

ABC
du **BREVET**

Réussite
L'essentiel
pour le Brevet

Maths

3^e

8 40 22
STRAND PRICE

\$ 3.00

- ✓ **L'essentiel** du cours
- ✓ **Méthodes** claires et efficaces
- ✓ **Exercices** et **sujets** variés
- ✓ **Corrigés** détaillés

Compléments numériques sur
www.abcbrevet.com

Nathan

ABC du **BREVET** **Réussite**

Mathématiques 3^e

Carole Feugère

Gilles Mora

Le papier de cet ouvrage est composé de fibres naturelles, renouvelables, recyclables et fabriquées à partir de bois provenant de forêts gérées de manière responsable et durable.

 **Nathan**

Réalisation éditoriale : Roselyne Messenger

Édition : Gwenn Alvarez

Conception graphique intérieur : Élise Launay

Couverture : Marc & Yvette

Compositeur : Scientechnique

© Nathan 2010 – 25, avenue Pierre de Coubertin, 75 013 Paris

ISBN : 978-2-09-188 164-5

Mode d'emploi

Un ouvrage synthétique pour réviser et progresser avec méthode!

L'essentiel

Méthode

Exercices

Corrigés

- Le cours est structuré en **doubles-pages**, pour faciliter les révisions. Il comporte les éléments indispensables pour assimiler les nouvelles connaissances.
- Chaque double-page comporte des **exercices résolus**, commentés en marge, qui constituent une préparation à la résolution d'exercices plus difficiles.

L'essentiel

Méthode

Exercices

Corrigés

- Cette double page présente de manière simple la résolution de questions classiques qu'il est indispensable de maîtriser. Ces **fiches-méthode** s'appuient sur des exercices et présentent la **démarche à suivre** de manière très détaillée.

L'essentiel

Méthode

Exercices

Corrigés

- **Nombreux et variés**, les exercices proposés permettent de couvrir l'ensemble des thèmes abordés dans le chapitre.
- Ils sont classés **en trois rubriques**, permettant de travailler progressivement : QCM, Exercices d'entraînement, Vers le brevet.

L'essentiel

Méthode

Exercices

Corrigés

- Les corrigés, **entièrement rédigés**, sont très détaillés et présentent toutes les étapes du raisonnement et des calculs.
- Ils sont accompagnés de petites « bulles » présentant des **conseils**, des **remarques**, des **astuces pour gagner des points**...

Annexes

- Un **vrai sujet de brevet**, avec son corrigé très détaillé et des conseils de méthode, pour s'entraîner dans les conditions de l'examen.



Des compléments sur Internet :

exercices, podcasts, tests, sujets supplémentaires...

Sommaire

Mode d'emploi	3
CHAPITRE 1 Outils de calcul pour bien démarrer	10
1. Premières notions	10
2. Calculer avec les fractions	12
3. Principales règles pour le calcul littéral	14
Méthode <i>Savoir calculer avec des fractions</i>	16
Méthode <i>Savoir factoriser des expressions avec un facteur commun</i>	17
Exercices	18
Corrigés	21
CHAPITRE 2 Les puissances	28
1. Définitions	28
2. Opérations sur les puissances et applications	30
Méthode <i>Exprimer un nombre sous forme d'une seule puissance</i>	32
Méthode <i>Écrire en notation scientifique une expression avec des puissances et des fractions</i>	33
Exercices	34
Corrigés	37
CHAPITRE 3 Les nombres	42
1. Généralités	42
2. PGCD	44
Méthode <i>Calculer un PGCD avec la méthode des divisions successives</i>	46
Méthode <i>Résoudre un problème utilisant un PGCD</i>	47
Exercices	48
Corrigés	51
CHAPITRE 4 Les racines carrées	58
1. Premières notions	58
2. Racines carrées et équation $x^2 = a$	60
Méthode <i>Réduire des expressions contenant des racines carrées</i>	62
Méthode <i>Développer avec des racines carrées</i>	63
Exercices	64
Corrigés	66
CHAPITRE 5 Identités remarquables	70
1. Les trois identités remarquables	70
Méthode <i>Développer une expression avec une identité remarquable</i>	72
Méthode <i>Factoriser une expression avec une identité remarquable</i>	73

Exercices	74
Corrigés	78
CHAPITRE 6 Équations et problèmes	86
1. Définition et propriétés	86
2. Les différentes équations	88
Méthode Résoudre une équation du premier degré	90
Méthode Résoudre un problème avec une équation	91
Exercices	92
Corrigés	95
CHAPITRE 7 Inéquations et problèmes	102
1. Définition et problèmes	102
Méthode Résoudre une inéquation du premier degré	104
Méthode Résoudre un problème avec une inéquation	105
Exercices	106
Corrigés	108
CHAPITRE 8 Systèmes d'équations et problèmes	112
1. Systèmes de deux équations à deux inconnues	112
Méthode Résoudre un système par la méthode des combinaisons	114
Méthode Résoudre un problème à l'aide d'un système d'équations	115
Exercices	116
Corrigés	120
CHAPITRE 9 Notion de fonction	130
1. Généralités	130
2. Différentes manières de définir une fonction	132
Méthode Lire graphiquement l'image et les antécédents d'un nombre	134
Méthode Calculer une image à partir de l'expression d'une fonction	135
Méthode Déterminer un antécédent à partir de l'expression d'une fonction	135
Exercices	136
Corrigés	140
CHAPITRE 10 Fonctions linéaires. Proportionnalité. Pourcentages	146
1. Fonctions linéaires	146
2. Proportionnalité. Pourcentages	148
Méthode Déterminer une fonction linéaire par le calcul	150
Méthode Déterminer une fonction linéaire à partir de sa représentation graphique	151
Exercices	152
Corrigés	156

CHAPITRE 11 Fonctions affines	162
1. Généralités	162
2. Représentation graphique d'une fonction affine	164
Méthode Déterminer par le calcul à partir de deux images une fonction affine	166
Méthode Construire la représentation graphique d'une fonction affine	167
Exercices	168
Corrigés	173
CHAPITRE 12 Statistiques	182
1. Définitions	182
Méthode Calculer la médiane d'une série statistique	184
Méthode Calculer les premier et troisième quartiles d'une série	185
Exercices	186
Corrigés	190
CHAPITRE 13 Notion de probabilité	196
1. Généralités	196
Méthode Calculer des probabilités à l'aide d'un arbre	198
Méthode Représenter une expérience aléatoire à deux épreuves	199
Exercices	200
Corrigés	203
CHAPITRE 14 Grandeurs composées	208
1. Définitions	208
Exercices	210
Corrigés	212
CHAPITRE 15 Pour bien commencer en géométrie	216
1. Triangles. Parallélogrammes	216
2. Théorèmes et propriétés principaux	218
Méthode Utiliser le théorème de Pythagore	220
Méthode Utiliser la réciproque du théorème de Pythagore	221
Exercices	222
Corrigés	224
CHAPITRE 16 Trigonométrie dans le triangle rectangle	230
1. Définitions et propriétés	230
Méthode Dans un triangle rectangle, calculer la mesure d'un angle connaissant deux longueurs	232

Méthode Dans un triangle rectangle, calculer une longueur connaissant un angle et une longueur	233
Exercices	234
Corrigés	238

CHAPITRE 17 Théorème de Thalès. Agrandissement/Réduction

1. Théorème de Thalès	248
2. Agrandissement/Réduction	250
Méthode Calculer une longueur avec le théorème de Thalès	252
Méthode Étudier le parallélisme de deux droites	253
Exercices	254
Corrigés	259

CHAPITRE 18 Angles inscrits et polygones réguliers

1. Angles inscrits et cercles	270
2. Polygones réguliers	272
Méthode Construire un hexagone régulier connaissant son centre et un sommet	274
Méthode Appliquer le théorème de l'angle inscrit et le théorème de l'angle au centre	275
Exercices	276
Corrigés	280

CHAPITRE 19 Géométrie dans l'espace : sections planes

1. Sections planes	290
2. La sphère	292
Méthode Représenter en vraie grandeur une section plane dans un pavé droit	294
Méthode Calculer le rayon d'un « parallèle »	295
Exercices	296
Corrigés	299

CHAPITRE 20 Aires et volumes

1. Formules	306
Exercices	308
Corrigés	311

Sujet de brevet	315
------------------------------	-----

1 L'épreuve

- **Durée de l'épreuve** : 2 heures.
- **Notation** : elle est notée sur 40 points. Chacune des trois parties est notée sur 12 points, et la rédaction et la présentation sont notées sur 4 points.

2 Structure de l'épreuve

- L'épreuve comporte **3 parties**.
 - **Première partie** : activités numériques (plusieurs exercices indépendants).
 - **Deuxième partie** : activités géométriques (plusieurs exercices indépendants).
 - **Troisième partie** : problème (un seul exercice).

■ **Les deux premières parties** portent sur des applications directes des connaissances et des techniques figurant au programme.

La troisième partie évalue la capacité à mobiliser ses connaissances pour résoudre un problème. Elle est constituée d'un petit nombre de questions enchaînées, de difficulté progressive.

3 Acquisitions évaluées

Les capacités évaluées s'organisent autour des pôles suivants :

- **exécuter et exploiter** un calcul, un graphique ou un tracé géométrique ;
- **interpréter** graphiquement une situation numérique et interpréter numériquement une situation graphique ou géométrique ;
- **mettre en œuvre** des connaissances et des méthodes pour la résolution de problèmes simples.

Quelques conseils

1 De l'organisation...

- **Gérez correctement votre temps.** Idéalement, vous devez passer 40 minutes par partie (gardez un peu de temps pour la relecture).
- **Commencez** par la partie sur laquelle vous êtes le plus à l'aise.
- **Utilisez les feuilles de brouillon.** Il est recommandé de faire tous les calculs au brouillon, de tracer les figures ou les constructions de manière à apprécier la place nécessaire à leur réalisation sur la copie.

2 Pour la rédaction

- **Prenez une feuille différente** pour chacune des trois parties. Cela vous permettra de ne pas mélanger les exercices et apportera de la clarté à votre copie.
- **Faites attention à l'orthographe.** Les fautes d'orthographe perturbent et indisposent le correcteur.
- **Évitez les ratures** qui nuisent à la lisibilité, et évitez les « pâtes » de blanc correcteur.
- **Évitez le « je »** ou le « nous » dans la rédaction.
- **Énoncez clairement les théorèmes utilisés.** Écrivez les mesures données par l'énoncé sur la figure si elle est fournie dans l'énoncé, ou bien faites-en une sur votre brouillon.
- N'oubliez pas d'**énoncer les hypothèses** qui permettent d'appliquer un théorème : pour le théorème de Thalès, il faut citer les droites parallèles...
- **Soulignez ou encadrez le résultat**, et vérifiez qu'il correspond bien à la question posée.

3 Pour le problème

- Le problème n'est en fait qu'**un seul grand exercice**. Essayez de traiter les questions les unes après les autres. Si toutefois vous séchez sur une question, passez à la suite en considérant le résultat comme démontré. Parfois, le résultat d'une question peut apparaître plus loin dans le problème. C'est pour cela qu'il est important de prendre le temps de lire l'intégralité d'un exercice avant de le traiter.

Outils de calcul pour bien démarrer

1 Premières notions

1 Écriture fractionnaire

Un nombre peut avoir différentes écritures : entière, décimale, fractionnaire.

Exemples :

- 0,5 est une écriture décimale.
- $\frac{1}{2}$; $\frac{2,5}{5}$ sont des écritures fractionnaires.

Remarque :

Certaines fractions n'ont pas comme résultat un nombre décimal (nombre fini de chiffres derrière la virgule).

On peut, alors, en écrire une valeur approchée : une valeur approchée de $\frac{2}{3}$ est 0,67. On écrit : $\frac{2}{3} \approx 0,67$.

2 Simplifier des fractions

On ne modifie pas une fraction si l'on multiplie (ou divise) le numérateur **et** le dénominateur par le même nombre (non nul).

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$$

On simplifie par k

Exemple : $\frac{6}{8} = \frac{3 \times \cancel{2}}{4 \times \cancel{2}} = \frac{3}{4}$ (on a simplifié par 2).

Remarques :

• Quand une fraction est simplifiée au maximum, on dit qu'elle est sous forme irréductible. Cela signifie que l'on ne peut plus la réduire.

• L'égalité ci-dessus se lit aussi dans l'autre sens : $\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$. Dans ce cas, elle sert par exemple à écrire des fractions avec un même dénominateur.

3 Comparer des fractions

Lorsque des fractions ont le même dénominateur, la plus petite est celle qui a le plus petit numérateur.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Mettre des fractions sous forme irréductible

ÉNONCÉ

Écrivez les fractions suivantes sous forme irréductible :

$$\bullet A = \frac{210}{54}$$

$$\bullet B = \frac{25 \times 54}{15 \times 27}$$

$$\bullet C = \frac{-49 \times (-18)}{21 \times (-126)}$$

CORRIGÉ

$$\bullet A = \frac{210}{54} = \frac{\cancel{2} \times 105}{\cancel{2} \times 27} = \frac{\cancel{3} \times 35}{\cancel{3} \times 9} = \frac{35}{9}$$

$$\bullet B = \frac{25 \times 54}{15 \times 27} = \frac{5 \times \cancel{3} \times 6 \times \cancel{9}}{3 \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{9}} = \frac{5 \times \cancel{3} \times 2}{3 \times \cancel{3}} = \frac{10}{3}$$

$$\begin{aligned} \bullet C &= \frac{-49 \times (-18)}{21 \times (-126)} = -\frac{\cancel{7} \times \cancel{7} \times 6 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{7} \times 2 \times \cancel{7} \times 9} \\ &= -\frac{\cancel{3} \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Rappels

Pour simplifier, on utilise les critères de divisibilité :

- un nombre est divisible par 2 si il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

Conseil

On s'occupe du signe en premier en utilisant la règle des signes.

2 Comparer des fractions

ÉNONCÉ

Classez ces nombres dans l'ordre croissant : $\bullet \frac{43}{6}$ $\bullet 7$ $\bullet \frac{55}{8}$ $\bullet \frac{83}{12}$

CORRIGÉ

On cherche le dénominateur commun à ces 4 nombres : c'est 24.

$$\bullet \frac{43}{6} = \frac{43 \times 4}{6 \times 4} = \frac{172}{24} \quad \bullet 7 = \frac{7}{1} = \frac{7 \times 24}{1 \times 24} = \frac{168}{24}$$

$$\bullet \frac{55}{8} = \frac{55 \times 3}{8 \times 3} = \frac{165}{24} \quad \bullet \frac{83}{12} = \frac{83 \times 2}{12 \times 2} = \frac{166}{24}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{165}{24} < \frac{166}{24} < \frac{168}{24} < \frac{172}{24}.$$

$$\text{On en déduit : } \frac{55}{8} < \frac{83}{12} < 7 < \frac{43}{6}.$$

Conseil

Le dénominateur commun est un nombre qui se trouve dans les tables de 6, 1, 8 et 12. On choisit le plus petit !

2 Calculer avec des fractions

1 Somme. Différence de fractions

Pour additionner ou soustraire des fractions, il faut qu'elles soient au même dénominateur.

Additionner

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$$

Soustraire

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

Exemples :

$$\bullet \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\bullet \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4-3}{7} = \frac{1}{7}$$

2 Multiplication. Division de fractions

• Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs et les dénominateurs entre eux.

Multiplier

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Multiplier

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$$

Exemples :

$$\bullet \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{4 \times 2} = \frac{15}{8}$$

$$\bullet \frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4}$$

• Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Diviser

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exemple :

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{3 \times 3}{4 \times 1} = \frac{9}{4}$$

EXERCICE RÉSOLU

► Additionner et soustraire avec des fractions

ÉNONCÉ

Effectuez les calculs suivants :

$$\bullet A = \frac{5}{12} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$$

$$\bullet B = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{2}{7}$$

$$\bullet C = \frac{-4}{7} \div \frac{3}{-5}$$

Écrivez les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} \bullet A &= \frac{5}{12} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{12} + \frac{5 \times 2}{6 \times 2} - \frac{1 \times 6}{2 \times 6} \\ &= \frac{5}{12} + \frac{10}{12} - \frac{6}{12} \\ &= \frac{9}{12} = \frac{3 \times \cancel{3}}{4 \times \cancel{3}} = \frac{3}{4} \text{ (fraction irréductible)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet B &= \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 7} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{10}{21} = \frac{1 \times 7}{3 \times 7} + \frac{10}{21} \\ &= \frac{7}{21} + \frac{10}{21} = \frac{17}{21} \text{ (fraction irréductible)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet C &= \frac{-4}{7} \div \frac{3}{-5} \\ &= \frac{-4}{7} \times \left(-\frac{5}{3} \right) \\ &= \frac{-4 \times (-5)}{7 \times 3} \\ &= \frac{20}{21} \text{ (fraction irréductible)} \end{aligned}$$

Méthode

Pour trouver le dénominateur commun, on cherche le plus petit multiple commun à 2, 6 et 12 : il s'agit de 12.

Rappel

La multiplication étant prioritaire sur l'addition, on commence par calculer le produit.

Rappel

On utilise la règle des signes : le quotient (ou le produit) de deux nombres négatifs est un nombre positif.

3 Principales règles pour le calcul littéral

1 Suppression de parenthèses dans une somme

- Parenthèses précédées d'un signe +

$$a + (b - c + d) = a + b - c + d$$

On conserve les signes.

- Parenthèses précédées d'un signe -

$$a - (b - c + d) = a - b + c - d$$

On change les signes.

Exemples : • $x + (3 - y) = x + 3 - y$ • $5 - (x - y) = 5 - x + y$

2 Développer (en utilisant la distributivité)

- Développer, c'est transformer un produit en une somme (ou une différence).

On développe

- $k(a + b) = ka + kb$

produit

somme

On développe

- $k(a - b) = ka - kb$

produit

différence

Exemples :

- $6(x + 3) = 6 \times x + 6 \times 3 = 6x + 18$

- $3(2x - 5) = 3 \times 2x - 3 \times 5 = 6x - 15$

On développe

- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

produit

somme

Exemple : $(x + 2)(3x + 5) = x \times 3x + x \times 5 + 2 \times 3x + 2 \times 5$

$$= 3x^2 + 5x + 6x + 10$$

$$= 3x^2 + 11x + 10$$

3 Factoriser

Factoriser, c'est transformer une somme (ou une différence) en un produit.

On factorise

$$ka + kb = k(a + b)$$

somme

produit

On factorise

$$ka - kb = k(a - b)$$

différence

produit

Exemples :

- $5x + 5y = 5 \times x + 5 \times y = 5(x + y)$

- $3x - 6 = 3 \times x - 3 \times 2 = 3(x - 2)$

EXERCICE RÉSOLU

▶ Développer et factoriser des expressions

ÉNONCÉ

Développez les produits et factorisez les sommes :

$$\bullet A = (2x + 6)(5x - 3)$$

$$\bullet B = (x + 3)(1 - 2x)$$

$$\bullet C = 9x - 18$$

$$\bullet D = 5x^2 + 3x$$

CORRIGÉ

• A est un produit de deux facteurs, $(2x + 6)$ et $(5x - 3)$.
C'est donc une forme factorisée que l'on va développer :

$$\begin{aligned} A &= (2x + 6)(5x - 3) \\ &= 2x \times 5x - 2x \times 3 + 6 \times 5x - 6 \times 3 \\ &= 10x^2 - 6x + 30x - 18 \\ &= 10x^2 + 24x - 18 \end{aligned}$$

• B est encore un produit de deux facteurs.
On le développe :

$$\begin{aligned} B &= (x + 3)(1 - 2x) \\ &= x \times 1 - x \times 2x + 3 \times 1 - 3 \times 2x \\ &= x - 2x^2 + 3 - 6x \\ &= -2x^2 - 5x + 3 \end{aligned}$$

• C est la différence de deux termes, $9x$ et 18 .
Il s'agit donc de la factoriser :

$$\begin{aligned} C &= 9x - 18 \\ &= \underline{9} \times x - \underline{9} \times 2 \\ &= 9(x - 2) \end{aligned}$$

• D est la somme de deux termes, $5x^2$ et $3x$.
On la factorise :

$$\begin{aligned} D &= 5x^2 + 3x = 5x \times \underline{x} + 3 \times \underline{x} \\ &= x(5x + 3) \end{aligned}$$

Méthode

On développe A en s'occupant en premier du signe de chaque terme : « + par + donne + », « - par - donne + » et « - par + donne - ».

Rappel

On n'oublie pas que :
 $x \times x = x^2$.

Remarque

En notant que
 18 s'écrit 9×2 ,
on peut utiliser la formule :
 $ka + kb = k(a + b)$.

Conseil

Dans les termes $5x^2$ et $3x$,
il y a un facteur commun, x .

➔ Savoir calculer avec des fractions

ÉNONCÉ

Calculez sous la forme d'une fraction irréductible le nombre :

$$A = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{7} + 2 \right) + \frac{5}{14}.$$

MÉTHODE

1. On effectue les calculs contenus dans les parenthèses s'il y en a.
2. On effectue les multiplications et les divisions en premier car elles sont prioritaires sur les autres opérations. On applique les règles de calculs sur les fractions (addition, soustraction, multiplication et division).
3. Les calculs doivent être faits les uns après les autres, de gauche à droite.
4. On s'assure que le résultat final est bien écrit sous forme irréductible.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
$A = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{7} + 2 \right) + \frac{5}{14}$	1. On commence par effectuer le calcul entre parenthèses.
$A = \frac{1}{2} - \left(\frac{1 \times 6}{3 \times 7} + 2 \right) + \frac{5}{14}$ $A = \frac{1}{2} - \left(\frac{1 \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 7} + 2 \right) + \frac{5}{14}$ $A = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{7} + 2 \right) + \frac{5}{14}$ $A = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{7} + \frac{14}{7} \right) + \frac{5}{14}$	2. Comme la multiplication est prioritaire sur l'addition, on calcule le produit en premier. On simplifie au plus tôt le produit. Pour additionner $\frac{2}{7}$ et 2, on écrit : $2 = \frac{2}{1} = \frac{2 \times 7}{1 \times 7} = \frac{14}{7}.$
$A = \frac{1}{2} - \frac{16}{7} + \frac{5}{14} = \frac{7}{14} - \frac{32}{14} + \frac{5}{14}$	3. On effectue les soustractions et additions de gauche à droite en écrivant les termes avec le même dénominateur.
$A = -\frac{20}{14}$ $A = -\frac{10 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 7} = -\frac{10}{7}.$	4. Le résultat final peut être simplifié. Le résultat est bien une fraction irréductible.

→ Savoir factoriser des expressions avec un facteur commun

ÉNONCÉ

Factorisez l'expression suivante : $A = 4x + x(x + 5)$.

MÉTHODE

1. On reconnaît une somme (ou une différence). On encadre les termes de part et d'autre du signe + (ou -).
2. Dans chaque cadre, on repère un facteur commun que l'on fait apparaître en le soulignant.
3. On factorise par ce terme en le mettant « devant », puis on ouvre un crochet (ou une parenthèse).
4. On se pose ensuite les questions suivantes :
 - Par quoi doit-on multiplier ce facteur commun pour obtenir le premier terme de la somme (ou de la différence), c'est-à-dire le premier cadre ?
 - On répète cette question autant de fois qu'il y a de termes (cadres) dans la somme (ou dans la différence).
5. On s'assure à la fin que l'on obtient bien un produit.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
$A = \boxed{4x} + \boxed{x(x+5)}$	1. On reconnaît une somme de deux termes (encadrés).
$A = \boxed{4\underline{x}} + \boxed{\underline{x}(x+5)}$	2. On souligne le facteur commun, x .
$A = x \underbrace{[4 + (x+5)]}$	3. On factorise par x . 4. Dans le premier cadre, x est multiplié par 4 et dans le deuxième cadre, x est multiplié par $(x+5)$.
$A = x(4 + x + 5)$ soit $A = x(9 + x)$.	5. On réduit l'écriture dans la parenthèse. On obtient bien une forme factorisée avec deux facteurs, x et $9+x$.



QCM



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. $2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times \frac{4}{7}$ est égal à : **a)** ☐ $\frac{55}{42}$ **b)** ☐ $\frac{2}{3}$ **c)** ☐ $\frac{32}{21}$
2. $\frac{2}{5}$ est égal à : **a)** ☐ $\left(\frac{11}{5} - 1\right) \times \frac{1}{3}$ **b)** ☐ $\frac{36}{90}$ **c)** ☐ $\frac{-2}{3} \div \left(\frac{1}{3} - 2\right)$
3. $2 - (-x + 3)$ est égal à : **a)** ☐ $-x - 1$ **b)** ☐ $x - 1$ **c)** ☐ $x + 5$
4. $(-4x + 1)(2x - 3)$ est égal à :
a) ☐ $-8x^2 - 3$ **b)** ☐ $-8x^2 + 14x - 3$ **c)** ☐ $8x^2 + 14x - 3$
5. Pour $x = -2$, l'expression proposée vaut 0 :
a) ☐ $16 - 4x^2$ **b)** ☐ $x^2 + 4$ **c)** ☐ $(2x + 4)(x - 1)$

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. $(x + 2)(x + 3) + 3$ est une forme factorisée.	☐ V ☐ F
2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} < 0$.	☐ V ☐ F
3. $\frac{1 + \frac{1}{3}}{3}$ est un nombre entier.	☐ V ☐ F
4. $5 - (2x + 1) = -2x + 6$.	☐ V ☐ F
5. $\frac{3}{5} - \frac{3}{10} = \frac{17}{20} - 1$.	☐ V ☐ F
6. Quand $x = -3$, $x^2 - 4$ est un nombre négatif.	☐ V ☐ F
7. $\frac{4}{9}$ et $\frac{52}{117}$ sont deux fractions égales.	☐ V ☐ F

→ Exercices d'entraînement



3 Fractions en fête

Calculez sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier :

$$\begin{aligned} \bullet A &= \frac{1+3 \times 5}{15} & \bullet B &= \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \times 3 & \bullet C &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) & \bullet D &= \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} \\ \bullet E &= \frac{1}{7} + \frac{3}{5} \div 2 & \bullet F &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) \div \left(1 - \frac{1}{3}\right) & \bullet G &= 5 \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

4 Histoire de parenthèses

Calculez :

$$\begin{aligned} \bullet A &= -2 \times 5 - 4 \times 3 + 12 \div 2 & \bullet B &= -2 \times (5 - 4) \times (3 + 12) \div 2 \\ \bullet C &= -2 \times 5 - (4 \times 3 + 12 \div 2) & \bullet D &= -2 \times ((5 - 4) \times 3 + 12 \div 2) \\ \bullet E &= (-2 \times 5 - 4) \times (3 + 12) \div 2 \end{aligned}$$

5 Très classique

1. Développez les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet A &= (-5)(x - 7) & \bullet B &= (3 - x)(x + 7) \\ \bullet C &= (5 - 2x)(3x - 1) & \bullet D &= (2 + x)(3x + 5) \end{aligned}$$

2. Factorisez :

$$\begin{aligned} \bullet E &= 5x + 25 & \bullet F &= -2x + 3x^2 \\ \bullet G &= x(5x - 1) + 3x & \bullet H &= (x + 4)(2x + 1) + 3(2x + 1) \end{aligned}$$

6 Égal ou pas ?

$$1. \text{ Soit } A = 1 + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{6}{5}}{3} \text{ et } B = -2 \times \left(\frac{3}{7} - \frac{36}{35}\right).$$

Montrez que $A = B$.

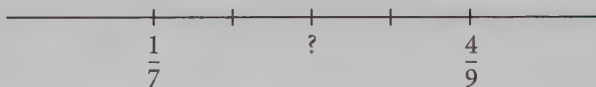
$$2. \text{ Soit } C = (2x + 6)(x - 4) \text{ et } D = x(2x - 2) - 24.$$

Est-ce que $C = D$ pour tous les réels x ?

7 À mi-chemin

Sur une droite graduée, on a placé les nombres $\frac{1}{7}$ et $\frac{4}{9}$.

Quel nombre se trouve à égale distance de ces deux valeurs ?



→ Vers le Brevet



8 Les fractions en question

Les trois questions suivantes sont indépendantes et doivent être traitées sans la calculatrice.

1. Kamel, Thierry et Florent ont mangé respectivement $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{3}{21}$ d'une tablette de chocolat.

a) Qui en a mangé le plus ? Justifiez.

b) Ensemble, en ont-ils mangé plus ou moins de la moitié ? Justifiez.

2. On considère $A = (x + 3)(2x + 1) - x(2x + 7)$. Un élève affirme que, quel que soit le nombre x , la valeur de A est toujours égale à 3. Montrez que cet élève a raison.

3. Quel calcul effectue-t-on si on tape sur la calculatrice (écrivez le calcul en utilisant des fractions, puis le résultat du calcul) ?

3 $\boxed{-}$ 5 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{+}$ (1 $\boxed{+}$ 5) $\boxed{\div}$ 8 ?

9 Fractions et programmation

Voici un programme de calcul :

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Choisir un nombre. • Lui ajouter $\frac{2}{3}$. • Multiplier par (-3) le résultat. | <ul style="list-style-type: none"> • Élever au carré le nombre obtenu. • Écrire l'opposé du résultat. |
|--|---|

1. On utilise ce programme avec $\frac{1}{4}$. Parmi ces 3 calculs, quel est celui effectué par ce programme ?

a) $\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \times (-3)^2$ b) $-\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times (-3)\right)^2$ c) $-\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \times (-3)\right)^2$

2. Effectuez les trois calculs ci-dessus.

→ QCM

$$\textbf{1. } 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times \frac{4}{7} = 2 - \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) \times \frac{4}{7} = 2 - \frac{5 \times \cancel{2} \times 2}{\cancel{2} \times 3 \times 7} = 2 - \frac{10}{21} = \frac{42}{21} - \frac{10}{21} = \frac{32}{21}.$$

Réponse : **c)** $\frac{32}{21}$.

$$\begin{aligned} \textbf{2. a)} \left(\frac{11}{5} - 1\right) \times \frac{1}{3} &= \left(\frac{11}{5} - \frac{5}{5}\right) \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{6}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times \cancel{3} \times 1}{5 \times \cancel{3}} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$\textbf{b)} \frac{36}{90} = \frac{18 \times 2}{18 \times 5} = \frac{2}{5}.$$

$$\textbf{c)} -\frac{2}{3} \div \left(\frac{1}{3} - 2\right) = \frac{-2}{3} \div \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{3}\right) = \frac{-2}{3} \div \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{-2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{-5} = \frac{2}{5}.$$

Réponses : Les trois réponses **a)**, **b)** et **c)** sont correctes.

$$\textbf{3. } 2 - (-x + 3) = 2 + x - 3 = x + 2 - 3 = x - 1.$$

Réponse : **b)** $x - 1$.

$$\begin{aligned} \textbf{4. } (-4x + 1)(2x - 3) &= -4x \times 2x + 4x \times 3 + 1 \times 2x - 1 \times 3 \\ &= -8x^2 + 12x + 2x - 3 \\ &= -8x^2 + 14x - 3. \end{aligned}$$

Réponse : **b)** $-8x^2 + 14x - 3$.

5. Pour $x = -2$,

$$\begin{aligned} \textbf{a)} } 16 - 4x^2 &= 16 - 4 \times (-2)^2 \\ &= 16 - 4 \times 4 = 16 - 16 = 0. \end{aligned}$$

$$\textbf{b)} } x^2 + 4 = (-2)^2 + 4 = 4 + 4 = 8 \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \textbf{c)} } (2x + 4)(x - 1) &= (2 \times (-2) + 4)(-2 - 1) \\ &= (-4 + 4)(-2 - 1) \\ &= 0 \times (-3) = 0. \end{aligned}$$

Réponses : **a)** $16 - 4x^2$ et **c)** $(2x + 4)(x - 1)$.

Conseil

Effectuez les trois calculs et regardez si le résultat

vaut $\frac{2}{5}$.

Gagnez des points !

N'oubliez pas de mettre des parenthèses autour de (-2) .

2 1. Faux. L'expression $\boxed{(x+2)(x+3)} + \boxed{3}$ n'est pas une forme factorisée. Ce n'est pas un produit : c'est une somme ! L'expression est constituée de deux termes : $(x+2)(x+3)$ et 3.

2. Faux. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6}$ est un nombre positif $\left(\frac{1}{6} > 0\right)$.

3. Faux. $\frac{1 + \frac{1}{3}}{3} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$, qui n'est pas un nombre entier.

4. Faux. $5 - (2x + 1) = 5 - 2x - 1 = -2x + 4$.

5. Faux. $-\frac{3}{5} - \frac{3}{10} = -\frac{6}{10} - \frac{3}{10} = -\frac{9}{10}$ et $\frac{17}{20} - 1 = \frac{17}{20} - \frac{20}{20} = -\frac{3}{20}$.

6. Faux. Quand $x = -3$, on obtient $(-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$ qui est un nombre positif.

7. Vrai. $\frac{4}{9} = \frac{4 \times 13}{9 \times 13} = \frac{52}{117}$.

→ Exercices d'entraînement

3 • $A = \frac{1 + 3 \times 5}{15}$
 $= \frac{1 + 15}{15} = \frac{16}{15}$ (fraction irréductible).

• $B = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \times 3 = \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = \frac{10}{5} = 2$ (nombre entier).

• $C = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$
 $= \frac{5 \times (-1)}{6 \times 3} = -\frac{5}{18}$ (fraction irréductible).

• $D = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{4}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$ (fraction irréductible).

Rappel

La multiplication est prioritaire !

Piège à éviter

On ne calcule pas en premier $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}$ même si la tentation est grande...

$$\begin{aligned} \bullet E &= \frac{1}{7} + \frac{3}{5} \div 2 = \frac{1}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{7} + \frac{3 \times 1}{5 \times 2} = \frac{1}{7} + \frac{3}{10} = \frac{10}{70} + \frac{21}{70} = \frac{31}{70} \text{ (fraction irréductible).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet F &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) \div \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times \cancel{2} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{2}} = 2 \text{ (nombre entier).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet G &= 5 \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) = 5 \div \left(\frac{9}{12} - \frac{2}{12}\right) \\ &= 5 \div \frac{7}{12} = 5 \times \frac{12}{7} = \frac{60}{7} \text{ (fraction irréductible).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \bullet A &= \underbrace{-2 \times 5}_{-10} - \underbrace{4 \times 3}_{12} + \underbrace{12 \div 2}_6 \\ &= -10 - 12 + 6 = -16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet B &= -2 \times \underbrace{(5-4)}_1 \times \underbrace{(3+12)}_{15} \div 2 \\ &= -2 \times 1 \times 15 \div 2 = -2 \times 15 \div 2 \\ &= -30 \div 2 = -15. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet C &= \underbrace{-2 \times 5}_{-10} - (\underbrace{4 \times 3}_{12} + \underbrace{12 \div 2}_6) \\ &= -10 - (12 + 6) = -10 - 18 = -28. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet D &= -2 \times ((5-4) \times 3 + 12 \div 2) \\ &= -2 \times (\underbrace{1 \times 3}_3 + 6) \\ &= -2 \times (3 + 6) = -2 \times 9 = -18. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet E &= \underbrace{(-2 \times 5 - 4)}_{-14} \times (3 + 12) \div 2 \\ &= (-10 - 4) \times (3 + 12) \div 2 \\ &= -14 \times (15) \div 2 = -210 \div 2 = -105. \end{aligned}$$

Remarque

Les calculs prioritaires sont indiqués par des accolades.

$$5 \bullet A = (-5)(x-7)$$

$$= -5 \times x + 5 \times 7$$

$$= -5x + 35.$$

$$\bullet B = (3-x)(x+7)$$

$$= 3 \times x + 3 \times 7 - x \times x - x \times 7$$

$$= 3x + 21 - x^2 - 7x$$

$$= -x^2 - 4x + 21.$$

$$\bullet C = (5-2x)(3x-1)$$

$$= 5 \times 3x - 5 \times 1 - 2x \times 3x + 2x \times 1$$

$$= 15x - 5 - 6x^2 + 2x = -6x^2 + 17x - 5.$$

$$\bullet D = (2+x)(3x+5) = 2 \times 3x + 2 \times 5 + x \times 3x + x \times 5$$

$$= 6x + 10 + 3x^2 + 5x = 3x^2 + 11x + 10.$$

$$2. \bullet E = \boxed{5x} + \boxed{25} = \underline{5} \times x + \underline{5} \times 5 = 5(x+5).$$

$$\bullet F = \boxed{-2x} + \boxed{3x^2} = -2 \times \underline{x} + 3x \times \underline{x} = x(-2+3x).$$

$$\bullet G = \boxed{x(5x-1)} + \boxed{3x} = x[(5x-1)+3]$$

$$= x(5x-1+3) = x(5x+2).$$

$$\bullet H = \boxed{(x+4)(2x+1)} + \boxed{3(2x+1)}$$

$$= (2x+1)[(x+4)+3] = (2x+1)(x+7).$$

Piège à éviter

Faites attention aux signes (utilisez la règle des signes des produits).

Conseil

Vérifiez qu'à la fin, vous obtenez bien une somme.

Conseil

Dans chaque terme de la somme (ils sont encadrés), faites apparaître le facteur commun : 5.

Gagnez des points !

Un facteur commun peut être une somme. Ici, le facteur commun est $(2x+1)$.

6 1. Il s'agit de démontrer que les nombres A et B sont égaux.

Pour cela, on va écrire A et B sous la forme de fractions irréductibles.

$$\bullet A = 1 + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{6}{5}}{3} = 1 + \frac{\frac{1 \times 3 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 5}}{3} = 1 + \frac{\frac{3}{5}}{3} = 1 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}$$

$$= 1 + \frac{\cancel{3} \times 1}{5 \times \cancel{3}} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}.$$

$$\bullet B = -2 \times \left(\frac{3}{7} - \frac{36}{35} \right) = -2 \times \left(\frac{15}{35} - \frac{36}{35} \right) = -2 \times \left(\frac{-21}{35} \right) = \frac{2 \times \cancel{7} \times 3}{\cancel{7} \times 5} = \frac{6}{5}.$$

On en déduit que $A = B$.

2. On peut calculer les deux expressions pour une valeur particulière de x .

Par exemple, pour $x = 0$, on obtient :

$$\bullet C = (2 \times 0 + 6)(0 - 4) = 6 \times (-4) = -24.$$

$$\bullet D = 0(2 \times 0 - 2) - 24 = -24.$$

On obtient donc le même résultat pour C et D .

Cependant, c'est insuffisant pour dire que les deux expressions sont égales.

En effet, on ne l'a pas vérifié pour **toutes** les valeurs de x . On a simplement constaté que pour $x = 0$, $C = D$.

Pour montrer que les deux expressions sont égales, on doit comparer leurs formes développées.

$$\begin{aligned}\bullet C &= (2x + 6)(x - 4) = 2x \times x - 2x \times 4 + 6 \times x - 6 \times 4 \\ &= 2x^2 - 8x + 6x - 24 = 2x^2 - 2x - 24.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet D &= x(2x - 2) - 24 = x \times 2x - x \times 2 - 24 \\ &= 2x^2 - 2x - 24.\end{aligned}$$

On obtient les mêmes développements pour C et D .

Ainsi, on peut affirmer que les expressions C et D sont égales pour tous les nombres x .

7 On recherche le nombre qui se situe au milieu de $\frac{1}{7}$ et $\frac{4}{9}$ sur la droite graduée.

Prenons un cas « plus simple » : quel nombre se situe entre 3 et 4 ?

Il s'agit de 3,5.

On obtient ce résultat en faisant $(3 + 4) \div 2$.

On procède de la même façon ici :

le nombre cherché est donc donné par $\left(\frac{1}{7} + \frac{4}{9}\right) \div 2$.

$$\left(\frac{1}{7} + \frac{4}{9}\right) \div 2 = \left(\frac{9}{63} + \frac{28}{63}\right) \div 2 = \frac{37}{63} \times \frac{1}{2} = \frac{37}{126}.$$

Le nombre qui se trouve à égale distance de $\frac{1}{7}$ et $\frac{4}{9}$ est $\frac{37}{126}$.

Gagnez
des points !

Si les résultats avaient été différents, on aurait pu dire que les expressions C et D n'étaient pas égales pour tous les x .

Remarque

On calcule en fait la moyenne de ces deux nombres.

→ Vers le Brevet

8 1. a) Pour savoir qui a mangé le plus de la tablette, il faut mettre les fractions au même dénominateur.

Le dénominateur commun étant 42, on obtient :

$$\frac{2}{7} = \frac{12}{42}, \quad \frac{1}{6} = \frac{7}{42} \quad \text{et} \quad \frac{3}{21} = \frac{6}{42}.$$

On a :
$$\frac{6}{42} < \frac{7}{42} < \frac{12}{42}.$$

Soit :
$$\frac{3}{21} < \frac{1}{6} < \frac{2}{7}.$$

C'est donc Kamel qui a mangé le plus de chocolat.

b) Pour savoir s'ils en ont mangé plus ou moins de la moitié, on calcule d'abord quelle fraction de la tablette ils ont mangé ensemble, puis on compare ce résultat avec $\frac{1}{2}$.

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{6} + \frac{3}{21} = \frac{12}{42} + \frac{7}{42} + \frac{6}{42} = \frac{25}{42}.$$

Or $\frac{1}{2} = \frac{21}{42}$ et $\frac{25}{42} > \frac{21}{42}.$

Ils ont donc mangé plus de la moitié de la tablette de chocolat.

2. On peut commencer par regarder si l'élève a raison en remplaçant x par une valeur particulière, par exemple 0.

Pour $x = 0$, on obtient :

$$A = (0 + 3)(2 \times 0 + 1) - 0(2 \times 0 + 7) = 3 \times 1 - 0 \times 7 = 3.$$

Il semblerait que l'élève ait raison, mais cela ne suffit car on n'a pas vérifié pour toutes les valeurs de x que le résultat est 3. En effet, qu'en est-il pour d'autres valeurs de x ?

L'écriture donnée est formée de produits. En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= (x + 3)(2x + 1) - x(2x + 7) \\ &= (x \times 2x + x \times 1 + 3 \times 2x + 3 \times 1) - (x \times 2x + x \times 7) \\ &= (2x^2 + x + 6x + 3) - (2x^2 + 7x) \\ &= \cancel{2x^2} + \cancel{7x} + 3 - \cancel{2x^2} - \cancel{7x} = 3. \end{aligned}$$

Cela signifie que, pour n'importe quelle valeur de x , le résultat est toujours 3. L'élève a donc raison.

Gagnez des points !

En utilisant la calculatrice, on peut prévoir le résultat.

Remarque

Il est possible de comparer ces fractions en utilisant un autre dénominateur commun. L'important étant qu'elles doivent avoir le même dénominateur.

3. Le calcul est le suivant :

$$3 - 5 + \frac{2}{4} + \frac{1+5}{8}.$$

Et on obtient : $3 - 5 + \frac{1}{2} + \frac{6}{8} = -2 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{8}{4} + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} = -0,75.$

9 1. Les étapes du calcul sont :

- On choisit le nombre $\frac{1}{4}$.
- On lui ajoute $\frac{2}{3}$. On obtient : $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$.
- On multiplie par (-3) . On obtient : $\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \times (-3)$.
- On élève au carré. On obtient : $\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \times (-3)\right)^2$.
- On prend l'opposé. On obtient : $-\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \times (-3)\right)^2$.

Le calcul effectué par le programme est donc le c).

$$2. a) \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \times (-3)^2 = \left(\frac{3}{12} + \frac{8}{12}\right) \times 9 = \frac{11}{12} \times 9 = \frac{99}{12} = \frac{33 \times \cancel{3}}{4 \times \cancel{3}} = \frac{33}{4}.$$

$$b) -\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times (-3)\right)^2 = -\left(\frac{1}{4} - 2\right)^2 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{8}{4}\right)^2 = -\left(-\frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{49}{16}.$$

$$c) -\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \times (-3)\right)^2 = -\left(\left(\frac{3}{12} + \frac{8}{12}\right) \times (-3)\right)^2 = -\left(\frac{11}{12} \times (-3)\right)^2 = -\left(-\frac{33}{12}\right)^2 \\ = -\frac{1\,089}{144} = -\frac{\cancel{9} \times 121}{\cancel{9} \times 16} = -\frac{121}{16}.$$

Gagnez
des points !

Le résultat d'un calcul
s'obtient en mettant
des parenthèses
autour de l'opération.

1

Définitions

1 Généralités

Soit a un nombre non nul et n un entier naturel non nul.

- On appelle « a puissance n » le nombre noté a^n tel que :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} \quad \text{où } n \text{ est l'exposant.}$$

- Cas particuliers

Par convention : $a^0 = 1$; $a^1 = a$.

- Puissance négative d'un nombre non nul

$a^{-1} = \frac{1}{a}$: c'est l'inverse du nombre a .

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$: c'est l'inverse du nombre a^n .

2

Signe de la puissance d'un nombre négatif

Soit a un nombre strictement négatif.

- Si n est pair : a^n est positif.
- Si n est impair : a^n est négatif.

Exemple : $(-1,5)^3$ est un nombre négatif élevé à une puissance impaire : il est négatif.

3

Puissance et règles de priorité

- Quand il y a des parenthèses, on effectue d'abord les calculs contenus dans ces parenthèses.
- Sinon, on calcule dans l'ordre les puissances, les multiplications/divisions et enfin les additions/soustractions.

Exemple : $3^4 - (2^3 + 1,5)^2 = 3^4 - (8 + 1,5)^2 = 3^4 - 9,5^2 = 81 - 90,25 = -9,25$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Calculer les puissances d'un nombre

ÉNONCÉ

Calculez, sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible, les nombres proposés.

$$\bullet 2^4 \bullet (-2)^3 \bullet -2^3 \bullet (-2)^0 \bullet 3^{-1} \bullet 0,5^{-1} \bullet 2^{-3} \bullet -(-2)^{-2}$$

CORRIGÉ

$$\bullet 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$\bullet (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$$\bullet -2^3 = -2 \times 2 \times 2 = -8$$

$$\bullet (-2)^0 = 1$$

$$\bullet 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

$$\bullet 0,5^{-1} = \frac{1}{0,5^1} = \frac{1}{0,5} = 2$$

$$\bullet 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

$$\bullet -(-2)^{-2} = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{(-2)(-2)} = -\frac{1}{4}$$

Conseil

Dans le second calcul, c'est (-2) qui est au cube alors que dans le suivant, c'est 2.

Rappel

Tout nombre non nul élevé à la puissance zéro vaut 1.

Conseil

Dès qu'on a une puissance négative, on commence par

écrire $\frac{1}{\dots}$

2 Appliquer les règles de priorité avec les puissances

ÉNONCÉ

Montrez que le nombre $A = \frac{-6 \times 3^2 + 4}{2^3} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ est nul.

CORRIGÉ

$$A = \frac{-6 \times (3 \times 3) + 4}{2 \times 2 \times 2} + \left(\frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{-6 \times 9 + 4}{8} + \frac{25}{4} = \frac{-54 + 4}{8} + \frac{25}{4} = -\frac{50}{8} + \frac{25}{4}$$

$$= \frac{-25 \times \cancel{2}}{4 \times \cancel{2}} + \frac{25}{4} = -\frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 0$$

Méthode

Commencez par calculer les puissances en les écrivant à l'aide de parenthèses.

2 Opérations sur les puissances et applications

1 Opérations sur les puissances

Soit a et b deux nombres non nuls, n et p sont des entiers non nuls.

Les opérations sur les puissances sont :

- Produit : $a^n \times a^p = a^{n+p}$.
- Quotient : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.
- Puissance de puissance : $(a^n)^p = a^{n \times p}$.
- Puissance d'un produit : $a^n \times b^n = (a \times b)^n$.

Remarque :

Il n'existe pas de résultat analogue concernant les sommes et différences de puissances.

2 Puissances de 10

- Toutes les règles énoncées précédemment s'appliquent aux puissances de 10.
- Écriture décimale des puissances de 10

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = \underbrace{10\,000}_{4 \text{ zéros}}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{\underbrace{1\,000}_{3 \text{ zéros}}} = \underbrace{0,001}_{3 \text{ zéros}} = \underbrace{0,001}_{3 \text{ chiffres après la virgule}}$$

3 Écriture scientifique

On appelle **écriture scientifique** d'un nombre la notation de la forme :

$$a \times 10^n$$

$1 \leq a < 10$

entier relatif

Cette notation scientifique, en plus d'être utilisée par la calculatrice, sert à écrire les nombres très grands (contenant beaucoup de zéros) ou les nombres très petits (avec beaucoup de zéros après la virgule).

EXERCICES RÉSOLUS

1 Savoir utiliser les opérations sur les puissances

ÉNONCÉ

Écrivez le résultat sous la forme d'une seule puissance :

$$\bullet 2^3 \times 2^4 \times 2^{-5} \quad \bullet (2^4)^3 \quad \bullet \frac{1}{2^5} \quad \bullet 2^3 \times 5^3 \quad \bullet \frac{2^2}{2^5}$$

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} \bullet 2^3 \times 2^4 \times 2^{-5} &= 2^{3+4+(-5)} = 2^2 & \bullet 2^3 \times 5^3 &= (2 \times 5)^3 = 10^3 \\ \bullet (2^4)^3 &= 2^{4 \times 3} = 2^{12} & \bullet \frac{2^2}{2^5} &= 2^{2-5} = 2^{-3} \\ \bullet \frac{1}{2^5} &= 2^{-5} \end{aligned}$$

2 Déterminer l'écriture décimale d'un nombre

ÉNONCÉ

Donnez l'écriture décimale du nombre suivant :

$$C = 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 6 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} C &= 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 6 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} \\ &= 3 \times 1\,000 + 2 \times 100 + 6 \times 0,1 + 5 \times 0,01 \\ &= 3\,000 + 200 + 0,6 + 0,05 \\ &= 3\,200,65 \end{aligned}$$

Conseil

Écrivez chaque puissance de 10 sous forme décimale.

3 Déterminer l'écriture scientifique d'un nombre

ÉNONCÉ

Donnez l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$\bullet D = 15\,200\,000\,000 \quad \bullet E = 0,000\,006\,25$$

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} \bullet D &= 1,52 \times 10\,000\,000\,000 = 1,52 \times 10^{10} \\ \bullet E &= 6,25 \times 0,000\,001 = 6,25 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

Méthode

Le nombre s'écrit toujours avec un seul chiffre avant la virgule. Puis on compte les zéros pour déterminer la puissance de 10.

→ Exprimer un nombre sous forme d'une seule puissance

ÉNONCÉ

Écrivez A sous la forme d'une puissance de 2 : $A = \frac{8^2 \times (-2)^5}{0,25} \times \left(\frac{-1}{2}\right)^{12}$.

MÉTHODE

1. On commence par déterminer le signe de l'expression.
2. On écrit chaque facteur de l'expression sous la forme d'une puissance de 2.
3. On applique les règles de calculs sur les puissances.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
• $(-2)^5$ est un nombre négatif élevé à une puissance impaire : il est négatif. • $\left(\frac{-1}{2}\right)^{12}$ est un nombre négatif élevé à une puissance paire : il est positif. • Les autres nombres étant positifs, A est donc négatif. D'où $A = -\frac{8^2 \times 2^5}{0,25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$	1. On détermine le signe de A en étudiant le signe de chaque facteur. Puis on applique les règles de signes.
• $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ • $0,25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$ • $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = 2^{-1}$ $A = -\frac{(2^3)^2 \times 2^5}{(2)^{-2}} \times (2^{-1})^{12}$	2. On exprime chaque nombre (différent de 2) comme une puissance de 2 et on le remplace dans l'expression de A.
$A = -\frac{2^3 \times 2 \times 2^5}{2^{-2}} \times 2^{-1 \times 12} = -\frac{2^{6+5}}{2^{-2}} \times 2^{-12}$ $= -\frac{2^{11}}{2^{-2}} \times 2^{-12} = -2^{11 - (-2) + (-12)} = -2^1$	3. On applique les règles de calculs sur les puissances.

→ Écrire en notation scientifique une expression avec des puissances et des fractions

ÉNONCÉ

Écrivez l'expression $A = \frac{9 \times 10^6 \times 25 \times 10^7}{20 \times (10^4)^2 \times 45}$ sous forme scientifique.

MÉTHODE

1. On regroupe d'un côté les puissances de 10, et d'un autre, les entiers.
2. On simplifie les fractions.
3. On effectue les opérations sur les puissances de 10 de façon à n'avoir plus qu'une seule puissance de 10.
4. On transforme la fraction en écriture scientifique (en passant au besoin par son écriture décimale).
5. On rassemble (si besoin) les deux dernières puissances de 10.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
$A = \frac{9 \times 25}{20 \times 45} \times \frac{10^6 \times 10^7}{(10^4)^2}$	1. On groupe les puissances d'un côté et les nombres de l'autre.
$A = \frac{\cancel{9} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times 4 \times \cancel{9} \times \cancel{5}} \times \frac{10^6 \times 10^7}{(10^4)^2}$ $= \frac{1}{4} \times \frac{10^6 \times 10^7}{(10^4)^2}$	2. On simplifie la première fraction au maximum.
$A = \frac{1}{4} \times \frac{10^{6+7}}{10^{4 \times 2}} = \frac{1}{4} \times \frac{10^{13}}{10^8}$ $= \frac{1}{4} \times 10^{13-8} = \frac{1}{4} \times 10^5$	3. On regroupe les puissances de 10 en une seule puissance.
$\frac{1}{4} = 0,25 = 2,5 \times 10^{-1}$	4. On transforme la fraction en écriture scientifique.
$A = 2,5 \times 10^{-1} \times 10^5$ $A = 2,5 \times 10^{-1+5} = 2,5 \times 10^4$	5. On effectue le dernier calcul sur les puissances de 10.



QCM



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. $(-2)^{-2}$ est :

a) ☐ un nombre positif

b) ☐ égal à -4

c) ☐ égal à $\frac{1}{4}$

2. -3^2 est :

a) ☐ un nombre positif

b) ☐ égal à $(-3)^2$

c) ☐ égal à -9

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ est égal à : a) ☐ $\frac{2}{3}$

b) ☐ $\frac{1}{9}$

c) ☐ $\frac{2}{9}$

4. 35×10^{-4} est :

a) ☐ une écriture scientifique

b) ☐ égal à $3,5 \times 10^{-5}$

c) ☐ égal à $3,5 \times 10^{-3}$

5. $\frac{5^3}{5^{-2}}$ est égal à : a) ☐ 5^5

b) ☐ 5

c) ☐ 1

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. $2^3 \times 3^4 = 6^{12}$	☐ V ☐ F
2. $(1+2)^3 = 1^3 + 2^3$	☐ V ☐ F
3. $5^4 \times 7^4 = 35^4$	☐ V ☐ F
4. $(6-5)^4 = 1$	☐ V ☐ F
5. $5^{-1} = -5$	☐ V ☐ F
6. $(3^2)^4 = 3^6$	☐ V ☐ F
7. $(-3)^0 = 1$	☐ V ☐ F
8. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	☐ V ☐ F

→ Exercices d'entraînement



3 Différentes écritures

1. Écrivez sous la forme d'une puissance de 10 les nombres suivants.

- A = un centième • B = un milliard • $C = 0,000\ 000\ 1$ • $D = 100\ 000$

2. Écrivez sous forme décimale les nombres proposés.

- $A = 4,58 \times 10^5$ • $B = 792 \times 10^{-3}$ • $C = 2^{-1} \times 3^4$

3. Donnez l'écriture scientifique des nombres suivants.

- $A = 2\ 010\ 000$ • $B = 0,000\ 051$ • $C = 725 \times 10^3$

4 Encadrement par des puissances

Encadrez par deux puissances de 10 successives les nombres :

- $A = 0,007$ • $B = 3\ 950\ 000$ • $C = 2$

5 Histoires de a et de b

Soit $a = 2^3 \times 5^2$ et $b = 2^5 \times 5^{-3}$.

Calculez sous la forme $2^x \times 5^y$ chacun des nombres proposés :

- $a \times b$ • a^3 • $\frac{1}{b}$ • $\frac{b}{a}$

6 Quand les fractions s'en mêlent...

1. Soit le nombre $A = \frac{12 \times 10^3 \times 9 \times 10^{-7}}{27 \times 10^4}$.

Écrivez A sous la forme $a \times 10^n$.

2. Soit le nombre $B = (-3)^5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times (-5)^3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2$.

Montrez que B est un entier positif.

3. Soit le nombre $C = \frac{3 \times 10^{-6} \times 15 \times 10^2}{(10^3)^2 \times 5 \times 10^{-7}}$.

Déterminez l'écriture scientifique de C .

→ Vers le Brevet



7 Du plus petit au plus grand

Rangez dans l'ordre croissant les nombres suivants :

- 258 000 000 • $9,57 \times 10^6$ • 854×10^5 • $0,015 \times 10^9$

8 Un nombre ... vraiment grand

1. En vous aidant de votre calculatrice, déterminez la puissance de p manquante : $2^{10} \approx 10^p$.
2. Déterminez les nombres b et r tels que $2\,010 = b \times 10 + r$.
On pourra par exemple effectuer la division euclidienne de 2 010 par 10.
3. Déduisez-en une estimation du nombre de chiffres de $2^{2\,012}$.

9 Les puissances en questions

Les trois questions suivantes sont indépendantes et doivent être traitées sans la calculatrice.

1. Soit A le calcul effectué par la calculatrice quand on tape :

$$8 \times 3 \wedge 2 \div 5 - (-2 + 4) \wedge 3$$

Écrivez la ligne de calcul correspondant à A et calculez A .

2. Déterminez l'écriture scientifique du nombre :

$$B = \frac{3,2 \times 10^{-5} \times (10^2)^3}{10^{-3} \times 80}$$

3. Donnez l'écriture décimale du nombre :

$$C = 5 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 9 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3}.$$

→ QCM

1. $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{(-2) \times (-2)} = \frac{1}{4}$

Réponses : **a)** est un nombre positif et **c)** $\frac{1}{4}$.

2. $-3^2 = -3 \times 3 = -9$. Or $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

Réponse : **c)** -9.

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1 \times 1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$

Réponse : **b)** $\frac{1}{9}$.

4. $\bullet$ 35×10^{-4} n'est pas écrit sous forme scientifique car $35 > 1$.

$\bullet$ $35 \times 10^{-4} = 3,5 \times 10^1 \times 10^{-4} = 3,5 \times 10^{1+(-4)} = 3,5 \times 10^{-3}$

Réponse : **c)** $3,5 \times 10^{-3}$.

5. $\frac{5^3}{5^{-2}} = 5^{3-(-2)} = 5^{3+2} = 5^5$

Réponse : **a)** 5^5 .

2 1. Faux. Il n'y a pas de règle de calcul pour simplifier $a^n \times b^m$.

2. Faux. $(1+2)^3 = 3^3 = 27$ et $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$.

3. Vrai. $5^4 \times 7^4 = (5 \times 7)^4 = 35^4$.

4. Vrai. $(6-5)^4 = 1^4 = 1$.

5. Faux. $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$.

6. Faux. $(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$.

7. Vrai. Tout nombre non nul élevé à la puissance 0 vaut 1.

8. Vrai. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$.

Piège à éviter

Dans $(-2)^2$,
le carré s'applique à -2.

Piège à éviter

Dans -3^2 ,
le carré s'applique
uniquement à 3.

Remarque

On peut aussi écrire

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Méthode

On effectue séparément
les deux calculs,
puis on conclut.

→ Exercices d'entraînement

③ 1. ● $A = \text{un centième} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$.

● $B = \text{un milliard} = 1\,000\,000\,000 = 10^9$.

● $C = 0,000\,000\,1 = 10^{-7}$.

● $D = 100\,000 = 10^5$.

L'astuce du prof
On compte les zéros.

2. ● $A = 4,58 \times 10^5 = 4,58 \times 100\,000 = 458\,000$.

● $B = 792 \times 10^{-3} = 792 \times 0,001 = 0,792$.

● $C = 2^{-1} \times 3^4 = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \frac{1}{2} \times 81 = 40,5$.

3. ● $A = 2\,010\,000 = 2,01 \times 1\,000\,000 = 2,01 \times 10^6$.

● $B = 0,000\,051 = 5,1 \times 0,000\,01 = 5,1 \times 10^{-5}$.

● $C = 725 \times 10^3 = (7,25 \times 100) \times 10^3$
 $= 7,25 \times 10^2 \times 10^3 = 7,25 \times 10^{2+3}$
 $= 7,25 \times 10^5$.

Méthode
On commence
par écrire 725
en notation scientifique.

④ 1. ● $0,001 < 0,007 < 0,01$ soit $10^{-3} < A < 10^{-2}$.

● $1\,000\,000 < 3\,950\,00 < 10\,000\,000$

soit $10^6 < B < 10^7$.

● $1 < 2 < 10$ soit $10^0 < C < 10^1$.

Méthode
On cherche deux nombres
 a et b tels que $a < A < b$,
 a et b étant des puissances
de 10.

⑤ ● $a \times b = 2^3 \times 5^2 \times 2^5 \times 5^{-3} = 2^{3+5} \times 5^{2+(-3)} = 2^8 \times 5^{-1}$.

● $a^3 = (2^3 \times 5^2)^3 = (2^3)^3 \times (5^2)^3 = 2^{3 \times 3} \times 5^{2 \times 3} = 2^9 \times 5^6$.

● $\frac{1}{b} = b^{-1} = (2^5 \times 5^{-3})^{-1} = (2^5)^{-1} \times (5^{-3})^{-1}$
 $= 2^{5 \times (-1)} \times 5^{-3 \times (-1)} = 2^{-5} \times 5^3$.

● $\frac{b}{a} = \frac{2^5 \times 5^{-3}}{2^3 \times 5^2} = \frac{2^5}{2^3} \times \frac{5^{-3}}{5^2} = 2^{5-3} \times 5^{-3-2} = 2^2 \times 5^{-5}$.

