-10)} = \frac{-40}{3}; \quad \frac{32}{48} = \frac{32 : 8}{48 : 8} = \frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$$

b) Signe d'un quotient

Si a est un nombre relatif et b un nombre relatif non nul alors :

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Exemples

$$\frac{-21}{-24} = \frac{-3 \times 7}{-3 \times 8} = \frac{7}{8}; \quad \frac{15}{-27} = \frac{3 \times 5}{3 \times (-9)} = \frac{5}{-9} = \frac{5 \times (-1)}{-9 \times (-1)} = \frac{-5}{9} = -\frac{5}{9}$$

2 — Addition et soustraction de nombres en écriture fractionnaire

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire :

- on écrit les nombres avec le même dénominateur ;
- on additionne (ou soustrait) les numérateurs ;
- on garde le même dénominateur.

Si a , b et c sont des nombres relatifs avec c non nul, alors :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemples

$$\frac{3}{7} + \frac{-5}{8} = \frac{24}{56} + \frac{-35}{56} = \frac{-11}{56}; \quad -\frac{8}{20} + \frac{1}{4} = \frac{-8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{-3}{20}$$

$$\frac{17}{51} - \frac{42}{63} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{-1}{3}; \quad -\frac{3}{5} + \frac{18}{30} = \frac{-3}{5} + \frac{3}{5} = 0$$

Remarques

- Deux nombres opposés ont leur somme égale à 0.
Si x est un nombre relatif, son opposé se note $(-x)$ et alors $x + (-x) = 0$.
- Soustraire, c'est additionner l'opposé.

3 — Multiplication de nombres en écriture fractionnaire

Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire :

- on multiplie les numérateurs entre eux ;
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

Si a , b , c et d sont des nombres relatifs avec c et d non nuls, alors :

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

Remarque

Si possible, on simplifie avant de calculer les produits.

Exemples

$$\frac{12}{35} \times \frac{-49}{4} = \frac{12 \times (-49)}{35 \times 4} = -\frac{3 \times 4 \times 7 \times 7}{7 \times 5 \times 4} = -\frac{3 \times 7}{5} = -\frac{21}{5} ; \quad -4 \times \left(-\frac{31}{7}\right) = \frac{4 \times 31}{7} = \frac{124}{7}$$

4 — Division de nombres en écriture fractionnaire

a) Nombres inverses

Deux nombres sont **inverses** si leur produit est égal à 1.

L'inverse du nombre x , non nul, est le nombre noté $\frac{1}{x}$.

Si x est un nombre relatif non nul alors $x \times \frac{1}{x} = 1$.

Exemples

L'inverse de (-3) est $\frac{1}{-3}$ car $(-3) \times \frac{1}{-3} = 1$.

L'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$ car $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$.

b) Quotient de nombres

Diviser un nombre par un nombre relatif non nul revient à le multiplier par son inverse.

Si a , b , c et d sont des nombres relatifs avec b , c et d non nuls, alors :

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} ; \quad \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Exemples

$$\frac{5}{4} : \frac{7}{8} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{7} = \frac{5 \times 2 \times 4}{4 \times 7} = 5 \times \frac{2}{7} = \frac{10}{7} ; \quad 2 : 3 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} ; \quad -\frac{2}{7} : 3 = -\frac{2}{7} \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{21}$$



CONDUIRE UN CALCUL À LA MAIN OU À LA CALCULATRICE

↓ Réduire au même dénominateur et additionner

Énoncé : Additionner $\frac{13}{36}$ et $\frac{7}{45}$.

Exemple de solution

- Les deux nombres n'ont pas le même dénominateur. Il faut trouver un dénominateur commun pour pouvoir appliquer la règle du cours : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.
- On cherche un multiple de 36 et de 45 qui soit le plus petit possible.

Pour cela, on prend le plus grand des deux nombres, on écrit ses multiples non nuls successifs et on s'arrête dès que l'on obtient le premier multiple commun avec l'autre nombre.

Multiples non nuls de 45	45	90	135	180
Est-il multiple de 36 ?	non	non	non	oui

Le dénominateur commun est donc 180.

- On applique la règle de la somme de deux nombres écrits sous forme fractionnaire, en remplaçant chacun des nombres par un nombre qui leur est égal de dénominateur 180.

$$\frac{13}{36} + \frac{7}{45} = \frac{13 \times 5}{36 \times 5} + \frac{7 \times 4}{45 \times 4} = \frac{65}{180} + \frac{28}{180} = \frac{93}{180}$$

- On cherche à simplifier le résultat si c'est possible : $\frac{93}{180} = \frac{31 \times 3}{60 \times 3} = \frac{31}{60}$ donc $\frac{13}{36} + \frac{7}{45} = \frac{31}{60}$

↓ Priorité des calculs

Les règles de priorité des calculs s'appliquent aux nombres écrits sous forme fractionnaire.

On effectue un calcul selon les étapes suivantes :

- on effectue les calculs indiqués entre parenthèses ;
- on effectue les multiplications ;
- on transforme les soustractions en additions ;
- on termine le calcul des sommes.

↓ Usage de la calculatrice

Certaines calculatrices comportent des touches de la forme $\boxed{a + b/c}$ ou $\boxed{a b/c}$ ou $\boxed{/}$. Ces touches servent à afficher le résultat de calculs sous forme fractionnaire.

Exemple : pour effectuer le calcul de $\frac{21}{8} - \frac{45}{7} + \frac{11}{5}$, on sélectionne la série de touches suivantes :

$\boxed{2} \boxed{1} \boxed{a + b/c} \boxed{8} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{5} \boxed{a b/c} \boxed{7} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{a b/c} \boxed{5} \boxed{=}$

ou, selon les modèles :

$\boxed{2} \boxed{1} \boxed{/} \boxed{8} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{5} \boxed{/} \boxed{7} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{/} \boxed{5} \boxed{=}$

Avec l'une ou l'autre de ces deux séquences de calcul, la calculatrice affiche la valeur exacte -449/280

Remarque : si on utilisait la touche $\boxed{\div}$ de la calculatrice, on obtiendrait un résultat approché

$\boxed{2} \boxed{1} \boxed{\div} \boxed{8} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{5} \boxed{\div} \boxed{7} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{\div} \boxed{5} \boxed{=}$

La calculatrice affiche une valeur approchée -1,603571429

exercices

SIMPLIFICATIONS

- 1 Calculer mentalement les nombres manquants remplacés par des lettres :

$$\frac{7}{8} = \frac{a}{56}; \quad \frac{b}{-33} = \frac{2}{3}; \quad \frac{23}{3} = \frac{c}{-12}; \quad \frac{30}{-63} = \frac{-10}{d}$$

- 2 Calculer mentalement pour simplifier les nombres suivants, écrits sous forme fractionnaire :

$$\frac{8}{12}; \quad \frac{-18}{33}; \quad \frac{-36}{-42}; \quad \frac{75}{-25}$$

- 3 Simplifier au maximum les fractions suivantes :

$$\frac{81}{63}; \quad -\frac{14}{36}; \quad \frac{-48}{42}; \quad -\frac{-5}{60}; \quad \frac{13}{39}; \quad \frac{44}{77}$$

- 4 Simplifier au maximum les fractions suivantes :

$$\frac{72}{-40}; \quad \frac{49000}{2100}; \quad \frac{16}{9}; \quad \frac{-12}{360}; \quad \frac{90}{15}; \quad -\frac{64}{160}$$

- 5 Écrire chacun des quotients suivants avec des dénominateurs entiers :

$$\frac{5}{0,2}; \quad \frac{1,2}{3,3}; \quad \frac{1,6}{4,8}; \quad \frac{3,7}{7,3}$$

- 6 Dans chaque cas, mettre les deux fractions au même dénominateur :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } -\frac{1}{6} \text{ et } \frac{4}{9} & \text{b) } \frac{3}{10} \text{ et } \frac{7}{12} & \text{c) } -\frac{6}{7} \text{ et } \frac{-7}{8} \\ \text{d) } \frac{3}{4} \text{ et } \frac{3}{8} \end{array}$$

- 7 Damien a utilisé sa calculatrice pour effectuer cinq opérations.

Trouver les résultats sous forme fractionnaire ou décimale, puis vérifier avec une calculatrice.

a) $\boxed{2} \div \boxed{5} \boxed{+/-} =$

b) $\boxed{3} \boxed{+/-} \div \boxed{4} =$

c) $\boxed{1} \boxed{+/-} \div \boxed{2} \boxed{1/x} =$

d) $\boxed{1} \boxed{+/-} \div \boxed{2} = \boxed{1/x}$

e) $\boxed{8} \div \boxed{3} = \boxed{1/x} \boxed{+} \boxed{1} \div \boxed{2} =$

- 8 a) Donner les inverses des nombres suivants :

$$6; \quad -2; \quad \frac{1}{5}; \quad \frac{-7}{2}; \quad \frac{20}{9}$$

- b) Quels sont leurs opposés ?

- 9 Trouver des nombres opposés parmi les nombres suivants :

a) $\frac{-2}{7}; \frac{7}{2}; \frac{2}{-7}; -\frac{2}{7}; \frac{-7}{2}; -\frac{2}{-7}; -\frac{7}{2}; -\frac{-7}{-2}$

b) $7 \times (-4); (-7) \times (-4); \frac{7}{4}; 7 \times \frac{1}{4}; (-7) \times \left(\frac{1}{-4}\right)$

- 10 Mettre les fractions suivantes au même dénominateur :

a) $\frac{5}{3}; \frac{3}{4}$ et $\frac{7}{12}$

b) $\frac{2}{5}; \frac{1}{25}$ et $\frac{3}{10}$

c) $\frac{4}{7}; \frac{11}{3}$ et $\frac{1}{9}$

- 11 Trouver les nombres a, b, c, d pour que tous les quotients suivants soient égaux :

$$\frac{a}{-8}; \quad \frac{5}{b}; \quad \frac{-25}{40}; \quad \frac{-15}{c}; \quad \frac{10}{d}$$

ADDITIONS ET SOUSTRATIONS

- 12 Calculer mentalement chacune des expressions suivantes et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$A = \frac{15}{14} + \frac{23}{14}; \quad B = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}$$

$$C = \frac{7}{12} + \frac{5}{12}; \quad D = \frac{8}{9} - \frac{5}{9}$$

- 13 Calculer mentalement chacune des expressions suivantes et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$A = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}; \quad B = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}$$

$$C = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}; \quad D = \frac{5}{9} - \frac{8}{9}$$

- 14 Utiliser une calculatrice pour calculer exactement la somme :

$$6 + \frac{7}{-9} - \frac{2}{3}$$

exercices

- 15 a) À quel calcul correspond la séquence ci-dessous ?



$$6 \quad +/- \quad a + b/c \quad 7 \quad + \quad 2 \quad a + b/c \quad 9 \quad =$$

- b) La valeur affichée est-elle exacte ou approchée ?

- 16 Calculer chacune des expressions suivantes et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$A = \frac{4}{3} - \frac{5}{6} ;$$

$$B = \frac{-3}{4} - \frac{7}{4} ;$$

$$C = \frac{3}{5} + 5 ;$$

$$D = \frac{8}{12} - \frac{14}{21}$$

- 17 Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$A = \frac{3}{10} + \left(-\frac{7}{5}\right) ;$$

$$B = \frac{-8}{25} - \frac{4}{25}$$

$$C = \frac{4}{3} - \frac{6}{5} ;$$

$$D = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

$$E = \frac{-6}{11} - \frac{4}{5} ;$$

$$F = 5 + \frac{6}{7}$$

- 18 Calculer astucieusement les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$a) \frac{3}{21} - \frac{5}{7} + \frac{2}{5} ;$$

$$b) \frac{14}{49} - \frac{7}{35}$$

$$c) \frac{-15}{45} + \frac{4}{3} ;$$

$$d) -3 + \frac{1}{9} - \frac{40}{36}$$

- 19 Calculer les expressions suivantes et écrire les résultats sous la forme la plus simple possible :

$$\frac{5}{0,2} + \frac{1,2}{3,6} ;$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1,6}{4,8} ;$$

$$\frac{1,5}{4,5} - \frac{3,7}{7,4}$$

- 20 Compléter le tableau suivant et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

a	b	a + b	a - b
-5	$\frac{5}{9}$		
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{15}{2}$		
	$-\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$	
$\frac{3}{14}$		$\frac{2}{7}$	

- 21 Calculer astucieusement les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$A = \frac{1}{3} - \frac{2}{7} + \frac{8}{9} - \frac{5}{7} + \frac{2}{18} + \frac{8}{3}$$

$$B = \frac{11}{22} + \frac{10}{24} + \frac{5}{15} + \frac{2}{3} + \frac{7}{12} + \frac{3}{2}$$

- 22 Trouver les nombres x, y et z tels que :

$$x + \frac{2}{5} = \frac{3}{4} ; \quad y - 1 = \frac{8}{11}$$

$$\frac{2}{3} - z = \frac{8}{21}$$

- 23 Deux nombres x et y sont tels que :

$$x = 2 + \frac{5}{7} + \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad y = 7 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4}$$

Quelles sont les réponses correctes parmi les calculs suivants ?

a) $x = 3,5$ et $y = 9,75$ b) $x = \frac{10}{11}$ et $y = \frac{15}{8}$

c) $x = \frac{97}{28}$ et $y = \frac{78}{8}$

d) $x = 3 + \frac{13}{8}$ et $y = 9 + \frac{3}{4}$

MULTIPLICATIONS ET DIVISIONS



Exercice résolu

Énoncé

Calculer l'expression $\frac{55}{18} \times \frac{24}{44}$.

Donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

Exemple de solution

On applique la propriété de la multiplication de deux nombres écrits sous forme fractionnaire :

$$\frac{55}{18} \times \frac{24}{44} = \frac{55 \times 24}{18 \times 44}$$

On simplifie avant d'effectuer les multiplications :

$$\frac{55}{18} \times \frac{24}{44} = \frac{5 \times 11 \times 6 \times 4}{3 \times 6 \times 4 \times 11} = \frac{5}{3}$$

- 24** Calculer et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$A = \frac{7}{2} \times \frac{5}{3}; \quad B = 5 \times \frac{4}{3}$$

$$C = 3 \times \frac{1}{4}; \quad D = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3}$$

- 25** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}; \quad B = \frac{-4}{9} \times \frac{3}{5}; \quad C = -\frac{7}{6} \times \frac{12}{5} \times \left(-\frac{15}{28}\right)$$

$$D = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}; \quad E = \frac{-44}{-45} \times \frac{-30}{11}$$

- 26** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{8}{7} : \frac{16}{7}; \quad B = \frac{-9}{4} : \frac{-4}{9}; \quad C = -\frac{26}{3} : 2$$

$$D = -5 : \frac{3}{5}; \quad E = \frac{4}{21} : \left(-\frac{20}{49}\right)$$

27 — Bonne réponse

Si on calcule $\frac{8}{21} : \frac{14}{15}$, alors on trouve :

$$\frac{112}{315}; \quad \frac{120}{294}; \quad \frac{8}{45}; \quad \frac{20}{49}; \quad \frac{147}{600}$$

- 28** Recopier et compléter la table de multiplication suivante :

x	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	-3	$\frac{5}{2}$
$-\frac{7}{4}$				
$\frac{2}{3}$				
$\frac{4}{-5}$				

- 29** Quel est le calcul correspondant à chacune des deux séquences tapées sur une calculatrice ?

① $7 \quad a+b/c \quad 6 \quad \div \quad 5 \quad +/- \quad a+b/c \quad 3$

② $5 \quad +/- \quad a+b/c \quad 3 \quad \times \quad 7 \quad +/- \quad a+b/c \quad 1$

- 30** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{(-2) \times (-4) \times 7 \times 11 \times (-3)}{(-11) \times (-6) \times (-7) \times (-8)}; \quad B = \frac{-33 \times 75 \times 24}{12 \times 25 \times 66}$$

$$C = -\frac{34}{35} \times \frac{14}{-17}; \quad D = \frac{65}{27} : \frac{13}{36}$$

- 31** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{(-1) \times (-25) \times 12}{5 \times (-20) \times (-3)}; \quad B = \frac{132}{35} \times \frac{49}{44}$$

$$C = \frac{(-25) \times (-36)}{30 \times (-24) \times 10}; \quad D = -\frac{38}{15} \times \frac{25}{-19} \times \left(-\frac{3}{10}\right)$$

- 32** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{11}{\frac{20}{44} \times \frac{5}{5}}; \quad B = \frac{-5}{\frac{3}{-2}}; \quad C = \frac{-5}{\frac{3}{-2}}$$

- 33** Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}}; \quad B = \frac{-9}{\frac{21}{63}}; \quad C = \frac{-8}{\frac{4}{7}}; \quad D = \frac{-8}{\frac{4}{7}}; \quad E = \frac{-56}{\left(-\frac{32}{45}\right)}$$

- 34** Dans chaque cas, calculer $a \times b$ et $\frac{a}{b}$ (donner les résultats sous la forme la plus simple possible).

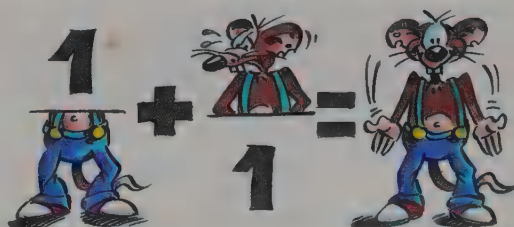
① $a = -\frac{8}{3}$ et $b = \frac{24}{-11}$

② $a = \frac{12}{5}$ et $b = -\frac{30}{25}$

③ $a = \frac{27}{5}$ et $b = -3$

35 — Vrai ou faux ?

	VRAI	FAUX
Diviser par $\frac{1}{2}$ revient à multiplier par 2		
L'inverse de (-4) est $\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$		
L'opposé de $\frac{1}{2}$ est $-\frac{1}{2}$		
$\left(-\frac{1}{3}\right) : \frac{1}{3} = -1$		



exercices

36 — Vrai ou faux ?

	VRAI	FAUX
$\frac{3}{4} : \frac{3}{4} = 1$		
L'opposé de l'inverse de 7 est $-\frac{1}{7}$		
Multiplier par trois revient à diviser par un tiers		
$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times 2 = 4$		
$3 - 2 \times \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$		

PRIORITÉS

37 — Calculer les expressions suivantes :

$$\frac{3+5}{3+4} \text{ et } \frac{3 \times 5}{3 \times 4}; \quad \frac{7+5}{5} \text{ et } \frac{7 \times 5}{5}$$

$$\frac{3}{3} + \frac{5}{4} \text{ et } \frac{3}{3} \times \frac{5}{4}; \quad \frac{7}{5} + \frac{5}{5} \text{ et } \frac{7}{5} \times \frac{5}{5}$$

$$\frac{5}{4} + \frac{5}{3} \text{ et } \frac{5}{4} \times \frac{5}{3}; \quad \frac{7}{5+5} \text{ et } \frac{7}{5 \times 5}$$

38 — Dans chaque cas, effectuer $A + B$, $A - B$, $A \times B$ et $A : B$ et simplifier le plus possible :

a) $A = \frac{3}{2}$; $B = -\frac{3}{5}$ b) $A = 2$; $B = \frac{4}{9}$

c) $A = -\frac{7}{20}$; $B = \frac{1}{10}$ d) $A = -\frac{3}{11}$; $B = -3$

39 — Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous une forme simple :

$$A = \frac{5}{14} + \frac{-2}{7} \times \frac{21}{20}; \quad B = \left(\frac{5}{14} + \frac{-2}{7} \right) \times \frac{21}{20}$$

40 — Recopier et compléter le tableau suivant :

a	b	c	$\frac{a}{b} + \frac{b}{c}$	$\frac{a+b}{c}$	$\frac{a+b}{c+c}$	$\frac{a}{c} \times \frac{b}{c}$	$\frac{a \times b}{c}$	$\frac{a \times b}{c \times c}$
2	7	4						
-3	5	2						
8	6	7						
6	-5	3						

41 — Calculer les expressions suivantes (donner le résultat sous la forme la plus simple possible) :

$$A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{6}{5}; \quad B = -\frac{26}{3} \times \frac{1}{13} + \frac{5}{13} \times \frac{39}{25}$$

$$C = \left(\frac{4}{5} - \frac{-4}{25} \right) : \frac{8}{30}; \quad D = 4 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{7} - \frac{4}{21} \right)$$

42 — Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$A = -\frac{7}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{-8}{3}; \quad B = \left(\frac{-7}{4} + \frac{1}{4} \right) \times \frac{-8}{3}$$

$$C = -\frac{7}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{-8}{3}; \quad D = \left(\frac{-7}{4} - \frac{1}{4} \right) \times \frac{-8}{3}$$

43 — Prouver que $\frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \right)$

et que $\frac{49}{40} = 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{10} \right)$.

44 — Prouver que $\frac{81}{64} \times \frac{4}{5} = 1 + \frac{1}{80}$

et que $\frac{2\,048}{2\,025} = 1 + \frac{1}{88 + \frac{1}{23}}$.

45 — Recopier et compléter le tableau suivant :

a	b	c	$a \times b + c$	$a + b \times c$
$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{6}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$		
$-\frac{1}{7}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{4}{5}$		

46 — Recopier et compléter le tableau suivant :

a	b	c	$a : b + c$	$a + b : c$
$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{15}$	$-\frac{1}{5}$		
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$		
$-\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{14}$	$\frac{5}{4}$		

47 — Recopier et compléter le tableau suivant :

a	b	c	d	$a \times b + c : d$	$a + b \times c - d$
$-\frac{9}{8}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{16}$		
2	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{14}{15}$	-7		

- 48** Calculer les expressions suivantes (donner le résultat sous la forme la plus simple possible) :

$$A = \frac{\frac{2}{15} - \frac{4}{9}}{-\frac{1}{16} + \frac{7}{8}};$$

$$B = \frac{\frac{35}{9} - \frac{34}{9} \times \frac{4}{17}}{\frac{3}{11} + \frac{30}{55}}$$

- 49** Prouver que les égalités suivantes sont vraies :

a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68} = \frac{6}{289} \times \frac{17}{3}$

50 Vrai ou faux ?

À partir des quatre nombres ci-dessous, retrouver les propositions mathématiques vraies.

$$a = 5 - \frac{5}{7}; \quad b = -5 - \frac{5}{7}$$

$$c = 5 + \frac{5}{7}; \quad d = -5 + \frac{5}{7}$$

① $b \leq d \leq a \leq c$

② $a + b \leq 0$

③ $b \times c \geq 0$

④ $a - b \geq d - c$

QUOTIENTS APPROCHÉS

- 51** a et b sont deux nombres tels que $2,1a = 0,42$ et $35b = 4,2$.

Donner la valeur exacte et une valeur approchée de $a + b$ et de ab .

- 52** Trouver la valeur exacte puis un arrondi d'un nombre t pour que :

$$\frac{t}{3} + \frac{2}{5} = 4$$

- 53** Calculer $\frac{7}{3}$ et $\frac{259}{111}$.

Les deux nombres sont-ils égaux ?

- 54** Donner une valeur arrondie au dixième des quotients suivants :

$$\frac{382}{1047};$$

$$\frac{534}{1047};$$

$$\frac{131}{1047}$$

Traduire ces résultats en pourcentage.

- 55** Au moment d'élections européennes, il y a eu 20 331 440 suffrages exprimés.



3 301 980 personnes ont voté pour la liste C,
4 153 710 pour la liste M,
4 763 026 pour la liste N,
5 666 984 pour la liste V.

- a) Calculer en pourcentage la part de chaque liste. Arrondir les résultats avec deux chiffres après la virgule.
b) En ajoutant les quatre pourcentages obtient-on exactement 100 % ? Pourquoi ?

- 56** Donner la valeur exacte et une valeur arrondie des nombres $a + b$, $a - b$, $a \times b$, en remplaçant a par $\frac{5}{7}$ et b par $\frac{8}{3}$.

- 57** Sachant que a est égal à 3 et b est égal à $\frac{1}{7}$, calculer exactement puis donner une valeur arrondie de :

- a) la somme de a et de l'inverse de b .
b) la somme des inverses de a et de b .
c) le produit des inverses de a et de b .

PROBLÈMES

- 58** ABCD est un carré, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AD].

À quelle fraction de l'aire du carré ABCD correspond l'aire du triangle CIJ ?

- 59** Trouver, si possible, un nombre tel que les $\frac{3}{4}$ de ce nombre ajoutés aux $\frac{2}{5}$ du même nombre donnent comme résultat 46.

- 60** Trouver un nombre a tel que $\frac{5+a}{15} = \frac{3}{4}$.

- 61** De combien doit-on diminuer le numérateur de la fraction $\frac{1}{3}$ pour obtenir $\frac{3}{4}$.

- 62** Chloé et Juliette partent pour une randonnée en rollers de 3 jours.

La 1^{ère} journée, elles parcourent $\frac{2}{5}$ du trajet total.

La 2^e journée, les $\frac{3}{5}$ du reste du trajet.

Quelle fraction du trajet leur restera-t-il à faire le 3^e jour ?

exercices

63 — Le cocktail Oranacoco est composé de :

$\frac{1}{3}$ de jus d'orange ; $\frac{2}{5}$ de jus d'ananas ;

$\frac{1}{10}$ de lait de noix de coco ;

et le reste d'eau gazeuse.

- Quelle fraction du cocktail représente l'eau gazeuse ?
- Quelle quantité de chaque ingrédient est-il nécessaire pour remplir une bouteille de $\frac{3}{4}$ de litre de ce cocktail ?

64 — À l'association sportive du collège, $\frac{2}{5}$ des élèves pratiquent le handball.

Parmi ceux-ci 15 % pratiquent également le football.

Quel est le pourcentage d'élèves de l'association pratiquant à la fois le handball et le football ?

65 — Les $\frac{2}{3}$ d'un champ rectangulaire sont partagés en six lots de même aire.

Quelle fraction de l'aire du champ représente chaque lot ?

66 — Un transporteur expédie 18 tonnes de pommes de terre en deux lots.

Le premier lot représente les $\frac{3}{7}$ de sa récolte,

le second lot représente les $\frac{21}{32}$ du reste.

- Quelle fraction de la récolte représente le deuxième lot ?
- Quelle quantité de pommes de terre reste-t-il après ces deux envois ?

67 — Sébastien souhaite s'acheter un ordinateur.

Ses économies représentent $\frac{1}{4}$ du prix.

Sa petite sœur lui donne $\frac{1}{6}$ du prix et son grand frère le double de ce que donne sa petite sœur.

- La somme des économies et des cadeaux est-elle suffisante ? Si non, les parents de Sébastien proposent de donner le reste.
- Quelle fraction du prix de l'ordinateur auraient-ils à donner ?

68 — Sophie a rempli les trois quarts d'une cuve d'une capacité de 1 000 litres de jus de pommes. Elle a utilisé les cinq huitièmes de ce jus pour faire du cidre, le reste servira pour faire du jus de pomme.

Quelle fraction de jus de pommes sera utilisée pour le jus de pomme ?

Combien cela fait-il de litres ?

69 — Avec l'aide de leurs professeurs, les élèves d'une classe de 4^{ème} ont préparé des émissions radiophoniques pour émettre en direct pendant deux heures. Le tiers de ce temps est consacré aux chansons dédiées. Les génériques des émissions prennent le quart du reste du temps.

Combien de temps de parole reste-t-il aux élèves ?

70 — Dans la station de ski où les élèves de 4^{ème} sont en classe de neige, il y a 1 piste noire, 3 pistes rouges, 7 pistes bleues et 5 pistes vertes. À cause du mauvais temps, la piste noire et les pistes rouges sont fermées, ainsi que les trois douzièmes des pistes bleues et vertes.

Quelle fraction du nombre des pistes reste ouverte ?

71 — Un cycliste doit parcourir une distance de 28,8 km.

Quelle fraction du trajet a-t-il parcourue au bout de $\frac{3}{4}$ d'heure, à la vitesse de 18 km/h ?

Et à la vitesse de 24 km/h ?

72 — Lors d'un saut à l'élastique, on remonte aux $\frac{3}{8}$ de la hauteur d'où l'on s'est élancé.

Si après un saut on remonte de 45 m, de quelle hauteur a-t-on sauté ?

73 — Dans une entreprise, les $\frac{2}{3}$ des employés sont des femmes et les $\frac{3}{4}$ de celles-ci ont moins de 25 ans.

Combien y a-t-il d'employés sachant qu'il y a 300 femmes de moins de 25 ans.

74 — Un rectangle ABCD a pour mesure AB = 12 cm et AD = 7 cm.

On appelle M un point du côté [AB] et on pose AM = x.

Calculer la valeur de x pour que l'aire du triangle AMD soit le tiers de l'aire du rectangle ABCD.

75 — Un écureuil dort les $\frac{3}{4}$ du temps. Cet écureuil a dormi pendant 6 ans au total.

Combien de temps a-t-il vécu ?

76 — Horaire

Calculer en minutes et secondes, les fractions d'heures suivantes :

$$\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{5}; \quad \frac{1}{12}; \quad \frac{1}{60}; \quad \frac{1}{100}$$

77 — Égyptienne

Une fraction égyptienne est une fraction d'entiers dont le numérateur est égal à 1.

Trouver le plus grand nombre de fractions égyptiennes dont la somme est égale à 1 et le dénominateur est inférieur à 100.



78 — 1) Calculer les intervalles entre deux fractions successives.

$$\text{a) } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad \text{b) } \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad \text{c) } \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \quad \text{d) } \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

2) Le calcul suivant de cette série de différence a été partiellement effacé. Compléter le :

$$\frac{1}{6} - \dots$$

3) Calculer $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (n est un nombre non nul).

En remplaçant n par les valeurs de la première question, vérifier le résultat.

79 — Une conjecture

W. Sierpinsky est un mathématicien hongrois. Il pense que pour tout nombre entier n , supérieur à 1, on peut trouver trois nombres entiers x, y, z tels que : $\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Par exemple :

- pour $n = 2$, on trouve $x = 1; y = 1; z = 2$
- pour $n = 4$, on trouve $x = 1; y = 8; z = 8$ ou $x = 2; y = 2; z = 4$

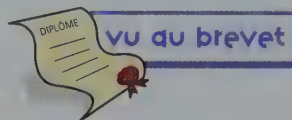
a) Vérifier les solutions trouvées pour $n = 2$ et $n = 4$

b) Vérifier la conjecture de Sierpinsky pour n prenant toutes les valeurs entières entre 5 et 10.

Pour chacune de ces valeurs trouver le plus de solutions possibles.

Présenter les réponses dans un tableau.

n	x	y	z
2			
4			
4			
5			



80 — Caen 2000

a) Effectuer les calculs suivants et donner les résultats sous la forme la plus simple possible :

$$A = \left(\frac{5}{7}\right)^2 - \frac{2}{7}; \quad C = \frac{1}{9} + \frac{1}{12}$$

b) En électricité, pour calculer des valeurs de résistances, on utilise la formule : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Sachant que $R_1 = 9$ ohms et $R_2 = 12$ ohms, déterminer la valeur exacte de R .

81 — Clermond-Ferrand

Calculer en montrant les étapes intermédiaires, et donner le résultat sous forme d'une fraction simplifiée :

$$A = \frac{\frac{11}{3} - 7}{\frac{25}{6}}; \quad B = \frac{3}{7} - \frac{2}{5} \times \frac{15}{4}$$

82 — Rennes 2000

On donne les nombres :

$$A = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) : \frac{2}{5}; \quad B = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{5}{3}$$

Calculer A et B . On écrira les résultats sous la forme de fractions aussi simples que possible.

83 — Besançon 1999

Calculer et donner les résultats sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = 3 + \frac{5}{4} \times \left(2 - \frac{1}{5}\right); \quad B = \left(\frac{11}{6} - \frac{3}{8}\right) : \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\right)$$

POUR TRAVAILLER SEUL

84 — Mots codés

Retrouver le mot caché en remplaçant le nombre trouvé par la lettre correspondante dans l'alphabet ($A = 1, B = 2$, etc.).



$$\text{globe} : \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{7}{6}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{7}\right)$$

$$\text{apple} : \frac{14}{5} : \frac{2}{15} \quad \text{apple} : \frac{-1}{2} + \frac{5}{2} \times 5$$

$$\text{star} : \frac{20}{9} \times \frac{27}{12} - 2$$

FRACTIONS ÉGYPTIENNES

Toutes nos connaissances sur les mathématiques d'Égypte ancienne sont basées sur des inscriptions existantes sur des poteries ou des papyrus. Le papyrus provient d'une plante aquatique que l'on coupait en fines lanières et que l'on tressait. Après séchage, on écrivait dessus et on le roulait pour pouvoir le transporter. Le plus connu de ces papyrus est le papyrus Rhind, il porte le nom de l'avocat écossais qui l'a acheté en 1858 à Louxor. Il est actuellement conservé au British Museum et a été écrit par le scribe Ahmes vers 1650 avant notre ère.

Les nombres sont représentés par des symboles et des hiéroglyphes. Les opérations de multiplication et de division reposent sur la multiplication par 2. Les fractions utilisées par les Égyptiens sont des fractions de mesures : mesure de capacité, comme le *hékat* qui correspond à 4,5 litres, mesure de longueur, comme la *coudée* qui correspond à 45 cm. Le plus souvent ces fractions sont les parties représentées dans l'œil d'Horus : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$.

Toutes les fractions que les Égyptiens utilisent sont décomposées en somme de fractions unitaires, c'est-à-dire qui ont 1 au numérateur. Il existe également des tables pour trouver les deux tiers de n'importe quel nombre, qu'il soit entier ou fractionnaire.

Le papyrus Rhind contient des tables qui montrent comment décomposer $\frac{2}{5}$:

Le tout est 5	1	5
$\frac{2}{3}$ de 5 est 3	$\frac{1}{3}$	3 $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$ de 5 est 1	$\frac{2}{3}$	1 $\frac{2}{3}$
$\frac{1}{15}$ de 5 est $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$



Et comme 1 $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ donne 2,

par conséquent $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Tombe de Sennejen – Thèbes.



Et il y a même des applications à des problèmes pratiques. Par exemple :

« Partage 9 pains entre 10 hommes. Pour procéder selon ce qui doit se produire, tu devras effectuer l'accroissement de $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{30}$ 10 fois. »

Solution		Résultats dans les tables
→ 1	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{30}$	$2 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
2	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{30}$	$2 \times \frac{1}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$
4	3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{10}$	$4 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
→ 8	7 $\frac{1}{5}$	
Et comme $9 = 1 + 8$, on obtient la réponse.		

Carré magique

Compléter ce carré magique. (La somme des lignes, des colonnes et des diagonales est la même.)

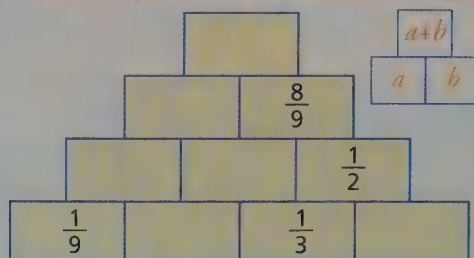
	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$
			$\frac{5}{12}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{7}{12}$		$\frac{1}{12}$	

Produits croisés

Les produits sont indiqués au bout de chaque ligne et de chaque colonne.

$\frac{1}{5}$			$\rightarrow \frac{1}{10}$
		$\frac{3}{4}$	$\rightarrow \frac{4}{5}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{35}$	

Pyramide additive



Fraction magique !!

Remplacer chaque point par un chiffre, chacun des dix chiffres est utilisé une fois et une seule. Il y a six solutions différentes.

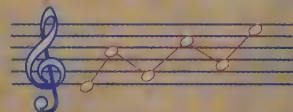
$$\frac{\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}}{= 9}$$

À travers L'Histoire

Qui penserait que les mathématiques vont se cacher dans la musique ? Et pourtant, elles y existent. Au début il y a les notes, mais aussi l'intervalle qui est le rapport entre deux sons. L'intervalle est représenté par le rapport $\frac{9}{8}$, c'est-à-dire que varier d'un ton veut dire augmenter d'un huitième. Certains intervalles portent les noms d'*octave* (on double) et de *quinte* (on augmente de la moitié). La quinte correspond aux quotients $3 : 2$ ou $6 : 4$ ou $9 : 6$, etc.

Un Grec de l'Antiquité, Aristoxène a même démontré que l'on peut, à peu près, obtenir une quinte à partir de la quarte et de la tierce.

Sur le dessin ci-contre, on a construit un intervalle de trois quartes moins deux tierces. Comme une quarte correspond à $\frac{4}{3}$ et une tierce à $\frac{5}{4}$, l'intervalle que l'on a construit correspond à :



$$\frac{\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}}{\frac{5}{4} \times \frac{5}{4}} = \frac{1024}{675}$$

« La musique » - Paolo Veronese (1528-1588).

Ce quotient est proche d'une quinte soit $\frac{3}{2}$, car $2 \times 1024 = 2048$ et $3 \times 675 = 2025$.

Il existe une petite différence qui est appelée *comma*.

Ici cette différence est égale à $\frac{1024}{675} - \frac{3}{2} = \frac{23}{1350}$ dont un arrondi est 0,017.



ce que je dois savoir sur...

...Les nombres fractionnaires et Les calculs

- ▶ Écrire des égalités entre des nombres sous une forme fractionnaire.
- ▶ Additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres écrits sous forme fractionnaire.
- ▶ Effectuer un calcul en respectant les règles de priorité.
- ▶ Trouver une valeur approchée d'un quotient.

je m'évalue

- 1 Simplifier, si possible, les expressions suivantes :

$$\frac{-45}{36}; \quad \frac{13}{-52}; \quad \frac{-121}{-55}; \quad \frac{12 \times (-5) \times 7}{(-49) \times 4 \times 15}$$

- 2 Donner sous une forme fractionnaire la plus simple possible, l'opposé et l'inverse des nombres suivants :

$$34; \quad -\frac{42}{72}; \quad \frac{-27}{4}; \quad \frac{1}{15}$$

- 3 Effectuer les calculs ci-dessous et donner les résultats sous la forme la plus simple possible.

$$A = \frac{1}{4} - \frac{3}{5}; \quad B = -\frac{2}{3} + \frac{4}{7}$$

$$C = \frac{1,2}{3,9} - \frac{0,8}{1,3}; \quad D = \frac{4}{3} \times \frac{-9}{2}$$

$$E = \frac{7}{2} : \frac{5}{3}; \quad F = \frac{143}{39} \times \frac{75}{65}$$

$$G = \frac{38}{50} : \frac{-19}{200}; \quad H = \frac{-12}{3} : \frac{-15}{-27}$$

- 4 Calculer les expressions suivantes et donner les résultats sous forme de fractions les plus simples possibles :

$$A = \frac{3}{4} \times \frac{5}{9} + \frac{8}{9}; \quad B = -\frac{13}{8} + \frac{1}{2} \times 2$$

$$C = \left(\frac{25}{7} \times \frac{21}{15} \right) : \frac{4}{3}$$

$$D = \frac{5}{4} - \frac{9}{13} \times \frac{65}{81} + \frac{11}{36}$$

$$E = \left(7 + \frac{-3}{4} \right) \times \left(-\frac{3}{15} + \frac{11}{30} \right) - \frac{25}{24}$$

- 5 Trouver un arrondi au dixième de l'opposé de $\left(\frac{-11}{7} \right)$ et une troncature au centième

$$\text{de l'inverse de } \frac{13}{4}.$$

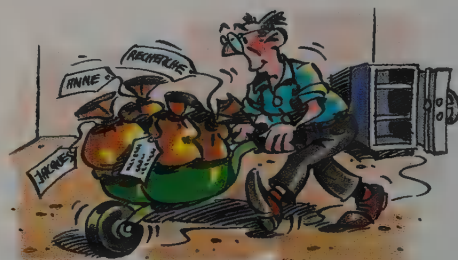
- 6 Une balle rebondit aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur où elle a été lâchée.

a) À quelle fraction de la hauteur de chute s'élève-t-elle à son deuxième rebond ?
À son troisième rebond ?

b) À quelle fraction de la hauteur de chute s'élève-t-elle à son quatrième rebond si on la lâche d'une hauteur de 162 cm ?

- 7 Un grand-père partage sa fortune en donnant un cinquième à son fils Jacques, deux huitièmes à sa fille Anne, le double de la part de Jacques à ses petits-enfants et le reste à la recherche contre le sida.

Quel pourcentage de la fortune du grand-père est consacré à la recherche contre le sida ?



Les solutions se trouvent à partir de la page 279.

PUISSANCES

En 6^{ème}-5^{ème}

➤ Multiplier et diviser un décimal par 10, 100, 1000 ou 0,1 ; 0,01 ou 0,001.

➤ Organiser, pour l'effectuer mentalement, avec papier-crayon ou à la calculatrice, une succession d'opérations.

➤ Effectuer la somme et la différence de deux nombres relatifs.

En 4^{ème}

■ Utiliser sur des exemples numériques, avec ou sans calculatrice scientifique, les égalités :

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n} ; \frac{1}{10^n} = 10^{-n} ; (10^m)^n = 10^{m \times n}$$

où m et n sont des entiers relatifs.

■ Sur des exemples numériques, écrire un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir des puissances de 10.

■ Utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement ou un ordre de grandeur.

■ Utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples des égalités telles que :

$$a^2 \times a^3 = a^5 ; \frac{a^5}{a^2} = a^3 ; (ab)^2 = a^2 b^2$$

où a et b sont des nombres relatifs non nuls.

pour démarrer



1 Multiplication par 10 ; 100 ; 1000 ou 0,1 ; 0,01 ; 0,001

• Rappel sur les multiplications et divisions par 10 ; 100 ; ... ; 0,1 ; 0,01 ; ... qui donnent encore lieu à bien des erreurs.

• On remarquera que $\times 0,1$ ou $: 10$; $\times 0,01$ ou $: 100$... donnent le même résultat.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

	$\times 10$	$: 1\ 000$	$\times 0,01$	$\times 0,1$	$\times 0,001$	$: 100$	$\times \frac{1}{100}$	$: 10$
51								
0,08								
6,2								
3,004								

2 Carrés et cubes

• Un parallèle à effectuer entre l'écriture 4^2 et cm^2 .

L'aire d'un carré de côté c est $c^2 = c \times c$, le volume d'un cube de côté c est $c^3 = c \times c \times c$.

Recopier le tableau, puis le compléter en s'inspirant des deux exemples.

	Écriture	Calcul	Résultat
Aire d'un carré de côté 4 cm	4^2	4×4	16 cm^2
Volume d'un cube de côté 4 cm	4^3	$4 \times 4 \times 4$	64 cm^3
Aire d'un carré de côté 2 m			
Volume d'un cube de côté 2 m			
Aire d'un carré de côté 1,1 dm			
Volume d'un cube de côté 1,1 dm			

3 — Attention météorite

- 1) Fabrice surfe sur Internet. Tout à coup, l'écran se brouille et un curieux message apparaît :

«Une météorite se dirige vers notre planète. Elle était hier à 16h00 à dix mille milliards de kilomètres de la Terre. Aujourd'hui, les mesures effectuées à la même heure indiquent qu'elle ne se trouve plus qu'à cent millions de kilomètres ! »

« Quel message étrange, se dit Fabrice, comment écrire dix mille milliards et cent millions en chiffres? »

- Aider Fabrice à répondre à cette question.

- 2) Alors qu'il vient de répondre à cette question, un deuxième message apparaît à l'écran :

«Le 13 décembre 2002, 16h00/Météorite-Terre : 10^{13} km.
Le 14 décembre 2002, 16h00/Météorite-Terre : 10^8 km.»

Fabrice se dit qu'il s'agit sans doute d'une notation de savants. Mais voilà qu'un nouveau message apparaît :

«Salut Fabrice, c'est moi Gaëtan. Ne t'inquiète pas, aucune météorite ne risque d'anéantir la planète Terre! Tout ceci n'est qu'un prétexte pour t'apprendre à utiliser les puissances de 10. Tu admettras qu'il est quand même plus simple d'écrire 10^{13} (ça se lit «dix exposant treize») que 10 000 000 000 000 ! Et c'est d'une simplicité enfantine puisqu'il suffit de compter le nombre de zéros qui suivent le chiffre 1 ! Pour vérifier que tu as bien compris, voici un petit exercice. Bon courage ! »

- **Exercice :** Écrire, sous la forme d'une puissance de 10 : un million, un milliard, 100 000, mille milliards, 10 000 000 000 000 et 100.

• L'écriture des grands nombres peut être une difficulté pour des élèves.

• Lecture et prise d'informations à partir d'un texte pour introduire 10^n .

4 — Avec des puissances de 10

- 1) Puissances de 10 d'exposants positifs

On peut utiliser les puissances de 10 pour l'écriture des « grands » nombres en les écrivant sous la forme $a \times 10^n$ où a et n sont des nombres entiers positifs.

Voici deux exemples :

$$320\,000 = 32 \times 10\,000 = 32 \times 10^4 ; \quad 86\,000\,000\,000 = 86 \times 1\,000\,000\,000 = 86 \times 10^9$$

Compléter le tableau suivant où les distances sont exprimées en km :

Distance Terre-Étoile polaire	397 000 000 000 000 km	$397 \times 1\,000\,000\,000\,000$	397×10^{12}
Une année lumière	9 460 000 000 000 km		
Distance Soleil-Pluton	5 900 000 000 km		
Diamètre de l'étoile Antarès	330 000 000 km		
Distance Terre-Soleil	150 000 000 km		
Rayon du soleil			696×10^3
Distance Terre-Lune		$38 \times 10\,000$	

• Utilisation des puissances de 10 à exposants positifs.

• Introduction des exposants négatifs.

2) Puissances de 10 d'exposants négatifs

On sait que : $0,01 = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10^{\dots}}$; $0,001 = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10^{\dots}}$

Par convention, on écrit : $0,01 = 10^{-2}$; $0,001 = 10^{-3}$
 10^{-2} se lit « dix exposant moins deux » ; 10^{-3} se lit « dix exposant moins trois ».

• Compléter le tableau ci-dessous :

Notation décimale	0,000 1	0,000 001		
Écriture fractionnaire	$\frac{1}{10^{\dots}} = \frac{1}{10^{\dots}}$	$\frac{1}{10^{\dots}} = \frac{1}{10^{\dots}}$	$\frac{1}{10\ 000\ 000} = \frac{1}{10^{\dots}}$	$\frac{1}{10^{\dots}} = \frac{1}{10^{\dots}}$
Puissance de 10	$10^{\dots}$	$10^{\dots}$	$10^{\dots}$	10^{-4}

• Diverses écritures d'un même nombre.

3) De la même manière que pour les puissances d'exposants positifs, on peut écrire un « petit » nombre sous la forme $a \times 10^{-n}$ où a et n sont des entiers positifs.

Exemple : $0,0025 = 25 \times 0,0001 = 25 \times 10^{-4}$

Recopier et compléter les égalités ci-dessous :

$0,03 = \dots \times \dots = \dots \times 10^{\dots}$ $0,00096 = \dots \times \dots = \dots \times 10^{\dots}$
 $0,217 = \dots \times \dots = \dots \times 10^{\dots}$ $0,000002 = \dots \times \dots = \dots \times 10^{\dots}$

• Étude d'exemples et recherche de propriétés.