Méthode
On rassemble les
puissances de 2 d'un côté
et celles de 5 de l'autre.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} 1. A &= \frac{12 \times 10^3 \times 9 \times 10^{-7}}{27 \times 10^4} \\
 &= \frac{3 \times 4 \times 9 \times 10^3 \times 10^{-7}}{3 \times 9 \times 10^4} = \frac{\cancel{3} \times 4 \times \cancel{9}}{\cancel{3} \times \cancel{9}} \times \frac{10^3 \times 10^{-7}}{10^4} \\
 &= 4 \times 10^{3+(-7)-4} \\
 &= 4 \times 10^{-8}.
 \end{aligned}$$

A est bien sous la forme $a \times 10^n$ avec $a = 4$ et $n = -8$.

$$2. B = (-3)^5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times (-5)^3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2.$$

● Pour commencer, on étudie le signe de B.

$(-3)^5$ est la puissance impaire d'un nombre négatif :

$$(-3)^5 = -3^5.$$

De même, $(-5)^3$ est négatif : $(-5)^3 = -5^3$.

$\left(\frac{2}{5}\right)^2$ et $\left(\frac{1}{9}\right)^2$ sont deux nombres positifs.

Au final : « moins par plus par moins par plus donne plus ». B est positif.

$$\begin{aligned}
 \bullet B &= 3^5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times 5^3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 \\
 &= 3^5 \times \frac{2^2}{5^2} \times 5^3 \times \frac{1^2}{9^2} = \frac{3^5 \times 2^2 \times 5^3 \times 1^2}{5^2 \times 9^2} \\
 &= \frac{2^2 \times 3^5 \times 5^3}{5^2 \times (3^2)^2} = 2^2 \times \frac{3^5}{(3^2)^2} \times \frac{5^3}{5^2} = 2^2 \times \frac{3^5}{3^4} \times \frac{5^3}{5^2} \\
 &= 2^2 \times 3^{5-4} \times 5^{3-2} = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60.
 \end{aligned}$$

En conclusion, B est bien un entier positif.

$$\begin{aligned}
 3. C &= \frac{3 \times 10^{-6} \times 15 \times 10^2}{(10^3)^2 \times 5 \times 10^{-7}} \\
 &= \frac{3 \times 15 \times 10^{-6} \times 10^2}{5 \times 10^{3 \times 2} \times 10^{-7}} = \frac{3 \times 3 \times \cancel{5} \times 10^{-6+2}}{\cancel{5} \times 10^{6+(-7)}} \\
 &= \frac{3 \times 3 \times 10^{-4}}{10^{-1}} \\
 &= 9 \times 10^{-4-(-1)} \\
 &= 9 \times 10^{-3} \text{ (écriture scientifique).}
 \end{aligned}$$

Méthode

Écrivez le quotient en séparant les puissances de 10 des autres facteurs.

Conseil

On s'occupe d'abord du signe de B.

Gagnez des points !
 $1^2 = 1$.

Remarque

On s'assure que le résultat est sous la forme demandée.

→ Vers le Brevet

7 On détermine l'écriture scientifique de chacun de ces nombres.

● $258\,000\,000 = 2,58 \times 10^8$.

● $9,57 \times 10^6$ est déjà en écriture scientifique.

● $854 \times 10^5 = 8,54 \times 10^2 \times 10^5 = 8,54 \times 10^7$.

● $0,015 \times 10^9 = 1,5 \times 10^{-2} \times 10^9 = 1,5 \times 10^{-2+9} = 1,5 \times 10^7$.

$9,57 \times 10^6 < 1,5 \times 10^7 < 8,54 \times 10^7 < 2,58 \times 10^8$

Soit $9,57 \times 10^6 < 0,015 \times 10^9 < 854 \times 10^5 < 25\,800\,000$.

Méthode

Les nombres ne sont pas comparables ainsi écrits.

On les transforme pour les écrire tous sous le même format.

8 1. On calcule $2^{10} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1\,024$.

De plus, $1\,024 \approx 1\,000$.

Comme $1\,000 = 10^3$, on en conclut $2^{10} \approx 10^3$.

2. $2\,012 = 10 \times 201 + 2$.

3. On en déduit :

$$2^{2\,012} = 2^{10 \times 201 + 2} = (2^{10})^{201 + 2} = (2^{10})^{201} \times 2^2$$

$$2^{2\,012} \approx (10^3)^{201} \times 2^2$$

$$2^{2\,012} \approx 10^{3 \times 201} \times 4$$

$$2^{2\,012} \approx 4 \times 10^{603}.$$

Le nombre 10^{603} comporte 603 zéros.

Ainsi le nombre $2^{2\,012}$ comporte environ 603 chiffres (le fait de multiplier par 4 ne modifie pas le nombre de chiffres).

Remarque

C'est la division euclidienne de 2 012 par 10.

9 1. $A = 8 \times 3^2 + 5 - (-2 + 4)^3$

$$= 8 \times 3^2 + 5 - 2^3$$

$$= 8 \times 9 + 5 - 8$$

$$= 72 + 5 - 8$$

$$= 69$$

Rappel

Par ordre de priorité, il y a les parenthèses, les puissances, les multiplications et les additions.

$$\begin{aligned} 2. B &= \frac{3,2 \times 10^{-5} \times (10^2)^3}{10^{-3} \times 80} \\ &= \frac{3,2 \times 10^{-5} \times (10^2)^3}{80 \times 10^{-3}} = \frac{32 \times 10^{-1} \times 10^{-5} \times 10^{2 \times 3}}{8 \times 10^1 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{8 \times 4 \times 10^{-1+(-5)+6}}{8 \times 10^{1+(-3)}} = 4 \times \frac{10^0}{10^{-2}} = 4 \times 10^{0-(-2)} \\ &= 4 \times 10^2 \quad (\text{écriture scientifique de } B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. C &= 5 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 9 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3} \\ &= 5 \times 10\,000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 9 \times 0,01 + 7 \times 0,001 \\ &= 50\,000 + 300 + 20 + 0,09 + 0,007 \\ &= 50\,320,097 \quad (\text{écriture décimale de } C). \end{aligned}$$

1 Généralités

1 Différents types de nombres

- Les **entiers naturels** sont les nombres entiers positifs.
- Les **entiers relatifs** sont tous les nombres entiers (positifs et négatifs).
- Les **nombres décimaux** s'écrivent avec une partie après la virgule qui « s'arrête ».
- Les **nombres rationnels** s'écrivent comme le quotient de deux entiers.
- Enfin certains nombres ne peuvent pas se mettre sous la forme d'un quotient de deux entiers : ils sont dits **irrationnels**.

2 Diviseurs et multiples

Soit a et b deux entiers naturels. On dit que b est un **diviseur** de a ou a est un **multiple** de b lorsqu'il existe un entier naturel n tel que $a = n \times b$ (ou lorsque $\frac{a}{b} = n$ avec $b \neq 0$).

Exemple : 3 est un diviseur de 42 ou 42 est un multiple de 3.

3 Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par ...	si ...	Exemple
• 2	il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ; autrement dit s'il est pair.	2 012 se termine par 2
3	la somme de ses chiffres est un multiple de 3.	105 car $1 + 0 + 5 = 6 = 2 \times 3$
5	il se termine par 0 ou 5.	765 se termine par 5
9	la somme de ses chiffres est un multiple de 9.	783 car $7 + 8 + 3 = 18 = 2 \times 9$
10	il se termine par 0.	430 se termine par 0

EXERCICE RÉSOLU

► Faire le point sur les différents nombres

ÉNONCÉ

Répondez par oui ou par non.

Est un nombre	entier	décimal	rationnel
$-\frac{4}{3}$			
1,17			
$\pi + 1$			
$-\frac{30}{5}$			

CORRIGÉ

- $-\frac{4}{3} \approx -1,333...$ n'est pas entier.

Ce n'est pas non plus un décimal car sa partie « après la virgule » est infinie.

C'est un nombre rationnel car il s'écrit sous la forme d'un quotient de deux entiers.

- 1,17 n'est pas entier. C'est un nombre décimal : il a deux chiffres après la virgule.

Il est également rationnel car 1,17 s'écrit aussi $\frac{117}{100}$.

- $\pi + 1 \approx 4,14159...$ n'est ni entier, ni décimal. π étant irrationnel (il ne s'écrit pas sous la forme de quotient d'entiers), $\pi + 1$ l'est aussi.

- $-\frac{30}{5} = -6$. C'est un nombre entier, mais aussi décimal (car $-6 = -6,0$) et rationnel (car $-6 = -\frac{6}{1}$).

Conseil

Votre calculatrice peut vous aider.

2 PGCD

Dans ce paragraphe, on travaille avec des entiers naturels.

1 Diviseurs communs

Si le nombre k est un diviseur de a et de b , on dit que k est un **diviseur commun** à a et à b .

Exemple : 3 est un diviseur de 18 car $3 \times 6 = 18$.

De même, 3 est un diviseur de 21 car $3 \times 7 = 21$.

On dit que 3 est un diviseur commun à 18 et 21.

2 PGCD

• On appelle **PGCD** de deux nombres a et b le Plus Grand des Diviseurs Communs à a et à b .

- Pour déterminer le PGCD de deux nombres, on peut utiliser :
 - la liste des diviseurs (voir ex. résolu, p. 45),
 - la méthode des soustractions successives (voir ex. résolu, p. 45),
 - la méthode des divisions successives (voir méthode, p. 46).

3 Nombres premiers entre eux

• Deux nombres sont **premiers entre eux** quand leur PGCD vaut 1.

Exemples :

- 8 et 21 sont premiers entre eux car ils n'ont comme facteur commun que le nombre 1.
- 75 et 20 ne sont pas premiers entre eux car ils ont (au moins) pour diviseur commun 5 (on utilise les critères de divisibilité).

• Lorsque le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, cette fraction est dite irréductible.

Exemples :

- $\frac{13}{7}$ est une fraction irréductible car 7 et 13 sont premiers entre eux.
- $\frac{27}{30}$ n'est pas une fraction irréductible car 27 et 30 ont au moins pour diviseur commun, 3. On peut donc réduire encore cette fraction.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer le PGCD de deux nombres à partir d'une liste de diviseurs

ÉNONCÉ

En écrivant la liste des diviseurs de 70 et 42, déterminez le PGCD de 70 et 42.

CORRIGÉ

- Liste des diviseurs de 70 :

On cherche toutes les façons d'écrire 70 comme produit de deux entiers positifs :

$$70 = 1 \times 70 = 2 \times 35 = 5 \times 14 = 7 \times 10.$$

Au final sont diviseurs de 70 :

$$\{1; 2; 5; 7; 10; 14; 35; 70\}.$$

- Liste des diviseurs de 42 :

$$42 = 1 \times 42 = 2 \times 21 = 3 \times 14 = 6 \times 7.$$

Ainsi les diviseurs de 42 sont $\{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$.

Dans ces deux listes, sont communs les diviseurs : 1 ; 2 ; 7 et 14.

Le plus grand parmi ceux-ci est 14. En conclusion, $\text{PGCD}(42; 70) = 14$.

Méthode

Si un nombre est égal à $a \times b$, alors a et b sont tous les deux des diviseurs.

Conseil

70 se termine par 0, donc admet pour diviseurs 2, 5 et 10.

2 Calculer un PGCD avec la méthode des soustractions successives

ÉNONCÉ

Calculez le PGCD de 112 et 152.

CORRIGÉ

Dans cette méthode, on effectue des soustractions successives jusqu'à obtenir un reste nul. Le PGCD correspond au dernier reste non nul.

Ainsi, on commence par soustraire 152 et 112 (le plus grand nombre moins le plus petit) : $152 - 112 = 40$.

Parmi les trois nombres restants, on soustrait les deux plus petits :

$$112 - 40 = 72.$$

Puis on recommence jusqu'à obtenir un reste nul.

$$72 - 40 = 32 \quad 40 - 32 = 8 \quad 32 - 8 = 24$$

$$24 - 8 = 16$$

$$16 - 8 = \boxed{8} \rightarrow \text{Dernier reste non nul de la série de soustractions.}$$

$$8 - 8 = 0. \quad \text{En conclusion, } \text{PGCD}(112; 152) = 8.$$

Méthode

Les deux plus petits sont 40 et 32...

→ Calculer un PGCD avec la méthode des divisions successives (appelée algorithme d'Euclide)

ÉNONCÉ

Calculez le PGCD de 1 128 et 540.

MÉTHODE

1. On effectue la division euclidienne du plus grand nombre a par le plus petit nombre b . On obtient une égalité de la forme $a = b \times q + r$.
2. Si $r = 0$: le PGCD de a et b est b .
Si $r \neq 0$, on effectue une nouvelle division euclidienne de b (qui devient le nouveau a) par r (qui devient le nouveau b).
3. On recommence l'étape 2 jusqu'à obtenir un reste nul.
4. On conclut : le PGCD des nombres a et b est le dernier reste non nul de ces divisions successives.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
● $\frac{1\,128}{540} \approx 2,08...$ On prend la partie entière de ce nombre : 2 (c'est le quotient q). ● $540 \times 2 = 1\,080$ - et $1\,128 - 1\,080 = 48$ (c'est le reste r) ● On peut alors écrire : $1\,128 = \textcircled{540} \times 2 + \textcircled{48}$	1. On effectue la division euclidienne de 1 128 par 540. Le reste r est 48 (non nul).
● De même $\frac{540}{48} = 11,25$ ● $48 \times 11 = 528$ ● D'où : $\textcircled{540} = \textcircled{48} \times 11 + \textcircled{12}$	2. On effectue la division euclidienne de 540 (b) par 48 (r). Le reste est 12 (non nul).
● $\frac{48}{12} = 4$ ● D'où : $\textcircled{48} = 4 \times \textcircled{12} + 0$	3. On recommence l'étape 2 : on effectue la division euclidienne de 48 par 12. Le reste est nul.
On a obtenu un reste nul.	4. Le PGCD de 1 128 et 540 est 12.

➔ Résoudre un problème en utilisant un PGCD

ÉNONCÉ

Christophe réalise le carrelage au sol de sa salle de bains. Il veut poser des carreaux carrés les plus grands possible, sans découpe et sans joint. Sa pièce de forme rectangulaire mesure exactement 252 cm sur 351 cm.

Quelle doit-être la taille des carreaux de la salle de bains ?

MÉTHODE

1. On traduit les données de l'énoncé de façon à déterminer un diviseur commun aux deux nombres.
2. On justifie qu'on cherche un diviseur le plus grand possible.
3. On calcule le PGCD des deux nombres avec la méthode de son choix (diviseurs communs, soustractions successives ou algorithme d'Euclide).
4. On répond à la question de l'énoncé.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
La pièce a une largeur l de 252 cm et une longueur L de 351 cm. Le carrelage carré a pour côté c . Comme il n'y a aucune découpe, il y a un nombre entier de carreaux dans la longueur et dans la largeur : c est donc un diviseur commun à l et à L .	1. On identifie les informations permettant de chercher les diviseurs communs aux deux nombres.
Les carreaux étant les plus grands possible, c est le plus grand possible.	2. On justifie que l'on cherche le plus grand des diviseurs communs.
Comme c est le PGCD de 252 et 351, on écrit : $351 = 1 \times (252) + (99)$ $(252) = 2 \times (99) + (54)$ $(99) = 1 \times (54) + (45)$ $(54) = 1 \times (45) + (9)$ $(45) = 5 \times (9) + 0 ; \text{PGCD}(252 ; 351) = 9.$	3. On utilise, ici, la méthode des divisions successives (algorithme d'Euclide) pour calculer le PGCD des deux nombres.
Le carrelage carré mesure 9 cm de côté.	4. On répond à la question posée dans l'énoncé.


QCM

1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. 54 est un multiple de :

 a) ☐ 6

 b) ☐ 54

 c) ☐ 108

2. 8 est un diviseur de :

 a) ☐ 1

 b) ☐ 8

 c) ☐ 32

3. 156 est divisible par :

 a) ☐ 3

 b) ☐ 6

 c) ☐ 9

4. 1 est diviseur de :

 a) ☐ 1

 b) ☐ 2

 c) ☐ 5

5. Ces deux nombres sont premiers entre eux :

 a) ☐ 10 et 21

 b) ☐ 10 et 22

 c) ☐ 21 et 22

6. Le PGCD de ces deux nombres vaut 6 :

 a) ☐ 12 et 18

 b) ☐ 18 et 30

 c) ☐ 30 et 75

7. Cette fraction est irréductible :

 a) ☐ $\frac{35}{91}$

 b) ☐ $\frac{77}{9}$

 c) ☐ $\frac{52}{17}$
2 Répondez par vrai ou par faux.

Affirmations	Réponse
1. Le nombre 12 admet exactement 6 diviseurs.	☐ V ☐ F
2. 357 est un multiple de 3.	☐ V ☐ F
3. 2 009 est un multiple de 9.	☐ V ☐ F
4. Un nombre différent de 1 a toujours au moins deux diviseurs.	☐ V ☐ F
5. Le PGCD de 152 et 164 est 2.	☐ V ☐ F
6. Le PGCD de deux nombres pairs est 2.	☐ V ☐ F
7. Le PGCD de deux nombres impairs est impair.	☐ V ☐ F
8. Si n est un diviseur commun aux nombres a et b , alors n est un diviseur de $a + b$.	☐ V ☐ F
9. $\frac{357}{119}$ est une fraction irréductible.	☐ V ☐ F

→ Exercices d'entraînement



3 Chassez l'intrus

Déterminez, parmi ces nombres, lesquels ne sont pas décimaux :

- $-\frac{5}{4}$ • 18,33 • 15 • 2π • $\frac{5}{7}$

4 Diviseurs communs et PGCD

1. Donnez la liste des diviseurs de :

28 ; 30 ; 54 et 105.

2. Déduisez-en le PGCD de 28 et 54, ainsi que celui de 30 et 105.

5 Le PGCD, comme vous voulez !

Calculez par la méthode de votre choix le PGCD des nombres :

- 294 et 140 • 121 et 214 • 2 880 et 3 612

6 Des fractions irrésistiblement irréductibles

Rendez irréductibles les fractions suivantes :

- $\frac{240}{264}$ • $\frac{1\,134}{714}$ • $\frac{549}{594}$

7 PGCD et racines ? Un mélange détonnant

1. Sans calculer leur PGCD, justifiez que les nombres 392 et 980 ne sont pas premiers entre eux.

2. Calculez le PGCD de 392 et 980.

3. Montrez que $\sqrt{392} + \sqrt{980} = 14(\sqrt{2} + \sqrt{5})$.

→ Vers le Brevet



8 Tout ce que vous avez toujours voulu faire avec un PGCD

1. Sans calcul, expliquez pourquoi on peut simplifier la fraction $\frac{1\,216}{2\,736}$.
2. Calculez le PGCD de 1 216 et 2 736 en utilisant la méthode de votre choix et en détaillant les calculs.
3. Rendez irréductible la fraction $\frac{1\,216}{2\,736}$.
4. En utilisant les résultats des questions précédentes, écrivez le nombre $-5\sqrt{1\,216} + 8\sqrt{2\,736}$ sous la forme $a\sqrt{19}$ où a est un entier relatif, en détaillant les calculs.

9 Des pirates comme il en existe plus...

Le pirate Tom Le Rouge découvre un coffre dans lequel repose un trésor composé de 5 096 pièces d'argent et 1 155 pièces d'or.

Très généreux, Tom le Rouge veut partager son trésor avec le maximum de ses amis, souhaitant que chacun reçoive le même nombre de pièces d'or et d'argent.

1. Combien de personnes vont profiter de la découverte de Tom le Rouge (en le comptant lui-même !)?
2. Combien de pièces d'argent et d'or recevra alors chaque personne?

→ QCM

❶ $1. 54 = 9 \times 6$; $54 = 1 \times 54$; mais 108 n'est pas « dans la table » de 54.

Aussi 54 est un multiple de 6 et de 54.

Réponses : a) 6 et b) 54.

❷ $\frac{1}{8}$ n'est pas un entier. Par contre, $\frac{8}{8} = 1$ et $\frac{32}{8} = 4$.

Ainsi 8 est un diviseur de 8 et de 32.

Réponses : b) 8 et c) 32.

❸ ● $1 + 5 + 6 = 12$, multiple de 3. Donc 156 est divisible par 3.

● 156 est pair, donc divisible par 2.

De plus, il est divisible par 3. Donc 156 est divisible par 6.

● $1 + 5 + 6 = 12$, non multiple de 9. Donc 156 n'est pas divisible par 9.

Réponses : a) 3 et b) 6.

❹ 1 est diviseur de tous les nombres, donc de 1, 2 et 5.

Réponses : a) 1, b) 2 et c) 5.

❺ On calcule le PGCD de chacun de ces couples de nombres.

● 10 et 21

Avec la méthode des divisions successives,

$$21 = \textcircled{10} \times 2 + \textcircled{1}$$

$$\textcircled{10} = \textcircled{1} \times 10 + 0. \text{ Donc PGCD}(10; 21) = 1.$$

● 10 et 22

Ils sont pairs, donc ont au moins pour diviseurs communs 1 et 2 : ils ne sont pas premiers entre eux.

● 21 et 22

Avec la méthode des divisions successives,

$$22 = \textcircled{21} \times \textcircled{1} + 1$$

$$\textcircled{21} = \textcircled{1} \times 21 + 0. \text{ Donc PGCD}(21; 22) = 1.$$

Réponses : a) 10 et 21 et c) 21 et 22.

Méthode

On peut aussi calculer $\frac{54}{9}$; $\frac{54}{54}$ et $\frac{54}{108}$. Si le résultat est un entier, alors 54 est un de ses multiples.

Remarque

On regarde si 1; 8 et 32 sont « dans la table de » 8.

L'astuce du prof

Les critères de divisibilité permettent de trouver des diviseurs communs rapidement.

6. On calcule avec la méthode des divisions successives :

● PGCD (12 ; 18)

$$18 = 12 \times 1 + 6$$

$$12 = 6 \times 2 + 0. \text{ Donc PGCD}(12 ; 18) = 6.$$

● PGCD (30 ; 18)

$$30 = 18 \times 1 + 12$$

$$18 = 12 \times 1 + 6$$

$$12 = 6 \times 2 + 0. \text{ Donc PGCD}(30 ; 18) = 6.$$

● PGCD (30 ; 75)

$$75 = 30 \times 2 + 15$$

$$30 = 15 \times 2 + 0. \text{ Donc PGCD}(75 ; 30) = 15.$$

Réponses : a) 12 et 18 et b) 18 et 30.

7. Dans chaque cas, on étudie si le PGCD du numérateur et du dénominateur vaut 1.

$$\bullet 91 = 35 \times 2 + 21$$

$$35 = 21 \times 1 + 14$$

$$21 = 14 \times 1 + 7$$

$$14 = 7 \times 2 + 0.$$

D'où PGCD (91 ; 35) = 7 $\neq$ 1. $\frac{35}{91}$ n'est pas irréductible.

$$\bullet 77 = 9 \times 8 + 5; \quad 8 = 5 \times 1 + 3; \quad 5 = 3 \times 1 + 2; \quad 3 = 2 \times 1 + 1; \\ 2 = 2 \times 1 + 0.$$

D'où PGCD (77 ; 9) = 1. $\frac{77}{9}$ est irréductible.

$$\bullet 52 = 17 \times 3 + 1$$

$$17 = 1 \times 17 + 0.$$

D'où PGCD (17 ; 52) = 1. $\frac{52}{17}$ est irréductible.

Réponses : b) $\frac{77}{9}$ et c) $\frac{52}{17}$.

2 1. Vrai. 12 admet pour diviseurs {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12}, soit exactement 6 diviseurs.

2. Vrai. $3 + 5 + 7 = 15$ qui est un multiple de 3.

Méthode
Calculez le PGCD
en appliquant
les divisions successives.

3. Faux. $2 + 0 + 0 + 9 = 11$ qui n'est pas un multiple de 9.

4. Vrai. Un nombre différent de 1 a toujours au moins pour diviseurs 1 et lui-même car pour tout a entier $\neq 1$: $a = 1 \times a$.

5. Faux. Avec la méthode des divisions successives, on obtient

$$164 = 152 \times 1 + 12$$

$$152 = 12 \times 12 + 8$$

$$12 = 8 \times 1 + 4$$

$$8 = 4 \times 2 + 0.$$

Donc $\text{PGCD}(152; 164) = 4 \neq 2$.

6. Faux. Si on reprend l'exemple précédent, le PGCD de deux nombres pairs (152 et 164) n'est pas 2 (mais 4).

7. Vrai. Un nombre impair n'admet pas 2 pour diviseur.

8. Vrai. n est un diviseur de a , a peut s'écrire $a = n \times k$ avec k entier.

n est un diviseur de b , b peut s'écrire $b = n \times \ell$ avec ℓ entier.

Ainsi $a + b = nk + n\ell = n(k + \ell)$ avec $k + \ell$ entier.

Cela justifie que n est un diviseur de $a + b$.

9. Faux.

$357 = 119 \times 3 + 0$. Donc $\text{PGCD}(119; 357) = 119$.

$\frac{357}{119}$ n'est pas une fraction irréductible.

→ Exercices d'entraînement

3 • $-\frac{5}{4} = -1,25$; $18,33$; $15 = 15,0$.

Ces trois nombres sont décimaux car ils s'écrivent avec « une partie après la virgule qui s'arrête ».

• π est un nombre irrationnel : il ne peut pas se mettre sous forme de quotient. Et sa partie décimale est infinie. De même pour $2 \times \pi$.

• $\frac{5}{7} \approx 0,714285714285 \dots$ La partie « après la virgule » est infinie.

En conclusion, les deux intrus (qui ne sont pas décimaux) sont 2π et $\frac{5}{7}$.

L'astuce du prof

Sortez votre calculatrice et regardez les chiffres après la virgule.

4 1. Diviseurs de :

$$28 : \{1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28\}$$

$$30 : \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30\}$$

$$54 : \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18 ; 27 ; 54\}$$

$$105 : \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 15 ; 21 ; 35 ; 105\}$$

Gagnez des points !
On cherche toutes les façons d'écrire 28 dans les tables de multiplication.

2. Dans la liste des diviseurs de 28 et 54, on cherche les diviseurs communs. On y trouve 1 et 2. Le plus grand de ces diviseurs communs est 2.

On conclut $\text{PGCD}(28 ; 54) = 2$.

De même dans la liste des diviseurs de 30 et 105, les diviseurs communs sont 1 ; 3 ; 5 ; 15. Le plus grand est 15.

D'où $\text{PGCD}(30 ; 105) = 15$.

5. Calcul du PGCD de 294 et 140 par la méthode des soustractions.

$$294 - 140 = 154$$

$$84 - 14 = 70$$

$$154 - 140 = 14$$

$$70 - 14 = 56$$

$$140 - 14 = 126$$

$$56 - 14 = 42$$

$$126 - 14 = 112$$

$$42 - 14 = 28$$

$$112 - 14 = 98$$

$$28 - 14 = 14$$

$$98 - 14 = 84$$

$$14 - 14 = 0$$

Le PGCD étant le dernier reste non nul des soustractions successives, on conclut $\text{PGCD}(140 ; 294) = 14$.

Calcul du PGCD de 214 et 121 par la méthode des divisions.

$$214 = 121 \times 1 + 93$$

$$121 = 93 \times 1 + 28$$

$$93 = 28 \times 3 + 9$$

$$28 = 9 \times 3 + 1$$

$$9 = 1 \times 9 + 0$$

Le PGCD est le dernier reste non nul des divisions successives, $\text{PGCD}(121 ; 214) = 1$.

Calcul du PGCD de 3 612 et 2 880 par la méthode des divisions successives.

$$3\,612 = 2\,880 \times 1 + 732$$

$$2\,880 = 732 \times 3 + 684$$

$$732 = 684 \times 1 + 48$$

$$684 = 48 \times 14 + 12$$

$$48 = 12 \times 4 + 0$$

Le dernier reste non nul des divisions successives est 12 :

$\text{PGCD}(2\,880 ; 3\,612) = 12$.

Remarque
Avec les soustractions, il fallait 17 lignes de calculs pour arriver au résultat !

- 6 • Calculons le PGCD de 240 et 264 avec la méthode des divisions successives :

$$264 = 240 \times 1 + 24$$

$$240 = 24 \times 10 + 0$$

Le PGCD étant le dernier reste non nul, PGCD (240 ; 264) = 24.

On simplifie alors par le PGCD : $\frac{240}{264} = \frac{24 \times 10}{24 \times 11} = \frac{10}{11}$ (fraction irréductible).

- On calcule le PGCD de 1 134 et 714 avec la méthode des soustractions successives :

$$1\,134 - 714 = 420$$

$$168 - 126 = 42$$

$$714 - 420 = 294$$

$$126 - 42 = 84$$

$$420 - 294 = 126$$

$$84 - 42 = 42$$

$$294 - 126 = 168$$

$$42 - 42 = 0$$

Le PGCD étant le dernier reste non nul, PGCD (1 134 ; 714) = 42.

On simplifie par le PGCD : $\frac{1\,134}{714} = \frac{\cancel{42} \times 27}{\cancel{42} \times 17} = \frac{27}{17}$ (fraction irréductible).

- On calcule le PGCD de 549 et 594 avec la méthode des divisions successives :

$$594 = 549 \times 1 + 45$$

$$549 = 45 \times 12 + 9$$

$$45 = 9 \times 5 + 0$$

Le dernier reste non nul est 9. On conclut que PGCD (549 ; 594) = 9.

On simplifie : $\frac{549}{594} = \frac{\cancel{9} \times 61}{\cancel{9} \times 66} = \frac{61}{66}$ (fraction irréductible).

- 7 1. 392 et 980 sont deux nombres pairs : l'un se termine par 2 et l'autre par 0. Ils ont donc pour diviseur commun (autre que 1) 2. Ils ne sont pas premiers entre eux.

2. Avec la méthode des divisions successives :

$$980 = 392 \times 2 + 196$$

$$392 = 196 \times 2 + 0$$

Ainsi PGCD (980 ; 392) = 196.

3. $\sqrt{392} + \sqrt{980} = \sqrt{196 \times 2} + \sqrt{196 \times 5}$

$$= \sqrt{14^2 \times 2} + \sqrt{14^2 \times 5} = \sqrt{14^2} \times \sqrt{2} + \sqrt{14^2} \times \sqrt{5}$$

$$= 14\sqrt{2} + 14\sqrt{5} = 14(\sqrt{2} + \sqrt{5}).$$

Remarque

La méthode des soustractions successives est souvent assez longue...

L'astuce du prof

On cherche un diviseur simple, autre que 1 en utilisant les critères de divisibilité.

L'astuce du prof

On utilise le PGCD.

→ Vers le Brevet

8 1. 1 216 et 2 736 sont deux nombres pairs (ils se terminent tous les deux par un 6). Donc la fraction $\frac{1\,216}{2\,736}$ est au moins simplifiable par 2.

2. Avec l'algorithme d'Euclide (divisions successives), on obtient :

$$\begin{aligned} 2\,736 &= (1\,216) \times 2 + (304) \\ (1\,216) &= (304) \times 4 + 0 \end{aligned}$$

Le PGCD de 2 736 et 1 216 est le dernier reste non nul : c'est 304.

3. On a $1\,216 = 304 \times 4$ et $2\,736 = 304 \times 9$.

On en déduit : $\frac{1\,216}{2\,736} = \frac{\cancel{304} \times 4}{\cancel{304} \times 9} = \frac{4}{9}$

(fraction irréductible).

4. En utilisant la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} -5\sqrt{1\,216} + 8\sqrt{2\,736} &= -5\sqrt{304 \times 4} + 8\sqrt{304 \times 9} \\ &= -5 \times \sqrt{304} \times \sqrt{4} + 8\sqrt{304} \times \sqrt{9} \\ &= -5 \times 2 \times \sqrt{304} + 8 \times 3 \times \sqrt{304} \\ &= -10\sqrt{304} + 24\sqrt{304} \\ &= 14\sqrt{304} \\ &= 14\sqrt{16 \times 19} \\ &= 14 \times \sqrt{16} \times \sqrt{19} \\ &= 14 \times 4 \times \sqrt{19} \\ &= 56\sqrt{19} \text{ (sous la forme } a\sqrt{19} \text{ avec } a = 56). \end{aligned}$$

9 1. • Chaque personne recevra le même nombre de pièces d'or et d'argent : le nombre de personnes est donc un diviseur commun de 5 096 et 1 155.

Tom voulant partager son trésor avec le maximum de personnes, on déduit que ce diviseur commun doit être le plus grand possible.

Ce nombre est donc le PGCD de 5 096 et 1 155.

Rappel

On simplifie par le PGCD.

Gagnez des points !

On utilise à nouveau :

$$1\,216 = 304 \times 4$$

$$2\,736 = 304 \times 9$$

Gagnez des points !

Et $304 = 16 \times 19$.

L'astuce du prof

Dans l'histoire, se camoufle un PGCD.

- On calcule ce PGCD avec l'algorithme d'Euclide :

$$5\,096 = 1\,155 \times 4 + 476$$

$$1\,155 = 476 \times 2 + 203$$

$$476 = 203 \times 2 + 70$$

$$203 = 70 \times 2 + 63$$

$$70 = 63 \times 1 + 7$$

$$63 = 7 \times 9 + 0$$

Le dernier reste non nul est 7 ; le PGCD de 5 096 et 1 155 est 7.

- Le trésor sera donc partagé entre 7 personnes.

2. On calcule ce que recevra chaque personne :

$$\frac{5\,096}{7} = 728 \quad \text{et} \quad \frac{1\,155}{7} = 165$$

Chaque personne aura 728 pièces d'argent et 165 pièces d'or.

1 Premières notions

1 Définition et propriétés

Soit a un nombre positif. On appelle **racine carrée** de a (que l'on note $\sqrt{a}$) le seul nombre positif dont le carré vaut a .

Exemple : $\sqrt{25} = 5$ car 5 est le seul nombre positif dont le carré vaut 25 ($5^2 = 25$).

Remarque : La racine carrée d'un nombre négatif n'a pas de sens (il n'existe pas de nombre dont le carré est un nombre négatif).

2 Propriétés

Soit a et b des nombres positifs, on a :

$$\bullet (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\bullet \sqrt{a^2} = a$$

Exemples : $\bullet (\sqrt{6})^2 = 6$

$$\bullet \sqrt{3^2} = 3$$

• La racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées.

Racine carrée
d'un produit

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Produit des
racines carrées

• La racine carrée d'un quotient est égale au quotient des racines carrées.

Si $b > 0$,

Racine carrée
d'un quotient

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Quotient des
racines carrées

Exemples : $\bullet \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$

$$\bullet \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

Attention : Il n'existe pas de règles avec les additions et soustractions des racines carrées.

$$\sqrt{9 + 16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}.$$

En effet, $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Transformer une écriture

ÉNONCÉ

Écrivez sous la forme $\sqrt{a}$ (a entier positif) les nombres suivants :

$$\bullet A = 3$$

$$\bullet B = 2\sqrt{3}$$

$$\bullet C = 4\sqrt{7}$$

CORRIGÉ

$$\bullet A = 3 = \sqrt{3^2} = \sqrt{9}$$

$$\bullet B = 2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{12}$$

$$\bullet C = 4\sqrt{7} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{7} = \sqrt{16} \times \sqrt{7} = \sqrt{112}$$

Méthode

On utilise les propriétés

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\text{et } \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}.$$

2 Simplifier une racine carrée

ÉNONCÉ

Écrivez sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers (b le plus petit possible), les nombres suivants :

$$\bullet E = \sqrt{50}$$

$$\bullet F = \sqrt{32}$$

$$\bullet G = \sqrt{48}$$

$$\bullet H = 3\sqrt{24}$$

$$\bullet I = 2\sqrt{125}$$

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} \bullet E &= \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} \\ &= \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet F &= \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} \\ &= \sqrt{4^2 \times 2} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet G &= \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} \\ &= \sqrt{4^2 \times 3} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet H &= 3\sqrt{24} = 3\sqrt{4 \times 6} \\ &= 3\sqrt{2^2 \times 6} = 3\sqrt{2^2} \times \sqrt{6} \\ &= 3 \times 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\bullet I = 2\sqrt{125} = 2\sqrt{25 \times 5} = 2\sqrt{5^2 \times 5} = 2\sqrt{5^2} \times \sqrt{5} = 2 \times 5\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

Méthode

On écrit les nombres sous la racine de la forme $a^2 \times b$, puis on utilise la propriété :

$$\sqrt{a^2 \times b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}.$$

Rappel

$$3\sqrt{24} = 3 \times \sqrt{24}.$$

2 Racines carrées et équation $x^2 = a$

Chercher les nombres dont le carré vaut a revient à déterminer les solutions x qui vérifient l'équation $x^2 = a$.

$x^2 = a$ est une équation dont l'inconnue est x . Selon le signe du nombre a , cette équation aura 0 ; 1 ou 2 solutions.

Plus précisément, l'équation $x^2 = a$ (un nombre au carré égal à a) admet :

- 2 solutions lorsque a est positif. Ces solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- 1 solution lorsque $a = 0$. Cette solution est $x = 0$.
- 0 solution lorsque a est un nombre strictement négatif : aucun nombre élevé au carré ne donne un nombre strictement négatif.

Exemples :

- L'équation $x^2 = 5$ a deux solutions puisque 5 est positif : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
- L'équation $x^2 = -3$ n'a pas de solution car -3 est un nombre strictement négatif.

Remarque :

Parfois on devra manipuler l'équation pour l'écrire sous la forme $x^2 = a$.

Par exemple, soit l'équation $3x^2 - 9 = 0$.

On écrit $3x^2 = 9$

$$\text{soit } x^2 = \frac{9}{3}$$

$$\text{ou } x^2 = 3$$

$x^2 = 3$ est bien une équation de la forme $x^2 = a$. Elle a deux solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

EXERCICE RÉSOLU

► Résoudre une équation du type $x^2 = a$

ÉNONCÉ

Résolvez les équations suivantes :

$$\bullet x^2 = 7$$

$$\bullet x^2 = 16$$

$$\bullet x^2 - 9 = 0$$

$$\bullet x^2 + 4 = 0$$

$$\bullet 2x^2 = 8$$

CORRIGÉ

$$\bullet x^2 = 7$$

7 est positif, cette équation a donc deux solutions :

$$\sqrt{7} \text{ et } -\sqrt{7}.$$

En effet, $(\sqrt{7})^2 = 7$ et $(-\sqrt{7})^2 = 7$.

$$\bullet x^2 = 16$$

16 est positif, cette équation a donc deux solutions (il y a deux nombres dont le carré vaut 16) :

$$\sqrt{16} = 4 \text{ et } -\sqrt{16} = -4.$$

On a bien $4^2 = 16$ et $(-4)^2 = 16$.

$$\bullet x^2 - 9 = 0$$

Cette équation se transforme en $x^2 = 9$.

9 est positif, cette équation a donc deux solutions :

$$\sqrt{9} = 3 \text{ et } -\sqrt{9} = -3.$$

On a bien $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$.

$$\bullet x^2 + 4 = 0$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme $x^2 = a$.

On obtient alors l'équation $x^2 = -4$ qui n'a pas de solution puisque -4 est un nombre strictement négatif.

$$\bullet 2x^2 = 8$$

Cette équation peut s'écrire $x^2 = 4$ (en divisant chacun des membres par 2).

4 est un nombre positif. Cette équation a donc deux solutions :

$$\sqrt{4} = 2 \text{ et } -\sqrt{4} = -2.$$

Rappel

Résoudre l'équation $x^2 = 7$, c'est chercher tous les nombres dont le carré vaut 7.

Méthode

Transformez cette équation afin de l'écrire sous la forme $x^2 = a$.

Conseil

Cette équation n'est pas sous la forme $x^2 = a$.

→ Réduire des expressions contenant des racines carrées

ÉNONCÉ

Écrivez sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers (b le plus petit possible) l'expression suivante : $A = \sqrt{75} + 2\sqrt{27} - 4\sqrt{48}$.

MÉTHODE

1. On écrit les nombres sous la racine de la forme $a^2 \times b$. Pour cela, il faut connaître les carrés parfaits :

Carrés parfaits	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Calcul	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2

2. On utilise la propriété : « la racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées ».

3. On simplifie en utilisant $\sqrt{a^2} = a$.

4. On réduit l'écriture.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
• $75 = 25 \times 3 = \boxed{5^2} \times 3$. • $27 = 9 \times 3 = \boxed{3^2} \times 3$. • $48 = 16 \times 3 = \boxed{4^2} \times 3$. $A = \sqrt{75} + 2\sqrt{27} - 4\sqrt{48}$ $= \sqrt{5^2 \times 3} + 2\sqrt{3^2 \times 3} - 4\sqrt{4^2 \times 3}$	1. On écrit les nombres sous les racines de la forme $a^2 \times b$.
$A = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3} + 2\sqrt{3^2} \times \sqrt{3} - 4\sqrt{4^2} \times \sqrt{3}$	2. On utilise la propriété $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.
$A = 5\sqrt{3} + 2 \times 3\sqrt{3} - 4 \times 4\sqrt{3}$ $= 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 16\sqrt{3}$	3. On simplifie en utilisant la propriété : $\sqrt{a^2} = a$
$A = -5\sqrt{3}$	4. On réduit l'écriture.

→ Développer avec des racines carrées

ÉNONCÉ

Développez le produit :

$$B = (\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(\sqrt{6} - 2\sqrt{5})$$

MÉTHODE

1. On reconnaît un produit de deux facteurs.
2. On développe l'expression en appliquant la distributivité.
3. On utilise les propriétés :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \text{ et } \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a.$$
4. On simplifie l'écriture des racines carrées.
5. On réduit l'écriture.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
$B = (\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(\sqrt{6} - 2\sqrt{5})$	1. On reconnaît un produit de deux facteurs : $(\sqrt{2} + 3\sqrt{5})$ et $(\sqrt{6} - 2\sqrt{5})$.
$B = \sqrt{2} \times \sqrt{6} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} \times \sqrt{6} - 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}$	2. On développe en appliquant : $(a+b)(c-d) = a \times c - a \times d + b \times c - b \times d.$
$B = \sqrt{2 \times 6} - 2\sqrt{2 \times 5} + 3\sqrt{5 \times 6} - 3 \times 2(\sqrt{5})^2$	3. On utilise la propriété $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ et $(\sqrt{a})^2 = a.$
$B = \sqrt{12} - 2\sqrt{10} + 3\sqrt{30} - 6 \times 5$ $= \sqrt{2^2 \times 3} - 2\sqrt{10} + 3\sqrt{30} - 30$ $= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{10} + 3\sqrt{30} - 30$ $= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{10} + 3\sqrt{30} - 30$	4. On simplifie $\sqrt{12}$ en écrivant 12 sous la forme $a^2 \times b.$
$B = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{10} + 3\sqrt{30} - 30$	5. Il n'y a pas de réduction d'écriture ici : on n'ajoute pas des « racines de 3 avec des racines de 10 ou de 30 ».



QCM



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. Le double du carré de $\sqrt{7}$ est égal à :a) ☐ 14b) ☐ $4\sqrt{7}$ c) ☐ $4\sqrt{14}$ 2. Le carré de $\sqrt{2}$ est :a) ☐ $2\sqrt{2}$ b) ☐ $\sqrt{4}$ c) ☐ $\sqrt{2}$ 3. $\left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)^2$ est égal à :a) ☐ $\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^2$ b) ☐ $\frac{5}{7}$ c) ☐ $\frac{5}{49}$ 4. $\sqrt{32} + \sqrt{2}$ est égal à :a) ☐ $\sqrt{34}$ b) ☐ $5\sqrt{2}$ c) ☐ $\sqrt{50}$ 5. Le nombre $\sqrt{2}$ est :a) ☐ l'unique nombre positif dont le carré vaut 2b) ☐ l'unique nombre positif dont le carré vaut 4c) ☐ un nombre dont le carré vaut 2

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. $\sqrt{(-3)^2}$ est un nombre qui existe.	☐ V ☐ F
2. Le double de $\sqrt{5}$ est $\sqrt{20}$.	☐ V ☐ F
3. Il y a deux nombres dont le carré vaut 25.	☐ V ☐ F
4. Il y a deux nombres qui ont pour racine carrée 2.	☐ V ☐ F
5. La racine carrée d'une somme est égale à la somme des racines carrées.	☐ V ☐ F
6. L'aire d'un carré est 3 cm^2 . Son côté mesure donc 1,5 cm.	☐ V ☐ F
7. Le carré de $\sqrt{3}$ est 9.	☐ V ☐ F

➔ Exercices d'entraînement



3 Question de langage

1. Quels sont les nombres dont le carré vaut 5 ?
2. Soit x un nombre. Écrivez le double du carré de ce nombre.
3. Combien vaut le carré de $\sqrt{5}$ et celui de $(-\sqrt{5})$?
4. De quel(s) nombre(s) 7 est-il le carré ?
5. De quel(s) nombre(s) 7 est-il la racine carrée ?

4 Transformation d'écriture

1. Écrivez sous la forme $a\sqrt{2}$: $A = 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ et $B = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - 5\sqrt{32}$.
2. Développez et réduisez : $D = (2 - \sqrt{5})(4\sqrt{5} - 1)$ et $E = 4(\sqrt{3} - 2) + 5(1 - \sqrt{3})$.

5 Calculs dans une expression

Soit $A = 3x^2 + 2x - \sqrt{2}$. Calculez A pour $x = \sqrt{2}$ puis pour $x = -3\sqrt{2}$.

6 Une égalité très curieuse

On donne les nombres $A = \frac{3}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ et $B = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5}$. Montrez que $A = B$.

➔ Vers le Brevet

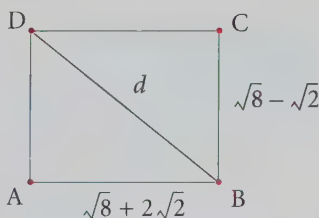


7 Une méthode pour comparer

Voici une propriété : « Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés ». En utilisant ce résultat, comparez $-3\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{7}$.

8 Calculs dans un rectangle très particulier

1. a) Montrez que l'aire du rectangle ci-contre est un nombre entier.
b) Montrez que son périmètre est $p = 10\sqrt{2}$.
2. Un élève affirme que la longueur de la diagonale est $d = \sqrt{34}$. A-t-il raison? Justifiez.



9 L'aide qui aide...

En notant que $36 \times 21 = 756$ et $25 \times 21 = 525$, écrivez sous la forme $a\sqrt{b}$:

$$A = 2\sqrt{756} - 3\sqrt{525} \text{ et } B = \frac{\sqrt{756}}{\sqrt{7}} - \sqrt{\frac{525}{7}}.$$

→ QCM

1. Le carré de $\sqrt{7}$ est $(\sqrt{7})^2 = 7$. Le double du carré de $\sqrt{7}$ est $2 \times 7 = 14$.

Réponse : **a)** 14.

2. Le carré de $\sqrt{2}$ est $(\sqrt{2})^2 = 2 = \sqrt{4}$.

Réponse : **b)** $\sqrt{4}$.

$$3. \bullet \left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}}{7} \times \frac{\sqrt{5}}{7} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{7 \times 7} = \frac{5}{49}$$

ou

$$\bullet \left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)^2 = \frac{(\sqrt{5})^2}{7^2} = \frac{5}{49}.$$

Réponse : **c)** $\frac{5}{49}$.

$$4. \sqrt{32} + \sqrt{2} = \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{2} = \sqrt{4^2 \times 2} + \sqrt{2} \\ = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{De plus, } 5\sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}.$$

Réponses : **b)** $5\sqrt{2}$ et **c)** $\sqrt{50}$.

5. Par définition, $\sqrt{2}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut 2. C'est donc également un nombre dont le carré vaut 2.

Réponses : **a)** l'unique nombre dont le carré vaut 2 et **c)** un nombre dont le carré vaut 2.

2. 1. Vrai. Seule la racine carrée d'un nombre positif existe.

$$\text{Or } (-3)^2 = 9 \text{ et } \sqrt{9} = 3.$$

2. Vrai. Le double de $\sqrt{5}$

$$\text{est } 2\sqrt{5} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}.$$

3. Vrai. Les nombres dont le carré vaut 25 vérifient l'équation $x^2 = 25$. Il y en a donc 2 (puisque 25 est un nombre positif) : -5 et 5.

$$\text{En effet, } 5^2 = 25 \text{ et } (-5)^2 = 25.$$

Méthode

On utilise $A^2 = A \times A$.

Méthode

On utilise $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A^2}{B^2}$.

Conseil

On remarque que
 $32 = 16 \times 2 = 4^2 \times 2$.

Rappel

Un nombre élevé au carré
 est un nombre positif.
 En particulier, $(-3)^2$
 est un nombre positif.

Remarque

Deux nombres opposés
 ont le même carré.

4. Faux. Il n'y a qu'un seul nombre dont la racine carrée vaut 2. C'est 4. En effet, $\sqrt{4} = 2$.

5. Faux. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

En prenant $a = 81$ et $b = 144$, on obtient :

$$\sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$$

$$\text{et } \sqrt{81} + \sqrt{144} = 9 + 12 = 21.$$

Or $15 \neq 21$. On en déduit que la racine carrée d'une somme n'est pas égale à la somme des racines carrées.

6. Faux. L'aire d'un carré se calcule à l'aide de la formule « côté $\times$ côté ».

Si x est le côté du carré, alors on cherche x tel que $x \times x = 3$ soit $x^2 = 3$.

Cette équation a deux solutions : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Seule la solution $\sqrt{3}$ convient. Le côté ne mesure donc pas 1,5 cm.

7. Faux. $(\sqrt{3})^2 = 3 \neq 9$.

Rappel

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

Méthode

Pour montrer qu'une propriété est fausse, on peut donner un contre exemple : c'est-à-dire un exemple qui vérifie les hypothèses mais pas la conclusion.

→ Exercices d'entraînement

③ 1. Il existe deux nombres dont le carré vaut 5 : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$. Ce sont les solutions de l'équation $x^2 = 5$.

2. Le carré de x est x^2 . Le double du carré de x est le nombre $2x^2$.

3. Le carré de $\sqrt{5}$ est $(\sqrt{5})^2$. Il vaut 5.

Le carré de $-\sqrt{5}$ est $(-\sqrt{5})^2$. Il vaut 5.

4. 7 est le carré de $\sqrt{7}$ et de $-\sqrt{7}$.

En effet $(\sqrt{7})^2 = 7$ et $(-\sqrt{7})^2 = 7$.

5. On cherche x tel que $\sqrt{x} = 7$. On trouve $x = 49$ car $\sqrt{49} = 7$.

Conseil

Procédez étape par étape.

Piège à éviter

N'oubliez pas les parenthèses.

④ 1. ● $A = 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \underbrace{3 \times 5}_{15} \times \underbrace{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}_{2} \times \sqrt{2} = 15 \times 2 \times \sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

de la forme $a\sqrt{2}$ avec $a = 30$.

$$\begin{aligned}
 \bullet B &= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - 5\sqrt{32} \\
 &= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{4 \times 2} - 5\sqrt{16 \times 2} \\
 &= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2^2 \times 2} - 5\sqrt{4^2 \times 2} \\
 &= 2\sqrt{2} + 4 \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} - 5 \times \sqrt{4^2} \times \sqrt{2} \\
 &= 2\sqrt{2} + 4 \times 2\sqrt{2} - 5 \times 4 \times \sqrt{2} \\
 &= 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 20\sqrt{2} \\
 &= -10\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

de la forme $a\sqrt{2}$ avec $a = -10$.

$$\begin{aligned}
 2. \bullet D &= (2 - \sqrt{5})(4\sqrt{5} - 1) \\
 &= 2 \times 4\sqrt{5} - 2 \times 1 - \sqrt{5} \times 4\sqrt{5} + \sqrt{5} \times 1 \\
 &= 8\sqrt{5} - 2 - 4 \times 5 + \sqrt{5} \\
 &= 9\sqrt{5} - 22
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet E &= 4(\sqrt{3} - 2) + 5(1 - \sqrt{3}) \\
 &= 4\sqrt{3} - 8 + 5 - 5\sqrt{3} \\
 &= -3 - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \bullet \text{ Pour } x &= \sqrt{2} \\
 A &= 3 \times (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \\
 &= 3 \times 2 + 2 \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \\
 &= 6 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \\
 &= 6 + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Pour } x &= -3\sqrt{2} \\
 A &= 3 \times (-3\sqrt{2})^2 + 2 \times (-3\sqrt{2}) - \sqrt{2} \\
 &= 3 \times 9 \times 2 - 6\sqrt{2} - \sqrt{2} \\
 &= 54 - 7\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

6 On calcule les produits en croix :

$$\begin{aligned}
 \bullet 3 \times 5 &= 15. \\
 \bullet (3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) &= (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 \\
 &= 18 - 3 = 15.
 \end{aligned}$$

Les produits en croix sont égaux, on en déduit que les nombres A et B sont égaux.

L'astuce du prof

On doit écrire B sous la forme $a\sqrt{2}$. Pour cela, on transforme $\sqrt{8}$ et $\sqrt{32}$ en $\sqrt{2 \times a^2}$ et $\sqrt{2 \times b^2}$.

Gagnez des points !

Deux quotients sont égaux si et seulement si les produits en croix sont égaux.

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{B} &= \frac{C}{D} \text{ quand} \\
 A \times D &= B \times C.
 \end{aligned}$$

→ Vers le Brevet

7 On compare dans un premier temps le carré des nombres $-3\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{7}$.

$$\bullet (-3\sqrt{3})^2 = (-3)^2 \times (\sqrt{3})^2 = 9 \times 3 = 27.$$

$$\bullet (-2\sqrt{7})^2 = (-2)^2 \times (\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28.$$

Et puisque $28 > 27$, on obtient $(-2\sqrt{7})^2 > (-3\sqrt{3})^2$

Grâce à la propriété énoncée, on en déduit : $-2\sqrt{7} < -3\sqrt{3}$.

Gagnez des points !

On peut émettre une conjecture avec la calculatrice en comparant les valeurs approchées.

- 8 1. a)** L'aire d'un rectangle se calcule à l'aide de la formule :
longueur $\times$ largeur.

Ici, longueur = $\sqrt{8} + 2\sqrt{2}$ et largeur = $\sqrt{8} - \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\text{Aire(ABCD)} &= (\sqrt{8} + 2\sqrt{2})(\sqrt{8} - \sqrt{2}) = \sqrt{8} \times \sqrt{8} + \sqrt{8} \times 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{8} - 2\sqrt{2}\sqrt{2} \\ &= 8 + 2\sqrt{16} - 2 \times 2 - 4 = 8 + 2 \times 4 - 4 - 4 = 8.\end{aligned}$$

L'aire du rectangle ABCD est donc bien un nombre entier.

- b)** Le périmètre d'un rectangle est donné par la formule :
 $2 \times (\text{longueur} + \text{largeur}).$

On écrit :

$$\begin{aligned}\text{Périmètre(ABCD)} &= 2[(\sqrt{8} + 2\sqrt{2}) + (\sqrt{8} - \sqrt{2})] = 2(\sqrt{8} + 2\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{2}) \\ &= 2(2\sqrt{8} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{8} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2^2 \times 2} + 2\sqrt{2} \\ &= 8\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}.\end{aligned}$$

- 2.** Dans le triangle BCD rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}DC^2 + CB^2 &= BD^2 \\ (\sqrt{8} + 2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 &= BD^2 \\ (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 &= BD^2 \\ (4\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 &= BD^2 \\ 16 \times 2 + 2 &= BD^2 \\ BD^2 &= 34 \\ BD &= \sqrt{34}\end{aligned}$$

La longueur de la diagonale vaut bien $\sqrt{34}$, l'élève a raison.

Gagnez
des points !

On simplifie le calcul
à l'aide de :

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= \sqrt{2^2 \times 2} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}\bullet A &= 2\sqrt{756} - 3\sqrt{525} \\ &= 2\sqrt{36 \times 21} - 3\sqrt{25 \times 21} \\ &= 2\sqrt{6^2} \times \sqrt{21} - 3\sqrt{5^2} \times \sqrt{21} \\ &= 12\sqrt{21} - 15\sqrt{21} \\ &= -3\sqrt{21}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet B &= \frac{\sqrt{756}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{525}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{6^2 \times 21}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{5^2 \times 21}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{6\sqrt{21} - 5\sqrt{21}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \times \cancel{\sqrt{7}}}{\cancel{\sqrt{7}}} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

1 Les trois identités remarquables

Les identités (ou égalités) remarquables sont des « formules » qui permettent de développer ou de factoriser rapidement des expressions littérales.

a et b sont deux nombres quelconques.

1 Carré d'une somme

carré d'une somme

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- $a^2 + b^2$ est la somme des carrés de a et b .
- $2ab = 2 \times a \times b$ est le double produit de a et b .

2 Carré d'une différence

carré d'une différence

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3 Produit d'une somme et d'une différence

différence de deux carrés

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Remarque :

Faites attention où sont placés les signes moins dans l'expression car, par exemple, $a^2 - b^2 \neq b^2 - a^2$.

4 Généralités

- Les égalités doivent être parfaitement connues dans les « deux sens », autant pour développer que pour factoriser.
 - Pour développer $(a - b)^2$, on utilise $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
 - Pour factoriser $a^2 + 2ab + b^2$, on utilise $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.
- Il n'y a pas d'identité remarquable permettant de factoriser $a^2 + b^2$.

EXERCICE RÉSOLU

► Développer des identités remarquables avec des racines carrées

ÉNONCÉ

Soit

$$\bullet A = (1 + \sqrt{3})^2 \quad \bullet B = (3\sqrt{2} - 4)^2 \quad \bullet C = (\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$$

1. Écrivez les nombres A et B sous la forme $m + n\sqrt{p}$ où m, n et p sont des entiers.2. Montrez que C est un nombre entier.

CORRIGÉ

$$1. \bullet A = (1 + \sqrt{3})^2$$

 A est de la forme $(a + b)^2$ avec $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$.Comme $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{1^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times 1 \times \sqrt{3}}_{2 \times a \times b} + \underbrace{(\sqrt{3})^2}_{b^2} \\ &= 1 + 2\sqrt{3} + 3 \\ &= 4 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

 A est bien sous la forme $m + n\sqrt{p}$ avec $m = 4$, $n = 2$ et $p = 3$.

$$\bullet B = (3\sqrt{2} - 4)^2$$

 B est de la forme $(a - b)^2$ avec $a = 3\sqrt{2}$ et $b = 4$.Comme $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, on écrit :

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{(3\sqrt{2})^2}_{a^2} - \underbrace{2 \times 3\sqrt{2} \times 4}_{2 \times a \times b} + \underbrace{4^2}_{b^2} \\ &= 9 \times 2 - 6 \times \sqrt{2} \times 4 + 16 \\ &= 18 - 24\sqrt{2} + 16 \\ &= 34 - 24\sqrt{2} \end{aligned}$$

 B est bien sous la forme $m + n\sqrt{p}$ avec $m = 34$, $n = -24$ et $p = 2$.

$$2. C = (\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$$

 C est de la forme $(a + b)(a - b)$ avec $a = \sqrt{7}$ et $b = \sqrt{5}$.Comme $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, on a :

$$\begin{aligned} C &= \underbrace{(\sqrt{7})^2}_{a^2} - \underbrace{(\sqrt{5})^2}_{b^2} \\ &= 7 - 5 = 2 \end{aligned}$$

Méthode

On identifie clairement a et b .

Conseil

On vérifie que A est bien sous la forme demandée.

Rappel

$$(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \times (\sqrt{2})^2.$$

Rappel

Pour $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$.

→ Développer une expression avec une identité remarquable

ÉNONCÉ

Développez, réduisez et ordonnez l'expression $A = 18 - (3 - 5x)^2$.

MÉTHODE

1. On repère dans l'expression le produit remarquable à développer qui est de la forme $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ ou $(a + b)(a - b)$.
2. On écrit l'identité remarquable en identifiant a et b . La forme développée est alors $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$ ou encore $a^2 - b^2$.
3. On applique les règles de priorités opératoires habituelles pour terminer le calcul.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
$A = 18 - (3 - 5x)^2$	1. On remarque que $(3 - 5x)^2$ est le carré d'une différence.
• $(3 - 5x)^2$ est de la forme $(a - b)^2$ Avec $a = 3$ et $b = 5x$ $a^2 = 3^2 = 3 \times 3 = 9$ $b^2 = (5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25x^2$ $2ab = 2 \times 3 \times 5x = 30x$ • $(3 - 5x)^2 = 9 - 30x + 25x^2$	2. On utilise l'égalité remarquable : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$
$A = 18 - (9 - 30x + 25x^2)$ $= 18 - 9 + 30x - 25x^2$ $= 9 + 30x - 25x^2$ $= -25x^2 + 30x + 9$	3. Après avoir calculé le contenu des parenthèses, on les supprime en faisant attention au signe moins qui les précède (donc on change les signes). Puis on ordonne les facteurs selon les puissances décroissantes de x .

→ Factoriser une expression avec une identité remarquable

ÉNONCÉ

Factorisez l'expression $B = 1 - 6x + 9x^2$.

MÉTHODE

1. Après avoir vérifié qu'il n'existe aucun facteur commun dans l'expression, on la factorise en cherchant une forme développée d'identité remarquable.

2. Les trois formes développées des identités remarquables sont :

$$a^2 + 2ab + b^2 \text{ (n° 1)}, \quad a^2 - 2ab + b^2 \text{ (n° 2)} \quad \text{et} \quad a^2 - b^2 \text{ (n° 3)}.$$

On identifie celle qui correspond à l'énoncé :

- si l'expression est une différence de carrés : on choisit l'identité n° 3,
- si l'expression comprend trois termes : c'est l'identité n° 1 ou n° 2.