• On pourra faire confronter des propositions d'élèves avant de donner les propriétés.

• Introduction de l'écriture 10^0 et éventuellement 10^1 .

5 Règles de calcul

1) Multiplication

Recopier et compléter les égalités comme sur les deux exemples suivants :

$10^3 \times 10^7 = 1\ 000 \times 10\ 000\ 000 = 10\ 000\ 000\ 000 = 10^{10}$ $10^{-3} \times 10^{-2} = 0,001 \times 0,01 = 0,000\ 01 = 10^{-5}$
 $10^5 \times 10^{-2} = \dots \times \dots = \dots$ $10^{-7} \times 10^7 = \dots \times \dots = \dots$
 $10^3 \times 10^{-7} = \dots \times \dots = \dots$ $10^{-6} \times 10^{-3} = \dots \times \dots = \dots$

Il semble que les produits de puissances de 10 vérifient une propriété. Admettre cette propriété et compléter l'égalité :

$10^m \times 10^n = 10^{\dots}$ m et n désignent des entiers relatifs.

2) Division

$\frac{10^8}{10^5} = \frac{100\ 000\ 000}{100\ 000} = 1\ 000 = 10^3$	$\frac{10^3}{10^{-1}} = \frac{1000}{0,1} = 10\ 000 = 10^4$	$\frac{10^4}{10^7} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = 10^{\dots}$
$\frac{10^{-2}}{10^2} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = 10^{\dots}$	$\frac{10^{-8}}{10^{-3}} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = 10^{\dots}$	$\frac{10^7}{10^7} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = 10^{\dots}$

Recopier et compléter les égalités comme sur les deux exemples ci-contre.

Il semble que les quotients de puissances de 10 vérifient une propriété. Admettre cette propriété et compléter l'égalité :

$\frac{10^m}{10^n} = 10^{\dots}$ m et n désignent des entiers relatifs.

• Erreur prévisible : non différenciation nombre négatif et exposant négatif.

Activités

3) Puissance de puissance

Recopier et compléter les égalités comme sur les deux exemples suivants :

$$(10^3)^2 = 10^3 \times 10^3 = 10^6 ;$$

$$(10^{-2})^4 = 10^{-2} \times 10^{-2} \times 10^{-2} \times 10^{-2} = 10^{-8}$$

$$(10^5)^2 = \dots \times \dots ;$$

$$= 10^{\dots}$$

$$(10^{-3})^3 = \dots \times \dots$$

$$= 10^{\dots}$$

$$(10^2)^{-6} = \dots \times \dots ;$$

$$= 10^{\dots}$$

$$(10^{-6})^{-4} = \dots \times \dots$$

$$= 10^{\dots}$$

Il semble que les puissances de puissances de 10 vérifient une propriété. Admettre cette propriété et compléter l'égalité :

$$(10^m)^n = 10^{\dots} \quad m \text{ et } n \text{ désignent des entiers relatifs.}$$

• Usage de la définition pour valider les résultats.

6 Notation scientifique

1) Étude avec une calculatrice scientifique

Produit	266 000 x 1 105 000	0,0069 x 0,000574
Affichages possibles de calculatrices	2.9393 x 10 ¹¹	3.9606 x 10 ⁻⁰⁶
	2.9393 11	3.9606 -06
Pour comprendre, recopier et compléter	266 000 x 1 105 000	0,0069 x 0,000574
	= 266 x 10 ^{...} x 1 105 x 10 ^{...}	= 69 x 10 ^{...} x 574 x 10 ^{...}
	= 266 x 1 105 x 10 ^{...} x 10 ^{...}	= 69 x 574 x 10 ^{...} x 10 ^{...}
	= x 10 ^{...}	= x 10 ^{...}
	= 2,939 3 x 100 000 x 10 ^{...}	= 3,960 6 x 10 000 x 10 ^{...}
Notation scientifique	2,939 3 x 10 ¹¹	3,960 6 x 10 ⁻⁶

• Peut être l'occasion d'introduire l'usage de certaines touches de la calculatrice.

• On pourra demander de faire des essais, de proposer des explications avant d'effectuer le calcul réfléchi.

• Difficulté attendue de manipulation des déplacements de virgule.

2) Exercice d'application

a) Avec une calculatrice

• Donner l'écriture décimale puis la notation scientifique des produits suivants :

$$205\,000\,000 \times 3\,008\,000 ;$$

$$0,00001812 \times 0,00709 ;$$

$$205\,000\,000 \times 0,00709$$

b) Sans calculatrice

$$5\,210\,000 = 521 \times 10^4 = (5,21 \times 10^2) \times 10^4 = 5,21 \times 10^{2+4} = 5,21 \times 10^6$$

$$0,000077 = 77 \times 10^{-6} = (7,7 \times 10^1) \times 10^{-6} = 7,7 \times 10^{1+(-6)} = 7,7 \times 10^{-5}$$

• De la même manière, donner la notation scientifique des nombres suivants :

$$876\,000 ; \quad 0,0012 ; \quad 59 ; \quad 0,000076 ; \quad 1\,357\,800\,000$$

- Vocabulaire

Un nombre écrit en notation scientifique est de la forme $a \times 10^n$ avec n entier relatif et $1 \leq a < 10$.

• Certaines calculatrices peuvent avoir des capacités d'affichage qui posent problème d'où :

- réflexion possible entre valeur exacte et valeur approchée ;

- usage de calcul réfléchi sans calculatrice.

7 — Un flocon de neige

• On pourra faire construire quelques étapes et éventuellement proposer la construction avec un triangle équilatéral, calculer des périmètres.

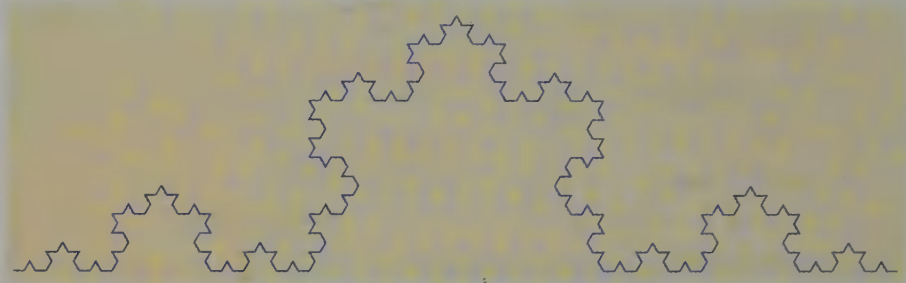
• Recherche d'un codage. La mise en commun est facilitée par l'introduction précédente des puissances de 10.

Un ordinateur affiche les courbes suivantes, réalisées à partir d'un segment de 15,9 cm.

À chaque étape successive, on partage un segment en trois parties égales.



Après un certain nombre d'étapes, on obtient une courbe appelée « flocon de Von Koch ». Ces courbes sont des fractales : une petite partie de l'objet est semblable au tout, à plus petite échelle. On peut dire qu'un chou-fleur a une structure fractale !



1) On compte le nombre de segments obtenus à chaque étape successive, compléter le tableau suivant :

Numéro de l'étape	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de segments	1	4								

2) Calculer le nombre de segments de la onzième étape ? De la seizième étape ? De la vingtième étape ? De la centième étape ? Donner les résultats en nombres entiers ou en notation scientifique.

3) À partir de l'étape 2, proposer une écriture de la réponse qui demande le moins de chiffres possibles.

4) Avec cette notation, comment écrire les réponses des étapes 0 et 1 ?

8 — Des propriétés identiques à celles des puissances de 10

• Prolongement des propriétés des calculs des puissances de 10 à celles des puissances d'un nombre.

• Différenciation signe du nombre et signe de l'exposant.

1) Recopier les égalités et compléter les exposants :

$$\frac{10^7}{10^5} = 10^{\dots} ; \quad \frac{10^6}{10^2} = 10^{\dots} ; \quad \frac{10^7}{10^7} = 10^{\dots} ; \quad \frac{10^3}{10^5} = \frac{1}{10^{\dots}} = 10^{\dots}$$

2) En prolongeant les règles connues pour les puissances de dix, recopier et compléter :

$$\frac{8^5}{8^3} = 8^{\dots} ; \quad \frac{11^9}{11^4} = 11^{\dots} ; \quad \frac{5^3}{5^3} = 5^{\dots} ; \quad \frac{7^3}{7^8} = \frac{1}{7^{\dots}} = 7^{\dots}$$

3) Recopier et compléter le tableau suivant :

Puissance	2^4	3^{-3}	4^2	6^{-1}	5^3	$(-3)^3$	$(-8)^{-2}$	$(-2)^{-3}$
Calcul	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	$\frac{1}{3 \times 3 \times 3}$						
Écriture	16	$\frac{1}{27}$						
Signe	+	+						

L'essentiel en deux pages

1 — Puissances de dix

a) Définition

Soit n un entier strictement positif :

$$10^n = \underbrace{10 \times \dots \times 10}_n = \underbrace{10 \dots\dots\dots 0}_n$$

n facteurs égaux à 10 n zéros

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0, \underbrace{0 \dots\dots\dots 01}_n$$

n chiffres après la virgule

10^n se lit dix « exposant » n .

Exemples

$$10^6 = 1\,000\,000 ;$$

$$10^{-6} = 0,000001$$

Remarque

10^0 peut apparaître à l'occasion d'une simplification d'écriture :

$$10^3 \times 10^{-3} = 1000 \times 0,001 = 1 ;$$

$$10^3 \times 10^{-3} = 10^{3+(-3)} = 10^0$$

Par convention, on écrit que $10^0 = 1$.

b) Opérations et puissances de 10

Soit n et m deux entiers relatifs :

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

$$(10^m)^n = 10^{m \times n}$$

Exemples

$$10^{-2} \times 10^5 = 10^{-2+5} = 10^3$$

$$\frac{10^6}{10^5} = 10^{6-5} = 10^1 = 10$$

$$(10^{-2})^3 = 10^{(-2) \times 3} = 10^{-6}$$

2 — Notation scientifique

Tout nombre décimal non nul peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$, avec a un nombre décimal non nul ne comportant qu'un seul chiffre non nul avant la virgule, et n un entier relatif.

Cette notation est appelée **notation scientifique** d'un nombre décimal.

Exemples

$$835\,000 = 8,35 \times 10^5$$

$$0,002\,56 = 2,56 \times 10^{-3}$$

Vocabulaire

Nombre non nul : nombre qui n'est pas égal à zéro.

3 — Puissance d'un nombre entier

a) Définition

Soit n un entier strictement positif et a un nombre relatif :

$$a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{avec } a \text{ différent de } 0).$$

Par convention : $a^0 = 1$ avec a différent de 0.

Exemples

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (-8); \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}; \quad (-75)^0 = 1$$

b) Opérations et puissances d'un nombre entier

Soit n et m deux entiers relatifs :

$$a^m \times a^p = a^{m+p}$$

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$$

(avec a non nul)

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

(avec b non nul)

Exemples :

$$2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$\frac{2^3}{2^7} = 2^{3-7} = 2^{-4}$$

$$2^3 \times 2^5 = (2 \times 5)^3 = 10^3$$

$$\frac{3^2}{5^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Remarque

Les propriétés des puissances de nombres concernent soit le même nombre, soit le même exposant.

c) Règles de priorités

- En l'absence de parenthèse, les calculs sur les puissances ont priorité.
- En présence de parenthèses, les calculs entre parenthèses ont priorité.

$$7 - 3^2 \times 4 = 7 - 9 \times 4$$

$$= 7 - 36$$

$$= -29$$

$$(3 + 5)^2 \times (3^2 + 5^2) = 8^2 \times (9 + 25)$$

$$= 64 \times 34$$

$$= 2176$$

d) Avec une calculatrice

Pour calculer 2^5 avec une calculatrice,

on utilise les touches $\boxed{2}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ ou $\boxed{2}$ $\boxed{\uparrow}$ $\boxed{5}$, selon les modèles.



CALCULATRICE ET PUISSANCES DE 10



Suivant les modèles, on utilise la touche $\boxed{\times 10^x}$, $\boxed{EE}$, ou $\boxed{EXP}$

À savoir avant de commencer

Sur certains modèles, on peut choisir le type d'affichage du résultat, en écriture décimale ou avec des puissances de dix.

Deux exemples sont cités dans cette page, mais pour savoir que faire avec sa calculatrice personnelle, il faut consulter le mode d'emploi de la calculatrice et l'avoir donc toujours sur soi.

Lorsque les résultats dépassent la capacité d'affichage de la calculatrice (en général huit ou dix chiffres) le résultat est exprimé avec des puissances de 10.



Si on lit : $\boxed{2 \quad 05}$ sur l'écran de la calculatrice, on écrit 2×10^5 .

Écriture décimale d'un nombre

Suivre les consignes données dans le tableau, et vérifier la concordance avec le résultat obtenu sur la calculatrice :

Pour entrer	On tape	On obtient
$7,2 \times 10^6$	$\boxed{7} \boxed{.} \boxed{2} \boxed{\times 10^x} \boxed{6} \boxed{=}$	7 200 000
$0,008 \times 10^9$	$\boxed{0} \boxed{.} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{8} \boxed{\times 10^x} \boxed{=}$ $\boxed{9}$	8 000 000
694×10^{-5}	$\boxed{6} \boxed{9} \boxed{4} \boxed{\times 10^x} \boxed{(-)} \boxed{5} \boxed{=}$	0,006 94

Écriture avec des puissances de 10

Pour obtenir l'écriture avec des puissances de 10, on utilise, suivant les modèles :

- la seconde fonction de la touche EE ;
- un autre « mode » ;
- une autre fonction d'un menu ;
- une autre procédure non citée ici, mais décrite certainement dans le mode d'emploi.

Entrer les nombres suivants et vérifier les affichages sur la calculatrice :

Nombre	$8,5 \times 10^5$	$0,7 \times 10^{-3}$	$14,2 \times 10^{-6}$	$0,04 \times 10^8$
Écriture décimale	850 000	0,000 7	0,000 0142	4 000 000
Sur la calculatrice avec des puissances de 10	$8,5 \quad 05$	$7 \quad -04$	$1,42 \quad -05$	$4 \quad 06$

Calcul

Pour entrer	On tape	On obtient
$56 \times 10^{-6} \times 32 \times 10^4$	$\boxed{5} \boxed{6} \boxed{\times 10^x} \boxed{(-)} \boxed{6} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{\times 10^x} \boxed{4} \boxed{=}$	17,92 ou $1,792 \times 10^1$
$41 \times 10^{-3} + 56 \times 10^{-2}$	$\boxed{4} \boxed{1} \boxed{\times 10^x} \boxed{(-)} \boxed{3} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{\times 10^x} \boxed{(-)} \boxed{3} \boxed{=}$	0,601

Se méfier de la calculatrice !



La calculatrice ne donne pas toujours le bon résultat.

Si on entre le calcul $10^7 + 10^{-7} - 10^7$, la machine affiche $\boxed{0}$, alors que le résultat exact est 10^{-7} , ce nombre est très petit et la machine le néglige.

exercices

PUISSANCES DE 10



- 1 Calculer les puissances de 10 suivantes :

10^3 ; 10^8 ; 10^7 ; 10^5

- 2 Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 :

1 000 ; 10 000 ; 1 ; 1 000 000 000

- 3 Calculer les puissances de 10 suivantes :

10^{-2} ; 10^{-1} ; 10^{-7} ; 10^{-9}

- 4 Écrire les nombres suivants sous forme de puissance de 10 :

0,1 ; 0,00001 ; 0,001 ; 0,0000000001

- 5 Écrire sous forme de puissance de 10 :

un million ; un centième ; mille ; un milliard ;
un millième ; un dixième ; dix millions ;
cent mille ; un dix-millième.

- 6 Écrire sous forme du produit d'un entier, le plus petit possible, par une puissance de 10.

• Exemple :

$$357\,000\,000 = 357 \times 1\,000\,000 = 357 \times 10^6$$

• Faire de même avec :

2 500 000 ; 0,03704 ; 30 milliards ; 0,0248

- 7 Écrire sous forme du produit d'un entier, le plus petit possible, par une puissance de 10 :

-4 560 000 ; 0,056 ; -9,28 ; 6,004
Douze millions sept cent mille.

- 8 Le Capitaine Haddock s'écrie : « Mille milliards de sabords ! ».

Traduire cette expression avec une puissance de dix.

- 9 Recopier et compléter avec une puissance de 10 :

1 km = mm	1 tonne = g	1 cm = km
1 m ² = km ²	1 dm ³ = mm ³	1 cL = L

- 10 Écrire sous forme décimale :

$$\begin{array}{ll} 17 \times 10^4 ; & 0,047 \times 10^3 \\ 56 \times 10^{-2} ; & 4372 \times 10^{-3} \end{array}$$

- 11 Écrire sous forme décimale :

$$\begin{array}{ll} 7,47 \times 10^3 ; & 3521 \times 10^{-6} \\ -31,05 \times 10^{-2} ; & 2,53 \times 10^4 \end{array}$$

- 12 Donner une écriture décimale de :

$$A = 10^3 + 10^{-1}$$

$$B = 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$$

$$C = 3,5 \times 10^2 + 0,5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 5 \times 10^{-2}$$

- 13 Recopier et compléter :

a) $37\,321 = 37,321 \times 10^{\dots}$

b) $0,0027 = 2,7 \times 10^{\dots}$

c) $1\,250\,000 = 12,5 \times 10^{\dots}$

d) $12,541 = 1\,254,1 \times 10^{\dots}$

e) $7\,123,93 = \dots \times 10^{-1}$

f) $841,789 = \dots \times 10^2$

Exercice résolu

Déplacer la virgule dans un nombre

Énoncé

Par quelles puissances de 10 faut-il compléter les égalités ci-dessous pour qu'elles soient justes ?

$$54,9 = 0,549 \times 10^{\dots} ; \quad 54,9 = 54900 \times 10^{\dots}$$

Exemple de solution

Dans 0,549, il faut décaler la virgule de deux rangs vers la droite pour obtenir 54,9. Il faut donc multiplier 0,549 par 10^2 :

$$54,9 = 0,549 \times 10^2$$

Dans 54 900, il faut décaler la virgule de trois rangs vers la gauche pour obtenir 54,9. Il faut donc multiplier 54 900 par 10^{-3} :

$$54,9 = 54\,900 \times 10^{-3}$$

exercices

14 Compléter les égalités suivantes avec une puissance de 10 :

a) $34,125 = 0,034125 \times \dots$

b) $34,125 = 341,25 \times \dots$

c) $34,125 = 34\,125 \times \dots$

d) $34,125 = 3,4125 \times \dots$

e) $34,125 = 34,125 \times \dots$

15 Compléter les égalités suivantes avec une puissance de 10 :

a) $0,0017 = 1\,700 \times \dots$

b) $0,0017 = 17 \times \dots$

c) $0,0017 = 1,7 \times \dots$

d) $0,017 = 0,17 \times \dots$

16 Recopier et compléter les égalités suivantes :

a) $5,24 = \dots \times 10^3$ b) $47,2 = \dots \times 10^{-2}$

c) $256 = \dots \times 10^5$ d) $13 = \dots \times 10^{-4}$

17 Recopier et compléter par la puissance de 10 qui convient :

a) $57,2 \times 10^3 = 5,72 \times 10^{\dots}$

b) $628,3 \times 10^{-2} = 6,28 \times 10^{\dots}$

c) $0,09 \times 10^4 = 9 \times 10^{\dots}$

d) $314,1 \times 10^{-5} = 3,141 \times 10^{\dots}$

18 Deux maisons sont distantes de 150 m. Compléter par la puissance de 10 ou l'unité qui convient pour exprimer autrement cette distance :

a) $150 \text{ m} = 15 \times 10^2 \dots$

b) $150 \text{ m} = 0,15 \times 10^{\dots} \text{ mm}$

c) $150 \text{ m} = 1\,500 \times 10^{\dots} \text{ hm}$

d) $150 \text{ m} = 1,5 \times 10^{-1} \dots$

UTILISER LES PROPRIÉTÉS DES PUISSANCES DE 10

19 Écrire sous forme d'une seule puissance de 10 :

$A = 10^8 \times 10^3$; $B = 10^{-4} \times 10^2$; $C = 10^{-3} \times 10^{-2}$

$D = 10^5 \times 10$; $E = 10^0 \times 10^6$; $F = 10^5 \times 10^{-5}$

20 Écrire sous forme d'une seule puissance de 10 :

$A = 10^{-8} \times 10^9 \times 10^3$; $B = 10^{-2} \times 10^{-3} \times 10^{-1}$

$C = 10 \times 10^{-9}$; $D = 10^2 \times 10^5 \times 10^{-7}$

21 Écrire sous forme d'une seule puissance de 10 :

a) $\frac{10^6}{10^4}$ b) $\frac{10^2}{10^5}$ c) $\frac{10^{-3}}{10^5}$ d) $\frac{10^4}{10^3}$

22 Écrire sous forme d'une seule puissance de 10 :

a) $\frac{10^7}{10^9}$ b) $\frac{10^{-4}}{10^2}$ c) $\frac{10^{12}}{10^{-4}}$

d) $\frac{10^5}{10^{-5}}$ e) $\frac{10^{-6}}{10^{-15}}$ f) $\frac{10^{-12}}{10^{-5}}$

23 Écrire sous forme d'une seule puissance de 10 :

a) $\frac{10^4 \times 10^{-8}}{10^5 \times 10^3}$ b) $\frac{10^{-3} \times 10^7}{(10^2)^4}$

d) $\frac{10^2 \times 10^{-7}}{10^2 \times 10^{-3}}$ e) $\frac{10 \times (10^{-3})^5}{10^{-9}}$

24 Écrire sous forme d'une seule puissance de 10 :

$(10^3)^5 = \dots$; $(10^{-2})^6 = \dots$;

$(10^4)^{-3} = \dots$; $(10^{-3})^{-2} = \dots$

25 Recopier et compléter :

a) $10^{\dots} \times 10^{-2} = 10^4$

b) $10^{12} \times 10^{\dots} = 10^{15}$

c) $10^{\dots} \times 10^9 = 10^7$

d) $10^{-3} \times 10^{\dots} = 10^{-11}$

e) $10^{-3} \times 10^{\dots} \times 10^{-4} = 10^{-7}$

26 Recopier et compléter :

$$\frac{10^{\dots}}{10^3} = 10^6; \quad \frac{10^{-5}}{10^{\dots}} = 10^{-7}$$

$$\frac{10^{\dots}}{10^{-7}} = 10^{12}; \quad \frac{10^{-4}}{10^{\dots}} = 10^5$$

27 Compléter les égalités par un exposant convenable :

a) $10^3 \times 10^{\dots} = 10^{-6}$ b) $10 \times 10^{\dots} = 10^3$

c) $\frac{10^3}{10^{\dots}} = 10^{-6}$ d) $10^{\dots} \times 10^{-7} = 10^{-7}$

28 Un seul des nombres ci-dessous ne s'écrit pas sous la forme d'une seule puissance de 10. Le retrouver.

$$a = \frac{10^7}{10^2}; \quad b = 10^7 \times 10^{-10} \times 10^{-2}$$

$$c = (10^2)^{-3}; \quad d = 1; \quad e = (10^{-2})^{-5}$$

$$f = 10^2 + 10^{-2}; \quad g = 10^3 \times 10^{-5} \times 10^2; \quad i = 10$$

NOTATION SCIENTIFIQUE

MÉTHODE

Écrire un nombre en notation scientifique

Soit $A = 549 \times 10^{-13}$.

Pour trouver la notation scientifique de A, on procède par étapes :

- $549 = 5,49 \times 10^2$
- $A = 5,49 \times 10^2 \times 10^{-13}$
- On réduit les puissances de 10 :
 $10^2 \times 10^{-13} = 10^{-11}$
 donc $A = 5,49 \times 10^{-11}$.

29 Les expressions ci-dessous sont-elles en notation scientifique ?

- a) $-2,456 \times 10^{-3}$ b) $11,45 \times 10^{18}$
 c) 3,56 d) $0,782 \times 10^{-5}$

30 Donner la notation scientifique des expressions suivantes :

A = 1974 ; B = 1 394 000
 C = -0,00754 ; D = 0,0506

31 Donner la notation scientifique des expressions suivantes :

E = 25×10^4 ; F = $0,463 \times 10^3$

G = 456×10^{-5} ; H = $0,0055 \times 10^{-2}$

32 Donner la notation scientifique des nombres suivants et les ranger par ordre croissant :

a = 240×10^4 ; b = 1 283 000

c = 0,036 ; d = $0,412 \times 10^4$

33 Donner la notation scientifique des nombres suivants et les ranger par ordre décroissant :

a) 256×10^3 b) $0,276 \times 10^3$ c) 25 856

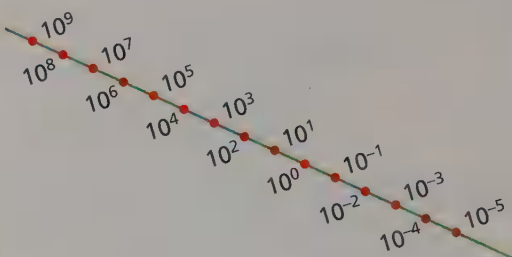
d) 0,065 e) $83,65 \times 10^{-3}$ f) Quinze milliards

34 Placer les nombres suivants sur la droite ci-dessous :

a = 4×10^7 ; b = 2×10^3 ; c = $4,5 \times 10^2$

d = $2,7 \times 10^{-3}$; e = $2,3 \times 10^{-5}$; f = 4×10^4

g = 7×10^2 ; h = 2×10^{-2} ; i = 7×10^{-5}



35 QCM

Indiquer la lettre correspondant à la bonne réponse.

	A	B	C
$10^3 = \dots$	1 000	0,001	30
$10^{-3} = \dots$	1 000	0,001	-30
$10^0 = \dots$	0	1	10
$10^5 \times 10^2 = \dots$	10^3	10^7	10^{10}
$\frac{10^5}{10^2} = \dots$	10^3	10^7	10^{10}
$10^{-3} \times 10^8$	10^5	10^{-11}	10^{-24}
$(10^3)^{-4} = \dots$	10^{-1}	10^{-7}	10^{-12}
$(10^{-2})^{-6} = \dots$	10^{12}	10^{-4}	10^{-8}
La notation scientifique de 1300 est ...	$0,13 \times 10^4$	$1,3 \times 10^3$	13×10^2
La notation scientifique de $0,07 \times 10^{-4}$ est ...	7×10^{-2}	7×10^{-6}	7×10^2

exercices

PUISSANCE DE 10 ET CALCULS

Exercice résolu

Organisation d'un calcul, multiplications et divisions

Énoncé

a) Calculer le produit :

$$A = 5 \times 10^5 \times 9 \times 10^{-3}$$

b) Calculer le quotient : $B = \frac{3,2 \times 10^3}{4 \times 10^5}$

Exemple de solution

a) On regroupe les nombres décimaux et les puissances : $A = 5 \times 9 \times 10^5 \times 10^{-3}$

On effectue les calculs avec les règles spécifiques aux puissances :

$$A = 45 \times 10^{5+(-3)}$$

$$A = 45 \times 10^2$$

b) On regroupe les nombres décimaux et les puissances :

$$B = \frac{3,2}{4} \times \frac{10^3}{10^5}$$

On effectue les calculs avec les règles spécifiques aux puissances :

$$B = 0,8 \times 10^{-3-5}$$

$$B = 0,8 \times 10^{-8}$$

- 36** Calculer les expressions suivantes et donner les résultats sous la forme de produit d'un nombre par une puissance de 10 :

$$A = 0,25 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-9}$$

$$B = (-0,1 \times 10^5) \times (9 \times 10^{-3})$$

$$C = 5 \times 10^7 \times 2 \times 10^4$$

- 37** Calculer et donner la notation scientifique des expressions suivantes :

$$A = \frac{8 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-1}} ;$$

$$B = \frac{27 \times 10^{-3}}{15 \times 10^8}$$

$$C = \frac{24 \times 10^6}{40 \times 10^{-5}} ;$$

$$D = \frac{28 \times 10^5}{0,7 \times 10^2}$$

- 38** Calculer et donner la notation scientifique des nombres suivants :

$$a = 4 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-5} ; \quad b = \frac{6 \times 10^{-2}}{1,2 \times 10^3}$$

$$c = 9 \times 10^2 \times 0,5 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-4} ; \quad d = \frac{12 \times 10^4}{10^{-6}}$$

ORDRE DE GRANDEUR

MÉTHODE

Trouver l'ordre de grandeur d'un résultat

Énoncé

Comment trouver un ordre de grandeur du produit $7 \times 1,2 \times 10^6$?

Exemple de solution

• On sait que $7 \times 1,2 \times 10^6 = 8,4 \times 10^6$.

• On remplace 8,4 par la puissance de 10 la plus proche : $8,4 \approx 10$.

$$\text{Donc } 7 \times 1,2 \times 10^6 \approx 10 \times 10^6$$

$$7 \times 1,2 \times 10^6 \approx 10^7$$

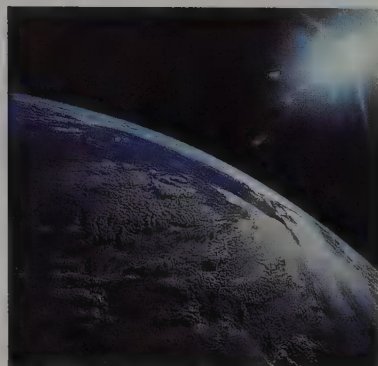
Un ordre de grandeur de $7 \times 1,2 \times 10^6$ est 10^7 .

- 39** Donner un ordre de grandeur des nombres suivants :

$$11,3 \times 10^{12} ; \quad 6,7 \times 4 \times 10^{-7}$$

$$49,3 \times 2 \times 10^{-15} ; \quad 9,3 \times 9,6 \times 10^{16}$$

- 40** On considère que la Terre tourne autour du Soleil en décrivant un cercle (sa trajectoire réelle est de forme ovale). Le rayon de ce cercle mesure 150 000 000 km.



- a) Calculer un ordre de grandeur de la distance que la Terre parcourt en une année.
b) Calculer un ordre de grandeur de la distance que la Terre parcourt en une seconde.

- 41** Une distance de 150 millions de km sépare la Terre et le Soleil. Entre la Terre et Alpha de Centaure, l'étoile la plus proche après le Soleil, il y a 42 années lumière. Une année lumière est égale à $9,46 \times 10^{12}$ km.

Calculer un ordre de grandeur de ces deux distances et les comparer.

PUISSANCE D'UN NOMBRE

- 42** Calculer :

$$\begin{aligned} a &= 2^{13}; & b &= 6^2; & c &= 11^3 \\ d &= 10^4; & e &= 5^2; & f &= 2^5 \\ g &= 0,1^3; & h &= 1^3 \end{aligned}$$

- 43** Calculer et donner le résultat sous forme fractionnaire ou décimale :

$$\begin{aligned} a &= 3^3; & b &= \frac{9}{6^2}; & c &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ d &= 9^1; & e &= -5^2; & f &= -10^5 \\ g &= 0,4^2; & h &= 2^6 \end{aligned}$$

- 44** Parmi les nombres ci-dessous, quels sont ceux qui sont positifs ?

$$\begin{aligned} A &= 2^7; & B &= (-4)^2; & C &= 5^{-3} \\ D &= (-3)^{-2}; & E &= (-10)^5; & F &= -6^2 \\ G &= 0^{14}; & H &= (-5)^0; & I &= 1^{-6} \end{aligned}$$

- 45** Parmi les nombres ci-dessous, quels sont ceux qui sont positifs ?

$$\begin{aligned} a) & (-1)^{15} & b) & 2^{-9} & c) & -7^8 \\ d) & 0^{-4} & e) & 1^{-13} & f) & -6^{-13} \\ g) & (-3)^{-5} & h) & (-456)^0 \end{aligned}$$

- 46** Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
2^n					
$(-2)^n$					
2^{-n}					
-2^n					

- 47** Vrai ou faux

Recopier et compléter en mettant une croix dans la case qui convient.

	VRAI	FAUX
$5^{-2} = -25$		
$(-3)^4 = -81$		
$2^{-2} = \frac{1}{4}$		
$7^3 = 21$		
$5^2 = 500$		

- 48** Ah! la calculatrice

Dans chaque cas, utiliser une calculatrice pour calculer les expressions ci-dessous puis comparer les.

a) $3 \text{ EXP } 5$ (ou selon les modèles

$3 \text{ EE } 5$) et $3 \text{ } x^y \text{ } 5$.

b) $10 \text{ EXP } 5$ (ou selon les modèles

$10 \text{ EE } 5$) et $10 \text{ } x^y \text{ } 5$.

CALCULS ET PROPRIÉTÉS DES PUISSANCES D'UN NOMBRE

- 49** Écrire les nombres suivants sous la forme a^n , où a et n sont des entiers relatifs :

$$A = 2^3 \times 2^{-6}; \quad B = \frac{2^3}{2^{-6}}; \quad C = \frac{3^6}{3^5}$$

$$D = 5^4 \times 2^4; \quad E = (4^3)^2; \quad F = 6^{-2} \times 6^{-5}$$

- 50** Écrire les nombres suivants sous la forme a^n , où a et n sont des entiers relatifs :

$$A = 2^4 \times 2^{-5} \times 2^7; \quad B = 3 \times 3^{-5}$$

$$C = 4^3 \times 4^{-8} \times 4^5; \quad D = \frac{3^5}{3^8}$$

$$E = \frac{(-2)^5 \times (-2)^9}{(-2)^{11}}; \quad F = \frac{7^5}{7^{-5}}$$

exercices

CALCULS ET PRIORITÉS

- 51** — Écrire les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance :

$$A = 4^{10} \times 5^{10} ; \quad B = 7^{-2} \times 5^{-2}$$

$$C = \frac{3^4}{15^4} ; \quad D = \frac{(-2)^5 \times 8^5}{4^5}$$

- 52** — Écrire les nombres suivants sous la forme a^n , où a et n sont des entiers relatifs :

$$A = ((-3)^7)^5 ; \quad B = (4^{-3})^{-2}$$

$$C = (5^7)^2 \times 5^{-12} ; \quad D = \frac{3^{11} \times 3^9}{3^5 \times 3^8}$$

$$E = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$F = \frac{(7^3)^2 \times 7^{-5}}{7^3 \times 7^2}$$

53 — QCM

Indiquer la bonne réponse pour chacune des lignes du tableau suivant :

	A	B	C	D
① $3^4 \times 3^7$	3^{11}	3^{28}	9^{11}	9^{28}
② $3^4 \times 5^7$	8^{11}	15^{11}	15^{28}	$6\,328\,125$
③ $(3 \times 5)^2$	3×5^2	$3^2 \times 5^2$	30	6×10
④ 21^4	42^2	3×7^4	$3^4 \times 7$	$3^4 \times 7^4$
⑤ $\frac{5^3}{5^7}$	$\frac{3}{7}$	5^{10}	1^{-4}	5^{-4}
⑥ $\frac{9}{9^{-4}}$	$\frac{0}{9^{-3}}$	$\frac{1}{-4}$	9^{-3}	9^{-5}
⑦ $\left(\frac{5}{2}\right)^3$	$\frac{15}{6}$	3^3	$\frac{5^3}{8}$	$5^3 \times 2^3$

- 54** — Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance :

$$A = 2^5 \times 8 ; \quad B = 5^3 \times 10^7 \times 2^{-7}$$

$$C = 27 \times 3^4 \times 2^0$$

- 55** — Écrire les expressions suivantes sous forme d'une seule puissance :

$$A = (-5)^4 \times \frac{(-5)^{-2}}{(-5)^2} ; \quad B = 5^{-2} \times 5^{-3} \times (-5)^7$$

$$C = \frac{3^4 \times 3^3}{(-3)^7 \times (-3)^{-1}}$$

Exercice résolu

Puissances et priorités opératoires

Énoncé

Calculer $\frac{4}{5^2} - 3 \times 10^{-2}$.

Exemple de solution

En l'absence de parenthèses, les puissances ont priorité sur toutes les autres opérations.

$$\frac{4}{5^2} - 3 \times 10^{-2} = \frac{4}{25} - 3 \times 0,01 = 0,16 - 0,03 = 0,13$$

Le nombre 0,13 s'écrirait $1,3 \times 10^{-1}$ en notation scientifique.

- 56** — Calculer :

$$-2^6 ; (-2)^6 ; 5 + 2^2 ; (5 + 2)^2 ; 7 \times 2^3 ; (7 \times 2)^3$$

$$\frac{1^2}{4} ; \quad \left(\frac{1}{4}\right)^2 ; \quad \frac{1}{4^2}$$

- 57** — Calculer :

$$(5 + 3 \times 4)^2 ; \quad (5 + 3) \times 4^2 ; \quad 5 + 3 \times 4^2$$

$$5 + (3 \times 4)^2 ; \quad 5^2 - 3^2 \times 4^2$$

- 58** — Calculer :

$$a = 3 - 4 \times (5 - 6)^{-7} ; \quad b = [7 \times (-1)]^2$$

$$c = (-6)^2 + 32 \times (-2)^3$$

- 59** — Calculer :

$$a = 4^3 - 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 ; \quad b = 2^{-3} \times 7 - 7 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$c = (3 - 2^2)^{-5} + \frac{5^3}{4}$$

- 60** — Calculer et mettre sous la forme d'une écriture fractionnaire :

$$a = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 ; \quad b = (5 \times 10^{-2}) - 3 \times 10^{-1}$$

$$c = (4 - 3^2)^{-2}$$

- 61** — On donne :
- $$A = 5132 \times 10^{-5}; \quad B = 10^6$$
- $$C = 41\,050\,000\,000; \quad D = 0,000055$$
- Calculer les expressions suivantes et donner les réponses en notation scientifique :

$$A \times D; \quad \frac{C}{D}; \quad B \times C; \quad \frac{A+D}{B}$$

62 — Ah ! la calculatrice

Dans chaque cas, utiliser une calculatrice pour calculer les trois expressions données puis comparer les.

a) $\boxed{3} \boxed{\text{EXP}} \boxed{5} \boxed{-} \boxed{300\,000}$

$\boxed{3} \boxed{x^y} \boxed{5} \boxed{-} \boxed{300\,000}$

$\boxed{3} \boxed{x^y} \boxed{5} \boxed{-} \boxed{343}$

b) $7 \times 10^8 - 7$; $7 \times 10^8 - 70$; $7 \times 10^8 - 700$

- 63** — Calculer à l'aide de la calculatrice et donner le résultat en notation scientifique.

$$A = 16,3 \times 10^{-5} \times 6,5 \times 10^{-9}$$

$$B = 33,6 \times 10^8 : 0,0005$$

$$C = 57,98 \times 1000 \times 10^{-2} + 0,7 \times 10^3$$

- 64** — Pour fêter le passage à l'euro, un commerçant a décidé d'afficher certains prix à l'aide d'une suite de calculs mathématiques.

$$\text{Gomme : } \frac{10^6}{2 \times 10^2} - \frac{35}{2 \times 10^2}$$

$$\text{Livres : } 957,3 \times 10^{-2} + \frac{16,4 \times 10^3}{8 \times 10^4} + \frac{53 \times 10^{-2}}{2,5}$$

$$\text{Équerre : } 4,42 \times 10^{-2} + 20,29 \times 10^{-1} - 0,0054 \times 10^2$$

En détaillant les calculs, retrouver l'écriture habituelle du prix, en euros, de chacun des trois articles.

- 65** — Calculer l'expression $E = x^3 + x^2 - 5$ pour $x = -2$.

- 66** — Calculer l'expression $F = (3 - x)^y$ pour

a) $x = y = -2$

b) $x = 5$ et $y = -1$

c) $x = -1$ et $y = -3$

Donner les résultats sous la forme d'une fraction.

- 67** — Calculer l'expression $G = a^3 - 2a^2 - a + 1$ pour :

$a = 3$

$a = -1$

$a = -5$

- 68** — Calculer l'expression $H = (3x)^2 - 3x^2$ pour $x = -2$.

PROBLÈMES



- 69** — Si douze allumettes pèsent 16,8 grammes à combien correspondent trois tonnes d'allumettes ?

- 70** — Un billet de 5 € a une épaisseur de 10^{-2} mm.

• Quelle épaisseur obtiendrait-on avec un milliard de billets ?

• Exprimer le résultat en mètres.

- 71** — L'Angström est l'unité de longueur qu'utilisent les chimistes. Un Angström (noté 1 Å) est égal à 10^{-10} mètres.

Le diamètre d'un virus est d'environ 2×10^{-10} m.

• Exprimer ce diamètre en Angströms.

• Si on mettait un million de ces virus côte à côte, on obtiendrait une largeur de combien d'Angströms ?



- 72** — Le physicien Avogadro a montré qu'il y avait environ $6,03 \times 10^{23}$ molécules d'eau dans 18 g d'eau.

Combien y a-t-il de molécules d'eau dans un milliardième de gramme d'eau ? Donner ce résultat en notation scientifique.

- 73** — Un mm^3 de sang humain contient cinq millions de globules rouges et 7 000 globules blancs.

Sachant que le corps humain contient 5 litres de sang, combien contient-il de globules rouges et de globules blancs ?

exercices

74 a) On a évalué à 4 500 000 000 années la durée d'existence de la Terre depuis sa formation. Combien de secondes se sont écoulées depuis la formation de la Terre ?

b) Combien de secondes se sont écoulées depuis votre naissance ?

75 Les distances interstellaires (entre étoiles) sont exprimées en années-lumière (*a.l.*). Une *a.l.* est égale à $9,46 \times 10^{12}$ kilomètres. Convertir les distances ci-dessous en kilomètres (utiliser la notation scientifique) :

Distance Terre - étoile Bételgeuse : 650 *a.l.*

Distance Terre - β Orion : 540 *a.l.*

Distance Terre - α cygne : 400 *a.l.*

Distance Terre - étoile polaire : 42 *a.l.*

Distance Terre - Altair : 15,7 *a.l.*

Distance Terre - α du centaure (étoile la plus proche du soleil) : 4,4 *a.l.*

76 Bactéries

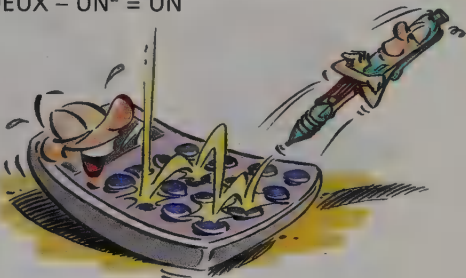
Une population de bactéries double toutes les heures.

Par quel nombre la population de bactéries est-elle multipliée au bout de 3 h ? De 5 h ? De 9 h ? De n heures ?

77 C'est crypté

Remplacer chaque lettre par un chiffre différent pour que l'égalité soit vraie.

DEUX - UN² = UN



78 Anniversaire

Mammy a deux petits-enfants : Raphaëla et Charlotte. Depuis leur naissance, elle leur a donné des euros à chacun de leur anniversaire de la façon suivante :

Raphaëla : 1^3 ; $1^3 + 2^3$; $1^3 + 2^3 + 3^3$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$; ...

Charlotte : 1^2 ; $(1 + 2)^2$; $(1 + 2 + 3)^2$; $(1 + 2 + 3 + 4)^2$; ...

a) Y a-t-il une différence entre les sommes reçues par Charlotte et Raphaëla ?

b) Calculer les sommes totales données par Mammy jusqu'à leur sixième anniversaire.

79 Calculs à la pelle

1) Effectuer les calculs suivants :

a) $1 + 2$; $1 + 2 + 2^2$

b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3$; $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

c) $\frac{1 - 2^2}{1 - 2}$; $\frac{1 - 2^3}{1 - 2}$; $\frac{1 - 2^4}{1 - 2}$; $\frac{1 - 2^5}{1 - 2}$

2) Comparer les résultats du a) et du b).

3) Remplacer 2 par 3 et écrire des égalités semblables à celles trouvées au 2).

Écrire une généralisation du résultat. Ce résultat est vrai pour tout nombre sauf 1, il sera démontré au lycée.

80 Puissance finale

Vérifier que $3^7 = 2187$. On dit que 7 est une puissance finale de 3 car 7 est le chiffre des unités de 3^7 .

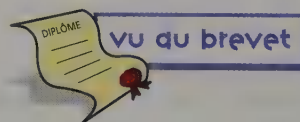
Trouver la plus petite puissance finale de 2, c'est-à-dire trouver le plus petit entier n tel que 2^n se termine par n .

81 Une légende

Dans le temple de Bénarès, en Inde, trois aiguilles en diamant sont fixées et sur l'une d'elles sont empilés 64 disques d'or pur. La légende dit que la fin du monde arrivera lorsque les moines auront déplacé les disques d'une aiguille à une autre en respectant la règle suivante :

« On ne peut déplacer qu'un disque à la fois et on ne peut le déposer que sur un disque de diamètre plus grand que lui. »

Si les moines déplacent un disque toutes les secondes, calculer combien de secondes prendrait la reconstitution de l'empilement, puis transformer le résultat approximativement en milliard d'années.



82 Groupe Ouest 2001

Donner l'écriture décimale de :

$$B = -4^2 + 10^3 \times 10^{-1} + (-3)^2$$

83 Espagne-Portugal 2001

Donner la notation scientifique du nombre F :

$$F = \frac{3 \times 10^2 \times 1,2 \times 10^{-5}}{15 \times 10^2}$$

84 ■ Vanuatu 2001

En détaillant les calculs, donner la notation scientifique, puis l'écriture décimale, de :

$$C = \frac{4 \times 10^6 \times 3,3 \times 10^{-7}}{6 \times 10^3}$$

85— Dijon 1994

Écrire en notation scientifique :

$$D = 0,000\,000\,000\,037; \quad E = 58\,300\,000\,000$$

$$F = 6,2 \times 10^{25} \times 5 \times 10^{-14}$$

86 — Rouen 1998

Calculer :

$$A = 10^6 \times 10^{-3} \times 0,001$$

$$B = 0,01 \times 10^4 \times 10^{-6} \times 10\,000$$

87 ■ Créteil-Paris-Versailles 1998

Calculer en donnant le résultat d'abord en écriture décimale, puis en notation scientifique :

$$C = 15^3 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5}$$

88 — Nancy-Metz 2000

Calculer les expressions A, B, C en faisant apparaître chaque étape du calcul et donner le résultat sous forme d'une fraction simplifiée le plus possible :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{7}{15}; \quad B = \frac{\frac{5}{6} - \frac{5}{4}}{\frac{5}{8}}$$

$$C = \frac{8 \times 10^{15} \times 15 \times 10^6}{20 \times (10^2)^5}$$

89 — Rouen 2000

$$B = \frac{5 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^4}{2 \times 10^5} ; \quad C = \frac{9}{5} - \frac{3}{4} \times 7$$

a) Calculer et donner la notation scientifique de B.

b) Écrire C sous la forme d'une fraction (le détail des calculs doit apparaître).