Les signes devant les facteurs permettent de les différencier.

3. On identifie a et b grâce à leurs carrés respectifs.

Pour les identités n° 1 et n° 2, on vérifie que le double produit correspond.

4. On factorise l'expression sous la forme $(a + b)^2$ (n° 1), $(a - b)^2$ (n° 2) ou $(a + b)(a - b)$ (n° 3).

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
$B = 1 - 6x + 9x^2$ Sans facteur commun, on s'oriente vers les identités remarquables.	1. Il n'y a pas de facteur commun aux 3 termes de l'expression. On cherche à factoriser avec une identité remarquable.
B a trois termes (donc ce n'est pas l'identité n° 3). Il contient un signe moins et serait donc de la forme $a^2 - 2ab + b^2$.	2. On cherche la forme développée de l'identité remarquable qui pourrait correspondre à B .
● $1^2 = 1$ ● $9x^2 = 3^2x^2 = (3x)^2$ On identifie : $a = 1$ et $b = 3x$ On vérifie : $2ab = 2 \times 1 \times 3x = 6x$ Ainsi $B = 1^2 - 2 \times 1 \times 3x + (3x)^2$.	3. On cherche à reconnaître chacun des termes de la forme développée à partir des valeurs de a et de b .
B se factorise donc en $(a - b)^2$. Soit $B = (1 - 3x)^2$.	4. On factorise avec l'identité remarquable.



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. $(a + b)^2$ est égal à :

a) ☐ $a^2 + b^2$

b) ☐ $a^2 + 2ab + b^2$

c) ☐ $(a + b)(a - b)$

2. $a^2 - b^2$ est égal à :

a) ☐ $(a + b)(a - b)$

b) ☐ $(a - b)^2$

c) ☐ n'est pas une identité remarquable

3. $a^2 + b^2$ est égal à :

a) ☐ $(a + b)(a - b)$

b) ☐ $(a + b)^2$

c) ☐ n'est pas une identité remarquable

4. $a^2 - 2ab - b^2$ est égal à :

a) ☐ $(a + b)(a - b)$

b) ☐ $(a - b)^2$

c) ☐ n'est pas une identité remarquable

5. $(2x + 1)(2x - 1)$ a pour forme développée :

a) ☐ $2x^2 - 1$

b) ☐ $4x^2 - 1$

c) ☐ $4x^2 + 1$

6. La forme factorisée de $9x^2 + 6x + 1$ est :

a) ☐ $(3x + 1)^2$

b) ☐ $x(9x + 6x + 1)$

c) ☐ inexistante

7. $x^2 - 4$ se factorise en :

a) ☐ $(x - 2)(x + 2)$

b) ☐ $(x - 2)^2$

c) ☐ $(x + 2)(-2 + x)$

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$	☐ V ☐ F
2. $(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) = x^2 - 7$	☐ V ☐ F
3. $(1 + \sqrt{2})^2 = 3$	☐ V ☐ F
4. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ est un nombre entier.	☐ V ☐ F
5. $x^2 - 1 = (1 - x)(1 + x)$.	☐ V ☐ F
6. $x^2 + 4x + 1$ est le développement d'un produit remarquable.	☐ V ☐ F
7. $x^2 + 4x + 4$ est le développement d'un produit remarquable.	☐ V ☐ F

→ Exercices d'entraînement



3 Développement guidé pour bien démarrer

On veut développer $(5x - 8)^2$.

1. a) Rappelez l'identité remarquable à utiliser avec les valeurs de a et b .

b) Calculez a^2 , b^2 et $2ab$.

c) Déduisez-en la forme développée de $(5x - 8)^2$.

2. Reprenez les mêmes questions avec l'expression $(12 + x)^2$.

4 Développement à trous

Complétez les pointillés dans les développements proposés :

1. $(x - 7)^2 = \dots^2 - 2 \times \dots \times \dots + \dots^2 = \dots - \dots + \dots$

2. $(11 - 6x)(11 + 6x) = (\dots)^2 - (\dots)^2 = \dots - \dots$

3. $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2 = (\dots)^2 + 2 \times \dots \times \dots^2 = \dots + \dots + \dots$

4. $(2x + \dots)^2 = (\dots)^2 + 2 \times \dots \times \dots + 9 = \dots + \dots + \dots$

5. $(\dots + 5)^2 = (\dots)^2 + 2 \times x \times \dots + \dots = \dots + \dots + \dots$

6. $(\dots - \dots)(4x + \dots) = (\dots)^2 - \dots^2 = \dots - 169$

5 Factorisation à trous

Complétez les pointillés dans les factorisations proposées :

1. $16x^2 - 9 = (\dots)^2 - (\dots)^2 = (\dots + \dots)(\dots - \dots)$

2. $1 + 16x + 64x^2 = \dots^2 + 2 \times \dots \times \dots + (\dots)^2 = (\dots + \dots)^2$

3. $x^2 - 18x + 81 = \dots^2 - 2 \times \dots \times \dots + \dots^2 = (\dots - \dots)^2$

4. $\frac{1}{9}x^2 + x + \frac{9}{4} = (\dots)^2 + 2 \times \dots \times \dots + (\dots)^2 = (\dots + \dots)^2$

5. $\dots - 4x^2 = \dots^2 - (\dots)^2 = (18 + \dots)(18 - \dots)$

6. $\dots + 96x + \dots = (\dots)^2 + 2 \times \dots \times \dots + (12x)^2 = (\dots + \dots)^2$

6 Factorisation sans trous

1. Complétez les trois factorisations :

• $a^2 + 2ab + b^2 = \dots$ (n° 1) • $a^2 - 2ab + b^2 = \dots$ (n° 2) • $a^2 - b^2 = \dots$ (n° 3)

2. Pour chacune des expressions proposées, précisez le numéro de la factorisation utilisée, a et b , puis factorisez.

• $A = 16 - x^2$

• $B = 100x^2 - 49$

• $C = 36x^2 - 12x + 1$

• $D = 4 + 36x + 81x^2$

7 Calcul littéral et identités remarquables

Développez, réduisez et ordonnez :

• $A = 2(5 - 3x)^2 - 3(1 - 7x)^2$

• $B = (x + 8)^2 - (4 - 2x)(4 + 2x)$

8 Les trois identités remarquables dans le même calcul !

Montrez que $(2 + 6\sqrt{7})^2 + (4\sqrt{7} - 3)^2 + (1 - \sqrt{377})(1 + \sqrt{377}) = 1$.

9 Elles sont partout...

Calculez l'aire exacte d'un carré de côté $1 + \sqrt{3}$.

10 Trop fort...

1. x est un réel quelconque.

Développez $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$.

2. Déduisez-en sans calculatrice $1\,003^2 - 997^2$.

11 Racine de racine

1. Calculez, sous la forme $a + b\sqrt{5}$ avec a et b entiers, le nombre $(3 + 2\sqrt{5})^2$.

2. Déduisez-en la valeur exacte de $\sqrt{12\sqrt{5} + 29}$.

→ Vers le Brevet



12 Encore tout un programme

On effectue le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Ajouter 3
- Calculer le carré du nombre obtenu
- Lui retrancher le carré du nombre de départ
- Écrire le résultat final

1. Lorsque le nombre choisi est 2, quel est le résultat final ?
2. Le nombre choisi au départ étant x , exprimez le résultat final en fonction de x .
3. On considère l'expression $P = (x + 3)^2 - x^2$. Développez puis réduisez P .
4. Quel nombre x doit-on choisir pour obtenir un résultat final égal à 39 ?

13 Le classique

On considère l'expression $A = (4x - 5)^2 - 81$.

1. Calculez A pour $x = \sqrt{3}$.
2. Développez A .
3. Factorisez A en remarquant la différence de deux carrés.

→ QCM

1. $(a + b)^2$ est le développement du carré d'une somme.

Réponse : **b** $a^2 + 2ab + b^2$.

2. La différence de deux carrés $a^2 - b^2$ se factorise en $(a + b)(a - b)$.

Réponse : **a** $(a + b)(a - b)$.

3. La somme de deux carrés $a^2 + b^2$ n'est pas une identité remarquable.

Réponse : **c** n'est pas une identité remarquable.

4. $a^2 - 2ab - b^2$ ressemble à un développement connu, mais c'est tout !

Réponse : **c** n'est pas une identité remarquable.

5. $(2x + 1)(2x - 1)$ est de la forme $(a + b)(a - b)$ qui se développe en $a^2 - b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 1$.

$$(2x + 1)(2x - 1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1.$$

Réponse : **b** $4x^2 - 1$.

6. $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = (3x + 1)^2$
car est de la forme $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = 3x$ et $b = 1$.

Réponse : **a** $(3x + 1)^2$.

$$7. x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2).$$

De plus, $x - 2 = -2 + x$ d'où $x^2 - 4 = (x + 2)(-2 + x)$.

Réponses : **a** $(x - 2)(x + 2)$ et **c** $(x + 2)(-2 + x)$.

$$\begin{aligned} \text{2. 1. Vrai. } \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$2. \text{ Vrai. } (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) = x^2 - (\sqrt{7})^2 = x^2 - 7.$$

$$3. \text{ Faux. } (1 + \sqrt{2})^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$4. \text{ Vrai. } (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 - 3 = -1 \text{ (nombre entier).}$$

Gagnez
des points !
En apprenant vos formules
par cœur.

Piège à éviter
 $(2x)^2 = 4x^2$.

Gagnez
des points !
 $a = 2x$ et $b = \frac{1}{2}$.

Rappel
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

5. Faux. $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$
 $\neq (1-x)(1+x).$

6. Faux. $x^2 + 4x + 1 = x^2 + 2 \times 2 \times x + 1^2.$

Le double produit $2 \times 2 \times x$ ne correspond pas à celui de $(x+1)^2$ (on devrait avoir $2 \times x \times 1$). Ce n'est donc pas le développement d'une identité remarquable.

7. Vrai. $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2 = (x+2)^2.$

C'est bien le développement d'un produit remarquable.

L'astuce du prof
Vérifiez le double produit.

→ Exercices d'entraînement

3 1. a) $(5x-8)^2$ est de la forme $(a-b)^2$ qui se développe en $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 8$.

b) $a^2 = (5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25x^2;$

$b^2 = 8^2 = 8 \times 8 = 64;$

$2ab = 2 \times 5x \times 8 = 80x.$

c) On en déduit : $(5x-8)^2 = 25x^2 - 80x + 64.$

2. ● $(12+x)^2$ est de la forme $(a+b)^2$ qui se développe en $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 12$ et $b = x$.

● $a^2 = 12^2 = 144;$

$b^2 = x^2;$

$2ab = 2 \times 12 \times x = 24x.$

● On en déduit : $(12+x)^2 = 144 + 24x + x^2.$

Rappel
C'est $5x$ qui est élevé au carré !

4 1. On utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 7$.

Ainsi $a^2 = x^2$

$2ab = 2 \times x \times 7 = 14x$

$b^2 = 7^2 = 49$

$(x-7)^2 = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49.$

2. On utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = 11$ et $b = 6x$.

Ainsi $a^2 = 11^2 = 121$

Méthode
Écrivez l'égalité remarquable utilisée.

$$b^2 = (6x)^2 = 6^2 \times x^2 = 36x^2$$

$$(11 - 6x)(11 + 6x) = (11)^2 - (6x)^2 = 121 - 36x^2.$$

3. On utilise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = \frac{1}{2}x$ et $b = 4$.

$$\text{Ainsi } a^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 = \frac{1}{4}x^2;$$

$$2ab = 2 \times \frac{1}{2}x \times 4 = 4x \text{ et } b^2 = 4^2 = 16$$

$$\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}x \times 4 + 4^2 = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 16.$$

4. On utilise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b^2 = 9$.

$$\text{Ainsi } a^2 = (2x)^2 = 2^2 x^2 = 4x^2;$$

comme $b^2 = 9$, $b = 3$ (la solution -3 étant exclue à cause des signes $+$ de l'identité);

$$2ab = 2 \times 2x \times 3 = 12x$$

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 9 = 4x^2 + 12x + 9.$$

5. On utilise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $b = 5$.

$$\text{Ainsi } 2ab = 2 \times x \times 5 = 10x$$

$$b^2 = 5^2 = 25$$

$$(x + 5)^2 = (x)^2 + 2 \times x \times 5 + 25 = x^2 + 10x + 25.$$

6. On utilise $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ avec $a = 4x$ et $b^2 = 169$.

$$\text{Ainsi } a^2 = (4x)^2 = 4^2 x^2 = 16x^2$$

$$b = \sqrt{169} = 13$$

$$(4x - 13)(4x + 13) = (4x)^2 - 13^2 = 16x^2 - 169.$$

5 1. L'égalité identifiée est $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a^2 = 16x^2$ et $b^2 = 9$.

$$\text{Ainsi } a^2 = 16x^2 = 4^2 x^2 = (4x)^2$$

$$b^2 = 9 = 3^2$$

D'où $a = 4x$ et $b = 3$.

$$16x^2 - 9 = (4x)^2 - (3)^2 = (4x + 3)(4x - 3).$$

2. On reconnaît $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

avec $a^2 = 1^2$, $2ab = 16x$ et $b^2 = 64x^2 = 8^2 x^2 = (8x)^2$.

Rappel

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right).$$

Remarque

Ça se complique
car on ne connaît que b^2 .

L'astuce du prof

C'est le $2ab$ qui nous aide
à trouver a .

Méthode

Écrivez l'égalité
remarquable utilisée dans
le sens de la factorisation.

On en déduit $a = 1$ et $b = 8x$.

$$1 + 16x + 64x^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 8x + (8x)^2 = (1 + 8x)^2.$$

3. Dans $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, on identifie $a^2 = x^2$; $2ab = 18x$ et $b^2 = 81 = 9^2$.

On en déduit $a = x$ et $b = 9$.

$$x^2 - 18x + 81 = x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2 = (x - 9)^2.$$

4. Dans $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,

on identifie $a^2 = \frac{1}{9}x^2$; $2ab = x$ et $b^2 = \frac{9}{4}$.

$$\text{Comme } a^2 = \frac{1}{9}x^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 x^2 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2$$

$$b^2 = \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

on déduit $a = \frac{1}{3}x$ et $b = \frac{3}{2}$.

$$\frac{1}{9}x^2 + x + \frac{9}{4} = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + 2 \times \cancel{\frac{1}{3}x} \times \cancel{\frac{3}{2}} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)^2.$$

5. De $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,

on identifie $a = 18$ et, de $b^2 = 4x^2 = 2^2x^2 = (2x)^2$, on déduit $b = 2x$.

$$a^2 = 18^2 = 324$$

$$324 - 4x^2 = 18^2 - (2x)^2 = (18 + 2x)(18 - 2x).$$

6. On reconnaît $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,

avec $2ab = 96x$ et $b = 12x$.

On déduit $b^2 = (12x)^2 = 12^2x^2 = 144x^2$;

de $2ab = 96x = 2 \times a \times 12x$, il vient $a = 4$

et $a^2 = 4^2 = 16$.

$$16 + 96x + 144x^2 = (4)^2 + 2 \times 4 \times 12x + (12x)^2 = (4 + 12x)^2.$$

6 1. Les trois factorisations des égalités remarquables sont :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \text{ (n° 1)}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \text{ (n° 2)}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \text{ (n° 3)}$$

2. ● $A = 16 - x^2 = 4^2 - x^2$ est de la forme $a^2 - b^2$ (identité n° 3) avec $a = 4$ et $b = x$.

$$A = (4 + x)(4 - x).$$

Méthode

On identifie a^2 et b^2 .
Ensuite, on détermine
 a et b .

L'astuce du prof

On obtient b facilement,
puis on se sert de $2ab$
pour trouver a .

Méthode

On identifie clairement
 a et b .

● $B = 100x^2 - 49 = 10^2x^2 - 7^2 = (10x)^2 - 7^2$ est de la forme $a^2 - b^2$ (identité n° 3) avec $a = 10x$ et $b = 7$.

D'où $B = (10x + 7)(10x - 7)$.

● $C = 36x^2 - 12x + 1$ est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$ (identité n° 2) avec $a = 6x$ et $b = 1$.

$$C = (6x - 1)^2.$$

● $D = 4 + 36x + 81x^2$ est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ (identité n° 1) avec $a = 2$ et $b = 9x$.

$$D = (2 + 9x)^2.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \bullet A &= 2(5 - 3x)^2 - 3(1 - 7x)^2 \\ &= 2(5^2 - 2 \times 5 \times 3x + (3x)^2) - 3(1^2 - 2 \times 1 \times 7x + (7x)^2) \\ &= 2(25 - 30x + 9x^2) - 3(1 - 14x + 49x^2) \\ &= (50 - 60x + 18x^2) - (3 - 42x + 147x^2) \\ &= 50 - 60x + 18x^2 - 3 + 42x - 147x^2 \\ &= -129x^2 - 18x + 47. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet B &= (x + 8)^2 - (4 - 2x)(4 + 2x) \\ &= (x^2 + 2 \times x \times 8 + 8^2) - (4^2 - (2x)^2) \\ &= (x^2 + 16x + 64) - (16 - 4x^2) \\ &= x^2 + 16x + 64 - 16 + 4x^2 \\ &= 5x^2 + 16x + 48. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{8} (2 + 6\sqrt{7})^2 + (4\sqrt{7} - 3)^2 + (1 - \sqrt{377})(1 + \sqrt{377}) \\ &= [2^2 + 2 \times 2 \times 6\sqrt{7} + (6\sqrt{7})^2] \\ &\quad + [(4\sqrt{7})^2 - 2 \times 4\sqrt{7} \times 3 + 3^2] + [1^2 - (\sqrt{377})^2] \\ &= [4 + 24\sqrt{7} + 36 \times 7] + [16 \times 7 - 24\sqrt{7} + 9] \\ &\quad + [1 - 377] \\ &= [4 + 24\sqrt{7} + 252] + [112 - 24\sqrt{7} + 9] + [1 - 377] \\ &= [256 + 24\sqrt{7}] + [121 - 24\sqrt{7}] + [-376] \\ &= 256 + 24\sqrt{7} + 121 - 24\sqrt{7} - 376 \\ &= 256 + 121 - 376 \\ &= 377 - 376 \\ &= 1. \end{aligned}$$

C'est le résultat attendu.

Gagnez des points !

Développez chaque carré entre parenthèses.

Rappel

Quand il y a un signe moins devant une parenthèse, tous les signes des termes de la parenthèse changent.

Méthode

Développez dans des crochets chaque identité remarquable.

Rappel

$$(a\sqrt{b})^2 = a^2b.$$

Gagnez des points !

Vous DEVEZ trouver pour résultat 1. Sinon, vous vous êtes trompé(e).

9 L'aire $\mathcal{A}$ d'un carré de côté c est c^2 , avec ici $c = 1 + \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (1 + \sqrt{3})^2 \\ &= 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{3} + 3.\end{aligned}$$

Soit finalement $\mathcal{A} = 4 + 2\sqrt{3}$ (valeur exacte).

10 1. On développe $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$.

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - (x - 3)^2 &= (x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) - (x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2) \\ &= (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) \\ &= \cancel{x^2} + 6x + \cancel{9} - \cancel{x^2} + 6x - \cancel{9} \\ &= 12x.\end{aligned}$$

2. $1\,003^2 - 977^2$ est l'application de l'expression $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$ avec $x = 1\,000$.

$$\text{Or } (x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x.$$

En conclusion, $1\,003^2 - 977^2 = 12 \times 1\,000 = 12\,000$.

$$\begin{aligned}11 \text{ 1. } (3 + 2\sqrt{5})^2 &= 3^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 \\ &= 9 + 12\sqrt{5} + 4 \times 5 \\ &= 9 + 12\sqrt{5} + 20\end{aligned}$$

$$= 29 + 12\sqrt{5} \text{ est bien de la forme } a + b\sqrt{5} \text{ avec } a = 29 \text{ et } b = 12.$$

2. On a montré que $(3 + 2\sqrt{5})^2 = 29 + 12\sqrt{5}$.

$$\text{On en déduit } 3 + 2\sqrt{5} = \sqrt{12\sqrt{5} + 29}$$

$$\text{ou } -\sqrt{12\sqrt{5} + 29}.$$

Comme $3 + 2\sqrt{5}$ est un nombre positif, il vient :

$$3 + 2\sqrt{5} = \sqrt{12\sqrt{5} + 29}.$$

L'astuce du prof

Quand il est écrit
« déduisez-en », on utilise
toujours le résultat de
la question précédente.

Rappel

Quand $A^2 = B^2$,
 $A = B$ ou $A = -B$.

➔ Vers le Brevet

12 1. Le nombre de départ est 2 ; $2 + 3 = 5$; $5^2 = 25$; $25 - 2^2 = 25 - 4 = 21$.

Lorsque le nombre choisi est 2, le résultat final est 21.

2. On choisit pour nombre de départ x .

En ajoutant 3, on obtient $x + 3$.

Le carré du résultat est $(x + 3)^2$.

On retranche le carré du nombre de départ soit x^2 , on obtient pour résultat final : $(x + 3)^2 - x^2$.

3. On développe et réduit l'expression P :

$$\begin{aligned} P &= (x + 3)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) - x^2 \\ &= (x^2 + 6x + 9) - x^2 \\ &= \cancel{x^2} + 6x + 9 - \cancel{x^2} \\ &= 6x + 9. \end{aligned}$$

4. On cherche x de façon que le résultat final soit égal à 39.

On est ramené à résoudre l'équation $P = 39$.

$$(x + 3)^2 - x^2 = 39$$

$$6x + 9 = 39$$

$$6x = 39 - 9$$

$$6x = 30$$

$$x = \frac{30}{6}$$

$$x = 5.$$

Pour obtenir comme résultat final 39, on doit choisir 5 pour nombre de départ.

13 1. Pour $x = \sqrt{3}$,

$$\begin{aligned} A &= (4\sqrt{3} - 5)^2 - 81 \\ &= ((4\sqrt{3})^2 - 2 \times (4\sqrt{3}) \times 5 + 5^2) - 81 \\ &= (16 \times 3 - 40\sqrt{3} + 25) - 81 \\ &= (48 - 40\sqrt{3} + 25) - 81 \\ &= 48 - 40\sqrt{3} + 25 - 81 \\ &= -8 - 40\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2. On développe :

$$\begin{aligned} A &= (4x - 5)^2 - 81 \\ &= ((4x)^2 - 2 \times 4x \times 5 + 5^2) - 81 \\ &= (16x^2 - 40x + 25) - 81 \\ &= 16x^2 - 40x + 25 - 81 \\ &= 16x^2 - 40x - 56. \end{aligned}$$

Gagnez
des points !

On applique le programme
au nombre x .

L'astuce du prof

On se sert
du calcul précédent.

Rappel

$$(4\sqrt{3})^2 = 4^2 \times (\sqrt{3})^2.$$

Piège à éviter

On met bien
les parenthèses autour de
($4x$) !

3. $A = (4x - 5)^2 - 81 = (4x - 5)^2 - 9^2$.

On factorise A en remarquant que c'est une expression de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 4x - 5$ et $b = 9$, c'est la différence de deux carrés. A se factorise alors en $(a + b)(a - b)$.

$$\begin{aligned} A &= [(4x - 5) + 9][(4x - 5) - 9] \\ &= (4x - 5 + 9)(4x - 5 - 9) \\ &= (4x + 4)(4x - 14). \end{aligned}$$

Méthode

On factorise A avec une égalité remarquable.

Équations et problèmes

1 Définition et propriétés

1 Définition

- Une **équation à une inconnue** est une égalité dans laquelle se trouve un nombre inconnu. Ce nombre est souvent désigné par la lettre x .
- **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles que peut prendre l'inconnue pour que l'égalité soit vérifiée. Ces valeurs sont appelées **les solutions** de l'équation.

Exemple : $x + 4 = 3$ est une équation qui a pour solution -1 , car en remplaçant x par -1 , on obtient $-1 + 4 = 3$, l'égalité est bien vérifiée.

2 Propriétés

- On ne change pas une égalité lorsqu'on ajoute (ou soustrait) le même nombre à chacun des 2 membres :

$$\text{SI } a = b \quad \text{ALORS } a + c = b + c$$

On ajoute c

$$\text{SI } a = b \quad \text{ALORS } a - c = b - c$$

On retranche c

- On ne change pas une égalité lorsqu'on multiplie (ou divise) par le même nombre (non nul) chacun des 2 membres :

$$\text{SI } a = b \quad \text{ALORS } a \times c = b \times c$$

On multiplie par c

$$\text{SI } a = b \quad \text{ALORS } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

On divise par c **Exemple :**

$$2x + 3 = 5$$

$$2x + 3 - 3 = 5 - 3 \quad \text{On retranche 3 à chacun des deux membres.}$$

$$2x = 2$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$$

On divise par 2 chacun des deux membres.

$$x = 1$$

La solution de cette équation est 1.

EXERCICE RÉSOLU

► « Comprendre » une équation

ÉNONCÉ

Soit l'égalité $3x^2 + 7x = 6$.

1. Expliquez pourquoi il s'agit d'une équation. Donnez son degré.
2. Le nombre 4 est-il solution de cette équation? Et le nombre -3 ?
3. Le tableau suivant donne des valeurs approchées de $3x^2 + 7x$ pour x compris entre 0 et 1. En utilisant ce tableau, conjecturez un encadrement le plus précis possible d'une solution de l'équation $3x^2 + 7x = 6$. On notera cette solution a .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Valeurs de x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
2	Valeurs de $3x^2 + 7x$	0	0.73	1.52	2.37	3.28	4.25	5.28	6.37	7.52	8.73	10
3												

CORRIGÉ

1. L'égalité $3x^2 + 7x = 6$ comporte une inconnue x .
Il s'agit donc bien d'une équation.
L'inconnue x est à la puissance 2. Il s'agit donc d'une équation du second degré.

2. ● On remplace x par 4 :

$$3 \times 4^2 + 7 \times 4 = 3 \times 16 + 28 = 48 + 28 = 76 \neq 6.$$

On en déduit que 4 n'est pas solution de l'équation.

● On remplace x par -3 :

$$3 \times (-3)^2 + 7 \times (-3) = 3 \times 9 - 21 = 27 - 21 = 6.$$

On retrouve le second membre de l'équation.

On en déduit que -3 est une solution de l'équation.

3. Dans le tableau, on recherche sur la 3^e ligne les valeurs de $3x^2 + 7x$ les plus proches de 6.

On voit que pour $x = 0,6$, $3x^2 + 7x \approx 5,28 < 6$ et pour $x = 0,7$, $3x^2 + 7x \approx 6,37 > 6$. Il semblerait donc qu'entre 0,6 et 0,7, le nombre $3x^2 + 7x$ prenne la valeur 6.

L'encadrement d'une solution de l'équation $3x^2 + 7x = 6$ est donc :

$$0,6 < a < 0,7.$$

Rappel

Le degré de l'équation est donné par le plus grand exposant de l'inconnue.

Rappel

Un nombre est solution d'une équation s'il vérifie l'égalité.

Remarque

En mathématiques, une conjecture est une hypothèse.

2 Les différentes équations

1 Équation du premier degré

Une équation du premier degré est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$ax + b = cx + d$$

Le nombre x est à la puissance 1.

Voir la méthode page 90 pour la résolution de telles équations.

2 Équation produit nul

• Comme son nom l'indique, il s'agit d'une équation dont le premier membre est un produit de facteurs et le second membre est nul (vaut zéro).

$$\underbrace{(ax + b)(cx + d)}_{\text{Produit de facteurs}} = \underbrace{0}_{\text{Nul}}$$

• Pour résoudre de telles équations, on utilise le théorème suivant :

« Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul ».

Exemple : $(3x - 5)(4 - x) = 0$ est une équation produit nul. On applique le théorème précédent pour résoudre cette équation. L'un au moins des 2 facteurs doit être nul :

$$3x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 4 - x = 0$$

$$x = \frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad x = 4. \quad \text{Cette équation a deux solutions } \frac{5}{3} \text{ et } 4.$$

3 Équation « carré isolé » de la forme $x^2 = a$

C'est une équation dans laquelle le carré est dans un seul membre (le membre de droite ne comporte pas de « x »).

Cette équation a :

- une solution si $a = 0$: $x = 0$.
- deux solutions si $a > 0$: $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.
- aucune solution si $a < 0$.

Exemple :

L'équation $x^2 = 3$ a deux solutions car $3 > 0$. Ces solutions sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

EXERCICE RÉSOLU

► Reconnaître une équation puis la résoudre

ÉNONCÉ

Indiquez, pour chacune des équations suivantes, quel est son type (1^{er} degré, produit nul, carré isolé), puis résolvez-la.

1. $(x-5)(2x-7) = 0$

2. $5x+7 = 2(x-7)$

3. $x^2 = 6$

CORRIGÉ

1. $(x-5)(2x-7) = 0$.

Il s'agit d'une équation produit nul. Un produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$$x-5 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x-7 = 0$$

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad 2x = 7$$

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{2}$$

Cette équation a deux solutions, 5 et $\frac{7}{2}$.

2. $5x+7 = 2(x-7)$.

Il s'agit d'une équation du premier degré.

$$5x+7 = 2(x-7)$$

$$5x+7 = 2x-14$$

$$5x-2x = -14-7$$

$$3x = -21$$

$$x = \frac{-21}{3} = -7$$

Cette équation a pour unique solution, -7.

3. $x^2 = 6$.

Il s'agit d'une équation de type « carré isolé ». En effet, le membre de gauche ne comporte qu'un carré et le membre de droite ne comporte pas de « x ».

6 est un nombre strictement positif.

On en déduit que cette équation a deux solutions, $-\sqrt{6}$ et $\sqrt{6}$.

Remarque

Résoudre une équation produit nul revient à résoudre deux équations.

Méthode

On utilise les règles sur les égalités.

➔ Résoudre une équation du premier degré

ÉNONCÉ

Résolvez l'équation :

$$\frac{x+3}{2} = -3x+2.$$

MÉTHODE

1. On reconnaît une équation du premier degré.
2. Si l'équation comporte un quotient, on multiplie ses deux membres par un même nombre bien choisi qui permet d'écrire l'équation sans dénominateur.
3. On regroupe les « termes en x » dans le membre de gauche et les termes sans x (les constantes) dans le membre de droite.
4. Quand l'équation est sous la forme $ax = b$, on divise les deux membres par a pour obtenir la solution.
5. On rédige la conclusion du calcul à l'aide d'une phrase.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
$\frac{x+3}{2} = -3x+2$	1. On reconnaît une équation du premier degré (il n'y a pas de x^2 , ni de produit contenant des x).
$2 \times \left(\frac{x+3}{2} \right) = (-3x+2) \times 2$ $x+3 = -6x+4$	2. Il y a un quotient. On multiplie par 2 les deux membres pour ne plus avoir de dénominateur.
$x+6x = 4-3$ $7x = 1$	3. On rassemble les x dans le premier membre et les « non x » (c'est-à-dire les constantes) dans le second.
$x = \frac{1}{7}$	4. On divise par 7 pour obtenir x .
La solution de l'équation est $\frac{1}{7}$.	5. On écrit la conclusion.

➔ Résoudre un problème avec une équation

ÉNONCÉ

Une boulangère très joueuse demande à Louise de résoudre l'énigme suivante pour trouver le prix d'une baguette de pain.

« La moitié du prix de la baguette augmenté de 0,7 € est égale au double du prix de la baguette diminué de 0,65 € ».

Comment Louise doit-elle s'y prendre pour retrouver le prix de la baguette ?

MÉTHODE

1. On choisit une inconnue. Il s'agit souvent du nombre cherché.
2. On met le problème en équation. On traduit mathématiquement de deux façons différentes une même quantité. Cela permet d'obtenir une égalité.
3. On résout l'équation.
4. On rédige une phrase de conclusion.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
On note x le prix d'une baguette de pain.	1. On choisit un nombre positif dont on connaît un ordre de grandeur.
• Une baguette coûte x €, la moitié coûte $0,5x$ €. On augmente ce prix de 0,7 €, on obtient : $0,5x + 0,7$. • Le double du prix de la baguette est $2 \times x$, soit $2x$. On diminue ce prix de 0,65 €, on obtient $2x - 0,65$. • Ces deux prix sont égaux, on obtient l'équation : $0,5x + 0,7 = 2x - 0,65$.	2. La mise en équation du problème se fait pas à pas. On traduit de deux façons différentes en langage mathématique les deux prix proposés.
$0,5x - 2x = -0,65 - 0,7$ $-1,5x = -1,35$ $x = \frac{-1,35}{-1,5} = 0,9$	3. On résout l'équation : on reconnaît une équation du premier degré. On utilise les règles de résolution relatives à ce type d'équation.
Le prix de la baguette est de 0,9 €.	4. On rédige une phrase de conclusion. On fait attention à la cohérence du résultat.



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. Trouvez les équations produit nul parmi les équations suivantes :

a) ☐ $(3x + 4)(x - 5) = 1$ b) ☐ $(3x - 5) - (5x + 8) = 0$ c) ☐ $x(x + 3) = 0$

2. Les solutions de l'équation $(3 - x)(2x - 4) = 0$ sont :

a) ☐ 3 et -2 b) ☐ -3 et 2 c) ☐ 2 et 3

3. La solution de l'équation $2x - 15 = 4x - 1$ est :

a) ☐ un nombre entier b) ☐ 7 c) ☐ -7

4. L'équation $\frac{x}{2} = 1$ a pour solution :

a) ☐ x b) ☐ 2 c) ☐ -2

5. L'équation $x^2 + 3 = 0$ admet :

a) ☐ aucune solution b) ☐ 2 solutions : 3 et -3 c) ☐ 2 solutions : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. L'équation $(x + 1) - (2x + 6) = 0$ admet 2 solutions.	☐ V ☐ F
2. L'équation $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ a pour solution $\frac{1}{6}$.	☐ V ☐ F
3. L'équation $\frac{x}{3} = \frac{x}{2}$ a pour unique solution 0.	☐ V ☐ F
4. Il existe des équations admettant plus de 2 solutions.	☐ V ☐ F
5. L'équation $x + 5 = 7(x - 1)$ a une solution qui est un nombre négatif.	☐ V ☐ F
6. Toute équation a au moins une solution.	☐ V ☐ F
7. L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution.	☐ V ☐ F
8. Une solution de l'équation $x^2 + x = 0$ est -1.	☐ V ☐ F

→ Exercices d'entraînement



3 Comme dans l'exercice résolu

Pour chacune des équations suivantes, indiquez sa nature (premier degré, produit nul, carré isolé), puis résolvez-la.

1. $5(x+3) = 2(x-7)$

4. $2(6x-5) + 4x - 2 = 0$

2. $(2x-4)(4-x) = 0$

5. $\frac{x+4}{5} = 2x+1$

3. $x^2 = 7$

6. $3x^2 + 7 = 0$

4 Où sont les solutions ?

Reliez chaque équation à sa (ou ses) solution(s) :

$(2x-2)(x-1) = 0$ ●

$5x = 5$ ● ● -1 et 1

$2x = 0$ ● ● 1

$x^2 = 1$ ● ● -1

● 0

$x(1+x) = 0$ ● ● -1 et 0

$(5-5x)(x+1) = 0$ ●

5 Une expression qui fait peur

Soit $A = (4x+1)(x-2) + (x-2)(3x-5)$.

1. Factorisez A en remarquant un facteur commun.

2. Déduisez-en les solutions de l'équation $A = 0$.

6 Avec une égalité remarquable

Soit $B = (x+5)^2 - 4$.

1. Le nombre $x = -1$ est-il solution de l'équation $B = 0$?

2. Factorisez B en utilisant l'égalité remarquable : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

3. Résolvez l'équation $B = 0$.

7 À la boulangerie

Juliette achète 5 croissants et 3 pains au chocolat à la boulangerie. Elle paie avec un billet de 10 €. La boulangère lui rend 2,9 € et lui dit que le pain au chocolat coûte 0,10 € de plus que le croissant. Juliette souhaite retrouver le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat. Est-ce possible ? Si oui, aidez-la !

8 Une classe avec beaucoup de filles

Dans une classe de 36 élèves de troisième, il y a trois fois plus de filles que de garçons. On souhaite trouver le nombre de garçons et de filles qui constituent cette classe.

En utilisant une équation, résolvez ce problème.

→ Vers le Brevet



9 Une équation bien compliquée...

On considère l'équation (E) : $\frac{105 - 6x}{3} = x^2$.

1. a) Calculez $\frac{105 - 6 \times (-7)}{3}$ puis $(-7)^2$.

b) Que pouvez-vous en déduire pour l'équation (E) ?

2. a) Développez $(3x - 15)(x + 7)$.

b) Expliquez pourquoi résoudre l'équation $\frac{105 - 6x}{3} = x^2$ revient à résoudre l'équation $(3x - 15)(x + 7) = 0$.

3. Déterminez les solutions de (E).

10 Bric à brac

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $5(2x - 4) = -2(x - 2)$?

2. Le nombre (-1) est-il solution de l'équation $\frac{x+3}{10} = \frac{x+2}{5}$?

3. Le salaire, en euros, d'un commercial vaut : $1\,100 + 0,005x$

x représentant le montant en euros des ventes qu'il réalise dans le mois.

Au mois d'avril, le commercial touche un salaire de 2 500 €. Quel est le montant des ventes qu'il a réalisées durant ce mois ?

→ QCM

1. • $(3x + 4)(x - 5) = 1$. Le premier membre de l'équation est bien un produit, mais le second membre n'est pas nul.

• $(3x - 5) - (5x + 8) = 0$. Le premier membre de l'équation n'est pas un produit. C'est une différence.

• $x(x + 3) = 0$. Le premier membre est un produit de deux facteurs et le second est nul.

Réponse : c) $x(x + 3)$.

2. L'équation $(3 - x)(2x - 4) = 0$ est une équation produit nul.

Un produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des deux facteurs est nul.

$$3 - x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 4 = 0$$

$$-x = -3 \quad \text{ou} \quad 2x = 4$$

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{2} = 2. \text{ L'équation a donc deux solutions : 2 et 3.}$$

Réponse : c) 2 et 3.

3. L'équation $2x - 15 = 4x - 1$ est une équation du premier degré.

$$2x - 15 = 4x - 1$$

$$2x - 4x = -1 + 15$$

$$-2x = 14$$

$$x = \frac{14}{-2} = -7. \text{ La solution de l'équation est } -7.$$

Réponses : a) un nombre entier et **c)** -7 .

4. En multipliant par 2 chacun des membres de l'équation, on obtient :

$$2 \times \frac{x}{2} = 1 \times 2, \text{ soit } x = 2. \text{ On en déduit que l'équation a une solution : 2.}$$

Réponse : b) 2.

5. L'équation $x^2 + 3 = 0$ s'écrit $x^2 = -3$.

-3 est un nombre strictement négatif, donc l'équation n'a pas de solution (il n'existe pas de nombre dont le carré soit strictement négatif).

Réponse : a) aucune solution.

Rappel

Une équation produit nul est une équation du type

$$A \times B = 0.$$

Remarque

On pourrait éviter de résoudre cette équation. En remplaçant x par 7 puis par -7 dans chacun des membres, on montrerait que -7 était solution.

2 1. Faux. L'équation $(x + 1) - (2x + 6) = 0$ s'écrit $(x + 1) - 2x - 6 = 0$ soit $-x = 5$, c'est-à-dire $x = -5$. L'équation n'a qu'une seule solution : -5 .

2. Faux. Cette équation a pour solution :

$$x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}.$$

3. Vrai. En effectuant un produit en croix, l'équation s'écrit $2 \times x = 3 \times x$ soit $3x - 2x = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. L'équation a donc une unique solution : 0 .

4. Vrai. Par exemple, l'équation $x(x + 1)(x + 2) = 0$ admet trois solutions. En effet, il s'agit d'une équation produit nul avec 3 facteurs.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$$x = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0.$$

Les solutions sont $0, -1$ et -2 .

5. Faux.

$$x + 5 = 7(x - 1)$$

$$x + 5 = 7x - 7 \text{ On développe.}$$

$$x - 7x = -7 - 5 \text{ On rassemble les « } x \text{ » dans le premier membre.}$$

$$-6x = -12$$

$$x = \frac{-12}{-6} \text{ On divise par } -6 \text{ pour obtenir } x.$$

$$x = 2 \text{ La solution est un nombre positif.}$$

6. Faux. Il existe des équations n'admettant aucune solution. Par exemple, $x^2 = -5$ n'a pas de solution car -5 est négatif.

7. Vrai. L'équation $x^2 + 1 = 0$ s'écrit $x^2 = -1$. -1 étant strictement négatif, cette équation n'a pas de solution (il n'existe pas de nombre dont le carré est strictement négatif).

8. Vrai. On remplace x par -1 dans le premier membre :

$$(-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0, \text{ donc } -1 \text{ est solution de l'équation.}$$

Rappel

Cette équation n'est pas une équation produit nul. Le premier membre n'est pas un produit.

Remarque

On peut imaginer (en généralisant) qu'il existe des équations admettant $4, 5, 6, \dots$ solutions.

Remarque

On peut aussi résoudre cette équation en factorisant le 1^{er} membre : $x(x + 1) = 0$. On obtient une équation produit nul dont les solutions sont -1 et 0 .

→ Exercices d'entraînement

- 3** 1. $5(x+3) = 2(x-7)$ est une équation du premier degré.

$$5(x+3) = 2(x-7)$$

$$5x + 15 = 2x - 14$$

$$5x - 2x = -14 - 15$$

$$3x = -29$$

$$x = \frac{-29}{3}$$

La solution de l'équation est $\frac{-29}{3}$.

2. $(2x-4)(4-x) = 0$ est une équation produit nul. Un produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des deux facteurs est nul.

$$2x-4 = 0 \quad \text{ou} \quad 4-x = 0$$

$$2x = 4 \quad \text{ou} \quad -x = -4$$

$$x = \frac{4}{2} \quad \text{ou} \quad x = 4$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

L'équation a deux solutions : 2 et 4.

3. $x^2 = 7$ est une équation de type carré isolé.

7 étant un nombre strictement positif, cette équation a deux solutions : $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$.

4. $2(6x-5) + 4x - 2 = 0$ est une équation du premier degré.

$$2(6x-5) + 4x - 2 = 0$$

$$12x - 10 + 4x - 2 = 0$$

$$16x = 12$$

$$x = \frac{12}{16}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \text{L'équation a une solution : } \frac{3}{4}.$$

Gagnez
des points !

On n'oublie pas
de simplifier le résultat.

5. L'équation $\frac{x+4}{5} = 2x+1$ est une équation du premier degré.

$$\frac{x+4}{5} = 2x+1$$

$$5 \times \left(\frac{x+4}{5} \right) = (2x+1) \times 5$$

$$x+4 = 10x+5$$

$$x-10x = 5-4$$

$$-9x = 1$$

$$x = \frac{1}{-9} \quad \text{La solution de l'équation est } -\frac{1}{9}.$$

Méthode

On multiplie par 5 les deux
membres de l'équation
pour se « débarrasser »
du dénominateur.

6. On écrit l'équation en isolant le carré : $3x^2 = -7$, soit $x^2 = \frac{-7}{3}$ qui est une équation du type $x^2 = a$.

$\frac{-7}{3}$ est négatif donc cette équation n'a pas de solution (il n'existe pas de nombre dont le carré soit strictement négatif).

4 On résout chacune des équations.

• $(2x - 2)(x - 1) = 0$ est une équation produit nul.

$$2x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0$$

$$2x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Cette équation a pour unique solution : 1.

• $5x = 5$ est une équation du premier degré. On divise par 5 pour obtenir x .

Soit $x = \frac{5}{5} = 1$. On en déduit que cette équation a une unique solution : 1.

• $2x = 0$ est une équation du premier degré. On divise par 2 pour obtenir x .

Soit $x = \frac{0}{2} = 0$. Cette équation a donc pour unique solution : 0.

• $x^2 = 1$ est une équation à « carré isolé ». 1 est un nombre strictement positif, on en déduit que cette équation a deux solutions $-\sqrt{1}$ et $\sqrt{1}$, soit -1 et 1.

• $x(1 + x) = 0$ est une équation produit nul.

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Cette équation a deux solutions : -1 et 0.

• $(5 - 5x)(x + 1) = 0$ est une équation produit nul.

$$5 - 5x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 = 0$$

$$-5x = -5 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

$$x = \frac{-5}{-5} \quad \text{ou} \quad x = -1$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Cette équation a deux solutions : -1 et 1.

$$\begin{aligned} 51. A &= \boxed{(4x + 1)(x - 2)} + \boxed{(x - 2)(3x - 5)} \\ &= (x - 2)[(4x + 1) + (3x - 5)] \\ &= (x - 2)(7x - 4) \end{aligned}$$

On obtient bien une forme factorisée car c'est un produit.

Piège à éviter

Ce n'est pas parce qu'il y a deux facteurs qu'il y a forcément 2 solutions.

L'astuce du prof

Le facteur commun se trouve de part et d'autre du signe +.

2. Pour résoudre l'équation $A = 0$, on utilise la forme factorisée de A
 $(x - 2)(7x - 4) = 0$. On reconnaît une équation produit nul.

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 7x - 4 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad 7x = 4$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{7}$$

Cette équation a deux solutions : 2 et $\frac{4}{7}$.

6 1. On remplace x par -1 .

$$B = (-1 + 5)^2 - 4 = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12.$$

Le résultat n'est pas 0. On en déduit que -1 n'est pas solution de l'équation $B = 0$.

$$\begin{aligned} 2. B &= (x + 5)^2 - 4 = (x + 5)^2 - 2^2 \\ &= (x + 5 + 2)(x + 5 - 2) = (x + 7)(x + 3). \end{aligned}$$

3. Pour résoudre l'équation $B = 0$, on utilise la forme factorisée de B .

$$x + 7 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0$$

$$x = -7 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

Cette équation a deux solutions : -3 et -7 .

7 On résout ce problème par une mise en équation.

• **Choix de l'inconnue :** soit x le prix d'un croissant.

• **Mise en équation :**

• Le prix d'un croissant est x €. Un pain au chocolat valant $0,1$ € de plus qu'un croissant, il coûte $(x + 0,1)$ €.

• Juliette a payé avec un billet de 10 € et la boulangère lui a rendu $2,9$ € : elle a donc payé $10 - 2,9 = 7,1$ €.

• On en déduit l'équation :

$$\underbrace{5x}_{\text{croissants}} + \underbrace{3(x + 0,1)}_{\text{pains au chocolat}} = 7,1$$

Méthode

On calcule l'intérieur de la parenthèse.

On ne développe pas avec l'égalité remarquable.

Gagnez des points !

Identifiez les valeurs de a et de b avant de factoriser. Ici, $a = (x + 5)$ et $b = 2$.

Gagnez des points !

Pensez aux quatre étapes décrites dans la méthode.

- **Résolution de l'équation** : il s'agit d'une équation du premier degré.

$$5x + 3(x + 0,1) = 7,1$$

$$5x + 3x + 0,3 = 7,1$$

$$8x = 7,1 - 0,3$$

$$8x = 6,8$$

$$x = \frac{6,8}{8}$$

$$x = 0,85$$

Rappel

On développe puis on regroupe les x dans le membre de gauche et les non x dans celui de droite.

- **Conclusion** : un croissant coûte 0,85 € et un pain au chocolat coûte 0,95 €.

- **8** On résout ce problème par une mise en équation

- **Choix de l'inconnue** : soit x le nombre de garçons.

- **Mise en équation** :

• Il y a trois fois plus de filles que de garçons. Il y a x garçons, il y a donc $3 \times x = 3x$ filles.

• Il y a 36 élèves au total.

On en déduit l'équation :

$$\underbrace{x}_{\text{garçons}} + \underbrace{3x}_{\text{filles}} = 36$$

- **Résolution de l'équation** : il s'agit d'une équation du premier degré.

$$x + 3x = 36$$

$$4x = 36$$

$$x = \frac{36}{4}$$

$$x = 9$$

Piège à éviter

On divise par 4 et non par -4 .

- **Conclusion** : il y a 9 garçons et 27 filles dans cette classe.

→ Vers le Brevet

9 1. a) $\frac{105 - 6 \times (-7)}{3} = \frac{105 + 42}{3} = \frac{147}{3} = 49$ et $(-7)^2 = 49$.

b) On en déduit que -7 est solution de l'équation (E).

2. a) $(3x - 15)(x + 7) = 3x^2 + 21x - 15x - 105 = 3x^2 + 6x - 105$.

b) En multipliant par 3 chaque membre, on obtient : $105 - 6x = 3 \times x^2$ soit

$3x^2 + 6x - 105 = 0$, ce qui revient (en utilisant le résultat précédent) à $(3x - 15)(x + 7) = 0$.

3. Il s'agit d'une équation produit. Un produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul :

$$\begin{array}{ll} 3x - 15 = 0 & \text{ou} \quad x + 7 = 0 \\ 3x = 15 & \text{ou} \quad x = -7 \\ x = 5 & \text{ou} \quad x = -7 \end{array}$$

Cette équation a deux solutions : 5 et -7.

10 1. On doit résoudre l'équation pour répondre à cette question. C'est une équation du premier degré.

$$\begin{aligned} 5(2x - 4) &= -2(x - 2) \\ 10x - 20 &= -2x + 4 \\ 10x + 2x &= 4 + 20 \\ 12x &= 24 \\ x &= \frac{24}{12} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Il y a une seule valeur de x qui vérifie l'égalité, c'est 2.

2. On remplace x par -1 dans chacun des deux membres :

$\frac{-1+3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ et $\frac{-1+2}{5} = \frac{1}{5}$. On obtient le même résultat : on en déduit que -1 est bien solution de cette équation.

3. ● Le salaire du commercial est $1\,100 + 0,005x$.

● Le commercial a gagné 2 500 €.

● On en déduit l'équation : $1\,100 + 0,005x = 2\,500$.

On obtient :

$$\begin{aligned} 1\,100 + 0,005x &= 2\,500 \\ 0,005x &= 2\,500 - 1\,100 \\ 0,005x &= 1\,400 \\ x &= \frac{1\,400}{0,005} \\ x &= 280\,000 \end{aligned}$$

En avril, le commercial a réalisé 280 000 € de ventes.

L'astuce du prof
Pensez à vérifier rapidement le résultat en remplaçant la valeur trouvée dans chacun des deux membres de l'équation.

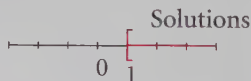
1 Définition et propriétés

1 Définitions

- Une **inéquation à une inconnue** est une inégalité dans laquelle se trouve un nombre inconnu. Ce nombre est souvent désigné par la lettre x .
- **Résoudre** une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles que peut prendre l'inconnue pour que l'inégalité soit vérifiée. Ces valeurs sont appelées **les solutions** de l'inéquation.

Exemple :

$x + 1 \geq 2$ est une inéquation qui a pour solutions tous les nombres supérieurs ou égaux à 1 que l'on représente graphiquement par :



2 Propriétés

- On ne change pas une inégalité lorsqu'on ajoute (ou soustrait) le même nombre à chacun des deux membres :

on ajoute ou retranche c

$$\text{SI } a < b \quad \text{ALORS } a + c < b + c \quad (a - c < b - c)$$

- Lorsqu'on multiplie (ou divise) par le même nombre (non nul) chacun des deux membres de l'inéquation, on conserve son sens lorsque le nombre est positif. On inverse son sens lorsque le nombre est négatif :

$$\text{SI } a < b \quad \text{ET } c > 0 \quad \text{ALORS } a \times c < b \times c \quad \left(\frac{a}{c} < \frac{b}{c}\right)$$

$$\text{SI } a < b \quad \text{ET } c < 0 \quad \text{ALORS } a \times c > b \times c \quad \left(\frac{a}{c} > \frac{b}{c}\right)$$

On multiplie
ou divise par c

Exemple :

$$3x - 2 < 1$$

$$3x - 2 + 2 < 1 + 2 \quad \text{On ajoute 2 à chacun des deux membres.}$$

$$3x < 3$$

$$\frac{3x}{3} < \frac{3}{3}$$

$$x < 1$$

On divise par $3 > 0$ (positif) chaque membre. On ne change donc pas le sens.

Les solutions de cette inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à 1.

EXERCICE RÉSOLU

► Comprendre une inéquation

ÉNONCÉ

Voici une inéquation dans laquelle n est un nombre entier positif :

$$\frac{n+3}{5} \leq n-6$$

1. a) 0 est-il solution de cette inéquation ? Justifiez votre réponse.

b) 12 est-il solution de cette inéquation ? Justifiez votre réponse.

2. Le tableau suivant donne les valeurs de $\frac{n+3}{5}$ et $n-6$ pour n compris entre 0 et 15. À l'aide de ce tableau, indiquez les valeurs de n solutions de l'inéquation.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	$(n+3)/5$	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6
3	$n-6$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

CORRIGÉ

1. a) Quand $n = 0$,

$$\bullet \quad \frac{n+3}{5} = \frac{0+3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\bullet \quad n-6 = 0-6 = -6$$

Et $\frac{3}{5} > -6$, on en déduit que 0 n'est pas solution de l'inéquation.

b) Quand $n = 12$,

$$\bullet \quad \frac{n+3}{5} = \frac{12+3}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bullet \quad n-6 = 12-6 = 6.$$

Et $3 < 6$, on en déduit que 12 est solution de l'inéquation.

2. Pour $0 \leq n \leq 8$ (c'est-à-dire pour n compris entre 0 et 8), les valeurs de $\frac{n+3}{5}$ sont supérieures à celles de $n-6$.

Pour $n \geq 9$, les valeurs de $\frac{n+3}{5}$ sont inférieures à celles de $n-6$. On en déduit que les solutions de l'inéquation sont les nombres supérieurs ou égaux à 9.

Méthode

Pour montrer qu'un nombre est solution d'une inéquation, on calcule chaque membre avec la valeur de n proposée, puis on compare les valeurs trouvées.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	$(n+3)/5$	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6
3	$n-6$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

→ Résoudre une inéquation du premier degré

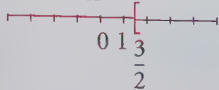
ÉNONCÉ

Résolvez l'inéquation $\frac{x+2}{7} > x-1$ puis représentez graphiquement les solutions.

MÉTHODE

1. On reconnaît une inéquation du premier degré.
2. Si l'inéquation comporte un quotient, on multiplie ses deux membres par un même nombre pour faire disparaître le dénominateur.
3. On regroupe les « termes en x » dans le membre de gauche et les termes sans x dans celui de droite.
4. Quand l'inéquation est de la forme $ax < b$ (ou $ax > b$), on divise les deux membres par a pour obtenir la solution.
5. On rédige la conclusion à l'aide d'une phrase.
6. On représente les solutions sur une droite graduée.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
$\frac{x+2}{7} > x-1$	1. On reconnaît une inéquation du premier degré (il n'y a pas de x^2 , ni de produit contenant des x).
$7 \times \left(\frac{x+2}{7}\right) > (x-1) \times 7$ $x+2 > 7x-7$	2. Il y a un quotient. On multiplie par 7 les deux membres pour ne plus avoir de dénominateur. Le sens de l'inégalité est conservé car $7 > 0$.
$x-7x > -7-2$ $-6x > -9$	3. On rassemble les x dans le premier membre et les « non x » dans le second.
$x < \frac{-9}{-6}$ soit $x < \frac{3}{2}$	4. On divise par -6 qui est négatif : on change le sens de l'inégalité. On simplifie la fraction.
Les solutions de l'inéquation sont les nombres strictement inférieurs à $\frac{3}{2}$.	5. On écrit la conclusion.
Solutions 	6. On représente les solutions sur une droite graduée en indiquant où elles se trouvent.

➔ Résoudre un problème avec une inéquation

ÉNONCÉ

Carole souhaite commander 3 000 litres de fioul. Son budget maximum est de 2 170 €. Elle souhaite négocier une remise sur le litre. Le prix sans remise pour un litre de fioul est de 0,75 € et le transport est facturé 100 €.

Quel montant minimum de remise sur le litre en euros doit-elle négocier pour que cet achat rentre dans son budget.?

MÉTHODE

1. On choisit une inconnue. Il s'agit souvent du nombre cherché.
2. On met le problème en inéquation. Celle-ci doit traduire en langage mathématique les phrases de l'énoncé.
3. On résout l'inéquation.
4. On rédige une phrase de conclusion.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
On note x le montant de la remise sur un litre de fioul en euros.	1. Choix de l'inconnue. On cherche un nombre positif dont on connaît un ordre de grandeur.
● 1 litre de fioul avec remise coûte $(0,75 - x)$ €. - Le transport est facturé 100 €. Pour 3 000 litres, la facture de cette commande est donc de : $100 + 3\,000(0,75 - x).$ ● Ce montant doit être inférieur à 2 170 €. ● On obtient : $100 + 3\,000(0,75 - x) \leq 2\,170.$	2. La mise en inéquation du problème se fait pas à pas. Chaque terme de la phrase est traduit en langage mathématique. Le mot « maximum » dans l'énoncé indique le sens de l'inégalité.
$100 + 3\,000(0,75 - x) \leq 2\,170$ $100 + 3\,000 \times 0,75 - 3\,000x \leq 2\,170$ $-3\,000x \leq 2\,170 - 2\,350$ $x \geq \frac{-180}{-3\,000}$ $x \geq 0,06$	3. On résout l'inéquation. On utilise les règles de calcul relatives aux inéquations.
Pour respecter son budget, Carole doit négocier une remise d'au moins 0,06 € (soit 6 centimes d'euro) par litre de fioul.	4. On écrit une phrase de conclusion qui permet de répondre clairement au problème posé. On fait attention à la cohérence du résultat.



QCM



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. L'inéquation $5x - 10 > 0$ a pour solution :

a) ☐ tous les nombres strictement inférieurs à 2

b) ☐ tous les nombres strictement supérieurs à 2

c) ☐ tous les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{2}$

2. Si $a < b$, alors :

a) ☐ $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$

b) ☐ $5a - 1 < 5b - 1$

c) ☐ $-2a + 3 > -2b + 3$

3. Si $-4a \geq -4b$, alors :

a) ☐ $a \geq b$

b) ☐ $-a \geq -b$

c) ☐ $-2a \geq -2b$

4. Soit l'inéquation $2x > 0$. Cette inéquation peut s'écrire :

a) ☐ $x > 0$

b) ☐ $-2x + 1 > 1$

c) ☐ $4x > 0$

5. Si $0 < 2x + 1 < 1$, alors :

a) ☐ $0 < x < \frac{1}{2}$

b) ☐ $-\frac{1}{2} < x < 0$

c) ☐ $0 < x < 2$

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. Si $x \geq 3$, alors $x \geq 4$.	☐ V ☐ F
2. Si $x < 2$, alors $x < 3$.	☐ V ☐ F
3. L'inéquation $3x \geq 0$ a pour solution tous les nombres positifs ou nuls.	☐ V ☐ F
4. 0 est solution de l'inéquation $2x^2 - 1 < 4x + 2$.	☐ V ☐ F
5. L'inéquation $2x^2 < 3x + 1$ peut s'écrire $3x + 1 < 2x^2$	☐ V ☐ F
6. Si $-5x > 10y$, alors $0,5x < -y$	☐ V ☐ F
7. Les solutions de $x(x + 1) \geq x^2 - 2x$ sont tous les nombres positifs ou nuls.	☐ V ☐ F

→ Exercices d'entraînement



3 Quelques inéquations pour bien commencer

Résolvez les inéquations. Représentez les solutions sur une droite graduée.

$$\bullet 3(x+5) \geq -2(x+10) \quad \bullet -5x+2 > 2(x-6) \quad \bullet \frac{4x+1}{3} < 1$$

4 Tout un programme

On donne le programme de calcul ci-dessous :

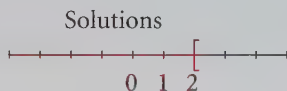
- Choisir un nombre x
- Retrancher 4 au double de x
- Multiplier le résultat par -2

- Si on choisit $x = 5$, obtient-on un nombre supérieur à 5 ?
- Quels nombres choisir pour obtenir un nombre supérieur au nombre initial ?

5 Avec la solution, c'est plus simple

On donne les solutions d'une inéquation :

Parmi ces trois inéquations, lesquelles ont pour solution l'ensemble représenté ?



- $-x-2 < 0$
- $-7 < -2x-3$
- $0,5x-4 < -3$

→ Vers le Brevet



6 Et si on parlait salaire ?

Le salaire d'un représentant est calculé de la façon suivante :

- un fixe de 800 €.
- une commission de 152 € sur chaque contrat qu'il vend.

Quel nombre minimal de contrat doit-il vendre pour obtenir un salaire de 2 300 € ?

7 Et sans calcul !

On donne $A = \frac{35}{3} - 4 \times \frac{5}{57}$ et $B = -4 \times \frac{25}{23} + \frac{35}{3}$.

Louise affirme sans faire de calcul que $A > B$. Comment a-t-elle fait ?

→ QCM

1. On résout l'inéquation : $5x - 10 > 0$

$$5x > 0 + 10$$

$$5x > 10$$

$$x > \frac{10}{5}$$

$$x > 2$$

Remarque

Il s'agit d'une inégalité stricte ($>$).

Réponse : **b)** tous les nombres strictement supérieurs à 2.

2. ● Si $a < b$ alors $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$ (on divise par 2). La réponse **a)** est fausse.

● Si $a < b$, $5a < 5b$ (en multiplie par 5) et donc $5a - 1 < 5b - 1$ (en retranchant 1). La réponse **b)** est correcte.

● Si $a < b$, alors $-2a > -2b$ (en multipliant par (-2)) et donc $-2a + 3 > -2b + 3$ (en ajoutant 3).

La réponse **c)** est correcte.

Réponses : **b)** $5a - 1 < 5b - 1$ et **c)** $-2a + 3 > -2b + 3$.