TRAVAILLER SEUL

90 ■ Nombres croisés

	A	B	C	D	E
F					
G					
H					
I					
J					

Verticalement	Horizontalement
A) 4^2 ; 11^1	F) 125^2
B) $9^5 - 7^2 + 2 \times 10^2$	G) $13^2 - 10^2$; $14^1 \times 1^{14}$
C) 6^1 ; $3^5 - 2 \times 11^2$; $6 - 7 - 6^2$	H) 6^3
D) $12^4 + 31^2 - 3$	I) $4^2 - 6$; 3×2^5
E) 6×3^2 ; $5^3 - 20^2 + 7^3$	J) 22^3

91 — Dans chaque cas, retrouver le mot caché en remplaçant les nombres trouvés par la lettre correspondant dans l'alphabet (A = 1 ; B = 2 ; C = 3 ; etc.).

a) 

$\blacklozenge : 3^0; \quad \blacklozenge : 2^3 + 2 \times 3$

● : 2×3^2 ; ▼ : $39 - 3^3$

♣ : exposant du résultat de $10^{-3} \times 10^{12}$

■ : exposant du résultat de $(10^{-11})^{-2}$

♠ : écriture décimale de 500×10^{-2}

$$\heartsuit : \frac{16 \times (10^4)^{-1}}{8 \times 10^{-2} \times 10^{-3}}$$

b) 

◆ : 3^2 ; ⊕ : $2^4 - 3$

$$\boxtimes : \frac{2}{3^{-2}} ; \quad \blacklozenge : \frac{300^2}{6 \times 10^3}$$

○ : exposant dans la notation scientifique de 1 321,7

c) 

■ : 95^0 ; ⚡ : 2^4 ou 4^2

$$\star : \frac{19^{2001}}{19^{2000}} ; \quad \text{✿} : \frac{6^3}{2 \times 3^2}$$

● : exposant du résultat de $(10^{-3})^4 \times (10^{-5})^{-5}$

■ REPRÉSENTER LE SYSTÈME SOLAIRE À L'ÉCHELLE $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$

En menant à terme cet Inter-Maths, on peut prendre conscience de ce que représentent les mesures interplanétaires.

■ LE SYSTÈME SOLAIRE EN QUELQUES MESURES

Dans le tableau figurent le diamètre du Soleil et des différentes planètes, ainsi que les distances moyennes les séparant. La dernière colonne concerne la durée moyenne d'une révolution, c'est à dire d'un tour complet autour du Soleil (toutes les mesures sont arrondies).

	diamètre en km	diamètre à l'échelle $\frac{1}{100\,000\,000}$ en cm (et en m)	distance en km entre le soleil et la planète	distance à l'échelle $\frac{1}{100\,000\,000}$ en cm puis en m (et en km)	durée d'une révolution autour du soleil
soleil	1 400 000 km	140 cm (1,40 m)			
mercure	5 000 km	0,5 cm	60 000 000 km	6 000 cm (60 m)	88 jours
vénus	12 000 km		108 000 000 km		225 jours
terre	13 000 km		150 000 000 km		365 jours
lune	3 500 km		distance Terre-Lune : 384 000 km		autour de la Terre : 28 jours
mars (deux lunes)	7 000 km		230 000 000 km		1 an 10 mois
jupiter (16 lunes, un anneau)	143 000 km		780 000 000 km		12 ans
saturne (21 ou 23 lunes, un anneau très épais)	121 000 km		1 430 000 000 km		29 ans
uranus (5 lunes, un anneau)	52 000 km		2 870 000 000 km		84 ans
neptune (2 lunes)	45 000 km		5 500 000 000 km		164 ans
pluton (1 lune)	3 000 km		6 000 000 000 km		247 ans

■ CALCULS POUR COMPLÉTER LE TABLEAU

- Les mesures de la représentation du système solaire sont à calculer en centimètres. (1 km = 10^5 cm.)
- La représentation sera un milliard de fois plus petite que la réalité.
- Les deux premières lignes du tableau ont été complétées à partir des calculs ci-contre.

Diamètre du Soleil

Mesure réelle : 1 400 000 km, c'est à dire 140 000 000 000 cm, ou 14×10^{10} cm.

Mesure sur la représentation : $14 \times 10^{10} : 10^9 = 14 \times 10^1$ cm = 140 cm (ou 1,40 m).

Diamètre de Mercure

Mesure réelle : 5 000 km = 5×10^3 km = 5×10^8 cm

Mesure sur la représentation : $5 \times 10^8 : 10^9 = 5 \times 10^{-1}$ cm = 0,5 cm.

Distance Mercure-Soleil

Mesure réelle : 60 000 000 km = 6×10^7 km = 6×10^{12} cm

Mesure sur la représentation : $6 \times 10^{12} : 10^9 = 6 \times 10^3$ cm = 6 000 cm = 60 m.

■ REPRÉSENTATION DU SOLEIL ET DES PLANÈTES

Le Soleil doit avoir un diamètre de 1,40 m. Il peut être représenté par un disque de papier.

Les planètes pourront être représentées par des perles, des boules de pâte à modeler, des balles ou des ballons respectant les mesures trouvées dans la troisième colonne du tableau.

■ REPRÉSENTATION DU SYSTÈME SOLAIRE

La cinquième colonne du tableau donne les distances à respecter entre les représentations des planètes et du Soleil (et la distance Terre - Lune).



Nous avons utilisé l'axe Louvre - Défense sur un plan de Paris pour illustrer cette maquette, mais le travail est beaucoup plus intéressant à faire sur un axe de l'agglomération où se situe le collège (ou sur la carte IGN de la commune si c'est un collège rural).

On peut déterminer les emplacements sur la carte... et pourquoi ne pas se rendre sur le terrain avec les « planètes » pour les disposer correctement ? Il faut alors se munir d'un décimètre et d'un curvimètre de géomètre pour les plus lointaines (Soleil - Pluton : 6 km !).

À travers L'Histoire



Archimède est un mathématicien grec né vers 287 avant notre ère. Il était aussi bien mathématicien qu'astronome et physicien. Ses raisonnements algébriques et géométriques sont célèbres, tout comme son fameux « Eurêka » (« j'ai trouvé ») qu'il claironna un jour en sortant de son bain. Il venait de découvrir la première loi de l'hydrostatique (« tout corps plongé dans un liquide subit une poussée égale au poids du volume d'eau déplacé ») !

Dans un calcul habile, il se proposa de déterminer le nombre de grains de sable contenus dans tout l'univers. Alors que les notations des nombres grecs nécessitent 45 symboles pour écrire tous les nombres de 0 à 99 999, il choisit une unité de base, la myriade qui correspond à 10 000, soit, 10^4 et utilisa la myriade de myriade soit $10\,000^2$, c'est-à-dire 10^8 . De nouvelles valeurs sont alors utilisées : $100\,000\,000^3$ ou encore $100\,000\,000^4$, jusqu'à

$100\,000\,000^{100\,000\,000}$. À partir de ce nouveau nombre, il arrive à atteindre un nombre qui s'écrit aujourd'hui $(10^8)^{10^8}$, ce nombre s'écrit, en notation décimale, 1 suivi de 800 000 000 zéros. Archimède par une démonstration astucieuse montra que l'Univers ne contiendrait pas plus de 10^{51} grains de sable.

ce que je dois savoir sur...

... Les puissances

- Utiliser les notations puissances à exposant positif ou négatif.
- Calculer une puissance d'un nombre avec ou sans calculatrice.
- Appliquer les règles de priorités et effectuer un calcul comportant des puissances.
- Changer l'écriture d'un nombre entre écriture décimale et notation scientifique.
- Trouver un ordre de grandeur d'un nombre et différencier valeur exacte et valeur approchée.

je m'évalue

- Recopier et compléter les égalités suivantes en donnant des valeurs exactes :
 $10^4 = \dots$; $2^5 = \dots$; $(-4)^3 = \dots$
 $2002^1 = \dots$; $1^{732} = \dots$; $10^{-5} = \dots$
 $5^{-4} = \dots$; $25 = 5^{\dots}$; $-512 = (\dots)^3$; $(-7)^{-3} = \dots$
- Calculer :
 $A = 7 - 5 \times 3^2$
 $B = 7,2 \times 10^2 - 5 \times (-2)^3 - 4^2$
 $C = 5 \times 10^{-2} + \frac{3}{25} - \left(-\frac{7}{5}\right)^2$
- Écrire les expressions suivantes sous la forme $a \times 10^n$ où a et n sont des entiers relatifs et a est le plus petit possible :
 $A = 3\,700\,000$; $B = 0,00452$
 $C = -893,53$; $D = \frac{8 \times 10^{15} \times 15 \times 10^{-6}}{20 \times (10^2)^5}$
- Donner en notation scientifique les nombres E et F :
 $E = \frac{5 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^4}{3 \times 10^5}$
 $F = \frac{1,5 \times 10^7 \times 4 \times 10^{-5}}{25 \times 10^2}$
- Donner la forme la plus simple possible du nombre G, en précisant si la valeur est exacte ou approchée :
 $G = \frac{2^2 \times 3}{30} + 10^{-1}$
- Longtemps, on a pensé que la vitesse de la lumière était infinie. Vers 1750, on utilisait 210 000 km/s comme ordre de grandeur de cette vitesse. On sait maintenant que la vitesse de propagation de la lumière dans le vide est de 299 792 458 m/s.
 - Donner un arrondi de cette vitesse en l'exprimant en notation scientifique.
 - Comparer, en km/s, les deux valeurs, celle de 1750 et celle d'aujourd'hui, et donner la différence entre ces deux valeurs.
- Chez l'éditeur**

En pliant quatre fois, en deux dans le sens de la longueur, une feuille de papier de format 160 cm sur 116 cm, on obtient un livret de plusieurs pages.

 - Écrire, sous forme d'une puissance de 2, les nombres de pages obtenues après un pliage, deux pliages, trois pliages, quatre pliages.
 - Un livre est constitué de plusieurs livrets. De combien de livrets a-t-on besoin si l'on veut éditer un livre de 288 pages ?
 - Sans la couverture, le livre de 288 pages a une épaisseur de 9 mm.

 Quelle est l'épaisseur d'une feuille de papier ? Écrire le nombre en notation scientifique puis sous forme fractionnaire la plus simple possible.

Les solutions se trouvent à partir de la page 279.

CALCUL LITTÉRAL - ÉQUATION

En 6^{ème}-5^{ème}

- Connaître les règles de distributivité.
- Tester si une égalité est vraie.
- Trouver, dans des situations numériques simples, le nombre par lequel diviser un nombre donné pour obtenir un résultat donné.

En 4^{ème}

- Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2$...
- Sur des exemples numériques ou littéraux, développer une expression du type $(a + b)(c - d)$.
- Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.
- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

pour démarrer



1 Le vocabulaire

Vocabulaire :
- somme ;
- produit ;
différence.

$7 \times 8 + 2$ est la somme de deux termes : 7×8 et 2. C'est une somme car la dernière opération à effectuer pour le calcul est une addition.

Recopier et indiquer par une croix si chaque expression est une somme, une différence ou un produit.

Ensuite, calculer chaque expression en remplaçant, si besoin, a par 3,7 et b par 11.



	Somme	Différence	Produit	Résultat du calcul
$18 + 5 \times 3$				
$6,2 \times (4 + 2,8)$				
$21 : 3 - 5$				
$(8 - a) \times (6 + b)$				
$7,2b - 2,1a$				
$a(5a + 2b)$				

Activités

2 — En chute libre

La distance d (en m) parcourue par un objet tombant en chute libre est donnée par la formule suivante :

$$d = 0,5 \times g \times t^2$$

où t est la durée (en s) de la chute

et g est une quantité fixe liée à la pesanteur ; sa mesure est 9,81 sur Terre.

- 1) Paul laisse tomber son agenda du haut de la Tour Eiffel.

Quelles sont, parmi les valeurs de d et t données ci-dessous, celles qui vérifient la formule ?

- a) $d = 300$ et $t = 7,8$ b) $d = 313$ et $t = 8$ c) $d = 313,92$ et $t = 8$

- 2) Caroline fait un vœu et lance une pièce de 2 euros dans un puits. La pièce met 1,30 s à atteindre le fond.

Quelle est la profondeur du puits ?

• Dans une formule, la lettre a le statut d'indéterminée.

• PRÉ-REQUIS :

- Tester une égalité ;

- Utiliser une formule.

3 — À travers les temps

- 1) Babyloniens, Égyptiens et Grecs jusqu'à Diophante (II^e siècle) écrivaient les raisonnements nécessaires à la résolution de problèmes en toutes lettres, sans aucun symbole mathématique.



Encore au IX^e siècle, le mathématicien perse Al Khwarizmi désignait la quantité inconnue par le mot « chose » ou « racine » et écrivait par exemple :

« la chose est telle que ceci : le carré et dix de ses racines sont égaux à trente neuf dirhams... ».

(Voir « À travers l'histoire », page 223.)

Quelle est l'écriture actuelle traduisant cette phrase ?

- ☐ $x + 10 = 39$ ☐ $x^2 + 10 = 39$
☐ $x^2 + 10x = 39$ ☐ $x^2 + 10 \sqrt{x} = 39$

• Apparition progressive du symbolisme.

• Pour résoudre des problèmes, les mathématiciens n'ont pas toujours désigné l'inconnue par une lettre. L'écriture correspond à la forme ③.

- 2) Progressivement, des écritures comportant des symboles apparurent :

Exemple de problème	Traduction	
Trouver le nombre tel que le double de son carré diminué de cinq fois lui-même donne vingt cinq.	Nicolas Chuquet 1445-1500	$2^2 m 5^1 - 5$ égault a 25
	Raffaele Bombelli 1526-1573	$2^2 m 5^1$ equale a 25
	François Viète 1540-1603	$2 \text{ in } Aq - 5 \text{ in } A$ aequatur 25
	René Descartes 1596-1650	$2 z z - 5 z = 25$
	Moderne	$2x^2 - 5x = 25$

• Cette activité donne du sens et montre l'intérêt de l'écriture actuelle.

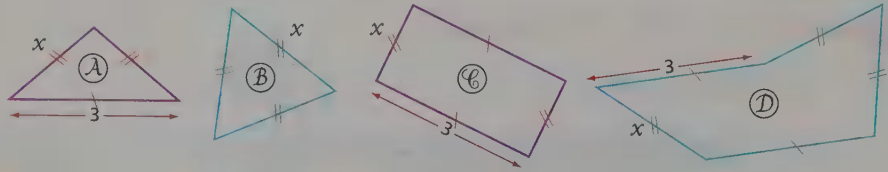
Traduire le problème suivant avec ces cinq écritures :

« Trouver le nombre tel que le triple de son carré soit égal à trois fois lui-même augmenté de cinq ».

4 En fonction de x

La lettre est aussi utilisée pour exprimer un résultat qui dépend d'un nombre variable.

Associer chaque figure à l'expression littérale traduisant son périmètre :



- 1 $2x + 3$ 2 $2x + 6$ 3 $3x$ 4 $3x + 6$

5 Pas de jaloux : on distribue !

Rappel des règles de distributivité sur des valeurs numériques.

- 1) Certaines expressions sont égales. Les regrouper deux par deux puis effectuer les calculs le plus simplement possible.

- 1 $6 \times (12 + 8)$ 2 $(8 - 6) \times 12$
3 $8 \times 12 - 6 \times 12$ 4 $8 \times (12 + 6)$
5 $8 \times 12 + 8 \times 6$ 6 $6 \times 12 + 6 \times 8$

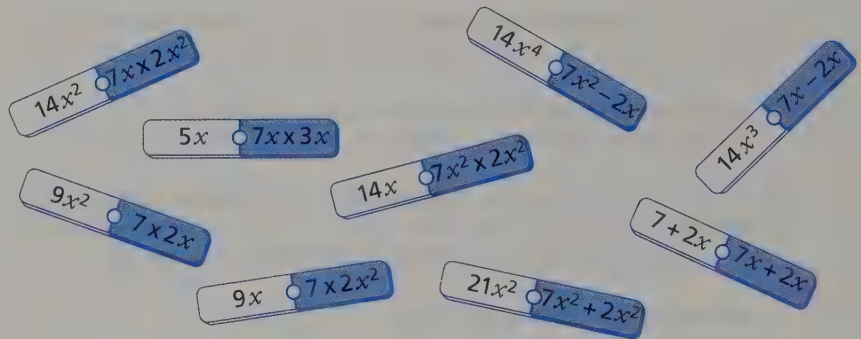
- 2) Dans chaque cas, écrire le produit sous forme d'une somme :

- 1 $4 \times (f + 2)$ 2 $(5 + r) \pi$ 3 $10(4 + 3x)$

- 3) Dans chaque cas, écrire la somme sous forme d'un produit :

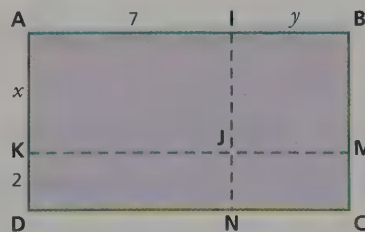
- 1 $7 \times x + 7 \times 2$ 2 $44 - 11 \times t$ 3 $5 \times a - c \times a$

- 4) Voici neuf dominos. Établir une chaîne en respectant la règle suivante : les extrémités des dominos doivent porter une expression égale.



6 Double distributivité maintenant ...

- 1) Exprimer de plusieurs façons l'aire du grand rectangle ABCD en fonction de x et y .



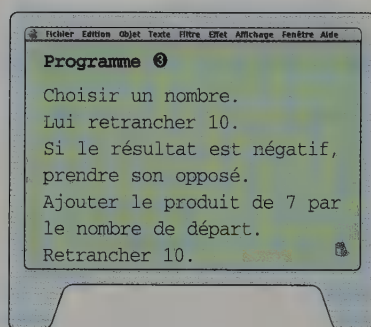
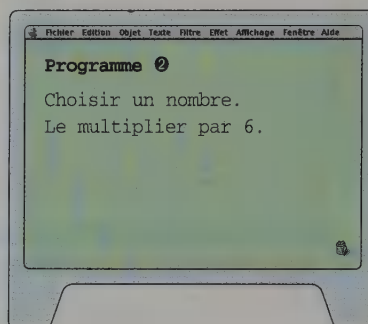
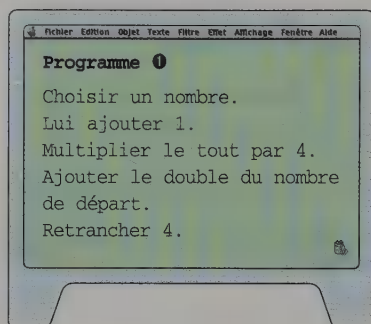
- 2) Transformer les produits suivants en somme :

- 1 $(x + 3) \times (y + 5)$ 2 $(3x + 1)(x + 4)$ 3 $(2y + 3)(8y - 7)$

Approche géométrique de la double distributivité. On pourra demander d'expliquer comment passer du produit $(x + 2)(7 + y)$ aux différentes sommes :
 $x(7 + y) + 2(7 + y)$
 $7(x + 2) + y(x + 2)$
 $7x + xy + 14 + 2y$.

7 — Chacun son programme

Voici trois programmes de calcul :



- 1) Exécuter ces trois programmes de calcul avec les nombres 3 ; 4,5 et $\frac{8}{3}$.
Quelle conjecture peut-on faire ?
- 2) Appliquer les trois programmes de calcul au nombre 12.
Que se passe-t-il ?
- 3) Afin de prouver que les programmes ① et ② sont identiques quel que soit le nombre choisi au départ, nous n'allons plus choisir de nombre, mais utiliser une lettre. Cette lettre remplace n'importe quel nombre.

Appelons x le nombre de départ.

En exécutant le programme ② sur le nombre x , on obtient le nombre $6 \times x$.

Traduire par une expression le programme ① appliqué au nombre x .

Transformer cette expression pour reconnaître $6 \times x$.

8 — D'une écriture littérale à une phrase

$4 \times (x - 1)$ est une écriture qui signifie :

« on soustrait 1 à un nombre et on multiplie le tout par 4 ».

On obtient : « le produit de 4 par la différence de x et de 1 ».

De la même façon, transcrire en phrases les expressions mathématiques suivantes.

$$5x + 7; \quad (x - 2)^2; \quad 5x + 7x; \quad 5x - x$$

• Une succession d'exemples n'est pas une preuve en mathématiques.

• Notion de contre-exemple.

• Le calcul littéral permet de démontrer un résultat.

• Réduire une expression.

• Donner du sens à l'écriture littérale.

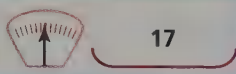
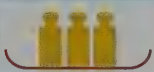
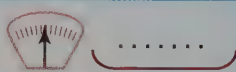
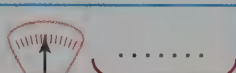
9 Équations

- Méthode pour résoudre une équation.

Les deux plateaux sont en équilibre.



1) Compléter le tableau suivant, en appelant m la masse d'un objet  :

Dessin	Égalité illustrant la situation
 	(A)
 	(B)
 	(C)

- Mettre en évidence les règles permettant de transformer une égalité.

2) Énoncer une règle permettant de passer de la case (A) à la case (B).

Énoncer une règle permettant de passer de la case (B) à la case (C).

Vérifier que le nombre trouvé pour m rend vraie l'égalité de la case (A).

Ces étapes successives permettent de résoudre l'équation $3m + 2 = 17$.
(Voir « L'essentiel en deux pages » page 211.)

3) En utilisant ces mêmes règles, résoudre les équations :

① $5x + 9 = 89$

② $7x - 8 = 9,5$

③ $-x + 4 = 15$

④ $-3x = -21$

⑤ $-3 + x = -21$

10 Être ou avoir

- Tester une égalité.

1) Le nombre (-3) est-il solution des équations ci-dessous ?

① $2x^2 - 5x = 33$

② $7x + 4 = 5x - 2$

③ $\frac{2}{7}x - \frac{1}{7} = \frac{x}{7}$

2) Les deux équations ont-elles même solution ?

① $3 + x = 5$

② $3x = 5$

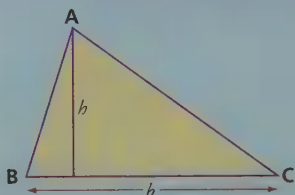
- Voir la différence entre deux types d'équations.



L'essentiel en deux pages

1 – Utilisation des lettres

a) Établir des formules

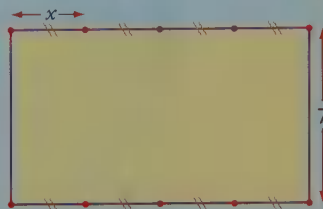


L'aire d'un triangle est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times h$$

où b est la mesure de la base et h celle de la hauteur.

b) Exprimer « en fonction de »



Le périmètre du rectangle ABCD s'exprime « en fonction de » x :

$$\mathcal{P}_{ABCD} = x \times 8 + 14$$

c) Résoudre des problèmes

« En additionnant 1,8 et le quadruple d'un nombre, on trouve 65. Quel est ce nombre ? »

Pour résoudre un tel problème, le nombre **inconnu** est désigné par une lettre.

La phrase en français est transformée en une égalité mathématique : $1,8 + 4x = 65$

Vocabulaire

Les écritures contenant une ou plusieurs **lettre(s)** sont appelées écritures **littérales**.

2 – Transformations d'écritures littérales

a) Simplification

- $2 \times x = 2x$
- $1 \times x = x$
- $-1 \times x = -x$
- $0 \times x = 0$

$$\begin{aligned} 4x \times 5x &= 4 \times x \times 5 \times x \\ &= 4 \times 5 \times x \times x \\ &= 20 \times x^2 \\ &= 20x^2 \end{aligned}$$

(dans un produit, on peut changer l'ordre des facteurs)

b) Réduction

Réduire une expression littérale, c'est regrouper les termes semblables.

Pour réduire une expression, on utilise la propriété :

k, a, b désignent des nombres quelconques, les égalités suivantes sont toujours vraies :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b); \quad k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

Exemples

$$A = 4x + 5x$$

$$A = 4 \times x + 5 \times x$$

$$A = (4 + 5) \times x$$

$$A = 9x$$

$$B = 5n + 4,2n - 7$$

$$B = 5 \times n + 4,2 \times n - 7$$

$$B = (5 + 4,2) \times n - 7$$

$$B = 9,2n - 7$$

$$C = 6 + 5a - a$$

$$C = 6 + 5 \times a - 1 \times a$$

$$C = 6 + (5 - 1) \times a$$

$$C = 6 + 4a$$

La multiplication est une opération prioritaire par rapport à l'addition et à la soustraction. Les écritures $9,2n - 7$ et $6 + 4a$ ne peuvent donc être réduites davantage.

c) Développement

Développer, c'est transformer un produit de facteurs en somme ou différence de termes.

Pour cela, on utilise les règles de distributivité :

k, a, b, c, d désignent des nombres quelconques, les égalités suivantes sont toujours vraies :

$$k \times (a + b) = \underline{k \times a} + \underline{k \times b}$$

$$k \times (a - b) = \underline{k \times a} - \underline{k \times b}$$

$$(a + b) \times (c + d) = \underline{a \times c} + \underline{a \times d} + \underline{b \times c} + \underline{b \times d}$$

Exemples

$$\begin{aligned} A &= 6 \times (y - 1,5) \\ A &= 6 \times y - 6 \times 1,5 \\ A &= 6y - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (s + 0,1) \times (s + 3) \\ B &= \underline{s \times s} + \underline{s \times 3} + \underline{0,1 \times s} + \underline{0,1 \times 3} \\ B &= s^2 + 3 \times s + 0,1 \times s + 0,3 \\ B &= s^2 + (3 + 0,1) \times s + 0,3 \\ B &= s^2 + 3,1s + 0,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 4 - (x - 3) \\ C &= 4 + (-1) \times (x - 3) \\ C &= 4 + (-1) \times x - (-1) \times 3 \\ C &= 4 - x + 3 \\ C &= 4 + 3 - x \\ C &= 7 - x \end{aligned}$$

3 Les équations à une inconnue

Une équation à une inconnue est une égalité dans laquelle une quantité est inconnue.

Voici un exemple d'équation où l'inconnue est désignée par la lettre x .

$$\underbrace{4x + 1,8}_{1^{\text{er}} \text{ membre}} = \underbrace{65}_{2^{\text{e}} \text{ membre}}$$

Résoudre une équation, c'est trouver les valeurs qui rendent vraies l'égalité. Ces valeurs sont appelées les solutions de l'équation.

On utilise deux règles pour résoudre une équation :

- Une égalité reste vraie en ajoutant ou soustrayant le même nombre à ses deux membres.
- Une égalité reste vraie en multipliant ou en divisant ses deux membres par le même nombre non nul.

Exemple

Résoudre l'équation $4x + 1,8 = 65$.

$$\begin{aligned} 4x + 1,8 &= 65 \\ 4x + 1,8 - 1,8 &= 65 - 1,8 && \text{(première règle)} \\ 4 \times x &= 63,2 && (4x = 4 \times x) \end{aligned}$$

$$\frac{4 \times x}{4} = \frac{63,2}{4} \quad \text{(deuxième règle)}$$

$$x = 15,8$$

L'équation admet une solution : le nombre 15,8.



RÉSoudre UN PROBLÈME

Deux phases pour résoudre un problème

a) La mise en équation, c'est-à-dire traduire l'énoncé par une égalité mathématique.

b) La résolution de l'équation (voir paragraphe 3 de « L'essentiel en deux pages » page 209).

Un exemple pour illustrer cette démarche

Énoncé

Un groupe de randonneurs part à 8 h du matin et marche à la vitesse de 5 km/h. Un autre groupe part quatre heures après, en voiture, afin de les rejoindre au lieu de rendez-vous pour déjeuner. La voiture roule à 85 km/h. Quel temps mettra la voiture pour arriver au lieu de rendez-vous en même temps que l'autre groupe ?

a) Mise en équation

Lire le texte attentivement.

Repérer l'inconnue (ce que l'on cherche) et la nommer.

Repérer des indications dans le texte pour comprendre la situation.

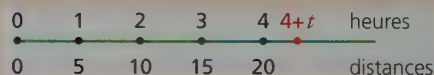


Écrire une égalité qui traduit le texte.

Il semble que 8 h soit une donnée inutile.

L'inconnue est le temps mis par la voiture. Appeler t ce temps mis par la voiture.

Pour comprendre, on peut traduire la situation par un dessin.



Les randonneurs à pied et ceux en voiture parcourent la même distance. Les uns en t heures et les autres en $(t + 4)$ heures.

On écrit la distance parcourue par les randonneurs à pied, $5(t + 4)$, et celle, $85t$, parcourue par la voiture.

$$5(t + 4) = 85t$$

b) Résolution de l'équation

- Laisser de côté la représentation du problème.
 - Transformer l'équation en utilisant les propriétés du calcul littéral et des égalités.

- Chercher à isoler l'inconnue.

- Vérifier que la valeur trouvée correspond à l'égalité.

Développer $5(t + 4)$, on obtient : $5t + 20 = 85t$
Retrancher $5t$ à chaque membre de l'égalité :

$$5t + 20 - 5t = 85t - 5t$$

Simplifier :

$$20 = 80t \text{ ou encore } 80t = 20$$

Diviser chaque membre de l'égalité par 80 :

$$t = \frac{20}{80}, \text{ en simplifiant on obtient } t = \frac{1}{4}$$

$$5t + 20 = 5 \times \frac{1}{4} + 20 = \frac{5}{4} + \frac{80}{4} = \frac{85}{4}$$

$$85t = 85 \times \frac{1}{4} = \frac{85}{4}$$

Revenir au problème et écrire une phrase de conclusion :

« La voiture mettra $\frac{1}{4}$ d'heure pour rejoindre le groupe de randonneurs, soit 15 minutes. »

exercices

RECONNAISSANCE DES FORMES

1 Somme ou produit ?

$x - 8$ est la somme de deux termes x et (-8) .
 $3(5t + 4)$ est le produit de deux facteurs 3 et $(5t + 4)$.

Parmi les expressions suivantes, indiquer les sommes et les produits :

- ① $4,5 - 12 \times 5,4$ ② $25(13 - 2 \times 8)$
 ③ $23 + 56 : 3$ ④ $(x + 3) \times 5$
 ⑤ $25 - y \times 6$ ⑥ $7,1 \times x - x \times 8,52$

2 Quelles sont les sommes et quels sont les produits parmi les expressions ci-dessous ?

- ① $6 + 8 \times a$ ② $a + 2a$ ③ $a \times a$
 ④ $a + 13$ ⑤ $6at$

3 Retrouver les sommes et les produits parmi les expressions suivantes :

- ① $3x + 4$ ② $3(4 + x)$ ③ $x + \frac{4}{3}$
 ④ $4 - 3x$ ⑤ $\frac{x+4}{3}$ ⑥ $3 \times 4 + x$

4 Retrouver les sommes et les produits parmi les expressions suivantes :

- ① $2x + 4$ ② $x(x + 1)$
 ③ $x(4 + x) - 3$ ④ $x + (x - 1)(x + 2)$
 ⑤ $(x + 1)^2$ ⑥ $3(4 + x) - 5(x - 6)$

5 Voici trois phrases :

- a La somme du triple de x et de $2,5$ est 16 .
 b Le produit de la somme de x et de 5 par la différence de 21 et du double de x est 110 .
 c La différence du carré de x et de 4 est 5 .

Écrire l'égalité correspondante à chaque phrase.

Parmi les nombres $0,5$; 3 et $4,5$ retrouver celui qui rend vraie chacune des égalités.

6 Recopier et compléter les phrases ci-dessous.

- $-x$ est de x .
- Le carré de b est
- Le carré de $-r$ est
- L'opposé de $5t$ est
- L'opposé de a^2 est
- L'inverse de b est
- L'inverse de $3y - 1$ est

UTILISATION DES LETTRES

Des formules

7 La formule $P = 0,08 \times S \times V^2$ permet de calculer la vitesse limite (en m/s) atteinte par un parachutiste lors de sa descente. S représente la superficie du parachute exposée à la résistance de l'air (en m²).



P est la masse du parachutiste (en kg).

a) Quelles sont, parmi les valeurs de P , V et S données ci-dessous, celles qui vérifient la formule ?

- ① $P = 65$, $V = 6$, $S = 50$
 ② $P = 80$, $V = 5$, $S = 40$

b) On suppose dans cette question que $S = 40$ m². Sachant que la vitesse limite atteinte par un parachutiste est de $5,5$ m/s, calculer sa masse.

8 La masse théorique P (en kg) d'un individu en fonction de sa taille T (en cm) est donnée par la formule de Lorentz :



$$P = T - 100 - \frac{1}{4}(T - 150)$$

Calculer la masse théorique d'une personne mesurant $1,70$ m.

9 La distance d (en m) d'arrêt d'un véhicule varie selon sa vitesse V (en km/h) et est donnée par la formule :



$$d = 0,0075 \times V^2 + 0,25V$$



Une voiture roulant à 55 km/h pourra-t-elle éviter un obstacle situé à 30 m ?

10 La formule $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ permet de calculer le volume d'une boule de rayon r .



a) La Terre a un rayon d'environ $6\,400$ km. Calculer son volume en km³, puis en m³ (utiliser les puissances de 10).

b) Calculer le volume du Soleil en km³ et en m³ sachant que son rayon mesure environ $700\,000$ km.

c) Comparer les rayons et les volumes de la Terre et du Soleil.

11 $A = (6x + 5)(x - 1)$

Calculer A pour les valeurs suivantes de x :

$$x = 2 ; \quad x = 1 ; \quad x = -2 ; \quad x = \frac{1}{3}.$$

exercices

- 12** — $B = 12 - 3(x + 2) + 8(x - 4)$
Calculer B pour les valeurs suivantes de x :

$$x = 2 ; \quad x = -5 ; \quad x = -\frac{1}{3}$$

13 — $C = \frac{x+2}{x}$

Calculer C pour les valeurs suivantes de x :

$$x = 1 ; \quad x = -5 ; \quad x = -2 ; \quad x = \frac{3}{4}$$

14 — « Nombres croisés »

Compléter la grille à l'aide des cinq égalités :

	A	B	C
D			
E			
F			

$$\begin{aligned} D &= 123 \\ F &= 2D \\ -B &= D - F - 171 \\ A &= C - B \\ C &= 2B - 192 \end{aligned}$$

Exprimer « en fonction de »

- 15** — Voici trois programmes de calcul :

- a) « Choisir un nombre, le multiplier par 5 et ajouter 4. »
- b) « Choisir un nombre, ajouter 4 et multiplier le résultat par 5. »
- c) « Choisir un nombre, ajouter 4 et diviser le résultat par 5. »

Associer chaque programme à l'expression correspondante :

① $5(x + 4)$ ② $5x + 4$ ③ $\frac{x+4}{5}$

- 16** — Voici un programme de calcul :

« Choisir un nombre, retrancher 2, multiplier le résultat par 5, diviser par 3, ajouter le double du nombre de départ. »

Quelle expression correspond à ce programme de calcul ?

- ① $t - 2 \times 5 : (3 + 2t)$ ② $(x - 2) \times 5 : (3 + 2x)$
③ $(h - 2) \times 5 : 3 + 2h$ ④ $y - 2 \times 5 : 3 + 2y$

- 17** — a) Calculer l'aire d'un carré dont la mesure du côté est donnée sur la première ligne du tableau.

Côté	3	2,5	x
Aire			

- b) Calculer l'aire d'un rectangle dont la longueur et la largeur sont données sur les deux premières lignes du tableau.

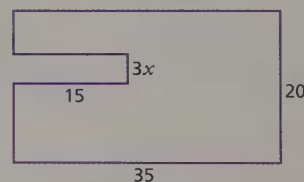
Longueur	7	5	x
Largeur	3	3,5	y
Aire			

- 18** — Un carré a pour côté x . Ajouter 3 à son côté. Exprimer l'aire de la figure obtenue de plusieurs façons.

- 19** — Un rectangle a pour dimensions x et y ($x \geq y$). Ajouter 4 à la longueur. Exprimer l'aire de la figure obtenue de plusieurs façons.

- 20** — Un rectangle a pour dimensions x et y ($x \geq y$). Ajouter 2 à la longueur et 3 à la largeur. Exprimer l'aire de la figure obtenue de plusieurs façons.

- 21** — Une pièce métallique a été découpée de la façon suivante en ayant des bords perpendiculaires deux à deux. (Les mesures sont exprimées en cm.)

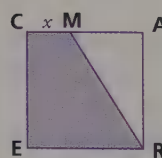


- a) Trouver la formule de l'aire de cette pièce en fonction de x .

- b) Calculer l'aire pour

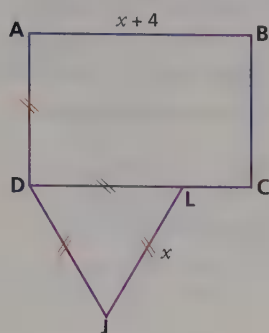
$$x = 4 ; \quad x = \frac{7}{3} ; \quad x = 2,7 ; \quad x = \frac{11}{8}$$

- 22** — CARE est un carré de côté 8 cm. M est un point du segment [CA] tel que CM = x .



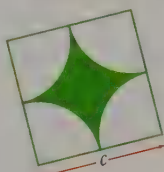
- a) Exprimer, en fonction de x , la longueur MA.
b) Exprimer, en fonction de x , l'aire du trapèze CMRE.
c) Calculer cette aire lorsque $x = 2$.

- 23** La figure ci-dessous comporte un triangle équilatéral et un rectangle.



Exprimer le périmètre et l'aire de la figure en fonction de x .

- 24** Exprimer l'aire de la figure coloriée en fonction du côté c du carré.



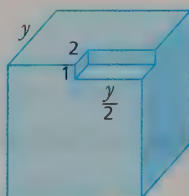
- 25** x est un nombre positif.

- Construire une figure d'aire $2x$.
- Construire une figure d'aire x^2 .
- Construire une figure d'aire $x(x+2)$.
- Construire une figure d'aire $\frac{x^2}{2}$.

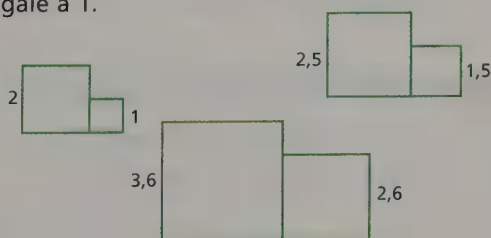
26 Pavé

Un cube a une arête de longueur y . On enlève, à un de ses sommets, un pavé de dimensions 1 , $\frac{y}{2}$ et 2 .

Exprimer le volume du solide obtenu en fonction de y .



- 27** Les figures de la famille ci-dessous sont constituées de deux carrés accolés. La différence des mesures de leurs côtés est égale à 1.



Trouver une formule permettant de calculer le périmètre de n'importe quelle figure de la famille.

(D'après l'IREM de Poitiers.)

- 28** a) Tracer six rectangles de périmètre 17 cm. Calculer l'aire de chaque rectangle.
- b) On appelle x l'une des deux dimensions d'un rectangle de périmètre 17 cm.
- Exprimer, en fonction de x , l'autre dimension du rectangle.
 - Exprimer, en fonction de x , l'aire du rectangle.
 - Compléter le tableau :

Une dimension x (en cm)	0,5	$\frac{3}{4}$	2	3,2	5	7,9	10
Aire (en cm^2)							

Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?

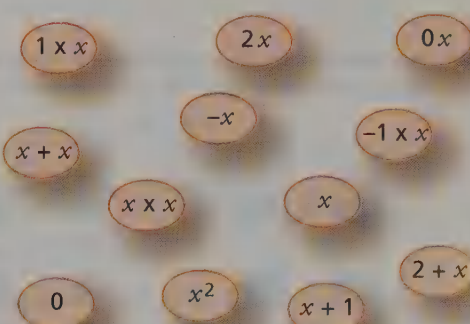
- 29** Pour les vacances de février, Olivier se rend à la station de ski de La Rosière. Avec une carte abonnement hebdomadaire coûtant 20 €, chaque remontée va lui coûter x €.
- Olivier va, en moyenne, emprunter 30 fois par jour les remontées mécaniques.
- Trouver une formule donnant le prix pour une semaine de remontée.



- 30** Cinq CD vierges coûtent 5,80 €. Quel est le prix de n CD ?

RÉDUIRE UNE EXPRESSION

- 31** Une expression peut avoir plusieurs écritures. Regrouper les écritures correspondant à la même expression.



exercices

32 — Chasser l'intrus :

- ① $3x \times 4y$ ② $3 \times 4xy$ ③ $3 \times (4xy)$
 ④ $4 \times (3yx)$ ⑤ $12xy$ ⑥ $7xy$

33 — Chasser l'intrus :

- ① $3a6b$ ② $(3 \times 6)ab$ ③ $36ab$
 ④ $2ab \times 9$ ⑤ $(3a) \times (6b)$ ⑥ $6 \times (3ab)$

34 — Réduire, si possible, les expressions suivantes :

- a) $2x + 5x$; $2x \times 5x$; $2 + 5x$; $2 \times 5x$
 b) $3t - 7t$; $-7t - 3t$; $-7 \times (3t)$; $(-7t) \times (-3t)$
 c) $-2,5m \times (4m)$; $-2,5 + 4m$
 $-2,5m + 4m$; $4 \times (-2,5m)$

35 — Parmi ces expressions, lesquelles sont égales ?

- ① $x \times x + x \times x$ ② $x(x + 2)$ ③ $x^2 + x + x$
 ④ $x \times x + x + x$ ⑤ $x^2 + x^2$ ⑥ $x^2 + 2x$ ⑦ $2x^2$

36 — Pour chaque expression, trouver une écriture plus simple :

- ① $x \times (3x) \times 7$ ② $2r \times (3rs^2) \times s^4$
 ③ $(-a) \times b \times a \times (-b)$ ④ $y^2 \times y \times 9 \times (-y) \times 10$

37 — Réduire les expressions suivantes :

- ① $2x - 4 + 5x + 3$ ② $-8x + 11 - 9 - 3x$
 ③ $-7 + 3x + 4x + 6$ ④ $2 + 13x - 5 - 4x$

38 — Réduire les expressions suivantes :

- ① $6x + 1 - 2x + 8$ ② $1 - x - 3x + 5$
 ③ $7x - 5 + 2x - 11$ ④ $\frac{3}{4}x - 9 + \frac{1}{4}x + 7$

39 — Recopier les tableaux suivants et compléter les cases vides pour que les égalités soient justes :

$3x$	+		=	$8x$
-		+		-
	-		=	
=		=		=
	+	$12x$	=	$11x$

	$\times$	$(-5x)$	=	$-10x^2$
x		x		x
$0,5x$	$\times$		=	
=		=		=
	$\times$		=	$20x^4$

40 — Carré magique

Un carré de nombres est *magique* si les sommes de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont les mêmes.

Vérifier que ce carré est magique :

$4y - 2$	$0,5y + 5$	$3y$
$1,5y + 3$	$2,5y + 1$	$3,5y - 1$
$2y + 2$	$4,5y - 3$	$y + 4$

41 — Compléter ce carré magique :

		$-8y - 2$
$-10y - 3$	$-2y + 1$	
$4y + 4$	$-6y - 1$	$-4y$

42 — Compléter les cases pour que chaque nombre soit la somme des deux nombres situés au-dessus de lui.

$6x + 2$		$-2x + 1$	$7 - 3x$
		$-x - 2$	
		$-6x + 6$	
		3	

		$8 - 2x$	$-5x$
		$x + 3$	
		$x + 5$	

43 — Réduire les expressions suivantes :

$$A = x + 5y - 1 - 3x + 2y - 13$$

$$B = 8y + 2x - 5 - 2x + 3y - 2$$

44 — Réduire les expressions suivantes :

$$A = 7x + y - 3 - 3x + 6y - 11$$

$$B = 3y + 8x - 1 - 2x + 2y - 6$$

45 — Réduire les expressions suivantes :

$$A = a^2 - 2a + 5 - 7a^2 - 3a + 1$$

$$B = 8 - t + 12 - 3t^2 - 4t + t^2$$

46 — Réduire les expressions suivantes :

$$A = 5 + 2h^2 - 1 + 4h - 8h^2 + 7h$$

$$B = 2x^3 - 7 + 3x + 4x^3 - 2x^2 + 5x$$

47 — Simplifier les expressions suivantes lorsque c'est possible :

- ① $a = -5x + 7x$ ② $b = 5x - 3$
 ③ $c = 3x \times 5x$ ④ $d = 2x - 3x - 9x$
 ⑤ $e = 5 \times (-2x)$ ⑥ $f = 5x - (-12x)$

48 — Simplifier les expressions suivantes lorsque c'est possible :

- ① $a = 4x - 7x$ ② $b = 4x \times 5x$ ③ $c = 4x^2 \times 3$
 ④ $d = 4x - 5$ ⑤ $e = 4x \times 3x^2$ ⑥ $f = 4x + 5x^2$

DÉVELOPPER

49 — Développer les expressions suivantes :

- ① $3(x + 5)$ ② $(-4) \times (x + 3)$ ③ $7(1 - t)$
 ④ $5(2a + 4)$ ⑤ $-2(t - 9)$ ⑥ $-6(4a + 3)$

50 — Développer les expressions suivantes :

- ① $9(4x + 3)$ ② $-3 \times (7x - 1)$ ③ $5(2 - 4x)$
 ④ $(2x + 5) \times (-7)$ ⑤ $2(-1 - x)$ ⑥ $-8(-3 - 4x)$

51 — Développer les expressions suivantes :

- ① $3 \times (1 + 4x)$ ② $-x \times (2 + 5x)$ ③ $2 \times (3x - 7)$
 ④ $-4x \times (8 - 2x)$ ⑤ $(-3x + 8) \times 6x$

52 — Recopier et compléter :

$$\begin{aligned} -(7x + 2) &= \dots \times (7x + 2) \\ &= \dots \times \dots + \dots \times \dots \\ &= \dots \\ -(8x - 5) &= \dots \times (8x - 5) \\ &= \dots \times \dots + \dots \times \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

53 — Écrire sans les parenthèses :

- ① $-(-3 + x)$ ② $-(-y - 1)$
 ③ $-(7 - a + 5y)$ ④ $-(t + 2 - 6t^2)$

Méthode

Supprimer une parenthèse précédée d'un signe moins

Énoncé

Développer puis réduire l'expression :

$$A = 3a^2 - (2a + 3)(7a - 5)$$

Exemple de solution

La multiplication a priorité :

$$A = 3a^2 - [(2a + 3)(7a - 5)]$$

On développe à l'intérieur des crochets :

$$A = 3a^2 - (2a \times 7a - 2a \times 5 + 3 \times 7a - 3 \times 5)$$

On simplifie :

$$A = 3a^2 - (14a^2 - 10a + 21a - 15)$$

La parenthèse est précédée d'un signe moins, on transforme la soustraction en addition et on multiplie le contenu de la parenthèse par (-1) :

$$A = 3a^2 + [(-1) \times 14a^2 - (-1) \times 10a + (-1) \times 21a - (-1) \times 15]$$

$$A = 3a^2 - 14a^2 + 10a - 21a + 15$$

On réduit les termes semblables :

$$A = -11a^2 - 11a + 15$$

54 — Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = 7 + 2(3x + 1) \quad B = -3a + 5(2 - a)$$

$$C = 6 - (8 - 3t) \quad D = -(-4y + 3) + (2y + 5)$$

55 — Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = -2x + 1 + 4(3x - 1) + (7 + 5x)$$

$$B = 9 - (-3 + x) + 2(x + 5) - (7 - x)$$

$$C = 3(2x + 1) + 5(8 - x)$$

$$D = 4(8 + 3x) - 2(6x - 1)$$

56 — Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = (a + 2)(a + 7) \quad B = (3x + 1)(8 + 5x)$$

$$C = (y - 1)(4y - 2) \quad D = (-2t - 1)(5 + 3t)$$

exercices

- 57** — Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = (5a - 2)(3 - a) \quad B = (7 - 2t)(t - 1)$$

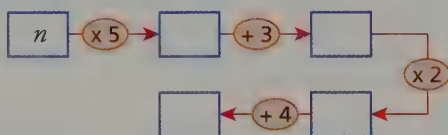
$$C = 3(2b + 1)(5 - b) \quad D = -2(1 - 3x)(x + 8)$$

- 58** — Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = (x + y) \times (3x + 5y) \quad B = (x - 2y)(y - 3x)$$

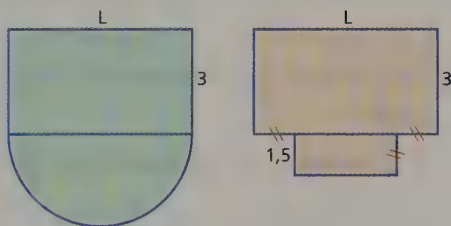
$$C = (x - 1)(y + 2) + (4 - x)(y + 2)$$

- 59** — Recopier et compléter la chaîne suivante :

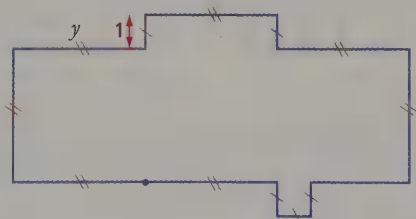


Réduire le résultat final.

- 60** — Exprimer de plusieurs façons l'aire et le périmètre des deux figures ci-dessous en fonction de L et de 3 .



- 61** — Trouver, de plusieurs façons, l'aire de cette figure :



- 62** — On donne l'expression :

$$A = 4(2x + 1) - 8 - 2(-2 - x)$$

Calculer A pour $x = 487\,003\,912,09$.

- 63** — a et b sont deux nombres tels que $a + b = 5$ et $a \times b = 1$.

Calculer $(a + 1) \times (b + 1)$ et $(a + 3) \times (b + 3)$.

DÉMONSTRER AVEC DES LETTRES

- 64** — Le jeu des 7 erreurs

Retrouver les sept erreurs et les corriger :

① $(2x)^2 = 2x^2$ ② $\frac{8+x}{8} = x$

③ Si $6x = 13$ alors $x = 13 - 6$

④ $\frac{7}{2} - \frac{a-4}{2} = \frac{7-a+4}{2}$

⑤ $\frac{7}{2} - \frac{a-4}{2} = \frac{7-a-4}{2}$

⑥ $5(a+4) = 5a+4$

⑦ $5 \times 3(a+4) = 15(5a+20)$

⑧ Si $6x = 13$ alors $x = \frac{13}{-6}$

- 65** — Voici un programme de calcul :

- choisir un nombre ;
- le multiplier par 3 ;
- retrancher 2 ;
- multiplier le tout par 5 ;
- ajouter 10.

a) Appliquer ce programme de calculs aux nombres 3 ; -1 et $\frac{2}{3}$.

b) Quelle remarque peut-on faire ? Cette remarque est-elle toujours vraie ?

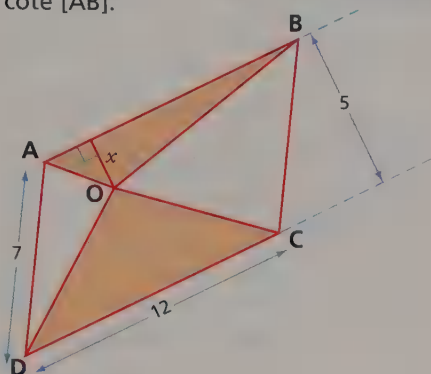
- 66** — Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- La somme de deux nombres pairs est toujours un nombre pair.
- La somme de deux nombres entiers consécutifs est parfois un nombre pair.

Vocabulaire

Consécutifs : veut dire qui se suivent.

- 67** ABCD est un parallélogramme dont les dimensions sont données sur la figure. Un point O est placé à l'intérieur de ABCD à x cm du côté [AB].



- Faire la figure pour $x = 1$, $x = 3$ et $x = 4,1$.
- Calculer, dans chaque cas, l'aire de la partie coloriée. Que remarque-t-on ?
- Prouver que ce résultat est vrai quelle que soit la valeur de x choisie.

- 68** La somme de deux multiples de 7 est-elle un multiple de 7 ?

- 69** Si un nombre est pair alors son carré est un multiple de 4.

Cette phrase est-elle toujours vraie ? Pourquoi ?

ÉQUATIONS

- 70** L'égalité $4x^2 + 3 = 6(x + 2) + 3 \times x + 1,54$ est vraie pour l'une des trois valeurs suivantes de la lettre x :

$$x = 3, \quad x = 3,1 \quad \text{et} \quad x = 3,5$$

Quelle valeur convient-elle ?

- 71** Où est la bonne réponse ?

a) Si $\frac{2}{3}x = \frac{8}{7}$,

alors la valeur exacte de x est :

$$x = \frac{16}{21}; \quad x = \frac{21}{16}; \quad x = \frac{24}{14}; \quad x = \frac{14}{24}; \quad x = \frac{12}{7}$$

b) Si $-\frac{3}{5}x = -\frac{3}{7}$,

alors la valeur exacte de x est :

$$x = \frac{9}{35}; \quad x = -\frac{7}{5}; \quad x = -\frac{5}{7}; \quad x = \frac{5}{7}; \quad x = \frac{7}{5}$$

- 72** Parmi les trois nombres -2 , 0 et 3 lequel est solution de l'équation $7x - 2 = -x - 18$?

- 73** De quelle équation parmi les suivantes le nombre 1 est-il solution ?

① $3x + 14 = 10x + 6,2$

② $\frac{4x-1}{2} = x + 0,5$

③ $6(x-4) + 17 = x^2$

- 74** Inventer trois équations qui aient le nombre 4 comme solution.

- 75** Les équations ci-dessous ont toutes la même solution, sauf une. Laquelle ?

Comment, sans résoudre les équations, peut-on justifier la réponse ?

① $5x + 3 = 4$

② $5x + 6 = 7$

③ $5x = 1$

④ $5x + 1 = 3$

- 76** Les équations ci-dessous ont toutes la même solution, expliquer pour quelles raisons.

① $2x - 7 = 3$

② $6x - 21 = 9$

③ $-3x + 10,5 = 4,5$

④ $2x + 11 = 21$

- 77** Les équations ci-dessous ont-elles même solution ?

① $7 = 9 - 2x$

② $7 - 2x = 9$

③ $7 - 2x = -9$

④ $2x - 7 = 9$

- 78** Les équations ci-dessous ont-elles même solution ?

① $3x + 5 = -x$ et $4x = 5$

② $x - 4 = 9 - 3x$ et $4x = 13$

③ $2x - 5 = 3x$ et $x + 5 = 0$

- 79** Sans résoudre les équations, associer celles qui ont même solution.

① $3x - 18 = 7$

② $\frac{x}{5} - 4 = 2$

③ $20 - x = 10$

④ $3(x - 6) = 7$

⑤ $x + 2(x - 6) = 1$

⑥ $20 - x = -10$

- 80** Le nombre 0 est-il solution des équations ci-dessous ?

① $3x + 4 = 7$

② $x + 5 = 5$

③ $0x = 13$

④ $8x = 0$

- 81** Inventer deux équations qui aient la même solution que l'équation $2x + 4 = 5x - 1$.



Exercice résolu 1

Énoncé

Résoudre l'équation $3x + \frac{3}{4} = \frac{7}{6}$.

Exemple de solution

On résout l'équation en utilisant les propriétés de l'égalité.

$$3x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{6} - \frac{3}{4} \quad 3x = \frac{7}{6} - \frac{3}{4}$$

On cherche un dénominateur commun, multiple de 6 et de 4, c'est 12. On remplace par deux quotients égaux :

$$3x = \frac{14}{12} - \frac{9}{12} \quad 3x = \frac{5}{12}$$

On divise chaque membre de l'égalité par 3 :

$$3x : 3 = \frac{5}{12} : 3$$

On applique la propriété de division des quotients :

$$x = \frac{5}{12} \times \frac{1}{3} \quad x = \frac{5}{36}$$

On vérifie en remplaçant x par cette valeur dans l'expression $3x + \frac{3}{4}$:

$$\begin{aligned} 3x + \frac{3}{4} &= 3 \times \frac{5}{36} + \frac{3}{4} = \frac{5}{12} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{5}{12} + \frac{9}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

L'égalité de l'énoncé est vérifiée donc $\frac{5}{36}$ est solution de l'équation.

Exercice résolu 2

Énoncé

Résoudre l'équation $\frac{x+1}{3} = \frac{2x}{7}$.

Exemple de solution

On cherche un dénominateur commun, multiple de 3 et de 7, c'est 21. On remplace par deux quotients égaux :

$$\frac{7(x+1)}{21} = \frac{3 \times 2x}{21}$$

Les quotients étant égaux et de même dénominateur, leurs numérateurs sont égaux :

$$7(x+1) = 6x$$

On développe :

$$7x + 7 = 6x$$

On résout l'équation :

$$\begin{aligned} 7x + 7 - 6x &= 6x - 6x & x + 7 &= 0 \\ x + 7 - 7 &= 0 - 7 & x &= -7 \end{aligned}$$

On vérifie en remplaçant x par cette valeur dans les deux expressions

$$\frac{x+1}{3} = \frac{-7+1}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$\frac{2x}{7} = \frac{2 \times (-7)}{7} = -2$$

L'égalité de l'énoncé est vérifiée donc (-7) est solution de l'équation.

82 Résoudre les équations suivantes :

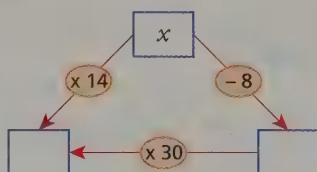
① $x + 5 = 4$

② $8x = 43,2$

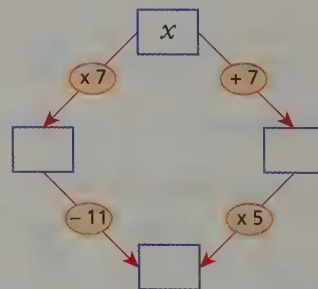
③ $x + 2 = \frac{1}{3}$

④ $3x - 2 = 13$

83 Écrire une équation traduisant ce schéma puis déterminer x .



84 Écrire une équation traduisant ce schéma puis déterminer x .



85 Résoudre les équations suivantes :

① $4 + (10 + x) = 104$

② $4 + (10 \times x) = 104$

③ $4 \times (10 + x) = 104$

④ $4 \times (10 \times x) = 104$

86 Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} x - 9,2 = -13,5 & \textcircled{2} -x + 4 = 9 \\ \textcircled{3} -\frac{1}{3}x = 7 & \textcircled{4} \frac{5}{14}x = \frac{3}{14} \end{array}$$

87 Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} 3x + (5x - 6) + (2x - 8) = 6 \\ \textcircled{2} 2(x - 1) - 3(5x - 6) = 250 \\ \textcircled{3} -11x - (x + 8) + 4(2x + 7) = 14,4 \end{array}$$

88 Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} 3(x + 2) = -2 & \textcircled{2} 12x = 5 + 10x \\ \textcircled{3} 4x - 5 = 3x + 10 & \textcircled{4} 6x + 1 = 9x - 5 \end{array}$$

89 Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} 2(2x + 9) = 5(x - 1) \\ \textcircled{2} 3(4x - 7) = 3 + (2x + 1) \\ \textcircled{3} 9x - 2 - 5(x - 2) = 2(6x + 3) \end{array}$$

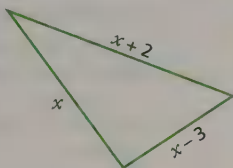
PROBLÈMES

90 Les trois côtés d'un triangle mesurent x ; $x + 2$ et $x - 3$ en cm.

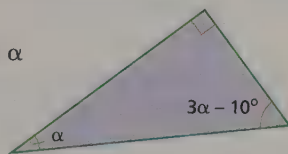
a) Quelle est la longueur des trois côtés quand x vaut 11 ?

b) Quelles valeurs numériques peut prendre x ?

c) Déterminer x pour que le périmètre de ce triangle soit égal à 14 cm.



91 Trouver la mesure α de l'angle aigu de ce triangle rectangle.



92 Lors d'un jeu télévisé, Romuald a donné deux fois plus de bonnes réponses qu'Olivier, mais trois bonnes réponses de moins que Rachel. À eux trois, ils ont donné 48 bonnes réponses. Combien de bonnes réponses Olivier a-t-il données ?

93 José achète un lot de bandes dessinées coûtant chacune 9,40 € et il lui reste 11,80 €. Il lui manque 16,40 € pour acheter deux lots. Combien un lot contient-il de bandes dessinées ?

Exercice résolu

Devinette

« On retranche 16 au quadruple d'un nombre et on obtient 14. Quel est ce nombre ? »

Exemple de solution

Notons x le nombre cherché.

« On retranche 16 au quadruple d'un nombre et on obtient 14 » se traduit mathématiquement par l'équation :

$$4x - 16 = 14$$

Réolvons cette équation :

$$4x - 16 = 14$$

$$4x - 16 + 16 = 14 + 16$$

$$4x = 30$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{30}{4}$$

$$x = 7,5$$

On vérifie que $4 \times 7,5 - 16 = 14$

Conclusion : le nombre cherché est 7,5.

94 En additionnant la moitié et le triple d'un nombre, on trouve 98. Quel est ce nombre ?

95 La somme de deux entiers consécutifs est 237. Quels sont ces deux nombres ?

96 En ajoutant 4 aux $\frac{3}{4}$ d'un nombre, Laura obtient le même résultat qu'en retranchant 2 aux $\frac{4}{5}$ de ce nombre. Quel est ce nombre ?

97 Durant le mois de décembre, Samida et Max se sont connectés à Internet pendant 6 h 48 min à eux deux. Max est resté connecté 1 h 12 min de plus que Samida.

Quel est le temps de connexion de Max ? Et de Samida ?

98 Anne-Marie, âgée de 43 ans, a deux enfants Fabienne et Magali de 18 et 16 ans. Dans combien d'années, la somme des âges des deux sœurs sera égale à l'âge de leur mère ?

99 RECT est un rectangle de longueur 10 cm et de largeur 8 cm. Où placer le point M sur le côté [RE] pour que l'aire du triangle RMT soit égale aux trois huitièmes de l'aire du rectangle RECT ?

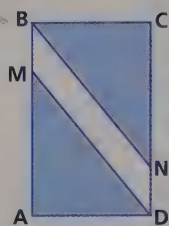
exercices

- 100** ABCD est un rectangle de 14 sur 8 cm.

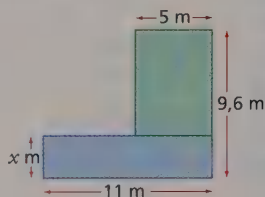
M est un point de [AB] et N est un point de [CD] tels que $AM = CN = x$.

On admet que BMDN est un parallélogramme.

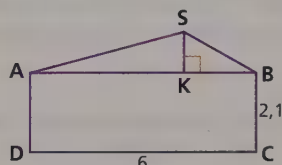
Quelle valeur donner à x pour que l'aire colorée soit le double de l'aire restante ?



- 101** Trouver la valeur de x pour que les aires des deux rectangles soient égales.



- 102** ABCD est un rectangle dont les mesures sont indiquées sur la figure.



Calculer la hauteur h du triangle pour que son aire soit le tiers de celle du rectangle.

- 103** Le volume d'un cylindre est donné par la formule $V_{\text{cylindre}} = \pi \times r^2 \times h$, où r est le rayon de la base et h la hauteur du cylindre. Le volume d'une boule est :

$$V_{\text{boule}} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3, \text{ où } r \text{ est le rayon de la boule.}$$

Une boule et un cylindre ont le même rayon de 6 cm.

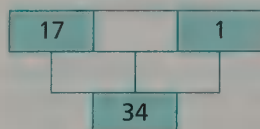
Quelle doit être la hauteur du cylindre pour que les deux solides aient le même volume ?

- 104** ABC est un triangle isocèle de sommet principal A ; $BC = 9$ cm et son aire est de 27 cm^2 .

- Calculer sa hauteur h .
- Combien mesurent les côtés AB et AC ?

- 105** Rien n'a été oublié !

Compléter les cases pour que chaque nombre soit la somme des deux nombres situés au dessus de lui.



(Indication : appeler x le nombre à placer entre 17 et 1.)

- 106** ABC est un triangle. M et N sont deux points placés respectivement sur les côtés [AB] et [AC], tels que (MN) et (BC) soient parallèles et $MN = 7$ cm, $MB = 5$ cm, $BC = 12$ cm.

Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.

- 107** Pendant les vacances d'été, Karine et Sandrine se sont rendues en Corse. Le voyage a représenté le tiers de leur budget, les sorties un huitième du budget, et 390 € ont été consacrés au logement et à la nourriture.

Quel était leur budget pour ces vacances ?

- 108** Nathalie pense à un nombre. En le divisant par 2, en ajoutant 5, en multipliant le tout par 6 et en retranchant 12, elle obtient 6.

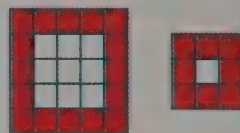
Quel est le nombre choisi par Nathalie ?

- 109** n et $n + 1$ sont deux nombres consécutifs. Si on ajoute 5 à chacun de ces deux nombres, leur produit augmente de 160.

Quels sont ces deux nombres ?

- 110** Carré bordé

Sur une feuille de papier quadrillé, construire plusieurs carrés de tailles différentes.



Colorier les carreaux qui bordent le carré intérieur.

Pour chaque carré, il y a un certain nombre de carreaux coloriés et de carreaux non coloriés. Pierre trouve, pour son carré 6 592 carreaux coloriés.

André trouve, pour le même carré, 8 594 carreaux coloriés.

Qui a raison ? Pourquoi ?

Combien ce carré contient-il de carreaux non coloriés ? Pouvez-vous le prévoir ?

(D'après l'IREM de Rouen.)



- 111** Bordeaux 2000

On considère l'expression :

$$E = (x - 3)^2 - (x - 1)(x - 2).$$

- Développer et réduire E.
- Comment peut-on en déduire, sans calculatrice, le résultat de :

$$99\,997^2 - 99\,999 \times 99\,998 ?$$

exercices

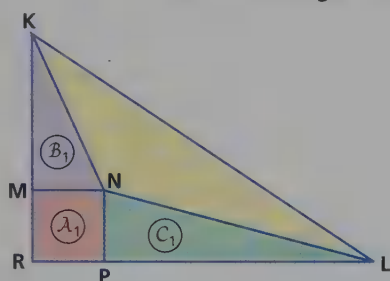
112 — Caen 2000

RKL est un triangle rectangle en R, avec $RK = 6$ cm et $RL = 9$ cm.

M est un point quelconque du côté [RK]. On pose $RM = x$ (x en centimètres). P est le point du segment [RL] tel que $RP = RM = x$.

On place alors le point N pour que RMNP soit un carré.

- a) Dans cette question, $x = 2$. On obtient la figure suivante (on remarque que le point N se trouve à l'intérieur du triangle RKL).



- Calculer l'aire du triangle RKL.
- Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du carré RMNP. Calculer l'aire $\mathcal{B}_1$ du triangle KMN. Calculer l'aire $\mathcal{C}_1$ du triangle NPL. Calculer $\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1 + \mathcal{C}_1$. Vérifier que l'aire du quadrilatère RKNL est inférieure à l'aire du triangle RKL.

- b) Dans cette question, $x = 5$.

- Faire une figure précise.
- Où se trouve maintenant le point N par rapport au triangle RKL ?
- On appelle maintenant $\mathcal{A}_2$ l'aire du carré RMNP, $\mathcal{B}_2$ l'aire du triangle KMN et $\mathcal{C}_2$ l'aire du triangle NPL.

Calculer les trois aires et vérifier que l'aire de RKNL est supérieure à celle du triangle RKL.

- c) On prend maintenant x quelconque.

- Calculer l'aire $\mathcal{A}_3$ du carré RMNP en fonction de x . Calculer l'aire $\mathcal{B}_3$ du triangle KMN en fonction de x . Calculer l'aire $\mathcal{C}_3$ du triangle NPL en fonction de x .

• Montrer que $\mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_3 + \mathcal{C}_3 = \frac{15x}{2}$.

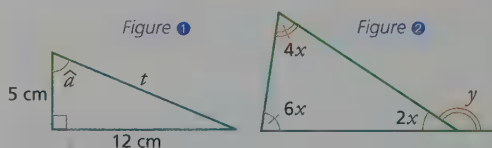
- On cherche s'il existe une valeur de x pour laquelle le point N se trouve sur le segment [KL]. Pour cela résoudre l'équation obtenue en écrivant :

$\mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_3 + \mathcal{C}_3 = \text{Aire du triangle RKL}$.
Conclure.

POUR TRAVAILLER SEUL

113 — « Nombres croisés »

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
6						
5						
6						



HORIZONTALEMENT

- Aire d'un carré de côté t (fig. ①).
Somme de deux nombres consécutifs dont le produit est 132.
- Moyenne de 69,4 et 94,6.
 $2^9 + 5 \times (3^3 + 20)$
- Volume d'un cube dont l'aire d'une face est 64 cm^2 .
- Ce nombre est constitué de trois chiffres consécutifs dont la somme est 18.
- Les deux tiers d'un angle plat en degrés.
Valeur de x (fig. ②).
- Valeur de t (fig. ①).
Volume d'un prisme dont la base est le triangle rectangle de la figure ① et de hauteur 7 cm.

VERTICALEMENT

- Un cinquième d'un angle droit en degrés.
Valeur de $(ab)^2 - ab^2 + b$ lorsque $a = 4$ et $b = 3$.
- La mesure élevée à la puissance 4 du côté adjacent à l'angle $\hat{\alpha}$ (fig. ①).
Le nombre que l'on obtient en retranchant 39 à 62.
- Valeur de y en degrés (fig. ②).
- L'aire totale en cm^2 d'un cube d'arête 11 cm.
- Deux douzaines.
 $2^9 + 2^3 \times 5^2 - 1$.
- $\sqrt{625 \times 225}$.
Le produit de deux multiples de 5 dont la somme est 15.

Equation-bilan en chimie : ressemblances et différences avec les équations mathématiques

Le mot « équation » est utilisé en chimie pour rendre compte de ce qui se passe lors d'une réaction chimique, les substances en présence et leur quantité.



Durant la réaction, les atomes des réactifs se dissocient puis se réarrangent de façon différente en donnant de nouvelles substances. Il y a une égalité comme en mathématiques : le nombre d'atomes de chaque sorte est identique avant et après la réaction. On n'utilise pas le signe = mais une flèche : $\longrightarrow$

Comme en mathématiques, on recherche des nombres : la quantité de molécules de chaque espèce pour « équilibrer » l'équation (on ne dit pas « résoudre »).

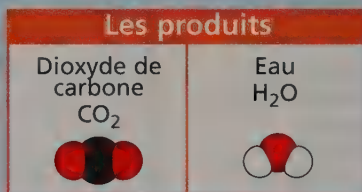
Contrairement aux équations mathématiques, aucune substance ne pourra être transférée d'un membre dans l'autre : les substances réactives sont présentes au début de la réaction, les substances produits sont obtenues à la fin de la réaction.

Equilibrer une équation bilan

Voici un exemple de réaction chimique citée dans le programme de physique de 4^{ème} :

« la combustion complète du méthane dans le dioxygène donne du dioxyde de carbone et de l'eau ».

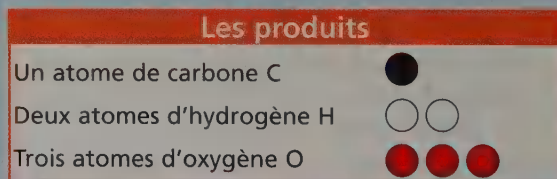
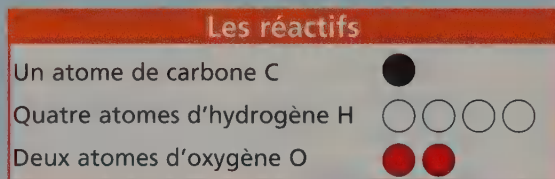
■ Pour écrire l'équation bilan, il faut d'abord retrouver les formules correspondant à ces différentes substances :



On écrit l'équation bilan :



■ On compte ensuite le nombre d'atomes de part et d'autre :



■ On commence par équilibrer à partir du nombre d'atomes des réactifs :

- à **gauche** il y a 4 atomes d'hydrogène, donc à droite on obtient deux molécules d'eau pour retrouver les 4 atomes d'hydrogène.

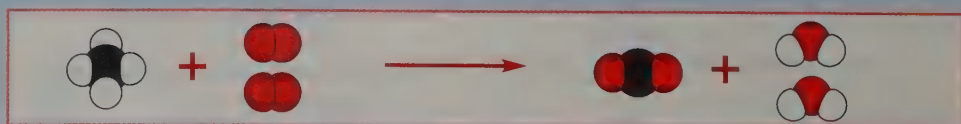
On a donc transformé l'équation : $\text{CH}_4 + \text{O}_2 \longrightarrow \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$

- à **gauche** il y a toujours 1 atome de carbone, 4 atomes d'hydrogène et **deux** atomes d'oxygène ;

- à **droite** il y a maintenant 1 atome de carbone, 4 atomes d'hydrogène et **quatre** atomes d'oxygène.

Il faut donc rajouter une molécule de dioxygène dans les réactifs.

L'équation bilan correcte est donc : $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 \longrightarrow \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$



D'autres réactions chimiques

Pour chacune des réactions chimiques proposées, rechercher la formule des différents corps dans la liste, écrire et équilibrer l'équation bilan.

Formules chimiques

Acide chlorhydrique	HCl
Ammoniac	NH ₃
Diazote	N ₂
Dihydrogène	H ₂
Dioxyde de carbone	CO ₂
Dioxygène	O ₂
Eau	H ₂ O
Eau oxygénée	H ₂ O ₂
Glucose	C ₆ H ₁₂ O ₆
Méthane	CH ₄
Monoxyde de carbone	CO
Ozone	O ₃
Sucre (saccharose)	C ₁₂ H ₂₂ O ₁₁

Réactions chimiques

- ① Lors de la combustion incomplète du méthane (le méthane réagit avec l'oxygène), il se forme du monoxyde de carbone et de l'eau.
- ② Laissée à la lumière du jour, l'eau oxygénée se décompose d'elle-même en eau et en oxygène.
- ③ Lors de la photosynthèse, les plantes vertes consomment de l'eau et du dioxyde de carbone. Elles produisent du glucose et rejettent du dioxygène.
- ④ L'ammoniac sert à fabriquer des engrais. Pour l'obtenir, on fait réagir du diazote et du dihydrogène.

À travers L'Histoire



Scène extraite de l'Akbar Nama (xvi^e siècle).

La notion d'équation algébrique a été introduite par le mathématicien perse Al Khwarizmi au ix^e siècle. Afin de résoudre des équations, il utilise deux procédés : *al-muqâbala*, opération qui permet de supprimer les termes semblables, et *al-jabr*, qui signifie restauration et qui a donné son nom à l'algèbre. Dans ses livres, il explique comment résoudre des problèmes de vie courante, d'héritage, et il rédige tout en phrases. Le nombre connu est appelé « *dirham* » (unité monétaire) et l'inconnue, « *la chose* » ou « *racine* », son carré étant nommé « *mal* », « *biens* » ou « *richesse* ». Voici un exemple de problème que résolvait Ibn al Banna, savant de Marrakech (1256-1321).

Problème : « Partage deux cents vingt dirhams entre dix hommes de telle sorte que le deuxième prenne le double de ce que prend le premier, que le troisième prenne trois fois la part du premier, le quatrième quatre fois sa part, les multiples augmentant ainsi d'un à chaque fois jusqu'à la part que prend le dixième et qui est dix fois celle que prend le premier ».

Solution : « Tu poses la part du premier égale à une chose, la part du second deux choses et c'est le double de la première, la part du troisième trois fois celle du premier et, ainsi de suite, les multiples se succédant jusqu'à la part du dixième soit dix fois celle du premier. Puis tu fais la somme de tout cela, ce qui donne cinquante cinq choses. Tu égales aux deux cent vingt, et il en résultera la part du premier égale à quatre et celle du dixième quarante. Comprends cela et résous de la même manière les problèmes semblables ».

(Traduction de A. Djebbar.)

ce que je dois savoir sur...

... le calcul littéral et les équations

- Utiliser ou établir une formule.
- Tester une égalité.
- Développer et réduire une expression littérale.
- Résoudre une équation.
- Mettre en équation et résoudre un problème.

je m'évalue

- 1 Calculer $A = 3x^2 + 2(x - 1)^2$ pour :
 $x = 1$, $x = -2$ et $x = \frac{1}{2}$

- 2 L'aire d'un trapèze est donnée par la formule :

$$A_{\text{trapèze}} = \frac{(b + B) \times h}{2}$$

- a) Un trapèze d'aire $29,5 \text{ cm}^2$ peut-il avoir les dimensions suivantes :

1^{ère} proposition :

$$b = 4 \text{ cm} ; \quad B = 7,8 \text{ cm} ; \quad h = 5 \text{ cm} ?$$

2^e proposition :

$$b = 3 \text{ cm} ; \quad B = 8,7 \text{ cm} ; \quad h = 5 \text{ cm} ?$$

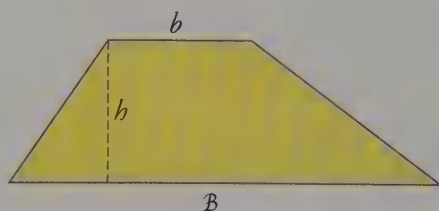
- b) Les dimensions d'un trapèze sont :

$$h = 8 \text{ cm} ; \quad b = 2,6 \text{ cm} ; \quad B = 5 \times b \text{ cm}$$

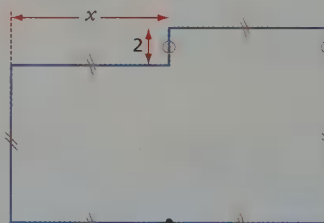
Quelle est son aire, en cm^2 ?

- c) TRAP est un trapèze d'aire $25,6 \text{ cm}^2$ et de hauteur 4 cm . Sa grande base est le triple de la petite base.

Quelles sont les dimensions du trapèze ?



- 3 Exprimer en fonction de x l'aire et le périmètre de cette figure.



- 4 Simplifier, si possible, les expressions suivantes :

$$4t - 11t ; \quad 3x \times 7 ; \quad 12a \times 5b ; \quad 7h - 2 ; \quad 2y \times 8y$$

$$(2x)^2 \times (-x) \times (11x) ; \quad 6z^2 + 9z$$

- 5 Développer puis réduire, si possible, les expressions suivantes :

$$4(3x + 8) ; \quad -5(x - 2)$$

$$2x(9 - 6x) ; \quad 3(7 - 2x) - (5x - 1)$$

$$(5x + 2)(1 + 4x) ; \quad (-4x + 7)(-3x - 4)$$

- 6 Résoudre les équations suivantes :

$$2x + 5 = 3 ; \quad 9x - 10 = 5x + 16$$

$$11x - 13 = x ; \quad 7(x + 1) - 3x = 4 - (x - 2)$$

- 7 Maëlle a 12 ans et sa mère 45 ans.

Dans combien d'années l'âge de la mère sera le double de l'âge de la fille ?

Les solutions se trouvent à partir de la page 279.

PROPORTIONNALITÉ

En 6^{ème}-5^{ème}

- Reconnaître la proportionnalité sur un tableau complet de nombres et compléter un tableau représentant une situation de proportionnalité.
- Mettre en œuvre la proportionnalité (changements d'unités, utilisation d'une échelle, calcul d'un pourcentage, reconnaissance d'un mouvement uniforme).

En 4^{ème}

- Utiliser, dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité sous la forme d'alignement de points avec l'origine.
- Utiliser $d = vt$ pour des calculs de distance parcourue, de vitesse et de temps.
- Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure).
- Mettre en œuvre la proportionnalité dans des situations simples utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs.

pour démarrer



1 Trouver l'intrus

- Reconnaître la proportionnalité sur un tableau de nombres.

Parmi ces trois tableaux, un seul ne représente pas une situation de proportionnalité. Lequel ?

-2	5	7
-6	15	21

8	-14	8,6
4	-7	4,3

20	-3	-1
-80	12	-4

2 Échelle

- Compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité.
- Déterminer une quatrième proportionnelle.

Sur la carte routière ci-contre, 3 cm représente 4,5 km. Jonathan mesure sur cette carte la distance, à vol d'oiseau, entre Fontaine-Le-Dun et Veules-les-Roses et trouve 5,5 cm. Il souhaite connaître la distance réelle entre ces deux villes. Jonathan note dans un tableau tous les renseignements :

Distance en cm sur la carte	3	5,5
Distance réelle en km	4,5	?

Comment l'aider à terminer ?



Activités

3 Association

Voici six situations présentées avec un énoncé, un tableau et un graphique.

- 1) Associer chaque tableau, chaque énoncé, chaque graphique correspondant à une situation.

Énoncés

E_1 : On a calculé les aires de carrés dont on connaît les mesures des côtés.

E_2 : L'usine Quatror a démarré il y a 4 ans, elle a atteint un chiffre d'affaires de 2 millions d'euros il y a 1 an. Depuis 1 an ce chiffre d'affaire diminue, on pense qu'il va encore diminuer pendant 2 ans puis augmenter.

E_3 : Deux bouteilles d'eau coûtent 1 €. Combien coûte six bouteilles ?

E_4 : On effectue une expérience de chimie où l'on fait baisser régulièrement la température de 4°C tous les jours sur plusieurs semaines. On prend comme jour de référence, en abscisse 0, le dimanche où la température a été 0°C . On inscrit sur le graphique les températures des jours suivants et précédents.

E_5 : On achète des magazines qui coûtent trois euros chacun. Pour que le libraire les mette de côté, il faut lui verser un euro à l'année.

E_6 : Nicolas a effectué des relevés de température pour son expérience de biologie. À minuit il y avait 0°C , une heure avant il y avait -2°C , à 2 heures il y avait 4°C .

• Prendre des informations utiles.

• Lire un graphique.

• Reconnaître la proportionnalité sur un tableau de nombres ou l'énoncé d'une situation.

Tableaux

$$T_1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 4 & 16 \\ \hline \end{array}$$

$$T_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline -4 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

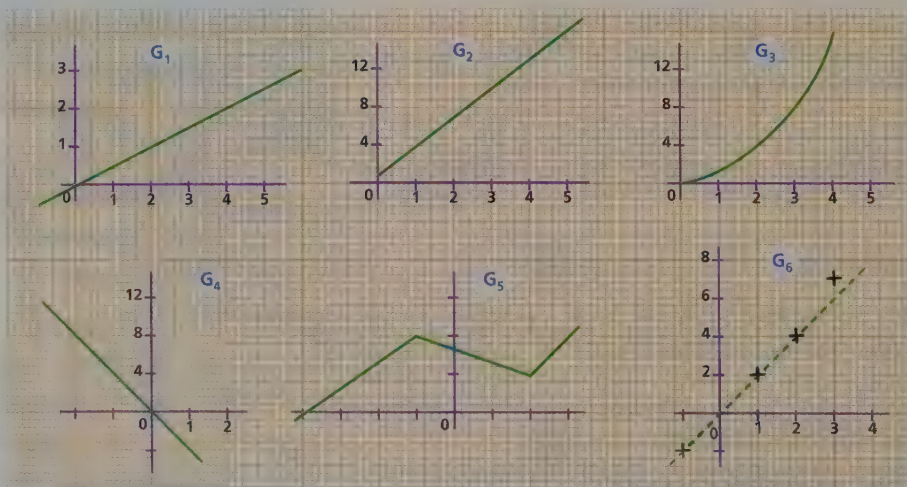
$$T_3 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 2 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$T_4 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 10 & 16 \\ \hline \end{array}$$

$$T_5 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline -2 & 4 & 7 & 10 \\ \hline \end{array}$$

$$T_6 \begin{array}{|c|c|c|} \hline -4 & -1 & 2 \\ \hline 16 & 4 & -8 \\ \hline \end{array}$$

Graphiques



- 2) Parmi ces six situations, retrouver celles qui sont des situations de proportionnalité.
- 3) Observer la forme des six graphiques. Faire une remarque concernant ceux qui correspondent à des situations de proportionnalité.

• Associer proportionnalité et points alignés avec l'origine.

4 Vitesse moyenne

• Notion de vitesse moyenne.

Le trajet de vacances, en automobile, entre Rouen et Carnac a duré 4 h 30 pour une distance de 459 km, dont beaucoup en autoroute. La vitesse n'est pas constante car il y a des arrêts, des accélérations, des freinages. On peut cependant dire qu'en moyenne, la voiture parcourt $\frac{459}{4,5}$ kilomètres en une heure.

On dit que la vitesse moyenne est de 102 kilomètres par heure.

On écrit 102 km/h ou 102 km.h⁻¹.

1) Recopier et compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Durée du trajet en h	4,5	1	3			t
Distance parcourue en km				255	346,8	d

2) Exprimer la distance parcourue d en fonction de la durée t et de la vitesse.

5 Vitesse et unités

• Applications de la relation $d = v \times t$ pour calculer d , v , ou t .

• La vitesse moyenne est différente de la moyenne des vitesses.

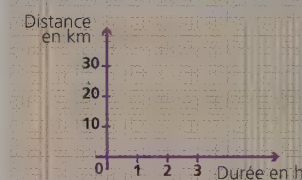
Rosaria et Johann ont fait une randonnée en vélo jusqu'au col de Vars. De leur maison au col, il y a 45 kilomètres. À l'aller, il y a beaucoup de montées à grimper, aussi ils mettent 3 heures. Au retour, ils peuvent aller plus vite à la vitesse moyenne de 30 km.h⁻¹.



- 1) Calculer la vitesse moyenne sur le trajet aller en km.h⁻¹.
- 2) Calculer la durée du trajet retour.
- 3) Calculer la vitesse moyenne en km.h⁻¹ sur le parcours aller et retour.
- 4) Ils veulent avoir l'impression d'aller plus vite, aussi ils expriment leurs vitesses en m.s⁻¹.

Pour les aider, exprimer chaque distance en mètres, chaque durée en seconde et calculer les trois vitesses moyennes sur le trajet aller, le trajet retour et le parcours aller-retour. Vont-ils vraiment aller plus vite ?

- 5) Représenter sur un graphique le déplacement des deux cyclistes, en prenant 1 cm en abscisse pour une durée de 1 heure et en prenant 1 cm en ordonnée pour une distance de 10 km, sachant qu'ils sont restés au col de Vars pendant 2 heures.



6 Sauce au chocolat

• Les pourcentages ne s'ajoutent pas.

Mélanie décide de préparer une sauce au chocolat. Elle utilise une tablette de 200 g à 81 % de teneur en cacao qu'elle mélange à une deuxième de 250 g à 54 % de cacao.

- 1) Quelle quantité de cacao est contenue dans la tablette de 200 g.
- 2) Quelle quantité de cacao est contenue dans la tablette de 250 g.
- 3) Quel est le pourcentage de cacao dans la sauce préparée par Mélanie ?

7 Pourcentage

• On pourra utiliser le calcul littéral pour 2) et 3).

Au moment des soldes, il y a 20 % de réduction sur tous les articles.

- 1) Calculer le montant de réduction sur un article coûtant 18 €.
- 2) Un article a été acheté 20 €. Combien coûtait-il avant la réduction ?
- 3) Le prix de ce même article, une semaine plus tard, a subi une nouvelle baisse. Il est maintenant de 18 €. Quel est le pourcentage de réduction par rapport à son prix d'origine ?

L'essentiel en deux pages

1 Reconnaître une situation de proportionnalité

a) Avec un tableau de nombres

Un tableau de nombres représente une situation de proportionnalité si on peut passer de la 1^{re} ligne à la 2^e ligne en multipliant par le même nombre.

Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemples

4	10	15	9
1,2	3	4,5	2,7

$$\frac{1,2}{4} = 0,3 ; \quad \frac{3}{10} = 0,3 ; \quad \frac{4,5}{15} = 0,3 ; \quad \frac{2,7}{9} = 0,3$$

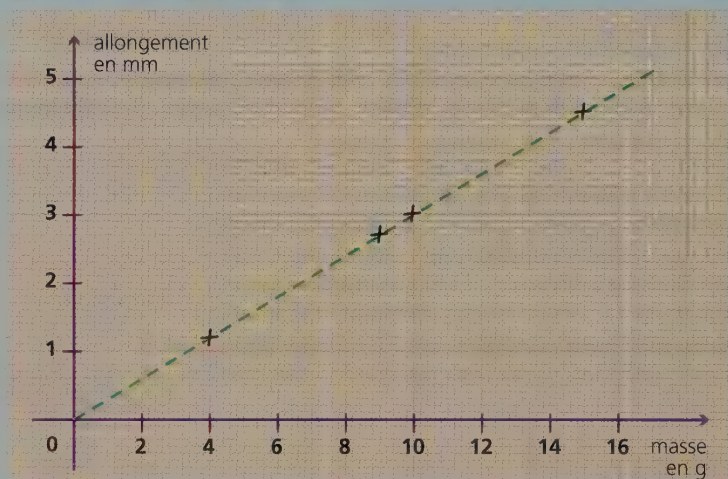
• Tous les quotients sont égaux.
Ce tableau représente donc une situation de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité est le nombre 0,3.

14	5	4,5	2
39,2	14	121,5	5,6

$$\frac{39,2}{14} = 2,8 ; \quad \frac{14}{5} = 2,8 ; \quad \frac{121,5}{4,5} = 2,7 ; \quad \frac{5,6}{2} = 2,8$$

• Il existe un quotient différent des autres.
Ce tableau ne représente donc pas une situation de proportionnalité.

b) Avec un graphique



Un graphique représente une situation de proportionnalité si tous les points sont alignés entre eux et avec l'origine du repère.

c) Grandeurs proportionnelles

Deux grandeurs x et y **proportionnelles** sont des grandeurs telles qu'il existe un nombre a pour lequel : $y = ax$.

a est le coefficient de proportionnalité.

Si y est l'allongement en millimètres d'un ressort et x la masse en grammes d'un poids suspendu au bout du ressort, on obtient une relation du type $y = kx$.
On exprime ici l'allongement en fonction de la masse.

Par exemple, en reprenant les valeurs du premier tableau, on a $y = 0,3x$.
Le graphique correspondant a été tracé au paragraphe précédent.

2 — Application de la proportionnalité : vitesse

• Le mouvement d'un objet est uniforme lorsque la distance d qu'il parcourt est proportionnelle au temps t mis pour parcourir cette distance.

Le coefficient de proportionnalité v est appelé vitesse de l'objet.

Il existe une relation entre la distance, la durée et la vitesse : $v = \frac{d}{t}$

Cette relation peut aussi se traduire par : $d = v \times t$ ou $t = \frac{d}{v}$

Dans le cas d'un mouvement uniforme, la vitesse est constante.

• Il existe des situations où la vitesse n'est pas constante mais on peut s'y ramener en parlant de vitesse moyenne.

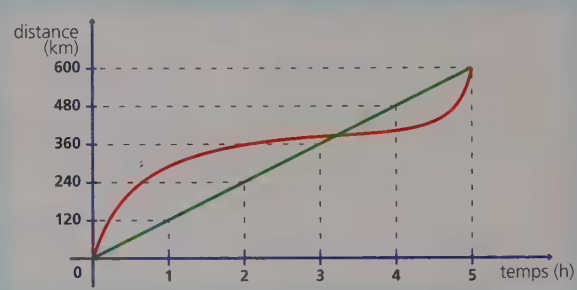
La **vitesse moyenne** d'un mobile est le quotient de la distance du parcours par la durée du parcours

$$V_{\text{moyenne}} = \frac{\text{distance totale}}{\text{temps total}}$$

La courbe rouge indique la distance parcourue par une voiture en fonction du temps.

Sa vitesse n'est pas constante mais sa vitesse moyenne est : $V_m = \frac{600}{5}$; $V_m = 120 \text{ km/h}$

L'unité de vitesse est, dans ce cas, le kilomètre-heure, noté km/h ou km.h^{-1} . Ce qui signifie que, en moyenne, la voiture parcourt 120 km toutes les heures (graphique vert).



3 — Changements d'unités

Un randonneur a une vitesse moyenne de 5,4 km/h : si son trajet avait duré 1 heure, il aurait parcouru 5,4 km. Combien de mètres a-t-il parcouru en moyenne en 1 seconde ?

On convertit 5,4 kilomètres en mètres et 1 heure en secondes :

5,4 km = 5 400 m et 1 h = 3 600 s.

$$V_m = \frac{5\,400}{3\,600} \quad \begin{matrix} \text{en m} \\ \text{en s} \end{matrix} \quad V_m = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$$

Donc, en 1 seconde, le randonneur a parcouru en moyenne 1,5 mètre.

4 — Application de la proportionnalité : pourcentage

La proportionnalité intervient lorsque l'on applique un pourcentage ou lorsque l'on calcule un taux de pourcentage.

Exemples

• Les prix subissent une réduction de 5 %. De combien est réduit le prix d'un article coûtant 8 € ?
Le montant de la réduction se calcule par : $0,05 \times 8 = 0,4$.
Le prix de l'article baisse de 0,4 €.

• La collecte de papier à recycler est passée, en un an, de 800 tonnes à 1050 tonnes. Quel est le pourcentage x d'augmentation ?

Augmentation	250	x
Masse totale	800	100

$$x = (250 \times 100) : 800 = 31,25$$

Il y a eu 31,25 % d'augmentation de masse de papier à recycler.



APPLICATIONS DE LA PROPORTIONNALITÉ

Calculer une distance, une durée, une vitesse

Le calcul d'une distance, d'une durée ou d'une vitesse utilise souvent la formule $d = v \times t$.
On peut utiliser également un tableau de proportionnalité.

a) Calcul d'une distance

Énoncé

Une camionnette roule pendant 3 h 12 min à la vitesse de 65 km.h^{-1} .
Quelle distance a-t-elle parcourue ?