Méthode

Quand on multiplie par un nombre négatif une inégalité, on CHANGE son sens.

3. ● Si $-4a \geq -4b$, alors $a \leq b$ (on divise par $(-4) < 0$). La réponse **a)** est fausse.

● Si $-4a \geq -4b$, alors $-a \geq -b$ (on divise par $4 > 0$). La réponse **b)** est correcte.

● Si $-4a \geq -4b$, alors $-2a \geq -2b$ (on divise par $2 > 0$). La réponse **c)** est correcte.

Réponses : **b)** $-a \geq -b$ et **c)** $-2a \geq -2b$.

4. L'inéquation $2x > 0$ peut s'écrire :

● $x > 0$ en divisant les deux membres par 2. La réponse **a)** est correcte.

● $-2x < 0$ d'où $-2x + 1 < 1$ en multipliant les deux membres par (-2) puis en ajoutant 1. La réponse **b)** est fausse.

● $4x > 0$ en multipliant les deux membres par 2. La réponse **c)** est correcte.

Réponses : **a)** $x > 0$ et **c)** $4x > 0$.

5. En retranchant 1, on obtient : $-1 < 2x < 0$.

Puis en divisant par 2, on obtient : $-\frac{1}{2} < x < 0$.

Réponse : **b)** $-\frac{1}{2} < x < 0$.

2 1. Faux. Un nombre plus grand que 3 n'est pas forcément plus grand que 4. En effet, par exemple 3,5 est plus grand que 3 mais n'est pas plus grand que 4.

2. Vrai. Un nombre strictement inférieur à 2 est strictement inférieur à 3.

3. Vrai. L'inéquation $3x \geq 0$ s'écrit $x \geq 0$ en divisant les deux membres par 3. Les solutions sont donc tous les nombres positifs ou nuls.

4. Vrai. En remplaçant x par 0 dans le premier membre, on obtient : $2 \times 0^2 - 1 = -1$.

En remplaçant x par 0 dans le second membre, on obtient $4 \times 0 + 2 = 2$. Or, on a bien $-1 < 2$. L'inégalité est donc vérifiée.

5. Faux. L'inéquation $2x^2 < 3x + 1$ s'écrit $3x + 1 > 2x^2$.

6. Vrai. $-5x > 10y$. En divisant par (-10) , on obtient $0,5x < -y$.

7. Vrai. En développant le premier membre, on obtient : $x^2 + x \geq x^2 - 2x$ soit $x^2 - x^2 + x + 2x \geq 0$, c'est-à-dire $3x \geq 0$, d'où $x \geq 0$. Les nombres solutions de l'inéquation sont bien tous les nombres positifs ou nuls.

Gagnez des points !

Il s'agit de trouver une valeur qui vérifie l'hypothèse mais pas la conclusion.

Gagnez des points !

L'écriture $x \geq 0$ se lit x est positif ou nul.

Remarque

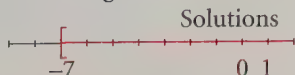
Par chance, les x^2 s'éliminent en développant.

→ Exercices d'entraînement

3

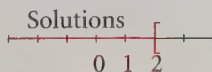
$$\begin{aligned} & \bullet \quad 3(x+5) \geq -2(x+10) \\ & 3 \times x + 3 \times 5 \geq -2 \times x - 2 \times 10 \\ & 3x + 15 \geq -2x - 20 \\ & 3x + 2x \geq -20 - 15 \\ & 5x \geq -35 \\ & x \geq \frac{-35}{5} \\ & x \geq -7 \end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à -7 .



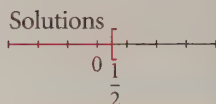
$$\begin{aligned} & \bullet \quad -5x + 2 > 2(x-6) \\ & -5x + 2 > 2 \times x - 2 \times 6 \\ & -5x + 2 > 2x - 12 \\ & -5x - 2x > -12 - 2 \\ & -7x > -14 \\ & x < \frac{-14}{-7} \\ & x < 2 \end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 2.



$$\begin{aligned} & \bullet \quad \frac{4x+1}{3} < 1 \\ & 3 \times \left(\frac{4x+1}{3} \right) < 1 \times 3 \\ & 4x+1 < 3 \\ & 4x < 3-1 \\ & 4x < 2 \\ & x < \frac{2}{4} \\ & x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{2}$.



4 1. $x = 5$.

● Le double de 5 est 10. En retranchant 4, on obtient :

$$10 - 4 = 6$$

● $-2 \times 6 = -12$.

Le résultat est -12 qui est inférieur à 5.

2. ● Le nombre choisi est x .

● Le double de x est $2x$. En retranchant 4, on obtient :

$$2x - 4.$$

● En multipliant le résultat par -2 on obtient :

$$-2(2x - 4).$$

On souhaite déterminer les valeurs de x pour que l'inégalité

$$-2(2x - 4) > x \text{ soit vérifiée.}$$

$$-2(2x - 4) > x$$

$$-4x + 8 > x$$

$$-4x - x > -8$$

$$-5x > -8$$

$$x < \frac{8}{5}$$

Pour obtenir un nombre supérieur au nombre de départ, il faut choisir un nombre inférieur à $\frac{8}{5}$.

Gagnez des points !

Pour ne plus avoir de quotient, on multiplie les deux membres par 3.

Gagnez des points !

On procède étape par étape.

Gagnez des points !

On choisit comme nombre de départ x et on écrit le résultat en fonction de x .

Méthode

Les nombres cherchés sont les solutions d'une inéquation.

Gagnez des points !

5 n'est pas solution de l'inéquation : cela permet de confirmer la réponse de la question 1.

5 On résout les inéquations et on regarde si les solutions correspondent à la représentation graphique donnée.

$$1. -x - 2 < 0$$

$$-x < 2$$

$$x > -2$$

Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à -2 .

$$2. -7 < -2x - 3$$

$$2x < 7 - 3$$

$$2x < 4$$

$$x < \frac{4}{2}$$

$$x < 2$$

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 2 .

$$3. 0,5x - 4 < -3$$

$$0,5x < -3 + 4$$

$$0,5x < 1$$

$$x < \frac{1}{0,5}$$

$$x < 2$$

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 2 .

Les solutions représentées sont celles des inéquations **2.** et **3.**

→ Vers le Brevet

6 On note x le nombre de contrats que le représentant vend.

● Son salaire se calcule comme fixe + 152 € par contrat vendu soit $800 + 152 \times x$.

● On cherche x tel que $800 + 152x > 2\,300$.

$$800 + 152x > 2\,300$$

$$152x > 2\,300 - 800$$

$$x > \frac{1\,500}{152} (\approx 9,9)$$

Le représentant doit vendre au moins 10 contrats pour obtenir un salaire de $2\,300 \text{ €}$.

Méthode

On traduit le problème par une inéquation.

7 On sait que $\frac{5}{57} < \frac{25}{23}$.

Par conséquent, en multipliant par -4 , on obtient

$$-4 \times \frac{5}{57} > -4 \times \frac{25}{23}, \text{ puis en ajoutant } \frac{35}{3},$$

$$\text{on a } -4 \times \frac{5}{57} + \frac{35}{3} > -4 \times \frac{25}{23} + \frac{35}{3}.$$

Soit $A > B$.

Méthode

$\frac{5}{57} < 1$ (le numérateur est plus petit que le dénominateur) et $\frac{25}{23} > 1$ (le numérateur est plus grand que le dénominateur).

Systèmes d'équations et problèmes

1 Systèmes de deux équations à deux inconnues

1 Équations à deux inconnues

$x + 2y = 5$ est une équation à deux inconnues, notées x et y . Elle admet une infinité de solutions. Par exemple, $x = 1$ et $y = 2$. On dit que le couple $(1 ; 2)$ est solution.

2 Système de deux équations

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \leftarrow \text{système de deux équations à deux inconnues}$$

Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

- Le couple $(0 ; 1)$ vérifie la première équation. En effet, $0 + 1 = 1$, mais pas la deuxième équation : $2 \times 0 - 1 = -1 \neq -4$. Ce couple n'est donc pas solution du système.
- Le couple $(-1 ; 2)$ vérifie les 2 équations car $-1 + 2 = 1$ et $2 \times (-1) - 2 = -4$. On en déduit que le couple $(-1 ; 2)$ est solution du système.

• Deux méthodes permettent de résoudre par le calcul les systèmes : la méthode par substitution (voir ex. résolu p. 113) et celle par combinaisons (voir méth. p. 114).

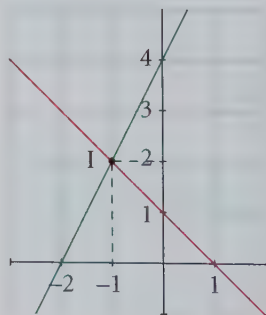
3 Interprétation graphique

Le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ peut s'écrire $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$.

Ces équations sont celles des droites qui représentent les fonctions affines f et g définies par :

$$f(x) = -x + 1 \text{ et } g(x) = 2x + 4.$$

La solution du système est le couple de coordonnées du point I, intersection des deux droites, I $(-1 ; 2)$.



EXERCICE RÉSOLU

► Résoudre un système par la méthode de substitution

ÉNONCÉ

Résolvez le système $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$.

CORRIGÉ

- On exprime y en fonction de x dans la première équation :

$$y = -2x + 4$$

- On remplace (on dit encore qu'on substitue) y par $-2x + 4$ dans la deuxième équation, on écrit :

$$x + 2(-2x + 4) = -1$$

On obtient :

$$x - 4x + 8 = -1$$

$$-3x + 8 = -1$$

$$-3x = -1 - 8$$

$$-3x = -9$$

$$x = \frac{-9}{-3}$$

$$x = 3$$

- Sachant que $x = 3$, on obtient :

$$y = -2 \times 3 + 4 = -2$$

On en déduit que si $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$,

$$\text{alors } \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}.$$

- On vérifie que la solution obtenue, c'est-à-dire le couple $(3; -2)$, est bien la solution du système :
 $2 \times 3 - 2 = 6 - 2 = 4$
 et $3 + 2 \times (-2) = 3 - 4 = -1$.
- La solution du système est donc le couple $(3; -2)$.

Remarque

Cette méthode est pertinente car le coefficient devant y dans la première équation est 1.

Remarque

L'équation devient une équation à une inconnue, x .

Méthode

On isole les x à gauche et les non x à droite.

Méthode

L'équation obtenue est du type $ax = b$ qui a pour solution

$$x = \frac{b}{a}$$

Méthode

On remplace x par 3 dans l'égalité $y = -2x + 4$ afin d'en déduire la valeur de y .

Remarque

On remplace les valeurs trouvées pour x et y dans le système. Les 2 égalités doivent être vérifiées.

→ Résoudre un système par la méthode des combinaisons

ÉNONCÉ

Résolvez, par combinaisons, le système :
$$\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$$

MÉTHODE

Le principe de la méthode est d'éliminer une inconnue (x ou y) en utilisant une combinaison pour se ramener à une équation du premier degré.

1. On identifie l'inconnue que l'on peut éliminer facilement, puis on multiplie une (ou les deux) équation(s) afin d'obtenir des coefficients opposés pour l'inconnue que l'on aura choisie.
2. On additionne membre à membre les deux équations pour éliminer l'inconnue choisie.
3. On résout l'équation obtenue qui ne contient plus qu'une inconnue.
4. On remplace l'inconnue par la valeur trouvée pour déterminer la valeur de l'autre inconnue.
5. On s'assure que les 2 valeurs trouvées vérifient simultanément les 2 équations.
6. On écrit la solution du système sous la forme d'un couple solution.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
$\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - y = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y = 11 \\ 6x - 3y = -18 \end{cases}$	1. On remarque qu'en multipliant par 3 la deuxième équation, on obtient des coefficients opposés pour y (3 et -3).
$(x + 3y) + (6x - 3y) = 11 - 18$ $x + 6x + 3y - 3y = -7$	2. On additionne membre à membre les deux équations pour éliminer y .
$7x = -7 \text{ soit } x = -1.$	3. On résout l'équation d'inconnue x .
En utilisant la 1 ^{re} équation, on obtient : $-1 + 3y = 11 \text{ ou } 3y = 12 \text{ et } y = 4.$	4. On remplace l'inconnue par la valeur trouvée pour déterminer la valeur de l'autre inconnue.
$-1 + 3 \times 4 = 11 \text{ et } 2 \times (-1) - 4 = -6$	5. On remplace x et y par les valeurs trouvées pour vérification.
La solution du système est le couple $(-1 ; 4)$.	6. On écrit clairement la conclusion.

→ Résoudre un problème à l'aide d'un système d'équations

ÉNONCÉ

Chez un marchand de primeurs, Louise achète 1 kg de tomates et 3 kg de pommes de terre. Elle paie 5,2 €. Chez le même marchand, Léa achète 3 kg de tomates et 2 kg de pommes de terre et paie 7,9 €.

Déterminez le prix d'un kilo de tomates et d'un kg de pommes de terre.

MÉTHODE

1. On choisit les inconnues x et y . Il s'agit souvent des nombres cherchés.
2. On exprime en fonction de x et de y les données de l'énoncé. On obtient deux équations qui traduisent en langage mathématique l'énoncé.
3. On résout le système.
4. On rédige une phrase de conclusion.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
On note x le prix d'un kilo de tomates et y le prix d'un kilo de pommes de terre.	1. On cherche deux nombres positifs dont on connaît des ordres de grandeur.
Louise achète 1 kg de tomates et 3 kg de pommes de terre et paie 5,2 € se traduit par l'équation : $1x + 3y = 5,2.$ Léa achète 3 kg de tomates et 2 kg de pommes de terre et paie 7,9 € se traduit par l'équation : $3x + 2y = 7,9.$	2. La mise en équations du problème se fait pas à pas. Par exemple, si y est le prix d'un kilo de tomates, $3y$ est le prix de 3 kilos.
$\begin{cases} x + 3y = 5,2 \\ 3x + 2y = 7,9 \end{cases}$ On a $x = 5,2 - 3y$. On remplace x dans la 2^e équation : $3(5,2 - 3y) + 2y = 7,9, \text{ soit } y = 1,1$ On en déduit $3x + 2 \times 1,1 = 7,9$ soit $x = 1,9$. On vérifie : $1,9 + 3 \times 1,1 = 5,2$ et $3 \times 1,9 + 2 \times 1,1 = 7,9$.	3. On résout le système. La méthode utilisée ici est la méthode de substitution. On vérifie ensuite que les valeurs trouvées sont bien solutions des équations.
Le prix d'un kilo de tomates est 1,9 € et celui d'un kilo de pommes de terre est 1,1 €.	4. On répond clairement au problème posé. On fait attention à la cohérence du résultat.



QCM



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. $2x - 3y = 6$ a pour solution : **a)** ☐ (0 ; 2) **b)** ☐ $(-1 ; \frac{-8}{3})$ **c)** ☐ (3 ; 0)
2. $\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 5 \end{cases}$ a pour solution : **a)** ☐ (5 ; 5) **b)** ☐ (5 ; -5) **c)** ☐ (-5 ; 5)
3. $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x + 5 \end{cases}$ a pour solution : **a)** ☐ (0 ; 0) **b)** ☐ (8 ; 13) **c)** ☐ (0 ; -3)
4. Pour 10 glaces en cornet et 15 glaces en pot vendues, un marchand gagne 55 €. Si x est le prix d'une glace en cornet et y le prix d'une glace en pot, alors :
- a)** ☐ $10x + 15y = 55$ **b)** ☐ $2x + 3y = 11$ **c)** ☐ $x + 1,5y = 5,5$
5. (0 ; 1) est solution du système :

- a)** ☐ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = y \end{cases}$ **b)** ☐ $\begin{cases} x + 5y = 5 \\ y = x + 1 \end{cases}$ **c)** ☐ $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. L'équation $2x + y = 0$ a une infinité de solutions.	☐ V ☐ F
2. Le couple (1 ; -1) est solution de l'équation $x - 3y = 4$.	☐ V ☐ F
3. (5 ; 0) est solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ x + y = 0 \end{cases}$.	☐ V ☐ F
4. La solution d'un système est le couple de coordonnées du point d'intersection de deux droites.	☐ V ☐ F
5. L'équation $2x + 4y = 6$ peut s'écrire $x = -2y + 3$.	☐ V ☐ F
6. Soit l'équation $2x + y = 5$. Si $x = -1$, alors $y = -7$.	☐ V ☐ F
7. Le système $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$ a pour solution un couple de nombres entiers.	☐ V ☐ F

➔ Exercices d'entraînement



3 On applique les méthodes pour commencer

1. Résolvez le système suivant en utilisant la méthode par substitution :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5x + 4y = -12 \end{cases}$$

2. Résolvez le système suivant en utilisant la méthode par combinaison :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -2x + 3y = -29 \end{cases}$$

4 Et si on le faisait de deux façons...

Résolvez, par deux méthodes différentes, le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y = -19 \\ x + 3y = 13 \end{cases}$$

5 Solution or not solution ?

Le couple $\left(\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$ est-il solution du système $\begin{cases} 3x - 6y = -13 \\ x - y = -1 \end{cases}$?

6 Pas comme d'habitude...

Déterminez les valeurs de a et b telles que $\left(\frac{2}{3}; \frac{-4}{3}\right)$ est la solution du système :

$$\begin{cases} 5x + 2y = a \\ -2x - y = b \end{cases}$$

7 C'est la classe !

Dans une classe de 32 élèves, quand on fait la somme du double du nombre de garçons et du triple du nombre de filles, on trouve 69.

Déterminez le nombre de garçons et de filles dans cette classe ?

8 Une histoire de famille

Un musée pratique deux tarifs d'entrée : un tarif pour les adultes et un autre pour les enfants.

Une famille est composée de 3 enfants et 2 adultes. Elle paie pour entrer dans un musée 24 €.

Céline et ses trois filles ont payé 18 € pour entrer dans ce musée.

La famille Trucmuche est composée de 2 adultes et 4 enfants.

Combien va-t-elle payer pour entrer au musée ?



Vers le Brevet



9 On recherche une fonction

On considère une fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$.

On sait que $f(-1) = -5$ et $f(2) = 1$.

1. Justifiez que les nombres a et b vérifient :

$$-a + b = -5 \text{ et } 2a + b = 1$$

2. Montrez en résolvant un système de deux équations à deux inconnues que $a = 2$ et $b = -3$.

3. Donnez alors l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

10 Comme au cinéma

Le cinéma Paradiso pratique 2 types de tarifs : plein tarif pour les adultes et tarif réduit pour les enfants.

La recette du dimanche est de 1 585 € pour 150 adultes et 70 enfants.

La veille, le samedi, la recette est de 2 675 € pour 300 adultes et 50 enfants.

On note x le prix de la place plein tarif et y le prix de la place tarif réduit.

1. a) Exprimez en fonction de x et de y la recette du dimanche.

b) Les prix des places tarif réduit et plein tarif peuvent-elles être de 7 € et 4 € ? Justifiez.

2. Exprimez en fonction de x et de y la recette du samedi.

3. Déterminez le prix de la place tarif réduit et celle plein tarif.

11 Le classique

1. Résolvez le système suivant par la méthode de votre choix :

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -3x + y = -17 \end{cases}$$

2. a) Exprimez y en fonction de x dans chacune des deux équations.

b) Dans un repère, représentez graphiquement les fonctions affines associées au système.

c) Retrouvez graphiquement la solution du système.

12 Avec les solutions, c'est mieux

1. Effectuez les deux calculs suivants (on donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles) :

$$5 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{3}{5} \times 2 - 3 \times \frac{2}{3}$$

2. Déduisez-en un système de deux équations à deux inconnues qui admette le couple $\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right)$ comme solution.

→ QCM

1. ● Pour $x = 0$ et $y = 2$, on obtient :
 $2 \times 0 - 3 \times 2 = -6 \neq 6$ donc $(0 ; 2)$ n'est pas solution de l'équation.

● Pour $x = -1$ et $y = \frac{-8}{3}$, on obtient :

$2 \times (-1) - 3 \times \frac{-8}{3} = -2 + 8 = 6$, donc $(-1 ; \frac{-8}{3})$ est solution de l'équation.

● Pour $x = 3$ et $y = 0$, on obtient $2 \times 3 - 3 \times 0 = 6$, donc $(3 ; 0)$ est solution de l'équation.

Réponses : **b)** $(-1 ; \frac{-8}{3})$ et **c)** $(3 ; 0)$.

2. $\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 5 \end{cases}$. En remplaçant y par 5 dans la première

équation, on obtient $x + 5 = 0$ soit $x = -5$.

Le couple solution est donc $(-5 ; 5)$.

Réponse : **c)** $(-5 ; 5)$.

3. En remplaçant y par $2x - 3$ dans la deuxième équation, on obtient $2x - 3 = x + 5$ soit $2x - x = 5 + 3$, d'où $x = 8$.

On a alors $y = 2 \times 8 - 3 = 13$.

On vérifie rapidement : $2 \times 8 - 3 = 13$ et $8 + 5 = 13$. Le couple solution est donc $(8 ; 13)$.

Réponse : **b)** $(8 ; 13)$.

4. ● Avec les cornets, le marchand gagne $(10 \times x)$ €.

● Avec les pots, il gagne $(15 \times y)$ €.

● Au total, il gagne 55 €, donc $10x + 15y = 55$.

En divisant par 5 les deux membres, on a $2x + 3y = 11$

et en divisant par 10, on a $x + 1,5y = 5,5$.

Réponses : **a)** $10x + 15y = 55$; **b)** $2x + 3y = 11$ et **c)** $x + 1,5y = 5,5$.

5. ● $0 + 1 = 1$ et $0 = 0 \neq 1$ donc $(0 ; 1)$ n'est pas solution du système **a)**.

● $0 + 5 \times 1 = 5$ et $0 + 1 = 1$ donc $(0 ; 1)$ est solution du système **b)**.

Piège à éviter

L'ordre dans un couple a une importance.

x est le premier nombre et y le second.

Remarque

On pouvait également remplacer par les valeurs proposées et vérifier qu'un seul couple était solution.

Méthode

La méthode de résolution utilisée est la méthode de substitution.

Remarque

Une équation peut s'écrire sous différentes formes.

- $3 \times 0 - 1 = -1$ et $0 + 1 = 1$ donc $(0 ; 1)$ est solution du système c).

Réponses : b) $\begin{cases} x + 5y = 5 \\ y = x + 1 \end{cases}$ et c) $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

- 2 1. Vrai. L'équation $2x + y = 0$ s'écrit $y = -2x$.

Pour chaque valeur de x , il y a une valeur de y correspondante. Par exemple, les couples $(0 ; 0)$, $(1 ; -2)$, $(2 ; -4)$ sont solutions de l'équation.

2. Vrai. $1 - 3 \times (-1) = 1 + 3 = 4$.

3. Faux. $2 \times 5 + 3 \times 0 = 10$ et $5 + 0 = 5 \neq 0$. Les deux équations ne sont pas simultanément vérifiées, donc le couple n'est pas solution.

4. Vrai. Il s'agit de l'interprétation graphique d'un système.

5. Vrai. L'équation s'écrit $2x = -4y + 6$ soit, en divisant les deux membres par 2, $x = -2y + 3$.

6. Faux. En remplaçant x par -1 dans l'équation, on obtient $2 \times (-1) + y = 5$ soit $-2 + y = 5$, d'où $y = 7 \neq -7$.

7. Vrai. On exprime y en fonction de x dans la première équation : $y = -2x + 5$. On remplace y par $-2x + 5$ dans la deuxième équation, puis on résout cette dernière équation dont l'inconnue est x :

$$-x + 2(-2x + 5) = -5$$

$$-x - 4x + 10 = -5$$

$$-5x = -5 - 10$$

$$-5x = -15$$

$$x = \frac{-15}{-5}$$

$$x = 3$$

On en déduit $y = -2 \times 3 + 5 = -1$.

On vérifie, pour $x = 3$ et $y = -1$, on a $2 \times 3 - 1 = 5$ et $-3 + 2 \times (-1) = -5$.

Le couple $(3 ; -1)$ est la solution du système. C'est bien un couple de nombres entiers.

L'astuce du prof

Une équation de la forme $ax + by = c$ a toujours une infinité de solutions.

Remarque

Les équations d'un système sont des équations de droites représentant des fonctions affines.

L'astuce du prof

Cette méthode est rapide lorsque, dans l'une des équations, le coefficient devant une inconnue est 1.

→ Exercices d'entraînement

3 1. La première équation permet d'écrire x en fonction de y . On a $x = -2y$.

En remplaçant x par $-2y$ dans la deuxième équation, on obtient $5 \times (-2y) + 4y = -12$.

$$5 \times (-2y) + 4y = -12$$

$$-10y + 4y = -12$$

$$-6y = -12$$

$$y = \frac{-12}{-6}$$

$$y = 2$$

Puis on remplace la valeur de y trouvée dans l'équation $x = -2y$, on obtient :

$$x = -2 \times 2 = -4.$$

On vérifie :

$$-4 + 2 \times 2 = -4 + 4 = 0$$

$$\text{et } 5 \times (-4) + 4 \times 2 = -20 + 8 = -12.$$

On en déduit que la solution du système est le couple $(-4; 2)$.

$$2. \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -2x + 3y = -29 \end{cases} \quad \boxed{\times 2}$$

En multipliant par 2 la deuxième équation, on obtient des coefficients opposés pour x .

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -4x + 6y = -58 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$(4x + 2y) + (-4x + 6y) = 2 - 58, \\ \text{soit } 4x + 2y - 4x + 6y = -56.$$

Il s'agit d'une équation du premier degré d'inconnue y :

$$2y + 6y = -56$$

$$8y = -56$$

$$y = \frac{-56}{8}$$

$$y = -7.$$

En remplaçant y par -7 dans la première équation, on obtient la valeur de x :

$$4x + 2 \times (-7) = 2$$

$$4x - 14 = 2$$

$$4x = 2 + 14$$

$$4x = 16$$

$$x = \frac{16}{4}$$

$$x = 4.$$

Remarque

Substituer signifie
« mettre à la place de »,
c'est-à-dire remplacer.

Remarque

Il s'agit d'une équation
du premier degré : on isole
les « y » d'un côté
et les « non y » de l'autre.

Gagnez des points !

Ici il est plus simple de
« faire disparaître »
les x que les y .

L'astuce du prof

L'équation obtenue ne
doit comporter qu'une
seule inconnue. Ici,
les x se sont éliminés.

On vérifie : $4 \times 4 + 2 \times (-7) = 2$ et $-2 \times 4 + 3 \times (-7) = -29$.

On en déduit que la solution du système est le couple $(4 ; -7)$.

4 • Par substitution

On exprime x en fonction de y dans la deuxième équation : $x = 13 - 3y$.

On remplace x par $13 - 3y$ dans la première équation :

$$2(13 - 3y) - 3y = -19$$

$$2 \times 13 - 2 \times 3y - 3y = -19$$

$$26 - 6y - 3y = -19$$

$$-9y = -19 - 26$$

$$-9y = -45$$

$$y = \frac{-45}{-9}$$

$$y = 5$$

L'astuce du prof

La deuxième équation permet d'exprimer x en fonction de y car le coefficient devant x est 1.

On remplace y par 5 dans l'une des deux équations pour trouver x (la deuxième semble « plus simple ») :

$$x + 3 \times 5 = 13$$

$$x + 15 = 13$$

$$x = 13 - 15$$

$$x = -2.$$

Vérification

$$2 \times (-2) - 3 \times 5 = -4 - 15 = -19 \text{ et } -2 + 3 \times 5 = -2 + 15 = 13.$$

On en déduit que la solution du système est le couple $(-2 ; 5)$.

• Par combinaison

On ajoute membre à membre les deux équations :

$$(2x - 3y) + (x + 3y) = -19 + 13$$

$$2x - 3y + x + 3y = -6$$

$$3x = -6$$

$$x = \frac{-6}{3}$$

$$x = -2.$$

L'astuce du prof

Il n'y a pas besoin de « multiplier » une équation car les coefficients devant les y sont opposés.

On remplace x par -2 dans la deuxième équation, par exemple :

$$-2 + 3y = 13$$

$$3y = 13 + 2$$

$$3y = 15$$

$$y = \frac{15}{3}$$

$$y = 5$$

Remarque

On pouvait remplacer x dans la première équation. Le résultat aurait été le même.

Vérification

$$2 \times (-2) - 3 \times 5 = -4 - 15 = -19 \text{ et } -2 + 3 \times 5 = -2 + 15 = 13.$$

On en déduit que la solution du système est le couple $(-2; 5)$.

5 On remplace x par $\frac{7}{3}$ et y par $\frac{10}{3}$ dans les premiers membres des deux équations, puis on calcule :

$$3 \times \frac{7}{3} - 6 \times \frac{10}{3} = \frac{\cancel{3} \times 7}{\cancel{3}} - \frac{\cancel{3} \times 2 \times 10}{\cancel{3}} = 7 - 20 = -13.$$

$$\frac{7}{3} - \frac{10}{3} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Les deux égalités sont vérifiées, on en déduit que le couple $(\frac{7}{3}; \frac{10}{3})$ est solution du système.

6 Le couple $(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3})$ est solution du système. On en déduit que les égalités sont vérifiées avec $x = \frac{2}{3}$ et $y = -\frac{4}{3}$.

$$\bullet 5 \times \frac{2}{3} + 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}.$$

Le couple $(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3})$ vérifie la première égalité lorsque $a = \frac{2}{3}$.

$$\bullet -2 \times \frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0.$$

Le couple $(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3})$ vérifie la deuxième égalité lorsque $b = 0$.

Remarque

$$\frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

7 • Choix des inconnues

Soit x le nombre de garçons dans la classe et y le nombre de filles.

• Mise en équation

* Dans la classe, il y a 32 élèves. Le nombre total d'élèves est donné par $x + y$. On en déduit l'équation $x + y = 32$.

* Le double du nombre de garçons est $2x$. Le triple du nombre de filles est $3y$.

La somme de ces deux nombres est donc $2x + 3y$. Elle vaut 69.

On en déduit l'équation $2x + 3y = 69$.

L'astuce du prof

On écrit la même quantité de deux façons différentes pour obtenir les équations.

● Résolution du système

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ 2x + 3y = 69 \end{cases} \quad \boxed{\times (-2)}$$

On résout ce système par combinaison. On multiplie par -2 la première équation.

On obtient : $-2x - 2y = -64$.
En ajoutant membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} -\cancel{2x} - 2y + \cancel{2x} + 3y &= -64 + 69 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

On remplace y par 5 dans la première équation, on obtient pour x :

$$\begin{aligned} x + 5 &= 32 \\ x &= 32 - 5 \\ x &= 27. \end{aligned}$$

Remarque

La méthode par substitution est aussi envisageable en exprimant y en fonction de x (ou x en fonction de y) dans la première équation.

● **Vérification** : $27 + 5 = 32$ et $2 \times 27 + 3 \times 5 = 54 + 15 = 69$.

● **Conclusion** : Dans cette classe, il y a 5 filles et 27 garçons.

8 ● Choix des inconnues

Soit x le prix d'une entrée adulte et y le prix d'une entrée enfant.

● Mise en équation

* La première famille a payé 24 €. Elle est composée de 2 adultes et 3 enfants. On a donc :

$$\underbrace{2x}_{\text{adultes}} + \underbrace{3y}_{\text{enfants}} = 24$$

* La deuxième famille a payé 18 €. Elle est composée d'un adulte et 3 enfants.

On a donc :

$$\underbrace{1x}_{\text{adulte}} + \underbrace{3y}_{\text{enfants}} = 18$$

● Résolution du système

$$\begin{cases} 2x + 3y = 24 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$$

On résout ce système par substitution. On exprime x en fonction de y dans la deuxième équation : $x = 18 - 3y$. On remplace x par $18 - 3y$ dans la première équation, puis on résout :

L'astuce du prof

On recherche le tarif d'entrée pour un adulte et celui pour un enfant.

Gagnez des points !

Les deux adultes paient $2 \times x \text{ €}$ et les enfants $3 \times y \text{ €}$. Donc au total, la famille paie $2x + 3y \text{ €}$.

$$\begin{aligned}
 2(18 - 3y) + 3y &= 24 \\
 36 - 6y + 3y &= 24 \\
 -3y &= 24 - 36 \\
 y &= \frac{-12}{-3} \\
 y &= 4
 \end{aligned}$$

On remplace y par 4 dans la deuxième équation pour calculer x , on obtient :

$$\begin{aligned}
 x + 3 \times 4 &= 18 \\
 x &= 18 - 12 \\
 x &= 6
 \end{aligned}$$

● Vérification

$$2 \times 6 + 3 \times 4 = 12 + 12 = 24 \text{ et } 6 + 3 \times 4 = 6 + 12 = 18.$$

● **Conclusion** : Le tarif adulte est de 6 € et celui d'un enfant de 4 €.

On calcule la somme payée pour 2 adultes et 4 enfants :

$$2 \times 6 + 4 \times 4 = 12 + 16 = 28.$$

La famille Trucmuche va donc payer 28 €.

→ Vers le Brevet

⑨ 1. On traduit les deux égalités.

$$f(-1) = -5 \text{ s'écrit } a \times (-1) + b = -5$$

$$\text{et } f(2) = 1 \text{ s'écrit } a \times 2 + b = 1.$$

On en déduit que les nombres a et b vérifient les égalités :

$$-a + b = -5 \text{ et } 2a + b = 1.$$

2. Les nombres a et b vérifient simultanément les deux égalités. Ils forment donc

$$\text{la solution du système : } \begin{cases} -a + b = -5 \\ 2a + b = 1 \end{cases}.$$

On résout ce système par substitution en exprimant b en fonction de a dans la première équation : $b = a - 5$.

On remplace b par $a - 5$ dans la deuxième équation, puis on résout.

$$2a + (a - 5) = 1$$

$$2a + a - 5 = 1$$

$$3a = 6$$

$$a = \frac{6}{3}$$

$$a = 2$$

On remplace a par 2 dans la première équation pour calculer b , on obtient :

$$-2 + b = -5$$

$$b = -5 + 2$$

$$b = -3$$

Remarque

$$f(x) = ax + b, \text{ donc}$$

$$f(-1) = a \times (-1) + b.$$

De même

$$f(2) = a \times 2 + b.$$

Vérification : $-2 + (-3) = -5$ et $2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$.

Conclusion : on en déduit que la fonction f s'écrit $f(x) = 2x - 3$.

10 1. a) 150 adultes paient chacun x € l'entrée.

La recette correspondant aux adultes est donc $150x$ €.

70 enfants paient chacun y € l'entrée. La recette correspondant aux enfants est donc $70y$ €.

La recette du samedi est donc $150x + 70y$. Sachant qu'elle s'élève à 1 585 €, on obtient $150x + 70y = 1\,585$.

b) On remplace x par 7 et y par 4 dans le premier membre de l'équation précédente : $150 \times 7 + 70 \times 4 = 1\,330 \neq 1\,585$. On en déduit que les prix des places ne peuvent pas être de 7 € et 4 €.

2. En procédant de la même façon qu'à la question 1. a), on obtient une deuxième équation : $300x + 50y = 2\,675$.

3. Pour déterminer les prix, on résout le système :

$$\begin{cases} 150x + 70y = 1\,585 \\ 300x + 50y = 2\,675 \end{cases} \quad \times (-2)$$

On résout le système par combinaison : on multiplie par -2 la première équation pour obtenir des coefficients opposés pour les x :

$$\begin{cases} -300x - 140y = -3\,170 \\ 300x + 50y = 2\,675 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} -300x - 140y + 300x + 50y &= -3\,170 + 2\,675 \\ -140y + 50y &= -495 \\ -90y &= -495 \\ y &= \frac{-495}{-90} \\ y &= 5,5 \end{aligned}$$

On remplace y par 5,5 dans la première équation pour calculer x , on obtient :

$$\begin{aligned} 150x + 70 \times 5,5 &= 1\,585 \\ 150x + 385 &= 1\,585 \\ 150x &= 1\,200 \\ x &= \frac{1\,200}{150} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Remarque

La recette correspond à ce que gagne le cinéma avec les entrées.

Remarque

La méthode par combinaison est plus simple ici.

Vérification : $150 \times 8 + 70 \times 5,5 = 1\,585$ et $300 \times 8 + 50 \times 5,5 = 2\,675$.
On en déduit que le prix du plein tarif est 8 € et le prix du tarif réduit est 5,5 €.

11 1. On utilise la méthode de substitution pour résoudre ce système.

On exprime y en fonction de x dans la première équation, $y = 8 - 2x$.

On remplace y par $8 - 2x$ dans la deuxième équation puis on résout :

$$-3x + (8 - 2x) = -17$$

$$-3x + 8 - 2x = -17$$

$$-5x = -17 - 8$$

$$-5x = -25$$

$$x = \frac{-25}{-5}$$

$$x = 5$$

On remplace x par 5 dans la première équation, on obtient pour y :

$$2 \times 5 + y = 8$$

$$10 + y = 8$$

$$y = 8 - 10$$

$$y = -2$$

Vérification : $2 \times 5 - 2 = 10 - 2 = 8$ et $-3 \times 5 - 2 = -15 - 2 = -17$.

La solution du système est le couple $(5; -2)$.

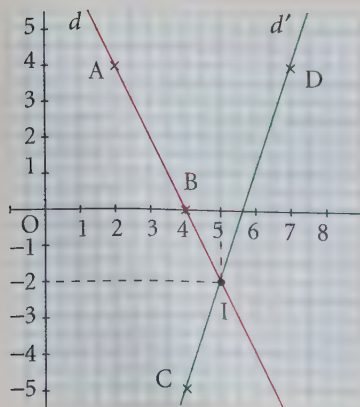
2.a) On exprime y en fonction de x dans chacune des deux équations :

$$y = -2x + 8 \text{ et } y = 3x - 17.$$

b) Les fonctions affines associées au système sont les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -2x + 8 \text{ et } g(x) = 3x - 17.$$

On trace les droites d et d' représentant ces fonctions.



● Pour la droite d :

$$f(2) = -2 \times 2 + 8 = 4, \text{ d'où } A(2; 4).$$

$$f(4) = -2 \times 4 + 8 = 0, \text{ d'où } B(4; 0).$$

● Pour la droite d' :

$$g(4) = 3 \times 4 - 17 = -5, \text{ d'où } C(4; -5).$$

$$g(7) = 3 \times 7 - 17 = 4, \text{ d'où } D(7; 4).$$

Gagnez des points !

Une fonction affine se représente graphiquement par une droite.

L'astuce du prof

Pour représenter une fonction affine, on calcule les images de deux nombres.

c) La solution du système est donnée par les coordonnées du point d'intersection I des droites d et d' .

On lit I(5 ; -2), ce qui correspond bien à la solution trouvée précédemment.

$$\textcircled{12} 1. \bullet 5 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{\cancel{5} \times 3}{\cancel{5}} + \frac{2 \times 2}{3} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

$$\bullet \frac{3}{5} \times 2 - 3 \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{5} - \frac{\cancel{3} \times 2}{\cancel{3}} = \frac{6}{5} - \frac{10}{5} = \frac{-4}{5}.$$

2. En remplaçant $\frac{3}{5}$ par x et $\frac{2}{3}$ par y dans les calculs précédents, on obtient :

$5x + 2y$ et $2x - 3y$.

En utilisant les calculs précédents, le système s'écrit :

$$\begin{cases} 5x + 2y = \frac{16}{3} \\ 2x - 3y = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Notion de fonction

1 Généralités

1 Définition

- Une fonction est un procédé (une « machine ») qui, à un nombre x , associe un autre nombre, unique, noté $f(x)$ (lire « f de x »).
- Schématiquement

Nombre d'entrée :

 x fonction f

Nombre de sortie :

 $f(x)$ On note : $x \mapsto f(x)$ (lire : « à x , on associe f de x »).

Exemple : On appelle f la fonction qui, à un mois donné, fait correspondre la hauteur h de pluie tombée sur une ville, une année donnée.

Mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h	63	91	57	18	25	10	15	32	85	85	100	105

2 Image et antécédent

- $f(x)$ est appelée **image** de x par la fonction f .

Exemple : Dans le tableau ci-dessus, en octobre (10^e mois de l'année), il est tombé 85 mm de pluie.

On écrit : $f: 10 \mapsto 85$ ou $f(10) = 85$.

On dit que 10 a pour image 85 par f ou l'image de 10 par f est 85.

- On dit également que 10 est un **antécédent** de 85 par f .

Remarques :

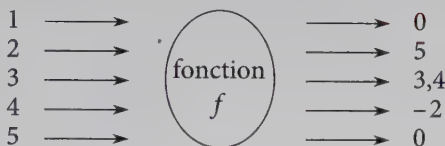
- De par sa définition, un nombre admet une et une seule image (en effet, dans notre exemple, pour un mois donné, il tombe une seule hauteur de pluie !).
- En revanche, un nombre peut admettre plusieurs antécédents.
En septembre et octobre, il est tombé la même quantité de pluie. On écrit donc $f(9) = 85$ et $f(10) = 85$.
Le nombre 85 admet deux antécédents, 9 et 10.

EXERCICE RÉSOLU

► Comprendre ce qu'est une fonction

ÉNONCÉ

On considère la « machine-fonction f » suivante :



1. Cette machine définit-elle bien une fonction ? Justifiez votre réponse.
2. a) Déterminez l'image par f du nombre 2.
b) Combien vaut $f(5)$?
3. Déterminez le(s) antécédent(s) éventuel(s) par f de 3,4 ; 0 et 4.

CORRIGÉ

1. À un nombre de départ (entier d'entrée compris entre 1 et 5), on associe un seul autre nombre (nombre d'arrivée) : c'est bien la définition d'une fonction.

2. a) Au nombre 2 est associé, par f , le nombre 5.

Ainsi l'image par f du nombre 2 est 5.

b) $f(5)$ est l'image par f du nombre 5 : c'est 0.

On conclut $f(5) = 0$.

3. ● Le nombre 3,4 admet pour antécédent le nombre 3.

● Le nombre 0 apparaît deux fois en sortie de la fonction. 0 admet deux antécédents par f qui sont 1 et 5.

● Le nombre 4 n'apparaît pas dans les nombres obtenus « à la sortie » de la machine. On conclut qu'il n'admet pas d'antécédent par f .

Conseil

À l'entrée de la machine, on place les x ; à la sortie, les images $f(x)$.

Méthode

On cherche 3,4 dans les nombres d'arrivée. Puis on lit quel nombre de départ lui est associé.

Rappel

Un nombre peut admettre plusieurs antécédents.

Rappel

Un nombre peut aussi ne pas admettre d'antécédent.

2 Différentes manières de définir une fonction

1 Avec une formule

On appelle f la fonction qui, à chaque nombre x , associe le nombre $f(x) = 2x^2 - 6$.

Exemple :

$$f(3) = 2 \times 3^2 - 6 = 2 \times 9 - 6 = 18 - 6 = 12.$$

L'image de 3 par f est 12.

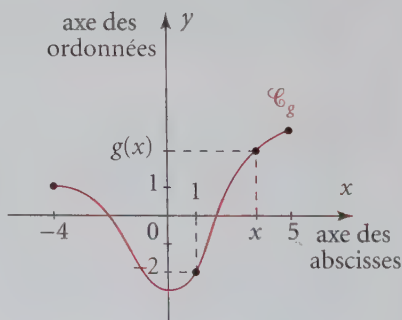
2 Avec un graphique

À chaque nombre x compris entre -4 et 5 (situé sur l'axe des abscisses), le graphique représentant g (appelé $\mathcal{C}_g$) associe un nombre $g(x)$ (situé sur l'axe des ordonnées).

Exemple :

Au point d'abscisse 1 de la courbe $\mathcal{C}_g$, est associée l'ordonnée -2 .

Ainsi $g(1) = -2$.



3 Avec un tableau de valeurs

Le tableau suivant définit une fonction h qui, à chaque nombre x de la première ligne (ces x étant rangés habituellement dans l'ordre croissant), associe un nombre $h(x)$ dans la deuxième ligne.

x	-4	-1	0	2	3	5	7
$h(x)$	2	6	8	5	2	0	-4

Exemple :

Dans le tableau de valeurs ci-dessus, au nombre 3, h fait correspondre le nombre 2.

Ainsi $h(3) = 2$.

EXERCICE RÉSOLU

► Étudier une fonction définie par un tableau de valeurs

ÉNONCÉ

La quantité d'alcool (en g/L) présente dans le sang d'un individu ayant consommé 4 verres de vin est rapportée dans le tableau suivant.

Heure	11	12	13	14	16	18	20	24
Alcoolémie	0	0,2	0,5	0,8	0,6	0,5	0,2	0

On note f la fonction qui associe l'alcoolémie de l'individu à l'heure.

1. Que signifie $f(11) = 0$?
2. Quelle est l'image par f de 14 ?
3. a) Déterminez le(s) antécédent(s) par f de 0,5. Interprétez concrètement ce résultat.
b) Combien d'antécédents le nombre 0,8 admet-il ?
4. Traduisez les cases grisées par une phrase contenant le mot image, puis par une seconde phrase contenant le mot antécédent.

CORRIGÉ

1. $f(11) = 0$ signifie qu'à 11 heures, l'alcoolémie de l'individu est de 0 g/L. Autrement dit, la personne n'a pas consommé d'alcool.
2. L'image par f de 14 est 0,8 ; soit $f(14) = 0,8$.

3. a) ● Le nombre 0,5 apparaît deux fois :
pour $x = 13$ et pour $x = 18$.

● Les antécédents par f de 0,5 sont donc 13 et 18.
À 13 h et à 18 h, la personne a 0,5 g/L d'alcool dans le sang.

b) Le nombre 0,8 n'apparaît qu'une seule fois dans le tableau. 0,8 admet un seul antécédent par f .

4. ● L'image de 12 par f est 0,2.
Ou encore 12 a pour image 0,2 par f .

● Un antécédent par f de 0,2 est 12.
Ou encore 0,2 est un antécédent de 12 par f .

Méthode

Les x se trouvent sur la 1^{re} ligne
et les $f(x)$ sur la 2^e ligne.

Méthode

On cherche le nombre 0,5
dans la seconde ligne.
Puis on relève les x associés.

Conseil

Lisez bien l'énoncé : on demande
le nombre d'antécédents,
et non leurs valeurs.

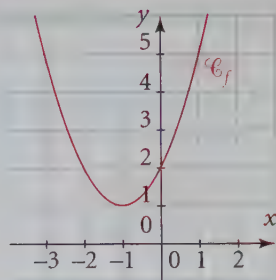
1 Lire graphiquement l'image et les antécédents d'un nombre

ÉNONCÉ

On donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f .

A. Combien vaut $f(1)$?

B. Quels sont les antécédents par f de 5 ?

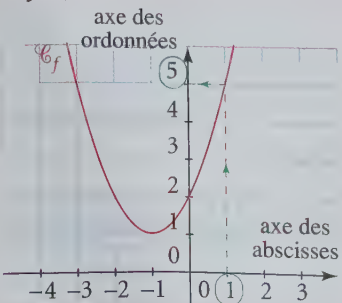
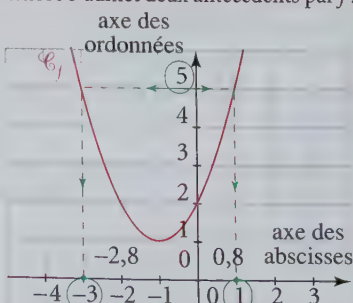


MÉTHODE

A. Pour lire graphiquement l'image d'un nombre par une fonction : on se place sur l'axe des abscisses à la valeur de x demandée. Avec des pointillés verticaux, on rejoint le point de $\mathcal{C}_f$ qui a cette même abscisse. Puis avec des pointillés horizontaux, on intercepte l'axe des ordonnées pour lire l'ordonnée correspondante.

B. Pour lire graphiquement les antécédents éventuels d'un nombre par une fonction, on se place sur l'axe vertical à la valeur de y demandée. Avec des pointillés horizontaux, on rejoint le(s) point(s) de $\mathcal{C}_f$ qui a (ont) cette même ordonnée, s'il y en a. Puis avec des pointillés verticaux, on intercepte l'axe des abscisses pour lire le(s) x correspondant(s).

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
A. $f(1) = 5$. 	B. Le nombre 5 admet deux antécédents par f : -3 et 1. 

2 | Calculer une image à partir de l'expression d'une fonction

ÉNONCÉ

On donne la fonction f définie par $f(x) = -3x + 7$. Quelle est l'image de -2 par f ?

MÉTHODE

Dans l'expression de $f(x)$, on remplace x par la valeur dont on souhaite calculer l'image.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
$f(-2) = -3 \times (-2) + 7 = 6 + 7 = 13$. L'image de -2 par f est 13.	On calcule $-3x + 7$ avec $x = -2$, en respectant les règles de priorité et de calculs.

3 | Déterminer un antécédent à partir de l'expression d'une fonction

ÉNONCÉ

Déterminer les éventuels antécédents de 10 par f telle que $f(x) = -3x + 7$.

MÉTHODE

On cherche le(s) x tel(s) que $f(x)$ est égale au nombre proposé. Autrement dit, on résout l'équation $f(x) = \text{le nombre proposé}$. Cette équation admet ou non une (ou des) solution(s) qui sera (seront) le ou les antécédent(s) cherché(s).

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
On résout l'équation $-3x + 7 = 10$. $-3x = 10 - 7 = 3$ $x = \frac{3}{-3} = -1$ 10 admet pour antécédent -1 par f .	Déterminer les antécédents de 10, c'est chercher les nombres qui ont pour image 10. Cela revient encore à chercher les nombres x qui vérifient $f(x) = 10$.



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. Soit $f(x) = x^2 - 4$. $f(x) = 0$ quand x vaut : a) ☐ -2 b) ☐ 0 c) ☐ 2

2. $f(2) = -1$ se traduit par :

a) ☐ l'image de 2 par f est -1.

b) ☐ le point de coordonnées $(2; -1)$ est sur la courbe représentative de f .

c) ☐ un antécédent de 2 par f est -1.

3. À un nombre x , une fonction f associe le carré de son triple. Alors $f(x)$ est égale à

a) ☐ $3x^2$

b) ☐ $(3x)^2$

c) ☐ 3^2x

Les questions 4, 5, et 6 se rapportent au graphique.

4. Le nombre 1 admet pour antécédent :

a) ☐ -4

b) ☐ -3

c) ☐ -2

5. $f(-3)$ vaut :

a) ☐ 1

b) ☐ 2

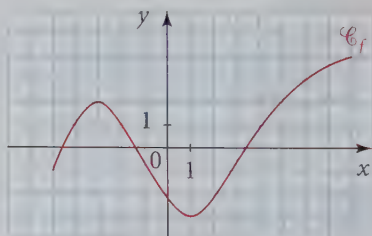
c) ☐ n'existe pas

6. Ce nombre n'admet pas d'antécédent par f :

a) ☐ -4

b) ☐ 0

c) ☐ 5



2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse										
1. Un nombre admet un unique antécédent par f .	☐ V ☐ F										
2. À un mois donné de l'année, on fait correspondre une température moyenne. On définit ainsi une fonction.	☐ V ☐ F										
3. Si $f(x) = -3x + 6$, alors un antécédent de 0 par f est 2.	☐ V ☐ F										
4. Si $f(2) = -3$, alors $A(-3 ; 2)$ est sur $\mathcal{C}_f$.	☐ V ☐ F										
Soit le tableau :											
<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	x	-2	0	1	4	$f(x)$	1	2	3	1	
x	-2	0	1	4							
$f(x)$	1	2	3	1							
5. $f(-2) = 1$.	☐ V ☐ F										
6. 1 admet au moins deux antécédents par f .	☐ V ☐ F										

→ Exercices d'entraînement



3 Mathématiques et français

Soit une fonction f telle que $f(3) = -2$.

Traduisez cette égalité avec une première phrase contenant le mot image, puis avec une seconde phrase contenant le mot antécédent.

4 Texte à trous

Soit le tableau de valeurs d'une fonction f .

x	-3	-2	0	1	2
$f(x)$	4	1	-2	1	3

Complétez les pointillés avec les mots : image – un antécédent – deux antécédents (Attention, l'un des mots est utilisé deux fois !).

- a)** 4 est ... de -3 par f . **c)** 1 admet au moins ... par f .
b) 0 est ... de -2 par f . **d)** -2 admet 1 pour ... par f .

5 Tant de façons de dire la même chose...

Traduisez chacune de ces phrases par une égalité de la forme $f(\dots) = \dots$

On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

- 1.** Le point $(2 ; 1)$ est sur $\mathcal{C}_f$. **4.** $f : 4 \mapsto 0$.
2. L'image par f du nombre -1 est 4. **5.** $\mathcal{C}_f$ coupe (Ox) au point d'abscisse 1.
3. Un antécédent de 1 par f est 3. **6.** $\mathcal{C}_f$ coupe (Oy) au point d'ordonnée -1.

6 Fonction définie par une expression

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

1. a) Calculez $f(-1)$ et $f(\sqrt{2})$.

b) Quelle est l'image de $\frac{1}{2}$ par f ?

2. a) Justifiez que 0 et 2 sont antécédents de 3 par f sans résoudre d'équation.

b) Quelle équation faut-il résoudre pour déterminer les antécédents de 3 par f ?

c) Résolvez l'équation trouvée en **b)** et retrouvez les résultats de la question **a)**.

7 Fonction définie par un tableau de valeurs

Soit f une fonction dont le tableau de valeurs est le suivant :

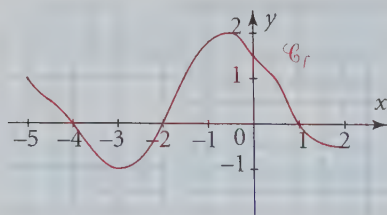
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-3	0	1	0	-1	1	3	7

On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

1. a) Combien vaut $f(-1)$?
- b) Quelle est l'image de -2 par f ?
- c) Au nombre 0, quel nombre associe f ?
2. Déterminez d'éventuels antécédents par f de : -5 ; 0 ; 1 et 3.
3. Parmi ces points, lesquels sont sur $\mathcal{C}_f$: ● A(3 ; 4) ● B(0 ; 1) ● C(1 ; 0) ?
4. Placez les huit points de $\mathcal{C}_f$ définis dans le tableau dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

8 Fonction définie par une représentation graphique

Soit f une fonction dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. a) Lisez $f(2)$, $f(-5)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- b) Donnez une valeur approchée de $f(\sqrt{2})$.
2. Lisez les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
3. Déterminez les antécédents par f de :

● -2
● -1
● 1
● 2
● 3
4. Combien les nombres suivants admettent-ils d'antécédents ?

● 0,5
● 1,5
● 3

→ Vers le brevet



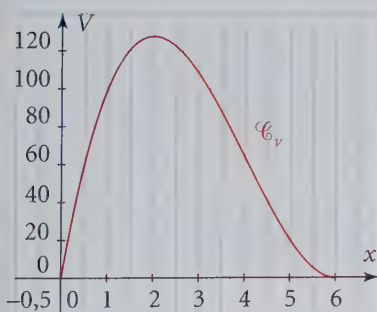
9 Tout un programme... encore

On effectue le programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre
- Élever ce nombre au carré
- Prendre le double du nombre obtenu
- Ajouter 6
- Écrire le résultat

1. Donnez le résultat fourni par le programme lorsque le nombre choisi est 3.
2. On note x le nombre choisi au départ et on appelle f la fonction qui, au nombre x , associe le résultat du programme de calcul.
 - a) Quelle est l'image par f du nombre 3 ?
 - b) Exprimez en fonction de x l'image de x par la fonction f .
 - c) Calculez $f(-1)$.
3. On souhaite obtenir 14 comme résultat. Quel nombre doit-on choisir au départ ?

10 La fonction est dans la boîte !



Un artisan fabrique des boîtes lui permettant de stocker des vis. Ces boîtes de hauteur x sont à base carrée de côté $12 - 2x$ et ont pour volume :

$$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

On donne ci-contre $\mathcal{C}_v$, la courbe représentative de la fonction V .

1. À l'aide du graphique, lisez le volume d'une boîte de 0,5 cm de haut.
2. a) Donnez une valeur approchée du volume d'une boîte de 2 cm de haut.
b) Retrouvez le résultat exact par le calcul.
3. Un client a besoin d'une boîte de 100 cm^3 de volume. Quelles dimensions de boîtes l'artisan peut-il proposer à son client ? (Utilisez le graphique).

→ QCM

1. ● $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.

● $f(0) = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4 \neq 0$.

● $f(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.

Réponses : **a)** -2 et **c)** 2.

2. $f(2) = -1$ se traduit par :

● Le nombre 2 a pour image -1 et le point $(2; -1)$ est sur $\mathcal{C}_f$.

● La proposition **c)** est fausse, 2 est un antécédent de -1 !

Réponses : **a)** l'image de 2 par f est -1 et **b)** le point de coordonnées $(2; -1)$.

3. Soit x un nombre. Son triple est $3 \times x = 3x$.

Le carré de son triple est alors $(3x)^2$.

Réponse : **b)** $(3x)^2$.

4. On se place sur l'axe des ordonnées en $y = 1$.

Puis on se déplace horizontalement jusqu'à $\mathcal{C}_f$ (des deux côtés de l'axe (Oy)). On peut alors, en descendant verticalement, rejoindre l'axe des abscisses et lire les trois antécédents : -4, -2 et 4.

Réponses : **a)** -4 et **c)** -2.

5. On se place sur l'axe des abscisses en $x = -3$. On monte verticalement pour rejoindre $\mathcal{C}_f$. On lit alors $f(-3) = 2$.

Réponse : **b)** 2.

6. En se plaçant sur l'axe des ordonnées en $y = -4$ et $y = 5$ et en se déplaçant horizontalement, on ne rencontre pas $\mathcal{C}_f$ (alors qu'en $y = 0$, si).

Réponses : **a)** -4 et **c)** 5.

2. 1. Faux. Un nombre peut admettre aucun, un ou même plusieurs antécédents.

2. Faux. Un mois de l'année n'est pas un nombre. Or une fonction associe deux nombres !

3. Vrai. Un antécédent de 0 par f est le(s) x tel(s) que $f(x) = 0$.

Remarque

On remplace x par chacune des valeurs proposées et on compare le résultat à 0.

Gagnez des points !

Un point est sur la courbe si sa 2^e coordonnée est l'image de la 1^{re}.

Rappel

C'est la méthode décrite page 134.

Piège à éviter

Ne confondez pas image et antécédent. Une image est UNIQUE. Alors qu'il peut y avoir plusieurs antécédents (ou aucun !)

On résout l'équation : $-3x + 6 = 0$; $-3x = -6$;

$$x = \frac{-6}{-3} ; \quad x = 2.$$

4. Faux. Quand $f(2) = -3$ c'est le point $A(2 ; -3)$ qui est sur $\mathcal{C}_f$.

5. Vrai. Pour $x = -2$, $f(x) = 1$.

6. Vrai. Pour $f(x) = 1$, on lit deux valeurs de x (-2 et 4).

→ Exercices d'entraînement

3 $f(3) = -2$ se traduit par :

● L'image de 3 par la fonction f est -2 .

Ou encore -2 est l'image de 3 par la fonction f .

● Un antécédent de -2 par la fonction f est 3.

Ou encore 3 est un antécédent de -2 par f .

4 a) 4 est **image** de -3 par f .

b) 0 est un **antécédent** de -2 par f .

c) 1 admet au moins **deux antécédents** par f .

d) -2 admet 1 pour **image** par f .

5 1. Un point d'abscisse x qui est sur $\mathcal{C}_f$ a pour ordonnée $f(x)$.

D'où $f(2) = 1$

2. $f(-1) = 4$.

3. $f(3) = 1$.

4. Au nombre 4, f associe le nombre 0 d'où $f(4) = 0$.

5. $f(1) = 0$.

6. $f(0) = -1$.

$$\begin{aligned} \textbf{6 1. a) } \bullet f(-1) &= (-1)^2 - 2 \times (-1) + 3 \\ &= 1 + 2 + 3 = 6. \end{aligned}$$

L'astuce du prof

On peut aussi calculer $f(2)$ et montrer qu'on obtient 0.

L'astuce du prof

$f(a) = b$
 ↑ ↑
 antécédent image

L'astuce du prof

Dans la 2^e ligne du tableau figurent les images, et dans la 1^{re} ligne, les antécédents.

Remarque

1 peut admettre d'autres antécédents qui n'apparaissent pas dans le tableau.

Rappel

- Les points de l'axe des abscisses ont une ordonnée égale à 0.
- Les points de l'axe des ordonnées ont une abscisse égale à 0.

$$\bullet f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 \times (\sqrt{2}) + 3 \\ = 2 - 2\sqrt{2} + 3 = 5 - 2\sqrt{2}.$$

Rappel
 $(\sqrt{2})^2 = 2.$

b) L'image de $\frac{1}{2}$ par f est :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} - 1 + 3 \\ = \frac{1}{4} - \frac{4}{4} + \frac{12}{4} = \frac{9}{4}.$$

Rappel
 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}.$

2. a) 0 et 2 sont antécédents de 3 par f s'ils vérifient $f(0) = 3$ et $f(2) = 3$.

Aussi on calcule :

$$\bullet f(0) = 0^2 - 2 \times 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

$$\bullet f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 4 - 4 + 3 = 3.$$

Ainsi 0 et 2 sont bien antécédents de 3 par f .

b) Déterminer les antécédents de 3 par f , c'est chercher les x tels que $f(x) = 3$. Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 3$.

c) Résolvons $f(x) = 3$.

$$x^2 - 2x + 3 = 3$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x \times x - 2 \times x = 0$$

$$x \times (x - 2) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$$x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 2$$

On retrouve les mêmes résultats que dans la question **2.a)** : les nombres 0 et 2 sont antécédents de 3 par f .

7 1. a) Pour $x = -1$ (première ligne), on lit (seconde ligne) $f(x) = 0$. Soit $f(-1) = 0$.

b) Pour $x = -2$ (première ligne), on lit (seconde ligne) $f(x) = -3$.

Soit $f(-2) = -3$.

c) Au nombre 0, on cherche quel nombre associe f , c'est-à-dire qu'on cherche l'image de 0 par f . Pour $x = 0$, $f(x) = 1$.

Ainsi au nombre 0, f associe 1.

L'astuce du prof
 On ne cherche pas à résoudre une équation.

Gagnez des points !
 On se ramène à une équation produit nul en factorisant par x .

Remarque
 On prouve là qu'il n'y a que deux antécédents.

2. ● Le nombre -5 n'apparaît pas dans la seconde ligne du tableau. Le tableau ne permet pas de trouver d'antécédent à -5 .

● Le nombre 0 apparaît dans la seconde ligne du tableau pour $x = -1$ et pour $x = 1$. 0 admet donc pour antécédents les nombres -1 et 1 .

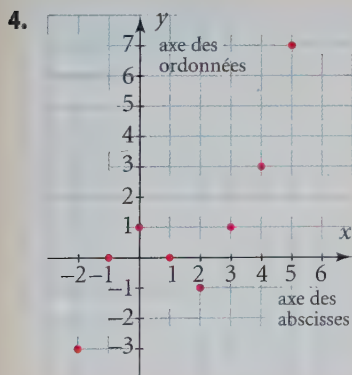
● Le nombre 1 apparaît dans la ligne des « $f(x)$ » pour $x = 0$ et pour $x = 3$. 1 admet pour antécédents les nombres 0 et 3 .

● Le nombre 3 apparaît dans la seconde ligne du tableau pour $x = 4$. 3 admet pour antécédent par f le nombre 4 .

3. ● Pour $x = 3$, $f(x) = 1 \neq 4$. Le point $A(3 ; 4)$ n'est pas sur $\mathcal{C}_f$.

● Pour $x = 0$, $f(x) = 1$. Le point $B(0 ; 1)$ est sur $\mathcal{C}_f$.

● Pour $x = 1$, $f(x) = 0$. Le point $C(1 ; 0)$ est sur $\mathcal{C}_f$.



L'astuce du prof
On trouve les antécédents éventuels dans la 1^{re} ligne.

Remarque
Un point de $\mathcal{C}_f$
a pour abscisse x
et pour ordonnée $f(x)$.

8 1.a) On lit :

● $f(2) = -0,5$.

● $f(-5) = 1$.

● $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0,5) = 1$.

b) $\sqrt{2} \approx 1,4$.

On lit l'image de $1,4$: $f(1,4) \approx -0,3$.

On conclut $f(\sqrt{2}) \approx -0,3$.

Piège à éviter
Attention aux unités :
2 graduations pour 1.

Gagnez des points !
On prend d'abord une
valeur approchée de $\sqrt{2}$
puis on lit son image.

2. $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en trois points dont les coordonnées sont :

- $(-4 ; 0)$ ● $(-2 ; 0)$ ● $(1 ; 0)$.

3. ● Le nombre -2 n'admet pas d'antécédent par f car $\mathcal{C}_f$ n'a aucun point d'ordonnée -2 .

● La valeur -1 est atteinte pour $x = -3$.

Le nombre -1 admet pour antécédent -3 .

● La valeur 1 est atteinte pour $x = -5$, pour $x = -1,5$ et pour $x = 0,5$.

1 admet pour antécédents les nombres -5 ; $-1,5$ et $0,5$.

● On lit $f(x) = 2$ pour $x = -0,5$.

Le nombre 2 admet pour antécédent $-0,5$.

● $f(x)$ ne prend pas la valeur 3 . Le nombre 3 n'admet pas d'antécédent par f .

4. ● $0,5$ admet 3 antécédents par f .

● $1,5$ admet 2 antécédents par f .

● 3 n'a pas d'antécédent par f .

Piège à éviter

On veut seulement
le nombre d'antécédents,
pas leurs valeurs.

➔ Vers le Brevet

9 1. On choisit 3 .

$$3^2 = 9;$$

$$2 \times 9 = 18;$$

$$18 + 6 = 24.$$

Le résultat final est 24 .

2. a) Quand on choisit 3 , le programme de calcul retourne 24 .

Aussi l'image de 3 par f est 24 : $f(3) = 24$.

b) Le nombre choisi au départ est x .

Son carré s'écrit x^2 .

Le double du nombre précédent est : $2 \times x^2 = 2x^2$.

On ajoute 6 . On obtient : $2x^2 + 6$.

Le résultat final est $f(x) = 2x^2 + 6$.

c) On calcule $f(x)$ pour $x = -1$.

$$f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 6 = 2 \times 1 + 6 = 2 + 6 = 8.$$

$$f(-1) = 8.$$

3. On veut obtenir 14 , on cherche x tel que $f(x) = 14$.

L'astuce du prof

On vérifie qu'avec $x = 3$,
on obtient le même
résultat que dans
la question 1.

$$\text{Soit } 2x^2 + 6 = 14$$

$$2x^2 = 14 - 6$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{2} = 4$$

$$x = \sqrt{4} \text{ ou } x = -\sqrt{4}$$

$$x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

En conclusion, quand on veut obtenir 14 comme résultat final, il faut choisir 2 ou -2 comme nombre de départ.

Remarque

C'est une équation dans laquelle on isole x^2 .

Rappel

L'équation $x^2 = a$, avec $a > 0$, admet 2 solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

10 1. Pour une boîte d'une hauteur $x = 0,5$, on lit sur le graphique un volume correspondant de 60 cm^3 .

$$\text{Soit } V(0,5) = 60.$$

2. a) Pour $x = 2$, on lit $V(2) \approx 130$.

Une boîte d'une hauteur de 2 cm a un volume d'environ 130 cm^3 .

b) Pour $x = 2$, on calcule $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

$$V(2) = 4 \times 2^3 - 48 \times 2^2 + 144 \times 2$$

$$V(2) = 4 \times 8 - 48 \times 4 + 144 \times 2$$

$$V(2) = 32 - 192 + 288$$

$$V(2) = 128.$$

Une boîte d'une hauteur de 2 cm a un volume de 128 cm^3 .

3. ● Le client veut une boîte de 100 cm^3 de volume.

On lit deux hauteurs correspondantes de boîtes :

$$x = 1 \text{ et } x \approx 3,2.$$

● Pour $x = 1$, la boîte a une hauteur de 1 cm.

La base de la boîte est carrée de côté :

$$12 - 2x = 12 - 2 \times 1 = 12 - 2 = 10 \text{ cm.}$$

● Pour $x = 3,2$, la boîte a une hauteur de 3,2 cm.

La base de la boîte est carrée de côté :

$$12 - 2x = 12 - 2 \times 3,2 = 12 - 6,4 = 5,6 \text{ cm.}$$

L'astuce du prof

On trouve le résultat exact qui doit être très proche de celui lu graphiquement.

Piège à éviter

On donne la hauteur de la boîte et on calcule le côté du carré de base.

1 Fonctions linéaires

1 Définitions

Soit a un réel donné.

- Une **fonction linéaire** est une fonction qui, à un nombre x , associe le nombre $a \times x$.
- La fonction f traduisant cette situation est définie par $f(x) = ax$.
 a est appelé coefficient de la fonction linéaire.

Exemple : La fonction linéaire de coefficient -2 est la fonction f définie par $f(x) = -2x$.
On écrit également $f: x \mapsto -2x$.

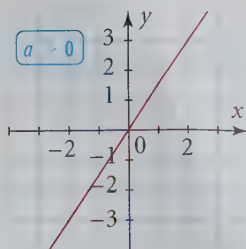
Remarque : Une fonction linéaire est une fonction affine particulière.

2 Représentation graphique

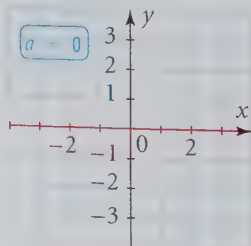
- Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire $x \mapsto ax$ est une droite qui passe par l'origine du repère (on a $f(0) = 0$).
- Les points qui constituent cette droite ont des coordonnées de la forme $(x; ax)$.
- On dit que a est le **coefficient directeur** de la droite car il donne la direction de la droite, c'est-à-dire son inclinaison par rapport à l'horizontale.

Plus précisément,

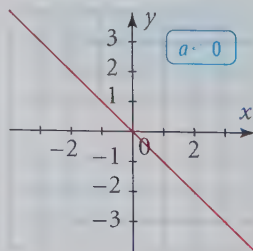
Si $a > 0$, la droite
« monte ».



Si $a = 0$, la droite est
horizontale et confondue
avec l'axe des abscisses.



Si $a < 0$, la droite
« descend ».



EXERCICES RÉSOLUS

1 Calculer des images et des antécédents par une fonction linéaire

ÉNONCÉ

f est une fonction linéaire définie par $f(x) = -4x$.

Déterminez l'image de 3 par f , puis l'antécédent de -8 par f .

CORRIGÉ

● L'image de 3 par f est donnée par $f(3) = -4 \times 3 = -12$.

L'image de 3 par f est -12 .

● On cherche x tel que $f(x) = -8$
soit $-4x = -8$.

On en déduit que $x = \frac{-8}{-4} = 2$.

L'antécédent de -8 est 2.

Méthode

Pour déterminer l'image de 3, on calcule $f(3)$. Pour cela, on remplace x par 3 dans $f(x)$.

Conseil

Trouver des antécédents revient à résoudre une équation.

2 Lire des images et des antécédents à partir d'une représentation graphique

ÉNONCÉ

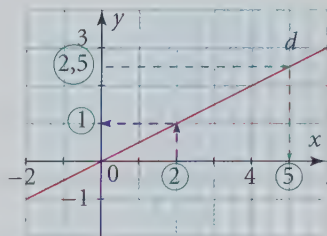
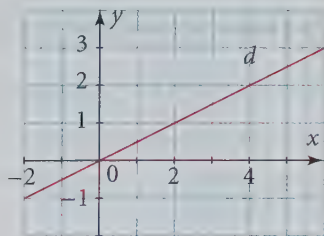
On donne la représentation graphique d d'une fonction linéaire g .

Lisez $g(2)$, puis l'antécédent de 2,5.

CORRIGÉ

● Pour lire l'image de 2 par g , on place 2 sur l'axe des abscisses, on va jusqu'à la droite, puis on lit sur l'axe des ordonnées la valeur correspondante (flèches bleues) : l'image de 2 par g est 1.

● Pour lire l'antécédent de 2,5, on place 2,5 sur l'axe des ordonnées, on va jusqu'à la droite, puis on lit sur l'axe des abscisses la valeur correspondante (flèches vertes) : l'antécédent de 2,5 est 5.



2 Proportionnalité. Pourcentages

1 Proportionnalité

a. Tableau de proportionnalité

- Un tableau décrit une situation de proportionnalité quand, en multipliant par un même nombre a , les valeurs de la première ligne, on retrouve celles de la deuxième ligne. Ce nombre a est appelé **coefficient de proportionnalité**.
- À toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire.

Exemple :

5	0,2	4
1,5	0,06	1,2



Dans ce tableau, $a = 0,3$ et la fonction linéaire qui modélise la situation est la fonction f définie par $f(x) = 0,3x$.

b. Propriété

- Dans un tableau de proportionnalité, il y a égalité des produit en croix.

Exemple : Dans le tableau précédent, les produits $5 \times 0,06$ et $1,5 \times 0,2$ sont égaux.

2 Fonction linéaire : application aux pourcentages

- Prendre 7 % d'une quantité x , revient à la multiplier par $\frac{7}{100}$, soit par 0,07.

La fonction linéaire associée est donc la fonction $x \mapsto 0,07x$.

- Augmenter une quantité de 7 %, revient à la multiplier par $1 + \frac{7}{100}$, soit par 1,07.

La fonction linéaire associée est donc la fonction $x \mapsto 1,07x$.

- Diminuer une quantité de 7 %, revient à la multiplier par $1 - \frac{7}{100}$, soit par 0,93.

La fonction linéaire associée est donc la fonction $x \mapsto 0,93x$.

Remarque :

- Dans le cas d'une augmentation ou diminution exprimée en pourcentage, on parle souvent de coefficients multiplicateurs.
- Une augmentation en pourcentage se traduit par un coefficient multiplicateur plus grand que 1 (dans l'exemple ci-dessus, 1,07).
- Une diminution en pourcentage se traduit par un coefficient multiplicateur inférieur à 1 (dans l'exemple ci-dessus, 0,93).

EXERCICES RÉSOLUS

1 Pourcentage et tableau de proportionnalité

ÉNONCÉ

a) Complétez la deuxième ligne du tableau ci-contre en prenant 3,5 % des nombres de la première ligne.

20	30	120

b) S'agit-il d'un tableau de proportionnalité ? Si oui, donnez le coefficient de proportionnalité ainsi que l'expression de la fonction linéaire associée.

CORRIGÉ

a) Prendre 3,5 % d'une quantité revient à la multiplier par $\frac{3,5}{100}$, c'est-à-dire par 0,035.

- $20 \times 0,035 = 0,7$
- $30 \times 0,035 = 1,05$
- $120 \times 0,035 = 4,2$

b) On a multiplié les valeurs de la première ligne par un même nombre : 0,035. Il s'agit donc d'un tableau de proportionnalité de coefficient 0,035. La fonction linéaire associée à cette situation est la fonction $x \mapsto 0,035x$.

Rappel

Un pourcentage s'écrit de plusieurs façons :

$$3,5\% = \frac{3,5}{100} = 0,035.$$

2 Reconnaître un tableau de proportionnalité

ÉNONCÉ

Le tableau suivant est-il un tableau de proportionnalité ? Justifiez.

0,3	4,2	5,3
0,018	0,252	0,318

CORRIGÉ

On cherche la valeur de a telle que $0,3 \times a = 0,018$.
En divisant les deux membres par 0,3, on obtient

$$a = \frac{0,018}{0,3} = 0,06.$$

On vérifie ce résultat avec les autres valeurs :

- $4,2 \times 0,06 = 0,252$
- $5,3 \times 0,06 = 0,318$

Il s'agit donc d'un tableau de proportionnalité de coefficient 0,06.

Méthode

On recherche le coefficient a qui permet de calculer les nombres de la 2^e ligne à partir de ceux de la 1^{re}.

→ Déterminer une fonction linéaire par le calcul

ÉNONCÉ

Déterminez l'expression de la fonction linéaire f qui vérifie $f(-2) = 3$.

MÉTHODE

1. La fonction linéaire recherchée est une fonction qui s'écrit sous la forme $f(x) = ax$.
2. On recherche la valeur du coefficient a en utilisant l'image donnée.
3. On conclut en écrivant l'expression de $f(x)$.

CORRIGÉ

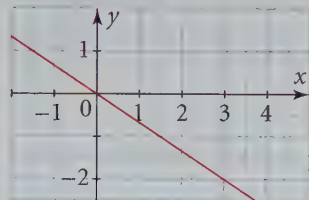
Solution	Commentaires
Puisqu'il s'agit d'une fonction linéaire, elle s'écrit sous la forme $f(x) = ax$.	1. La fonction recherchée est une fonction linéaire, il faut bien lire l'énoncé.
• $f(-2) = 3$ • $f(-2) = a \times (-2) = -2a$. On a donc $-2a = 3$ soit $a = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$	2. Pour trouver la valeur de a , on écrit $f(-2)$ de deux façons différentes.
La fonction f cherchée s'écrit : $f(x) = -\frac{3}{2}x.$	3. N'oubliez pas la conclusion. La fonction trouvée doit être de la forme $f(x) = ax$.

→ Déterminer une fonction linéaire à partir de sa représentation graphique

ÉNONCÉ

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction.

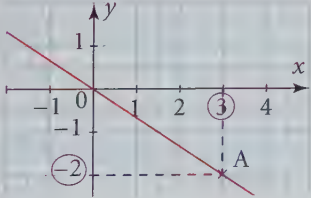
Justifiez qu'il s'agit de la représentation graphique d'une fonction linéaire, puis donnez son coefficient par lecture graphique.



MÉTHODE

1. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.
2. On choisit un nombre et on recherche graphiquement son image par la fonction. On utilise, dans la mesure du possible, des nombres entiers.
3. On calcule la valeur de a grâce à la méthode précédente.
4. On conclut en écrivant l'expression de $f(x)$.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
La représentation graphique de cette fonction est une droite qui passe par l'origine du repère. Il s'agit donc bien d'une fonction linéaire.	1. Il faut vérifier si : – c'est une droite, – elle passe par l'origine.
 On a l'égalité $f(3) = -2$.	2. D'après le graphique, le point A a des coordonnées entières (3 ; -2). L'image de 3 est -2, on en déduit l'égalité.
● $f(3) = -2$ ● $f(3) = a \times (3) = 3a$ On a donc $3a = -2$ soit $a = -\frac{2}{3}$.	3. On écrit $f(3)$ de deux façons différentes.
On obtient $f(x) = -\frac{2}{3}x$.	4. La fonction trouvée doit être de la forme $f(x) = ax$.



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. Les fonctions suivantes sont linéaires :

a) ☐ $f(x) = -\frac{2}{3}x$

b) ☐ $g(x) = -x$

c) ☐ $h(x) = 2x^2$

2. Soit g la fonction linéaire de coefficient $-\frac{1}{2}$, alors :

a) ☐ $g(x) = -0,5x$

b) ☐ Par g , l'image de 2 est -1

c) ☐ $g(-1) = 2$

3. Si h vérifie $h(1) = 1$, alors : a) ☐ $h(x) = x$ b) ☐ $h(-1) = 1$ c) ☐ $h(3) = 3$

4.

5	3
a	b

 est un tableau de proportionnalité lorsque :

a) ☐ $a = 7$ et $b = 5$

b) ☐ $a = 3$ et $b = 5$

c) ☐ $a = 0,75$ et $b = 0,45$

5. Pour augmenter une quantité de 5 %, on la multiplie par :

a) ☐ $1 + \frac{5}{100}$

b) ☐ 0,95

c) ☐ 1,05

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.	☐ V ☐ F
2. Il existe une unique fonction linéaire f qui vérifie $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3}$.	☐ V ☐ F
3. Soit g la fonction linéaire qui vérifie $g(3) = -1$. La droite représentant g est la droite (OA) avec $A(6; -2)$.	☐ V ☐ F
4. Si h est une fonction linéaire, alors $h(0) = 0$.	☐ V ☐ F
5. La fonction t définie par $t(x) = \frac{-2x}{3}$ est une fonction linéaire.	☐ V ☐ F
6. La fonction i définie par $i(x) = 3$ est une fonction linéaire.	☐ V ☐ F

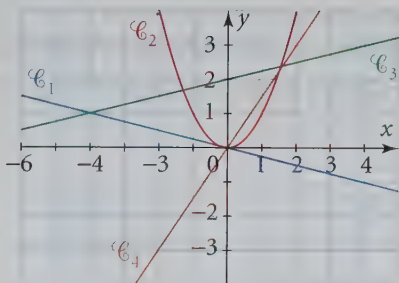
→ Exercices d'entraînement



3 Avec un graphique pour commencer

On donne les représentations graphiques de quatre fonctions. Indiquez celles qui représentent des fonctions linéaires.

Justifiez.



4 Calculs avec une fonction linéaire

On considère la fonction linéaire f définie par $f(x) = -5x$.

1. Déterminez l'image de -1 par f , puis celle de $\frac{5}{12}$.
2. Quel est l'antécédent de -2 ?
3. Quelle est l'abscisse du point de la droite qui représente f et dont l'ordonnée est 1 ?

5 Fonctions linéaires et problèmes

La voiture de Florent consomme 6,2 litres aux 100 km. Cette consommation est proportionnelle au nombre de kilomètres parcourus.

1. **a)** Combien de kilomètres (arrondis à l'unité) peut-il parcourir avec 1 litre d'essence ?
b) Quelle est sa consommation pour 1 km ?
2. Soit x le nombre de km parcourus.
a) Déterminez la fonction f qui donne la consommation en fonction de x .
b) Calculez $f(655)$. Interprétez ce résultat.

6 Jusqu'où ira-t-elle ?

La population d'une ville augmente de 2,1 % par an. En 2000, elle est de 5 000 habitants.

On donne le tableau suivant (les résultats sont arrondis à l'entier le plus proche) !

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Population	5 000	5 105	5 212	5 322	5 433

1. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Justifiez.
2. Justifiez que la population de cette ville en 2001 est 5 105.
3. À l'aide de votre calculatrice, déterminez à partir de quelle année la population dépassera 6 500 habitants.

7 Allons faire les courses

Chez le boucher, le prix de l'entrecôte est proportionnelle à sa masse. Sophie a payé 25,35 € pour 1,3 kg d'entrecôte.

Soit x la masse en kg de l'entrecôte et $f(x)$ son prix.

1. L'égalité $f(25,35) = 1,3$ est-elle vraie ? Justifiez.
2. Exprimez $f(x)$ en fonction de x .
3. Donnez la valeur de $f(1)$. Interprétez concrètement ce résultat.

→ Vers le Brevet



8 Avec un graphique, cette fois ci

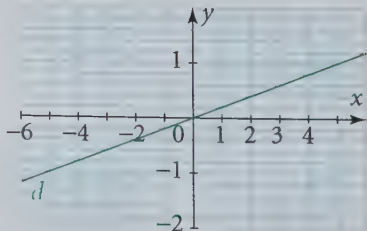
On donne la représentation graphique d'une fonction linéaire f .

1. À l'aide de ce graphique et sans calcul, déterminez :

a) $f(3)$.

b) l'antécédent de -1 .

2. Déterminez la valeur de a pour que $f(x) = ax$.



9 Attention aux pourcentages !

1. Un téléphone coûtant 150 € a baissé de 30 %. Quel est son nouveau prix ?
2. Après une baisse de 20 %, le prix d'un téléviseur est 850 €. Quel était son prix avant la baisse ?

10 Le tout en un : fonction, géométrie et racines carrées

Rappel :

La diagonale d d'un carré de côté a est donnée par la formule $d = a\sqrt{2}$.

On note x la longueur d'un côté d'un carré et $f(x)$ la longueur de sa diagonale.

1. Exprimez $f(x)$ en fonction de x . Justifiez que la fonction f est une fonction linéaire.
2. Complétez le tableau suivant (les valeurs seront arrondies au dixième) :

x	5	3	
$f(x)$	7,1		17

3. Montrez que si la longueur du côté du carré est $(\sqrt{18} + \sqrt{2})$, alors la diagonale de ce carré est un nombre entier.

11 Passera ou ne passera pas ?

Soit $A(2 ; 35)$. La droite (OA) passe-t-elle par le point $B(5 ; 53)$?

Justifiez.

→ QCM

1. f est une fonction linéaire car elle est de la forme

$$f(x) = ax \text{ avec } a = -\frac{2}{3}.$$

• g est une fonction linéaire car elle est de la forme $g(x) = ax$ avec $a = -1$.

• h n'est pas une fonction linéaire. Elle n'est pas de la forme $h(x) = ax$ (à cause « du x^2 »).

Réponses : **a)** $f(x) = -\frac{2}{3}x$ et **b)** $g(x) = -x$.

2. g est la fonction linéaire de coefficient $-\frac{1}{2}$.

Elle s'écrit donc $g(x) = -\frac{1}{2}x = -0,5x$.

• $g(2) = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$: l'image de 2 est -1.

• $g(-1) = -\frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2}$.

Réponses : **a)** $g(x) = -0,5x$ et **b)** par g , l'image de 2 est -1.

3. h est une fonction linéaire, alors elle s'écrit $h(x) = ax$. Or $h(1) = 1$, d'où $a \times 1 = 1$ soit $a = 1$. On en déduit $h(x) = x$.

• $h(-1) = -1 \neq 1$.

• $h(3) = 3$.

Réponses : **a)** $h(x) = x$ et **c)** $h(3) = 3$.

4. • Pour $a = 7$ et $b = 5$, on a $5 \times 5 = 25$ et $7 \times 3 = 21$. Or $25 \neq 21$.

• Pour $a = 3$ et $b = 5$, on a $5 \times 5 = 25$ et $3 \times 3 = 9$, et $25 \neq 9$.

• Pour $a = 0,75$ et $b = 0,45$, on a $5 \times 0,45 = 2,25$ et $0,75 \times 3 = 2,25$.

Réponse : **c)** $a = 0,75$ et $b = 0,45$.

Méthode

Dans $f(x) = ax$, on repère bien la valeur de a .
Attention $-x = -1x$.

Méthode

On cherche, à l'aide de la donnée, la valeur de a pour déterminer la fonction g .

Méthode

On teste, pour chaque valeur de a et de b , l'égalité des produits en croix, caractéristique des tableaux de proportionnalité.

5. Pour augmenter une quantité de 5 %, on multiplie celle-ci par

$$1 + \frac{5}{100} = 1 + 0,05 = 1,05.$$

Réponses : a) $1 + \frac{5}{100}$ et c) 1,05.

2. 1. Vrai. Toute fonction linéaire se représente par une droite qui passe par l'origine du repère.

2. Vrai. f est une fonction linéaire si elle s'écrit sous la forme $f(x) = ax$. Or $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3}$.

On en déduit (en remplaçant) : $a \times \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$,

$$\text{d'où } a = \frac{4}{3} : \frac{3}{4} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}.$$

On trouve une seule valeur de a correspondante ; on en déduit qu'il existe une seule fonction linéaire qui vérifie l'égalité proposée. Il s'agit de la fonction f définie par $f(x) = \frac{16}{9}x$.

3. Vrai. On recherche l'expression de la fonction g :

$g(x) = ax$. Or $g(3) = -1$. On en déduit (en remplaçant) $3 \times a = -1$, d'où $a = -\frac{1}{3}$.

On obtient donc $g(x) = -\frac{1}{3}x$.

Alors $g(6) = -\frac{1}{3} \times 6 = -2$ et par conséquent, la droite (OA) représente la fonction g .

4. Vrai. h est une fonction linéaire, elle est donc de la forme $h(x) = ax$, d'où $h(0) = a \times 0 = 0$.

5. Vrai. En effet, on peut écrire $t(x) = \frac{-2x}{3} = -\frac{2}{3}x$. t s'écrit bien sous la forme $t(x) = ax$ avec $a = -\frac{2}{3}$.

6. Faux. En effet, 3 n'est pas de la forme $a \times x$.

Rappel

- On est amené à résoudre une équation dont l'inconnue est a .
- Diviser par $\frac{3}{4}$ revient à multiplier par l'inverse, $\frac{4}{3}$.

Méthode

A est sur la droite si l'image de 6 est -2 par g .

L'astuce du prof

En faisant un graphique, on pouvait deviner le résultat...

→ Exercices d'entraînement

3 • $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_4$ sont des représentations de fonctions linéaires car ce sont des droites passant par 0.

• $\mathcal{C}_3$ est bien une droite mais elle ne passe par l'origine du repère.

• $\mathcal{C}_2$ passe par 0 mais n'est pas une droite.

4 1. • $f(-1) = -5 \times (-1) = 5$. L'image de -1 est 5.

$$\bullet f\left(\frac{5}{12}\right) = -5 \times \frac{5}{12} = -\frac{25}{12}.$$

2. L'antécédent de -2 est le nombre solution de l'équation $f(x) = -2$.

$$-5x = -2$$

$$x = \frac{-2}{-5}$$

$$x = \frac{2}{5}.$$

L'antécédent de -2 est $\frac{2}{5}$.

3. On cherche x (l'abscisse) telle que son image (l'ordonnée) vaille 1. On est donc amené à résoudre l'équation $f(x) = 1$.

$$-5x = 1$$

$$x = \frac{1}{-5}$$

L'abscisse du point dont l'ordonnée vaut 1 est $-\frac{1}{5}$.

5 1. a) Sachant que la consommation est proportionnelle au nombre de km parcourus, on dresse le tableau suivant qui est un tableau de proportionnalité :

km	100	x
litres	6,2	1

On en déduit $6,2 \times x = 100 \times 1$, soit $x = \frac{100}{6,2} \approx 16$.

Avec 1 litre d'essence, Florent peut parcourir environ 16 km.

Gagnez des points !

Il faut vérifier si :

- c'est une droite.
- elle passe par l'origine.

Remarque

L'image de -1 est donnée par $f(-1)$.

Méthode

L'antécédent de -2 est le nombre qui a pour image -2 .

L'astuce du prof

Pour vérifier son résultat, on peut calculer l'image de $\frac{2}{5}$ et vérifier qu'elle vaut -2 .

L'astuce du prof

Faites un petit graphique pour visualiser ce que l'on vous demande !

b) Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

km	100	1
litres	6,2	x

On en déduit que pour 1 km, la voiture de Florent consomme $100 \times x = 1 \times 6,2$ soit $x = \frac{6,2}{100}$ litre, soit 0,062 litre d'essence.

2. a) Pour 1 km, la voiture consomme 0,062 litre d'essence. Donc pour x km, elle consomme $0,062 \times x$ litres d'essence. On en déduit que la fonction qui donne la consommation en fonction du nombre x de km est $f(x) = 0,062x$.

b) $f(655) = 0,062 \times 655 = 40,61$.

Pour un parcours de 655 km, la voiture de Florent consomme 40,61 litres d'essence.

6 1. Il n'y a pas de proportionnalité entre les années et la population (cela n'aurait aucun sens). On peut le vérifier en effectuant un produit en croix :

$2\,000 \times 5\,105 = 10\,210\,000$ et $5\,000 \times 2\,001 = 10\,005\,000$. On constate bien que les résultats sont différents.

2. La population de la ville augmente de 2,1 % par an. Augmenter une quantité de 2,1 % revient à la multiplier par $1 + \frac{2,1}{100} = 1 + 0,021 = 1,021$.

$5\,000 \times 1,021 = 5\,105$. Le résultat est donc justifié.

3. La population augmente d'une année sur l'autre de 2,1 %. Chaque année, elle est multipliée par 1,021.

On cherche, à l'aide de la calculatrice, la première valeur de l'entier n telle que $5\,000 \times 1,021^n > 6\,500$.

On a $5\,000 \times 1,021^{12} \approx 6\,416 < 6\,500$ et $5\,000 \times 1,021^{13} \approx 6\,551 > 6\,500$.

L'entier n cherché est 13. On en déduit qu'à partir de l'année 2013, la population dépassera 6 500 habitants.

Remarque

On pouvait obtenir ce résultat en deux étapes : on calcule d'abord l'augmentation (2,1 % de $5\,000 = 0,021 \times 5\,000 = 105$), puis on ajoute ce résultat à 5 000 ($5\,000 + 105 = 5\,105$).

7 1. L'égalité proposée est fausse. x désigne la masse, pas le prix. L'égalité correcte est $f(1,3) = 25,35$.

2. Puisque le prix de l'entrecôte est proportionnel à sa masse, on dresse le tableau de proportionnalité suivant.

Masse	1,3	x
Prix	25,35	$f(x)$

Les produits en croix sont égaux, donc $1,3 \times f(x) = 25,35 \times x$. On en déduit :

$$f(x) = \frac{25,35}{1,3}x. \text{ Soit } f(x) = 19,5x.$$

3. $f(1) = 19,5 \times 1 = 19,5$. On en déduit que le prix d'un kg d'entrecôte est 19,5 €.

Remarque

On pouvait obtenir ce résultat en écrivant $f(x) = ax$ et en cherchant la valeur de a telle que $f(1,3) = 25,35$.

→ Vers le brevet

8 1. À l'aide de ce graphique, on trouve :

a) $f(3) = 0,6$.

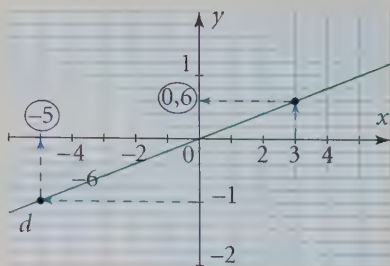
b) L'antécédent de -1 est -5.

2. On sait que $f(x) = ax$ et que $f(3) = 0,6$.

En remplaçant, on obtient $3a = 0,6$ soit

$$a = \frac{0,6}{3} = 0,2.$$

On en déduit que $f(x) = 0,2x$.



9 1. Pour diminuer un nombre de 30 %, on le multiplie par $1 - \frac{30}{100} = 1 - 0,3 = 0,7$.

$150 \times 0,7 = 105$. Le prix du téléphone après la baisse est de 105 €.

2. On appelle x le prix du téléviseur avant la baisse. Pour diminuer un nombre de 20 %, on le multiplie par

$$1 - \frac{20}{100}, \text{ c'est-à-dire par } 1 - 0,2 = 0,8.$$

On cherche x tel que $0,8 \times x = 850$. On obtient

$$x = \frac{850}{0,8} = 1\,062,5. \text{ Le prix du téléviseur avant la baisse}$$

est de 1 062,5 €.

Piège à éviter

Ce n'est pas en augmentant le prix du téléviseur que l'on a le résultat. En effet, une baisse de 20 %, n'est pas compensée par une hausse de 20 %.

10 1. En utilisant le rappel, on obtient $f(x) = x\sqrt{2}$.

Il s'agit bien d'une fonction linéaire car elle est de la forme $f(x) = ax$ avec $a = \sqrt{2}$.

2. ● On a $f(3) = 3\sqrt{2} \approx 4,2$.

● On cherche x tel que $f(x) = 17$.

On obtient $x\sqrt{2} = 17$, soit $x = \frac{17}{\sqrt{2}} \approx 12$.

On obtient donc le tableau :

x	5	3	12
$f(x)$	7,1	4,2	17

3. On calcule $f(\sqrt{18} + \sqrt{2})$.

$$\begin{aligned}
 f(\sqrt{18} + \sqrt{2}) &= (\sqrt{18} + \sqrt{2}) \times \sqrt{2} \\
 &= \sqrt{18} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} \\
 &= \sqrt{36} + \sqrt{4} \\
 &= 6 + 2 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

La longueur de la diagonale vaut 8, qui est bien un nombre entier.

11 ● La droite (OA) représente une fonction linéaire f car elle passe par 0. Sachant que A est sur la droite, on en déduit que $f(2) = 35$.

On sait que $f(x) = ax$. On cherche donc la valeur de a en résolvant l'équation

$a \times 2 = 35$. On obtient $a = \frac{35}{2} = 17,5$. Par conséquent, la fonction f , représentée par la droite (OA), est définie par $f(x) = 17,5x$.

● Le point B est sur la droite si l'image de son abscisse vaut 53.

Or $f(5) = 17,5 \times 5 = 87,5 \neq 53$.

Finalement, B n'est pas sur la droite.

Gagnez
des points !

On identifie x et $f(x)$.
 $x = a$ et $f(x) = d$.

Remarque

Pour la première valeur,
on calcule une image. Pour
la seconde, on calcule
un antécédent.

1 Généralités

1 Définition

- Soit a et b deux nombres réels donnés.

Une **fonction affine** est une fonction qui, à un nombre x , associe le nombre $a \times x + b$, noté aussi $ax + b$.

On écrit $x \mapsto ax + b$.

Exemple : La fonction $f: x \mapsto -2x + 3$ est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 3$.

• Cas particuliers

- $b = 0$. La fonction $f: x \mapsto ax$ est une **fonction linéaire**.

Exemple : $f(x) = -4x$.

- $a = 0$. La fonction $f: x \mapsto b$ est une **fonction constante**.

Exemple : $f(x) = 5$.

2 Proportionnalité des accroissements

Soit f une fonction affine. Les accroissements de x et de $f(x)$ sont proportionnels.

Ainsi, avec $f(x) = ax + b$, pour tous les réels x_1 et x_2 , on a :

$$\underbrace{f(x_2) - f(x_1)}_{\text{accroissement des } f(x)} = a \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\text{accroissement des } x} \quad \text{où } a \text{ est appelé coefficient de proportionnalité.}$$

Exemple :

Soit f une fonction affine telle que $f(5) = 2$ et $f(1) = -3$.

f est de la forme $f(x) = ax + b$.

Le coefficient de proportionnalité a , entre l'accroissement de x et celui de $f(x)$, est tel que :

$$f(5) - f(1) = a(5 - 1)$$

$$\text{soit } 2 - (-3) = 4a$$

$$5 = 4a. \text{ On obtient } a = \frac{5}{4}.$$

EXERCICES RÉSOLUS

1 Reconnaître une fonction affine à partir de son expression

ÉNONCÉ

Parmi les fonctions suivantes, précisez celles qui correspondent à une fonction affine. Indiquez alors les valeurs de a et de b .

$$\bullet f_1(x) = 3x - 8 \qquad \bullet f_2(x) = 7 - x$$

$$\bullet f_3(x) = \frac{9x + 6}{5} \qquad \bullet f_4(x) = \frac{4}{x} - 5$$

CORRIGÉ

• $f_1(x) = 3x - 8 = 3x + (-8)$ est une fonction affine car elle est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = 3$ et $b = -8$.

• $f_2(x) = 7 - x = -x + 7 = -1x + 7$ est une fonction affine car de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = -1$ et $b = 7$.

$$\bullet f_3(x) = \frac{9x + 6}{5} = \frac{9x}{5} + \frac{6}{5} = \frac{9}{5}x + \frac{6}{5}$$

f_3 est une fonction affine avec $a = \frac{9}{5}$ et $b = \frac{6}{5}$.

• $f_4(x) = \frac{4}{x} - 5$ n'est pas une fonction affine car le x est au dénominateur.

Méthode

On écrit $f(x)$ sous la forme $ax + b$.

Conseil

Vous pouvez transformer l'écriture.

2 Comprendre la propriété de proportionnalité des accroissements

ÉNONCÉ

f est une fonction affine telle que $f(x) = 4x + b$ avec b réel.

1. Calculez $f(5) - f(2)$.

2. Complétez « Quand x augmente de ..., $f(x)$ augmente de ... ».

CORRIGÉ

1. La proportionnalité entre les accroissements de x et $f(x)$ permet d'écrire : $f(5) - f(2) = a(5 - 2)$ où a est le coefficient de proportionnalité.

Comme $f(x) = 4x + b$, on en déduit que $a = 4$.

D'où : $f(5) - f(2) = 4 \times (5 - 2) = 4 \times 3$.

Soit $f(5) - f(2) = 12$.

2. On en déduit « Quand x augmente de 3 (entre 2 et 5), $f(x)$ augmente de 12 ».

Conseil

Écrivez la propriété :

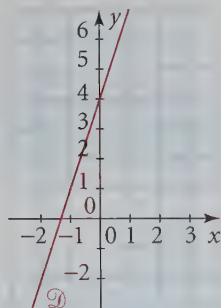
$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

avec $x_2 = 5$ et $x_1 = 2$.

2 Représentation graphique d'une fonction affine

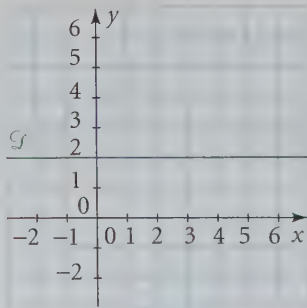
- Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite $\mathcal{D}$.
- Les points de cette droite $\mathcal{D}$ ont des coordonnées de la forme $(x ; ax + b)$.
- **Le coefficient a**

a est appelé coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$. Il donne la direction de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire l'inclinaison de $\mathcal{D}$ par rapport à l'horizontale.



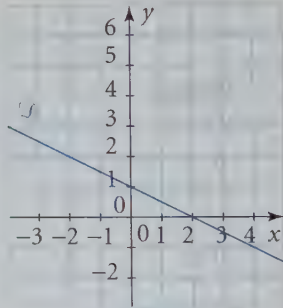
$$a = 3$$

La droite « monte »



$$a = 0$$

La droite est horizontale,
parallèle à (Ox)

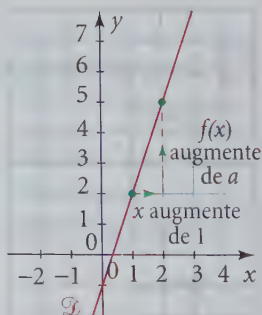


$$a = -1$$

La droite « descend »

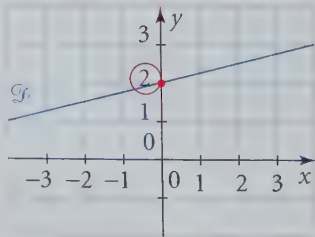
En utilisant la proportionnalité des accroissements pour le schéma ci-contre, on écrit :
quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de a .

On lit ici $a = 3$.



- **Le coefficient b**

b est appelé ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$: c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec l'axe des ordonnées (axe vertical). Sur le schéma ci-contre, $b = 2$.



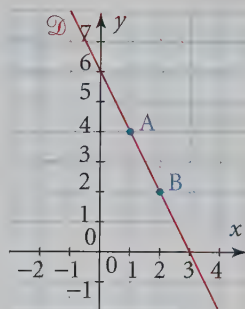
EXERCICE RÉSOLU

► **Déterminer l'expression d'une fonction affine à partir de sa représentation graphique**

ÉNONCÉ

La droite $\mathcal{D}$ ci-contre représente une fonction affine f dans un repère.

1. Quelle est l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$?
2. a) Lisez les coordonnées des points A et B situés sur $\mathcal{D}$.
- b) Déduisez-en le coefficient directeur de $\mathcal{D}$.
3. Donnez l'expression de $f(x)$.

**CORRIGÉ**

1. L'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$, notée b , est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe vertical (l'axe des ordonnées).

On lit $b = 6$.

2. a) Le point A a pour coordonnées $(1 ; 4)$.

Le point B a pour coordonnées $(2 ; 2)$.

- b) Pour passer de $x_A = 1$ à $x_B = 2$, x augmente de 1.

Pour passer de $f(x_A) = 4$ à $f(x_B) = 2$, $f(x)$ diminue de 2.

D'après la proportionnalité des accroissements, quand x augmente de 1, y augmente de a .

On en déduit ici que $a = -2$ (le signe moins est dû au fait que $f(x)$ diminue).

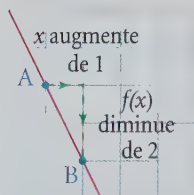
3. On en conclut que $f(x) = ax + b$ avec $a = -2$ et $b = 6$.
Soit $f(x) = -2x + 6$.

Rappel

L'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$ est aussi $f(0)$.

Méthode

Pour aller de A à B,
 x augmente de ???
et $f(x)$ diminue de ???



➔ Déterminer par le calcul à partir de deux images une fonction affine

ÉNONCÉ

f est la fonction affine telle que $f(-2) = 13$ et $f(1) = 4$.
Déterminez l'expression de $f(x)$.

MÉTHODE

1. On repère dans l'énoncé que f est une fonction affine. Ainsi f a une expression de la forme $f(x) = ax + b$.
2. Grâce à la propriété de proportionnalité des accroissements qui s'écrit : $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$, on calcule a .
3. On calcule b grâce à l'une des deux images données par l'énoncé.
4. On conclut en remplaçant a et b dans l'expression de $f(x)$.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
f est une fonction affine donc a une expression de la forme $f(x) = ax + b$.	1. On donne l'expression générale d'une fonction affine.
On commence par calculer a . La proportionnalité des accroissements s'écrit : $f(-2) - f(1) = a(-2 - 1)$ $13 - 4 = a(-2 - 1)$ $9 = a \times (-3)$ $a = \frac{9}{-3} = -3$.	2. On écrit la proportionnalité des accroissements $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$ avec : $x_2 = -2$ et $x_1 = 1$ $f(x_2) = 13$ et $f(x_1) = 4$.
● On sait maintenant que $f(x) = -3x + b$. ● On utilise par exemple : $f(-2) = 13$. $-3 \times (-2) + b = 13$ $6 + b = 13$ $b = 13 - 6 = 7$.	3. On connaît la valeur de a , il reste à trouver b . Avec la première image, on calcule b . On trouve (bien sûr) la même valeur pour b si on utilise $f(1) = 4$.
En conclusion, f s'écrit $f(x) = -3x + 7$.	4. On remplace, dans l'expression de $f(x)$, a et b par les valeurs obtenues.

→ Construire la représentation graphique d'une fonction affine

ÉNONCÉ

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 2x - 1$.
Représentez graphiquement la fonction f .

MÉTHODE

- f est une fonction affine : sa représentation graphique est donc une droite $\mathcal{D}$.
- Deux points suffisent pour tracer une droite.
C'est pourquoi on choisit deux valeurs de x (pas trop proches et bien choisies) dont on calcule les images.
- On place dans un repère les deux points ainsi obtenus.
En les reliant, on obtient la droite $\mathcal{D}$ demandée.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
f est une fonction affine : sa représentation graphique est donc une droite $\mathcal{D}$. On calcule par exemple : $f(0) = 2 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$ $f(3) = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$ $\mathcal{D}$ passe par les deux points de coordonnées $(0 ; -1)$ et $(3 ; 5)$.	1. On justifie pourquoi f se représente graphiquement par une droite. 2. On calcule l'image de deux nombres choisis « au hasard », 0 et 3 (on prend deux nombres entiers.)
	3. On place dans un repère les deux points obtenus. En reliant ces deux points, on construit la droite cherchée.



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. On définit une fonction affine quand, à un nombre x , on associe :

- a) ☐ le triple de x auquel on retranche 4.
 b) ☐ la division de x par 2, à laquelle on ajoute 1.
 c) ☐ son carré auquel on ajoute 1.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-8}{2}$.

2. f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$ avec a égal à :

- a) ☐ 1 b) ☐ $\frac{1}{2}$ c) ☐ $-\frac{7}{2}$

3. f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$ avec b égal à :

- a) ☐ $\frac{1}{2}$ b) ☐ 4 c) ☐ -4

4. L'image de 0 par f est : a) ☐ 0 b) ☐ 8 c) ☐ -4

Soit g la fonction définie par $g(x) = 5 - x$.

5. L'antécédent de 0 par f est : a) ☐ 0 b) ☐ 5 c) ☐ -5

6. La droite représentant g passe par le point de coordonnées :

- a) ☐ (0 ; 5) b) ☐ (5 ; 0) c) ☐ (5 ; 5)

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. Toutes les droites représentent des fonctions affines.	☐ V ☐ F
2. Une fonction linéaire est une fonction affine.	☐ V ☐ F
3. Une fonction constante est une fonction affine.	☐ V ☐ F
4. f étant une fonction affine, les x et les $f(x)$ sont proportionnels.	☐ V ☐ F
5. Soit f la fonction définie par $f(x) = 3 + 2x$. Quand les x augmentent de 1, les images $f(x)$ augmentent de 2.	☐ V ☐ F
6. f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$. Si $f(0) = -3$, alors $b = -3$.	☐ V ☐ F

➔ Exercices d'entraînement



3 Affine or not affine ? acte 1

Parmi ces fonctions, déterminez en justifiant celles qui définissent une fonction affine. Vous préciserez alors les valeurs de a et de b .

$$\bullet f_1(x) = -4 + 3x^2$$

$$\bullet f_2(x) = (x+1)(3-x) + x^2$$

$$\bullet f_3(x) = \frac{-x+7}{2}$$

$$\bullet f_4(x) = -\frac{4}{3}x$$

$$\bullet f_5(x) = 3\sqrt{x} - 2$$

$$\bullet f_6(x) = \frac{1}{2x} + 1$$

4 Un tableau à trous

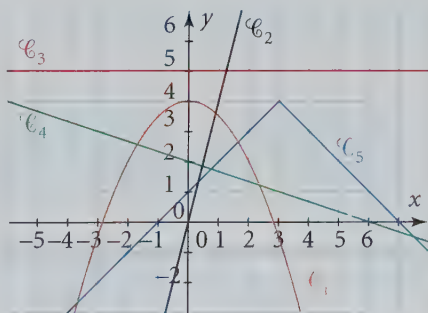
Soit la fonction $f: x \mapsto -\frac{5}{2}x + 3$.

Complétez le tableau de valeurs suivant.

x	-4		0	1	
$f(x)$		8			-4,5

5 Affine or not affine ? acte 2

On donne les représentations graphiques de cinq fonctions. Indiquez en justifiant celles qui représentent des fonctions affines.



6 Savoir représenter une fonction affine

Représentez dans un repère les quatre fonctions affines définies par :

$$\bullet f_1(x) = -4 + x \quad \bullet f_2(x) = -1$$

$$\bullet f_3(x) = 6 - 3x \quad \bullet f_4(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

7 Image et antécédents

Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x + 5$.

1. Calculez $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$ et $f\left(-\frac{2}{3}\right)$.
2. Déterminez les antécédents par f des nombres 0, -1 et 15.

8 À partir de deux images seulement

f est la fonction affine telle que $f(-4) = 2$ et $f(6) = -1$.

Déterminez l'expression de $f(x)$.

9 Que de x et de $f(x)$!

f est une fonction affine telle que si les x augmentent de 3, les $f(x)$ diminuent de 12.

1. Calculez le coefficient de proportionnalité a entre l'accroissement des x et celui des $f(x)$.
2. Complétez les phrases :
 - a) si les x augmentent de 1, alors les $f(x)$ diminuent de ...
 - b) si les x augmentent de 2, alors les $f(x)$...

10 Affine or not affine ? acte 3

Ce tableau de valeurs correspond-il à celui d'une fonction affine ?

x	-3	-2	0
$f(x)$	-5	-3	1

11 Elles sont partout ces fonctions affines !

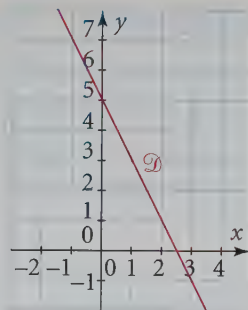
Gilles reçoit sa facture d'eau qu'il étudie avec soin. L'abonnement s'élève à 27,40 € et le prix au m^3 est de 2,353 € (TTC).

1. Pour 30 m^3 consommés, quel est le prix à payer ?
2. Soit x le nombre de m^3 d'eau consommés. Déterminez la fonction f qui, à x , fait correspondre le montant de la facture associée.
3. a) Delphine a consommé 90 m^3 d'eau. Quel est le montant de sa facture ?
 b) Gilles doit régler 309,76 €. Quel volume d'eau a-t-il consommé ?

12 Juste à partir d'un graphique

Soit $\mathcal{D}$ la droite représentant la fonction affine $f(x)$.

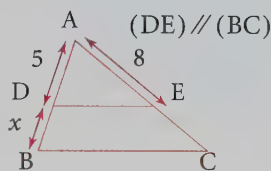
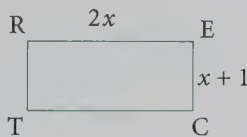
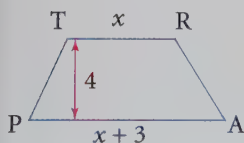
1. Lisez $f(-1)$ et $f(2)$.
2. Déterminez les antécédents de -1 et 5 par f .
3. Déterminez l'expression de $f(x)$.



13 Fonctions affines et géométrie

Déterminez la fonction affine f désignant :

1. l'aire du trapèze TRAP.
2. le périmètre du rectangle RECT.
3. la longueur AC dans le triangle ABC.



➔ Vers le brevet



14 Histoire de températures

Dans les pays anglo-saxons, la température est mesurée en degrés Fahrenheit (notés °F). x étant la température en degrés Celsius (notés °C), la température exprimée en °F, $f(x)$, est donnée par : $f(x) = 1,8x + 32$.

1. Pourquoi définit-on ainsi une fonction affine ?
2. a) À quelle température, en °F, l'eau gèle-t-elle ?
b) La température du corps humain est d'environ 37°C.

Quelle est la température correspondante en °F ?

3. Sur le continent américain, la température record de 134,06 °F a été enregistrée en 1913. À quelle température, cela correspond-il en °C ?

15 Un classique

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x-4}{2}$.

1. Justifiez que f est une fonction affine.
2. a) Calculez $f(0)$.
b) Interprétez ce résultat par une phrase utilisant le mot image.
3. Calculez l'image de -2 par f .
4. Laurence affirme que le nombre 1 admet un seul antécédent qui est un nombre positif. A-t-elle raison ? Justifiez.
5. Représentez la fonction f dans un repère.

16 Faire le bon choix

Deux chauffeurs de taxi proposent les tarifs suivants :

- Laurent : une prise en charge de 5 € et 0,70 € par km parcouru,
- Frédéric : une prise en charge de 2 € et 0,90 € par km parcouru.

1. Pour 12 km parcourus, quel est le tarif le plus avantageux ?
2. On note x le nombre de km parcourus. Exprimez pour Laurent, le prix de la course $L(x)$, et, pour Frédéric, le prix $F(x)$.
3. Représentez dans un même repère les deux tarifs en fonction de x .
4. Déterminez graphiquement, selon le nombre de km parcourus, le tarif le plus avantageux.

→ QCM

1. ● Le triple du nombre x auquel on retranche 4 s'écrit $3x - 4$, il s'agit bien d'une fonction de la forme $ax + b$ avec $a = 3$ et $b = -4$.

● La division de x par 2, à laquelle on ajoute 1, donne $\frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{2}x + 1$.

Cette expression est de la forme $ax + b$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$.

● Son carré auquel on ajoute 1 est $x^2 + 1$ n'est pas affine à cause du terme x^2 .

Réponses : a) le triple de x ... et **b)** la division de x par 2...

$$2. f(x) = \frac{x-8}{2} = \frac{1x}{2} - \frac{8}{2} = \frac{1}{2}x - 4 = \frac{1}{2}x + (-4).$$

f est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -4$

Réponse : b) $\frac{1}{2}$.

3. Réponse : c) -4 .

$$4. \text{ On calcule } f(0) = \frac{0-8}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Réponse : c) -4 .

5. L'antécédent de 0 par g est le nombre x qui vérifie $g(x) = 0$. On résout l'équation $5 - x = 0$; soit $-x = -5$; $x = 5$.

Réponse : b) 5.

6. On a calculé $g(0) = 5$. La droite $\mathcal{D}_g$ représentant g passe par le point de coordonnées $(0; 5)$.

De plus $g(5) = 5 - 5 = 0$. $\mathcal{D}_g$ passe aussi par $(5; 0)$.

Réponses : a) $(0; 5)$ et **b)** $(5; 0)$.

Gagnez
des points !

Transformez l'écriture de
 $f(x)$ sous la forme $ax + b$.

L'astuce du prof

Déterminer un antécédent,
c'est résoudre
une équation.

Rappel

Un point M de
coordonnées $(x_M; y_M)$ est
sur la droite représentant f
si $y_M = f(x_M)$.

2. 1. Faux. Les droites verticales ne représentent pas des fonctions (donc non plus des fonctions affines).

2. Vrai. Une fonction linéaire correspond à une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$ avec $b = 0$. C'est un cas particulier.

3. Vrai. Une fonction constante est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = 0$. C'est un cas particulier.

4. Faux. Ce sont les accroissements des x (la différence entre deux valeurs de x) et les accroissements des $f(x)$ (la différence entre deux images) qui sont proportionnels.

5. Vrai. $f(x) = 3 + 2x$ est une fonction affine de la forme $ax + b$ avec $a = 2$.
Quand les x augmentent de 1, les $f(x)$ augmentent de $a \times 1 = a$, donc de 2.

6. Vrai. Avec $f(x) = ax + b$, on calcule $f(0) = a \times 0 + b = 0 + b = b$.
Si $f(0) = -3$, on a bien $b = -3$.

→ Exercices d'entraînement

3 On écrit si possible les fonctions sous la forme $ax + b$.

• $f_1(x) = -4 + 3x^2$ n'est pas une fonction affine à cause du terme x^2 .

• $f_2(x) = (x+1)(3-x) + x^2 = 3x - x^2 + 3 - x + x^2 = 2x + 3$

f_2 est une fonction affine avec $a = 2$ et $b = 3$.

• $f_3(x) = \frac{-x+7}{2} = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

f_3 est une fonction affine avec $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{7}{2}$.

• $f_4(x) = -\frac{4}{3}x = -\frac{4}{3}x + 0$.

f_4 est une fonction affine avec $a = -\frac{4}{3}$ et $b = 0$.

• $f_5(x) = 3\sqrt{x} - 2$ n'est pas une fonction affine à cause du terme $\sqrt{x}$.

• $f_6(x) = \frac{1}{2x} + 1$ n'est pas une fonction affine car x est au dénominateur.

4 $f(x) = -\frac{5}{2}x + 3 = -2,5x + 3$.

• On calcule les images de -4 ; 0 et 1 par f .

– Pour $x = -4$, on calcule

$$f(-4) = -2,5 \times (-4) + 3 = 10 + 3 = 13.$$

– Pour $x = 0$, on calcule

$$f(0) = -2,5 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3.$$

– Pour $x = 1$, on calcule

$$f(1) = -2,5 \times 1 + 3 = -2,5 + 3 = 0,5.$$

Remarque

f_4 est un cas particulier de fonction affine :
c'est une fonction linéaire.

Rappel

Calculer l'image d'un nombre, c'est remplacer x par sa valeur dans $f(x)$.

● On cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 8$ puis $f(x) = -4,5$.

Pour $f(x) = 8$, on cherche x tel que $-2,5x + 3 = 8$.

On est ramené à résoudre l'équation $-2,5x = 8 - 3$;

$$-2,5x = 5; x = \frac{5}{-2,5} = -2.$$

Pour $f(x) = -4,5$, on cherche x tel que $-2,5x + 3 = -4,5$.

$$\text{On résout l'équation } -2,5x = -4,5 - 3; -2,5x = -7,5; x = \frac{-7,5}{-2,5} = 3.$$

x	-4	-2	0	1	3
$f(x)$	13	8	3	0,5	-4,5

L'astuce du prof

Chercher l'antécédent du nombre k , c'est résoudre l'équation $f(x) = k$.

5 Les fonctions affines sont représentées par des droites (non verticales).

● $\mathcal{C}_1$ n'est pas une droite (c'est une parabole).

● $\mathcal{C}_2$ est une droite (passant par l'origine du repère).

● $\mathcal{C}_3$ est une droite horizontale.

● $\mathcal{C}_4$ est une droite.

● $\mathcal{C}_5$ est constituée de « deux morceaux » de droites : ce n'est pas une droite.

En conclusion, seules $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ représentent des fonctions affines.

Remarque

- $\mathcal{C}_2$ représente une fonction linéaire,
- $\mathcal{C}_4$ représente une fonction constante.

6 Ces quatre fonctions sont affines : elles sont donc représentées graphiquement par des droites notées $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$.

● Représentation graphique de f_1 .

On calcule par exemple $f_1(1)$ et $f_1(6)$.

$$f_1(1) = -4 + 1 = -3$$

$$f_1(6) = -4 + 6 = 2$$

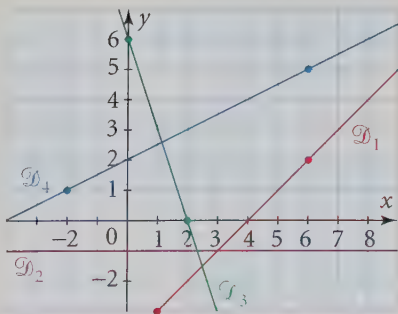
Les points de coordonnées $(1; -3)$

et $(6; 2)$ sont sur $\mathcal{D}_1$.

● Représentation graphique de f_2 .

f_2 est une fonction affine constante (il n'y a pas de terme en x , autrement dit $a = 0$) : sa représentation graphique est une droite $\mathcal{D}_2$ horizontale.

Notamment $f_2(4) = -1$. $\mathcal{D}_2$ est horizontale passant par le point $(4; -1)$.



- Représentation graphique de f_3 .

$$f_3(0) = 6 - 3 \times 0 = 6 - 0 = 6$$

$$f_3(2) = 6 - 3 \times 2 = 6 - 6 = 0$$

Les points de coordonnées $(0; 6)$ et $(2; 0)$ sont sur $\mathcal{D}_3$.

- Représentation graphique de f_4 .

$$f_4(-2) = \frac{1}{2} \times (-2) + 2 = -1 + 2 = 1$$

$$f_4(6) = \frac{1}{2} \times 6 + 2 = 3 + 2 = 5$$

Les points de coordonnées $(-2; 1)$ et $(6; 5)$ sont sur $\mathcal{D}_4$.

7 1. ● $f(0) = -3 \times 0 + 5 = 0 + 5 = 5$

● $f(-1) = -3 \times (-1) + 5 = 3 + 5 = 8$

● $f(2) = -3 \times 2 + 5 = -6 + 5 = -1$

● $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 5 = 2 + 5 = 7.$

2. ● Déterminons l'antécédent de 0. On cherche x tel que $f(x) = 0$.

$$-3x + 5 = 0$$

$$-3x = -5$$

$$x = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}. \text{ Le nombre } \frac{5}{3} \text{ est l'antécédent de 0.}$$

● Déterminons l'antécédent de -1 , on résout l'équation

$$f(x) = -1$$

$$-3x + 5 = -1$$

$$-3x = -1 - 5$$

$$-3x = -6$$

$$x = \frac{-6}{-3} = 2. \text{ Le nombre 2 est l'antécédent de } -1.$$

● Pour chercher l'antécédent de 15, on résout l'équation

$$f(x) = 15.$$

$$-3x + 5 = 15$$

$$-3x = 15 - 5$$

$$-3x = 10$$

$$x = \frac{10}{-3}. \text{ Le nombre } -\frac{10}{3} \text{ est l'antécédent de 15.}$$

Conseil

$f(0)$ est souvent facile à calculer.

L'astuce du prof

On prend des valeurs de x paires afin que $\frac{1}{2}x$ soit un entier.

Gagnez des points !

On cherche x tel que $f(x)$ soit égal à chacun des nombres proposés.

Méthode

Il s'agit à chaque fois d'une équation du 1^{er} degré. On isole les « x » à gauche.

8 ● f est une fonction affine donc a une expression de la forme $f(x) = ax + b$. Il s'agit de trouver a et b .