Exemple de solution

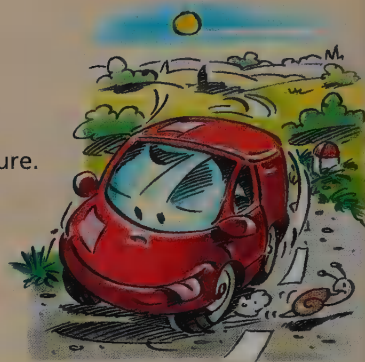
On utilise la formule $d = v \times t$, en convertissant le temps en dixième d'heure.

12 min correspondent à $\frac{12}{60} \text{ h}$ soit 0,2 h.

Le temps total est donc de 3,20 h.

$$d = 65 \times 3,20 = 208$$

La distance parcourue par la camionnette est de 208 km.



b) Calcul d'une durée

Énoncé

Le TGV parcourt une distance de 780 km à la vitesse moyenne de 240 km.h^{-1} .
Quel temps a-t-il mis pour se rendre à destination ?

Exemple de solution

On utilise la formule $d = v \times t$.

$$780 = 240 \times t \quad \text{donc} \quad t = \frac{780}{240} = 3,25$$

Il faut convertir 3,25 h en heures et minutes.

0,25 heure correspond à $0,25 \times 60$ minutes, soit 15 minutes.

Le temps mis par le TGV est de 3 h 15 min.

c) Calcul d'une vitesse

Énoncé

Une antilope court dans la savane pendant 1 h 30 et parcourt la distance de 120 km.
Quelle est la vitesse moyenne de l'antilope ?

Exemple de solution

On utilise la formule $d = v \times t$, en convertissant le temps en dixième d'heure.

30 minutes correspondent à une demie heure soit 0,5 heure.

$$120 = v \times 1,5$$

$$v = \frac{120}{1,5} = 80$$

L'antilope court à la vitesse moyenne de 80 km.h^{-1} .

Application de la proportionnalité : pourcentage

a) Interprétation des pourcentages

Une chaîne de télévision a relevé l'Audimat (taux d'écoute d'une émission) pour la journée du 23 décembre 2001 à 20 h 50.

42 % des téléspectateurs ont regardé Soft Lory. Ce qui revient à dire que, en moyenne, pour 100 téléspectateurs, 42 ont regardé cette émission, ou encore :

- sur 50 téléspectateurs, 21 ont regardé Soft Lory ;
- sur 200 téléspectateurs, 84 ont regardé Soft Lory ;
- sur 1000 téléspectateurs, 420 ont regardé Soft Lory.

Nombre total de téléspectateurs	100	50	200	1 000
Nombre de téléspectateurs ayant regardé Soft Lory	42	21	84	420

Dans le cas où le dénominateur est cent, le coefficient de proportionnalité est appelé pourcentage.

b) Appliquer un pourcentage

Ce jour-là, à Rians, on comptait 11 250 téléspectateurs. Dans cette ville, à combien peut-t-on estimer le nombre de personnes ayant regardé Soft Lory ?

Nombre total de téléspectateurs	100	11 250
Nombre de téléspectateurs ayant regardé Soft Lory	42	?

$$\frac{42}{100} \times 11\,250 = 4\,725 \quad \text{ou} \quad \frac{42 \times 11\,250}{100} = 4\,725 \quad \text{ou} \quad 0,42 \times 11\,250 = 4\,725$$

Donc, on peut estimer à 4 725 le nombre de Riannais ayant regardé Soft Lory.

c) Calculer un pourcentage

La population totale de Rians est de 17 067 habitants.

Quel est le pourcentage de Riannais ayant regardé la télévision le 23 décembre 2001 ?

Population totale	17 067	100
Population ayant regardé la télévision	11 250	?

Pour 17 067 habitants, 11 250 ont regardé la télévision.

Pour 100 habitants, combien ont regardé la télévision ?

$$\frac{100 \times 11\,250}{17\,067} \approx 66 \%, \quad \text{donc environ } 66 \% \text{ des Riannais ont regardé la télévision.}$$

d) Retrouver une quantité initiale

Un autre jour, 10 584 habitants ont regardé l'émission, soit 5 % de plus que la veille. Combien de personnes avaient regardé la télévision, la veille ?

Si x représente le nombre de personnes qui ont regardé l'émission la veille, alors $x + \frac{5}{100}x$ ont regardé l'émission.

$$x + \frac{5}{100}x \text{ correspond à } 10\,584 \text{ habitants, soit } x + 0,05x = 10\,584.$$

En résolvant l'équation, on trouve $x = 10\,080$.

Le nombre d'habitants ayant regardé l'émission est 10 080.

RECONNAITRE ET REPRÉSENTER UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITÉ

- 1 Le tableau ci-dessous est-il un tableau de proportionnalité ?

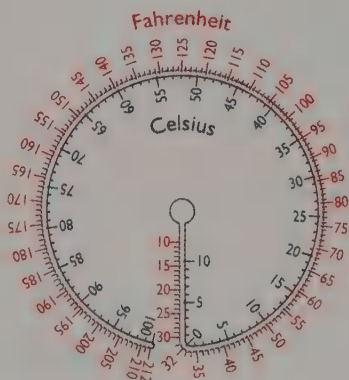
0,2	8	$-\frac{1}{2}$	-41
-0,4	-16	1	82

- 2 Compléter le tableau de proportionnalité suivant :

2	-7			$-\frac{1}{5}$	
-10		15	6		$-\frac{5}{3}$

- 3 L'unité de mesure de la température en Grande-Bretagne est le Fahrenheit, noté °F.

La correspondance entre degrés Celsius (°C) utilisés en France et degrés Fahrenheit est donnée par le schéma suivant :



Par exemple :

- 0 °C correspond à 32 °F ;
- 10 °C correspond à 50 °F ;
- 50 °C correspond à 122 °F.

Ces deux suites de nombres sont-elles proportionnelles ?

- 4 Les topographes* emploient couramment le grade (noté gr) comme unité de mesure d'angles.

La conversion des degrés en grades est donnée par l'égalité :

$$90^\circ = 100 \text{ gr}$$

Compléter le tableau suivant :

Angles (en degrés)	90	81			1
Angles (en grade)	100		46	1	

(* Un topographe est une personne qui étudie les reliefs géographiques.)

- 5 En navigation, l'unité de vitesse utilisée est le nœud.

Compléter le tableau suivant :

Vitesse (en km/h)	46,3			1
Vitesse (en nœuds)	25	100	1	

- 6 Des dinosaures ont vécu sur terre il y a bien longtemps. Sachant qu'ils avaient à peu près tous la même configuration, les mesures suivantes semblent-elles correctes ?

	Longueur (en mètres)	Largeur (en mètres)	Masse (en tonnes)
Brontosaurus	20	8	35
Brachiosaurus	26	14	50
Diplodocus	25	12	12

- 7 Matthieu bébé avait 4 dents à un an, 8 dents à deux ans.

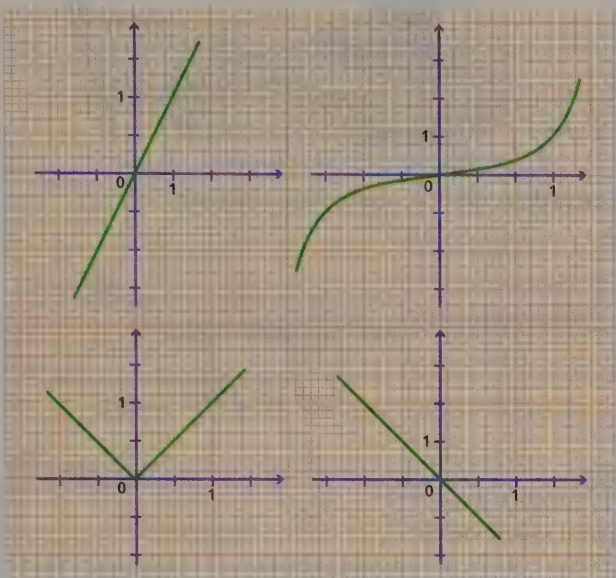
Combien aura-t-il de dents à douze ans ?

- 8 Indiquer, parmi les énoncés ci-dessous, ceux qui sont faux.

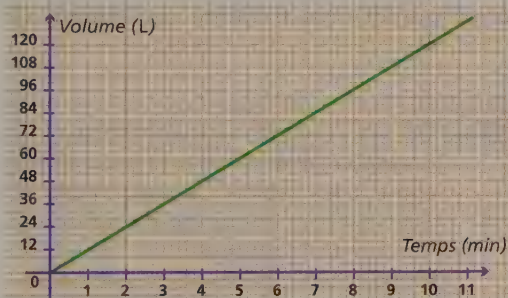
- La taille d'une personne est proportionnelle à son âge.
- Le périmètre d'un carré est proportionnel à son côté.
- Le débit d'eau d'un robinet est proportionnel au diamètre de la tuyauterie.
- Le volume d'un cône de révolution est proportionnel à sa hauteur.
- Le volume d'un cône de révolution est proportionnel au rayon de sa base.

- 9 Les cinq points d'un graphique sont alignés. Peut-on affirmer que ce graphique représente une situation de proportionnalité ?

- 10** Parmi ces quatre graphiques, trouver ceux qui traduisent une situation de proportionnalité et en déterminer le coefficient de proportionnalité.



- 11** Le volume d'eau (en litres) débité par un robinet en fonction du temps (en minutes) est donné par le graphique ci-dessous.

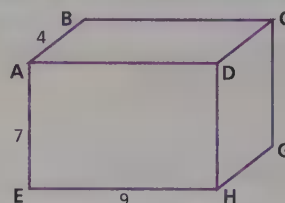


- Le volume d'eau est-il proportionnel au temps écoulé ? Justifier la réponse.
- Quel est le temps nécessaire pour remplir une baignoire de 120 litres ?
- Malika affirme qu'en sept minutes cette baignoire est remplie aux trois quarts. A-t-elle raison ?

- 12** Construire des triangles de base 8 cm et de hauteurs respectives 2 cm, 4,5 cm, 6 cm, 8 cm, 10 cm.

- Calculer l'aire de ces cinq triangles.
- Construire un graphique représentant l'aire en fonction de la hauteur.
- Que peut-on dire de l'aire et de la hauteur de ces triangles ? Justifier la réponse.

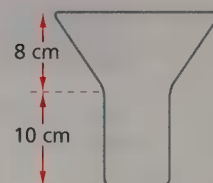
- 13** Un pavé droit ABCDEFGH a pour dimensions 4 dm, 7 dm et 9 dm.



- Calculer son volume.
- Si ses dimensions sont doublées, que se passe-t-il pour son volume ?
- Proposer les dimensions d'un pavé dont le volume serait le tiers de celui du pavé ABCDEFGH.

14 Le vase

On verse de l'eau dans un vase de la forme ci-contre. Les deux parties constituant le vase ont une hauteur de 10 cm et de 8 cm.



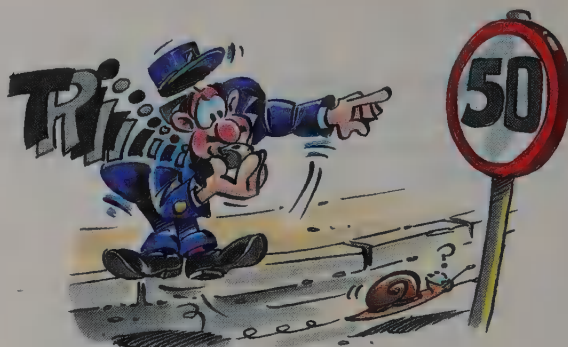
Pour chaque quantité d'eau versée, on mesure la hauteur d'eau dans le vase.

Volume d'eau (en cL)	30	70	90	150	190	230	270
Hauteur d'eau (en mm)	21	49	63	99	114	126,5	140,4

- En utilisant les résultats du tableau, établir un graphique indiquant la relation entre la hauteur d'eau en fonction du volume d'eau versé.
- La situation est-elle une situation de proportionnalité ?
- Trouver, par lecture graphique, la hauteur d'eau pour un volume de 50 cL. Expliquer comment retrouver le résultat par le calcul.
- Trouver, par lecture graphique, la hauteur d'eau pour un volume de 200 cL. Peut-on retrouver le résultat par le calcul ?



VITESSE



15 Sécurité routière

Pour information :



On considère que la vitesse excessive des véhicules intervient dans la moitié des accidents...

Vitesses maximales (en km/h) autorisées sur le réseau routier français :

Véhicules	Météo	Sur autoroutes	Sur routes à chaussée séparées	Sur autres routes	En ville
Automobiles	Temps sec et clair	130	110	90	50
	Pluie	110	100	80	50
	Visibilité inférieure à 50 m	50	50	50	50
Cyclomoteurs		Non autorisé	En général non autorisé sinon 45	45	45

- Les jeunes conducteurs doivent respecter les vitesses limites des conducteurs confirmés par temps de pluie.

(Extrait du livret de la sécurité routière, 1999/2000.)

- Un automobiliste pense qu'il va gagner beaucoup de temps sur une route nationale s'il roule à la vitesse moyenne de 100 km/h au lieu de 90 km/h. Quel temps gagnerait-il sur un parcours de 90 km ?
- Même exercice pour un cyclomotoriste qui roulerait à une vitesse moyenne de 50 km/h au lieu de 45 km/h sur un parcours de 45 km.

16 Compléter le tableau suivant (donner les valeurs approchées au dixième si nécessaire) :

Vitesse (en km/h)	10	130		
Vitesse (en m/s)			1,5	3×10^8

17 Caen, Rennes et Le Mans sont approximativement trois villes équidistantes, c'est-à-dire qu'elles sont situées aux trois sommets d'un triangle équilatéral. Le côté de ce triangle est environ 130 km.

Une voiture se rend de Caen à Rennes à la vitesse moyenne de 78 km/h, puis va au Mans à la vitesse moyenne de 100 km/h. Enfin, elle revient à son point de départ, Caen, à la vitesse moyenne de 130 km/h.

Quelle est la vitesse moyenne de la voiture sur l'ensemble du trajet ?

18 Chloé et Juliette souhaitent passer la journée ensemble, elles décident de se rejoindre sur la route. Elles habitent à 60 km l'une de l'autre. Elles partent toutes les deux à 10 heures de leur domicile respectif.

Chloé roule à la vitesse moyenne de 72 km/h et Juliette à la vitesse moyenne de 48 km/h.

- Après 25 minutes, quelle distance y aura-t-il entre Chloé et Juliette ?
- À quelle heure vont-elles se rejoindre ?

19 La lumière se propage à la vitesse de 3×10^8 m/s. La planète Jupiter est située à environ 771 millions de kilomètres du Soleil.



Calculer le temps mis par la lumière du Soleil pour atteindre Jupiter.

20 Compléter le tableau suivant :

	Piéton	Cycliste	Automobiliste
Vitesse moyenne (en km/h)		25 km/h	120 km/h
Distance parcourue (en km)	4,5 km		
Temps (en h et min)	45 min	3 h 12 min	1 h 30 min

- 21** — Théo vient de rendre visite à son ami Boris. Pour lui tenir compagnie tout au long des dix kilomètres du chemin de retour, Théo compte sur son fidèle chien Fox. Mais Fox passe tout son temps à courir sans arrêt entre Théo et sa maison.

Théo se déplace à 5 km/h et Fox à 20 km/h.

Quelle distance Fox aura-t-il parcourue en tout, entre le moment où il a quitté Boris et celui où Théo retrouve sa maison.

(D'après Rallye Mathématiques Champagne-Ardenne, 1991.)

CHANGEMENT D'UNITÉS

- 22** — Recopier et compléter :

2 h 30 min = min ; 3,4 h = h min

2 h 20 min = 2, ... h ; 41 min 41 s = s

- 23** — Recopier et compléter :

30 km.h⁻¹ = m.h⁻¹ = m.s⁻¹

45 m.s⁻¹ = m.h⁻¹ = km.h⁻¹

- 24** — Pendant les vacances, Kévin vend des glaces sur la plage de Calvi. Il est payé 6 € de l'heure. Aujourd'hui, il a travaillé 5 h 12 min.

Quel est le salaire perçu pour cette journée ? Justifier la réponse.

- 25** — C'est gonflé !

Le « dragster » de Jeff peut parcourir 240 km en 16 minutes.

Quelles sont les bonnes réponses ?

- a) 240 m en 1 min b) 900 km en 1 h
c) 250 m en 1 min d) 250 m en 1 s

- 26** — Le centre nautique peut accueillir 610 personnes par jour. L'eau est pompée à 400 mètres du rivage et 1 700 mètres de tuyau amènent les 427 m³ d'eau nécessaires par jour.

Calculer la quantité d'eau nécessaire pour une personne en moyenne. Donner le résultat en mètres cube par personne puis en litres par personne.

- 27** — Athlétisme

Au meeting d'athlétisme préparatoire pour les championnats de France, le gagnant a couru le 1 500 mètres en 3 minutes et 40 secondes.

Calculer sa vitesse moyenne en mètres par minute, puis en kilomètres par heure.

- 28** — Ventilation pulmonaire



Un homme au repos consomme 250 cm³ d'oxygène par minute. En marche rapide, il consomme 900 cm³ par minute.

Calculer la consommation d'oxygène en litres par heure.

POURCENTAGE

- 29** — Calculer :

- 20 % de 700 ;
- 0,5 % de 230 ;
- 115 % de 300.

- 30** — Lors des élections des délégués de 4^{ème} B, deux élèves sur 27 ont voté blanc.

Calculer le pourcentage des élèves qui ont voté blanc.

- 31** — 17 élèves sur 25 sont inscrits au « Club Maths » en 4^{ème} A et 10 élèves sur 20 en 4^{ème} B.

- a) Calculer le pourcentage d'élèves inscrits au « Club Maths » dans la 4^{ème} A.
- b) Calculer le pourcentage d'élèves inscrits au « Club Maths » dans la 4^{ème} B.
- c) Calculer le pourcentage d'élèves inscrits au « Club Maths » dans les deux classes.

- 32** — On augmente le côté d'un triangle équilatéral de 2 %.

De quel pourcentage augmente son périmètre ?

- 33** — La récolte d'algues marines est passée de 100 tonnes à 5 000 tonnes en 10 ans.

Quel est le pourcentage d'augmentation ?

exercices

34 — Intérêts

Une somme de 1 500 € est placée à 4 % d'intérêts par an.

Au bout de combien d'années va-t-elle dépasser 2 000 € ?

35 — Vrai ou faux ?

- Les prix ont augmenté de 20 %. Un disque dur d'un ordinateur qui coûtait 100 € vaut maintenant 120 €.
- Les prix ont augmenté de 30 %. Une imprimante qui coûtait 200 € vaut maintenant 230 €.
- Si les prix doublent, le pourcentage d'augmentation est de 50 %.

36 — Au moment des soldes un blouson a été vendu 51 € avec une réduction de 40 %.

Quel était le prix initial du blouson ?

37 — Sur un paquet de 270 g de chocolat en poudre, on peut lire : « 50 % de produit en plus gratuit ».

Quelles sont les bonnes réponses ?

- Il y a 135 g de chocolat gratuit.
- Il y a 90 g de chocolat gratuit.
- 30 % de la masse totale est gratuite.
- Cela revient à une réduction de 50 %.

38 — L'air est un mélange composé essentiellement de dioxygène et de diazote.



On relève la quantité de dioxygène contenu dans certaines quantités d'air.

Volume d'air (L)	500	20	130
Volume dioxygène (L)	105	4,2	27,3

- Le tableau ci-dessus est-il un tableau de proportionnalité ?
- Quel est le pourcentage de dioxygène dans l'air ?

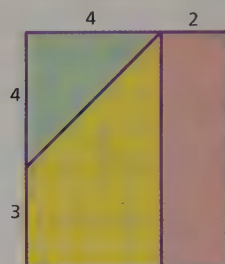
39 — Le kilogramme de foie gras est affiché cette année à 45 €. Il a augmenté de 20 % en un an. Combien coûtait-il l'année dernière ?

54 € ; 40,5 € ; 65 € ; 37,5 € ; 33,75 €

PROBLÈMES

40 — Nahima souhaite agrandir cette figure composée d'un triangle rectangle isocèle, d'un rectangle et d'un trapèze.

Elle décide que les segments qui mesurent 4 cm devront mesurer 7 cm.



Réaliser la figure agrandie.

41 — Une plaque rectangulaire d'acier a pour épaisseur 2 mm, pour longueur 28 cm et pour largeur 12 cm.

La masse volumique de l'acier est 7,5 kg/dm³, ce qui signifie que 1 dm³ d'acier pèse 7,5 kg.

Quelle est la masse de la plaque ?

42 — En cours de chimie, Isabelle réalise l'expérience suivante : elle utilise 8 g de dioxygène pour brûler 3 g de carbone. Elle constate qu'il se dégage 11 g de dioxyde de carbone.

Son professeur lui a appris que « les quantités de réactifs intervenant dans une réaction sont proportionnelles entre elles ».

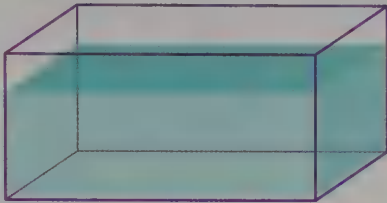
- Isabelle souhaite obtenir 60,5 g de dioxyde de carbone.
Quelle masse de carbone doit-elle brûler ?
- Quelle masse de dioxygène est nécessaire pour brûler 33,6 g de carbone ?

43 — Le diamètre du Soleil est d'environ 1,4 million de kilomètres et celui de la Terre de 12 756 km. Ouïssen utilise une pomme de diamètre 9 cm pour représenter le Soleil.

Quel est, au mm près, le diamètre de la boule que devra choisir Ouïssen pour schématiser la Terre ?

- 44** Dans un aquarium de forme parallélépipédique, lorsque l'on verse 6,25 litres d'eau, le niveau monte de 8 cm.

- a) De combien de centimètres monte le niveau d'eau si on verse :
13,5 L ? 1,25 L ? 5 L ?

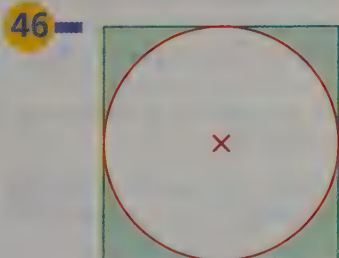


- b) Représenter graphiquement, sur du papier millimétré, l'augmentation du niveau d'eau en fonction du volume d'eau versé.
- c) Utiliser le graphique pour donner une valeur approchée de l'augmentation du niveau d'eau lorsque l'on verse 7 litres.
- d) Combien de litres doit-on verser pour que le niveau d'eau augmente de 19,2 cm ?

Donner une réponse approchée en utilisant le graphique puis une réponse exacte en écrivant un calcul.

- 45** Un robinet qui fuit laisse tomber trois gouttes d'eau toutes les 40 secondes. Dix gouttes d'eau représentent 1 cm³.

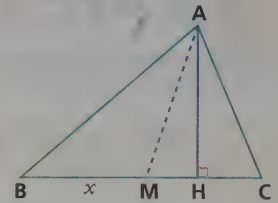
- Quel est le volume d'eau perdu en une journée ?



Un cercle de rayon r est inscrit dans un carré comme l'indique la figure ci-contre.

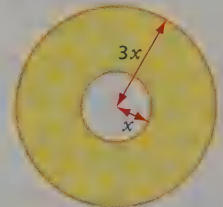
- a) Le périmètre du cercle est-il proportionnel au rayon ?
- b) Le périmètre du carré est-il proportionnel à la mesure du côté ?
- c) Le périmètre du cercle est-il proportionnel au périmètre du carré ?
- d) Dans les cas où il y a proportionnalité, indiquer le coefficient de proportionnalité et établir un graphique, en prenant 3,14 pour valeur arrondie de π .

- 47** ABC est un triangle tel que $BC = 8$ cm et sa hauteur $AH = 5$ cm. M est un point du côté [BC] tel que $BM = x$ (en cm).



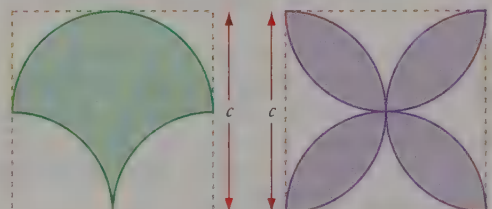
- a) L'aire du triangle ABM est-elle proportionnelle à la longueur x cm ?
- b) L'aire du triangle ACM est-elle proportionnelle à la longueur x cm ?
- c) Représenter sur un même graphique l'aire du triangle ABM en fonction de x et l'aire du triangle ACM en fonction de x .
- Unités :
- en abscisse, prendre 1 cm pour 1 cm
 - en ordonnée, prendre 1 cm pour 2 cm
- d) Où placer le point M sur [BC] pour que l'aire du triangle ABM soit 3,5 cm² ?
- e) Où placer le point M sur [BC] pour que les triangles ABM et ACM aient la même aire ? Justifier la réponse de plusieurs façons.

- 48** Le nombre x est un nombre positif. Cette couronne est obtenue à partir d'un petit disque de rayon x et d'un grand disque de rayon $3x$.



- Le périmètre de la couronne est-il proportionnel au nombre x ?
- L'aire de la couronne est-elle proportionnelle au nombre x ?

- 49** a) Réaliser les deux figures ci-dessous pour $c = 3$ cm.



- b) Exprimer le périmètre de chaque figure en fonction de c .
Ces périmètres sont-ils proportionnels au côté c du carré ?
- c) Faire une représentation graphique du périmètre de chaque figure en fonction de c . On prendra 3,14 comme valeur arrondie de π .

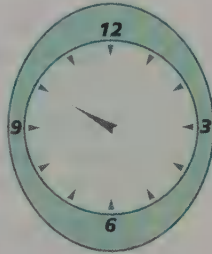
exercices

PROBLÈMES (suite)

50 — Combien mesure l'angle entre l'aiguille des heures et celle des minutes lorsqu'il est 12 h 23 min ?

51 — Sur une horloge, l'aiguille des heures indique 10 heures. L'aiguille des minutes forme un angle de 108° avec celle des heures.

Quelle heure est-t-il ?
(Il y a deux réponses possibles.)



52 — Un automobiliste roule à la vitesse constante de 80 km/h.

- Représenter graphiquement la distance parcourue par l'automobiliste en fonction du temps.
- En utilisant le graphique, déterminer le temps nécessaire pour parcourir 300 km ? 20 km ? Retrouver ces résultats par le calcul.
- En utilisant le graphique, déterminer la distance parcourue en 1 h 15 min ? 45 min ? Retrouver ces résultats par le calcul.

53 — Un train Express, roulant à une vitesse moyenne de 100 km/h, part de Paris à 10 heures et arrive à 13 h 30 min à Nantes. Un TGV part à la même heure de Paris. Sa vitesse moyenne est de 300 km/h.

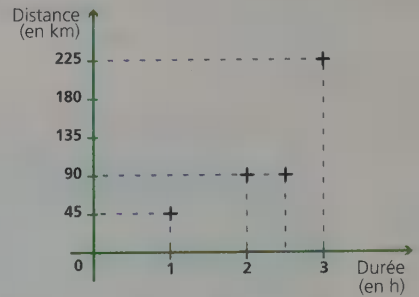
À quelle heure arrivera-t-il à Nantes ?

54 — Au cours d'une rencontre d'athlétisme, le gagnant du 400 mètres a couru en 48 secondes. Un chien de course peut aller jusqu'à une vitesse de $48 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Qui court le plus vite ?



55 — Le graphique ci-dessous représente la distance parcourue par une voiture en fonction de la durée du trajet.



Pour chacune des questions ci-dessous, retrouver la réponse exacte.

- Quelle est la distance parcourue en 2 h 30 min ?
① 90 km ② 112,50 km ③ 187,80 km
- À partir de ce graphique, que peut-on affirmer ?
① La situation représentée est une situation de proportionnalité.
② Sur l'ensemble du trajet, la vitesse n'est pas constante.
③ Sur l'ensemble du trajet, la vitesse est constante.
- Quelle est la vitesse moyenne sur les 3 heures ?
① 45 km/h ② 75 km/h ③ 150 km/h

56 — Un cycliste part à six heures pour atteindre la ville voisine, il roule à vitesse régulière et met 45 minutes à l'aller. Il fait une course de 30 minutes dans un magasin puis repart à vitesse régulière.

Le tableau suivant indique les durées mises pour parcourir des distances :

Durées en min	5	20	45	75	90	120
Distances en km	2,5	10	22,5	22,5	36	48

- Faire une représentation graphique du parcours, mettre le temps du parcours en abscisse, en prenant 1 cm pour 10 minutes, et la distance parcourue en ordonnée, en prenant 1 cm pour 2 kilomètres parcourus.
- Utiliser le graphique pour lire la distance parcourue après 15 minutes de durée du parcours. Faire de même pour 30 minutes, 50 minutes et 100 minutes.
- Calculer la vitesse moyenne à l'aller, au retour et sur le trajet total, sans inclure la période de course en ville.

57 — Biologie



On compare différentes données concernant un homme marchant à différentes vitesses.

Vitesse de marche en km/h	Consommation d'oxygène en L/h	Dépenses d'énergie en kJ/h *	Fréquence respiratoire en inspiration/min
2	27	564	15
4	42	878	19
6	61	1 280	22
8	112	2 120	27

- a) Quelle est la consommation en oxygène d'un marcheur à 4 km/h pendant 3 heures ?
 - b) La consommation en oxygène est-elle proportionnelle à la vitesse de marche ?
 - d) Traduire les consommations en oxygène en cm³/h.
- (* Le kiloJoule (kJ) est une unité de mesure d'énergie.)

58 — Au collège Victor Hugo, le nombre d'élèves a diminué de 10 % en un an. Par contre, le pourcentage de filles est passé de 50 % à 55 %.

- Le nombre de filles dans le collège :
- 1 a augmenté de 0,5 %.
 - 2 a augmenté de 1 %.
 - 3 est resté le même.
 - 4 a diminué de 1 %.
 - 5 a diminué de 0,5 %.

Retrouver la bonne réponse.
(D'après Kangourou des Mathématiques, 1991.)

59 — Les tarifs des séjours de vacances, hôtel et activités comprises, sont affichés dans le tableau ci-dessous :

	Forfait 6 jours/6 nuits	Forfait 8 jours/8 nuits
Période basse saison	894 €	1 128 €
Période haute saison	1 113 €	1 420 €

- a) Calculer, en pourcentage, l'augmentation des tarifs entre la basse et la haute saison.
- b) Donner, en pourcentage, l'écart des prix entre le forfait six jours et le forfait huit jours.

60 — Budget régional



En 2002, le montant total du budget du conseil général de Seine Maritime s'élève à 1,14 milliard d'euros, contre 1,10 milliard en 2001.

- a) Calculer le pourcentage d'augmentation du budget du conseil général.
- b) Les investissements qui permettent de financer les projets s'élèvent, en 2002, à 563 millions d'euros. Ils progressent de 8,4 % par rapport à 2001.
À combien s'élevaient les investissements en 2001 ?
- c) Afin de construire et réhabiliter les collèges, le conseil général investit 56,3 millions d'euros.
Quelle part, en pourcentage, représente la somme dépensée pour les collèges par rapport aux investissements totaux ?
Et par rapport au budget total ?

61 — Sécurité routière



La distance de freinage d'un véhicule est la distance nécessaire pour immobiliser un véhicule à l'aide des freins. La distance nécessaire pour s'arrêter est supérieure à cette distance, car le conducteur doit réagir avant d'appuyer sur les freins.

Le tableau ci-dessous donne la distance de freinage en fonction de la vitesse.

Vitesse en km/h	30	50	80	90	100	110	130
Distances de freinage en m	6	15	42	54	65	80	113

- a) Le tableau représente-t-il un tableau de proportionnalité ?
- b) Construire un graphique correspondant à la distance de freinage en fonction de la vitesse.
Retrouver la réponse à la question précédente.
- c) La distance de freinage à 30 km/h est de 6 mètres.
En supposant que la vitesse et la distance de freinage sont proportionnelles, compléter le tableau de proportionnalité :

Vitesse en km/h	30	50	80	90
Distances de freinage en m	6			

(Extrait du livret de la sécurité routière au collège, 2001-2002.)

PROBLÈMES (suite)

62 — Sécurité routière (bis)



Sur la route lorsqu'il arrive un événement imprévu, le conducteur réagit avec un temps de retard. La durée est d'environ 1 seconde et il parcourt encore une certaine distance qui dépend de la vitesse à laquelle roule le véhicule.

Le tableau ci-dessous donne la distance parcourue pendant le temps de réaction en fonction de la vitesse.

Vitesse en km/h	50	70	100
Distances parcourue pendant le temps de réaction	14	19,6	28

- Ce tableau correspond-il à une situation de proportionnalité ?
- Quelle est la distance parcourue pendant le temps de réaction si l'on roule à 90 km/h ? Et à 130 km/h ?
- À quelle vitesse roule-t-on si la distance de réaction est 30,8 m ?
- Faire un graphique représentant cette situation et vérifier les réponses trouvées par le calcul.

- 63** — Un rectangle est découpé en quatre pièces carrées notées ①, ②, ③ et ④. La pièce ② a pour aire 25 m².



- Quelles sont les dimensions de toutes les pièces ?
- Quelle échelle a été utilisée pour réaliser ce dessin ?

64 — L'été et le TGV

Le TGV est un train qui roule à grande vitesse sur des rails métalliques.

L'été, comme pour beaucoup de métaux, les rails se dilatent* avec la température.

La longueur L d'un rail à une température t est donnée par la formule (où L' est la longueur du rail à 0 °Celsius) :

$$L = L' (1 + 10^{-5} \times t)$$

- Un rail mesure 1 km à 0 °C, quelle est sa longueur à 45 °C ?
- Ce même rail voit sa longueur augmenter de 1 cm. Quelle température fait-il ?
- Est-il réaliste de penser que la longueur du rail peut se dilater de 10 % de sa longueur à 0 °C ? Pourquoi ?

(* Dilater veut dire gonfler, augmenter de volume.)

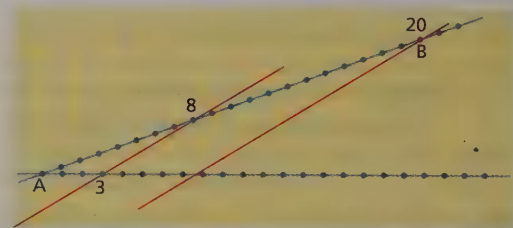
65 — Transcripteur de notes

Alan a obtenu 13 sur 17 en maths et 3 sur 8 en français.

Jerry a obtenu 11 sur 15 en maths et 2 sur 7 en français.

Alan et Jerry voudraient comparer leurs notes en rétablissant sur 20, mais les calculs sont complexes, alors ils utilisent une règle graduée et une équerre.

Voici comment Alan a reporté sa note de français par une méthode graphique :



- Quelle propriété utilise la méthode employée par Alan ?
- Faire de même pour les notes de mathématiques d'Alan et celles de Jerry.

- 66** — a est un nombre proportionnel à b , et b est proportionnel au nombre c .

- a est-il proportionnel à c ?
- $a - b$ est-il proportionnel à c ?

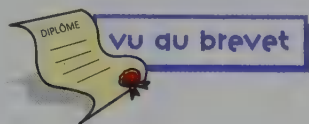
- 67** — a et b sont deux nombres tels que b est le double de a .

Le carré de a est-il proportionnel au carré de b ?

- 68** — Ce tableau est un tableau de proportionnalité.

x	y	z
3,6	9,18	-6,66

Trouver les trois nombres x , y et z sachant que leur somme est 3,4.



69 — Groupe Est 1998

Lors du recensement de 1990, on a pu établir le nombre le nombre d'habitants des quatre départements de la région Bourgogne.

- a) Reproduire le tableau suivant, puis le compléter :

	Nièvre	Yonne	Côte d'Or	Saône-et-Loire	Région Bourgogne (total)
Nombre d'habitants en milliers	239,4		506,9	572,4	1 650
Pourcentage (arrondi à 0,01 près)		20,08			100

- b) En 1990, sept-quantième des habitants de la Nièvre résidaient à Nevers. Combien y avait-il d'habitants à Nevers en 1990 ?

70 — Limoges 1998

Dans un collège, il y a 575 élèves. Une enquête a permis d'obtenir les renseignements suivants :

- 8 % des élèves viennent au collège en voiture ;
- 92 élèves viennent à pied ;
- $\frac{1}{5}$ des élèves viennent à vélo ;
- les autres élèves viennent en autobus.

- a) Combien d'élèves viennent en voiture ?
- b) Calculer le pourcentage d'élèves qui viennent :
- ① à vélo. ② à pied. ③ en autobus.

71 — Nantes 1998

Dans un établissement scolaire, les $\frac{3}{5}$ des élèves sont demi-pensionnaires, 30 % des élèves sont des internes et les 72 élèves restants sont des externes.

Calculer le nombres d'élèves inscrits dans cet établissement.

72 — Bordeaux 1999

Il a été demandé aux familles de deux villages voisins S et T de répondre à la question suivante : « Êtes-vous favorables à l'aménagement d'une piste cyclable entre les deux villages ? »

- a) Dans le village S, 60 % des 135 familles consultées ont répondu « oui ». Combien de familles, dans ce village, sont favorables à ce projet ?

Dans le village T, il y a 182 réponses favorables sur les 416 familles consultées. Quel est pourcentage de « oui » pour le village T ?

- b) La décision d'aménager la piste cyclable ne peut être prise qu'avec l'accord de la majorité des familles de l'ensemble des deux villages. La piste cyclable sera-t-elle réalisée ?

73 — Rennes 1999



Le 7 novembre 1998, au retour du second voyage historique de John Glenn dans l'espace, la navette spatiale Discovery avait parcouru 5,8 millions de kilomètres.

Cette mission ayant duré 8 jours et 22 heures, calculer la vitesse moyenne en km/h de la navette.

On donnera le résultat en écriture décimale arrondie au km/h, puis en écriture scientifique.

74 — Inde 2000



En 1900, nous étions 1 650 millions sur la Terre. Nous sommes aujourd'hui six milliards. La population mondiale a connu au cours de ce siècle une très forte croissance.

De quel pourcentage la population mondiale a-t-elle augmenté depuis 1900 ?

UNITÉS ET MESURES EN TOUT GENRE

Autrefois les maîtres bâtisseurs de cathédrales



La « ligne » était égale au diamètre d'un grain d'orge qui correspondait, à Paris, à 0,225 cm environ.
Les bâtisseurs utilisaient assez facilement des unités mesurables sans instrument, pourvu qu'elles soient de taille courante...

Retrouver la valeur en cm de ces unités ... et comparer !

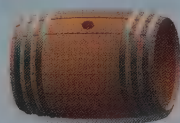
La paume	34 lignes
La palme	55 lignes
L'empan	89 lignes
Le pied	144 lignes
La coudée	233 lignes

Le problème venait du fait que ces unités comme la toise, le pied, etc. n'étaient pas uniformes sur l'ensemble du territoire. La mise en place du système métrique pendant la révolution va faciliter les échanges commerciaux.



La révolution du système métrique

Recopier et compléter la dernière colonne du tableau.



Longueurs	Toise	6 pieds	... m
	Pied	12 pouces	... m
	Pouce	12 lignes	... cm
	Ligne	12 points	... mm
	Point		0,188 mm
Aires	Toise carrée	36 pieds carrés	... m ²
	Pied carré	144 pouces carrés	... m ²
	Pouce carré		... cm ²
Volumes	Toise cube	216 pieds cubes	... m ³
	Pied cube	1 728 pouces cubes	... dm ³
	Pouce cube		... cm ³
Masses	Livre	16 onces	... g
	Once	8 gros	... g
	Gros	3 deniers	3,824 g
	Denier	24 grains	... g
	Grain		... g



Au delà des mètres... le système anglo-saxon « amérindouois »

Cette expression est issue d'un ancien mot médiéval se rapportant lui aussi aux graines.
Voici quelques unités de ce système :

Grain	0,064 8 g
Dram	27,34 grains
Once	16 drams
Livre	16 ounces

Convertir toutes les mesures en kg.

À TRAVERS LE TEMPS ET L'ESPACE

Un homme mesure 1,80 m et pèse 75 kg. Quelle serait sa taille exprimée en coudées des maîtres bâtisseurs et en pieds pré-révolutionnaires ? Quel serait son poids en livres françaises d'avant la révolution ? Et en livres anglaises actuelles ?

Questions températures

Trois unités existent ou ont existé :

- le **degré Celcius** utilisé en France et dans les pays sous le régime du système métrique,
- le **degré Kelvin** dont les graduations sont décalées de 273,15 unités,
- le **degré Fahrenheit** utilisé par les Anglo-saxons : si t_C est la température en degré Celsius et t_F la température en degrés Fahrenheit, la formule de conversion est la suivante :

$$-273,15\text{ }^{\circ}\text{C} = 0\text{ }^{\circ}\text{K}$$

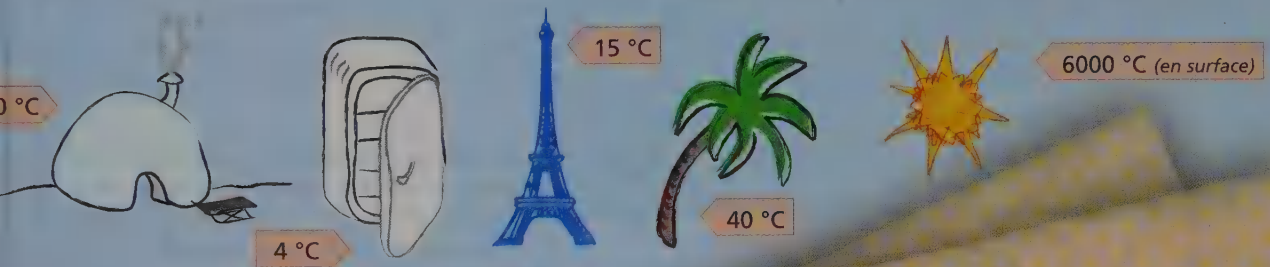
$$0\text{ }^{\circ}\text{C} = 273,15\text{ }^{\circ}\text{K}$$

Convertir 100 °C en degrés Kelvin :

$$100\text{ }^{\circ}\text{C} = \dots\dots\dots\text{ }^{\circ}\text{K} ?$$

$$t_C = \frac{5}{9} (t_F - 32)$$

- Exprimer la température en degrés Fahrenheit t_F , en fonction de la température en degrés Celsius t_C .
- Les températures suivantes sont exprimées en degrés Celsius. Les convertir dans les deux autres unités.

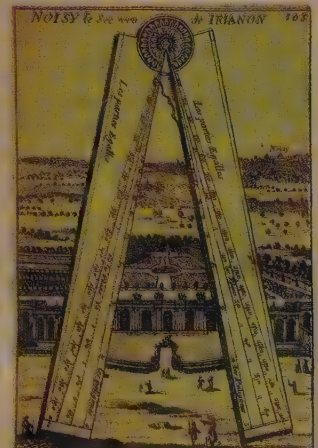


- Y a-t-il proportionnalité entre certaines de ces unités de températures ?

À travers L'Histoire

Àu XVII^e siècle de nombreuses découvertes scientifiques en astronomie, en navigation, en arpenteage, en constructions diverses ont donné lieu à l'élaboration de méthodes et d'instruments nouveaux. Le « *compas de proportion* » date de cette époque. Dans l'encyclopédie de d'Alembert, le compas de proportion est défini comme étant un instrument de calcul basé sur l'usage de ce que l'on nomme la *quatrième proportionnelle* : connaissant trois nombres de l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on peut trouver le quatrième.

Si l'on avait à décrire un compas de proportion, on dirait qu'il a deux branches à pointes sèches décorées des deux côtés par des lignes graduées qui partent toutes du même point d'articulation. Sur une face, les graduations de la ligne des « *parties égales* » vont de 0 à 200, elles permettent de faire des calculs de multiplication, de recherche d'une quatrième proportionnelle. Sur une autre ligne, les graduations vont de 4 à 12. La distance du point d'articulation au nombre correspond à la mesure du côté d'un polygone régulier. Ce qui permet de construire facilement des pentagones, figures beaucoup utilisées dans les constructions de places fortes militaires. D'autres lignes existent sur l'une ou l'autre face et permettent des calculs divers de mesures d'angles, de calculs de racines carrées, de masses.



Le compas de proportion.

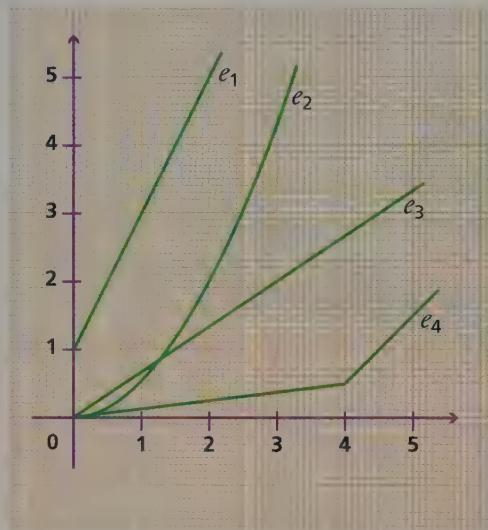
ce que je dois savoir sur...

... La proportionnalité

- Reconnaître sur un graphique une situation de proportionnalité.
- Utiliser la formule $d = v \times t$, pour calculer une distance, une vitesse ou une durée.
- Convertir des unités de vitesse.
- Utiliser les pourcentages.

je m'évalue

- 1 Quel graphique correspond à une situation de proportionnalité ?



- 2 La distance parcourue par un automobiliste étant proportionnelle au temps de parcours, compléter le tableau suivant :

Distance en km	96	100	
Temps de parcours	1 h 20 mn		2 h 15 mn

- 3 Un cheval de course a une vitesse de 85 km.h^{-1} .

- Quelle est sa vitesse en m.s^{-1} ?
- Combien de temps faudra-t-il à ce cheval pour effectuer un tour de piste de 2 750 m ?

- 4 Marie profite des soldes pour s'offrir un pantalon. Il coûtait initialement 47 €. Une remise de 20 % est proposée puis une 2^e démarque annonce une nouvelle baisse des prix de 10 %.

- Calculer le pourcentage de remise entre le prix initial et le prix final de l'article.
- Combien Marie a-t-elle payé son nouveau pantalon ?

- 5 On surveille l'évolution d'une population de bactéries au microscope. On compte actuellement 124 709 bactéries. On sait que la population a augmenté de 6 % en dix jours.

Combien la population comptait-elle de bactéries il y a dix jours ?

- 6 Parti à midi, un automobiliste a rendez-vous pour son contrat de travail à 350 kilomètres de son domicile à 16 h. Il roule sur 200 km à la vitesse de 70 km.h^{-1} . Puis il parcourt les 150 derniers kilomètres sur autoroute à la vitesse de 130 km.h^{-1} .

Va-t-il arriver à son rendez-vous à temps ?