● On commence par calculer a en écrivant la proportionnalité des accroissements :

$$f(-4) - f(6) = a((-4) - 6)$$

$$2 - (-1) = a(-4 - 6)$$

$$3 = a \times (-10)$$

$$a = \frac{3}{-10} = -0,3.$$

● On sait maintenant que $f(x) = -0,3x + b$.

De plus, $f(-4) = 2$.

$$\text{Donc } -0,3 \times (-4) + b = 2$$

$$1,2 + b = 2$$

$$b = 2 - 1,2 = 0,8.$$

● On conclut $f(x) = -0,3x + 0,8$.

Rappel

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= a(x_2 - x_1) \\ \text{avec } x_2 &= -4 \\ \text{et } x_1 &= 6, f(x_2) = 2 \\ \text{et } f(x_1) &= -1. \end{aligned}$$

Remarque

On aurait aussi bien pu utiliser $f(6) = -1$.

9 1. On calcule le coefficient de proportionnalité a cherché en utilisant l'égalité :

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1).$$

● Si les x augmentent de 3 : $(x_2 - x_1) = 3$.

● Si les $f(x)$ diminuent de 12 : $f(x_2) - f(x_1) = -12$.

On en déduit : $-12 = a \times 3$.

$$\text{D'où } a = -\frac{12}{3}, \text{ soit } a = -4.$$

2. a) Si les x augmentent de 1, les $f(x)$ diminuent de 4.

b) Si les x augmentent de 2, les $f(x)$ augmentent de $2 \times (-4) = -8$.

Autrement dit, si les x augmentent de 2, les $f(x)$ diminuent de 8.

Rappel

Quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de a .

10 1. Étudions l'accroissement entre les x et les $f(x)$.

● Pour passer de la 1^{re} colonne à la seconde :

les x passent de -3 à -2 : ils augmentent de 1.

les $f(x)$ passent de -5 à -3 :

ils augmentent de $-3 - (-5) = 2$.

Le coefficient de proportionnalité correspondant est

$$\frac{2}{1} = 2.$$

Piège à éviter

Pour une fonction affine, il n'y a pas proportionnalité entre les x et les $f(x)$, mais entre leurs accroissements.

- Pour passer de la 2^e colonne à la 3^e :

les x passent de -2 à 0 : ils augmentent de $0 - (-2) = 2$.

les $f(x)$ passent de -3 à 1 : ils augmentent de $1 - (-3) = 4$.

Le coefficient de proportionnalité correspondant est $\frac{4}{2} = 2$.

- En conclusion, l'accroissement des $f(x)$ est proportionnel à l'accroissement des x avec un coefficient de 2. Ce tableau de valeurs est bien celui d'une fonction affine.

- 11 1.** La facture pour 30 m³ consommés est de :

prix de l'abonnement + prix d'un m³ d'eau $\times$ nombre de m³ consommés
 $= 27,40 + 2,353 \times 30 = 97,99$ €.

- 2.** Le montant de la facture pour x m³ consommés est de :

$$f(x) = 27,40 + 2,353 \times x.$$

- 3. a)** Delphine devra régler pour 90 m³ d'eau consommés :

$$f(90) = 27,40 + 2,353 \times 90 = 239,17$$
 €.

- b)** On cherche le nombre x tel que $f(x) = 309,76$ €.

On est amené à résoudre l'équation $27,40 + 2,353x = 309,76$

$$2,353x = 309,76 - 27,40$$

$$2,353x = 282,36$$

$$x = \frac{282,36}{2,353} = 120$$

Gilles a consommé 120 m³ d'eau.

Autre méthode

Avec les deux premières colonnes, on détermine l'expression de $f(x)$.

Puis on vérifie les valeurs avec la 3^e colonne.

Remarque

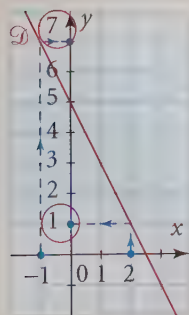
C'est le même raisonnement qu'à la question 1 sauf que le volume d'eau consommé est x .

Remarque

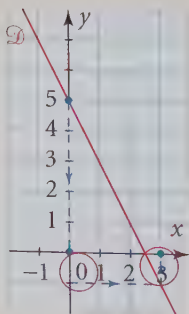
On cherche l'antécédent de 309,76 par f .

12

- 1.** On lit $f(-1) = 7$
 et $f(2) = 1$.



- 2.** L'antécédent de -1 par f est 3.
 L'antécédent de 5 par f est 0.



Rappel

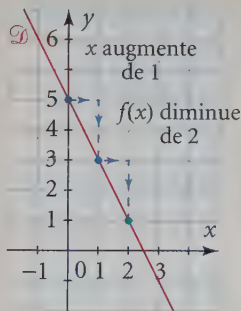
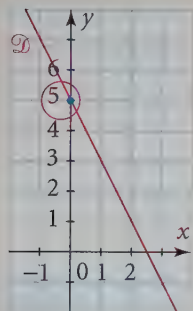
On se place sur l'axe des ordonnées en -1 . On se déplace horizontalement jusqu'à la droite et on lit l'antécédent en remontant verticalement vers l'axe des abscisses.

3. $f(x)$ a une expression de la forme $f(x) = ax + b$.

● b s'obtient avec $f(0)$.

● Pour lire a , on utilise la

On lit $f(0) = 5$. D'où $b = 5$. proportionnalité des accroissements, $a = -2$.



L'astuce du prof

On choisit deux points à coordonnées entières.

déplacement

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

On en conclut : $f(x) = -2x + 5$.

$$\begin{aligned} \text{15 1. } f(x) &= \frac{(\text{RT} + \text{AP}) \times \text{hauteur}}{2} \\ &= \frac{(x + x + 3) \times 4}{2} = \frac{(2x + 3) \times 4}{2} = 4x + 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. } f(x) &= 2 \times (\text{RE} + \text{EC}) \\ &= 2 \times (2x + x + 1) = 2 \times (3x + 1) = 6x + 2. \end{aligned}$$

3. Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A.

D et E sont respectivement sur (AB) et (AC).

Comme les droites (DE) et (BC) sont parallèles, on

applique le théorème de Thalès : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

$$\text{De } \frac{5}{5+x} = \frac{8}{AC}, \text{ il vient } AC = \frac{8 \times (5+x)}{5} \text{ soit } f(x) = \frac{40+8x}{5} = 8 + \frac{8}{5}x.$$

Rappel

L'aire d'un trapèze est :

$$\frac{\left(\begin{array}{c} \text{grande base} \\ + \\ \text{petite base} \end{array} \right) \times \text{hauteur}}{2}$$

Gagnez des points !

On reconnaît une figure-clé.

→ Vers le brevet

14 1. $f(x) = 1,8x + 32$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 1,8$ et $b = 32$.

Donc f est une fonction affine.

2. a) L'eau gèle à 0°C , soit, en $^\circ\text{F}$, à $f(0) = 1,8 \times 0 + 32 = 32^\circ\text{F}$.

b) La température du corps humain en °F est :

$$f(37) = 1,8 \times 37 + 32 = 98,6 \text{ °F.}$$

3. 134,06° est la température en °F.

La température x correspondante en °C vérifie $f(x) = 134,06$.

On résout l'équation $1,8x + 32 = 134,06$.

$$1,8x = 134,06 - 32$$

$$1,8x = 102,06$$

$$x = \frac{102,06}{1,8} = 56,7.$$

La température la plus chaude enregistrée est de 56,7 °C.

$$\begin{aligned} \textcircled{15} \text{ 1. } f(x) &= \frac{3x-4}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{4}{2} = 1,5x - 2 \\ &= 1,5x + (-2). \end{aligned}$$

f est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = 1,5$ et $b = -2$.

Donc f est bien une fonction affine.

2. a) On calcule $f(0) = 1,5 \times 0 - 2 = 0 - 2 = -2$.

b) L'image de 0 par la fonction f est -2.

3. Calculer l'image de -2 par f , c'est calculer $f(-2)$.

$$f(-2) = 1,5 \times (-2) - 2 = -3 - 2 = -5.$$

L'image de -2 par f est -5.

4. Pour trouver l'antécédent de 1 par f , on cherche le nombre x tel que $f(x) = 1$. On résout l'équation : $1,5x - 2 = 1$.

$$1,5x = 1 + 2 ; 1,5x = 3 ; x = \frac{3}{1,5} = 2.$$

L'antécédent de 1 par f est 2 qui est positif : Laurence a bien raison.

5. f est une fonction affine (question 1.) : sa représentation graphique est donc une droite $\mathcal{D}$.

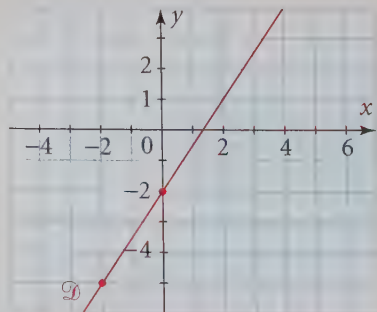
De plus $f(0) = -2$ (question 2.)

et $f(-2) = -5$ (en question 3.).

$\mathcal{D}$ passe par les deux points de coordonnées $(0 ; -2)$ et $(-2 ; -5)$.

L'astuce du prof

C'est plus agréable
de travailler avec
des nombres décimaux
qu'avec des fractions, non ?



16 1. Pour 12 km parcourus, la course revient à :

- avec Laurent : $5 + 0,70 \times 12 = 5 + 8,40 = 13,40$ €,
- avec Frédéric : $2 + 0,90 \times 12 = 2 + 10,80 = 12,80$ €.

Le tarif le plus avantageux est proposé par Frédéric.

2. Chaque course coûte :

la prise en charge + le prix d'1 km $\times$ nombre de km parcourus.

- $L(x) = 5 + 0,70 \times x = 5 + 0,7x$
- $F(x) = 2 + 0,90 \times x = 2 + 0,9x$

3. Représentation graphique des deux tarifs.

- $L(x) = 5 + 0,7x$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 0,7$ et $b = 5$.

Ainsi la représentation graphique de la fonction L est une droite $\mathcal{D}_L$. On cherche deux points de $\mathcal{D}_L$.

$L(0) = 5 + 0,7 \times 0 = 5 + 0 = 5$. De plus, $L(12) = 13,40$.

$\mathcal{D}_L$ passe par les deux points de coordonnées $(0 ; 5)$ et $(12 ; 13,40)$.

- $F(x) = 2 + 0,9x$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 0,9$ et $b = 2$.

La représentation graphique de F est une droite $\mathcal{D}_F$.

On cherche deux points de $\mathcal{D}_F$.

$F(0) = 2 + 0,9 \times 0 = 2 + 0 = 2$.

De plus, $F(12) = 12,80$.

$\mathcal{D}_F$ passe par les deux points de coordonnées $(0 ; 2)$ et $(12 ; 12,80)$.

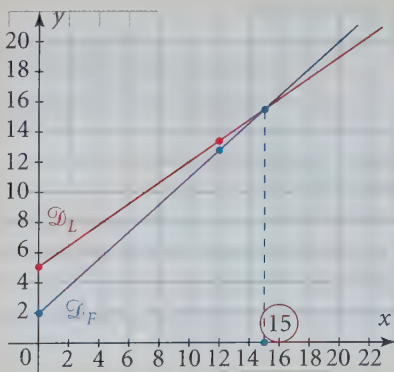
4. Le tarif le plus avantageux est le tarif le moins cher (le plus bas).

De 0 à 15 km, le tarif le plus avantageux est celui proposé par Frédéric.

Au-delà de 15 km, c'est Laurent qui propose le tarif le plus intéressant.

Gagnez des points !

Pour placer les points des deux droites, on se sert des images déjà calculées.



1 Définitions

1 Médiane

● Pour une série statistique dans laquelle les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant, la **médiane**, notée Me , est la valeur qui partage cette série en deux « sous-séries » de même effectif.

Cela signifie qu'il y a autant de valeurs supérieures ou égales à Me que de valeurs inférieures ou égales.

● La médiane permet ainsi de préciser la position des données d'une série : c'est pourquoi on dit que la médiane est un **indicateur de position** de la série.

2 Étendue

● L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

● On dit que ce nombre est un **indicateur de la dispersion** de la série.

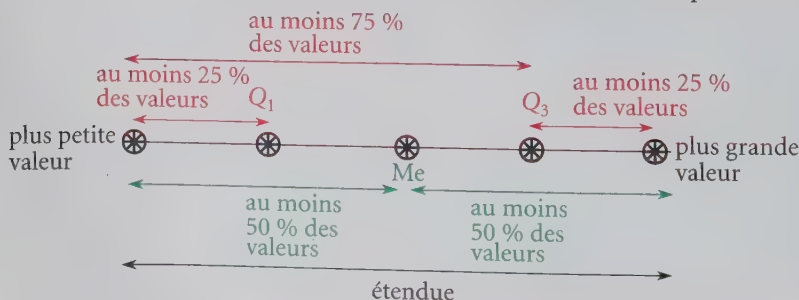
3 Quartiles

Soit une série dont les termes sont ordonnés dans le sens croissant.

● Le **premier quartile** est la plus petite valeur Q_1 telle qu'au moins un quart (25 %) des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_1 .

● Le **troisième quartile** est la plus petite valeur Q_3 telle qu'au moins trois quarts (75 %) des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_3 .

● Le schéma ci-dessous résume les notions introduites dans ce chapitre.



EXERCICE RÉSOLU

► Comprendre et exploiter les indicateurs statistiques

ÉNONCÉ

Geoffroy, professeur de mathématiques, a donné le même devoir sur les statistiques dans ses deux classes de Troisième.

1. Complétez son tableau de résultats grâce aux informations concernant la classe de 3^e A.

Les notes vont de 5 à 19 sur 20.

Il y a autant de notes au-dessus de 9 que de notes en dessous.

Les 30 élèves de la classe totalisent 285 points à ce devoir.

	Moyenne	Médiane	Étendue
3 ^e A			
3 ^e B	9	10,5	7

2. Établissez une comparaison des deux classes, reprenant chaque indicateur et utilisant le mot homogène.

3. Geoffroy ne se souvient plus si sa classe de 3^e B compte 30 ou 31 élèves. Sachant qu'à ce devoir, il n'a attribué que des notes entières, pouvez-vous l'aider ?

CORRIGÉ

1. ● L'étendue vaut $19 - 5 = 14$.

● La médiane sépare la classe en deux groupes de même effectif : elle vaut donc 9 d'après ce que dit l'énoncé.

● La moyenne de la classe vaut :

$$\frac{285}{30} = 9,5.$$

2. Les deux moyennes sont sensiblement identiques (9 et 9,5).

En 3^e A, la médiane vaut 9 et 10,5 en 3^e B. De plus, l'étendue est beaucoup plus importante en 3^e A (14 pts) qu'en 3^e B (7 pts).

Les notes sont davantage regroupées autour de la moyenne en 3^e B.

En conclusion, la 3^e B est une classe plus homogène que la 3^e A.

3. Quand le nombre de termes d'une série est pair, Me est la demi-somme des deux termes centraux. Quand le nombre de termes est impair, Me est égale à une valeur de la série. Aussi 10,5 n'étant pas l'une des notes (car Geoffroy n'a attribué que des notes entières), on conclut que la 3^e B a un effectif pair de 30 élèves.

Rappel

L'étendue se calcule comme :

« la plus grande valeur » –
« la plus petite valeur ».

Rappel

$$\text{moyenne} = \frac{\text{total des points}}{\text{effectif total}}$$

→ Calculer la médiane d'une série statistique

ÉNONCÉ

On considère deux séries statistiques S_1 et S_2 définies par :

S_1 : 3 5 7 1 8 14 2 1 et S_2 :	Nombre	2	5	8	11	12
	Effectif	1	2	3	1	2

Déterminez la médiane de S_1 et de S_2 .

MÉTHODE

1. On ordonne les termes de la série dans le sens croissant. Dans le cas d'un tableau, on écrit les termes autant de fois qu'ils apparaissent.
2. On compte le nombre n de termes de la série.
3. • Si n est pair : la médiane prend pour valeur la demi-somme des deux « termes centraux ».
- Si n est impair : la médiane est égale au « terme central ».

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
• S_1 : 1 1 2 3 5 7 8 14 • S_2 : 2 5 5 8 8 8 11 12 12	1. On réécrit tous les termes, du plus petit au plus grand. Dans le cas d'un tableau, on fait apparaître chaque valeur autant de fois que son effectif l'indique.
• S_1 compte 8 termes (nombre pair). • S_2 compte 9 termes (l'effectif total est $1 + 2 + 3 + 1 + 2 = 9$: nombre impair).	2. • Pour S_1 , on compte les termes. • Pour S_2 , le nombre de termes est égal à l'effectif total.
• Pour S_1 : Me est la demi-somme des deux termes « du milieu », soit des 4^e et 5^e termes. $Me = \frac{3 + 5}{2} = 4$. $\underbrace{1 \ 1 \ 2 \ (3)}_{4 \text{ termes}} \quad \downarrow \text{Me} \quad (5) \ 7 \ 8 \ 14$ $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{4 \text{ termes}}$	3. • Quand la série compte un nombre pair n de termes, Me est la moyenne des $\left(\frac{n}{2}\right)^e$ et $\left(\frac{n}{2} + 1\right)^e$ termes. • Quand la série compte un nombre impair n de termes, Me est le $\left(\frac{n+1}{2}\right)^e$ terme.
• Pour S_2 : Me est égale au terme « central », soit le 5^e terme. $Me = 8$. $\underbrace{2 \ 5 \ 5 \ 8}_{4 \text{ termes}} \quad \uparrow \text{Me} \quad (8) \ 8 \ 11 \ 12 \ 12$ $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{4 \text{ termes}}$	

→ Calculer les premier et troisième quartiles d'une série

ÉNONCÉ

On considère les deux séries statistiques S_1 et S_2 suivantes :

S_1 : 3 5 7 1 8 14 2 1 et S_2 :

Nombre	2	5	8	11	12
Effectif	1	2	3	1	2

Déterminez le premier quartile Q_1 de S_1 et le troisième quartile Q_3 de S_2 .

MÉTHODE

1. On ordonne les termes de la série dans le sens croissant. Dans le cas d'un tableau, on écrit les termes autant de fois qu'il apparaissent.

2. On compte le nombre n de termes de la série.

3. $\frac{1}{4}n$ est entier : Q_1 est le terme de rang $\frac{1}{4}n$, soit le $\left(\frac{1}{4}n\right)^e$ terme. Sinon, Q_1 est le terme de rang l'entier immédiatement supérieur à $\frac{1}{4}n$. On raisonne de même pour obtenir Q_3 avec la valeur de $\frac{3}{4}n$, selon que $\frac{3}{4}n$ est entier ou non.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
• S_1 : 1 1 2 3 5 7 8 14 • S_2 : 2 5 5 8 8 8 11 12 12	1. On écrit les termes de la série du plus petit au plus grand (ou autant de fois que l'indique leur effectif dans le cas d'un tableau).
• S_1 compte 8 termes. • S_2 compte 9 termes.	2. • Pour S_1, on compte les termes. • Pour S_2, on calcule l'effectif total.
• Pour S_1 : $\frac{1}{4} \times 8 = 2$ (entier). Q_1 est le 2^e terme : $Q_1 = 1$. 1 ① 2 3 5 7 8 14 $Q_1 \rightarrow$ • Pour S_2 : $\frac{3}{4} \times 9 = 6,75$ (pas entier). L'entier juste après 6,75 est 7. Q_3 est le 7^e terme : $Q_3 = 11$. 2 5 5 8 8 8 ⑪ 12 12 $Q_3 \rightarrow$	3. • Quand $\frac{1}{4}n$ (ou $\frac{3}{4}n$) est entier, on a directement le rang de Q_1 (ou Q_3). • Quand $\frac{1}{4}n$ (ou $\frac{3}{4}n$) n'est pas entier, Q_1 (ou Q_3) est le terme dont le rang est l'entier juste après le résultat calculé.



QCM



1 Cochez la ou les réponses correctes.

Une série S compte 7 termes positifs ordonnés dans le sens croissant :

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.$$

1. La moyenne des termes de S est :

a) ☐ x_4

b) ☐ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

c) ☐ $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7}$

2. x_4 correspond à :

a) ☐ la médiane

b) ☐ Q_1

c) ☐ Q_3

3. $x_7 - x_1$ correspond à :

a) ☐ la moyenne

b) ☐ l'étendue

c) ☐ rien de particulier

4. Q_3 est égal à :

a) ☐ 6

b) ☐ x_5

c) ☐ x_6

5. On remplace x_7 par $10 \times x_7$. Quelle valeur reste inchangée ?

a) ☐ la médiane

b) ☐ Q_1

c) ☐ Q_3

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
On considère une série statistique S ordonnée dans le sens croissant.	
1. La médiane Me prend pour valeur un terme de la série.	☐ V ☐ F
2. Q_1 et Q_3 prennent pour valeur des termes de la série.	☐ V ☐ F
3. Exactement 25 % des valeurs de S sont inférieures ou égales à Q_1 .	☐ V ☐ F
Pour une série ordonnée (de façon croissante) de 14 termes,	
4. la médiane Me est le 7 ^e terme.	☐ V ☐ F
5. $Q_1 = 4$.	☐ V ☐ F
6. Q_3 est le 11 ^e terme.	☐ V ☐ F

→ Exercices d'entraînement



3 Pour bien commencer

On donne les deux séries de nombres suivantes :

S_1 : 5 8 10 11 11 15 17 18 28 30 38

S_2 : 1 5 7 7 9 10 14 17 20 21 22 23 25 33 34 36

Calculez la médiane, l'étendue, les premier et troisième quartiles.

4 Bon tireur ?

Robin s'entraîne au tir à l'arc. Il note ses scores dans un tableau.

Points	0	5	10	20	50
Nombre de tirs	1	4	5	7	4

1. Calculez le score moyen de Robin (arrondi au dixième près).
2. Justifiez que le score médian de Robin est 20.
3. Quel pourcentage de scores est supérieur ou égal au score médian ?
Donnez le résultat arrondi à l'unité.

5 Amis Rouennais, à vos parapluies !

Voici la hauteur mensuelle (en mm) de pluie tombée dans la ville de Rouen pour l'année 2009.

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
70	52	45	73	44	81	82	13	20	82	130	101

1. Calculez l'étendue de la série des précipitations.
2. Estimez la hauteur moyenne mensuelle des précipitations.
3. Déterminez la médiane de la série.

Interprétez le résultat.

4. On a compté 124 jours de pluie. Nicolas assure qu'il pleut à Rouen plus d'un jour sur trois.
A-t-il raison ?

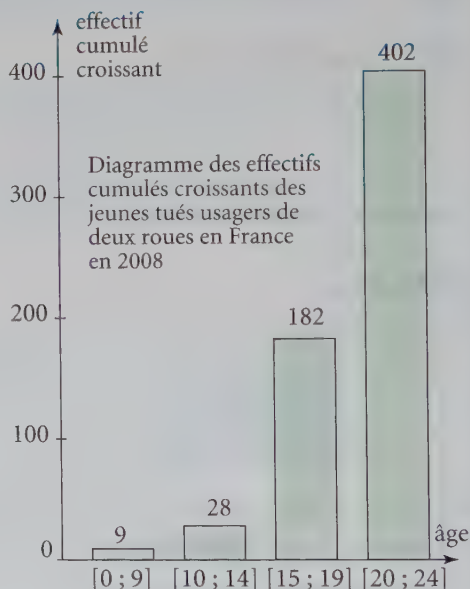
6 De biens tristes résultats

1. Interprétez concrètement le nombre 402.

2. a) Quel est le nombre de victimes âgées de 15 à 19 ans, usagers de deux roues en France, en 2008 ?

b) Parmi les jeunes victimes, quel pourcentage cette tranche d'âge représente-t-elle ?

3. Déterminez dans quel intervalle se situe la médiane.



7 Que de dépenses...

Ce tableau donne le montant en euros (€) des achats effectués par 200 personnes dans un magasin un jour donné.

Montant	Entre 0 et 20 €	Entre 20 et 30 €	Entre 30 et 50 €	Entre 50 et 100 €	Entre 100 et 200 €
Effectif	30	42		45	12
Effectif cumulé croissant	30	72			
Fréquence cumulée croissante (en %)	15	36			

1. Calculez le nombre de personnes ayant dépensé entre 30 et 50 €.

2. Complétez le tableau précédent.

3. a) Construisez le polygone des fréquences cumulées croissantes en % avec en abscisses : 0,5 cm pour 10 € et en ordonnées : 1 cm pour 10 %.

b) En laissant les traits de construction, déterminez une valeur approchée du montant de l'achat médian. Interprétez le résultat.

→ Vers le Brevet



8 Même les profs d'EPS font des maths !

Lors de sa première séance d'endurance, Marc relève la durée (en minutes) qu'est capable de courir chaque élève d'un groupe :

24 12 31 31 57 14 25 45 40 40 29 32 50 20 48 38 32 53

Pour cette série de temps, calculez :

- la moyenne ;
 - l'étendue ;
 - la médiane ;
 - les premier et troisième quartiles ;
 - Quel pourcentage d'élèves court une durée comprise entre Q_1 et Q_3 ?
- Donnez le résultat arrondi à l'unité.

9 Un classique

Voici les notes des 3^e C obtenues au brevet blanc :

Note	5	7	8	9	10	11	12	13	14	17	18	20
Effectif	2	1	3	4	2	4	3	1	3	1	2	1

- Calculez l'étendue de cette série statistique.
 - Déterminez la médiane de cette série statistique.
 - Déterminez les valeurs du premier et du troisième quartiles de la série.
 - Quel pourcentage d'élèves a une note supérieure ou égale à la médiane ?
- Donnez le résultat arrondi à l'unité.

→ QCM

❶ 1. La moyenne des 7 termes de S est :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7}$$

Réponse : c) $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7}$.

Rappel

La moyenne d'une série de n termes vaut $\frac{\text{somme des } n \text{ termes}}{n}$.

2. Dans une série de 7 termes, le 4^e partage la série en deux « sous-séries » de même effectif. C'est la définition de la médiane.

$$\underbrace{x_1 \ x_2 \ x_3}_{3 \text{ termes}} \quad \underbrace{x_4}_{\uparrow} \quad \underbrace{x_5 \ x_6 \ x_7}_{3 \text{ termes}}$$

L'astuce du prof

Faites des schémas comme ici pour vous aider.

Réponse : a) la médiane.

3. $x_7 - x_1$ est la différence entre les deux valeurs extrêmes de la série. C'est la définition de l'étendue.

Réponse : b) l'étendue.

4. S compte 7 termes. Donc $\frac{3}{4} \times 7 = 5,25$. Q_3 est le terme dont le rang est l'entier immédiatement supérieur à 5,25, soit 6. Q_3 est le 6^e terme, soit $Q_3 = x_6$.

Réponse : c) x_6 .

5. ● La médiane d'une série de 7 termes reste le terme « central » : x_4 .

● $\frac{1}{4} \times 7 = 1,75$. Q_1 est le terme dont le rang est l'entier immédiatement supérieur à 1,75, soit 2. Q_1 donc est le 2^e terme : $Q_1 = x_2$ (resté le même).

● $Q_3 = x_6$ (resté le même).

Réponses : a) la médiane, b) Q_1 et c) Q_3 .

Remarque

On reprend les calculs précédents.

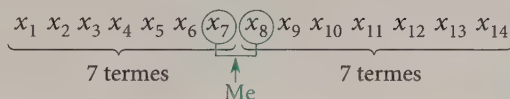
❷ 1. Faux. Quand la série présente un nombre pair de termes, la médiane prend pour valeur la demi-somme des « deux termes centraux », ce qui ne correspond pas forcément à une valeur de la série.

2. Vrai. Q_1 et Q_3 sont les termes de rang $\frac{1}{4}n$ et $\frac{3}{4}n$ (si n est multiple de 4) ou dont le rang est l'entier immédiatement supérieur à $\frac{1}{4}n$ et $\frac{3}{4}n$.

3. Faux. Q_1 est la valeur telle qu'au moins (et non exactement) 25 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_1 .

Piège à éviter
Chaque mot a son importance dans une affirmation de Vrai-Faux !

4. Faux. Pour une série ordonnée de 14 termes (nombre pair), la médiane est égale à la demi-somme des 7^e et 8^e termes.



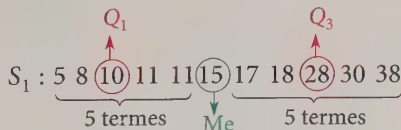
5. Faux. $\frac{1}{4} \times 14 = 3,5$. Le rang de l'entier situé juste après 3,5 est 4. Q_1 est le 4^e terme (qui ne vaut pas forcément 4 !).

Piège à éviter
Ne confondez pas rang de Q_1 et valeur de Q_1 .

6. Vrai. $\frac{3}{4} \times 14 = 10,5$. L'entier juste après 10,5 est 11. Q_3 est le 11^e terme.

→ Exercices d'entraînement

3 • S_1 est une série ordonnée de 11 termes (nombre impair). Sa médiane est le terme « du milieu », le 6^e terme, soit $Me = 15$.

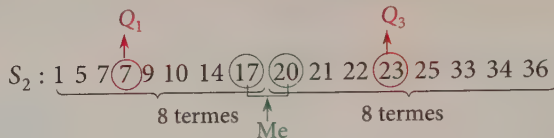


L'étendue de la série vaut $38 - 5 = 33$.

$\frac{1}{4} \times 11 = 2,75$. Q_1 est le terme de rang 3 (le 3^e terme). $Q_1 = 10$.

$\frac{3}{4} \times 11 = 8,25$. Q_3 est le terme de rang 9 (le 9^e terme). $Q_3 = 28$.

- S_2 est une série ordonnée de 16 termes (nombre pair).



Sa médiane est la demi-somme des deux termes « du milieu », les 8^e et 9^e termes.

$$Me = \frac{17 + 20}{2} = 18,5.$$

La série prend ses valeurs entre 1 et 36. Son étendue vaut $36 - 1 = 35$.

$$\frac{1}{4} \times 16 = 4. \quad Q_1 \text{ est le terme de rang 4 (le 4^e terme). } Q_1 = 7.$$

$$\frac{3}{4} \times 16 = 12. \quad Q_3 \text{ est le terme de rang 12 (le 12^e terme). } Q_3 = 23.$$

4 1. Robin a totalisé

$$1 \times 0 + 4 \times 5 + 5 \times 10 + 7 \times 20 + 4 \times 50 = 410 \text{ points.}$$

Il a tiré $1 + 4 + 5 + 7 + 4 = 21$ flèches.

$$\text{Son score moyen est : } \frac{410}{21} \approx 19,5 \text{ points.}$$

2. Robin a tiré 21 flèches, obtenant 21 scores (nombre impair).

La médiane est le terme « du milieu » : le 11^e terme.

$$Me = 20.$$

On cumule les effectifs jusqu'à atteindre ou dépasser 11.

$$1 + 4 + 5 = 10 (< 11) \text{ et } 1 + 4 + 5 + 7 = 17 (> 11).$$

Le 11^e terme vaut 20 (il est dans la colonne 20).

3. Sur 21 tirs, il y a $7 + 4 = 11$ scores de 20 points et plus.

$$\text{Le pourcentage correspondant est : } \frac{11}{21} \approx 0,52, \text{ soit } 52 \%.$$

5 1. Au cours de l'année 2009, il a plu entre 13 mm et 130 mm.

$$\text{L'étendue est } 130 - 13 = 117 \text{ mm.}$$

2. La hauteur moyenne mensuelle des précipitations est :

$$\frac{70 + 52 + 45 + 73 + 44 + 81 + 82 + 13 + 20 + 82 + 130 + 101}{12} \approx 66 \text{ mm.}$$

Rappel

Avec un tableau :

Valeurs $|x_1| x_2 | x_3 | \dots$

Effectifs $|n_1| n_2 | n_3 | \dots$

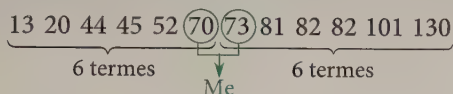
La moyenne est :

$$\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \dots}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots}$$

Remarque

On peut aussi écrire les 21 scores : 0 5 5 5 10 ... 50 et lire la valeur du 11^e terme.

3. ● On commence par ordonner la série des 12 valeurs (nombre pair de termes).



La médiane est la demi-somme des 6^e et 7^e termes. $Me = \frac{70 + 73}{2} = 71,5$.

- En 2009, il a plu plus de 71,5 mm au moins la moitié de l'année.

4. L'année 2009 a compté 365 jours dont 124 jours de pluie.

Cela fait une proportion de $\frac{124}{365} \approx 0,339$, soit 33,9 %.

- Et $\frac{1}{3} \approx 0,333$ soit 33,3 %.

Nicolas a raison : il pleut plus d'un jour sur trois à Rouen (mais de peu !).

6. 1. 402 jeunes de moins de 24 ans ont trouvé la mort dans un accident de deux roues en France durant l'année 2008.

2. a) 182 victimes étaient âgées de 19 ans et moins.

28 victimes avaient 14 ans et moins.

Les 15-19 ans sont donc au nombre de :

$$182 - 28 = 154.$$

- b) Sur un total de 402, la tranche 15-19 ans

représente : $\frac{154}{401} \approx 0,38$, soit 38 %.

3. On lit, sur le graphique, dans quelle tranche d'âge l'effectif dépasse la moitié des 402 personnes, soit 201 personnes.

La valeur médiane se situe dans la tranche des 20-24 ans.

7. 1. Ont dépensé entre 30 € et 50 € : $200 - 30 - 42 - 45 - 12 = 71$ personnes.

Remarque

Le tableau correspond à une série non ordonnée de 12 nombres.

Remarque

Pour comparer les proportions, on les écrit toutes les deux en %.

Piège à éviter

Sont présentés des effectifs cumulés. Pour avoir l'effectif d'une tranche d'âge, on doit soustraire deux effectifs cumulés.

Rappel

Pourcentage d'une partie

$$= \frac{\text{effectif de la partie}}{\text{effectif total}}$$

2.

Montant	Entre 0 et 20 €	Entre 20 et 30 €	Entre 30 et 50 €	Entre 50 et 100 €	Entre 100 et 200 €
Effectif	30	42	71	45	12
Effectif cumulé croissant	30	72	$72 + 71 = 143$	$143 + 45 = 188$	$188 + 12 = 200$
Fréquence cumulée croissante (en %)	15	36	$\frac{143}{200} = 0,715$ $= 71,5$	$\frac{188}{200} = 0,94$ $= 94$	$\frac{200}{200} = 1$ $= 100$

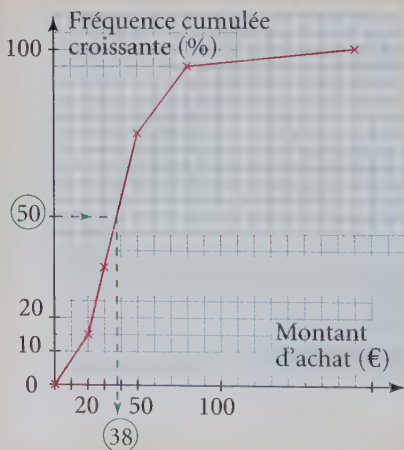
Rappel

Les effectifs cumulés croissants s'obtiennent par addition des effectifs.

Rappel

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$$

3. a) et b) Le prix médian d'un achat est de 38 €. La moitié environ des achats est d'un montant supérieur ou égal à 38 €.



Rappel

Le prix médian se lit pour une fréquence cumulée de 50 %.

→ Vers le Brevet

8 On commence par ordonner les termes de la série :

12 14 20 24 25 29 31 31 32 32 38 40 40 45 48 50 53 57

1. Le temps moyen d'endurance est :

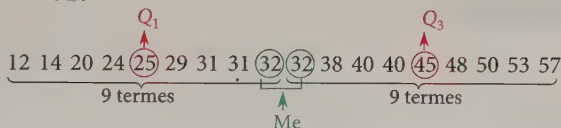
$$\frac{12 + 14 + 20 + 24 + 25 + 29 + 31 + 31 + 32 + 32 + 38 + 40 + 40 + 45 + 48 + 50 + 53 + 57}{18} = 34,5 \text{ min (soit 34 min et 30 s).}$$

2. Les temps de parcours vont de 12 à 57 minutes.

L'étendue est de $57 - 12 = 45$ minutes.

3. La série compte un nombre pair de termes (18). La médiane est alors la demi-somme des deux termes « du milieu », soit des 9^e et 10^e termes. On calcule

$$Me = \frac{32 + 32}{2} = 32.$$



4. Pour obtenir les rangs de Q_1 et Q_3 , on calcule $\frac{1}{4} \times 18 = 4,5$ et $\frac{3}{4} \times 18 = 13,5$.

Les entiers juste après 4,5 et 13,5 sont respectivement 5 et 14.

Ainsi Q_1 est le 5^e terme, soit $Q_1 = 25$; Q_3 est le 14^e terme, soit $Q_3 = 45$.

5. Les élèves courant entre 25 et 45 minutes sont au nombre de 10. Sur le groupe complet, ils représentent

$$\frac{10}{18} \approx 0,55 \text{ soit } 55 \%.$$

Remarque

Il y a un peu plus de 50 % des valeurs entre Q_1 et Q_3 .

9 1. Les notes s'étalent entre 5 et 20. L'étendue est $20 - 5 = 15$.

2. La classe de 3^e C compte :

$$2 + 1 + 3 + 4 + 2 + 4 + 3 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 = 27 \text{ élèves (effectif impair).}$$

Les notes sont :



La médiane est donc le terme central de cette série de 27 notes. C'est le 14^e terme. $Me = 11$.

3. ● $\frac{1}{4} \times 27 = 6,75$. L'entier juste au-dessus est 7.

Q_1 est le terme de rang 7 (le 7^e terme). $Q_1 = 9$.

● $\frac{3}{4} \times 27 = 20,25$. L'entier juste au-dessus est 21.

Q_3 est le terme de rang 21 (le 21^e terme). $Q_3 = 14$.

4. Ont une note ≥ 11 : $4 + 3 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 = 15$ élèves.

Ils représentent $\frac{15}{27} \approx 0,55$ soit 55 % de la classe.

Remarque

On peut aussi trouver Me en cumulant les effectifs jusqu'à dépasser la moitié de 27 (13,5). C'est dans la colonne 11.

Remarque

Il y a un peu plus de 50 % des valeurs $\geq Me$.

1 Généralités

1 Vocabulaire

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît à l'avance l'ensemble des résultats possibles (encore appelés **issues possibles**).
- Un **événement** est constitué par une ou plusieurs issues de l'expérience.

Exemple : Lancer un dé est une expérience aléatoire.

Obtenir un résultat pair est un événement réalisé par 3 issues : 2, 4 et 6.

2 Probabilité

- Une **probabilité** est un nombre compris entre 0 et 1.
- La somme des probabilités des issues d'une expérience est égale à 1.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent.

Exemple : Dans l'expérience aléatoire précédente, la probabilité d'une issue est $\frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir un résultat pair est :

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Obtenir 2}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Obtenir 4}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Obtenir 6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

3 Événements particuliers

- Un événement est dit impossible si sa probabilité est nulle (il ne se produit jamais).
- Un événement est dit certain si sa probabilité vaut 1 (il se produit obligatoirement).
- Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.
- L'**événement contraire** de A est l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas. On le note (*non A*). On a la relation $p(A) + p(\text{non } A) = 1$.

EXERCICE RÉSOLU

► Comprendre une situation

ÉNONCÉ

Devant le tableau du professeur de mathématiques, se trouvent 6 craies : une rouge, deux vertes et trois blanches.

1. Le professeur prend au hasard une craie et regarde sa couleur.

a) Précisez l'expérience aléatoire associée à cette situation.

b) Indiquez un résultat possible. Combien y en a-t-il au total ?

c) Quel est le résultat le plus probable ?

2. Il prend au hasard deux craies (parmi les six). On s'intéresse à l'événement E : « obtenir deux craies de la même couleur ».

Indiquez un résultat favorable puis un résultat non favorable à cet événement.

3. Il prend au hasard trois craies (parmi les six). On s'intéresse à l'événement F : « obtenir au moins deux craies de la même couleur ».

L'issue « obtenir trois craies blanches » est-elle favorable à cet événement ?

CORRIGÉ

1. a) L'expérience aléatoire consiste à choisir une craie parmi les six. Cette expérience a plusieurs issues possibles connues et on ne peut pas prévoir à l'avance la couleur de la craie.

b) Un résultat possible est : « obtenir une craie verte. » Il y a trois résultats possibles car il y a trois couleurs de craie : rouge, verte et blanche.

c) Il y a plus de craies blanches (3) que de rouges (1) ou de vertes (2). Le résultat le plus probable est donc d'obtenir une craie blanche.

2. ● Un résultat favorable à cette situation est : « obtenir deux craies blanches » par exemple.

● Un résultat non favorable à cet événement est par exemple : « obtenir une craie rouge et une craie blanche ».

3. L'issue « obtenir trois craies blanches » est favorable à l'événement F car il y a bien au moins deux craies de la même couleur puisqu'il y en a trois.

Méthode

Pour décrire une expérience aléatoire, on nomme l'action indiquée dans le texte.

Remarque

On dit que les résultats ne sont pas équiprobables : ils n'ont pas tous la même probabilité.

Rappel

Obtenir au moins deux craies de la même couleur, c'est aussi en obtenir deux ou trois.

→ Calculer des probabilités à l'aide d'un arbre

ÉNONCÉ

Voici une urne contenant des boules numérotées 1, 2 ou 3. On choisit au hasard une boule de cette urne. Chaque boule a la même chance d'être choisie.

Réalisez l'arbre des possibles en indiquant sur chaque branche les probabilités correspondantes, puis calculez la probabilité de l'événement A : « obtenir un chiffre supérieur ou égal à 2 ».



MÉTHODE

1. On représente l'arbre en utilisant autant de branches qu'il y a d'issues possibles.
2. Sur chaque branche, on indique la probabilité correspondante.
3. On vérifie que la somme des probabilités inscrites sur chaque branche fait bien 1.
4. On utilise l'arbre pour calculer les probabilités en sachant que la probabilité d'un événement est égale la somme des probabilités qui le composent.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
	1. Il y a 3 issues possibles : obtenir le 1, le 2 ou le 3. L'arbre est donc constitué de 3 branches.
	2. Il y a 6 boules numérotées 1 sur un total de 12. On a 6 chances sur 12 d'obtenir une boule numérotée 1. La probabilité correspondante est $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. On raisonne de même pour les boules numérotées 2 et 3. On note les probabilités sur les branches de l'arbre.
On a bien $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.	3. Cette étape permet de contrôler les résultats.
L'événement A est constitué des deux issues : « obtenir 2 » et « obtenir 3 » : $p(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ La probabilité de A est donc 0,5.	4. On calcule $p(A)$ en additionnant les probabilités écrites sur les branches conduisant aux issues 2 et 3.

→ Représenter une expérience aléatoire à deux épreuves

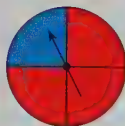
ÉNONCÉ

Un jeu se déroule en deux étapes.

- On fait tourner la roue ci-contre. On note la couleur obtenue repérée par la flèche noire.

- Puis, on tire une boule de l'urne. On note la couleur obtenue.

A-t-on plus de chances d'obtenir deux fois la couleur rouge ou deux fois la couleur bleue ?



MÉTHODE

1. On identifie une situation qui comporte deux épreuves successives.
2. On représente la situation à l'aide d'un arbre. On pondère chaque branche par les probabilités correspondantes et on écrit en fin de branches les issues obtenues (une succession de branches est appelée chemin).
3. On calcule les probabilités en utilisant le fait que la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
Le jeu se déroule en 2 étapes. On note (R) pour rouge et (B) pour bleu.	1. Il s'agit bien d'une expérience à deux épreuves puisqu'il y a une succession de deux expériences.
	2. La roue est découpée en 4 secteurs identiques. Il y a 3 secteurs rouges donc la probabilité d'obtenir le rouge est $\frac{3}{4}$; celle d'obtenir le bleu est $\frac{1}{4}$. • Dans l'urne, il y a 6 boules dont 4 boules bleues. La probabilité d'obtenir une boule bleue est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Celle d'obtenir une boule rouge est $\frac{1}{3}$.
La probabilité d'obtenir deux fois le rouge est $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$. La probabilité d'obtenir deux fois la couleur bleue est $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$. Comme $\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$, on a plus de chances d'obtenir deux fois la couleur rouge.	3. On calcule les produits correspondant aux chemins étudiés (sans oublier de simplifier les fractions).

→ QCM

**1 Cochez la ou les réponses correctes.**

1. Une probabilité est un nombre qui peut s'écrire sous forme :

- a) ☐ décimale b) ☐ de fraction c) ☐ pourcentage

2. Une probabilité peut être égale à : a) ☐ $\frac{17}{20}$ b) ☐ $\frac{6}{5}$ c) ☐ $-\frac{1}{4}$

3. Si $p(A) = 0$, alors cet événement est :

- a) ☐ incertain b) ☐ impossible c) ☐ contraire

4. Deux événements A et B sont contraires lorsque :

- a) $p(A) + p(B) = 1$ b) $p(A) = 1 - p(B)$ c) $p(A) + p(B) = 0$

5. On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. On regarde le nombre inscrit sur la face supérieure. Une issue de cette expérience est :

- a) ☐ obtenir le chiffre 3 b) ☐ obtenir Pile c) ☐ obtenir un nombre pair

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. Quand on fait la somme de toutes les probabilités des issues d'une expérience, on obtient toujours 1.	☐ V ☐ F
2. Soit A et B deux événements d'une même expérience tels que $p(A) = 0,23$ et $p(B) = 0,77$. Alors A et B sont des événements contraires.	☐ V ☐ F
3. Si $p(A) = 0,75$, alors $p(\text{non } A) = \frac{1}{4}$.	☐ V ☐ F
4. Dans une expérience aléatoire à deux issues, si l'une a pour probabilité 0,26, alors l'autre a pour probabilité 0,74.	☐ V ☐ F
5. Dans une expérience aléatoire à deux issues, si l'une a pour probabilité 3,5 %, alors l'autre a pour probabilité 0,65.	☐ V ☐ F
6. Une classe de 30 élèves compte 18 filles. Un élève est interrogé au hasard. La probabilité que ce soit un garçon est 0,4.	☐ V ☐ F
7. Soit p la probabilité de choisir une boule blanche dans une urne. Si on double les boules blanches, alors la probabilité double.	☐ V ☐ F

→ Exercices d'entraînement



3 Avec un tableau

Une expérience aléatoire comporte 5 issues. Le tableau suivant donne les probabilités correspondantes pour chacune des issues :

Issues	1	2	3	4	5
Probabilités	0,18	p	0,02	0,25	0,36

1. Est-il vrai que l'on a deux fois plus de chances d'obtenir l'issue 5 que l'issue 1 ?
2. Calculez la valeur de p .
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 3 ?
4. A-t-on plus de chances d'obtenir un résultat pair ou impair ?

4 Une pièce très particulière

Une pièce de monnaie est telle que la probabilité d'obtenir Pile est trois fois plus grande que celle d'obtenir Face.

Quelle est la probabilité d'apparition de chacune des faces ?

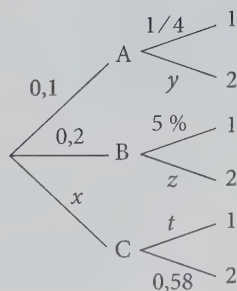
5 En musique

Sur le lecteur MP3 d'Hélène, il y a trois groupes de musique différents Radiohead, Ghinzu et Deus. Les morceaux de Radiohead représentent $\frac{2}{5}$ des enregistrements, ceux de Ghinzu 27 % et le reste est composé des chansons de Deus.

On lance la lecture aléatoire qui choisit un morceau au hasard. Quel groupe a-t-on le plus de chances d'écouter en premier ?

6 L'arbre ci-contre représente une expérience à deux épreuves. Les résultats seront donnés sous forme décimale exacte.

1. Calculez x , y , z et t .
2. Calculez $p(A, 2)$ et $p(B, 1)$.



→ Vers le brevet



7 Avec une roue

Un jeu consiste à faire tourner la roue ci-contre. On lit le numéro en face de la flèche.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le chiffre 2 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 3 ?
3. On gagne 10 € si la roue s'arrête sur un chiffre pair ; on perd 10 € sinon.

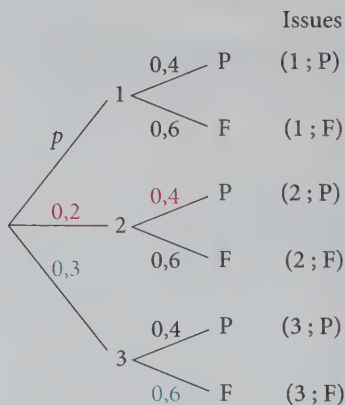
A-t-on intérêt à jouer à ce jeu ?



8 Un bel arbre ... de probabilité

L'arbre ci-contre représente une expérience à deux épreuves. Les 6 issues sont écrites en fin de branches.

1. Calculez la valeur de p .
2. Calculez la probabilité des issues (2 ; P) et (3 ; F).
3. Sans aucun calcul, est-il possible de savoir quelle est l'issue la plus probable ?



→ QCM

1. Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1. Elle peut donc s'écrire sous forme décimale, sous forme de fraction ou sous forme d'un pourcentage.

Réponses : **a)** décimale **b)** de fraction et **c)** pourcentage.

2. Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1. On repère parmi les fractions proposées celles qui sont comprises entre 0 et 1.

• $0 < \frac{17}{20} < 1$, donc $\frac{17}{20}$ peut être une probabilité.

• $\frac{6}{5} > 1$, donc $\frac{6}{5}$ ne peut pas être une probabilité.

• $-\frac{1}{4} < 0$, donc $-\frac{1}{4}$ ne peut pas être une probabilité.

Réponse : **a)** $\frac{17}{20}$.

3. Si $p(A) = 0$, on dit que A est un événement impossible.

Réponse : **b)** impossible.

4. Deux événements A et B sont contraires lorsque

$p(A) + p(B) = 1$. Cette égalité peut aussi s'écrire :

$p(A) = 1 - p(B)$.

Réponses : **a)** $p(A) + p(B) = 1$ et **b)** $p(A) = 1 - p(B)$.

5. • Obtenir le chiffre 3 est bien un résultat possible donc une issue de l'expérience.

• Obtenir Pile ne peut pas être une issue

(il n'y a pas de face notée Pile).

• Obtenir un nombre pair n'est pas une issue. Il s'agit d'un événement qui est composé de 3 issues : 2, 4 et 6.

Réponse : **a)** obtenir le chiffre 3.

Remarque

Par exemple, $p = 0,1$
(décimale), $\frac{1}{10}$ (fraction),
 $p = 10\%$ (pourcentage).

Gagnez des points !

On reconnaît qu'une fraction est un nombre inférieur à 1 si le numérateur est plus petit que le dénominateur.

Remarque

Par exemple, quand on lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, la probabilité d'obtenir 7 est nulle.

Gagnez des points !

Si A et B sont contraires alors $B = \text{non}(A)$.

Gagnez des points !

Un événement peut être composé d'une ou plusieurs issues.

2. 1. Vrai. C'est une règle fondamentale. Quand on fait la somme des probabilités de toutes les issues, on doit obtenir 1.

2. Vrai. $p(A) + p(B) = 0,23 + 0,77 = 1$. Les événements sont bien contraires.

3. Vrai. On sait que $p(A) + p(\text{non}A) = 1$. Sachant que $p(A) = 0,75$, on en déduit :
 $p(\text{non}A) = 1 - 0,75 = 0,25 = \frac{1}{4}$.

4. Vrai. La somme des probabilités des issues vaut 1. Si l'une vaut 0,26, alors l'autre vaut $1 - 0,26 = 0,74$.

5. Faux. La somme des probabilités des issues vaut 1.

Si l'une vaut 3,5 %, alors l'autre vaut :

$$1 - 3,5 \% = 1 - 0,035 = 0,965.$$

Rappel

$$3,5 \% = \frac{3,5}{100} = 0,035.$$

6. Vrai. Dans la classe, il y a 30 élèves dont 18 filles. Il y a donc $30 - 18 = 12$ garçons. Le professeur interroge un élève au hasard, il a donc 12 chances sur 30 de choisir un garçon. La probabilité est donc $\frac{12}{30} = 0,4$.

7. Faux. Prenons un contre-exemple. Dans une urne, il y a 2 boules blanches et 2 boules noires. La probabilité de choisir une boule blanche est $\frac{2}{4} = 0,5$.

On a donc une chance sur deux d'obtenir une boule blanche. Si on double le nombre de boules blanches, il y en a 4 et toujours 2 boules noires. L'urne est donc composée de 4 boules blanches et 2 boules noires, soit 6 boules au total. La probabilité d'obtenir une boule blanche est alors de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. On a deux chances sur 3 d'obtenir une boule blanche et $\frac{2}{3} \approx 0,67$ n'est pas le double de 0,5.

→ Exercices d'entraînement

③ 1. La probabilité d'obtenir le 1 est 0,18 et celle d'obtenir le 5 est 0,36. Or $0,18 \times 2 = 0,36$. On en déduit que l'on a deux fois plus de chances d'obtenir le 5 que le 1.

2. La somme des probabilités des issues de l'expérience vaut 1. On peut donc écrire :
 $0,18 + p + 0,02 + 0,25 + 0,36 = 1$.

On en déduit que :

$$p = 1 - 0,18 - 0,02 - 0,25 - 0,36 = 0,19.$$

3. La probabilité d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 3 est $0,02 + 0,25 + 0,36 = 0,63$.

Gagnez des points !

Obtenir un résultat supérieur ou égal à trois, signifie obtenir 3, 4 ou 5.

4. ● Les résultats pairs sont 2 et 4. La probabilité d'obtenir un résultat pair est donc :

$$0,19 + 0,25 = 0,44.$$

● Les résultats impairs sont 1, 3 et 5. La probabilité d'obtenir un résultat impair est :

$$0,18 + 0,02 + 0,36 = 0,56.$$

● $0,44 < 0,56$, donc la probabilité d'obtenir un résultat pair est inférieure à la probabilité d'obtenir un résultat impair.

4 Soit x la probabilité d'obtenir Face. La probabilité d'obtenir Pile est donc $3x$. On en déduit que $x + 3x = 1$ soit $4x = 1$.

Par conséquent, $x = \frac{1}{4} = 0,25$.

La probabilité d'obtenir Face est 0,25 et celle d'obtenir Pile est $0,25 \times 3 = 0,75$.

5 ● La probabilité que la lecture aléatoire choisisse un morceau de Radiohead est $\frac{2}{5} = 0,4$.

● La probabilité que la lecture aléatoire choisisse un morceau de Ghinzu est $\frac{27}{100} = 0,27$.

● $p(\text{Radiohead}) + p(\text{Ghinzu}) + p(\text{Deus}) = 1$ car il n'y a que 3 issues possibles.

La probabilité que la lecture aléatoire choisisse un morceau de Deus est $1 - 0,4 - 0,27 = 0,33$.

On a $0,27 < 0,33 < 0,4$, on en déduit que la probabilité la plus importante est celle d'écouter un morceau du groupe Radiohead.

6 1. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.

● $0,1 + 0,2 + x = 1$

$$x = 1 - 0,1 - 0,2$$

$$x = 0,7.$$

● $\frac{1}{4} + y = 1$

$$y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

L'astuce du prof

Quand la probabilité d'obtenir un résultat pair est 0,44, la probabilité d'obtenir un résultat impair est $1 - 0,44 = 0,56$ car on ne peut obtenir qu'un résultat pair ou un résultat impair. Les événements sont contraires.

Conseil

Traduisez le problème à l'aide d'une équation.

Méthode

Cherchez les probabilités dans le même « format ».

Par exemple, sous forme décimale.

Gagnez des points !

On donne les résultats sous forme décimale.

$$\bullet 5\% + z = 1$$

$$z = 1 - 5\% = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$\bullet t + 0,58 = 1$$

$$t = 1 - 0,58 = 0,42$$

$$2. \bullet p(A, 2) = 0,1 \times \frac{1}{4} = 0,1 \times 0,25 = 0,025$$

$$p(B, 1) = 0,2 \times 5\% = 0,2 \times 0,05 = 0,01.$$

→ Vers le Brevet

7 1. La roue est composée de 8 secteurs identiques. 2 portent le numéro 2.

La probabilité d'obtenir le chiffre 2 est $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$.

On a donc 1 chance sur 4 d'obtenir le chiffre 2.

2. • La probabilité d'obtenir le chiffre 2 est 0,25, d'après la question précédente.

• La probabilité d'obtenir le chiffre 3 est $\frac{3}{8} = 0,375$ car il y a 3 secteurs qui portent le numéro 3.

On en déduit que la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 3 est $0,25 + 0,375 = 0,625$.

3. • La probabilité de gagner 10 € quand on joue à ce jeu est égale à la probabilité que la roue s'arrête sur un chiffre pair.

Il y a 2 chiffres pairs sur la roue : 2 et 4.

La probabilité d'obtenir le chiffre 2 est 0,25 (d'après la question 1).

La probabilité d'obtenir le chiffre 4 est $\frac{1}{8} = 0,125$.

On en déduit que la probabilité d'obtenir un chiffre pair est $0,25 + 0,125 = 0,375$.

• La probabilité de perdre 10 € est égale à la probabilité que la roue s'arrête sur un chiffre impair.

Il y a 2 chiffres impairs sur la roue : 3 et 5.

La probabilité d'obtenir le 3 est 0,375 (d'après la question 2).

Remarque

Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 3, c'est obtenir 2 ou 3.

L'astuce du prof

Les événements : « obtenir un chiffre pair (P) » et « obtenir un chiffre impair (I) » sont contraires. Donc $p(I) = 1 - p(P)$
 $= 1 - 0,375 = 0,625$.

La probabilité d'obtenir le 5 est $\frac{2}{8} = 0,25$.

Ainsi, la probabilité d'obtenir un chiffre impair est $0,375 + 0,25 = 0,625$.

Finalement, la probabilité de gagner est plus faible que celle de perdre : on n'a donc pas intérêt à jouer à ce jeu.

8 1. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.. On en déduit que $p + 0,2 + 0,3 = 1$ soit $p = 0,5$.

2. On calcule les probabilités de chacune des deux issues :

● $p(2 ; P) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$.

● $p(3 ; F) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.

3. L'issue la plus probable est celle dont la probabilité est la plus grande. On remarque que les probabilités sur la deuxième partie de l'arbre sont toutes identiques.

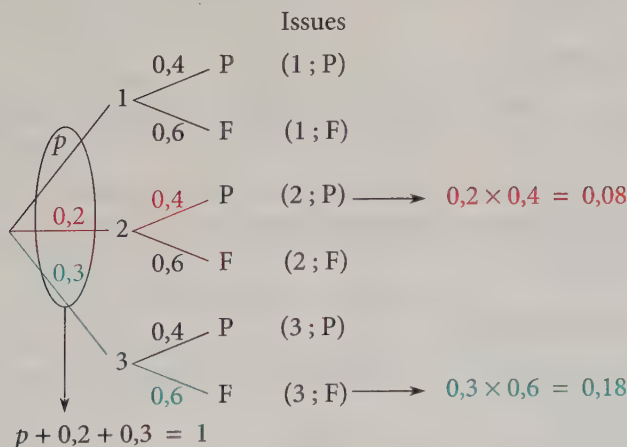
On cherche, dans l'arbre, le produit qui donnera le plus grand nombre. Au premier nœud, la probabilité la plus grande est 0,5 et sur le deuxième nœud, c'est 0,6. C'est donc l'issue (1 ; F) qui aura la plus grande probabilité ($0,5 \times 0,6 = 0,3$).

Piège à éviter

Les six issues n'ont pas toutes la même probabilité.

Rappel

Pour calculer les probabilités des issues, on multiplie les probabilités du chemin pour y arriver.



1 Définitions

1 Grandeurs simples

- En sciences, certaines grandeurs peuvent se mesurer.

Exemples : les longueurs (en mètres, ...), les durées (en secondes, heures, jours, ...), les masses (en grammes, ...), ...

On les appelle **des grandeurs simples**.

- D'autres grandeurs sont définies à partir de ces grandeurs simples : ce sont des **grandeurs composées**.

Exemples : l'aire d'un rectangle, la vitesse, ...

2 Grandeur produit

On définit une **grandeur produit** comme étant le produit de deux grandeurs (simples, de même nature ou non).

Exemple : L'aire $\mathcal{A}$ d'un rectangle est donnée par la formule : longueur $\times$ largeur.
La longueur et la largeur sont des grandeurs simples exprimées en mètres, $\mathcal{A}$ est en m^2 .

3 Grandeur quotient

Une **grandeur quotient** est le rapport de deux grandeurs (simples, de même nature ou non).

Exemple : La vitesse moyenne v est définie par la formule :

$$v = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}}$$

La distance parcourue s'exprime en kilomètres et le temps de parcours en heures, la vitesse est alors en kilomètres par heure (notés km/h ou $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$).

EXERCICE RÉSOLU

► Vitesse, distance et temps

ÉNONCÉ

Un TGV part de Paris à 17 h 45 et arrive à Strasbourg à 20 h 05. Sa vitesse moyenne sur cette ligne est de $210 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

1. Quelle distance sépare Paris de Strasbourg ?

En avril 2007, le TGV Est a battu le record du monde de vitesse avec une pointe à $574,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

2. À cette vitesse, combien de temps (à la minute près) mettrait ce TGV pour relier la capitale à Strasbourg ?

CORRIGÉ

1. Le trajet s'est effectué entre 17 h 45 et 20 h 05, soit pendant 2 h 20 min.

● La formule reliant vitesse moyenne (v), distance

parcourue (d) et temps de parcours (t) est : $v = \frac{d}{t}$.

La vitesse s'exprime en kilomètres par heure, soit $v = 210 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $t = 2 \text{ h } 20$.