Les solutions se trouvent à partir de la page 279.

ORDRE ET ENCADREMENT

En 6^{ème}-5^{ème}

- ▶ Comparer deux nombres en écriture décimale ou en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes ou le dénominateur de l'un est multiple du dénominateur de l'autre.
- ▶ Ranger dans l'ordre croissant ou décroissant.

En 4^{ème}

- Comparer deux nombres relatifs simples en écriture décimale ou fractionnaire.
- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme $a+b$ et $a+c$ sont rangés dans le même ordre que b et c .
- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont rangés dans le même ordre que b et c si a est strictement positif.
- Écrire des encadrements résultant de la troncature ou de l'arrondi à un rang donné d'un nombre positif en écriture décimale ou provenant de l'affichage d'un résultat sur une calculatrice (quotient, racine carrée, ...).

pour démarrer



1

Décor de théâtre

Samira et Cheng aménagent la scène du théâtre où ils vont représenter la pièce qui a été créée pour la fête de fin d'année du collège.

• Arrondi d'une racine carrée.

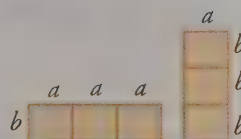
• Arrondi et valeur exacte de quotients.

• Démonstration éventuelle avec usage des lettres.

a) Le décor qui est au fond est un rectangle dont la largeur est 4 m et une diagonale 8,2 m. Va-t-il tenir verticalement sous les cintres, c'est-à-dire sous la hauteur de plafond qui fait 8 m ?

b) Avec un plateau de bois de 2,13 m sur 1,7 m, ils confectionnent une table. Ils partagent d'abord le plateau en trois. Comme ils veulent des mesures en valeur exacte, indiquer s'ils vont partager dans le sens de la longueur ou de la largeur.

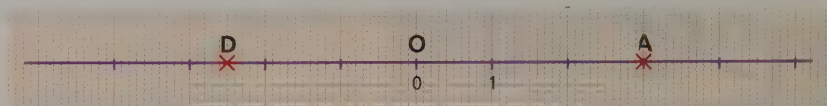
c) Ils ont besoin d'une table qui a le plus grand périmètre. Comment vont-ils alors assembler les trois morceaux obtenus ?



Activités

2 — Droite graduée et tableau de signes

1) Reproduire la droite graduée ci-dessous.



• Lire les abscisses exactes des points O, A et D, puis placer ces points sur le graphique.

• Placer, sur la droite graduée, les points B, C et E d'abscisses respectives :

$$3,8; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{5}{4}$$

• Indiquer si les valeurs sont exactes ou approchées.

2) Ranger par ordre croissant les abscisses de ces six points O, A, B, C, D, E.

3) En comparant la position de certains points, on peut comparer leurs abscisses. On note x_M l'abscisse d'un point M. Recopier et compléter alors le tableau suivant :

Abscisses des points	Position des points	Calcul	Signe	Comparaison
$x_B = -3,8; x_A = 3$	B est placé avant A	$x_B - x_A = -6,8$	-	$x_B < x_A$
$x_C = \dots; x_E = \dots$				
$x_B = \dots; x_D = \dots$				
$x_D = \dots; x_A = \dots$				

En observant les résultats obtenus, on peut admettre les propriétés :

a et b sont deux nombres relatifs.
Si $a < b$ alors $a - b < 0$. Si $a > b$ alors $a - b > 0$.

4) L'abscisse du point F est $\frac{47}{35}$. Appliquer cette propriété pour comparer l'abscisse du point F et celle du point C.

3 — Ordre et addition

1) Reprendre la droite graduée et les points de l'activité précédente. On translate chaque point par la translation qui transforme O en A. C'est-à-dire que l'on ajoute 3 à chacune des abscisses. Calculer les abscisses des points obtenus. L'ordre de ces points reste-t-il le même ?

2) Pour chacun des points A et B ci-dessous, comparer leurs abscisses a et b , puis ajouter à chacune la valeur c indiquée et comparer $a + c$ et $b + c$.

a	-4	9,7	-6,4	7	-4	9,7	-6,4
b	-6	-24	5,8	2,5	-6	-24	5,8
c	-1	-5,3	-4,3	6,2	1	5,3	4,3

3) En observant les résultats obtenus, on peut admettre les propriétés :

a, b et c sont trois nombres relatifs quelconques.
Si $a < b$ alors $a + c < b + c$.
Si $a > b$ alors $a + c > b + c$.

Démontrer que la propriété est vraie quels que soient les nombres a, b et c . Pour cela calculer la différence $(a + c) - (b + c)$ et conclure sur le signe du résultat.

• Révision sur l'utilisation de droite graduée.

• Différenciation valeur exacte et valeur approchée.

• Ordre croissant.

• Approche du critère relatif au signe de la différence.

• Calculs puis constatation.

• Approche de la propriété.

• Vérification.

• Preuve formelle.

4 — Ordre et multiplication

1) Ranger par ordre croissant les nombres :

3,17 ; -4,5 ; 3,168 ; -4,43

Multiplier par 3 chacun de ces nombres. L'ordre reste-t-il le même?

Multiplier par (-3) chacun de ces nombres. L'ordre reste-t-il le même?

2) Observer les résultats obtenus, puis recopier et compléter les propriétés suivantes :

a et b sont deux nombres relatifs quelconques.
 Si $a < b$ et $c < \dots$ alors $a \times c \dots b \times c$.
 Si $a < b$ et $c \dots$ alors $a \times c \dots b \times c$.

3) En tenant compte du signe de la multiplication de deux nombres relatifs, démontrer les deux propriétés énoncées ci-dessus, en calculant la différence $ac - bc$.

5 — Troncature ou arrondi ?

1) **Air connu**

Pour une sortie au Zénith à Paris, avec six de ses amis, Mylène a dépensé 137 €. En faisant les comptes, elle répartit de façon équitable la dépense entre chacun des participants à la sortie au spectacle.

a) Elle arrondit la somme demandée à chacun au dixième d'euros.

La somme qu'elle reçoit est-elle plus ou moins élevée que la dépense ?

b) Au lieu d'arrondir, elle calcule en procédant par troncature au dixième d'euros.

La somme qu'elle calcule est-elle plus ou moins élevée que la dépense ?

2) **Aire à la calculatrice**

L'aire d'un disque est donnée par la formule : $A = \pi \times r^2$

Un disque a un rayon de 3 cm.

Quel encadrement traduit la troncature à l'unité de l'aire de ce disque ?

$28 \leq A \leq 29$; $28 \leq A < 29$; $28 \leq A \leq 28,5$

6 — Même la poste s'en mêle

Les services de la Poste ne prennent en charge les envois d'enveloppes, de cartes postales ou de colis que sous certaines conditions.

Lettres ou objets	Dimensions minimales	Dimensions maximales
Cartes ou plis à découvert	14 cm x 9 cm	15 cm x 11 cm
Envois sous enveloppe ou sous pochette		$L + l + h = 100$ cm $L \leq 60$ cm
Paquets	Une face au moins 10 cm x 7 cm	
Rouleaux	$L + 2d = 17$ cm $L = 10$ cm	$L + 2d = 104$ cm $L = 90$ cm

(L est la longueur, l la largeur, h la hauteur et d le diamètre.)

1) Écrire sous forme d'un encadrement les conditions de dimensions concernant les rouleaux.

2) Les rouleaux de tailles suivantes seront-ils acceptés par la Poste ?

$L = 9$ cm et $d = 7$ cm ; $L = 43$ cm et $d = 12$ cm ; $L = 48$ cm et $d = 38$ cm

L'essentiel en deux pages



1 Comparaison de nombres relatifs

a) Rappels

- Deux nombres en écriture décimale

Exemple avec des positifs

On compare les décimales une à une. $2,78\boxed{5}4 < 2,78\boxed{6}5$ car $5 < 6$

Exemple avec des négatifs

Le plus petit nombre est celui qui a la plus grande distance à zéro. $-3,15 < -2,7$ car $3,15 > 2,7$

Exemple avec deux nombres de signes contraires

Le nombre négatif est plus petit que le nombre positif. $-7,52 < 2,456$

- Deux nombres en écriture fractionnaire

On applique la propriété :

Quels que soient les nombres a et b et quel que soit le nombre c positif non nul,

$$\text{si } a < b \text{ alors } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Exemple

On écrit d'abord les deux nombres avec le même dénominateur : $\frac{12}{35} = \frac{24}{70}$; $\frac{3}{10} = \frac{21}{70}$

On compare leurs numérateurs :

comme $24 > 21$ alors $\frac{12}{35} > \frac{3}{10}$.

b) Signe de la différence

Comparer deux nombres relatifs revient à étudier le signe de leur différence.

Quels que soient les nombres relatifs a et b :

- si $a < b$ alors $a - b < 0$
- si $a = b$ alors $a - b = 0$
- si $a - b < 0$ alors $a < b$
- si $a > b$ alors $a - b > 0$
- si $a - b > 0$ alors $a > b$

Exemples

Avec une calculatrice,

comparer $\frac{2568}{359}$ et $\frac{1732}{242}$.



$$\frac{2568}{359} - \frac{1732}{242} \approx -0,0038 \text{ donc } \frac{2568}{359} < \frac{1732}{242}$$

Négatif

Sans calculatrice,

comparer $\frac{11}{3}$ et $\frac{23}{7}$.



$$\frac{11}{3} - \frac{23}{7} = \frac{77}{21} - \frac{69}{21} = \frac{8}{21} \text{ donc } \frac{11}{3} > \frac{23}{7}$$

Positif

2 - Ordre et opérations

a) Ordre et addition

L'addition conserve l'ordre.

Quels que soient les nombres relatifs a , b et c :

si $a < b$ alors $a + c < b + c$; si $a > b$ alors $a + c > b + c$
 si $a = b$ alors $a + c = b + c$

On dit que les nombres $a + c$ et $b + c$ sont rangés dans le même ordre que les nombres a et b .

Exemple

- Si $a < 7$ alors $a + 4 < 7 + 4$.
- Si $a < 7$ alors $a - 9 < 7 - 9$.

b) Ordre et multiplication par un nombre positif

La multiplication par un nombre positif conserve l'ordre.

Quels que soient les nombres relatifs a , b et c :

si $a < b$ et $c > 0$ alors $a \times c < b \times c$; si $a > b$ et $c > 0$ alors $a \times c > b \times c$
 si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$.

Lorsque c est strictement positif, les nombres ac et bc sont rangés dans le même ordre que b et c .

Exemple

Si $a > -8,4$ alors $3 \times a > 3 \times (-8,4)$.



$3,2 < 7,4$ mais $3,2 \times (-8) > 7,4 \times (-8)$.

3 - Troncatures, arrondis et encadrements

La calculatrice affiche le nombre

27,52833333

	TRONCATURES (elles sont obtenues en « coupant » les décimales après le rang indiqué)	ARRONDIS (ils sont obtenus en observant la décimale suivant le rang indiqué)
À l'unité	27	28 car 27,5 est au « milieu » de 27 et de 28
Au dixième	27,5	27,5 car 27,52 est plus proche de 27,5 que de 27,6
Au centième	27,52	27,53 car 27,528 est plus proche de 27,53 que de 27,52
Au millièm	27,528	27,528 car 27,5283 est plus proche de 27,528 que de 27,529

Si 3,6 est la troncature au dixième d'un nombre a alors cela veut dire que le nombre a est tel que :

$$3,6 \leq a < 3,7$$

Si 3,6 est l'arrondi au dixième d'un nombre a alors cela veut dire que le nombre a est tel que :

$$3,55 \leq a < 3,65$$



COMPARAISON DE NOMBRES

Des calculs

a) Comparer des nombres de la forme $a \times 10^p$

- Comparer $7,42 \times 10^{-6}$ et $8,37 \times 10^{-6}$

Les deux nombres comportent la même puissance de dix, on compare 7,42 et 8,37 :

$$7,42 < 8,37$$

En multipliant par le nombre positif 10^{-6} , on obtient des nombres rangés dans le même ordre.

$$7,42 \times 10^{-6} < 8,37 \times 10^{-6}$$

- Comparer $7,2 \times 10^{-13}$ et 42×10^{-14}

Les deux nombres ne comportent pas la même puissance de dix, on écrit les deux nombres avec la même puissance : $42 \times 10^{-14} = 4,2 \times 10^{-13}$

Comme $7,2 > 4,2$, en multipliant par le nombre positif 10^{-13} , on obtient des nombres rangés dans le même ordre.

$$7,2 \times 10^{-13} > 4,2 \times 10^{-13} \quad \text{donc} \quad 7,2 \times 10^{-13} > 42 \times 10^{-14}.$$

b) Se méfier de la calculatrice !

- Avec la calculatrice, on obtient le même affichage pour $\frac{13\,860}{33\,461}$ et $\frac{33\,461}{80\,782}$: on trouve 0,414 213 562.
- Si l'on veut comparer ces deux nombres, on doit calculer leur différence : $\frac{13\,860}{33\,461} - \frac{33\,461}{80\,782}$
- La calculatrice affiche $-3,7 \times 10^{-10}$. On peut conclure que $\frac{13\,860}{33\,461} < \frac{33\,461}{80\,782}$.

Des preuves

Comparer des nombres de la forme $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

Exemple

- Comparer $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{7}$

On remarque que $3 < 7$.

On calcule la différence $\frac{1}{3} - \frac{1}{7}$,

en utilisant le dénominateur commun 21 :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{7}{21} - \frac{3}{21} = \frac{4}{21}$$

$\frac{4}{21}$ est positif donc $\frac{1}{3} > \frac{1}{7}$.

- $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{7}$ sont rangés dans l'ordre inverse de 3 et de 7.

Une démonstration

Comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, avec $a < b$ (a et b non nuls).

1^{er} cas : a et b sont de signes différents

$\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont aussi de signes différents et le négatif est plus petit que le positif.

2^e cas : a et b sont de même signe

- On calcule la différence $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, en utilisant le dénominateur commun ab :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$$

Comme $a < b$ alors $(b-a) > 0$.

Comme a et b sont de même signe, leur produit ab est positif,

donc $\frac{b-a}{ab}$ est positif et $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ est positif.

- On en déduit que si $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

exercices

COMPARAISON DE RELATIFS

1 Recopier et compléter par « < » ou « > ».
 $5,6 \dots\dots -9,8$; $17,52 \dots\dots 17,486$
 $-21,5 \dots\dots -20,481$; $12,58 \dots\dots -12,6$

2 Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :
 $-5,612$; $1,562$; $-15,26$; $-6,216$; $-5,216$

3 Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :
 $-7,405$; $-9,15$; $-7,56$; $-9,124$; $-8,256$

4 Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :

a) 7×10^3 ; $2,5 \times 10^4$; 11×10^3 ; $5,8 \times 10^4$

b) 24×10^{-4} ; $3,67 \times 10^{-2}$; $1,4 \times 10^{-3}$; $5,3 \times 10^{-4}$

5 Recopier et compléter par « < » ou « > ».
 $\frac{13}{11} \dots\dots \frac{24}{11}$; $\frac{32}{7} \dots\dots -\frac{32}{7}$; $-\frac{47}{24} \dots\dots \frac{53}{24}$



6 Recopier et compléter par « < » ou « > ».
 $\frac{2}{13} \dots\dots \frac{7}{26}$; $\frac{83}{18} \dots\dots \frac{27}{6}$; $-\frac{75}{33} \dots\dots -\frac{64}{44}$

7 Ranger les nombres fractionnaires suivants dans l'ordre croissant :

$\frac{1}{7}$; $\frac{11}{21}$; $\frac{7}{42}$; $\frac{3}{14}$

8 Ranger les nombres fractionnaires suivants dans l'ordre croissant :

$\frac{13}{8}$; $\frac{11}{24}$; $\frac{25}{16}$; $\frac{2}{3}$

9 Ranger les nombres fractionnaires suivants dans l'ordre croissant :

$-\frac{5}{4}$; $-\frac{12}{20}$; $\frac{9}{8}$; $-\frac{11}{8}$

10 Donner, si possible, pour chacun des cas suivants, trois exemples de nombres décimaux y avec un chiffre après la virgule qui vérifient :

a) $2,894 < y < 3,924$

b) $21,532 < y < 29,05$

c) $3,52 < y < 3,7$

d) $4,5 \leq y < 4,82$

11 a) Comparer $\frac{12}{51}$ et $\frac{7}{27}$.



b) Calculer une valeur approchée de $\frac{12}{51} - \frac{7}{27}$ et expliquer comment ce résultat peut être utile pour répondre à la question a).

12 Ranger les nombres suivants par ordre décroissant, après les avoir comparés de manière astucieuse :



2 ; $\frac{5}{7}$; $\frac{42}{24}$; $\frac{1,3}{2,1}$; $\frac{35}{4}$

13 a) Quel est le plus petit nombre parmi les quatre nombres ci-dessous ?



$-\frac{2}{5}$; 1 ; -1 ; $-\frac{6}{2519}$

b) Quel est le plus grand parmi ces mêmes nombres ?

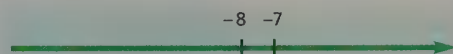
14 Parmi les expressions suivantes, lesquelles signifient la même chose ?

$x < 1$; $x < 4$; $x > 3$
 $x - 1 < 0$; $x - 3 > 0$; $x - 4 < 0$

15 Sur la droite graduée

Deux points A et B ont des abscisses qui vérifient $x_A \leq -8$ et $x_B > -8$.

Reproduire le dessin de la droite graduée ci-dessous.



Placer le point A dans la zone qu'il peut occuper et colorier-la en rouge.
 Faire de même avec le point B.

16 On veut placer trois points A, B et C sur une droite graduée.

$x_A > 7$; $x_B - 4 < 0$; $x_C - 4 > 0$

Ces points sont-ils placés avant ou après le point D d'abscisse égale à 4 ?

ORDRE ET OPÉRATIONS

- 17** — Sans calculer les sommes, comparer les nombres suivants :

$$\frac{2}{5} + 1,2 \quad \text{et} \quad \frac{2}{5} + 2,7;$$

$$\frac{2}{5} + 3,7 \quad \text{et} \quad \frac{3}{5} + 3,7;$$

$$\frac{27}{56} + \frac{2}{5} - \frac{11}{13} + \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad -\frac{27}{56} - \frac{2}{5} + \frac{11}{13} - \frac{3}{8}.$$

- 18** — Comparer les deux nombres a et b , dans chacun des cas suivants :

① $a = 275^{11} + 3;$ $b = 275^{11} + 5,4$

② $a = \frac{121}{65} - \frac{13}{48};$ $b = \frac{121}{65} - \frac{11}{40}$

③ $a = 10^{256} \times (-1,05);$ $b = 10^{256} \times (-1,007)$

- 19** — Comparer les deux nombres a et b , dans chacun des cas suivants :



① $a = \frac{3}{8} \times \frac{5}{6};$ $b = \frac{3}{8} \times \frac{15}{12}$

② $a = \frac{13}{5} \times (-7,5);$ $b = \frac{13}{5} \times (-6,51)$

Exercice résolu

Énoncé

Soit a un nombre relatif tel que $a < 2$.
Trouver une inégalité vérifiée par $3a - 7$.

Exemple de solution

$$a < 2$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par 3, nombre positif, on obtient des nombres rangés dans le même ordre :

$$3 \times a < 3 \times 2$$

En ajoutant (-7) aux deux membres de l'inégalité, on obtient des nombres rangés dans le même ordre :

$$3 \times a + (-7) < 3 \times 2 + (-7)$$

On obtient donc l'inégalité : $3a - 7 < -1$

- 20** — Pour chaque cas, comment obtient-on la deuxième inégalité à partir de la première ?

① $x < -9;$ $x + 4 < -5$ ② $x > -6;$ $x - 4 > -10$

③ $x < 5;$ $6x < 30$ ④ $2x > -4;$ $8x > -16$

- 21** — Pour chaque cas, comment obtient-on la deuxième inégalité à partir de la première ?

① $x < 2;$ $4x < 8$ ② $x > -5;$ $3x > -15$

③ $x \geq 2,5;$ $3x \geq 7,5$ ④ $2x > 12,3;$ $x > 6,15$

- 22** — On sait que $x > -5$. Quelle inégalité vérifie chacun des nombres ci-dessous ?

① $x + 5$ ② $x - 5$ ③ $4x$ ④ $\frac{x}{5}$

- 23** — On sait que $a < b$. Recopier et compléter, si possible, par « $<$ » ou « $>$ » :

① $a + 4 \dots\dots b + 4$ ② $b - 12 \dots\dots a - 12$

③ $a + 5 \dots\dots b + 7$ ④ $a + 14 \dots\dots b + 7$

- 24** — On sait que $a < b$. Recopier et compléter, si possible, par « $<$ » ou « $>$ » :

① $3a \dots\dots 3b$ ② $\pi a \dots\dots \pi b$

③ $2a - 5 \dots\dots 2b - 5$ ④ $\frac{3b}{2} - 4 \dots\dots \frac{3a}{2} - 4$

- 25** — On sait que $a < 5$. Écrire une inégalité vérifiée par les nombres suivants :

① $a + 7$ ② $a - 6$ ③ $a + (-8)$ ④ $3a$

TESTER UNE INÉGALITÉ

- 26** — Parmi les inégalités suivantes, lesquelles sont vraies pour $x = -5$:

$x < -3;$ $x \leq -17;$ $x < 17$
 $x > -7;$ $x \geq -4$

- 27** — On sait que $a = -8,52$. Chercher les inégalités vraies parmi les suivantes :

① $a < 9$ ② $a > -5$ ③ $a < -8$ ④ $a > -8$

- 28** — Parmi les inégalités ci-dessous, lesquelles sont vraies pour $a = -3$?

$4a < -9;$ $5a < -27;$ $-a < -8;$ $a + 7 > 6$

- 29** — Parmi les inégalités ci-dessous, lesquelles sont vraies pour $a = -3$?

$3a + 4 < 6;$ $-2a + 8 > 5;$ $2a - 6 < 4a$

- 30** — Si on écrit $x \leq 7$ et $x \geq 7$ alors que peut-on conclure ?

TRONCATURE ET ARRONDI

31 a) Donner un arrondi au dixième, puis au centième, de $\sqrt{15}$.

b) Donner une troncature au dixième, puis au centième, de $\sqrt{15}$.

32 a) Donner un arrondi au millièm et une troncature au dixième du nombre π .

b) On emploie souvent 3,14 pour approximation du nombre π .
Est-ce un arrondi au centième ? Est-ce une troncature au centième ?

c) Une autre approximation de π est 3,1416.
A-t-on arrondi ou tronqué au dix-millièm ?

33 Donner un arrondi au dixième et une troncature au centième des nombres suivants

$$\frac{65}{24} ; \quad \frac{245}{673} ; \quad \frac{564}{347}$$

34 On peut écrire $7 < 7,4825 < 8$
puis $7,4 < 7,4825 < 7,5$
puis $7,48 < 7,4825 < 7,49$
puis $7,482 < 7,4825 < 7,483$.

Écrire trois encadrements pour les deux nombres suivants :

$$72,569 \quad \text{et} \quad 0,2943$$

35 Le rayon de la base d'un cylindre est 5,2 cm.
On sait que $3,14 < \pi < 3,15$.
Calculer un encadrement au dixième du périmètre et de l'aire de la base du cylindre.

36 La mesure du côté d'un carré est comprise entre 7,5 dm et 7,6 dm.

Donner un encadrement de son périmètre, au dixième, et de son aire, au centième.

37 La mesure c du côté d'un triangle équilatéral est telle que :

$$3,4 < c < 3,6$$

Donner un encadrement du périmètre du triangle.

38 Devinette

On cherche un nombre x , sachant que :

- sa troncature au centième est 5,24 ;
- sa partie décimale comporte quatre chiffres ;
- son chiffre des millièm est le cube de 2 ;
- son chiffre des dix-millièm est le triple du carré de 1.

39 Dans un vieux livre on a trouvé la remarque :
 $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ est à peu près égal à 2^3 .

a) A-t-on utilisé un arrondi ou une troncature pour affirmer cette remarque ?

b) Existe-t-il une troncature pour laquelle les deux valeurs se correspondent ?

PROBLÈMES

40 Sur Terre, le « poids » de Arnold est compris entre 72 kg et 73 kg.

Sur la Lune, le poids d'une personne est divisé par six.

Entre quelles valeurs va être compris le poids de Arnold sur la Lune ?

41 Et revoilà π

À diverses époques on a utilisé des approximations du nombre π .

En Égypte : $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$.

En Perse : $\pi \approx 3 + \frac{7}{60} + \frac{1}{20}$.

Archimède, en Grèce antique : $\pi \approx 3 + \frac{1}{7}$.

En Chine ancienne : $\pi \approx \sqrt{10}$, et plus

tardivement $\pi \approx \frac{355}{113}$.



Archimède (287-212 avant J.-C.)

a) Ranger ces valeurs par ordre croissant, avec l'aide d'une calculatrice.

b) Pour chacune d'elles, indiquer quelle erreur, au millièm, est faite en utilisant la valeur de π affichée par la calculatrice.

PROBLÈMES (suite)

42 — Match international

Un match international de football se joue sur un terrain dont les dimensions peuvent varier entre certaines limites. La longueur varie entre 100 mètres et 110 mètres, la largeur varie entre 64 mètres et 75 mètres.

- Écrire entre quelles valeurs varie le périmètre du terrain.
- On veut remplacer toute la pelouse.

Quelles sont, parmi les valeurs suivantes, celles qui permettront de passer commande pour remplacer la pelouse :

6 400 m², 7 250 m², 8 260 m², 8 880 m² ?

- M^{me} Kate Riaime veut passer commande d'une nouvelle moquette pour son salon. La pièce est rectangulaire et les dimensions mesurées sont 5 mètres et 6,50 mètres, mais ces dimensions ne sont pas exactes, il faut penser que, pour chacune, il y a une incertitude de 5 centimètres.

- M^{me} Kate Riaime veut faire le maximum d'économie et choisit une moquette vendue à 46 € le m².
Combien doit-elle en commander ?
28 m², 31 m², 34 m² ou 40 m² ?
- La facture de M^{me} Kate Riaime va-t-elle atteindre 1 491 €, 1 522 € ou 1 602 € ?

44 — Pari curieux

Dans le roman que lit Sarah, son personnage favori a fait le pari de ne pas se couper les cheveux tant que leur longueur n'atteindrait pas 2 mètres. Actuellement, leur longueur est de 30 centimètres. Avec la lotion magique, ils poussent de 2 à 3 centimètres par mois.

- Quelle longueur auront les cheveux à la fin de l'année ?
- Quelle sera la longueur minimale dans deux ans ?
- À partir de quelle année peut-il espérer se faire couper les cheveux ?

45 — Envoi postal

Reprendre les dimensions fournies par les services de la Poste dans l'activité 6 page 247.

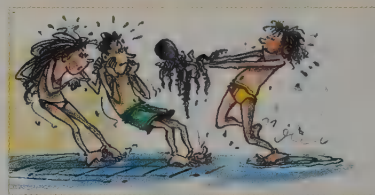
- Dire si l'on peut envoyer l'une ou l'autre des deux cartes sans les mettre sous enveloppe.



Échelle 1/5

Échelle 1/5

- On veut envoyer les deux posters ci-dessous.



Échelle 1/12



Échelle 1/12

- Lequel peut-on envoyer dans une pochette ?
- Et lequel devra-t-on rouler en un rouleau de 5 centimètres de diamètre ?

- Jim a invité son correspondant français Gaël pour les vacances en Angleterre. Il propose une ballade en scooter de 16,5 miles. Gaël sait que ce scooter contient de l'essence pour environ 26 km avec une approximation de 55 dm.

Un mile anglais a une valeur comprise entre 1,609 km et 1,610 km.

Gaël et Jim vont-ils avoir assez d'essence ?

- 47 — *Laminaria digitata* et *Laminaria saccharina* sont deux charmantes algues que l'on trouve sur les côtes de Bretagne. Elles contiennent une variété étonnante de minéraux : sodium, potassium, calcium, ...

Broyées en fines particules, elles sont utilisées pour des applications après une entorse.

On observe ces particules avec un microscope qui grossit entre 50 et 1 400 fois. Une particule mesure environ 5 dixièmes de millimètres.

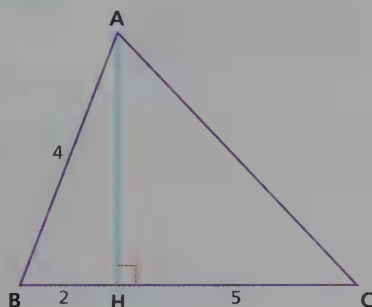
Donner un encadrement de la taille de ces particules observées au microscope.

48 — Démonstration

Les nombres x , y , t et s sont quelconques. Démontrer que :

$$\text{si } x < y \text{ et } t < s \text{ alors } x + t < y + s.$$

- 49 — L'unité de longueur est le centimètre. Prendre les indications fournies par la figure ci-dessous.



- Donner un encadrement de la mesure de la hauteur $[AH]$ à 0,1 près.
- En déduire un encadrement de l'aire du triangle.

- 50 — Un paquet a la forme d'un parallélépipède rectangle, dont les dimensions a , b et c (en centimètres) vérifient les inégalités suivantes :

$$32,1 \leq a \leq 32,2$$

$$16,7 \leq b \leq 16,8$$

$$10,4 \leq c \leq 10,5$$

Entre quelles valeurs varie le volume du paquet ?

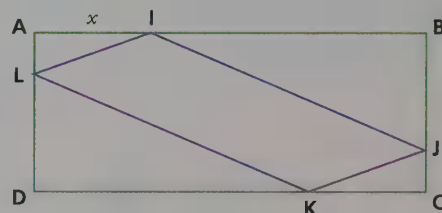
- 51 — Cette figure est composée d'un rectangle et d'un triangle équilatéral.

Pour quelles valeurs de x le périmètre du rectangle est-il plus petit que celui du triangle ?



52 — Parallélogramme mobile et tableur

ABCD est un rectangle de longueur 10 cm et de largeur 4 cm. Les quatre points I, J, K, L sont placés respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que : $AI = BJ = CK = DL = x$.



- Entre quelles valeurs varie x ?
- Faire la figure pour $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3,2$.
Calculer dans chaque cas l'aire λ de IJKL.
- Exprimer l'aire λ en fonction de x .
- Placer, sur un graphique, plusieurs points qui ont pour abscisse x et pour ordonnée le nombre calculé pour l'aire λ . Relier les points à main levée.

Lire, sur le graphique, un encadrement de la valeur minimale de cette aire ?

À quel encadrement de la valeur de x cela correspond-il ?

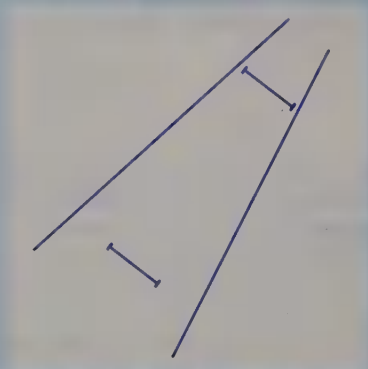
- Utiliser un tableur pour prendre de nombreuses valeurs de x proches de la valeur correspondant au minimum. Entrer la formule de l'aire du quadrilatère IJKL en fonction de x et calculer les valeurs prises par l'aire.

Retrouver les réponses de la question précédente.

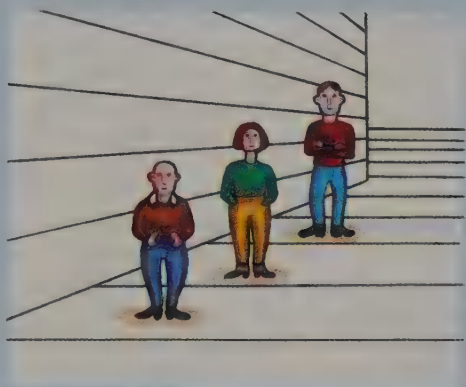
■ DE L'ŒIL AU CERVEAU.....

Chaque image est accompagnée d'une question. Prendre le temps de bien observer, mesurer, comparer avant de répondre.

Quel est le segment le plus long ?



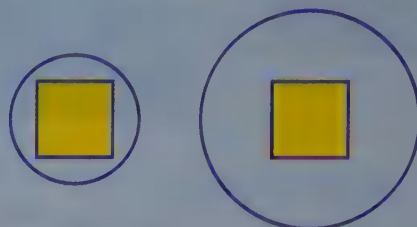
Quel est le personnage le plus grand ?



La hauteur du pichet est-elle égale à la largeur de l'assiette ?



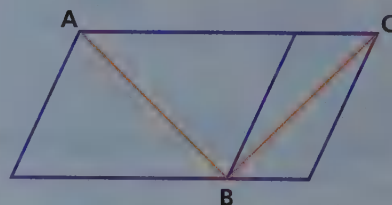
Où est le carré le plus grand ?



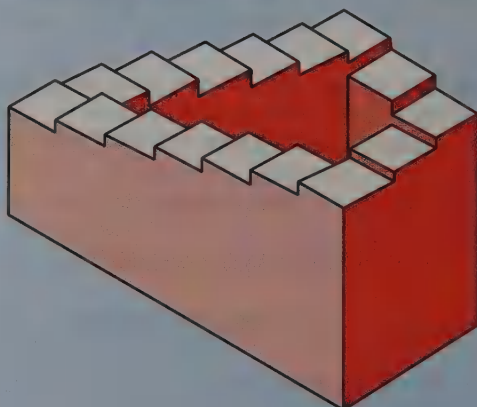
Quel est le triangle le plus foncé ?



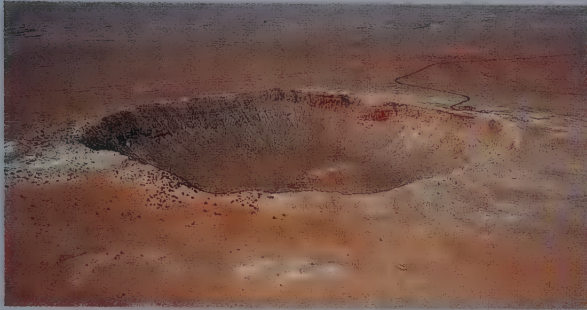
$AB > BC$:



Où est la marche la plus haute ?



En creux...



... en creux !



Quel est le carré le plus foncé ?



L'œil transmet au cerveau les impressions lumineuses. Le cerveau interprète ces informations en fonction des images habituellement reçues. Le cerveau peut être trompé par l'environnement du sujet qu'il observe et l'observateur se trouve ainsi inconsciemment trompé.

À travers L'Histoire

هوئمال باند ديل راښي د چهاروس وپي
ښايي وښه او تاخه شکر سفيد باشد



د ښه پسته وړانديز د ښه پسته وړانديز

Miniature persane (xvi^e siècle).

Depuis longtemps, on sait construire des objets « ronds » qui font intervenir bien sûr la « chose » à qui on a donné la lettre grecque π . Cette « chose » n'est devenue un nombre que lorsqu'on ne s'est plus contenté « d'à peu près ».

Même si ce n'est pas exactement écrit sous cette forme dans un papyrus égyptien du XVII^e siècle avant notre ère, une première approximation connue de π serait $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, c'est-à-dire 3,1605.

Un autre mathématicien célèbre Archimède a écrit un traité « *La mesure du cercle* ». Par une chaîne de calculs en cascade, il prouve que le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre est une valeur proche de 3 et $\frac{1}{7}$, soit $\frac{22}{7}$ (c'est à dire 3,14286). Il indique même que cette valeur est une approximation par excès.

En 1424, Al-Kashi, dans un traité sur le cercle, précise qu'il veut obtenir, pour un cercle six cent mille fois plus grand que l'équateur terrestre, une incertitude inférieure à un crin de cheval. Et sachant qu'un pouce contient trente six poils de la queue d'un cheval, ... il en déduit le nombre de poils contenus dans l'énorme cercle. À la fin de son calcul, il trouve un nombre proche de π , avec seize décimales exactes.

ce que je dois savoir sur...

...L'ordre et les encadrements

- ▶ Comparer des nombres sous différentes formes d'écriture.
- ▶ Utiliser les effets de l'addition sur l'ordre pour comparer des nombres.
- ▶ Utiliser les effets de la multiplication par un nombre positif pour comparer des nombres.
- ▶ Trouver un arrondi, prendre la troncature, écrire un encadrement.

je m'évalue

- 1** Comparer les nombres suivants en utilisant à chaque fois la méthode la plus appropriée.

Si nécessaire, détailler les calculs.

$$27,56 \text{ et } -32,45; \quad \frac{13}{7} \text{ et } \frac{64}{35}; \quad -\frac{65}{15} \text{ et } -\frac{85}{45}$$

- 2** À partir des informations données, comparer, dans chaque cas, les nombres a et b .

$$a - b = 3; \quad a - b = -4; \quad a - b = 0$$

$$a + 5 < b + 5; \quad 3a > 3b; \quad \frac{a}{4} < \frac{b}{4}$$

- 3** Ranger par ordre croissant les nombres suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3,7 \times 10^5; & 8,9 \times 10^4 \\ & 3,76 \times 10^5; \quad 8,92 \times 10^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b) } 2,3 \times 10^{-3}; & 1,9 \times 10^{-3} \\ & -7 \times 10^{-4}; \quad -6,65 \times 10^{-4} \end{array}$$

- 4** On sait que $a < 3$.
Recopier et compléter, si possible, par « $<$ » ou « $>$ ».

$$3a \dots\dots\dots 9; \quad a + 7 \dots\dots\dots 10$$

$$24 \dots\dots\dots 4a + 5; \quad 2a - 7 \dots\dots\dots -1$$

- 5** On sait que $x < y$.
Recopier et compléter, si possible, par « $<$ » ou « $>$ ».

$$8y + 6 \dots\dots\dots 8x + 6; \quad 5x - 13 \dots\dots\dots 5y - 9$$



- 6** Le triangle ABC est rectangle en B tel que $AB = 3,7 \text{ cm}$ et $BC = 7,2 \text{ cm}$.

- Donner la troncature à l'unité de la longueur AC.
- Donner l'arrondi au centième de la longueur AC.

- 7** Une pièce rectangulaire a pour longueur $5,73 \text{ m}$ et pour largeur $3,47 \text{ m}$. Mais les mesures sont incertaines, avec une précision de 1 cm .

- a) Écrire un encadrement de la longueur et de la largeur.
- b) Trouver un arrondi du périmètre du rectangle au dixième près.
- c) Donner une troncature de l'aire à l'unité.

Les solutions se trouvent à partir de la page 279.

STATISTIQUES

En 6^{ème}-5^{ème}

- Lire et interpréter des tableaux et des diagrammes.
- Présenter une série statistique sous diverses formes.
- Regrouper des données en classes.
- Calculer des effectifs, des fréquences.

En 4^{ème}

- Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées.
- Calculer la moyenne d'une série statistique.
- Calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles.

pour démarrer



1 — Le financement du foot de 1996 à 1998



• Reprise des connaissances de 5^{ème}, calculs de pourcentages.

• Construction et lecture d'un diagramme simple.

- 1) Recopier le tableau ci-dessous et calculer la fréquence en pourcentage de chaque type de financement par rapport à la somme totale (arrondir les pourcentages au dixième).

Types de financement	Public	Collectivités territoriales	Sponsors	Télévision	Divers*	Total
Montant converti en millions d'euros	66	40	68	142	186	
Fréquence en pourcentage						

(* Publicité, vente d'objets promotionnels, revenus des biens acquis par les clubs...)

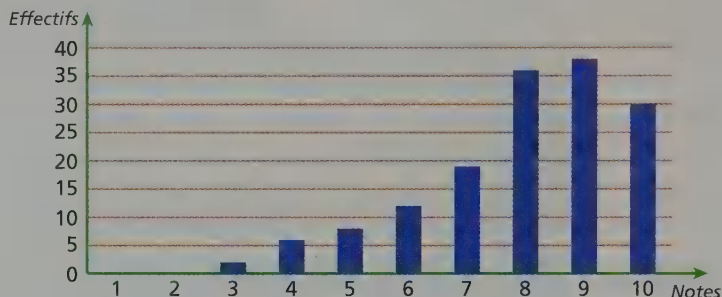
- 2) Représenter la répartition des fréquences par un diagramme en bâtons puis par un diagramme circulaire.
- 3) Quelle est la source de financement la plus importante ? Quel est son montant ?

Activités

2 Satisfaction des locataires

Désireuse d'améliorer ses services, une agence de location immobilière d'une station de ski sonde l'opinion de ses clients en leur demandant de noter de 1 à 10 leur degré de satisfaction pour leur location.

Les réponses obtenues sur une semaine sont représentées par le diagramme en barres ci-dessous :



• Relever les effectifs sur le diagramme en barres.

- La direction de l'agence désire regrouper les réponses en trois classes :

- les « mécontents » pour les notes de 1 à 4 ;
- les « moyennement satisfaits » pour les notes de 5 à 7 ;
- les « satisfaits » pour les notes de 8 à 10.

1) Faire un tableau présentant cette répartition en classes, calculer le total des réponses et les fréquences en pourcentage de chaque catégorie de réponses.

2) Représenter cette répartition par un diagramme semi-circulaire.

• Le regroupement par classes a été vu en 5^{ème}.

• Question 2) : mise en œuvre de la proportionnalité pour calculer la correspondance en degrés.

3 Nombres d'enfants par famille

À la rentrée, un établissement scolaire établit des statistiques sur les enfants venant de rentrer en sixième. Le tableau ci-dessous concerne le nombre d'enfants par familles des élèves de sixième.

Nombre d'enfants par famille	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs (nombre de familles)	57	41	24	15	2	1	140

1) On désire déterminer le nombre de familles qui ont au plus deux enfants, c'est à dire un ou deux enfants. On additionne l'effectif des valeurs 1 et 2 :

$$57 + 41 = 98$$

On dit que 98 est l'**effectif cumulé croissant** de la valeur 2.

- Recopier le tableau. Calculer combien de familles ont au plus 3, 4... enfants pour compléter la troisième ligne.

- Vocabulaire

En français, « cumuler » signifie réunir plusieurs choses.

Nombre d'enfants par famille	1	2	3	4	5	6
Effectifs (nombre de familles)	57	41	24	15	2	1
Effectifs cumulés croissants		98				

On additionne 57 et 41

Les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant

• Calculs pas à pas d'effectifs cumulés. Les questions posées donnent du sens à ces calculs.

2) Fréquences et fréquences cumulées

Reproduire et compléter ce tableau concernant les fréquences en pourcentages. Le calcul des fréquences cumulées croissantes s'effectue en additionnant les fréquences à partir de la gauche comme pour les effectifs cumulés croissants.

Nombre d'enfants par famille	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs (nombre de famille)	57	41	24	15	2	1	140
Fréquences (en pourcentages)	40,7	29,3					100
Fréquences cumulées croissantes		70 %					

3) Calculer une moyenne

Pour calculer le nombre moyen d'enfants par famille, on effectue le calcul suivant :

$$\frac{1 \times 57 + 2 \times 41 + 3 \times 24 + 4 \times 15 + 5 \times 2 + 6 \times 1}{57 + 41 + 24 + 15 + 2 + 1}$$

Nombre total d'enfants de toutes les familles

Nombre total de familles

Le nombre d'enfants de chaque catégorie de familles est multiplié par le nombre de familles de cette catégorie.

Effectuer le calcul et indiquer le nombre moyen d'enfants dans les familles des élèves de sixième de ce collège.

4 Moyennes

Julia a relevé ses notes de mathématiques du trimestre sur son agenda.

Contrôles en classe : 10, 9, 14
Devoirs à la maison : 18, 20, 19
Interrogations écrites : 13, 8, 16

1) Julia calcule sa moyenne en additionnant ses neuf notes et en divisant par le nombre de notes. Effectuer ce calcul.

2) Julia se souvient que le professeur applique des coefficients à chaque sorte de notes : coefficient 6 aux contrôles, coefficient 1 aux devoirs, coefficient 2 aux interrogations. Chaque note de contrôle compte six fois dans la moyenne et chaque note d'interrogation deux fois. La moyenne pondérée porte ainsi sur vingt-sept notes.

Effectuer le calcul de cette moyenne.

3) Comparer les deux moyennes obtenues par Julia.

Vocabulaire

Moyenne pondérée : on donne six fois plus d'importance (de « poids ») aux notes des contrôles qu'à celles des interrogations.

• Application de la méthode précédente dans le cas des pourcentages.

• On pourra reprendre la question précédente et faire énoncer les réponses avec des pourcentages.

• Introduction « naturelle » de la moyenne pondérée.

• Faire observer que la moyenne ne se situe pas au milieu de la série de notes rangées dans l'ordre croissant.

• Confrontation avec une situation courante. (On pourra utiliser les notes des élèves.)

Activités

5 — Classes et Moyennes

Lors de la visite médicale annuelle, l'infirmière scolaire relève le poids des trente élèves de la classe.

41, 43, 35, 50, 51, 37, 34, 49, 43, 45,
59, 46, 45, 39, 48, 55, 46, 49, 37, 43,
55, 42, 52, 43, 49, 51, 55, 37, 42, 56,

- 1) Calculer le poids moyen des élèves de la classe à partir des relevés de l'infirmière.
- 2) Regrouper ces données par classe d'**amplitude** 5 kg en recopiant et complétant la deuxième ligne du tableau ci-dessous. La classe]30 ; 35] regroupe les élèves pesant plus de 30 kg et jusqu'à 35 kg compris.

Classes	]30 ; 35]	]35 ; 40]	]40 ; 45]	]45 ; 50]	]50 ; 55]	]55 ; 60]
Effectifs	2					
Centre de la classe	32,5					

- Vocabulaire

Amplitude de la classe : différence entre les deux valeurs extrêmes de la classe.

Compléter la troisième ligne du tableau en déterminant le centre de chaque classe, c'est-à-dire la valeur située au milieu de la classe.

- 3) Une valeur approchée de la moyenne peut être calculée en utilisant les centres des classes. Dans ce cas, on considère que la valeur centrale de la classe représente l'ensemble des éléments de cette classe.
Recopier, compléter et calculer l'expression suivante :

$$\frac{32,5 \times 2 + 37,5 \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots}{30}$$

• Valeur approchée de la moyenne, en supposant que l'effectif est régulièrement réparti sur l'intervalle de la classe.

6 — Visualiser avec un tableur

Lors d'un contrôle commun à trois classes, les notes ont été relevées et on désire construire un diagramme pour visualiser la répartition des résultats.

11	11	10	9	11	12	13	11	9	13	11	11	11	10	9	11	12	13	11	9	13	11
9	19	10	5	11	13	17	3	15	7	12	9	19	10	5	11	13	17	3	15	7	12
1	2	6	7	10	11	12	15	16	18	19	1	2	6	7	10	11	12	15	16	18	19
20	19	17	15	13	11	9	7	5	3	2	20	19	17	15	13	11	9	7	5	3	2

- 1) Utiliser un tableur pour trier les notes et compter le nombre de notes de chaque sorte. Construire un diagramme en bâtons (appelé « histogramme » sur le logiciel) pour illustrer cette répartition.
- 2) Proposer une répartition par classes de même amplitude et visualiser cette répartition par classe. Procéder à plusieurs essais pour obtenir la représentation qui illustre le mieux la situation.

• Les élèves ont pu utiliser un tableur en technologie.

• L'utilisation d'un tableur permet de faire plusieurs essais rapidement.

7 Informations et statistiques

Amener les élèves à porter un regard critique sur les données qui leur sont présentées.

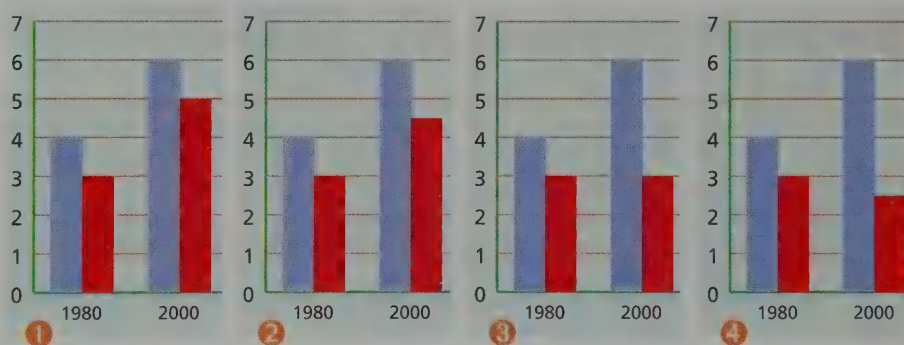
L'usage des statistiques est fréquent dans les médias. Leur utilisation semble donner du sérieux et de l'authenticité aux propos tenus...mais on peut faire dire n'importe quoi aux résultats ! En tant que citoyen responsable, il faut rester vigilant et attentif à l'ensemble de l'information donnée. Une information tronquée peut être synonyme de tromperie, voulue ou non.

Des pourcentages et des moyennes

Commenter les phrases suivantes :

- « 100 % des gagnants ont tenté leur chance. »
- « M. Truc a largement remporté les élections avec 61 % des suffrages. »
M. Truc a-t-il raison de se féliciter s'il y a eu une abstention de 40 % ?
- « 51 % des diplômés de 1980 étaient des femmes soit 595 000 lauréates. En 1997 elles représentaient 55 % des diplômés soit 1 155 000 lauréates. »
- En 1995, au Brésil et au Guatemala, 16 % des enfants étaient au travail (source OIT 1995). Le Guatemala compte 12,7 millions d'habitants et le Brésil 170 millions d'habitants.
- « La température annuelle moyenne à Moscou est de 5 degrés. » Que mettre dans sa valise si on part faire un séjour en été ? En janvier ? En octobre ?
- Pourquoi parle-t-on de « normales saisonnières » plutôt que de « moyennes saisonnières » concernant les températures ?

Des graphiques



Légende :

- Nombre de voitures en circulation.
- Nombre d'accidents de la circulation.

Les commentaires sur graphique peuvent varier beaucoup suivant ce qu'on veut leur faire dire ! ! !

Associer les commentaires ci-dessous aux graphiques correspondants.

• Le pourcentage d'accidents diminue. A • Il y a toujours autant d'accidents.	• Le pourcentage d'accidents diminue. B • Le nombre d'accidents diminue.
• Le pourcentage d'accidents diminue. C • Le nombre d'accidents augmente.	• Le pourcentage d'accidents est stable. D • Le nombre d'accidents augmente.

L'essentiel en deux pages

1 — Effectifs et fréquences

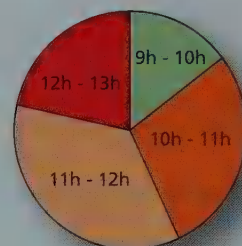
Dans un tableau statistique, l'**effectif** est le nombre de réponses associées à chaque valeur. L'ensemble des valeurs et des effectifs forme une **série statistique**.
En divisant l'effectif d'une valeur par l'effectif total, on obtient la **fréquence**.
En multipliant par 100 la fréquence, on obtient la **fréquence en pourcentage**.

Exemple

La standardiste d'une radio FM a noté le nombre d'appels téléphoniques reçus par tranches d'heures, au cours d'une matinée. Elle obtient les résultats suivants :

Tranches horaires	9h - 10h	10h - 11h	11h - 12h	12h - 13h	Total
Effectifs (nombres d'appels)	19	37	46	28	130
Fréquences	0,146	0,285	0,354	0,215	1
Fréquences en %	14,6	28,5	35,4	21,5	100

Diagramme circulaire
Les angles au centre du disque sont proportionnels aux effectifs.



2 — Effectifs et fréquences cumulés

Lorsque les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant, on obtient l'**effectif cumulé croissant** d'une valeur en additionnant son effectif à ceux qui le précèdent (on additionne à partir de la gauche du tableau).
Un procédé analogue est utilisé pour calculer les **fréquences cumulées croissantes**.
Pour obtenir les effectifs ou fréquences **cumulés décroissants**, on additionne à partir de la droite du tableau.

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe précédent.

Tranches horaires	9h - 10h	9h - 11h	9h - 12h	9h - 13h
Effectifs : nombres d'appels	19	37	46	28
Effectifs cumulés croissants	19	19 + 37 = 56	19 + 37 + 46 = 102	Total des appels 130

Tranches horaires	9h - 10h	10h - 11h	11h - 13h	12h - 13h
Fréquences en %	14,6	28,5	35,4	21,5
Fréquences cumulés décroissants en %	Total des appels 100	28,5 + 35,4 + 21,5 = 85,4	35,4 + 21,5 = 56,9	21,5

3 Moyenne

La **moyenne** d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total de cette série.

Exemple

Dans une usine, sept employés calculent le salaire moyen (en euros) des salaires de leur atelier.

$$\frac{760 + 825 + 915 + 990 + 1\,065 + 1\,160 + 1\,296}{7} \approx 1\,002$$

Le salaire moyen des employés de cet atelier s'élève environ à 1002 €.

4 Moyenne pondérée

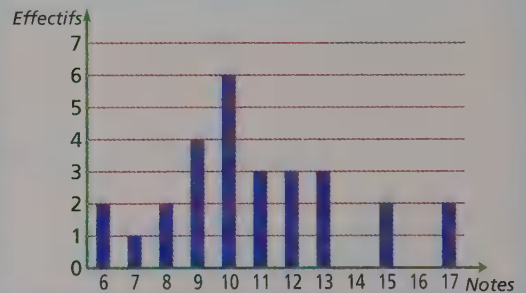
La **moyenne pondérée** est le quotient de la somme des valeurs, affectées chacune de leur coefficient, par la somme totale des coefficients.

Exemple

Dans une classe de 28 élèves, les notes à un devoir se répartissent de la manière suivante :

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	15	17
Effectifs	2	1	2	4	6	3	3	3	2	2

Diagramme en barres
La hauteur des barres est égale aux effectifs.



On effectue le calcul suivant pour calculer la moyenne :

$$\frac{6 \times 2 + 7 \times 1 + 8 \times 2 + 9 \times 4 + 10 \times 6 + 11 \times 3 + 12 \times 3 + 13 \times 3 + 15 \times 2 + 17 \times 2}{2 + 1 + 2 + 4 + 6 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2} = \frac{303}{28} \approx 10,8$$

La moyenne des notes est d'environ 10,8.

5 Répartition en classes et moyenne

Lorsqu'une série statistique est répartie en classe, on peut considérer que la valeur au centre de la classe représente la classe. On calcule alors la moyenne pondérée pour obtenir une valeur approchée de la moyenne de la série.

Exemple

Le tableau ci-dessous présente la répartition de 2000 adultes suivant leur taille.

Tailles en cm	[140 ; 150[	[150 ; 160[	[160 ; 170[	[170 ; 195[
Centre de la classe	145	155	165	182,5
Effectifs	48	397	913	642

Pour calculer la taille moyenne on effectue le calcul suivant :

$$\frac{145 \times 48 + 155 \times 397 + 165 \times 913 + 182,5 \times 642}{2\,000} \approx 168$$

La taille moyenne de ce groupe d'adultes est d'environ 168 cm.



POUR CALCULER UNE MOYENNE

Les calculatrices et les ordinateurs sont des outils très performants en ce qui concerne les statistiques : leur vitesse d'exécution des calculs permet d'obtenir très rapidement des résultats qu'il serait fastidieux de calculer manuellement.

Les exemples suivants sont appliqués aux connaissances d'un élève de quatrième.

Calcul d'une moyenne avec une calculatrice scientifique

On utilise la touche $\bar{x}$.

Il faut entrer les nombres dans la calculatrice en choisissant le menu « statistique » ou la touche de saisie des notes suivant les modèles (consulter la notice d'utilisation de la calculatrice).

À la fin de la saisie, on tape sur la touche $\bar{x}$ et la moyenne s'affiche.

Exemple

Calculer la moyenne des notes suivantes : 14, 12, 7, 9, 16, 11, 8.

Méthode

On saisit les notes :

14 $\rightarrow$ 12 $\rightarrow$ 7 $\rightarrow$ 9 $\rightarrow$ 16 $\rightarrow$ 11 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ $\bar{x}$ 11

La moyenne des notes est 11.

Calcul d'une moyenne avec un tableur

Exemple

On reprend les notes précédentes.

On saisit les sept notes dans la colonne B entre les cases B1 et B7.

On place ensuite le curseur dans la case B8.

	A	B	C
1		14	
2		12	
3		7	
4		9	
5		16	
6		11	
7		8	
8		11	
9			
10			

Lorsque la formule « moyenne » est sélectionnée, le logiciel propose de calculer la moyenne des cases B1 à B8. Il suffit de valider et la moyenne 11 apparaît dans la case B8.

On insère la formule « moyenne » dans la case B8.

Calcul d'une moyenne pondérée avec un tableur

On calcule la moyenne pondérée des notes 14, 12, 7 et 9 affectées du coefficient 1 et des notes 16, 11 et 8 affectées du coefficient 3.

On saisit les notes comme précédemment, puis on rentre la formule suivante dans la case B8 :

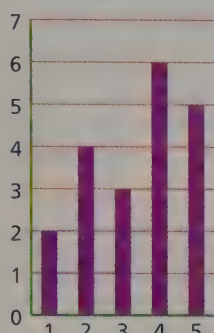
$$\underbrace{(B1 + B2 + B3 + B4)}_{\text{notes coef. 1}} + \underbrace{3 * B5 + 3 * B6 + 3 * B7}_{\text{notes coef. 3}} \div 13 \quad \bar{x} \quad \text{Moyenne pondérée : 11,3}$$

notes coef. 1 notes coef. 3 13 coef. au total

exercices

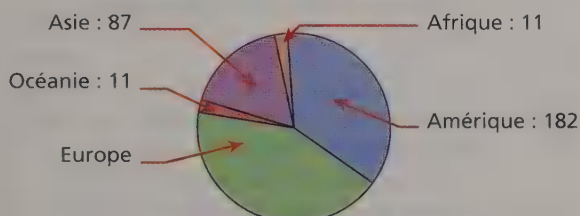
EFFECTIFS ET FRÉQUENCES

1 Lire un diagramme



- À partir du diagramme ci-contre, calculer l'effectif total de la série.
- Quelle valeur a le plus grand effectif ?
- Quelle est la fréquence relative à la valeur 1 ?
- Construire le tableau de valeurs de cette série statistique.

- 510 millions de voitures particulières circulaient dans le monde en 1999. La répartition par continents (en millions de voitures) est représentée sur le diagramme circulaire ci-dessous.



- Combien de voitures circulaient en Europe en 1999 ?
- Quel était le pourcentage de voitures circulant en Amérique par rapport à l'ensemble des véhicules ?
- Le tableau ci-dessous concerne le nombre de véhicules utilitaires pour l'année 1999. Le compléter.

Continent	Afrique	Amérique	Europe	Océanie	Asie	Total
Effectifs (nombre de véhicules, en millions)	5,7	95	37	27	45	
Fréquences en %						100
Correspondance en degrés						360

Construire le diagramme circulaire représentant la répartition des véhicules utilitaires par continents.

Comparer avec le diagramme précédent.

3 En S.V.T



Après la dissection d'une pelote de réjection de chouette, des élèves ont dressé le tableau ci-dessous présentant les différents types d'ossements trouvés et leur nombre.

Types d'os	Crânes	Mâchoires et dents	Os du bassin et membres	Vertèbres et côtes	Total
Effectifs	4	23	33	51	
Fréquences en %					
Angles en degrés					180

Compléter le tableau et construire le diagramme semi-circulaire représentant cette répartition.

4 Besoin en dioxygène



Le premier tableau indique les besoins journaliers en litres d'oxygène par kilogramme en fonction de l'âge.

Age	3 mois	6 mois	1 an	3 ans	6 ans	9 ans	12 ans	Homme adulte
Besoin en L/kg	25	23	19	17,5	16,5	15,5	14,5	6

Le deuxième tableau indique le poids moyen suivant l'âge de la personne.

Âge	3 mois	6 mois	1 an	3 ans	6 ans	9 ans	12 ans	Homme adulte
Poids moyen en kg	5,5	7,5	9,5	13,8	19,5	26,7	36,3	73,7

- Construire les deux graphiques correspondants à ces tableaux.
- Calculer le besoin journalier en dioxygène pour les huit catégories de personnes.

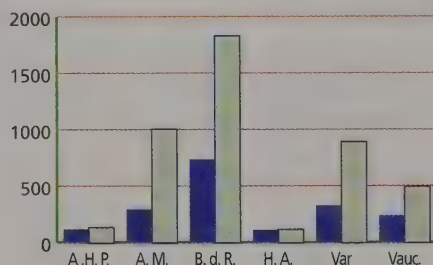
Comparer les résultats avec les informations données dans le premier tableau.



5 — Région Provence - Alpes Côte d'Azur

Le diagramme présente les variations de population (en milliers d'habitants) entre 1901 et 1999, dans les six départements de la région P.A.C.A.

- a) Pour les années 1901 et 1999, classer les départements par population décroissante.



Légende :

A.H.P. : Alpes de Hautes Provence,
A.M. : Alpes Maritimes,
B.d.R. : Bouches du Rhône,
H.A. : Hautes Alpes,
Vauc. : Vaucluse.

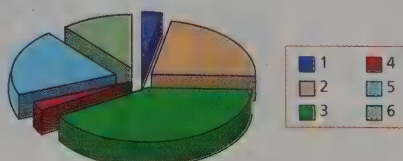


- b) Le diagramme précédent a été obtenu à partir du tableau ci-dessous. Le reproduire et retrouver les données effacées (les populations sont données en milliers d'habitants, source INSEE).

Départements	1901	1999	Écart de population	Écart en % par rapport à 1901
Alpes de H. P	115	140		
Alpes Mar.	293	1 011		
B. du Rhône		1 836	1 102	
Hautes Alpes	110			10
Var	326			
Vaucluse		500		
Total		4 506		

- c) Le diagramme ci-dessous représente la répartition de la population de la région P.A.C.A suivant les six départements en 1999.

Quelle légende attribuer aux différents secteurs ?



EFFECTIFS ET FRÉQUENCES CUMULÉS

- 6 — Voici les résultats obtenus lors d'un contrôle passé par des élèves d'une classe de 4^{ème} :

19	20	16	17	9	12	17	19
16	18	4	19	14	10	7	18
17	7	16	8	11	10	15	7

- a) Présenter ces résultats sous la forme d'un tableau statistique. Dans le tableau, faire figurer les effectifs cumulés croissants et décroissants.

- b) Répondre aux questions ci-dessous en utilisant le tableau (colorer, dans l'une ou l'autre des lignes des effectifs cumulés, la case donnant la réponse).

- Combien d'élèves ont moins de 15 ? (En rouge.)
- Combien d'élèves ont plus que 11 ? (En vert.)
- Combien d'élèves ont au moins 9 ? (En bleu.)
- Combien d'élèves ont au plus 10 ? (En noir.)

- 7 — a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous, présentant le nombre de familles suivant le nombre d'enfants de moins de 25 ans (en milliers de familles et à la date de 1998).

Nombre d'enfants par famille	0	1	2	3	4 ou plus	Total
Effectif	7 119	3 634	3 394	1 276	475	
Fréquence en %						
Fréquences cumulées croissantes						
Fréquences cumulées décroissantes						

- b) En utilisant le tableau, calculer les pourcentages demandés par rapport au nombre total de familles (colorer la case donnant la réponse) :

- familles de moins de 3 enfants ? (En rouge.)
- familles de plus de un enfant ? (En vert.)
- familles d'au moins un enfant ? (En bleu.)
- familles d'au plus un enfant ? (En noir.)

8 — Tir à l'arc

Les 24 élèves d'une classe de 4^{ème} participent à une séance d'initiation au tir à l'arc lors d'un séjour en plein air. L'accompagnateur note le nombre de fois où leurs flèches atteignent la cible. À la fin de la séance, il présente les performances.

1 flèche : 2 élèves	6 flèches : 3 élèves
2 flèches : 4 élèves	7 flèches : 1 élève
3 flèches : 3 élèves	8 flèches : 0 élève
4 flèches : 1 élève	9 flèches : 3 élèves
5 flèches : 6 élèves	5 flèches : 1 élève

- Représenter ces résultats dans un tableau statistique.
- Construire le diagramme en bâtons correspondant.
- Calculer les fréquences cumulées et donner le pourcentage d'élèves ayant réussi :
 - moins de 4 lancers.
 - au moins 4 et moins de 7 lancers.
 - 7 lancers ou plus.

9 — La documentaliste fait le bilan des emprunts de livres pour le mois écoulé :

Nombre de livres empruntés	1	2	3	4	5	6 ou plus
Effectifs	70	82	126	103	37	12

- Recopier et compléter le tableau par le calcul des effectifs cumulés.
- Combien d'élèves ont emprunté 6 livres ou plus ?
- Combien d'élèves ont emprunté au plus 3 livres ?
- Combien d'élèves ont emprunté au moins 3 livres ?
- Combien d'élèves ont emprunté au moins 1 livre ?

10 — Une usine fabrique des piles électriques. On teste la durée de vie d'un échantillon de piles, les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

Durée x de vie (en jours)	$0 < x \leq 250$	$250 < x \leq 500$	$500 < x \leq 750$	$750 < x \leq 1\,000$
Nombre de piles	5	82	75	8

- Quel est le nombre de piles testées ?
- Quel est le nombre de piles ayant une durée de vie de plus de 500 jours ?
- Quel est le nombre de piles ayant une durée de vie au plus de 500 jours ?

MOYENNES

11 — À travers l'Europe

Le tableau ci-dessous présente les prix (en euros) d'un litre de coca, de lait et d'essence pratiqués dans dix capitales européennes (Courrier International, H.S. n° 20, décembre 2001).

Capitales	Un litre de coca	Un litre de lait	Un litre d'essence
Amsterdam	0,74	0,68	1,11
Athènes	0,69	0,97	0,78
Berlin	0,68	0,59	1,02
Bruxelles	1,01	0,76	1,03
Dublin	0,75	0,76	0,84
Helsinki	1,34	0,66	1,14
Londres	0,93	0,72	1,17
Paris	0,88	0,98	1,16
Rome	0,88	1,13	1,06
Vienne	1,16	1,16	1,20

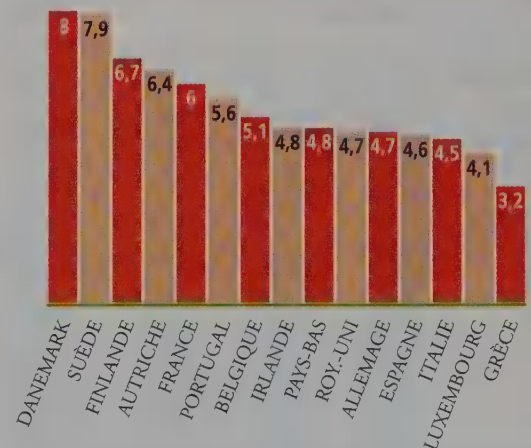
- Construire, avec trois couleurs différentes, un graphique présentant les trois séries de prix. Dans quelles capitales trouve-t-on les prix les plus élevés ? Les moins élevés ?
- Calculer le prix moyen d'un litre de coca, d'un litre de lait et d'un litre d'essence sur l'ensemble de ces villes.

12 — L'Europe et l'éducation

Extrait du quotidien Le Monde, 19 juin 2001.

L'éducation, une priorité politique variable

Total des dépenses publiques consacrées à l'enseignement, en % du PIB

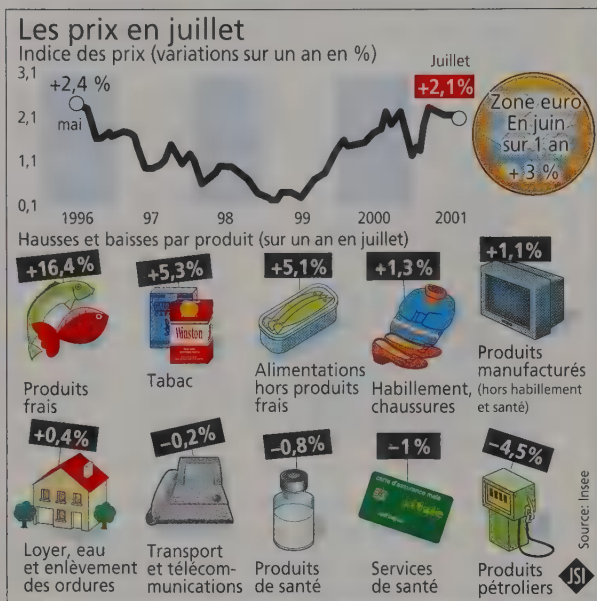


- Calculer le pourcentage moyen du PIB consacré à l'éducation à travers l'Europe des Quinze.
- Combien de pays sont au-dessus de cette moyenne ? Et en dessous ?

exercices

13 Variation des prix

Extrait du quotidien Le Télégraphe, 15 août 2001.



- Calculer la moyenne des pourcentages de hausse et de baisse sur les produits.
- Comparer avec la variation de l'indice indiquée à droite du graphique.
Les dépenses des Français se répartissent-elles équitablement sur tous les produits présentés ?

14 Marée basse de St Malo à Belle-Île



MARÉES 2001	Mercredi 15 août				Jeudi 16 août			
	Pleines mers		Basses mers		Pleines mers		Basses mers	
	Matin	Soir	Matin	Soir	Matin	Soir	Matin	Soir
SAINT-MALO	3,52	16,30	10,41	23,24	5,14	17,45	11,59	-
PAIMPOL	3,36	16,14	10,09	22,49	4,56	17,26	11,27	-
PERROS-GUIREC	3,09	15,49	9,39	22,18	4,31	17,01	10,53	23,27
ROSCOFF	2,54	15,33	9,21	22,02	4,15	16,44	10,37	23,10
ABERWRACH	2,21	15,00	8,54	21,34	3,38	16,08	10,07	22,39
BREST	1,55	14,29	8,15	20,53	3,10	15,36	9,26	22,00
DOUARNENEZ	1,47	14,21	8,06	20,44	3,01	15,26	9,12	21,47
AUDIERNE	1,25	14,08	7,49	20,26	2,45	15,15	9,01	21,31
CONCARNEAU	1,48	14,23	7,54	20,30	2,59	15,23	9,00	21,32
PORT-TUDY	1,52	14,27	7,54	20,32	3,03	15,27	9,01	21,35
ETEL	2,05	14,37	8,32	21,09	3,14	15,39	9,39	22,15
PORT-NAVALO	2,19	14,55	8,07	20,45	3,30	15,54	9,15	21,49
BELLE-ÎLE	1,59	14,34	7,52	20,30	3,08	15,32	9,00	21,33
Coefficients	44	49			55	63		

CALCULÉ PAR LE SERVICE HYDROGRAPHIQUE ET Océanographique DE LA MARINE

Quel a été l'horaire moyen de la marée basse du matin sur l'ensemble de la côte bretonne en ce mercredi 15 août ?

Exercice résolu

Énoncé

Olivier a déjà quatre notes en français : 14, 10, 9, et 12.
Il voudrait que sa moyenne de français atteigne 12 ce trimestre.

Quelle note doit-il avoir au dernier devoir ?

Exemple de solution

On résout le problème avec une équation en appelant x la note qu'il doit avoir.

- Calculons sa moyenne en fonction de x :

$$\frac{14 + 10 + 9 + 12 + x}{5}$$

Cette moyenne doit être égale à 12, donc on écrit l'équation :

$$\frac{14 + 10 + 9 + 12 + x}{5} = 12$$

- Résolution de l'équation :

$$\frac{45 + x}{5} = 12$$

$$45 + x = 12 \times 5$$

$$45 + x = 60$$

$$x = 60 - 45$$

$$x = 15$$

- Conclusion :

Olivier doit obtenir 15 à son dernier devoir pour que sa moyenne soit 12.

- Au brevet blanc, Gaëlle a obtenu 25 sur 40 en maths, 19 sur 40 en histoire.

Quelle doit être la note de français pour que Gaëlle ait la moyenne sur les trois épreuves ?

- Dans un village de 1200 habitants, on compte une voiture pour quatre habitants. Dans un autre village de 1200 habitants, on compte une voiture pour douze habitants.

Si on réunit ces deux villages, combien comptera-t-on d'habitants pour une voiture ?

- En revenant de la mer, Jean a parcouru les trente premiers kilomètres à la vitesse de 30 km/h. Ensuite les routes se sont dégagées et, sur les trente derniers kilomètres, il a pu rouler à la vitesse de 90 km/h.

Quelle a été sa vitesse moyenne sur l'ensemble des 60 km du trajet ?

MOYENNE PONDÉRÉES

- 18 Le tableau ci-dessous, indique les températures (en °C) relevées, à Rouen, durant un mois de novembre.

Date	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Temp.	9	10	11	13	12	11	10	12	10	9	8	7	9	10	9

Date	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Temp.	7	8	7	6	7	9	10	10	11	11	10	9	10	8	7

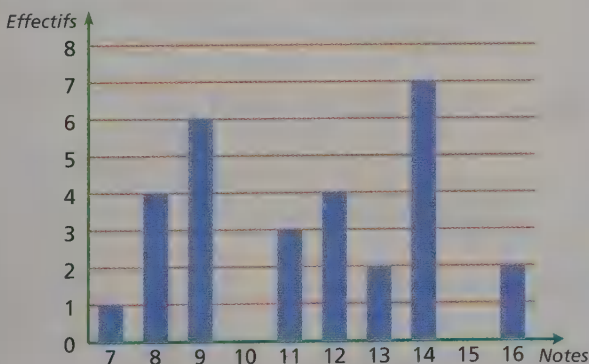
- a) Reproduire et compléter le tableau statistique ci-dessous présentant le nombres de jours en fonction de la température relevée.

Température (en degrés)	6	7	8		
Nombre de jours					

- b) Calculer la température moyenne en utilisant les données du tableau de la question a).

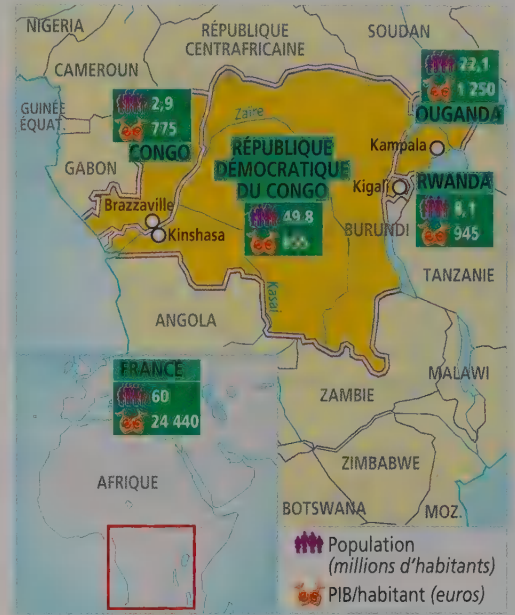


- 19 Voici le diagramme en barres représentant la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques :



- a) Calculer la moyenne de la classe à ce devoir.
- b) Calculer le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note supérieure à 10.

- 20 Calculer la moyenne des PIB/habitant sur l'ensemble de ces quatre pays d'Afrique Centrale.



- 21 Relever les résultats de cinquante lancers successifs d'un dé. Calculer la moyenne des résultats.

- 22 Pierre, Jean et Alain ont passé un examen comportant quatre disciplines. Pour être reçu, il faut atteindre 10 de moyenne.
- a) Calculer la moyenne, sans coefficient, des trois candidats.

	Français	Maths	Anglais	Technologie
Pierre	15	9	11	7
Jean	10	11	12	9
Alain	7	14	13	8

- b) Pour cet examen, le français, les maths, l'anglais et la technologie ont respectivement pour coefficient 6, 4, 2 et 5.

Calculer la moyenne pondérée de chaque candidat et dire s'ils sont reçus ou non.

- 23 Voici les notes d'un élève en anglais :

Écrit : 9, 13, 10.
Oral : 16, 14.

- a) Calculer la moyenne des cinq notes.
- b) On attribue le coefficient 2 aux notes d'écrit et 1 aux notes d'oral.

Calculer la moyenne pondérée de l'élève.

exercices

MOYENNES ET CLASSES

24 — Sondage « télévision »

« Combien de temps avez-vous regardé la télévision hier soir ? ». Les réponses des personnes interrogées sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

a) Recopier et compléter le tableau.

Temps (en minutes)	Effectifs	Centre des classes
[0 ; 30[	8	
[30 ; 60[	5	
[60 ; 90[	10	
[90 ; 120[	4	
[120 ; 150[	2	
Total		

b) Calculer le temps moyen passé devant la télévision par ces téléspectateurs lors de cette soirée.

25 — Population moyenne

Les 48 pays du continent européen sont répartis suivant le nombre de leurs habitants :

Population en millions	]0 ; 25]	]25 ; 50]	]50 ; 75]	]75 ; 100]	]100 ; 125]	]125 ; 150]
Effectifs	37	4	4	1	0	1
Centre des classes						

Calculer la moyenne des populations des pays du continent européen.

26 — Tableau à compléter

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous concernant la répartition de 250 collégiens suivant leur poids.

Classes	Effectifs	Fréquences en %	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants	Centre des classes
[20 ; 30]	10				
[30 ; 40]			97		
[40 ; 50]					
[50 ; 60]				57	
[60 ; 70]		7,6			
Total					

b) Calculer le poids moyen de ce groupe de collégiens.

27 — Pistes cyclables

38 villes de plus de 10 000 habitants sont réparties suivant le nombre de kilomètres de pistes cyclables ouvertes aux usagers.

Nombre de kilomètres de pistes cyclables	Effectifs (nombre de villes)	Centre des classes
[0 ; 50[	22	
[50 ; 100[	7	
[100 ; 200[	6	
[200 ; 300[	2	
300 et plus*	1	350

(* Strasbourg propose 407 km de pistes cyclables.)

Calculer le kilométrage moyen des pistes cyclables dans les grandes villes françaises.



28 — Groupe Est 2001 (série technologique)

Le tableau ci-dessous indique la répartition des élèves d'une classe suivant leur taille.

Taille (en cm)	Effectifs (nombre d'élèves)	Fréquence (en %)	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants	Angles (en °)
[150 ; 160[	5				72
[160 ; 170[	8				
[170 ; 180[	9				
[180 ; 190[	3				
TOTAL	100				360

a) Compléter le tableau.

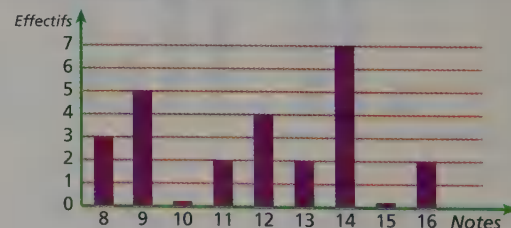
b) Déterminer le nombre d'élèves mesurant moins de 170 cm.

c) Combien d'élèves mesurent au moins 170 cm ?

d) Représenter par un diagramme circulaire la répartition des élèves par taille.

29 — Amérique du Nord 2001

Voici le diagramme en barres représentant la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques par une classe de 3^{ème}.



a) Calculer la moyenne de la classe à ce devoir.

b) Calculer le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note supérieure à 10.

30 — Groupe Ouest 2001 (série technologique)



Environnement et déchets ménagers

Préoccupé par la qualité de l'environnement, le maire d'une commune de 2 000 habitants décide d'installer des conteneurs de récupération supplémentaires. Au cours de l'année 2000, il a d'abord réalisé une étude sur la répartition des déchets ménagers.

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Types de déchets	Nombre de tonnes (effectifs)	Fréquences en pourcentage (arrondies à l'unité)
Résidus alimentaires	155	
Papiers, cartons	210	
Verres	70	
Plastiques	55	
Métaux	30	
Divers	180	
TOTAL		

Répartition des déchets ménagers pour une commune de 2000 habitants - Année 2000

b) Tracer le diagramme en bâtons des effectifs.

c) On rappelle que la population de la commune est de 2 000 habitants.
Calculer la masse de déchets produits par un habitant au cours de l'année 2000, en tonnes puis en kilogrammes.
Rappel : 1 t = 1 000 kg.

d) Le coût de revient pour l'élimination des déchets (collecte, traitement,...) est de 48 € par habitant et par an.
En déduire le coût de revient d'élimination d'un kilogramme de déchets dans cette commune.

31 — Bordeaux 2000

Le tableau ci-dessous indique la fréquentation quotidienne à une braderie.

Jours	Vendredi	Samedi	Dimanche	Lundi	Mardi
Nombre de personnes	770	1 925	9 009	3 080	616

a) Sur le nombre total de personnes ayant fréquenté la braderie, quel est le pourcentage de celles qui sont venues le dimanche ?

b) Quel est le nombre moyen de visiteurs, par jour, pendant la durée de la braderie ?

AVEC UN TABLEUR

32 — Les mots en **couleur** correspondent à des commandes du logiciel Excel ®.

• **Trier** les notes ci-dessous et choisir la répartition en classes la plus adaptée à une **représentation graphique** pertinente.

9	19	10	5	11	13	17	3	15	7	12
1	2	6	7	10	11	12	15	16	18	19
20	19	17	15	13	11	9	7	5	3	2
11	11	10	9	11	12	13	11	9	13	11

• Calculer la **moyenne** de cette série de notes.

33 — Mettre en place un questionnaire

Les quelques questions suivantes peuvent faire l'objet de sondages au sein de la classe. Choisir un thème, recenser les réponses et utiliser un tableur pour construire la représentation graphique.

- Vous êtes : ☐ un garçon ☐ une fille
- Quel âge avez-vous ?
- Quelle est votre taille ?
- Quel est votre poids ?
- Dans votre famille combien d'enfants y a-t-il ?
(Pensez à vous compter.)
- Combien avez-vous de sœurs ?
- Et combien de frères ?
- En moyenne, combien de temps mettez-vous pour vous rendre de chez vous au collège ?
- Combien de temps regardez-vous la télévision par semaine ?
☐ Moins de 1h ☐ De 1h à 4h ☐ De 5h à 8h
☐ De 9h à 14h ☐ De 15h à 19h ☐ De 20h à 30h
☐ Plus de 30h ?
- Avez-vous un ou plusieurs animaux chez vous ?
Combien ?
- Recevez-vous de l'argent de poche ?

34 — Calculer sa moyenne

Rassembler les notes du trimestre et s'informer des coefficients utilisés par les professeurs.

Calculer la moyenne par discipline, puis la moyenne générale.

AUTOUR D'UNE CHARLOTTE AU CHOCOLAT !!!



Ingrédients pour les biscuits

- 3 œufs
- 140 g de sucre
- 90 g de farine
- Extraits de vanille

Ingrédients pour la crème

- 500 g de chocolat
- 100 g de sucre
- 7 cL de lait
- 200 g de beurre
- 6 œufs

VANILLE NATURELLE, VANILLE DE SYNTHÈSE



Un kilogramme de vanille naturelle coûte 300 €.
Un kilogramme de vanille de synthèse coûte 15 €.
0,2 g de vanille sera utilisé pour ces biscuits.

Comparer la différence de coût entre les deux types arôme de vanille.

COMPARER LA COMPOSITION DES BISCUITS ET DE LA CRÈME



Un œuf pèse 60 g et un litre de lait pèse 1,03 kg.

Représenter la répartition de la masse des ingrédients des biscuits et de la crème en deux diagrammes en bâtons (négliger la vanille).



Comment obtenir la répartition des ingrédients de l'ensemble de la charlotte à partir de ces deux diagrammes ?

LES PAYS PRODUCTEURS DE CACAO



- a) Les pays producteurs de cacao sont les suivants :
Brésil, Cameroun, Côte d'Ivoire, Équateur, Ghana, Indonésie et Nigeria.
- Localiser ces pays sur la carte.
 - Quel est le type de région climatique dans laquelle se plaît le cacaoyer ?
- b) Le tableau suivant présente pour chaque pays producteur de cacao, la superficie et la production de l'année 1999. Calculer la production de cacao, en tonnes par km², de chaque pays producteur.

	Brésil	Cameroun	Côte d'Ivoire	Équateur	Ghana	Indonésie	Nigeria
Superficie en km ²	8 547 000	475 000	322 000	284 000	239 000	1 919 000	924 000
Production de cacao en tonnes	120 000	120 000	1 200 000	105 000	410 000	420 000	180 000

■ À CHACUN SA FAÇON DE DÉGUSTER LE CHOCOLAT...

Produits	Pourcentage de la consommation totale
Tablettes	31,4 %
Poudre	16,3 %
Pâte à tartiner	16,1 %
Barres chocolatées	13,5 %
Confiseries	7,2 %
Chocolats de fêtes	15,5 %



Représenter cette répartition par un diagramme circulaire.

■ ET POUR TERMINER APRÈS TOUT CE TRAVAIL...

...LA RECETTE DE LA CHARLOTTE AU CHOCOLAT !

Pour confectionner les biscuits à la cuillère, fouetter les jaunes avec le sucre et la vanille. Rajouter ensuite la farine tamisée et incorporer délicatement les blancs en neige. Avec une poche à douille, former des bâtonnets d'une dizaine de centimètres sur une feuille de papier sulfurisé et cuire un petit quart d'heure doucement (on peut acheter les biscuits à la cuillère...).

- Préparer la crème en faisant fondre le chocolat dans le lait chaud sucré. Ajouter les jaunes, le beurre puis les blancs en neige.
- Verser la crème dans le moule tapissé de biscuits, placer dans le réfrigérateur pendant deux heures et...

Bon appétit !

À travers L'Histoire

Les activités statistiques remontent à la plus haute Antiquité et correspondent à des recueils de données chiffrées. Le mot « statistique » appartient au langage administratif et apparaît en 1664 dans les premières enquêtes lancées par Colbert, ministre de Louis XIV, pour recenser la population, les fermages et les animaux sur toute la France. Connaître et expliquer les phénomènes sociaux et économiques nécessite le besoin de représenter pour visualiser, d'où diverses formes de graphiques, en barre ou en secteurs, mais aussi le besoin de résumer la masse de données recueillies. Plusieurs paramètres sont alors créés : le « mode » (valeur apparaissant le plus fréquemment) et des « moyennes ».

C'est à l'astronomie que l'on doit l'origine de ces concepts. Les Babyloniens et les Grecs avaient repéré la position de certaines étoiles et la périodicité de leur mouvement après un grand nombre de mesures et calculs. Tycho Brahé (1546-1601) fait, lui aussi, de multiples observations d'une même quantité pour en estimer une valeur la plus juste possible. Il cherche à éliminer le maximum d'erreurs dans ses observations et calculs et, pour estimer la valeur qui lui paraît la plus juste possible, il utilise la moyenne arithmétique.

Les sondages n'arriveront que plus tard au début du XIX^e siècle lorsque des méthodes de relevés partiels permettront de rendre compte aussi précisément des phénomènes.



Tycho Brahé (1546-1601)

ce que je dois savoir sur...

...Les statistiques

- ▶ Représenter des relevés statistiques sous forme de tableaux ou de graphiques.
- ▶ Calculer des effectifs et des fréquences cumulés.
- ▶ Calculer la moyenne d'une série statistique.
- ▶ Calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles.

je m'évalue

1 Les habitants de l'Auvergne

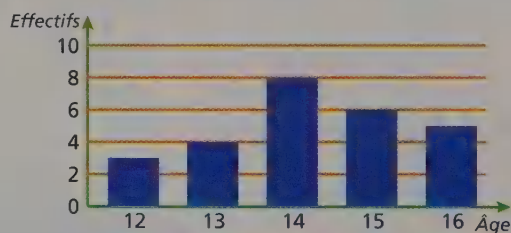
Dans le tableau ci-dessous figure le nombre d'habitants des quatre départements de la région Auvergne (INSEE, 1999).

	Allier	Cantal	Haute-Loire	Puy-de-Dôme	Région Auvergne
Nombre d'habitants (en milliers)	345	151	209	604	
Fréquence (en pourcentages)					

a) Recopier et compléter le tableau.

b) Représenter cette série statistique par un diagramme circulaire.

2 « Club Théâtre » du collège



Le diagramme en barres indique les âges des membres du « Club Théâtre » d'un collège.

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

Ages	12						Total
Effectifs	3						
Effectifs cumulés croissants							
Fréquences en %							

b) Utiliser le tableau pour déterminer le nombre d'élèves du club ayant moins de 15 ans. Colorer en vert la case donnant la réponse.

c) Calculer l'âge moyen des adhérents à ce club.

3 Durée de fonctionnement d'une série de cafetières électriques

Un fabricant de cafetières électriques a étudié la durée d'utilisation de cet appareil électroménager. L'étude porte sur 100 cafetières.

Durée d'utilisation (en années)	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[
Effectifs	9	24	43	17	7
Centre des classes					

a) Construire le diagramme en barres de cette série statistique.

b) Calculer, en années et en mois, la durée moyenne d'utilisation sur cet échantillon de cafetières.

Les solutions se trouvent à partir de la page 279.

Propriétés utiles en géométrie

Les propriétés ont été classées selon leur conclusion, apparaissant en vert dans les sous-titres (sauf pour la n°16). Les données nécessaires pour utiliser ces propriétés figurent en rouge.

Parallélogramme

- 1 Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.
- 2 Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
- 3 Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
- 4 Si le point M a pour image le point R par la translation qui transforme A en B, alors le quadrilatère ABRM est un parallélogramme.

Rectangle

- 5 Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.
- 6 Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
- 7 Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et sont de même longueur, alors c'est un rectangle.
- 8 Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.

Losange

- 9 Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.
- 10 Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
- 11 Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et sont perpendiculaires, alors c'est un losange.
- 12 Si un quadrilatère a ses côtés de même mesure, alors c'est un losange.

Carré

- 13 Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, ont même longueur et sont perpendiculaires, alors c'est un carré.
- 14 Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur, alors c'est un carré.
- 15 Si un quadrilatère est un losange et un rectangle, alors c'est un carré.
- 16 Si un quadrilatère est un carré, alors c'est un losange et un rectangle.

Triangle rectangle

- 17 Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.
- 18 Si dans un triangle le cercle circonscrit a pour diamètre un côté du triangle, alors le triangle est rectangle.
- 19 Si dans un triangle la longueur d'une médiane est égale à la moitié de la longueur du côté auquel elle est relative, alors le triangle est rectangle.
- 20 Si dans un triangle le carré du côté le plus grand n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Droites parallèles

- 21 Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles.
- 22 Si une droite est l'image d'une autre droite par une translation, alors ces droites sont parallèles.
- 23 Si une droite est l'image d'une autre droite par une symétrie centrale, alors ces droites sont parallèles.
- 24 Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors ces droites sont parallèles.
- 25 Si dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.
- 26 Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes internes égaux, alors elles sont parallèles.
- 27 Si deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants égaux, alors elles sont parallèles.
- 28 Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors ces droites sont parallèles.

Droites perpendiculaires

- 29 Si deux droites sont parallèles et qu'une troisième est perpendiculaire à la première, alors la troisième est perpendiculaire à la deuxième.
- 30 Si une droite est tangente à un cercle, alors elle est perpendiculaire au rayon ayant pour extrémité le point commun au cercle et à la droite.
- 31 Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses côtés consécutifs sont perpendiculaires.
- 32 Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires.

Milieu d'un segment

- 33 Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.
- 34 Si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.
- 35 Si A est le symétrique du point B par rapport à un point I, alors I est le milieu de [AB].
- 36 Si un point est sur un segment et à égale distance des extrémités du segment, alors ce point est le milieu du segment.

- 37 Si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Longueurs égales

38 Si un segment est l'image d'un autre segment par une translation, alors ces segments sont de même longueur.

42 Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont la même longueur.

46 Si un point est situé sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de l'angle.

39 Si un segment est l'image d'un autre segment par une symétrie, alors ces segments sont de même longueur.

43 Si un cercle est l'image d'un autre cercle par une symétrie, alors ces cercles ont même rayon.

47 Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités du segment.

40 Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont de même longueur.

44 Si un cercle est l'image d'un autre cercle par une translation, alors ces cercles ont même rayon.

48 Si dans un triangle un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est la moitié de la longueur du troisième côté.

41 Si un quadrilatère est un losange, alors ses côtés sont de même longueur.

45 Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit.

49 Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane issue de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de son hypoténuse.

Angles

50 Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés ont la même mesure.

54 Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont la même mesure.

58 Si un triangle est équilatéral, alors ses angles mesurent 60° .

51 Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles consécutifs sont supplémentaires.

55 Si deux droites coupées par une sécante sont parallèles, alors les angles alternes internes qu'elles forment sont de même mesure.

52 Si un angle est l'image d'un autre angle par une symétrie, alors ces angles sont de même mesure.

56 Si deux droites coupées par une sécante sont parallèles, alors les angles correspondants qu'elles forment sont de même mesure.

53 Si un angle est l'image d'un autre angle par une translation, alors ces angles sont de même mesure.

57 Si un triangle est isocèle, alors deux de ses angles ont la même mesure.

Transformations

59 Si le quadrilatère ABRM est un parallélogramme, alors le point M a pour image le point R par la translation qui transforme A en B.

60 Si un triangle est isocèle, alors la hauteur issue du sommet principal est l'axe de symétrie du triangle.

61 Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors il a un centre de symétrie.

Égalités

62 Si dans un triangle ABC, M est un point du segment [AB] et N est un point du segment [AC] et les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors on a l'égalité des

quotients : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

63 Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

64 Si un polygone est un triangle, alors la somme de ses angles est égale à 180° .

65 Si un point est le centre de gravité d'un triangle, alors il est situé au deux tiers de chaque médiane à partir des sommets.

Droites remarquables

66 Si dans un triangle une droite passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé, alors elle est une hauteur du triangle.

70 Si deux points sont symétriques par rapport à une droite, alors cette droite est la médiatrice du segment dont les extrémités sont ces deux points.

67 Si dans un triangle une droite passe par un sommet et par l'orthocentre du triangle, alors elle est une hauteur du triangle.

71 Si une droite passe par deux points équidistants des extrémités d'un segment, alors cette droite est la médiatrice du segment.