On convertit cette durée en fraction :

$$2 \text{ h } 20 = 2 \text{ h} + 20 \text{ mn} = 2 \text{ h} + \frac{20}{60} \text{ h} = 2 \text{ h} + \frac{1}{3} \text{ h} = \frac{6}{3} \text{ h} + \frac{1}{3} \text{ h} = \frac{7}{3} \text{ h}.$$

● L'expression de v s'écrit alors $210 = \frac{d}{\frac{7}{3}}$.

On en déduit, par produit : $d = 210 \times \frac{7}{3} = 490$.

En conclusion, 490 km séparent Paris de Strasbourg.

2. On utilise à nouveau la relation $v = \frac{d}{t}$ avec $v = 574,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $d = 490 \text{ km}$.

$$\text{D'où } 574,8 = \frac{490}{t}.$$

$$\text{Soit } t = \frac{490}{574,8} \text{ ou } t \approx 0,85.$$

$$0,85 \text{ h} = 0,85 \times 60 \text{ mn} = 51 \text{ mn}.$$

À cette vitesse record, Paris serait à 51 min de Strasbourg.

Méthode

Pour convertir des minutes en heures, on divise par 60 car

$$1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}.$$

Rappel

Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.

Méthode

Pour convertir une partie décimale (entre 0 et 1) d'heure en minutes, on multiplie par 60 car $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$.



QCM



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. La grandeur proposée est une grandeur produit :

- a) ☐ l'aire d'un carré b) ☐ le périmètre d'un rectangle
c) ☐ l'énergie électrique

2. La grandeur proposée est une grandeur quotient :

- a) ☐ la masse volumique b) la densité de population
c) ☐ l'aire d'un triangle

3. La vitesse v_s du son dans l'air est de 343 m/s.

- a) ☐ $v_s \approx 95,3$ km/h b) ☐ $v_s \approx 343$ km/h c) ☐ $v_s \approx 1\,234$ km/h

4. Un orage éclate à 3,2 km d'un observateur.

Quel temps t met le son pour arriver à l'observateur ?

- a) ☐ $t \approx 107$ s b) ☐ $t \approx 9$ s c) moins de 1 seconde

5. Le son d'un éclair met 3 secondes pour parvenir à un observateur.

L'orage se situe : a) ☐ à moins d'un km b) ☐ entre 1 et 2 km c) ☐ à plus de 2 km

2 Répondez par vrai ou faux.

Rappel : énergie électrique consommée = puissance $\times$ temps

$$E \text{ en Wh} = P \text{ (en W)} \times t \text{ (en h)}$$

Affirmations	Réponse
1. 2 500 Wh = 0,25 kWh.	☐ V ☐ F
2. 8 minutes de cuisson sont nécessaires pour faire cuire un bifteck sur une plaque électrique d'une puissance de 1 500 W. L'énergie consommée correspondante est de 200 Wh.	☐ V ☐ F
3. Cathy fait cuire un poulet durant 1 h 30, dans un four consommant 3,3 kWh. On en déduit que la puissance du four est d'un peu plus de 2 500 W.	☐ V ☐ F
4. Un congélateur, d'une puissance de 90 W, a consommé 15,12 kWh. Le temps de fonctionnement correspondant est d'une semaine.	☐ V ☐ F

→ Exercices d'entraînement



3 Savoir jongler... avec une formule

Complétez le tableau suivant.

Métal	Masse volumique M_v en kg/m^3	Volume V	Masse m
Acier	...	$3,2 \text{ m}^3$	25,12 t
Argent	10 500	... cm^3	210 g
Or	19 300	1 cm^3	... g

4 Tout s'éclaire...

Une ampoule à économie d'énergie de 11 W (ampoule A) est équivalente à une ampoule « classique » de 60 W (ampoule B).

1. Pour 6 heures d'utilisation, quelle quantité d'énergie consomme chaque ampoule (en kWh)?
2. Un kWh coûte 0,112 5 €. L'ampoule A coûte 5,45 € et l'ampoule B, 0,50 €. Quelle est l'économie réalisée sur un an (en supposant un allumage moyen de 6 heures par jour) en achetant l'ampoule A ?

→ Vers le Brevet



5 Le Concorde : une légende

1. Un vol Paris-New York dure 7 h 50 pour une distance parcourue de 5 839 km. Quelle est la vitesse moyenne d'un tel vol ?
2. La vitesse moyenne du Concorde sur ce vol était de 1 557 km/h. Combien de temps lui fallait-il pour relier les deux villes ?
3. La vitesse du son étant de 343 m/s, le Concorde était-il un avion supersonique (qui allait plus vite que le son) ?

6 Histoires d'eau

Un robinet a une fuite : il goutte, usant ainsi 4 litres par heure.

1. Quel volume d'eau en m^3 est ainsi gâché en un an (= 365 jours) ?
2. Un m^3 d'eau coûte 2,353 € TTC. Quelle somme d'argent pourrait être économisée ?

→ QCM

❶ 1. ● L'aire d'un carré est égale à côté $\times$ côté (produit de deux longueurs).

● Le périmètre d'un rectangle vaut :

$2 \times (L + l) = 2L + 2l$: c'est la somme de deux grandeurs.

● L'énergie électrique : $E = \text{puissance} \times \text{temps}$ (produit de deux grandeurs).

Réponses : a) l'aire d'un carré et c) l'énergie électrique.

2. ● La masse volumique = $\frac{\text{masse}}{\text{volume}}$ (quotient de deux grandeurs).

● La densité de population = $\frac{\text{nombre d'habitants}}{\text{surface habitée}}$ (quotient).

● L'aire d'un triangle = $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$
 = $0,5 \times \text{base} \times \text{hauteur}$ (produit).

Réponses : a) la masse volumique et b) la densité de population.

3. Le son parcourt 343 mètres en une seconde.

● $343 \text{ m} = 0,343 \text{ km}$

● $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 60 \times 60 \text{ s} = 3\,600 \text{ s}$

En 1 heure, le son parcourt $0,343 \times 3\,600 = 1\,234,8 \text{ km}$.

Réponse : c) $v_s \approx 1\,234 \text{ km/h}$.

4. vitesse moyenne = $\frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}}$, soit $v = \frac{d}{t}$.

$v = 343 \text{ m/s}$ et $d = 3,2 \text{ km} = 3\,200 \text{ m}$.

D'où $343 = \frac{3\,200}{t}$.

On en déduit : $t = \frac{3\,200}{343}$. Soit $t \approx 9,3 \text{ s}$.

Réponse : b) $t \approx 9 \text{ s}$.

5. On utilise la relation $v = \frac{d}{t}$ avec $v = 343 \text{ m/s}$ et $t = 3 \text{ s}$.

L'orage se situe à une distance d telle que $343 = \frac{d}{3}$.

On en déduit : $d = 343 \times 3$ soit $d = 1\,029 \text{ m} \approx 1,029 \text{ km}$.

Réponse : b) entre 1 et 2 km.

Piège à éviter

Ce n'est pas parce que l'on divise par 2, que c'est une grandeur quotient.

Rappel

Tableau de conversion des longueurs :
 km | hm | dam | m | dm | cm | mm

Gagnez des points !

Faites attention aux unités :
 si la vitesse est en m/s,
 la distance est en mètres
 et le temps en secondes.

2 1. Faux. $1 \text{ kWh} = 1\,000 \text{ Wh}$.

Ainsi $2\,500 \text{ Wh} = 2,5 \text{ kWh}$.

2. Vrai. $E = P \times t$ où P est en W et t en heures.

Avec $P = 1\,500 \text{ W}$ et $t = 8 \text{ min} = \frac{8}{60} \text{ h} = \frac{2}{15} \text{ h}$,

on obtient : $E = 1\,500 \times \frac{2}{15} = 200 \text{ Wh}$.

3. Faux. $E = P \times t$ où P est en W et t en heures.

Avec $E = 3,3 \text{ kWh} = 3\,300 \text{ Wh}$ et

$t = 1 \text{ h } 30 = 1 \text{ h} + 30 \text{ min} = 1 \text{ h} + \frac{30}{60} \text{ h} = 1 \text{ h} + 0,5 \text{ h} = 1,5 \text{ h}$,

on obtient : $3\,300 = P \times 1,5$.

D'où $P = \frac{3\,300}{1,5} = 2\,200 \text{ W} < 2\,500 \text{ W}$.

4. Vrai. $E = P \times t$ où P est en W et t en heures.

Avec $E = 15,12 \text{ kWh} = 15\,120 \text{ Wh}$ et $P = 90 \text{ W}$,

on écrit : $15\,120 = 90 \times t$.

D'où $t = \frac{15\,120}{90} = 168 \text{ h} = \frac{168}{24} \text{ jours} = 7 \text{ jours} = 1 \text{ semaine}$.

Piège à éviter

Pensez à convertir
les 8 minutes en heures...

Rappel

$1 \text{ kWh} = 1\,000 \text{ Wh}$.

Gagnez
des points !

Le temps calculé dans
la formule est en heures.
On le convertit en jours.

→ Exercices d'entraînement

3 • $M_{V \text{ acier}} = \frac{m_{\text{acier}}}{V_{\text{acier}}}$.

Avec $m_{\text{acier}} = 25,12 \text{ t} = 25\,120 \text{ kg}$ et $V_{\text{acier}} = 3,2 \text{ m}^3$,

on obtient : $M_{V \text{ acier}} = \frac{25\,120}{3,2} = 7\,850 \text{ kg/m}^3$.

• $M_{V \text{ argent}} = \frac{m_{\text{argent}}}{V_{\text{argent}}}$.

Avec $m_{\text{argent}} = 210 \text{ g} = 0,210 \text{ kg}$

et $M_{V \text{ argent}} = 10\,500 \text{ kg/m}^3$,

on écrit : $10\,500 = \frac{0,210}{V_{\text{argent}}}$.

Rappel

$1 \text{ t} = 1\,000 \text{ kg}$.

Rappel

Tableau de conversion
des masses :
kg | hg | dag | g | dg | cg | mg

$$\text{Soit } V_{\text{argent}} = \frac{0,210}{10\,500} = 2 \times 10^{-5} = 0,000\,02 \text{ m}^3 = 0,02 \text{ dm}^3 = 20 \text{ cm}^3.$$

$$\bullet M_{V_{\text{or}}} = \frac{m_{\text{or}}}{V_{\text{or}}}.$$

$$\text{Avec } M_{V_{\text{or}}} = 19\,300 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{et } V_{\text{or}} = 1 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3 = 0,000\,001 \text{ m}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3,$$

$$\text{on écrit : } 19\,300 = \frac{m_{\text{or}}}{10^{-6}}.$$

$$\text{Soit } m_{\text{or}} = 19\,300 \times 10^{-6} = 0,019\,3 \text{ kg} = 19,3 \text{ g}.$$

Rappel

Tableau de conversion
des volumes :

m ³	dm ³	cm ³

4 1. On utilise la formule :

$$\text{énergie (E en Wh)} = \text{puissance (P en W)} \times \text{temps (en h)}$$

$$\bullet \text{ L'ampoule A consomme : } E_A = P \times t = 11 \times 6 = 66 \text{ W} = 0,066 \text{ kWh}.$$

$$\bullet \text{ L'ampoule B consomme : } E_B = P \times t = 60 \times 6 = 360 \text{ W} = 0,36 \text{ kWh}.$$

2. On note E l'énergie en kWh consommée en 6 heures par une ampoule.

– Sur une année complète, une ampoule consomme $365 \times E$.

– Le coût en énergie est :

$$\text{prix d'un kWh} \times \text{nombre de kWh consommés} = 0,112\,5 \times (365 \times E).$$

– Le coût total pour une année est :

coût en énergie + prix d'achat de l'ampoule.

• Pour l'ampoule A, le coût total pour une année est de :

$$0,112\,5 \times (365 \times 0,066) + 5,45 \approx 8,16 \text{ €}.$$

• Pour l'ampoule B, le coût total pour une année est de :

$$0,112\,5 \times (365 \times 0,36) + 0,50 \approx 15,28 \text{ €}.$$

• En achetant l'ampoule A, l'économie réalisée est de :

$$15,28 - 8,16 = 7,12 \text{ €}.$$

→ Vers le Brevet

$$5 \text{ 1. vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}},$$

$$\text{soit } v = \frac{d}{t}.$$

Piège à éviter

Convertissez

les 50 minutes en heures.

$$\bullet t = 7 \text{ h } 50 = 7 \text{ h} + 50 \text{ mn} = 7 \text{ h} + \frac{50}{60} \text{ h} = 7 \text{ h} + \frac{5}{6} \text{ h} = \left(7 + \frac{5}{6}\right) \text{ h} = \frac{47}{6} \text{ h}.$$

$$\bullet d = 5\,839 \text{ km}.$$

La vitesse moyenne v d'un vol Paris-New York est :

$$v = \frac{5\,839}{\frac{47}{6}} = 5\,839 \times \frac{6}{47} \approx 745 \text{ km/h}.$$

$$2. v_{\text{concorde}} = 1\,557 \text{ km/h et } d = 5\,839 \text{ km}.$$

Le temps t pour relier Paris à New York en Concorde vérifie :

$$1\,557 = \frac{5\,839}{t}.$$

$$\text{On en déduit : } t = \frac{5\,839}{1\,557} \approx 3,75 \text{ h}.$$

$$t = 3,75 \text{ h} = 3 \text{ h} + 0,75 \text{ h} = 3 \text{ h} + 0,75 \times 60 \text{ min} = 3 \text{ h } 45 \text{ min}.$$

$$3. v_{\text{concorde}} = 1\,557 \text{ km/h}.$$

Le Concorde parcourt 1 557 km en 1 heure.

$$1\,557 \text{ km} = 1\,557\,000 \text{ m}$$

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 60 \times 60 \text{ s} = 3\,600 \text{ s}.$$

$$v_{\text{concorde}} = \frac{1\,557\,000}{3\,600} = 432,5 \text{ m/s}.$$

La vitesse du son étant de 343 m/s : $v_{\text{concorde}} > v_{\text{son}}$.

Le Concorde se déplaçant plus vite que le son, il méritait bien son nom d'avion supersonique.

$$\textcircled{6} 1. \text{ On utilise la formule : } \text{débit} = \frac{\text{volume}}{\text{temps}}.$$

$$\bullet \text{ Le débit est de } 4 \text{ litres/h}.$$

$$\bullet \text{ Un an} = 365 \text{ jours} = 365 \times 24 \text{ h} = 8\,760 \text{ heures}.$$

$$\text{Le volume } V \text{ d'eau gâchée est tel que : } 4 = \frac{V}{8\,760}.$$

$$\text{On en déduit : } V = 4 \times 8\,760 = 35\,040 \text{ L}.$$

$$\text{De plus } 1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}.$$

$$\text{Soit } V = 35,04 \text{ m}^3.$$

$$2. \text{ L'économie réalisée pourrait être de : } 35,04 \times 2,353 \approx 82,45 \text{ €}.$$

Gagnez
des points !

Convertissez 0,75 h en min.

Rappel

On convertit les km en m,
et 1 h en secondes.

L'astuce du prof

On part de la formule du
débit. Puis on remplace les
valeurs connues en faisant
attention aux unités.

1 Triangles. Parallélogrammes

1 Droites remarquables dans le triangle

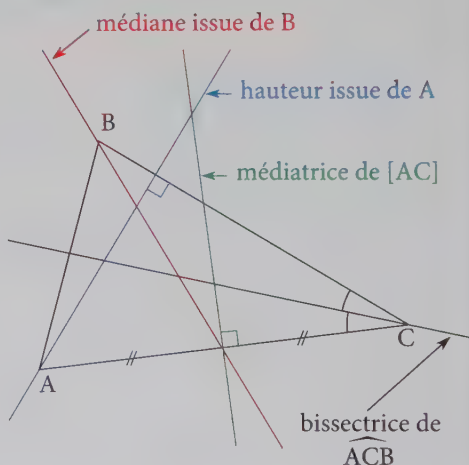
● Une **médiane** est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet. Les trois médianes sont concourantes en un point G, appelé **centre de gravité** du triangle.

● Une **hauteur** est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Les hauteurs sont concourantes en un point H, appelé **orthocentre** du triangle.

● Les **médiatrices** sont concourantes en un point qui est le **centre du cercle circonscrit** au triangle.

● Les **bissectrices** sont concourantes en un point qui est le **centre du cercle inscrit** dans le triangle.

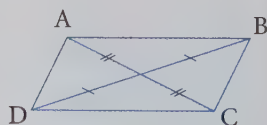


2 Le parallélogramme

● Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

● **Propriété caractéristique**

Ses diagonales se coupent en leur milieu.



Remarque :

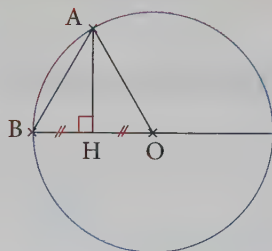
- Un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.
- Le rectangle, le losange et le carré sont des parallélogrammes particuliers.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Démontrer en géométrie

ÉNONCÉ

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, montrez que le triangle ABO est équilatéral.



CORRIGÉ

On procède par étape.

● H est le milieu du segment [OB]. De plus, (AH) est perpendiculaire à [OB]. Donc (AH) est la médiatrice du segment [OB].

● Puisque (AH) est la médiatrice du segment [OB], on a $AB = AO$.

● A et B sont sur le cercle, donc $OB = OA$.

Or, on a montré que $AB = AO$, on en déduit alors que $AB = AO = OB$.

Par conséquent, le triangle AOB a trois côtés de même longueur, c'est un triangle équilatéral.

Rappel

La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par son milieu et qui lui est perpendiculaire.

Rappel

Les points de la médiatrice d'un segment sont situés à égale distance des deux extrémités de ce segment.

2 Démontrer avec les droites remarquables

ÉNONCÉ

Démontrez que les points C, D et C' sont alignés.

CORRIGÉ

Dans le triangle ABC,

● A' est le milieu de [BC], donc la droite (AA') est une médiane.

● B' est le milieu de [AC], donc la droite (BB') est une médiane.

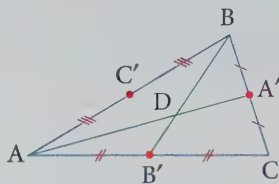
● Les droites (AA') et (BB') sont sécantes en D.

On sait que les médianes d'un triangle sont concourantes.

On en déduit que le point de concours des **trois médianes** est le point D.

● C' étant le milieu de [AB], (CC') est la troisième médiane de ce triangle. Elle passe donc aussi par D.

On en déduit que C, C' et D sont alignés.



Rappel

Des droites concourantes sont des droites qui n'ont qu'un seul point d'intersection. Les médianes se coupent ici en D.

2 Théorèmes et propriétés principaux

1 Droites des milieux

● Théorème 1

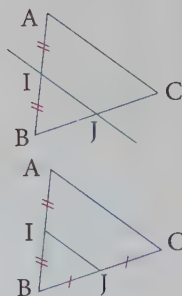
Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, passe par le milieu du troisième côté.

● Théorème 2

Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

De plus, la longueur IJ vaut la moitié de la longueur AC.

En d'autres termes, $IJ = \frac{1}{2}AC$.



2 Théorème de Pythagore. Réciproque et contraposée

a. Théorème

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

b. Réciproque

Si dans un triangle ABC, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors ABC est rectangle en A.

c. Contraposée

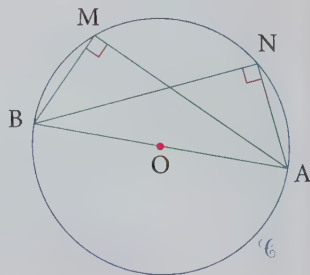
Si dans un triangle ABC, $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A.

3 Cercle et triangle rectangle

● Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB]. Si M est un point de ce cercle, alors le triangle AMB est rectangle en M.

● Réciproquement, si AMB est un triangle rectangle en M, alors M est sur le cercle de diamètre [AB].

En d'autres termes, si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit.



EXERCICES RÉSOLUS

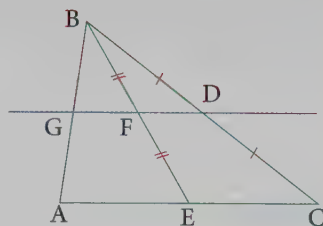
1 Utiliser le théorème des milieux

ÉNONCÉ

La figure ci-contre est composée de deux triangles ABC et ABE. Les points A, E et C sont alignés.

D et F sont les milieux respectifs des segments [BC] et [BE].

Montrez que G est le milieu de [BA].



CORRIGÉ

• Dans le triangle BCE, D est le milieu de [BC] et F est le milieu de [BE].

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième côté.

On en déduit que $(FD) \parallel (EC)$.

• Dans le triangle ABE, F est le milieu de [BE] et (FG) est parallèle à (AE) , puisque $(FD) \parallel (EC)$ d'après ce qui précède.

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté parallèlement à un autre côté, passe par le milieu du troisième côté.

On en déduit que G est le milieu de [AB].

Conseil

N'oubliez pas d'indiquer le triangle dans lequel vous travaillez.

Méthode

Dans cette démonstration, il est nécessaire de travailler d'abord dans le triangle BEC puis dans le triangle ABE de façon à utiliser le fait que $(GF) \parallel (AE)$.

2 Démontrer qu'un triangle est rectangle

ÉNONCÉ

Soit ABC un triangle. Le centre I du cercle circonscrit à ce triangle se situe au milieu de [AB]. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

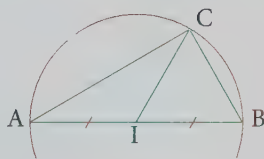
CORRIGÉ

- [AB] est un diamètre du cercle.
- C est un point de ce cercle.

Le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [AB]. On en déduit qu'il est rectangle en C.

Remarque

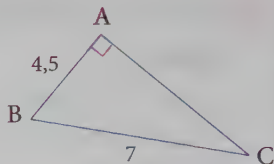
Il faut faire une figure !!



→ Utiliser le théorème de Pythagore

ÉNONCÉ

Calculez une valeur arrondie au dixième de la longueur AC.



MÉTHODE

1. On reconnaît un triangle rectangle dans lequel deux mesures sur trois sont données.
2. On nomme le triangle et on applique le théorème de Pythagore.
3. On remplace les valeurs que l'on connaît, puis on isole la longueur que l'on cherche.
4. On donne la valeur exacte de la longueur cherchée, puis la valeur approchée demandée.

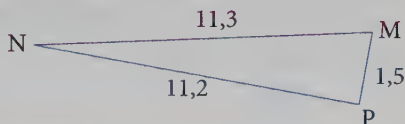
CORRIGÉ

Solution	Commentaires
ABC est bien un triangle rectangle dans lequel on connaît deux longueurs sur trois.	1. Le théorème de Pythagore ne s'applique que dans un triangle rectangle !
Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on écrit : $AB^2 + AC^2 = BC^2$	2. On nomme le triangle et on indique quel théorème on va utiliser.
$4,5^2 + AC^2 = 7^2$ $AC^2 = 49 - 20,25$ $AC^2 = 28,75$	3. On repère l'hypoténuse du triangle rectangle (c'est le plus grand côté, celui qui fait face à l'angle droit) et on écrit que la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.
$AC = \sqrt{28,75}$ (valeur exacte) $AC \approx 5,4$ (valeur approchée)	4. On donne la valeur exacte de AC (ici $\sqrt{28,75}$), puis une valeur approchée au dixième à l'aide de la calculatrice (1 chiffre après la virgule).

→ Utiliser la réciproque (ou contraposée) du théorème de Pythagore

ÉNONCÉ

Le triangle MNP est-il rectangle ?



MÉTHODE

1. On repère le plus grand côté du triangle.
2. On effectue deux calculs séparés :
 - le carré du plus grand côté.
 - la somme des carrés des deux autres côtés.
3. Si les résultats sont égaux, alors la réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure que le triangle est rectangle. Sinon, la contraposée du théorème de Pythagore permet de montrer que le triangle n'est pas rectangle.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
Dans le triangle MNP, [MN] est le plus grand côté.	1. Si le triangle était rectangle, MN serait l'hypoténuse et l'angle droit serait en P.
On calcule : ● $MN^2 = 11,3^2 = 127,69$ ● $NP^2 + MP^2 = 11,2^2 + 1,5^2 = 127,69$	2. Les deux calculs doivent être effectués séparément.
On a donc : $NP^2 + MP^2 = MN^2$ On en déduit, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle MNP est rectangle en P.	3. On n'oublie pas d'indiquer le théorème qui permet de conclure : la contraposée ou la réciproque du théorème de Pythagore.



1 Cochez la ou les réponses correctes.

Sur cette figure, O est le centre du cercle.

1. Le triangle ABC est :

- a) ☐ rectangle b) ☐ isocèle c) ☐ équilatéral

2. Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est :

- a) ☐ environ 2,8 b) ☐ 4 c) ☐ environ 5,7

3. Pour le triangle ABC, la droite (OA) est :

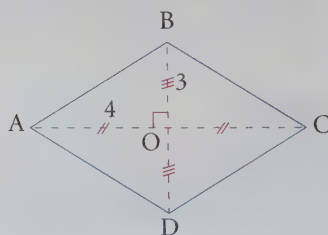
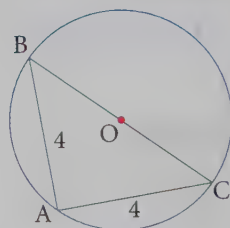
- a) ☐ une médiane b) ☐ une hauteur c) ☐ une médiatrice

4. Un losange est :

- a) ☐ un parallélogramme
b) ☐ un parallélogramme avec un angle droit
c) ☐ un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur

5. Sur la figure ci-contre,

- a) ☐ ABCD est un losange
b) ☐ $AB = 5$
c) ☐ L'aire de ABCD est 24



2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. On peut construire un carré ABCD tel que $AB = 4$ et $BD = 6$.	☐ V ☐ F
2. Un triangle dont les côtés mesurent 3 ; 5 et $\sqrt{8}$ est un triangle rectangle.	☐ V ☐ F
3. Dans un triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J celui de [AC] tel que $IJ = 5$ cm. La longueur AC mesure 7 cm.	☐ V ☐ F
On augmente le côté d'un carré de côté a de 1 cm.	
4. Son périmètre augmente de 4 cm.	☐ V ☐ F
5. Son aire augmente de $(2a + 1) \text{ cm}^2$.	☐ V ☐ F

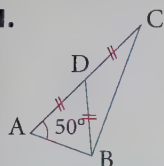
→ Exercices d'entraînement



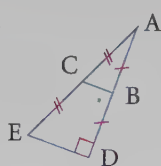
3 Avec les triangles rectangles

Dans chacun des cas suivants, montrez que le triangle ABC est rectangle :

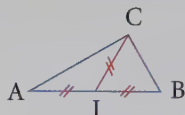
1.



2.

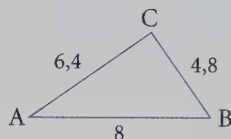


3.



4 Encore un triangle rectangle ?

Le triangle ci-contre est-il rectangle ? Justifiez.



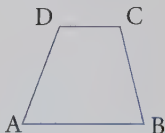
5 Une petite démonstration...

ABCD et ABFE sont des parallélogrammes. Quelle est la nature de DCFE ? Justifiez.

6 Une belle démonstration pour les courageux

Soit un trapèze ABCD. d est la perpendiculaire à (BC) passant par A et d' , la perpendiculaire à (AC) passant par B. d et d' se coupent en K. Démontrez que le triangle DCK est un triangle rectangle.

Indication : Dans le triangle ABC, il y a des hauteurs...



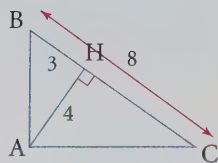
→ Vers le Brevet



7 Rectangle ou non ?

1. Calculez AB, puis AC.

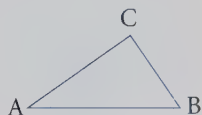
2. Le triangle ABC est-il rectangle ?



8 Où est le point M ?

1. Placez un point M tel que les triangles ACM et BCM soient rectangles en M.

2. Montrez que M est un point de [AB].



→ QCM

1. ● Le triangle ABC est isocèle en A car $AB = AC$.

● [BC] est un diamètre du cercle et A est un point de ce cercle. On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.

Réponses : a) rectangle et b) isocèle.

2. Le triangle ABC étant rectangle en A, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$4^2 + 4^2 = BC^2$$

$$BC^2 = 16 + 16$$

$$BC^2 = 32$$

$$BC = \sqrt{32}.$$

On en déduit que le rayon est égal à $OA = BC : 2 = \sqrt{32} : 2 \approx 2,8$.

Réponse : a) environ 2,8.

3. ● La droite (OA) passe par A et par le milieu de [BC], on en déduit que c'est une médiane.

● Le triangle ABC est isocèle en A et O est le milieu de [BC], donc $(OA) \perp (BC)$. On en déduit que (OA) est une hauteur.

● (OA) passe par le milieu de [BC] et est perpendiculaire à (BC), on en déduit que (OA) est une médiatrice.

Réponses : a) une médiane, b) une hauteur et c) une médiatrice.

4. ● Un losange est un parallélogramme.

● Dans un losange, les côtés ne sont pas forcément perpendiculaires.

● Un losange est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur.

Réponses : a) un parallélogramme

et c) un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur.

Rappel

Le cercle circonscrit est le cercle qui passe par les 3 sommets du triangle. Son rayon est donné ici par la longueur [OA].

Gagnez des points !

- Un losange possède toutes les propriétés du parallélogramme.
- Si deux côtés consécutifs dans un parallélogramme sont de même longueur, alors ses quatre côtés sont de même longueur.

5. ● D'après la figure, le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. C'est donc un parallélogramme. De plus, ses diagonales sont perpendiculaires, c'est donc un losange.

● Dans le triangle AOB rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$4^2 + 3^2 = AB^2$$

$$AB^2 = 16 + 9$$

$$AB^2 = 25$$

$$AB = \sqrt{25}$$

$$AB = 5.$$

● Le losange est constitué de 4 triangles rectangles de même aire : $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.
On en déduit que son aire est $4 \times 6 = 24$.

Réponses : a) ABCD est un losange, b) AB = 5 et c) l'aire de ABCD est 24.

2 1. Faux. Si un tel carré existait, on aurait un carré ABCD comme celui représenté ci-contre :

Le triangle ABD serait rectangle et isocèle en A avec AB = AD = 4 et BD = 6.

Or :

● $BD^2 = 6^2 = 36$.

● $AB^2 + AD^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$.

On a alors $BD^2 \neq AB^2 + AD^2$, le théorème de Pythagore n'est pas vérifié, donc le triangle n'est pas rectangle. On en déduit qu'un tel carré n'existe pas !

2. Faux. 5 étant la plus grande longueur, si le triangle est rectangle, c'est la longueur de l'hypoténuse.

Or :

● $5^2 = 25$.

● $3^2 + (\sqrt{8})^2 = 9 + 8 = 17$.

Et $3^2 + (\sqrt{8})^2 \neq 5^2$.

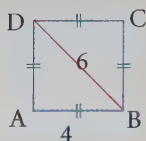
D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

Rappel

Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Gagnez des points !

Quand on utilise le théorème de Pythagore, on le cite et on nomme le triangle dans lequel on l'utilise.



Remarque

La propriété utilisée ici est la contraposée du théorème de Pythagore.

3. Faux. La longueur du segment joignant les deux milieux des côtés d'un triangle est égale à la moitié du troisième côté. Or 5 n'est pas la moitié de 7. En réalité, $AC = 2 \times IJ = 10$ cm.

4. Vrai. Le périmètre d'un carré de côté a est $4a$.

Le périmètre d'un carré de côté $a + 1$ est

$$4(a + 1) = 4a + 4.$$

Le périmètre augmente donc bien de 4 cm.

5. Vrai. L'aire d'un carré de côté a est a^2 .

L'aire d'un carré de côté $a + 1$ est

$$(a + 1)^2 = (a + 1)(a + 1) = a^2 + a + a + 1 = a^2 + 2a + 1.$$

L'aire augmente donc bien de $(2a + 1)$ cm².

Rappel

On peut utiliser l'égalité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

→ Exercices d'entraînement

③ 1. Méthode : calculons les angles du triangle ABC.

● On se place dans le triangle ADB isocèle en D.

Les angles à la base sont égaux, donc $\widehat{A} = \widehat{B} = 50^\circ$.

De plus, la somme des angles dans un triangle vaut 180° ,

$$\text{donc } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D} = 180.$$

Par conséquent, $50 + 50 + \widehat{D} = 180$, soit $\widehat{D} = 80^\circ$.

● L'angle $\widehat{ADC}$ est plat. On en déduit que $\widehat{CDB} = 180 - 80 = 100^\circ$.

● On se place dans le triangle BDC isocèle en D.

$$\widehat{D} = 100^\circ \text{ et les angles à la base sont égaux, donc } \widehat{B} = \frac{180 - 100}{2} = 40^\circ.$$

● Dans le triangle ABC, $\widehat{B} = 50 + 40 = 90^\circ$. Donc le triangle BAC est rectangle en B.

2. Méthode : montrons que (BC) est perpendiculaire à (AB).

● Dans le triangle ADE, B est le milieu de [AD] et C est le milieu de [AE].

D'après le théorème des milieux, si une droite passe par les milieux de deux côtés, elle est parallèle au troisième côté. Donc $(BC) \parallel (DE)$.

● On a $(BC) \parallel (DE)$ et $(DE) \perp (AD)$.

Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Donc $(BC) \perp (AD)$, d'où $(BC) \perp (AB)$. Le triangle ABC est rectangle en B.

Gagnez des points !

Pour montrer que le triangle ABC est rectangle, on montre que

$$\widehat{ABC} = 90^\circ.$$

3. On a, d'après la figure, $IA = IB = IC$. On en déduit que les points A, C et B sont sur un même cercle de centre I. $[AB]$ est un diamètre de ce cercle et C un point du cercle. On en déduit que le triangle ABC est un triangle rectangle en C.

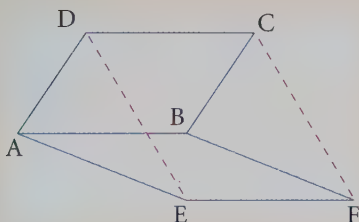
4 On connaît les trois longueurs du triangle ABC. $[AB]$ est le plus grand côté, on écrit :

- $AB^2 = 8^2 = 64$.

- $CA^2 + CB^2 = 6,4^2 + 4,8^2 = 64$

On en déduit que $CA^2 + CB^2 = AB^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

5



Hypothèses

- ABCD est un parallélogramme.
- ABFE est un parallélogramme.

Démonstration

- Un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles et de même longueur.

– ABCD est un parallélogramme. On en déduit que $(AB) \parallel (DC)$ et $AB = DC$.

– ABFE est un parallélogramme. On en déduit que $(AB) \parallel (EF)$ et $AB = EF$.

- Si deux droites sont parallèles à la même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

$(AB) \parallel (DC)$ et $(AB) \parallel (EF)$, donc $(DC) \parallel (EF)$.

De plus, $AB = DC$ et $AB = EF$, donc $DC = EF$.

- Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

On en déduit que DCFE est un parallélogramme.

L'astuce du prof

Si dans un triangle, la médiane issue d'un sommet a pour longueur la moitié du côté opposé, alors le triangle est rectangle.

Méthode

Il semblerait que DCFE soit un parallélogramme. La figure est importante dans une démonstration. On prendra soin de ne pas tracer des parallélogrammes particuliers. N'oubliez pas les codages. On dessine d'une autre couleur la figure qui nous intéresse.

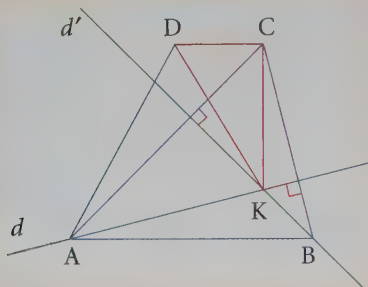
Conseil

On écrit les hypothèses. C'est ce que l'on sait : elles sont données par l'énoncé.

Méthode

Avant de rédiger la démonstration, on fait le point sur les données. Le but est de démontrer que DCFE a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

6



Hypothèses

- ABCD est un trapèze.
- $d \perp (BC)$.
- $d' \perp (AC)$.

Démonstration

Dans le triangle ABC,

- $d \perp (BC)$
- $d' \perp (AC)$
- d et d' se coupent en K.

On en déduit que K est le point de concours des hauteurs du triangle ABC.

La droite (CK) est donc la troisième hauteur car elle passe par le sommet C et par K.

Une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé. On en déduit que $(CK) \perp (AB)$.

- $(CK) \perp (AB)$.
- $(AB) \parallel (CD)$ car ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD).

Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

On en déduit que $(CK) \perp (CD)$ et que le triangle DCK est rectangle en C.

→ Vers le Brevet

7 1. • Dans le triangle ABH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on écrit :

$$BH^2 + AH^2 = AB^2$$

Méthode

La figure est très importante dans une démonstration. On trace les droites avec soin. Il est important de visualiser ce que l'on demande de démontrer.

Conseil

On écrit les hypothèses. C'est ce que l'on sait.

Méthode

Première partie de la démonstration : on commence par montrer que K est l'orthocentre du triangle ABC.

Méthode

Deuxième partie : on montre que (CK) est perpendiculaire à (AB).

Méthode

Troisième partie : on montre que (CK) est perpendiculaire à (CD).

$$3^2 + 4^2 = AB^2$$

$$AB^2 = 9 + 16$$

$$AB^2 = 25$$

$$AB = \sqrt{25} = 5.$$

● Dans le triangle AHC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$

$$4^2 + 5^2 = AC^2 \text{ car } HC = 8 - 3 = 5$$

$$AC^2 = 16 + 25$$

$$AC^2 = 41$$

$$AC = \sqrt{41}.$$

2. Dans le triangle ABC, [BC] est le plus grand côté car

$5 < \sqrt{41} < 8$, on calcule alors :

$$\bullet BC^2 = 8^2 = 64.$$

$$\bullet AB^2 + AC^2 = 5^2 + (\sqrt{41})^2 = 25 + 41 = 66 \neq 64.$$

On en déduit que le triangle n'est pas rectangle (d'après la contraposée du théorème de Pythagore).

8 1. ● Pour que le triangle ACM soit rectangle en M, il doit se trouver sur le cercle de diamètre [AC].

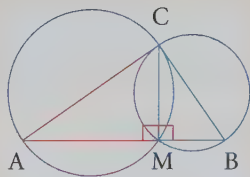
● Pour que le triangle BCM soit rectangle en M, il doit se trouver sur le cercle de diamètre [BC].

● Le point M doit donc se trouver à la fois sur le cercle de diamètre [AC] et sur le cercle de diamètre [BC].

D'après la figure, le point M se trouve sur le segment [AB].

2. Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.

La droite (CM) est perpendiculaire à (AM) et (BM), donc (AM) et (BM) sont parallèles. Comme elles ont un point en commun, on en déduit qu'elles sont confondues et par suite, les points A, M et B sont alignés.



Gagnez
des points !

Dans un triangle rectangle, quand on connaît deux longueurs, on peut utiliser le théorème de Pythagore.

Piège à éviter

Il ne faut surtout pas utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle ABC pour calculer AC car on ne sait pas s'il est rectangle. C'est justement ce que l'on demande dans la question suivante.

Gagnez
des points !

On pouvait montrer que

$$\widehat{\text{angle } \text{AMB}} = 180^\circ.$$

En effet,

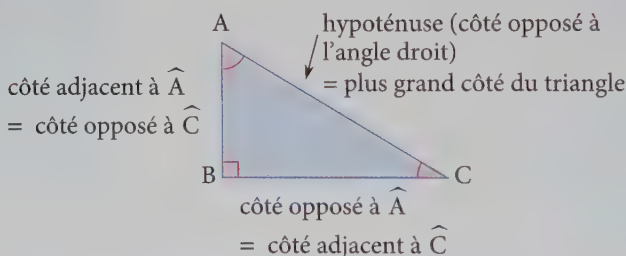
$$\begin{aligned} \widehat{\text{angle } \text{AMB}} &= \widehat{\text{angle } \text{AMC}} + \widehat{\text{angle } \text{CMB}} \\ &= 90 + 90 = 180. \end{aligned}$$

Trigonométrie dans le triangle rectangle

1 Définitions et propriétés

1 Vocabulaire

- Soit ABC un triangle rectangle en B.



2 Formules de trigonométrie

Dans un triangle rectangle ABC où x est l'un des deux angles aigus, on a :

$$\begin{aligned} \bullet \cos x &= \frac{\text{côté adjacent à } x}{\text{hypoténuse}} & \bullet \sin x &= \frac{\text{côté opposé à } x}{\text{hypoténuse}} \\ \bullet \tan x &= \frac{\text{côté opposé à } x}{\text{côté adjacent à } x} \end{aligned}$$

Remarques :

- Le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu sont des rapports de longueurs. C'est pourquoi ce sont des nombres positifs.
- L'hypoténuse étant le plus grand côté du triangle, le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres inférieurs à 1.

3 Autres relations trigonométriques

- Dans le cas de deux angles complémentaires (dont la somme vaut 90°), le cosinus de l'un est égal au sinus de l'autre.
- Pour toute valeur de x , on peut écrire : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.
- x étant un angle aigu : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

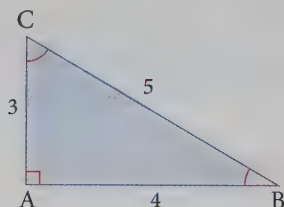
EXERCICE RÉSOLU

► Manipuler les formules trigonométriques

ÉNONCÉ

Soit ABC un triangle rectangle en A.
(La figure n'est pas tracée en taille réelle).

1. a) Calculez $\cos \widehat{C}$, $\sin \widehat{C}$.
- b) Déduisez-en la valeur exacte de $\tan \widehat{C}$.
2. a) Calculez $\sin \widehat{B}$.
- b) Quel résultat retrouvez-vous ? Justifiez.
3. Calculez $\tan \widehat{B}$.



CORRIGÉ

Le triangle ABC étant rectangle (en A), on peut lui appliquer les relations de trigonométrie.

$$1. a) \bullet \cos \widehat{C} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{C}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$\bullet \sin \widehat{C} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{C}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

$$b) \text{ On utilise la relation } \tan \widehat{C} = \frac{\sin \widehat{C}}{\cos \widehat{C}}, \text{ soit } \tan \widehat{C} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$2. a) \sin \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$b) \bullet \text{ On retrouve le résultat de la question 1.a) : } \sin \widehat{B} = \cos \widehat{C}.$$

• Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

$$\text{Comme } \widehat{A} = 90^\circ, \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

$\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont donc deux angles complémentaires.

Le sinus de l'un est alors égal au cosinus de l'autre :

$$\sin \widehat{B} = \cos \widehat{C}.$$

$$3. \tan \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à } \widehat{B}} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Conseil

- Le côté adjacent à $\widehat{C}$ contient la lettre C !
- L'hypoténuse fait face à l'angle droit.
- Le côté opposé à $\widehat{C}$ lui fait face.

Rappel

La somme des angles d'un triangle vaut 180° .

Rappel

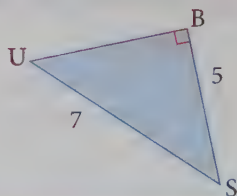
On aurait de même :

$$\sin \widehat{C} = \cos \widehat{B}.$$

→ Dans un triangle rectangle, calculer la mesure d'un angle connaissant deux longueurs

ÉNONCÉ

Dans le triangle BUS rectangle en B, calculez une valeur approchée de la mesure de $\widehat{U}$ au dixième près.
(La figure n'est pas tracée en taille réelle).



MÉTHODE

1. On repère l'angle que l'on note α dont on cherche une mesure. Ensuite, on identifie la nature des deux côtés connus (hypoténuse, côté adjacent ou opposé).
2. On choisit, parmi les formules du cosinus, du sinus et de la tangente de α , celle qui utilise les deux côtés identifiés.
3. On remplace dans la relation choisie les données par leurs valeurs.
4. En utilisant la fonction inverse ($\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ ou $\tan^{-1}$) de la calculatrice, on déduit une valeur approchée (parfois exacte) de l'angle α .

CORRIGÉ

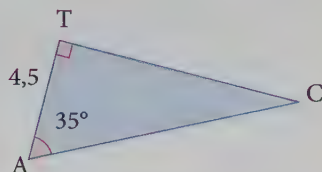
Solution	Commentaires
Dans le triangle BUS rectangle en B, on cherche à déterminer la mesure de $\widehat{U}$. On connaît les longueurs de l'hypoténuse [US] et du côté opposé à $\widehat{U}$, [BS], valeurs que l'on lit sur la figure.	1. On cite le triangle rectangle utilisé puis on identifie les deux longueurs connues par rapport à l'angle dont on cherche une mesure.
La formule mettant en relation hypoténuse et côté opposé est : $\sin \widehat{U} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{U}}{\text{hypoténuse}}$	2. Parmi les formules de trigonométrie, on cherche celle qui met en lien le côté opposé et l'hypoténuse : c'est le sinus.
$\sin \widehat{U} = \frac{BS}{US} = \frac{5}{7}.$	3. On calcule la valeur du sinus en remplaçant les deux longueurs par leurs valeurs. On doit toujours, pour un sinus, trouver un résultat compris entre 0 et 1 !
On conclut $\widehat{U} = \sin^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$. À la calculatrice, on obtient $\widehat{U} \approx 45,6^\circ$.	4. La calculatrice étant bien en mode degrés, on détermine une valeur approchée de l'angle en respectant l'approximation demandée.

→ Dans un triangle rectangle, calculer une longueur connaissant un angle et une longueur

ÉNONCÉ

Dans le triangle TAC rectangle en T, calculez la longueur TC au centième près.

(La figure n'est pas tracée en taille réelle).



MÉTHODE

1. On identifie l'angle connu que l'on note α et la nature du côté dont la longueur est donnée. Puis on repère le côté à déterminer.
2. On choisit, parmi les formules du cosinus, du sinus et de la tangente de α , celle qui met en relation les deux côtés identifiés.
3. On remplace, dans la relation choisie, les données par leurs valeurs.
4. On calcule la longueur cherchée à l'aide d'un produit en croix.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
Dans le triangle TAC rectangle en T, on connaît la mesure de $\widehat{A}$ et de son côté adjacent [AT] que l'on lit sur la figure. On cherche à déterminer la longueur de [TC], côté opposé à $\widehat{A}$.	1. On identifie la mesure de l'angle connu, la longueur donnée, puis la longueur à déterminer.
La formule mettant en relation côté adjacent et côté opposé est : $\tan \widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{A}}{\text{côté adjacent à } \widehat{A}}$	2. Parmi les formules de trigonométrie, on cherche celle qui met en lien le côté opposé et le côté adjacent : c'est la tangente.
$\tan \widehat{A} = \frac{TC}{AT}, \text{ soit } \tan 35^\circ = \frac{TC}{4,5}$	3. On écrit la formule utilisée en remplaçant les valeurs connues : un angle et une longueur.
Par produit en croix, on écrit : $TC = 4,5 \times \tan 35^\circ; \text{ soit } TC \approx 3,15.$	4. La calculatrice étant bien en mode degrés, on détermine la longueur cherchée en respectant l'approximation demandée.



1 Cochez la ou les réponses correctes.

Soit les triangles ABC et BHC ci-contre.

1. Ce côté est une hypoténuse :

a) ☐ [AB]

b) ☐ [BC]

c) ☐ [AC]

2. $\sin \hat{A}$ est égal à :

a) ☐ $\frac{BH}{AB}$

b) ☐ $\frac{BC}{AC}$

c) ☐ $\frac{BC}{AB}$

3. $\tan \hat{C}$ est égal à :

a) ☐ $\frac{BC}{AC}$

b) ☐ $\frac{AB}{AC}$

c) ☐ $\frac{AB}{BC}$

4. $\frac{AB}{AC}$ est égal à :

a) ☐ $\cos \hat{A}$

b) ☐ $\sin \hat{A}$

c) ☐ $\sin \hat{C}$

5. $\tan \hat{A}$ est égal à :

a) ☐ $\tan \hat{C}$

b) ☐ $\frac{1}{\tan \hat{C}}$

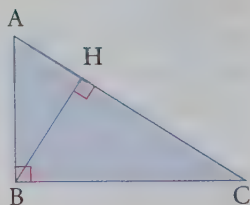
c) ☐ $-\tan \hat{C}$

6. AH est égal à :

a) ☐ $AB \times \cos \hat{A}$

b) ☐ $\frac{AB}{\cos \hat{A}}$

c) ☐ $\frac{\cos \hat{A}}{AB}$



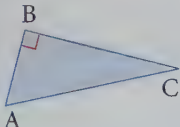
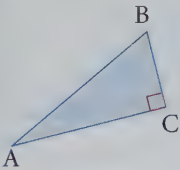
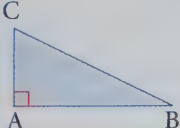
2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. $\cos 20^\circ = \sin 60^\circ$.	☐ V ☐ F
2. Pour tout x compris entre 0 et 90° : $\tan x = \frac{\cos x}{\sin x}$.	☐ V ☐ F
3. Pour tout x : $\cos x + \sin x = 1$.	☐ V ☐ F
Dans un triangle ABC rectangle isocèle en A :	
4. $\sin \hat{B} = \cos \hat{B}$.	☐ V ☐ F
5. $\sin \hat{C} \approx 0,707$.	☐ V ☐ F
6. $\tan \hat{C} = 1$.	☐ V ☐ F

→ Exercices d'entraînement



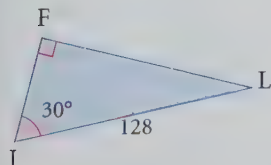
3 Savoir identifier les côtés d'un triangle

	côté opposé à	côté adjacent à	côté opposé à	côté adjacent à	hypoténuse
Triangle T_1 	$\hat{A} :$	$\hat{A} :$	$\hat{C} :$	$\hat{C} :$	
Triangle T_2 	$\hat{A} :$	$\hat{A} :$	$\hat{B} :$	$\hat{B} :$	
Triangle T_3 	$\hat{C} :$	$\hat{C} :$	$\hat{B} :$	$\hat{B} :$	

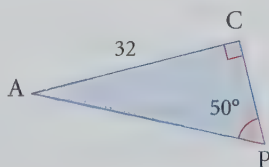
4 Calculs de longueurs

Les longueurs seront calculées à 0,1 près.

1. Dans le triangle FIL,



2. Dans le triangle CAP,



5 À vos calculatrices !

1. Calculez une valeur approchée à 10^{-2} près de :

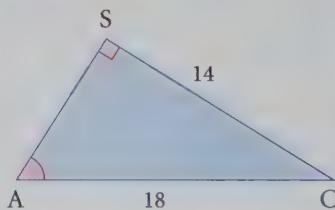
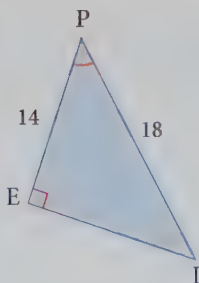
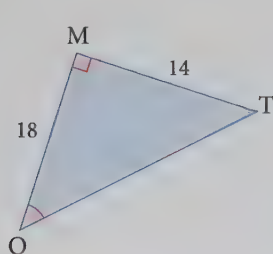
- $\cos 43^\circ$ • $\sin 68^\circ$ • $\tan 80^\circ$

2. Déterminez une valeur approchée au degré près de l'angle α tel que :

- $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ • $\sin \alpha = 0,7$ • $\tan \alpha = 4$

6 Angles sous toutes leurs formes

Calculez une mesure (au degré près) de l'angle aigu représenté dans les triangles MOT, PIE et SAC.



7 Tout est lié !

α est un angle aigu tel que $\cos \alpha = 0,3$.

1. Calculez au millième près une valeur approchée de $\sin \alpha$.
2. Déduisez-en $\tan \alpha$.

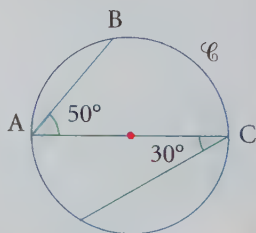
8 Une égalité pas banale

Montrez que pour tout nombre a : $(\cos a + \sin a)^2 + (\cos a - \sin a)^2 = 2$.

9 Calcul de périmètre

Soit $\mathcal{C}$ le cercle dont le diamètre $[AC]$ mesure 10 cm.

1. Justifiez que les triangles ABC et ACD sont rectangles.
2. Calculez le périmètre $\mathcal{P}$ du quadrilatère ABCD (les longueurs seront arrondies à 0,1 près).



→ Vers le Brevet



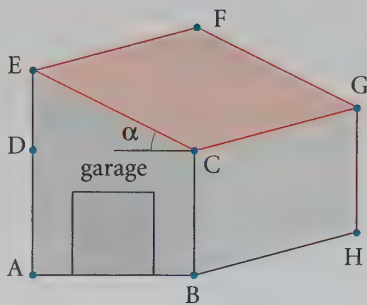
10 Bricolage et trigonométrie

Jacques construit un garage selon le croquis proposé.

De plus, $AB = 4,5$ m, $DE = 1,70$ m et $BH = 8$ m.

1. Jacques, soucieux de son environnement, souhaite installer sur le toit de son garage des panneaux solaires. Pour que ceux-ci s'intègrent harmonieusement dans sa construction, l'inclinaison de la toiture doit être située entre 20° et 50° . Jacques sera-t-il satisfait ?

2. Quelle surface de panneaux solaires Jacques peut-il espérer installer ?



11 Des mathématiques pures

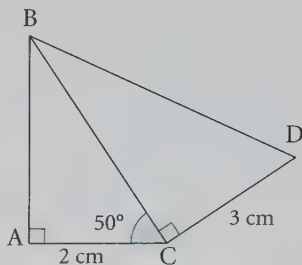
Les longueurs seront calculées au millimètre près.

1. Montrez que $BC \approx 3,1$ cm.

2. Calculez AB et BD.

3. a) Quelle est la valeur de $\tan \widehat{CDB}$ (à 10^{-3} près) ?

b) Déduisez-en la valeur arrondie au degré de $\widehat{CDB}$.



→ QCM

1. ● Dans le triangle ABH rectangle en H, [AB] est l'hypoténuse.

● Dans le triangle BHC rectangle en H, [BC] est l'hypoténuse.

● Dans le triangle ABC rectangle en B, [AC] est l'hypoténuse.

Réponses : a) [AB], b) [BC] et c) [AC].

2. ● Dans le triangle ABH rectangle en H,

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BH}{AB}.$$

● Dans le triangle ABC rectangle en B,

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}.$$

Réponses : a) $\frac{BH}{AB}$ et b) $\frac{BC}{AC}$.

3. Dans le triangle ABC rectangle en B,

$$\tan \hat{C} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{C}}{\text{côté adjacent à } \hat{C}} = \frac{AB}{BC}.$$

Réponse : c) $\frac{AB}{BC}$.

4. Dans le triangle ABC rectangle en B, [AC] est l'hypoténuse.

● Relativement à l'angle $\hat{A}$, [AB] est le côté adjacent.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}. \text{ C'est la définition de } \cos \hat{A}.$$

● Relativement à l'angle $\hat{C}$, [AB] est le côté opposé.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{C}}{\text{hypoténuse}}. \text{ C'est la définition de } \sin \hat{C}.$$

Réponses : a) $\cos \hat{A}$ et c) $\sin \hat{C}$.

Remarque

Les côtés n'ont pas le même « rôle » selon le triangle dans lequel on se place.

Gagnez des points !

Précisez bien dans quel triangle rectangle vous travaillez, surtout quand il y en a plusieurs.

Remarque

Les côtés adjacent et opposé sont différents selon l'angle avec lequel on travaille.

5. Dans le triangle ABC rectangle en B,

$$\bullet \tan \widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{A}}{\text{côté adjacent à } \widehat{A}} = \frac{BC}{AB}.$$

$$\bullet \tan \widehat{C} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{C}}{\text{côté adjacent à } \widehat{C}} = \frac{AB}{BC}.$$

$\frac{BC}{AB}$ et $\frac{AB}{BC}$ sont deux fractions inverses. Soit $\tan \widehat{A} = \frac{1}{\tan \widehat{C}}$.

Réponse : **b)** $\frac{1}{\tan \widehat{C}}$.

6. Dans le triangle ABH rectangle en H,

$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AH}{AB}.$$

Avec le produit en croix, il vient : $AH = AB \times \cos \widehat{A}$.

Réponse : **a)** $AB \times \cos \widehat{A}$.

2 1. Faux. $20^\circ + 60^\circ = 80^\circ \neq 90^\circ$. Pour que le sinus d'un angle soit égal au cosinus de l'autre, les deux angles doivent être complémentaires.

2. Faux. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

3. Faux. C'est $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

4. Vrai. Dans le triangle ABC rectangle en $\widehat{A}$,

$$\bullet \sin \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}.$$

$$\bullet \cos \widehat{B} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}.$$

Le triangle ABC étant isocèle en A : $AC = AB$.

Par conséquent $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC}$. D'où $\sin \widehat{B} = \cos \widehat{B}$.

Rappel

$\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont
deux nombres inverses,
comme c et $\frac{1}{c}$.

L'astuce du prof

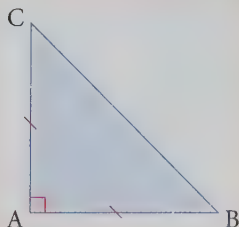
Lorsque vous travaillez
avec des quotients,
pensez à utiliser
le produit en croix.

Rappel

Deux angles sont
complémentaires quand
leur somme vaut 90° .

L'astuce du prof

Il est indispensable de faire
une figure... même si
elle n'est pas demandée.



5. Vrai. Dans un triangle, la somme des angles vaut 180° , donc

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

Le triangle ABC est rectangle en A : $\widehat{A} = 90^\circ$.

Le triangle ABC est isocèle en A : $\widehat{B} = \widehat{C}$.

On obtient : $90 + 2\widehat{C} = 180$

$$2\widehat{C} = 180 - 90 = 90$$

$$\widehat{C} = \frac{90}{2}. \text{ Soit } \widehat{C} = 45^\circ.$$

À la calculatrice, $\sin \widehat{C} = \sin 45^\circ \approx 0,707$.

6. Vrai. Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\tan \widehat{C} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{C}}{\text{côté adjacent à } \widehat{C}} = \frac{AB}{AC}.$$

Le triangle ABC étant isocèle en A : $AB = AC$. D'où $\tan \widehat{C} = 1$.

Piège à éviter
Vérifiez que
votre calculatrice
est en mode degrés.

→ Exercices d'entraînement

3

	côté opposé à	côté adjacent à	côté opposé à	côté adjacent à	hypo- ténuse
Triangle T_1	$\widehat{A} :$ [BC]	$\widehat{A} :$ [AB]	$\widehat{C} :$ [AB]	$\widehat{C} :$ [CB]	[AC]
Triangle T_2	$\widehat{A} :$ [BC]	$\widehat{A} :$ [AC]	$\widehat{B} :$ [AC]	$\widehat{B} :$ [BC]	[AB]
Triangle T_3	$\widehat{C} :$ [AB]	$\widehat{C} :$ [CA]	$\widehat{B} :$ [AC]	$\widehat{B} :$ [BA]	[CB]

L'astuce du prof

- Le côté opposé à $\widehat{A}$ s'écrit avec les deux autres lettres (B et C).
- Le côté opposé à $\widehat{C}$ s'écrit avec les deux autres lettres (A et B), ...

Remarque

- Le côté adjacent à $\widehat{B}$ s'écrit avec un B.
- Le côté adjacent à $\widehat{C}$ s'écrit avec un C, ...

L'astuce du prof

L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. Elle ne dépend pas de l'angle où on se place, contrairement aux côtés opposé et adjacent.

4 1. Dans le triangle FIL rectangle en F, on connaît les mesures de $\widehat{I}$ et de l'hypoténuse [IL], valeurs que l'on lit sur la figure.

● Calcul de FL

[FL] est le côté opposé à $\widehat{I}$.

Le quotient mettant en lien côté opposé et hypoténuse est le sinus.

$$\sin \widehat{I} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{I}}{\text{hypoténuse}} = \frac{FL}{IL}.$$

$$\sin 30^\circ = \frac{FL}{128}.$$

Avec le produit en croix, on obtient : $FL = 128 \times \sin 30^\circ$

$$FL = 64.$$

● Calcul de IF

[IF] est le côté adjacent à $\widehat{I}$.

Le quotient mettant en lien côté adjacent et hypoténuse est le cosinus.

$$\cos \widehat{I} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{I}}{\text{hypoténuse}} = \frac{IF}{IL}.$$

$$\cos 30^\circ = \frac{IF}{128}.$$

Avec le produit en croix, on obtient : $IF = 128 \times \cos 30^\circ$.

$$IF \approx 110,9.$$

L'astuce du prof

On fait le bilan des données pour choisir si on utilise cos, sin ou tan.

Remarque

Quand on connaît 2 longueurs sur 3 dans un triangle rectangle, on peut aussi calculer la longueur manquante avec le théorème de Pythagore.

2. Dans le triangle CAP rectangle en C, on connaît les mesures de $\widehat{P}$ et son côté opposé [AC] indiquées sur la figure.

● Calcul de PC

[PC] est le côté adjacent à $\widehat{P}$.

Le quotient mettant en lien côté opposé et côté adjacent est la tangente.

$$\tan \widehat{P} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{P}}{\text{côté adjacent à } \widehat{P}} = \frac{AC}{PC}$$

$$\tan 50^\circ = \frac{32}{PC}.$$

Par produit, on obtient : $PC \times \tan 50^\circ = 32$.

$$PC = \frac{32}{\tan 50^\circ}$$

$$PC \approx 26,9.$$

● Calcul de AP

[AP] est l'hypoténuse.