68 Si dans un triangle une droite passe par un sommet et par le milieu du côté opposé, alors cette droite est une médiane du triangle.

72 Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.

74 Si dans un triangle une demi-droite a pour origine un sommet et passe par le centre du cercle inscrit, alors cette demi-droite est une bissectrice du triangle.

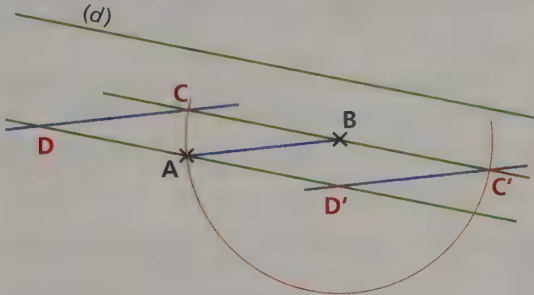
69 Si dans un triangle une droite passe par un sommet et par le centre de gravité du triangle, alors cette droite est une médiane du triangle.

73 Si une demi-droite partage un angle en deux angles égaux, alors cette demi-droite est la bissectrice de l'angle.

75 Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il est situé sur la bissectrice de l'angle.

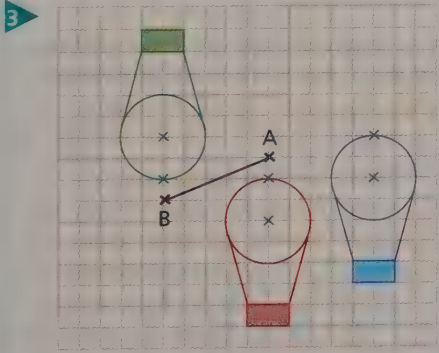
1 Parallélogramme et translation

- 1 a) C est situé sur la parallèle à (d) passant par B et sur le cercle de centre B et de rayon BA.

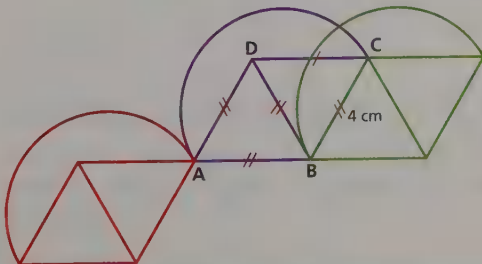


- b) On sait que ABCD est un parallélogramme.
Si un quadrilatère est un parallélogramme
alors ses côtés opposés ont même longueur.
On peut écrire que $AB = CD$ et $AD = BC$.
Or $AB = BC$, donc les quatre côtés ont même
longueur.
ABCD est un losange.

- 2 a) C a pour image B.
b) I a pour image D.
c) L est l'image de G.
d) G est l'image de K par la translation qui transforme L en H.
e) Il y a plusieurs réponses possibles :
B a pour image H ; G a pour image M ;
F a pour image L ou D a pour image J.



- 4 a)



2 Triangle et proportionnalité

- 1 • Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.

- Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

- 2 Dans le triangle DUO, on sait que J est milieu de [DO] et (JH) est parallèle à (OU).

Si, dans un triangle, une droite passe par un milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté. Donc H est le milieu de [DU].

La médiatrice d'un segment passe par le milieu de ce segment, donc H est situé sur la médiatrice de [DU].

- 3 a) Dans ARS, on a des points alignés et deux droites parallèles, d'après la propriété de proportionnalité des longueurs des côtés :

$$\frac{AB}{AR} = \frac{AC}{AS}$$

d'où $\frac{4,2}{7} = \frac{3}{AS}$ et $AS = 5$.

- b) On applique la même propriété dans le triangle EIJ :

$$\frac{EF}{EI} = \frac{EL}{EJ}$$

$$\text{d'où } \frac{EF}{50} = \frac{24}{60} \text{ et } EF = 20.$$

- 4 Dans le triangle ARS, on a des points alignés et deux droites parallèles, d'après la propriété de proportionnalité des longueurs des côtés :

$$\frac{AB}{AR} = \frac{AC}{AS} = \frac{BC}{RS}$$

d'où $\frac{6}{AR} = \frac{3}{7}$ et $AR = 14$.

- 5 a) Dans le triangle GZV, L est milieu de [GZ] et K est milieu de [GV].

Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté donc :

(LK) // (ZV)

- b) M est symétrique de L par rapport à Z donc Z est milieu de [ML]. Dans le triangle MLK, $(LK) \parallel (ZV)$ et Z est milieu de [ML].

Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

On en déduit que X est le milieu de $[KM]$.

6 $\lambda_{AML} = \frac{1}{2} \times AL \times AM$ d'où $\lambda_{AML} = 8,775$.

OELM est un trapèze donc (OE) et (LM) sont parallèles. On peut utiliser la propriété des longueurs des côtés dans le triangle ALM :

$$\frac{AE}{AL} = \frac{AO}{AM}$$

d'où $\frac{1,5}{4,5} = \frac{AO}{3,9}$ et $AO = 1,3$.

$\lambda_{AOE} = \frac{1}{2} \times AE \times AO$ d'où $\lambda_{AOE} = 0,975$.

$\lambda_{OELM} = \lambda_{AML} - \lambda_{AOE}$ d'où $\lambda_{OELM} = 7,8$.

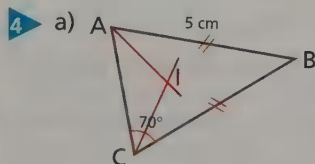
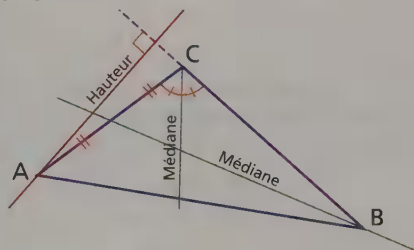
3 Droites remarquables d'un triangle

- 1 a) Centre de gravité.
b) Centre du cercle inscrit.
c) Centre du cercle circonscrit.
d) Orthocentre.

Phrase a) et figure ③,
phrase b) et figure ②,
phrase c) et figure ①,
phrase d) et figure ④.

- 2 a) [BT] est une hauteur du triangle ABC et [MD] est une hauteur du triangle ADC.
b) [AZ] est une bissectrice dans le triangle ABU.
c) (BL) est une médiane dans le triangle DCB.
d) (TL) est une médiane dans le triangle DCT.
(MD) et (BT) sont deux droites parallèles.

- 3 Constructions avec le compas, la règle et l'équerre.



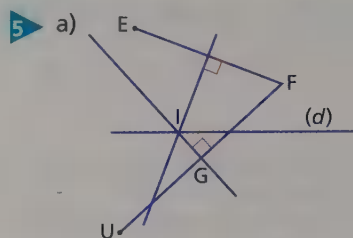
- b) On sait que ABC est un triangle isocèle en B donc ses deux angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAB}$ sont deux angles de 70° .

Les demi-droites [AI] et [CI] sont bissectrices donc les angles $\widehat{ACI}$ et $\widehat{CAI}$ sont deux angles de 35° .

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° , donc dans le triangle AIC :

$$\widehat{ACI} + \widehat{CAI} + \widehat{AIC} = 180$$

d'où $\widehat{AIC} = 110^\circ$.



- b) Par construction dans le triangle UEF, on obtient (d) médiatrice de [UE] et la médiatrice de [EF]. Le point d'intersection des médiatrices est I et donc (IG) est une médiatrice du triangle UEF.

La médiatrice (IG) coupe le segment [UF] en son milieu donc G est milieu de [UF].

- c) Le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle UEF.

4 Cercle et triangle rectangle

- 1 a) et c) Constructions.

- b) On sait que le triangle ABE a un côté [AB] diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et un sommet E sur ce cercle.

Si, dans un cercle, est inscrit un triangle avec pour sommets les extrémités d'un diamètre et un point du cercle, alors ce triangle est rectangle en ce point.

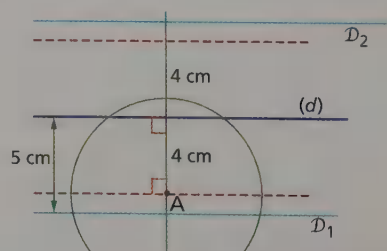
On peut dire que le triangle ABE est rectangle en E.

- d) [AS] est hauteur dans le triangle AOE donc les droites (AS) et (OE) sont perpendiculaires et le triangle SOA est rectangle en S.

Si un triangle est rectangle alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit. Le cercle de diamètre [OA] passe par les sommets A, O, et S.

- 2 a) Un point à 4 cm de (d) est situé sur une parallèle à (d). Il y a une infinité de solutions situées sur les deux droites tracées en pointillés rouges.

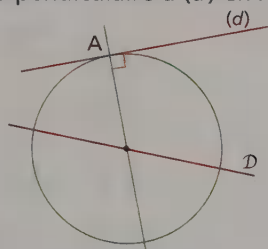
- b) Les points situés à 5 cm de A sont sur un cercle de centre A et de rayon 5 cm. Les points situés à 5 cm de (d) sont situés sur deux parallèles $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ à (d) tracées en vert. Pour chaque point A, il y a deux solutions situées à l'intersection du cercle et de la droite $(\mathcal{D}_1)$.



- 3 a) RASH est un rectangle donc les côtés [RH] et [AS] ont même mesure et le point H est le pied de la perpendiculaire à (HS) passant par R. La distance de R à la droite (SH) est égale à RH soit 3,6 cm.

- b) Le triangle RHS est rectangle en H.
Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
La médiane [HL] a une longueur égale à la moitié de RS.
La distance de L à H est donc égale à 3 cm.

- 4 La tangente en A à un cercle est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon en ce point A. Le cercle est tangent à (d) donc le rayon passant par A est perpendiculaire à (d) en A. Le centre du cercle est à l'intersection de (D) et de la perpendiculaire à (d) en A.



5 Théorème de Pythagore

- 1 On sait que le triangle MRE est rectangle en E. D'après le théorème de Pythagore :

$$MR^2 = ME^2 + ER^2$$

$MR^2 = 64 + 36$ d'où $MR^2 = 100$ et $MR = 10$ mm. La valeur est exacte.

On sait que le triangle MRU est rectangle en R. D'après le théorème de Pythagore :

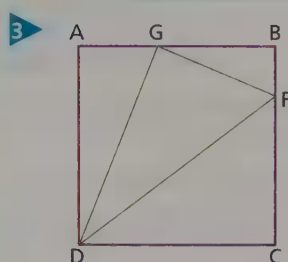
$$MU^2 = MR^2 + RU^2$$

$MU^2 = 100 + 49$ d'où $MU^2 = 149$ et $MU \approx 12,2$ mm. La valeur est arrondie au dixième.

- 2 a) [BC] est le côté le plus long.
 $BC^2 = 732 = 5\,329$ et $AB^2 + AC^2 = 48^2 + 55^2 = 5\,329$.
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

- b) [AB] est le côté le plus long.
 $AB^2 = 12^2 = 144$ et $AC^2 + BC^2 = 10^2 + 7^2 = 149$.
Comme $144 \neq 149$ alors $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ et le triangle ABC n'est pas rectangle.

- c) [AC] est le côté le plus long.
 $AC^2 = 7,5^2 = 56,25$ et $AB^2 + BC^2 = 4,5^2 + 6^2 = 56,25$.
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.



- On sait que ABCD est un carré donc le triangle DFC est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore :

$$DF^2 = DC^2 + CF^2$$

d'où $DF^2 = 225$.

- Le triangle ADG est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$DG^2 = AD^2 + AG^2$$

d'où $AG^2 = 25$ et $AG = 5$.

- Le point G appartient au segment [AB] donc $BG + AG = AB$ et $BG = 7$.
Le triangle BGF est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$$GF^2 = BG^2 + BF^2$$

d'où $GF^2 = 58$.

- $DF^2 = 225$ et $DG^2 + GF^2 = 227$.
Comme $225 \neq 227$ alors $DF^2 \neq DG^2 + GF^2$.
Le triangle DGF n'est pas rectangle.

- 4 a) Construction.

- b) Le triangle AED est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$ED^2 = AE^2 + AD^2$$

$ED^2 = 5,5^2 + 9,5^2$ d'où $ED^2 = 30,25 + 90,25 = 120,50$.

Comme $ED \approx 10,98$ alors $ED \neq DB$. Le triangle EBD n'est pas isocèle en D.

Le triangle ABD est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 + AD^2 = DB^2$$

On trouve $AB^2 = 30,75$ et $AB \approx 5,55$.

Comme les points E, A et B sont alignés

$EB = EA + AB$.

$EB \approx 11,05$. Le triangle EBD n'est pas isocèle en E.

- c) $\lambda_{EBD} = \frac{1}{2} \times EB \times AD$. D'où $\lambda_{EBD} \approx 52,5 \text{ cm}^2$.

- 5 On sait que le triangle ADC est rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

d'où $AC^2 = 900$.

$AM^2 + AC^2 = 31,5^2 + 900 = 1892,25$ et

$MC^2 = 43,5^2 = 1892,25$.

Comme $AM^2 + AC^2 = MC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AMC est rectangle en A et les droites (AM) et (AC) sont perpendiculaires.

6 Pyramide et cône

1 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ donc $V = 13,5 \pi \text{ cm}^3$ et $V \approx 42,4 \text{ cm}^3$.

- 2 a) • [SH] est la hauteur de la pyramide donc elle est perpendiculaire à la base et le triangle SHE est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore :

$$SH^2 + HE^2 = SE^2$$

• Calcul de HE^2

EFGL est un carré donc H est le milieu des diagonales,

EH = HF et le triangle EHF est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore :

$$EH^2 + HF^2 = EF^2$$

d'où $HE^2 = 12,5$.

• Calcul de SH

$SH^2 = SE^2 - HE^2$ d'où $SH^2 = 87,5$ et $SH \approx 9,35 \text{ cm}$.

b) $V = \frac{1}{3} EF^2 \times SH$ d'où $77,91 \text{ cm}^3$, soit 78 cm^3 .

- 3 a) Le pavé est un pavé droit donc ses faces sont des rectangles.

ABE est un triangle rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$AE^2 = AB^2 + BE^2$$

d'où $AE^2 = 5^2$ et $AE \approx 7,21 \text{ cm}$.

ABC est un triangle rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

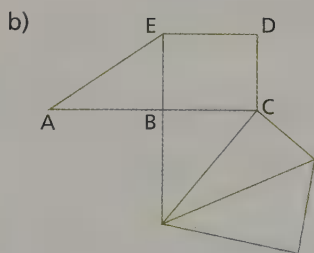
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

d'où $AC^2 = 61$ et $AE \approx 7,81 \text{ cm}$.

Deux faces d'un pavé droit sont perpendiculaires donc le triangle ACD est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore :

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$

d'où $AD^2 = 77$ et $AE \approx 8,77 \text{ cm}$.

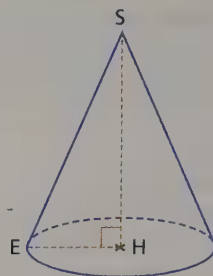


- 4 La longueur de l'arc est égale au périmètre de la base : $2\pi r$.

Il y a proportionnalité entre la longueur de l'arc et l'angle.

60°	360°
$2\pi r$	$2\pi \times 10$

d'où $r = \frac{10}{3}$ et une valeur approchée est 3,3 cm.



En appelant S le sommet, H le centre de la base et [SE] une génératrice, on obtient un triangle SEH rectangle en H.

En appliquant le théorème de Pythagore on a :

$$SH^2 = \frac{800}{3}$$

Une valeur approchée de SH est 9,4 cm.

7 Cosinus d'un angle aigu

1 $\frac{BF}{IB} = \cos \widehat{FBI}$; $\cos \widehat{EDI} = \frac{DE}{DI}$

$\cos \widehat{CBD} = \frac{BC}{DB}$; $\cos \widehat{FEB} = \frac{EF}{EB}$

2 $\cos 42^\circ \approx 0,743$; $\cos 67^\circ \approx 0,391$; $\cos 9^\circ \approx 0,988$

- 3 Les triangles sont rectangles, on peut utiliser la définition du cosinus.

a) $\cos \widehat{EMR} = \frac{ME}{MR} = \frac{1}{3}$ d'où $\widehat{EMR} \approx 71^\circ$.

b) $\cos \widehat{OUH} = \frac{UO}{UH}$ d'où $\cos 32^\circ = \frac{8}{UH}$
et $UH \approx 9,4 \text{ cm}$.

c) $\cos \widehat{ALI} = \frac{LI}{AL}$ d'où $\cos 28^\circ = \frac{LI}{6}$
et $LI \approx 5,3 \text{ cm}$.

4 $\widehat{A} \approx 58,6^\circ$ ou $\widehat{A} \approx 59^\circ$; $\widehat{B} \approx 79,0^\circ$ ou $\widehat{B} \approx 79^\circ$

- 5 Le triangle BGP est rectangle en P, d'après la définition du cosinus :

$\cos \widehat{BGP} = \frac{GP}{GB}$; $\cos 70^\circ = \frac{150}{GB}$; $GB \approx 438,6$.

La distance cherchée est 338,6 mètres.

8 Nombres relatifs et calculs

1 A = -24 ; B = -56 ; C = -5
D = 6 ; E = 72 ; F = 0

2 Signe - ; signe + ; signe - ; signe -

3 A = 148 ; B = -41 ; C = 170 ; D = 2

4 T = 0,1 ; U = -2,64 ;

5 $3; -8; 80; -8$

6	4	0	3,5	x
	13	-35	0	$(2x-1)^2 - 36$

7 $1 \times (-12); (-1) \times 12; 2 \times (-6)$
 $(-2) \times 6; 3 \times (-4); (-3) \times 4$

9 Nombres fractionnaires et calculs

1 $\frac{-45}{36} = \frac{-5}{4}; \frac{13}{-52} = -\frac{1}{4}; \frac{-121}{-55} = \frac{11}{5}$
 $\frac{12 \times (-5) \times 7}{(-49) \times 4 \times 15} = \frac{1}{7}$

2	Nombres	34	$-\frac{42}{72}$	$-\frac{27}{4}$	$\frac{1}{15}$
	Opposés	-34	$\frac{42}{72} = \frac{7}{12}$	$\frac{27}{4}$	$-\frac{1}{15}$
	Inverses	$\frac{1}{34}$	$-\frac{72}{42} = -\frac{12}{7}$	$\frac{4}{-27} = -\frac{4}{27}$	15

3 $A = -\frac{7}{20}; B = -\frac{2}{21}; C = -\frac{4}{13}; D = -6$
 $E = \frac{21}{10}; F = \frac{55}{13}; G = -8; H = -\frac{36}{5}$

4 $A = \frac{15}{36} + \frac{32}{36} = \frac{47}{36}; B = -\frac{13}{8} + \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$
 $C = -\frac{25}{7} \times \frac{7}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$
 $D = \frac{5}{4} - \frac{5}{9} + \frac{11}{36} = 1; E = \frac{25}{4} \times \frac{5}{30} - \frac{25}{24} = 0$

5 L'opposé de $\left(\frac{-11}{9}\right)$ est $\frac{11}{9} \times \frac{1}{9}$, soit $\frac{11}{81}$.
 Un arrondi au dixième est 0,2.

L'inverse de $\frac{13}{4}$ est $\frac{4}{13}$.

La troncature au centième est 3,30.

6 a) La balle rebondit, au deuxième rebond, aux $\frac{4}{9}$ de la hauteur initiale et, au troisième rebond, elle rebondit aux $\frac{8}{27}$ de la hauteur initiale.

b) Elle s'élève aux $\frac{16}{31}$ au quatrième rebond soit à 32 cm.

7 $\frac{3}{20} = 15\%$ de la fortune est consacrée à la recherche contre le sida.

10 Puissances

1 $10^4 = 10\,000; 2^5 = 32; (-4)^3 = -64; 2002^1 = 2002$
 $1^{732} = 1; 10^{-5} = 0,00001; 5^{-4} = 0,0016; 25 = 5^2$
 $-512 = (-8)^3; (-7)^{-3} = -\frac{1}{343}$

2 $A = -38; B = 744; C = -1,79$

3 $A = 37 \times 10^5; B = 452 \times 10^{-5}; C = -89\,353 \times 10^{-2}$

4 $D = 6 \times 10^{-1}; E = 2 \times 10^{-3}; F = 2,4 \times 10^{-1}$

5 $G = 0,5$ ou $G = \frac{1}{2}$, la valeur de G est exacte.

6 Un arrondi de la vitesse est $3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.
 Les deux valeurs sont $210\,000 \text{ km.s}^{-1}$ et $299\,792,458 \text{ km.s}^{-1}$, la différence est de $89\,792,458 \text{ km.s}^{-1}$.

7 Une feuille comporte deux pages (un recto et un verso).

a) En pliant une fois la feuille, on obtient 2^2 pages; en pliant deux fois, on obtient le double, soit 2^3 pages; en pliant trois fois, on obtient 2^4 pages; en pliant quatre fois, on obtient 2^5 pages.

b) Un livret contient 2^5 pages, soit 32 pages.
 Pour avoir 288 pages, dans le livre il faut 9 livrets.

c) 288 pages correspondent à 144 feuilles.
 L'épaisseur d'une feuille est 0,0625 mm soit $6,25 \times 10^{-2} \text{ mm}$ soit $\frac{1}{16} \text{ mm}$.

11 Calcul littéral-Équation

1 $x = 1$ alors $A = 3; x = -2$ alors $A = 30; x = \frac{1}{2}$
 alors $A = \frac{5}{4}$

2 a) Oui - Non b) $\lambda = 62,4 \text{ cm}^2$
 c) $b = 3,2 \text{ cm}$ et $B = 9,6 \text{ cm}$

1 $A = 2x + 2x^2; p = 4 + 6x$

4 $-7t; 21x; 60ab; 7h-2$
 $16y^2; -44x^4; 6z^2 + 9z$

5 $12x + 32; -5x + 10; 18x - 12x^2$
 $22 - 11x; 20x^2 + 13x + 2; 12x^2 - 5x - 28$

6 $x = -1; x = \frac{13}{10}; x = 6,5; 7x + 7 = 4 - x + 2$ soit $x = -\frac{1}{5}$.

7 Soit x le nombre d'années dans lequel l'âge de la mère sera le double de l'âge de la fille :
 $2(12 + x) = 45 + x$, soit $x = 21$.

12 Proportionnalité

- 1 Le graphique n° 3 correspond à une situation de proportionnalité.

Distances en km	96	100	162
Temps de parcours	1 h 20 min	1 h 23 min	2 h 15 min

- 3 a) $23,6 \text{ m.s}^{-1}$ b) 1 min 56 s
- 4 a) 28 % de remise b) 33,84 euros
- 5 Si x représente le nombre de bactéries, il y a dix jours, l'augmentation de la population est $\frac{6}{100}x$.
Actuellement la population contient $x + \frac{6}{100}x$ bactéries, soit 124 709 bactéries. Cela revient à résoudre l'équation :

$$x + \frac{6}{100}x = 124\,709$$

Il y avait 117 650 bactéries il y a dix jours.

- 6 L'automobiliste met 2 h 51 min 26 s sur le premier parcours puis 1 h 9 min 14 s sur le deuxième, il va arriver à 16 h et 40 s, donc en retard de 40 secondes.

13 Ordre et encadrement

- 1 $27,56 > -32,45$;
comme $\frac{13}{7} = \frac{65}{35}$ alors $\frac{13}{7} > \frac{64}{35}$;
comme $-\frac{65}{15} = -\frac{39}{9}$ et $-\frac{85}{45} = -\frac{17}{9}$
alors $-\frac{65}{15} < -\frac{85}{45}$
- 2 ① $a > b$ ② $a < b$ ③ $a = b$
④ $a < b$ ⑤ $a > b$ ⑥ $a < b$
- 3 a) $8,9 \times 10^4 < 8,92 \times 10^4 < 3,7 \times 10^5 < 3,76 \times 10^5$
b) $-7 \times 10^{-4} < -6,65 \times 10^{-4} < 1,9 \times 10^{-3} < 2,3 \times 10^{-3}$
- 4 $3a < 9$; $a + 7 < 10$; $24 > 4a + 5$; $2a - 7 < -1$
- 5 $8y + 6 > 8x + 6$; $5x < 5y$ et $5x - 13 < 5y - 9$
donc $5x - 13 < 5y - 9$.
- 6 ABC est un triangle rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$
d'où $AC^2 = 65,53$.
Une troncature à l'unité de AC est 8 et l'arrondi au centième est 8,10.

- 7 a) $5,72 < L < 5,74$ et $3,46 < l < 3,48$
b) $18,36 < p < 18,44$, un arrondi de p au dixième est 18,4.
c) Une troncature à l'unité de l'aire est 19 m^2 .

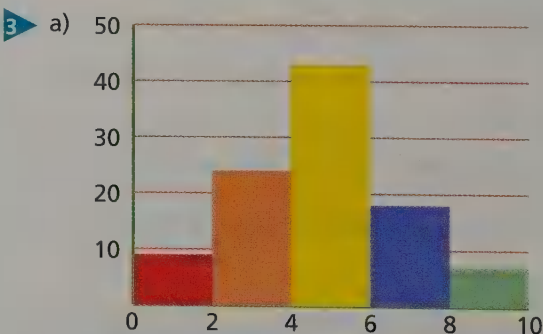
14 Statistiques

	Nombre d'habitants en milliers	Fréquence en pourcentages
Allier	345	26,4
Cantal	151	11,5
Haute-Loire	209	16,0
Puy-de Dôme	604	46,1
Région Auvergne	1309	100

2 a)

Âges	12	13	14	15	16	Total
Effectifs	3	4	8	6	5	26
Effectifs cumulés croissants	3	7	15	21	26	
Fréquences en %	11,5	15,4	30,8	23,1	19,2	100

- b) Il y a 15 élèves qui ont moins de 15 ans.
- c) L'âge moyen correspond à $\frac{370}{26}$, soit 14,2 ans.



- b) La durée moyenne de l'échantillon correspond à $\frac{478}{100}$ ans, soit 4 ans 9 mois (et 11 jours).

Vocabulaire

Les numéros en couleurs indiquent la page où le mot est rencontré pour la première fois dans le manuel.

- **Amplitude de la classe** (262) : différence entre les deux valeurs extrêmes de la classe.
- **Droites concourantes** (55) : droites qui se coupent en un même point.
- **Conjecture** (25) : supposition que l'on cherchera à vérifier.
- **Consécutifs** (216) : veut dire qui se suivent.
- **Cosinus** (133) : voir « L'essentiel en deux pages », chapitre 7, page 134.
- **Côté adjacent** : voir « L'essentiel en deux pages », chapitre 7, page 134.
- **Cumuler** (260) : en français, « cumuler » signifie réunir plusieurs choses.
- **Distinct** (75) : qui n'est pas confondu.
- **Écritures littérales** (208) : écritures contenant une ou plusieurs lettres.
- **Hypoténuse** (79) : dans un triangle rectangle, on appelle hypoténuse le côté opposé à l'angle droit.
- **Inverses** (169) : voir « L'essentiel en deux pages », chapitre 9, page 171.
- **Médiane** (51) : la médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.
- **Moyenne pondérée** : voir « L'essentiel en deux pages », chapitre 14, page 265.
- **Nombre non nul** (198) : nombre qui n'est pas égal à zéro.
- **Notation scientifique** (196) : un nombre écrit en notation scientifique est de la forme $a \times 10^n$, avec n entier relatif et $1 \leq a < 10$.
- **Prisme** (20) : un prisme droit est un solide ayant deux faces, de forme polygonale, superposables et parallèles. Les autres faces sont rectangulaires.
- **Prouver** (91) : c'est donner des explications pour reconnaître que quelque chose est vrai.
- **Respectif** (64) : qui tient compte de l'ordre de l'écriture ; le premier objet de la première liste est associé au premier objet de la seconde liste.
- **Secteur circulaire** (117) : portion de disque délimitée par un angle dont le sommet est le centre du disque.
- **Translation** : voir « L'essentiel en deux pages », chapitre 1, page 11.
- **Translaté** (21) : le translaté d'un point (ou d'une figure) est l'image de ce point (ou de cette figure) par une translation.
- **Trapèze isocèle** (75) : quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles et les deux autres côtés ont même longueur.
- **Trigonométrie** (135) : vient de mots grecs voulant dire « mesures dans un triangle ».

index des noms propres

A

Ahmès	180
d'Alembert	243
Alexandrie	165
Al Kashi	257
Al Khwarizmi,	204, 223
Al Ma'mûm	147
Archimède	201, 253, 257
Aristoxène	181
Asie Mineure	49
Avogadro	197

B

Babyloniens	109, 14, 209
Bagdad	147
Bombelli	204
Bonaparte,	125
Brunelleschi Filippo	129

C

Carnot	165
Cauchy	65
Celsius	232, 243
Chine	165
Chuquet	165, 204
Clairaut	31
Colbert	275

D

Descartes	42, 165, 204
Diophante	165, 204
Dürer	69

E

Égypte	125, 165
Égyptiens	109, 180, 204
Euler	68, 69, 165
Euclide	45, 129

F

Fahrenheit	232, 243
Fermat	109

G

Grecs	165
-------	-----

H

Haënkell	165
Hégire	147
Hindous	109
Hippocrate	107
Horus	180

I

Ibn Al Banna	223
Inde	147, 198

J

Jiu Zhang Suan Shu	104
--------------------	-----

K

Kelvin	243
Khéops	49, 125, 143

L

La Villette	128
Léonard de Pise	59
Léonard de Vinci	69, 107
Liu Hui	104
Lorentz	211

M

Manesson Mallet	87
Marrakech	223
Milet	49

P

Pei	125
Penrose	27
Perse	109
Pythagore	92, 109

R

Rhind	180
-------	-----

S

Sierpinsky	179
------------	-----

T

Thalès	49, 87
Tycho Brahé	275

V

Varignon	45
Viète	204
Vinci (Léonard de)	69, 107
Von Koch	187

W

Wantzel	65
Wiles	109

Index

Les mots en gras renvoient aux rappels de 6^{ème} et de 5^{ème} situés en fin d'ouvrage.

A					
Abcisse d'un point					
Addition de fractions	170				
Addition de nombres relatifs	152				
Adjacents (angles)					
Adjacents (côté)	134				
Aire latérale					
Aire	277				
Alternes-internes (angles)					
Amplitude (statistiques)	262, 285				
Arête	116				
Arrondi	249				
Axe de symétrie					
B					
Base d'un solide	116, 117				
Bissectrice	54, 75				
C					
CALCUL LITTÉRAL	203				
Carré	277				
Centre de gravité	55				
Centre de symétrie					
CERCLE ET TRIANGLE RECTANGLE	71				
Cercle circonscrit	55, 74				
Cercle inscrit	55				
Cercles tangents : cercles ayant un seul point en commun	80				
Circulaire (secteur)	117, 285				
Classe (statistiques)	265				
Coefficient de proportionnalité	228				
Comparer des fractions	248				
Comparer des nombres relatifs	248				
Complémentaires (angles)					
Concourante	55, 285				
CÔNE	111				
Conjecture	285				
Consécutif	285				
Convention d'écriture	118				
Coordonnées d'un point					
Correspondants (angles)					
COSINUS D'UN ANGLE AIGU	131				
Côté adjacent	134				
Croissant (ordre)					
Cube					
Cumuler	260, 285				
Cylindre					
D					
Décagone : polygone à 10 côtés	124				
Décroissant (ordre)					
Développer	209				
Diagrammes	264, 265				
Directe (propriété,	76				
Disque					
Distinct	75, 285				
Distance d'un point à une droite	75				
Distributivité	209				
Division de fractions	171				
Division de nombres relatifs	152				
Droites des milieux	34				
DROITES REMARQUABLES	51				
E					
Écriture littérale	208, 285				
Effectifs et effectifs cumulés	264				
Égalité de fractions (ou de quotients)	170				
En fonction de	208				
Encadrement	249				
Équation	209				
Équidistant : qui est à égale distance	12, 75				
Exposant	188				
F					
Face d'un solide	118				
Fonction de (en)	208				
Fractal	109, 187				
Fréquence et fréquences cumulées	264				
G					
Génératrice d'un cône	117				
Graphique	228				
H					
Hauteur d'un solide	116, 117				
Hauteur dans un triangle	54, 55				
Hexagone : polygone à 6 côtés	14, 24				
Hypoténuse	89, 285				
I					
Inégalité triangulaire					
Inverse	171, 285				
Issue de	55				
L					
Lettres (écrire avec des)	208				
Losange	10				
Lunule	107				
M					
Médiane	55, 75, 285				
Médiatrice	54				
Multiplication de fractions	171				
Multiplication de nombres relatifs	152				
Mouvement uniforme	229				
Moyenne	265				
Moyenne pondérée	265				
N					
NOMBRES FRACTIONNAIRES	167				
NOMBRES RELATIFS	149				
Notation scientifique	188, 285				
O					
Opposé (d'un nombre relatif)	150				
Opposés par le sommet (angles)					
Ordonnée d'un point					
ORDRE ET ENCADREMENT	245				
Ordre de grandeur	194				
Orthocentre	55				
P					
Parallélépipède					
Parallèles et angles					
PARALLELOGRAMME	7, 10				
Patron d'un solide	116, 117				
Pas de démonstration	36				
Périmètre	277				
Polygone : figure plane à plusieurs côtés	25				
Polygone régulier : polygone dont tous les côtés ont même longueur	14, 24				
Pourcentage	229, 231				
Priorités des opérations	153, 172, 189				
Prisme	20, 285				
Produit	152, 171				
PROPORTIONNALITE	29, 225				
Prouver	91, 285				
PUISSANCES	183				
PYTHAGORE (théorème de)	89				
PYRAMIDE	111				
R					
Racine (touche)	92				
Réciproque (propriété),	76, 93				
Rectangle	10, 277				
Réduire	208				
RELATIFS (NOMBRES)	149				
Relation de Pythagore	92				
Relative	55				
Repérages					
Respectif	64, 285				
Résoudre une équation	209, 210				
S					
Sécantes (droites) : droites qui se coupent en un point	79				
Secteur circulaire	117, 285				
Série statistique	264				
Signe	152				
Simplifier une écriture littérale	208				
Simplifier une fraction (voir « égalité de quotient »)	170				
Somme des angles d'un triangle					
Sommet d'un solide	116, 117				
Soustraction de fractions	170				
Soustraction de nombres relatifs	152				
STATISTIQUES	259				
Supplémentaires (angles)					
Symétries					
T					
Tangente à un cercle	75				
Termes : nombres qui sont additionnés ou soustraits					
Tester une égalité	218				
Tétraèdre	116				
TRANSLATION	11				
Translaté	21, 285				
Trapèze	75, 285				
Triangle équilatéral	55				
TRIANGLE ET PROPORTIONNALITÉ	29				
Triangle isocèle	55				
Triangle rectangle	55, 74, 93, 134				
Trigonométrie	135, 285				
Troncature	249				
U					
Unités d'aire					
Unités de vitesse	229				
Unités de volume					
V					
Valeur approchée	92, 249				
Valeur exacte	92				
Vitesse	229, 230				
Volume	116, 117, 277				

équipe de création

Couverture et conception maquette :

Mattika

Édition :

Thomas Blasselle

Composition / Réalisation des schémas :

Jean-Paul Plan

Iconographie :

Maryvonne Bouraoui

Illustrations :

Juliette Planque

(p. 7, 27, 29, 44, 51, 59, 71, 87, 89, 100, 109, 125, 131, 142, 162, 165, 179, 201, 213, 242, 245, 256, 274, 275)

Hubert Blatz

(p. 16, 17, 19, 23, 38, 47, 53, 78, 83, 100, 103, 111, 121, 134, 135, 138, 149, 153, 158, 161, 175, 183, 197, 198, 203, 207, 210, 218, 222, 227, 230, 233, 234, 238, 248, 251, 258, 259, 267, 271)

Infographie :

Franck Foucaud

(p. 15, 18, 41, 43, 46, 48, 49, 86, 99, 109, 141, 142, 167, 201, 242)

Cartographie :

Carl Voyer

Gravure :

TDL

Imprimeur :

IFC

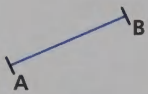
Les auteurs et toute l'équipe remercient
vivement Ariane Champeau, élève de 4^{ème},
pour sa relecture attentive.

Crédits photographiques

p. 27 : © Pour la Science ; p. 49 : © Jerrican / Chaumeil ; p. 68 : © Giraudon / Bridgeman ;
p. 69 : D. R. ; p. 87 : D.R. ; p.103 : © Artephot / Oronoz ; p. 122 : D.R. ; p. 128 : © CSI / Michel Viard ;
p. 129 : © CSI / Michel Viard (haut) ; © SCALA (bas) ; p. 147 : © TheArtarchive ;
p. 165 : © Jean-Loup Charmet / Bridgeman ; p. 180 : © Rapho ; p. 181 : © AKG photo ;
p. 194 : © Ciel et Espace ; p. 204 : D.R. ; p. 223 : © TheArtarchive ; p. 225 : © Michelin ;
p. 243 : D.R. ; p. 253 : © The Bridgeman Art Library ; p. 254 : DR ; p. 257 : © David Parker /
Science Photo Library (haut) ; © Artephot / A. Held (bas) ; p. 275 : © AKG photo.

Notations et représentations

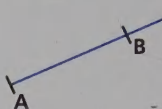
Segment [AB]



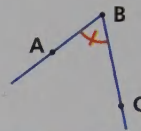
Droite (AB)



Demi-droite [AB)



Angle $\widehat{ABC}$



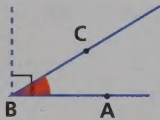
Symboles

- // droites parallèles
- $\perp$ droites perpendiculaires
- $\in$ appartient
- $\notin$ n'appartient pas

Angles

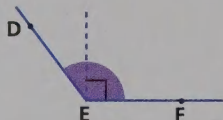
(Des propriétés concernant les angles figurent à la page 277.)

Angle aigu



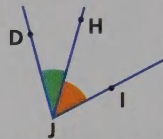
La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ est inférieure à 90° .

Angle obtus



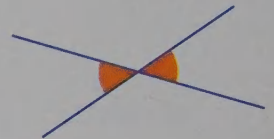
La mesure de l'angle $\widehat{DEF}$ est comprise entre 90° et 180° .

Angles adjacents

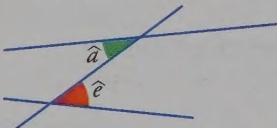


Le sommet et un côté sont communs aux deux angles.

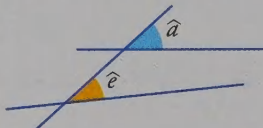
Angles opposés par le sommet



Angles alternes-internes



Angles correspondants



Angles complémentaires

Des angles complémentaires sont des angles dont la somme est égale à 90° .

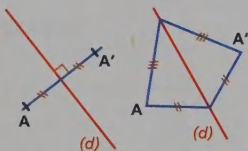
Angles supplémentaires

Des angles supplémentaires sont des angles dont la somme est égale à 180° .

Symétries

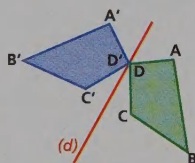
(Des propriétés concernant les symétries figurent à la page 277.)

Symétrie par rapport à une droite



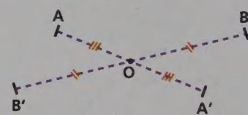
Le point A' est le symétrique du point A par rapport à la droite (d) : la droite (d) est la médiatrice du segment [AA'].

Axe de symétrie



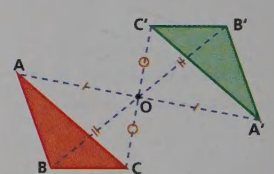
Les deux parties de la figure se superposent par pliage le long de l'axe (les points D et D' sont confondus).

Symétrie par rapport à un point



Le point A' est le symétrique du point A par rapport au point O : le point O est le milieu du segment [AA'].

Centre de symétrie

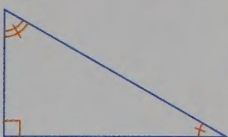


Le centre de la symétrie centrale est le milieu de tous les segments joignant deux points symétriques.

Polygones

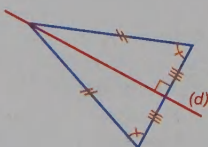
(Des propriétés concernant ces polygones figurent à la page 277.)

Triangle rectangle



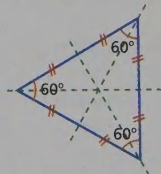
Un angle est droit et les deux angles aigus sont complémentaires.

Triangle isocèle



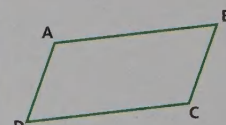
La hauteur issue du sommet principal est l'axe de symétrie du triangle.

Triangle équilatéral



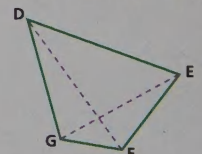
Le triangle équilatéral a trois côtés égaux, trois axes de symétrie et trois angles de 60° .

Parallélogramme



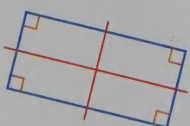
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme : ses côtés opposés sont parallèles. Voir page 10.

Quadrilatère non croisé



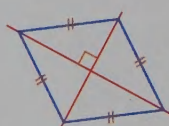
- Diagonales : [DF] et [EG].
- Deux côtés opposés : [DE] et [GF].
- Deux côtés consécutifs : [DE] et [EF].

Rectangle



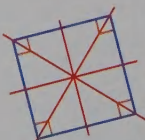
Le rectangle possède deux axes et un centre de symétrie. Voir page 10.

Losange



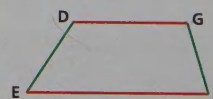
Le losange possède deux axes et un centre de symétrie. Voir page 10.

Carré



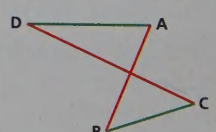
Le carré possède quatre axes et un centre de symétrie. Voir page 10.

Trapeze



Le trapèze est un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles. Si les deux autres côtés sont égaux, le trapèze est isocèle.

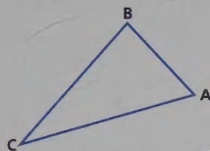
Quadrilatère croisé



ABCD est un quadrilatère croisé.

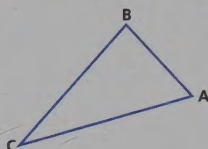
Dans un triangle

Inégalité triangulaire



$$\begin{aligned} AB &< AC + CB \\ AC &< AB + BC \\ BC &< BA + AC \end{aligned}$$

Somme des angles d'un triangle

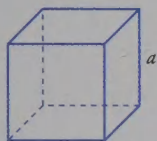


La somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

$$\widehat{A} + \widehat{E} + \widehat{U} = 180^\circ$$

Solides de 6^{ème} et 5^{ème}

Cube

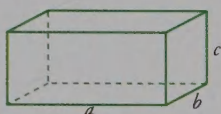


• 6 faces carrées

Volume
Arête x Arête x Arête

$$V = a \times a \times a = a^3$$

Parallélépipède ou pavé droit

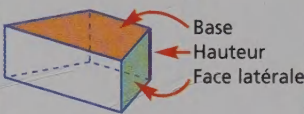


• 6 faces rectangulaires
• Faces opposées superposables

Volume
Longueur x Largeur x Hauteur

$$V = a \times b \times c$$

Prisme droit

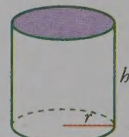


• Faces latérales rectangulaires
• 2 faces superposables

Volume
Aire de la base x Hauteur

$$V = \lambda \times h$$

Cylindre droit



• 2 disques de bases superposables

Volume
Aire de la base x Hauteur

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

Patron d'un solide

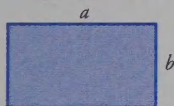
Un patron d'un solide est un dessin qui, après découpage et pliage, permet de réaliser le solide.

Surface latérale

La surface latérale est la surface formée par l'ensemble des faces latérales d'un solide.

Formules d'aires

Rectangle



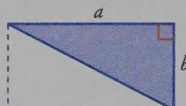
Aire : Longueur x Largeur
 $\lambda = a \times b$

Carré



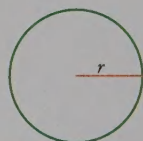
Aire : Côté x Côté
 $\lambda = a \times a$

Triangle rectangle



Aire : $\lambda = \frac{a \times b}{2}$

Cercle



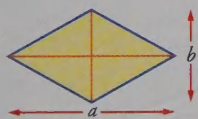
Longueur d'un cercle

$$\begin{aligned} \pi \times \text{Diamètre} \\ L = \pi \times 2r \end{aligned}$$

Aire d'un disque

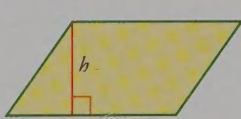
$$\begin{aligned} \pi \times \text{Rayon} \times \text{Rayon} \\ A = \pi \times r \times r = \pi \times r^2 \end{aligned}$$

Losange



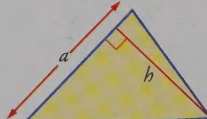
Aire :
Grande diagonale x Petite diagonale : 2
 $\lambda = \frac{a \times b}{2}$

Parallélogramme



Aire : Base x Hauteur
 $\lambda = a \times h$

Triangle



Aire : (Base x Hauteur) : 2
 $\lambda = \frac{a \times h}{2}$

Unités d'aires

1 m² est l'aire d'un carré de 1 m de côté.
1 m² = 100 dm² = 0,01 dam²
1 hectare (ha) = 1 hm² ; 1 are (a) = 100 m²

km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
	ha	a	ca			

Unités de volumes

1 m³ est le volume d'un cube de 1 m de côté.
1 m³ = 1000 dm³ ; 1 L = 1 dm³
1 m³ = 1 000 L ; 1 L = 100 cL ; 1 cm³ = 0,1 cL

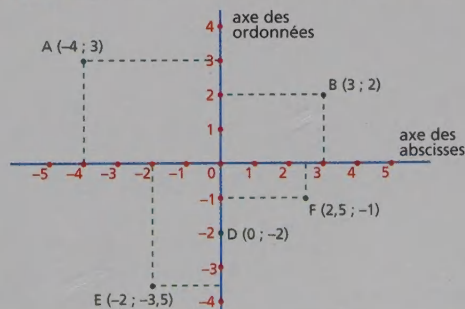
m ³	dm ³			cm ³			mm ³
	hL	daL	L	dL	cL	mL	
	1	0	0	0			
			1	0	0		

Repérage dans un plan

Pour construire un repère du plan, on trace deux droites graduées perpendiculaires et de même origine.

Un point est repéré par ses deux **coordonnées** :

- l'**abscisse** est lue sur l'axe horizontale et écrite en premier ;
- l'**ordonnée** est lue sur l'axe verticale, et écrite en second.



CAHIER DU JOUR, CAHIER DU SOIR

SPÉCIMEN
COMMERCIALISATION
INTERDITE



Choisis par des millions d'élèves
pour consolider les acquis et s'entraîner toute l'année.



KO-552-327

ISBN 2 210 21007 0



9 782210 210073



Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des éditeurs.

Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération.

En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite.

www.magnard.fr