Le quotient mettant en lien côté opposé et hypoténuse est le sinus.

$$\sin \widehat{P} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{P}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AP}.$$

$$\sin 50^\circ = \frac{32}{AP}.$$

Par produit, on obtient : $AP \times \sin 50^\circ = 32.$

$$AP = \frac{32}{\sin 50^\circ}.$$

$$AP \approx 41,8.$$

5 1. À la calculatrice, on obtient :

$$\bullet \cos 43^\circ \approx 0,73$$

$$\bullet \sin 68^\circ \approx 0,93$$

$$\bullet \tan 80^\circ \approx 5,67$$

$$2. \bullet \cos \alpha = \frac{3}{7}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$\alpha \approx 65^\circ.$$

$$\bullet \sin \alpha = 0,7$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0,7)$$

$$\alpha \approx 44^\circ.$$

$$\bullet \tan \alpha = 4$$

$$\alpha = \tan^{-1}(4)$$

$$\alpha \approx 76^\circ.$$

6 ● Dans le triangle MOT rectangle en M, on connaît les mesures du côté opposé [MT] et du côté adjacent [OM] à l'angle $\widehat{O}$.

L'astuce du prof

Pour apprendre ses formules de trigonométrie, on peut retenir le « mot » :

SOH CAH TOA

$$S = \frac{O}{H} \text{ pour}$$

$$\text{Sinus} = \frac{\text{côté Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$C = \frac{A}{H} \text{ pour}$$

$$\text{Cosinus} = \frac{\text{côté Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$T = \frac{O}{A} \text{ pour}$$

$$\text{Tangente} = \frac{\text{côté Opposé}}{\text{côté Adjacent}}$$

Piège à éviter

Vérifiez que votre calculatrice est en mode degrés.

Gagnez des points !

On trouve $\alpha = 64,6\dots$ De 0 à 4, on arrondit en dessous.

De 5 à 9, on arrondit au-dessus.

Méthode

On trouve $\alpha = 44,4\dots$

On arrondit à 44 !

Aussi, on utilise la tangente.

$$\tan \widehat{O} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{O}}{\text{côté adjacent à } \widehat{O}} = \frac{MT}{OM} = \frac{14}{18} = \frac{2 \times 7}{2 \times 9} = \frac{7}{9}.$$

On en déduit : $\widehat{O} = \tan^{-1}\left(\frac{7}{9}\right)$.

$$\widehat{O} \approx 38^\circ.$$

• Dans le triangle PIE rectangle en E, on connaît les longueurs de l'hypoténuse, [PI], et du côté adjacent à $\widehat{P}$, [PE].

Aussi on utilise le cosinus.

$$\cos \widehat{P} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{P}}{\text{hypoténuse}} = \frac{PE}{PI} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}.$$

On en déduit : $\widehat{P} = \cos^{-1}\left(\frac{7}{9}\right)$.

$$\widehat{P} \approx 39^\circ.$$

• Dans le triangle SAC rectangle en S, on connaît les longueurs de l'hypoténuse, [AC] et du côté opposé à l'angle $\widehat{A}$, [SC].

Aussi, on utilise le sinus.

$$\sin \widehat{A} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}} = \frac{SC}{AC} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}.$$

On en déduit : $\widehat{A} = \sin^{-1}\left(\frac{7}{9}\right)$.

$$\widehat{A} \approx 51^\circ.$$

7 1. On utilise la relation $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$.

Avec $\cos \alpha = 0,3$, on obtient : $0,3^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$.

Soit $(\sin \alpha)^2 = 1 - 0,3^2$

$$(\sin \alpha)^2 = 0,91$$

$$\sin \alpha = \sqrt{0,91} \text{ ou } \sin \alpha = -\sqrt{0,91}.$$

Mais comme $\sin \alpha$ est un nombre compris entre 0 et 1, on en conclut que :

$$\sin \alpha = \sqrt{0,91},$$

soit $\sin \alpha \approx 0,954$ (valeur arrondie au millièmè).

Rappel

$X^2 = a$ admet
deux solutions :

$$X = \sqrt{a} \text{ et }$$

$$X = -\sqrt{a}.$$

2. Avec la relation $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, on déduit :

$$\tan \alpha \approx \frac{0,954}{0,3}$$

$$\tan \alpha \approx 3,18.$$

8 On développe l'expression :

$$(\cos a + \sin a)^2 + (\cos a - \sin a)^2$$

$$= [(\cos a)^2 + 2 \times \cos a \times \sin a + (\sin a)^2] + [(\cos a)^2 - 2 \times \cos a \times \sin a + (\sin a)^2]$$

$$= (\cos a)^2 + 2 \times \cos a \times \sin a + (\sin a)^2 + (\cos a)^2 - 2 \times \cos a \times \sin a + (\sin a)^2$$

$$= \underbrace{(\cos a)^2 + (\sin a)^2}_1 + \underbrace{(\cos a)^2 + (\sin a)^2}_1$$

$$= 2.$$

Rappel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Rappel

Pour tout x ,

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

9 1. Le triangle ABC a pour côté le diamètre [AC] du cercle $\mathcal{C}$. De plus, B est sur $\mathcal{C}$.

On en déduit que le triangle ABC est rectangle en C.

De même pour le triangle ACD qui a pour côté le diamètre [AC] de $\mathcal{C}$ avec D sur $\mathcal{C}$: le triangle ACD est rectangle en D.

2. Le périmètre $\mathcal{P}$ du quadrilatère ABCD est :

$$\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA.$$

Dans le triangle ABC rectangle en B, on connaît les mesures de l'hypoténuse [AC] et de l'angle $\widehat{A}$.

On calcule la longueur du côté adjacent à $\widehat{A}$, [AB], en utilisant le cosinus.

$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}.$$

$$\cos 50^\circ = \frac{AB}{10}.$$

Par produit, on obtient : $AB = 10 \times \cos 50^\circ$,

$$AB \approx 6,4 \text{ cm.}$$

On calcule la longueur de [BC] (côté opposé à $\widehat{A}$) en utilisant le sinus.

Rappel

Un triangle inscrit dans un demi-cercle avec pour côté un diamètre est rectangle.

Rappel

Le périmètre d'un quadrilatère est la somme des longueurs de ses côtés.

Rappel

On peut faire de la trigonométrie dans les triangles ABC et ACD parce qu'ils sont rectangles.

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}.$$

$$\sin 50^\circ = \frac{BC}{10}.$$

Par produit, on obtient : $BC = 10 \times \sin 50^\circ$

$$BC \approx 7,7 \text{ cm.}$$

● Dans le triangle ACD rectangle en D, on connaît les mesures de l'hypoténuse [AC] et de l'angle $\hat{C}$.

– On calcule CD (côté adjacent à $\hat{C}$) avec :

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{C}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CD}{AC}.$$

$$\cos 30^\circ = \frac{CD}{10}.$$

Par produit, on obtient : $CD = 10 \times \cos 30^\circ$.

$$CD \approx 8,7 \text{ cm.}$$

– On calcule la longueur de [AD] (côté opposé à $\hat{C}$) en utilisant le sinus.

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{C}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AD}{AC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{10}.$$

Par produit, on obtient : $AD = 10 \times \sin 30^\circ$

$$AD = 5 \text{ cm.}$$

● Finalement $\mathcal{P} \approx 6,4 + 7,7 + 8,7 + 5$.

Soit $\mathcal{P} \approx 27,8 \text{ cm.}$

Rappel

Le lien entre le côté adjacent d'un angle et l'hypoténuse est le cosinus de cet angle.

→ Vers le Brevet

10 1. ● Dans le triangle EDC rectangle en D,

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha} = \frac{ED}{DC} = \frac{1,7}{4,5}.$$

$$\text{D'où } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1,7}{4,5}\right).$$

Gagnez des points !

On connaît la longueur de [ED] (côté opposé à α) et de [DC] (côté adjacent à α). C'est la tangente qui met en relation ces deux longueurs.

Soit $\alpha \approx 20,7^\circ$.

Comme $20^\circ \leq \alpha \leq 50^\circ$, on conclut qu'une installation harmonieuse de panneaux solaires est envisageable sur la toiture du garage de Jacques.

Gagnez
des points !
N'oubliez pas
la question posée !

2. La toiture du garage est rectangulaire de longueur $BH = CG = 8$ m et de largeur EC .

● On calcule EC en travaillant dans le triangle EDC rectangle en D .

On connaît α et son côté adjacent, le côté $[DC]$. Cherchant l'hypoténuse $[EC]$, on

$$\text{écrit : } \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{DC}{EC}$$

$$\cos 20,7^\circ = \frac{4,5}{EC}.$$

$$\text{Par produit : } EC \times \cos 20,7^\circ = 4,5.$$

$$\text{Soit } EC = \frac{4,5}{\cos 20,7^\circ}.$$

On obtient : $EC \approx 4,81$.

● La surface de la toiture utilisable par Jacques pour installer les panneaux solaires est : $CG \times EC$ soit environ $8 \times 4,81 = 38,48 \text{ m}^2$.

11 1. Dans le triangle ABC rectangle en A , on connaît la mesure de $\widehat{C}$ et la longueur de son côté adjacent $[AC]$. On veut calculer la longueur de l'hypoténuse $[BC]$.

$$\text{On utilise : } \cos \widehat{C} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{C}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}.$$

$$\text{Soit } \cos 50^\circ = \frac{2}{BC}.$$

$$\text{Par produit en croix, on obtient : } BC \times \cos 50^\circ = 2.$$

$$\text{Soit } BC = \frac{2}{\cos 50^\circ}$$

$$BC \approx 3,1 \text{ cm}.$$

2. ● Dans le triangle ABC rectangle en A , on connaît la mesure de $\widehat{C}$ et la longueur de son côté adjacent $[AC]$. On veut calculer la longueur de $[AB]$, côté opposé à $\widehat{C}$.

$$\text{On écrit } \tan \widehat{C} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{C}}{\text{côté adjacent à } \widehat{C}} = \frac{AB}{AC}.$$

Remarque

DC est connu car $DC = AB$.

$$\tan 50^\circ = \frac{AB}{2}.$$

Par produit, on en déduit : $AB = 2 \times \tan 50^\circ$.

Soit $AB \approx 2,4$ cm.

● Dans le triangle BCD rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

$$BD^2 = 3,1^2 + 3^2$$

$$BD^2 = 18,61.$$

D'où $BD = \sqrt{18,61}$, soit $BD \approx 4,3$ cm.

3. a) Dans le triangle BCD rectangle en C,

$$\tan \widehat{CDB} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{CDB}}{\text{côté adjacent à } \widehat{CDB}} = \frac{BC}{CD} = \frac{3,1}{3} \approx 1,033.$$

b) On en déduit $\widehat{CDB} = \tan^{-1}(1,033)$.

Soit $\widehat{CDB} \approx 46^\circ$.

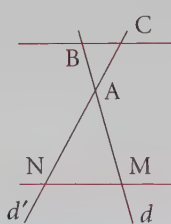
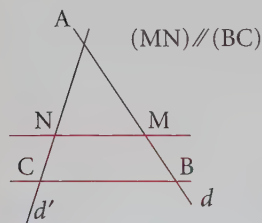
Remarque

Dans le triangle BCD, on connaît 2 longueurs sur 3 (et aucun angle !), aussi on utilise le théorème de Pythagore.

1 Théorème de Thalès

1 Énoncé du théorème

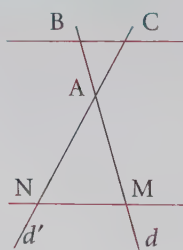
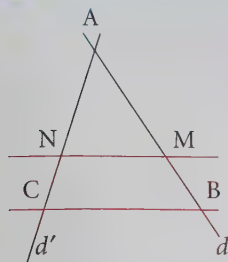
Dans les deux schémas ci-dessous, encore appelés figures clefs de Thalès, on peut énoncer le théorème suivant :



- d et d' sont deux droites sécantes en A ,
- B et M sont deux points de d ,
- C et N sont deux points de d' ,
- $(MN) // (BC)$, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

2 La réciproque du théorème



Avec ces deux figures, la réciproque du théorème de Thalès permet de montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Ainsi,

- d et d' sont deux droites sécantes en A ,
- B et M sont deux points de d ,
- C et N sont deux points de d' ,
- Les points A, B et M d'une part et A, C et N d'autre part sont alignés dans le même ordre.
- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

EXERCICE RÉSOLU

► Effectuer des constructions

ÉNONCÉ

Voici une droite graduée :



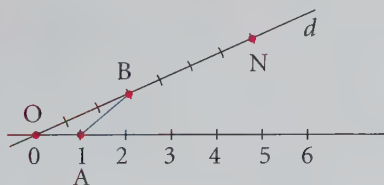
Placez sur cette droite graduée (sans mesurer) le point M d'abscisse $\frac{7}{3}$.

CORRIGÉ

On commence par tracer une droite d passant par O. On place sur celle-ci des points régulièrement espacés à partir du point O. Pour cela, on utilise un compas (on prend une ouverture pas trop grande...).

Puis on place sur la droite d les points B et N tels que $OB = 3$ et $ON = 7$.

On trace le segment $[AB]$.



On trace ensuite la parallèle à (AB) passant par N. Elle coupe la droite graduée en M, de façon que

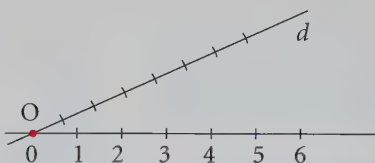
$$OM = \frac{7}{3}.$$

En effet, les droites (AB) et (MN) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{ON}{OB} = \frac{OM}{OA}, \text{ soit } \frac{7}{3} = \frac{OM}{1}.$$

On en déduit, par produit en croix, que

$$OM = \frac{7}{3}. \text{ C'est bien ce que l'on voulait !!}$$



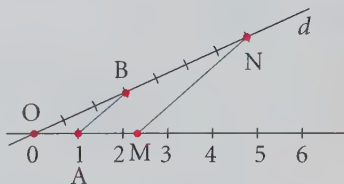
Méthode

On obtient ainsi 7 graduations sur la droite d .

Méthode

À 3 graduations sur la droite d correspond 1 graduation sur la droite graduée.

Cela permet d'obtenir les $\frac{1}{3}$.



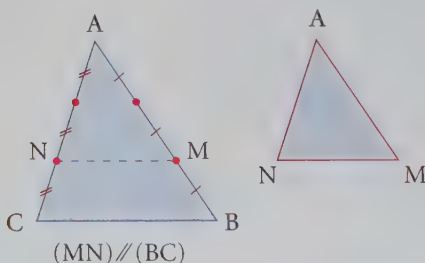
2 Agrandissement/Réduction

1 Définitions

Lors de l'agrandissement ou de la réduction, de rapport $k > 0$, d'une figure (ou d'un solide), les longueurs sont multipliées par k .

- $k > 1$ dans le cas d'un agrandissement ; k est appelé coefficient d'agrandissement.
- $0 < k < 1$ dans le cas d'une réduction ; k est appelé coefficient de réduction.

Exemple :



- Le triangle AMN est une réduction du triangle ABC : ils ont les mêmes angles et les longueurs ont été multipliées par $k = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} < 1$.

On obtient les longueurs du triangle AMN en multipliant celles du triangle ABC par $k = \frac{2}{3}$.

- De la même façon, le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN.

Le coefficient d'agrandissement est alors $k' = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{2} = 1,5 > 1$.

On obtient les longueurs du triangle ABC en multipliant celles du triangle AMN par $k' = 1,5$.

2 Propriétés

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k ,

- les aires sont multipliées par k^2 ,
- les volumes sont multipliés par k^3 .

Exemple :

Dans l'exemple précédent, l'aire du triangle ABC s'obtient à partir de celle du triangle AMN par :

$$\text{Aire}(\text{ABC}) = 1,5^2 \times \text{Aire}(\text{AMN})$$

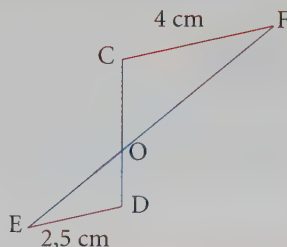
EXERCICES RÉSOLUS

1 Utiliser un agrandissement dans le plan

ÉNONCÉ

Sur la figure ci-contre, les droites (DE) et (CF) sont parallèles, le triangle OCF est donc un agrandissement du triangle OED.

1. Calculez le coefficient d'agrandissement.
2. L'aire du triangle OED est 2 cm^2 . Quelle est celle du triangle OCF ?



CORRIGÉ

1. Le coefficient d'agrandissement se calcule comme

$$\frac{CF}{DE} = \frac{4}{2,5} = 1,6.$$

2. Si k est le coefficient d'agrandissement, les aires sont multipliées par k^2 . On en déduit : $\text{Aire}(\text{OCF}) = 1,6^2 \times \text{Aire}(\text{OED}) = 2,56 \times 2 = 5,12 \text{ cm}^2$.

Méthode

Le coefficient d'agrandissement est $\frac{OF}{OE}$ ou $\frac{OC}{OD}$ ou $\frac{CF}{ED}$.

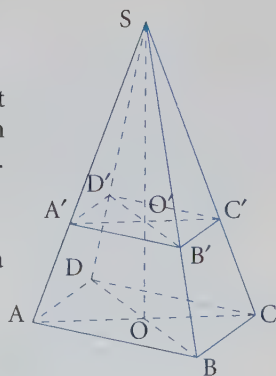
2 Utiliser une réduction dans l'espace

ÉNONCÉ

SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un rectangle. On coupe cette pyramide par un plan $A'B'C'D'$ parallèle à sa base passant par le point O' . On donne les dimensions :

- $SO = 6 \text{ cm}$. • $SO' = 4 \text{ cm}$.

La pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de la pyramide SABCD.



1. Calculez le coefficient de réduction.
2. Le volume de la pyramide SABCD est 54 cm^3 . Calculez celui de la pyramide $SA'B'C'D'$.

CORRIGÉ

1. Le coefficient de réduction est : $\frac{\text{longueur réduite}}{\text{longueur initiale}} = \frac{SO'}{SO} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

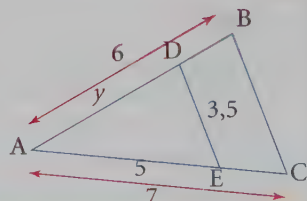
2. Si k est le coefficient de réduction, les volumes sont multipliés par k^3 . On en déduit : $\text{Volume}(SA'B'C'D') = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{Volume}(SABCD) = \frac{8}{27} \times 54 = \frac{8 \times 27 \times 2}{27} = 16 \text{ cm}^3$.

→ Calculer une longueur avec le théorème de Thalès

ÉNONCÉ

Sur la figure ci-contre, $(BC) \parallel (DE)$.

Calculez la valeur exacte de y , puis donnez-en une valeur approchée arrondie au dixième.



MÉTHODE

1. On repère une configuration de Thalès (deux droites sécantes et deux droites parallèles).
2. On cite le théorème, puis on écrit l'égalité des trois quotients.
3. On remplace dans ces quotients les valeurs connues.
4. En utilisant une égalité entre deux quotients, on calcule (à l'aide d'un produit en croix) la longueur cherchée.

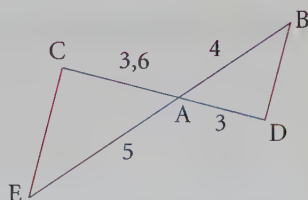
CORRIGÉ

Solution	Commentaires
Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A . De plus, (DE) et (BC) sont parallèles.	1. On dit aussi que les triangles ABC et ADE sont en configuration de Thalès.
D'après le théorème de Thalès, on écrit : $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$	2. Dans ces quotients, les numérateurs sont les longueurs du triangle ADE (le petit) et les dénominateurs sont les longueurs correspondantes du triangle ABC (le grand).
$\boxed{\frac{5}{7} = \frac{y}{6}} = \frac{DE}{BC}$	3. On encadre les quotients qui permettent de calculer y .
$\frac{5}{7} = \frac{y}{6} \text{ soit } 7 \times y = 5 \times 6$ $y = \frac{30}{7} \text{ (valeur exacte)}$ $y \approx 4,3 \text{ (valeur approchée arrondie au dixième).}$	4. On utilise un produit en croix. On se ramène à une équation de la forme $ay = b$ qui a pour solution $y = \frac{b}{a}.$

➔ Étudier le parallélisme de deux droites

ÉNONCÉ

Les droites (CE) et (BD) sont-elles parallèles ? Justifiez.



MÉTHODE

1. On repère deux droites sécantes en un point.
2. On indique les points alignés sur ces deux droites en précisant l'ordre.
3. On calcule les quotients en les écrivant soit sous forme décimale exacte, soit sous forme de fractions irréductibles.
4. On compare les deux quotients :
 - s'ils sont égaux, les droites sont parallèles, d'après la réciproque du théorème de Thalès.
 - s'ils ne sont pas égaux, les droites ne sont pas parallèles.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
Les droites (CD) et (BE) sont sécantes en A.	1. Il faut bien écrire les hypothèses.
Les points C, A, D d'une part et E, A, B d'autre part sont alignés dans le même ordre.	2. L'ordre des points sur les droites est important.
$\bullet \frac{AC}{AD} = \frac{3,6}{5} = 1,2$ $\bullet \frac{AE}{AB} = \frac{5}{4} = 1,25$	3. On écrit les quotients sous forme décimale lorsque le résultat est exact. Autrement, on écrit les quotients sous forme de fractions irréductibles.
Mais $1,2 \neq 1,25$. Si les droites avaient été parallèles, les quotients auraient été égaux d'après le théorème de Thalès. Or, ici ils ne le sont pas. On en déduit que les droites (BD) et (CE) ne sont pas parallèles.	4. Il s'agit de la contraposée du théorème de Thalès qui permet de conclure que les droites ne sont pas parallèles.


QCM


1 Cochez la ou les réponses correctes. Toutes les questions portent sur cette figure.

1. a) ☐ $EC = 6 + x$ b) ☐ $BD = 3$

c) ☐ On peut utiliser le théorème de Thalès.

2. On peut écrire, en utilisant le théorème de Thalès :

a) ☐ $\frac{BD}{BA} = \frac{CE}{CA}$ b) ☐ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ c) ☐ $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

3. On peut dire que :

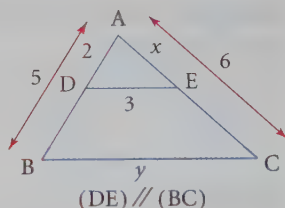
a) ☐ les longueurs du triangle ADE sont proportionnelles à celles du triangle ABC.

b) ☐ le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

2	x	3
5	6	y

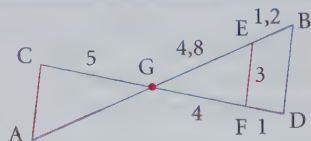
c) ☐ les longueurs du triangle ABC sont deux fois et demi plus grandes que celles du triangle ADE.

4. a) ☐ $y = 7,5$ b) ☐ $x = 2,4$ c) ☐ $xy = 18$



2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
Sur cette figure, les droites (AC) et (EF) sont parallèles.	
1. Le théorème de Thalès appliqué aux triangles GAC et GEF permet d'écrire : $\frac{CG}{CF} = \frac{AG}{AE}$.	☐ V ☐ F
2. $GA = 6$.	☐ V ☐ F
3. $CA = 2,4$.	☐ V ☐ F
4. Les droites (EF) et (BD) sont parallèles.	☐ V ☐ F
5. $BD = 2,4$.	☐ V ☐ F
6. Le triangle GAC est un agrandissement du triangle GEF.	☐ V ☐ F



→ Exercices d'entraînement



3 Ce que l'on pourra rencontrer avec Thalès

Résolvez les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme exacte) :

$$\bullet \frac{x}{4} = \frac{5}{8}$$

$$\bullet \frac{3}{5} = \frac{2}{x}$$

$$\bullet \frac{x+1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\bullet \frac{3}{2+x} = \frac{3}{10}$$

4 On continue avec des fractions

Dans chaque cas, étudiez si les fractions sont égales (on écrira chacune des fractions sous la forme d'un quotient irréductible) :

$$\bullet \frac{4,8}{3,6} \text{ et } \frac{1,2}{0,9}$$

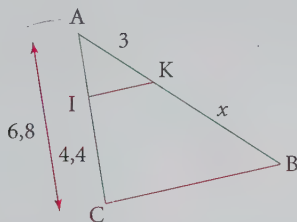
$$\bullet \frac{3}{3,6} \text{ et } \frac{14}{16,8}$$

$$\bullet \frac{0,3}{0,72} \text{ et } \frac{1}{2,4}$$

5 Le classique ...

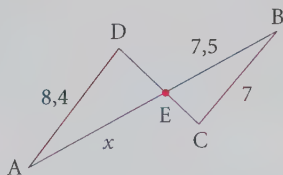
Dans chacun des cas suivants, calculez la valeur exacte de x .

a)



Les droites (IK) et (BC) sont parallèles.

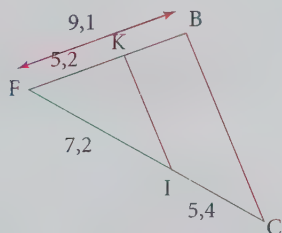
b)



Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

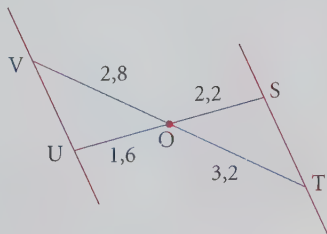
6 Encore un classique ...

a)



Les droites (IK) et (BC) sont-elles parallèles ?

b)

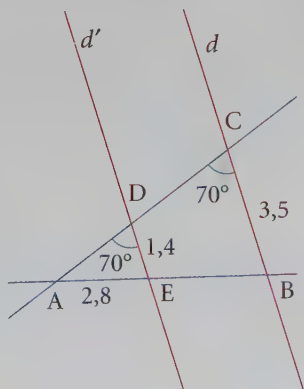


Les droites (ST) et (UV) sont-elles parallèles ?

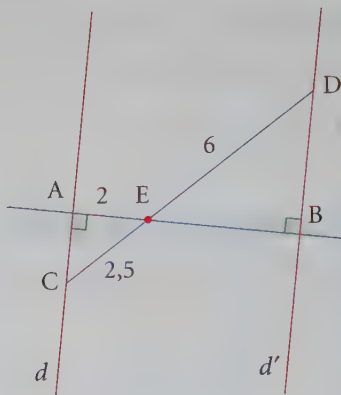
7 La même chose de différentes façons

Dans chaque cas, justifiez que les droites d et d' sont parallèles, puis calculez AB.

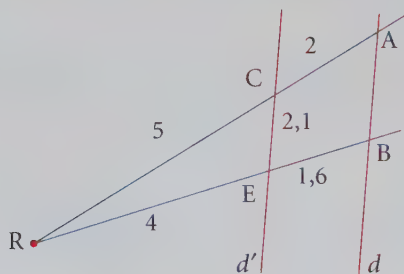
a)



b)



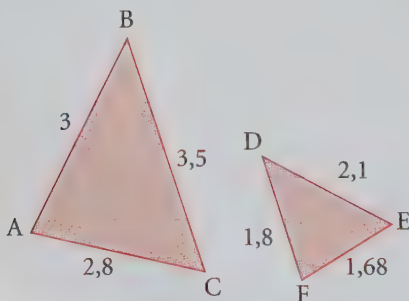
c)



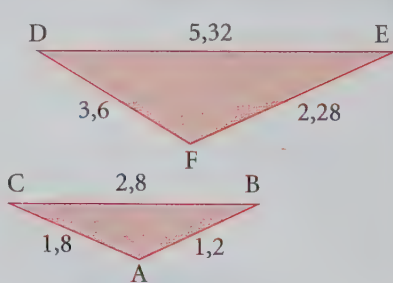
8 Agrandissement/réduction ou non ?

Pour chacun des cas suivants, précisez si le triangle DEF est obtenu à partir d'un agrandissement ou d'une réduction du triangle ABC. Si oui, précisez le coefficient.

a)



b)



9 Le tout en un

Sur la figure ci-contre, on a :

- $EC = \sqrt{8}$,
- $AC = 2$,
- $DC = \sqrt{2}$,
- $EB = 2\sqrt{6}$,
- $\widehat{ACD} = 90^\circ$.

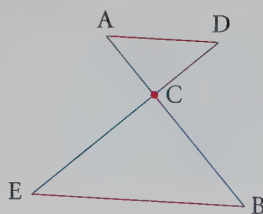
1. Montrez que $BC = 4$.

2. Montrez que les droites (AD) et (EB) sont parallèles.

3. Complétez les égalités suivantes :

- $AD = \dots EB$
- $\text{Aire}(ACD) = \dots \text{Aire}(ECB)$

Sur la figure ci-dessous, les mesures ne sont pas respectées.



→ Vers le Brevet



10 Dans une configuration classique

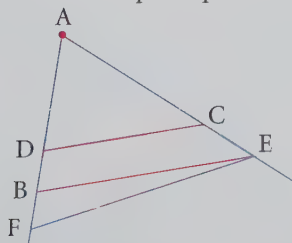
Sur la figure ci-dessous, on a :

- $AC = 6$ cm,
- $AE = 7,5$ cm,
- $DC = 5$ cm,
- $AB = 7$ cm,
- $BF = 1$ cm.
- Les droites (DC) et (BE) sont parallèles.

1. Calculez AD. Déduisez-en BD.

2. Les droites (EF) et (BC) sont-elles parallèles ?

Sur la figure, les mesures ne sont pas respectées.



11 Avec des triangles rectangles

On considère la figure ci-contre.

1. Justifiez que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

2. Calculez AD.

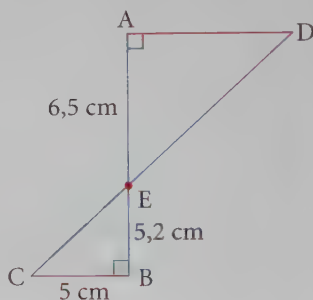
3. Calculez l'aire du triangle EBC.

4. a) Le triangle EDA est un agrandissement du triangle EBC. Quel est le coefficient d'agrandissement ?

b) À l'aide de ce coefficient, calculez l'aire du triangle EAD.

c) Calculez $\frac{AE \times AD}{2}$. Que vérifie-t-on ainsi ?

Sur la figure ci-dessous, les mesures ne sont pas respectées.



12 Un petit cône ou un grand cône

Sur la figure ci-contre (qui n'est pas à l'échelle), est représenté un cône de révolution tel que $AP = 10$ cm. Un plan parallèle à la base coupe ce cône tel que $AN = 8$ cm.

r est le rayon du petit cône et R celui du grand cône.

1. a) Quel est le coefficient de réduction qui permet de passer du grand cône au petit cône ?

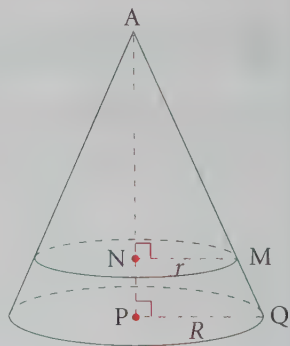
b) Complétez la phrase :

Dans une réduction de rapport k , les longueurs sont multipliées par ... et les volumes par ...

2. Le rayon du disque de base du grand cône est $R = 4,2$ cm.

a) Calculez la valeur exacte du volume du grand cône.

b) Déduisez-en la valeur exacte du volume du petit cône.



→ QCM

1. ● On a $EC = AC - AE = 6 - x \neq 6 + x$.

● $BD = AB - AD = 5 - 2 = 3$.

● Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A. De plus, $(DE) \parallel (BC)$. On en déduit que l'on peut utiliser le théorème de Thalès.

Réponses : **b)** $BD = 3$ et **c)** On peut utiliser le théorème de Thalès.

2. Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A.

De plus, $(DE) \parallel (BC)$. On en déduit d'après le théorème de Thalès que :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \text{ ou } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Réponses : **b)** $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ et **c)** $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$.

3. ● Il s'agit d'une configuration de Thalès. Le triangle ABC est un agrandissement du triangle ADE. On en déduit que les longueurs du triangle ADE sont proportionnelles à celles du triangle ABC.

● Dans le tableau, les longueurs du triangle ADE sont sur la première ligne et celles correspondantes du triangle ABC sur la seconde. C'est donc un tableau de proportionnalité.

● D'après la première colonne du tableau de proportionnalité, on passe de la première ligne à la seconde en multipliant par 2,5 (en effet, $2 \times 2,5 = 5$).

On en déduit que les longueurs du triangle ABC sont deux fois et demi plus grandes que celles du triangle ADE.

Réponses : **a)** Les longueurs du triangle ADE sont proportionnelles à celles du triangle ABC.

b) Le tableau est un tableau de proportionnalité.

c) Les longueurs du triangle ABC sont deux fois et demi plus grandes que celles du triangle ADE.

4. D'après le théorème de Thalès : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, soit $\frac{2}{5} = \frac{x}{6} = \frac{3}{y}$.

● En utilisant l'égalité : $\frac{2}{5} = \frac{3}{y}$, il vient $2 \times y = 3 \times 5$, soit $y = \frac{15}{2} = 7,5$.

● En utilisant l'égalité : $\frac{2}{5} = \frac{x}{6}$, il vient $5 \times x = 2 \times 6$, soit $x = \frac{12}{5} = 2,4$.

Gagnez des points !

Un triangle

avec des droites parallèles est une figure clef.

L'astuce du prof

Dans la première égalité de quotients, les longueurs du petit triangle sont au numérateur.

Dans la seconde, elles sont au dénominateur.

● On a $xy = 7,5 \times 2,4 = 18$.

Réponses : **a)** $y = 7,5$, **b)** $x = 2,4$ et **c)** $xy = 18$.

2 1. Faux. Les droites (CF) et (AE) sont sécantes en G. De plus (AC) // (EF). D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{GC}{GF} = \frac{GA}{GE} = \frac{CA}{EF}.$$

2. Vrai. On a $\frac{GC}{GF} = \frac{GA}{GE} = \frac{CA}{EF}$ soit $\boxed{\frac{5}{4} = \frac{GA}{4,8} = \frac{CA}{3}}$.

En utilisant l'égalité encadrée, on obtient :

$$GA \times 4 = 5 \times 4,8, \text{ soit } GA = \frac{5 \times 4,8}{4} = 6.$$

3. Faux. On utilise les quotient encadrés dans l'égalité : $\boxed{\frac{5}{4} = \frac{GA}{4,8} = \frac{CA}{3}}$.

On obtient : $4 \times CA = 3 \times 5$, soit $CA = \frac{3 \times 5}{4} = 3,75$.

4. Vrai. Les points G, E, B d'une part et les points G, F, D d'autre part sont alignés dans le même ordre.

De plus, $\frac{GE}{GB} = \frac{4,8}{4,8 + 1,2} = \frac{4,8}{6} = 0,8$.

Et $\frac{GF}{GD} = \frac{4}{4 + 1} = \frac{4}{5} = 0,8$.

On a donc $\frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GD}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (BD) sont parallèles.

5. Faux. Les droites (GB) et (GD) sont sécantes en G. De plus, les droites (EF) et (BD) sont parallèles d'après la question précédente. D'après le théorème de Thalès :

$\frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GD} = \frac{EF}{BD}$, soit $\frac{4,8}{4,8 + 1,2} = \boxed{\frac{4}{4 + 1} = \frac{3}{BD}}$. En utilisant l'égalité encadrée, on obtient : $BD \times 4 = 3 \times 5$, soit $BD = \frac{3 \times 5}{4} = 3,75$.

6. Vrai. Les droites (AC) et (EF) sont parallèles (ces deux triangles sont donc en configuration de Thalès). Le triangles GAC est donc un agrandissement du triangle GEF.

L'astuce du prof

Pour écrire les quotients, commencez toujours par le sommet commun au deux triangles (ici G).

Remarque

Les quotients ici donnent des valeurs exactes. C'est pourquoi, on peut les écrire sous forme décimale.

→ Exercices d'entraînement

3 Pour résoudre ce type d'équations (égalité de deux quotients), on utilise le produit en croix.

$$\bullet \quad \frac{x}{4} = \frac{5}{8}$$

$$x \times 8 = 5 \times 4$$

$$x = \frac{5 \times 4}{8}$$

$$x = \frac{5 \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times 2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

La solution de cette équation est 2,5.

$$\bullet \quad \frac{3}{5} = \frac{2}{x}$$

$$x \times 3 = 5 \times 2$$

$$x = \frac{5 \times 2}{3}$$

$$x = \frac{10}{3}$$

La solution de cette équation est $\frac{10}{3}$.

$$\bullet \quad \frac{x+1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$(x+1) \times 4 = 2 \times 3$$

$$4x + 4 = 6$$

$$4x = 6 - 4$$

$$x = \frac{2}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} = 0,5$$

La solution de cette équation est 0,5.

$$\bullet \quad \frac{3}{2+x} = \frac{3}{10}$$

$$(2+x) \times 3 = 3 \times 10$$

$$6 + 3x = 30$$

$$3x = 30 - 6$$

$$x = \frac{24}{3}$$

$$x = 8$$

La solution de cette équation est 8.

Rappel

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ alors}$$

$$a \times d = b \times c.$$

Remarque

2,5 est une valeur exacte.

C'est pourquoi,

$$\text{on peut écrire } \frac{5}{2}$$

sous forme décimale.

Remarque

$\frac{10}{3}$ est une valeur exacte.

La valeur décimale 3,33 n'est qu'une valeur approchée. Les solutions d'une équation sont toujours données sous forme exacte.

Piège à éviter

Dans ces équations, ne pas oublier les parenthèses quand on fait les produits en croix !

$$4 \bullet \frac{4,8}{3,6} = \frac{4,8 \times 10}{3,6 \times 10} = \frac{48}{36} = \frac{6 \times 8}{6 \times 6} = \frac{2 \times 4}{2 \times 3} = \frac{4}{3}$$

$$\bullet \frac{1,2}{0,9} = \frac{1,2 \times 10}{0,9 \times 10} = \frac{12}{9} = \frac{4 \times 3}{3 \times 3} = \frac{4}{3}$$

On en déduit que $\frac{4,8}{3,6} = \frac{1,2}{0,9}$.

$$\bullet \frac{3}{3,6} = \frac{3 \times 10}{3,6 \times 10} = \frac{30}{36} = \frac{5 \times 6}{6 \times 6} = \frac{5}{6}$$

$$\bullet \frac{14}{16,8} = \frac{14 \times 10}{16,8 \times 10} = \frac{140}{168} = \frac{5 \times 28}{28 \times 42} = \frac{5}{6}$$

On en déduit que $\frac{3}{3,6} = \frac{14}{16,8}$.

$$\bullet \frac{0,3}{0,72} = \frac{0,3 \times 100}{0,72 \times 100} = \frac{30}{72} = \frac{5 \times 6}{12 \times 12} = \frac{5}{12}$$

$$\bullet \frac{1}{2,4} = \frac{1 \times 10}{2,4 \times 10} = \frac{10}{24} = \frac{5 \times 2}{24 \times 12} = \frac{5}{12}$$

On en déduit que $\frac{0,3}{0,72} = \frac{1}{2,4}$.

5 a) Les droites (AC) et (AB) sont sécantes en A. De plus, les droites (IK) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on écrit :

$$\frac{AI}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{IK}{BC} \text{ soit } \boxed{\frac{6,8 - 4,4}{6,8} = \frac{3}{3 + x}} = \frac{IK}{BC}.$$

Piège à éviter

On ne compare pas des valeurs approchées. Il faut écrire les fractions sous forme irréductible (avec des nombres entiers).

Remarque

Pour la longueur AI, on utilise l'égalité AI = AC - IC.

En utilisant l'égalité encadrée :

$$\frac{6,8 - 4,4}{6,8} = \frac{3}{3 + x}$$

$$\frac{2,4}{6,8} = \frac{3}{3 + x}$$

$$2,4 \times (3 + x) = 3 \times 6,8$$

$$7,2 + 2,4x = 20,4$$

$$2,4x = 20,4 - 7,2$$

$$x = \frac{13,2}{2,4}$$

$$x = 5,5$$

Remarque

À la place d'écrire $3 + x$ dans le quotient, on peut laisser AB. Après avoir calculé AB, on en déduit x grâce à l'égalité $AB = 3 + x$.

b) Les droites (DC) et (AB) sont sécantes en E. De plus, les droites (AD) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{ED}{EC} = \frac{EA}{EB} = \frac{AD}{BC}, \text{ soit } \frac{ED}{EC} = \frac{x}{7,5} = \frac{8,4}{7}$$

En utilisant l'égalité encadrée :

$$\frac{x}{7,5} = \frac{8,4}{7}$$

$$7 \times x = 7,5 \times 8,4$$

$$x = \frac{7,5 \times 8,4}{7}$$

$$x = 9$$

Gagnez des points !
C'est à chaque fois la même technique : les produits en croix.

6 a) Les droites (FB) et (FC) sont sécantes en F. Les points F, K, B d'une part et F, I C d'autre part sont alignés dans le même ordre.

$$\frac{FK}{FB} = \frac{5,2}{9,1} = \frac{52}{91} = \frac{13 \times 4}{13 \times 7} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{FI}{FC} = \frac{7,2}{7,2 + 5,4} = \frac{7,2}{12,6} = \frac{72}{126} = \frac{18 \times 4}{18 \times 7} = \frac{4}{7}$$

L'astuce du prof
Pour simplifier des fractions, utilisez une calculatrice. Elle fait ça très bien !

On a donc $\frac{FK}{FB} = \frac{FI}{FC}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IK) et (BC) sont parallèles.

b) Les droites (SU) et (VT) sont sécantes en O. Les points V, O, T d'une part et U, O, S d'autre part sont alignés dans le même ordre.

$$\bullet \frac{OV}{OT} = \frac{2,8}{3,2} = \frac{28}{32} = \frac{4 \times 7}{4 \times 8} = \frac{7}{8}$$

$$\bullet \frac{OU}{OS} = \frac{1,6}{2,2} = \frac{16}{22} = \frac{2 \times 8}{2 \times 11} = \frac{8}{11}$$

Gagnez des points !
On ne compare que des valeurs exactes.

On a donc $\frac{OV}{OT} \neq \frac{OU}{OS}$. Les droites (UV) et (ST) ne sont pas parallèles (il s'agit de la contraposée du théorème de Thalès).

7 a) • La droite (AC) est sécante avec les droites d et d' . Les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ACB}$ sont dans des positions d'angles correspondants. Ils ont même mesure (70°). On en déduit que les droites d et d' sont parallèles.

• Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A. De plus, les droites (CB) et (DE) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} \text{ soit } \boxed{\frac{2,8}{AB}} = \frac{AD}{AC} = \boxed{\frac{1,4}{3,5}}$$

En utilisant les quotients encadrés, on obtient :

$$\frac{2,8}{AB} = \frac{1,4}{3,5}$$

$$1,4 \times AB = 2,8 \times 3,5$$

$$AB = \frac{2,8 \times 3,5}{1,4}$$

$$AB = 7.$$

b) • On a $d \perp (AB)$ et $d' \perp (AB)$. Si deux droites sont perpendiculaires à la même droite, alors elles sont parallèles. On en déduit que d et d' sont parallèles.

• Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en E. De plus, (AC) // (BD). D'après le théorème de Thalès, on écrit :

$$\frac{EC}{ED} = \frac{EA}{EB} = \frac{AC}{BD} \text{ soit } \boxed{\frac{2,5}{6}} = \frac{2}{EB} = \frac{AC}{BD}$$

En utilisant l'égalité encadrée, on obtient :

$$\frac{2,5}{6} = \frac{2}{EB}$$

$$2,5 \times EB = 2 \times 6$$

$$EB = \frac{2 \times 6}{2,5} = 4,8$$

On en déduit que $AB = AE + EB = 2 + 4,8 = 6,8$.

c) Les droites (RA) et (RB) sont sécantes en R. Les points R, C, A d'une part et R, E, B d'autre part sont alignés dans le même ordre. De plus,

$$\frac{RC}{RA} = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7} \text{ et } \frac{RE}{RB} = \frac{4}{4+1,6} = \frac{4}{5,6} = \frac{4}{5,6} = \frac{40}{56} = \frac{8 \times 5}{8 \times 7} = \frac{5}{7}.$$

On a donc $\frac{RC}{RA} = \frac{RE}{RB}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites d et d' sont parallèles.

Les droites (RA) et (RB) sont sécantes en R. De plus, $(EC) \parallel (AB)$. D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{RC}{RA} = \frac{RE}{RB} = \frac{EC}{AB} \text{ soit } \frac{5}{7} = \boxed{\frac{4}{5,6} = \frac{2,1}{AB}}$$

En utilisant l'égalité encadrée :

$$\frac{4}{5,6} = \frac{2,1}{AB}$$

$$4 \times AB = 5,6 \times 2,1$$

$$AB = \frac{5,6 \times 2,1}{4} = 2,94.$$

Remarque

On pouvait également utiliser l'égalité

$$\frac{5}{7} = \frac{2,1}{AB}.$$

8 a) Le triangle DEF est un agrandissement ou une réduction du triangle ABC lorsque les mesures des côtés du triangle DEF sont proportionnelles à celles du triangle ABC.

On vérifie si le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Triangle ABC	3,5	3	2,8
Triangle DEF	2,1	1,8	1,68

• $\frac{2,1}{3,5} = 0,6$

Gagnez des points !

Dans ce tableau, on écrit les uns en dessous des autres les longueurs correspondantes des côtés des deux triangles : le plus grand côté en premier, le plus petit côté en dernier.

$$\bullet \frac{1,8}{3} = 0,6$$

$$\bullet \frac{1,68}{2,8} = 0,6$$

On en déduit que ce tableau est bien un tableau de proportionnalité. Le triangle DEF est donc une réduction du triangle ABC. Le coefficient de réduction est 0,6.

b) On procède de la même façon :

Triangle ABC	2,8	1,8	1,2
Triangle DEF	5,32	3,6	2,28

$$\bullet \frac{5,32}{2,8} = 1,9$$

$$\bullet \frac{3,6}{1,8} = 2$$

$$\bullet \frac{2,28}{1,2} = 1,9$$

Les quotients ne sont pas égaux. On en déduit que le triangle DEF n'est pas un agrandissement (ou une réduction) du triangle ABC.

9 1. Les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{ECB}$ sont opposés par le sommet. Ils sont donc égaux. Le triangle CEB est donc rectangle en C.

• Dans le triangle EBC rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} EC^2 + CB^2 &= EB^2 \\ (\sqrt{8})^2 + BC^2 &= (2\sqrt{6})^2 \\ 8 + BC^2 &= 4 \times 6 \\ BC^2 &= 24 - 8 \\ BC &= \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

2. Les droites (AB) et (ED) sont sécantes en C. Les points A, C, B d'une part et D, C, E d'autre part sont alignés dans le même ordre.

$$\bullet \frac{CA}{CB} = \frac{2}{4} = 0,5 \quad \bullet \frac{CD}{CE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 \times 2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

On a donc $\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AD) et (EB) sont parallèles.

Gagnez des points !

Les divisions « tombent justes ». On peut donc écrire les valeurs décimales et les comparer.

Rappel

Un triangle avec un angle de 90° est un triangle rectangle.

Méthode

Quand on connaît deux longueurs dans un triangle rectangle, pour trouver la troisième, on peut utiliser le théorème de Pythagore.

3. ● Les droites (AD) et (EB) sont parallèles. Il s'agit donc d'une configuration de Thalès. Le coefficient de réduction est $\frac{1}{2}$. Les longueurs du triangle ADC sont deux fois plus petites que celles du triangle CEB. D'où $AD = \frac{1}{2}EB$.

● Dans une réduction, si les longueurs sont multipliées par k , les aires sont multipliées par k^2 .

On en déduit :

$$\text{Aire}(ACD) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{Aire}(ECB) = \frac{1}{4} \text{Aire}(ECB)$$

→ Vers le Brevet

10 1. ● Les droites (AB) et (AE) sont sécantes en A. De plus, (DC) // (BE). D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE} = \frac{DC}{BE} \text{ soit } \boxed{\frac{AD}{7} = \frac{6}{7,5}} = \frac{5}{BE}$$

En utilisant l'égalité encadrée, on obtient :

$$\frac{AD}{7} = \frac{6}{7,5}$$

$$7,5 \times AD = 6 \times 7$$

$$AD = \frac{6 \times 7}{7,5} = 5,6$$

● $BD = AB - AD = 7 - 5,6 = 1,4$.

2. Les droites (AF) et (AE) sont sécantes en A. Les points A, B, F d'une part et A, C, E d'autre part sont alignés dans le même ordre.

● $\frac{AB}{AF} = \frac{7}{7+1} = 0,875$.

● $\frac{AC}{AE} = \frac{6}{7,5} = 0,8$.

Les quotients ne sont pas égaux. Si les droites avaient été parallèles, ils l'auraient été (d'après le théorème de Thalès). On en déduit que les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles.

Gagnez
des points !

Indiquez sur la figure
les longueurs données
dans l'énoncé.

11 1. Les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires à la même droite (AB), elles sont donc parallèles.

2. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en E. De plus, (AD) // (BC). D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{EC}{ED} = \frac{EB}{EA} = \frac{BC}{AD} \text{ soit } \frac{EC}{ED} = \frac{5,2}{6,5} = \frac{5}{AD}$$

En utilisant l'égalité encadrée, on obtient : $\frac{5,2}{6,5} = \frac{5}{AD}$

$$\frac{5,2}{6,5} = \frac{5}{AD}$$

$$5,2 \times AD = 5 \times 6,5$$

$$AD = \frac{5 \times 6,5}{5,2} = 6,25$$

3. Le triangle EBC est rectangle. Son aire est donnée par

$$\frac{EB \times BC}{2} = \frac{5,2 \times 5}{2} = 13 \text{ cm}^2.$$

4. a) Le coefficient d'agrandissement est donné par

$$\frac{EA}{EB} = \frac{6,5}{5,2} = 1,25.$$

b) Dans un agrandissement de coefficient k , les aires sont multipliées par k^2 .

On en déduit :

$$\text{Aire(ADE)} = 1,25^2 \times \text{Aire(EBC)} = 1,5625 \times 13 = 20,3125 \text{ cm}^2$$

$$\text{c) } \frac{AE \times AD}{2} = \frac{6,25 \times 6,5}{2} = 20,3125.$$

On retrouve ainsi l'aire du triangle ADE en utilisant la formule du calcul de l'aire d'un triangle.

12 1. a) Le coefficient de réduction est donné par :

$$\frac{AN}{AP} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

b) Dans une réduction de rapport k , les longueurs sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 .

Rappel

L'aire d'un triangle est donnée par la formule

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

Rappel

Le coefficient d'agrandissement est donné par

$$\frac{\text{longueur agrandie}}{\text{longueur initiale}}.$$

Rappel

Un coefficient de réduction est un nombre compris entre 0 et 1.

2. a) Le volume d'un cône est donné par la formule $\frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, dans laquelle $\mathcal{B}$ désigne l'aire de la base et h la hauteur du cône.

● La base du cône est un disque d'aire $\pi \times R^2 = \pi \times 4,2^2 = 17,64\pi \text{ cm}^2$.

● $h = AP = 10 \text{ cm}$.

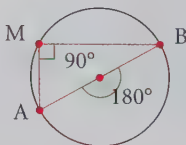
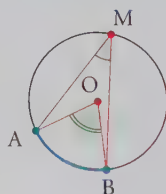
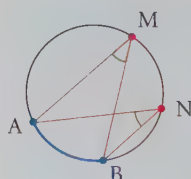
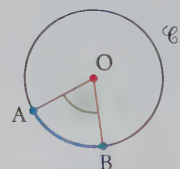
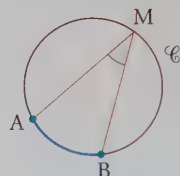
● Le volume du grand cône est $\frac{1}{3} \times 17,64\pi \times 10 = 58,8\pi \text{ cm}^3$ (valeur exacte).

b) Le volume du petit cône est donc $0,8^3 \times 58,8\pi = 30,1056\pi \text{ cm}^3$.

1 Angles inscrits et cercles

1 Vocabulaire

- Soit A, B, M trois points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$.
L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé **angle inscrit**.
Il intercepte l'arc (de cercle) $\widehat{AB}$.
- Soit A et B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé **angle au centre**.
Il intercepte l'arc $\widehat{AB}$.



2 Théorème de l'angle inscrit

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont même mesure.

Ainsi sur le schéma ci-contre, $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

3 Théorème de l'angle au centre

a. Énoncé

Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Ici, on a : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$.

b. Cas particulier du triangle rectangle

Si M est un point du cercle de diamètre [AB], alors le triangle ABM est rectangle en M.

EXERCICE RÉSOLU

► Identifier des angles inscrits et des angles au centre

ÉNONCÉ

1. Parmi les angles suivants, lesquels sont inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$?

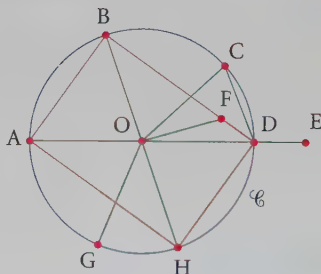
- $\widehat{FDH}$ • $\widehat{EAB}$ • $\widehat{BAH}$ • $\widehat{CDB}$

Précisez alors l'arc intercepté.

2. Parmi les angles suivants, lesquels sont des angles au centre ?

- $\widehat{ABO}$ • $\widehat{DOG}$ • $\widehat{FOD}$ • $\widehat{BOH}$ • $\widehat{BHD}$

Précisez alors l'arc intercepté.



CORRIGÉ

1. • $\widehat{FDH}$: D et H sont sur $\mathcal{C}$, mais pas F qui est à l'intérieur de $\mathcal{C}$. Ce n'est pas un angle inscrit.

• $\widehat{EAB}$: A et B sont sur $\mathcal{C}$, mais E est en dehors de $\mathcal{C}$. Ce n'est pas un angle inscrit.

• $\widehat{BAH}$: A, B et H sont sur $\mathcal{C}$; $\widehat{BAH}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\widehat{BH}$.

• $\widehat{CDB}$: C, D et B sont sur $\mathcal{C}$; $\widehat{CDB}$ est un angle inscrit interceptant $\widehat{CB}$.

2. • $\widehat{ABO}$ n'est pas un angle au centre car son sommet B n'est pas le centre de $\mathcal{C}$.

• $\widehat{DOG}$: Les points D et G sont sur $\mathcal{C}$ de centre O. $\widehat{DOG}$ est un angle au centre interceptant $\widehat{DG}$.

• $\widehat{FOD}$: F n'étant pas sur $\mathcal{C}$, $\widehat{FOD}$ n'est pas un angle au centre.

• $\widehat{BOH}$: O est le centre de $\mathcal{C}$, B et H sont sur $\mathcal{C}$. $\widehat{BOH}$ est un angle au centre interceptant $\widehat{BH}$.

• $\widehat{BHD}$: B, H et D sont 3 points de $\mathcal{C}$, $\widehat{BHD}$ n'est pas un angle au centre, mais un angle inscrit.

Rappel

Un angle inscrit est composé de 3 points situés sur le cercle.

Méthode

Pour trouver l'arc intercepté par $\widehat{BAH}$, on prend les points des deux extrémités : B et H.

Rappel

Le centre du cercle doit être au milieu de l'angle déterminé par 3 points !

Rappel

Dans la définition, les deux « extrémités » de l'angle sont des points du cercle et le point « du milieu », le centre du cercle.

Rappel

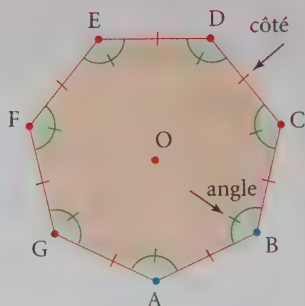
Même si $\widehat{BHD}$ « passe » par O, ce n'est pas un angle au centre : il ne vérifie pas la définition.

2 Polygones réguliers

1 Définition

Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

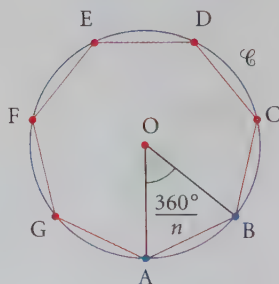
Exemple : ABCDEFG est un heptagone régulier.



2 Propriétés

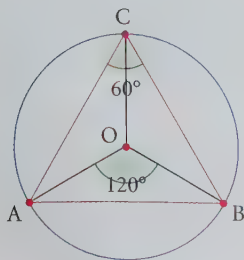
• Les sommets d'un polygone régulier sont situés sur un même cercle $\mathcal{C}$. On dit que ce polygone est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

• Si $[AB]$ est un côté du polygone régulier à n côtés et de centre O, alors l'angle au centre $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$.

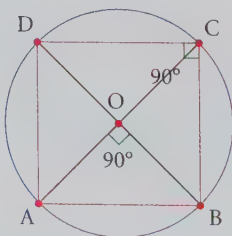


3 Exemples

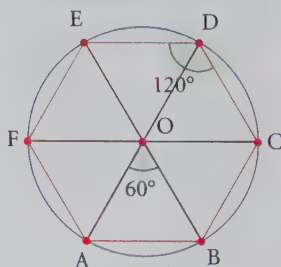
Polygone régulier
à 3 côtés :
le triangle équilatéral



Polygone régulier
à 4 côtés :
le carré



Polygone régulier
à 6 côtés :
l'hexagone régulier



Remarque : nomenclature des polygones

Nombre de côtés	5	6	7	8	9	10	12
Nom	pentagone	hexagone	heptagone	octogone	enneagone	décagone	dodécagone

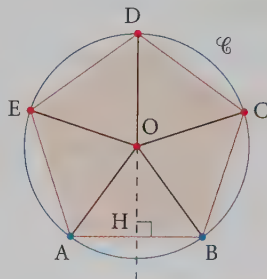
EXERCICE RÉSOLU

► Calculer des angles et des longueurs dans un pentagone régulier

ÉNONCÉ

ABCDE est un pentagone régulier $\mathcal{P}$ inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2 cm.

1. a) Déterminez la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
- b) Quelle est la nature du triangle OAB ?
- c) Déduisez-en les mesures de $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$.
2. a) Dans le triangle OBH, calculez BH (à 0,01 près).
- b) Déduisez-en le périmètre de $\mathcal{P}$.



CORRIGÉ

1. a) Dans le triangle OAB,

$$\widehat{AOB} \text{ mesure } \frac{360}{5} = 72^\circ.$$

- b) Comme $OA = OB$ (rayon de $\mathcal{C}$), le triangle OAB est isocèle en O.

- c) Le triangle OAB étant isocèle en O : $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Dans le triangle OAB : $\widehat{AOB} + \widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 180^\circ$

$$72 + 2\widehat{OAB} = 180$$

$$2\widehat{OAB} = 180 - 72 = 108$$

$$\widehat{OAB} = \frac{108}{2} = 54^\circ. \text{ Par suite, } \widehat{OBA} = 54^\circ$$

2. a) Le triangle OBH est rectangle en H : on utilise la trigonométrie.

$$\cos \widehat{OBH} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{OBH}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BH}{OB}$$

$$\cos 54^\circ = \frac{BH}{2}.$$

Par produit en croix : $BH = 2 \times \cos 54^\circ$, soit $BH \approx 1,18$ cm.

- b) ● Comme le triangle OAB est isocèle, H est le milieu de [AB], on en déduit $AB = 2BH$, soit $AB \approx 2,36$ cm.

● Dans un hexagone régulier, tous les côtés ont même longueur.

Le périmètre de $\mathcal{P}$ est $5 \times AB$, soit environ $5 \times 2,36 = 11,8$ cm.

Rappel

Dans un polygone régulier de centre O où [AB] est un côté :

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Rappel

La somme des angles d'un triangle vaut 180° .

Conseil

On s'assure qu'un triangle est rectangle avant d'y faire de la trigonométrie !

→ Construire un hexagone régulier connaissant son centre et un sommet

ÉNONCÉ

Construisez à la règle et au compas l'hexagone régulier ABCDEF de centre O.

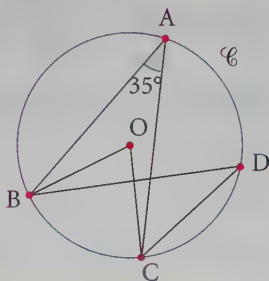
MÉTHODE

1. On construit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OA. Un hexagone régulier $\mathcal{H}$ a pour axe de symétrie (OA). Un 2^e sommet est le point d'intersection D de (OA) avec $\mathcal{C}$.
2. $\mathcal{H}$ est formé de six triangles équilatéraux. Pour placer B et F sur $\mathcal{C}$, 3^e sommets des triangles équilatéraux OAB et OBF, on reporte sur $\mathcal{C}$ la longueur OA.
3. On se place en D. On reporte sur $\mathcal{C}$ la longueur OA : on obtient C et E.
4. On relie les six points par des segments : on a construit $\mathcal{H}$.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
	1. La droite (OA) recoupe le cercle $\mathcal{C}$ de rayon OA au point D, sommet de $\mathcal{H}$.
	2. Avec un compas, on pointe en A l'écartement OA, on coupe alors $\mathcal{C}$ en deux points B et F, sommets de $\mathcal{H}$.
	3. Au point D, on reporte l'écartement OA, $\mathcal{C}$ est intercepté en deux points, C et E. On pouvait aussi à partir des points B et F reporter la longueur OA pour construire C et E.
	4. En reliant les six sommets ABCDEF ainsi construits, on obtient l'hexagone régulier $\mathcal{H}$.

→ Appliquer le théorème de l'angle inscrit et le théorème de l'angle au centre



ÉNONCÉ

1. Déterminez une mesure de l'angle $\widehat{BDC}$.
2. Calculez une mesure de $\widehat{BOC}$.

MÉTHODE

1. On vérifie que l'angle étudié est inscrit dans $\mathcal{C}$. On cherche un autre angle inscrit, de mesure connue, interceptant le même arc. Avec le théorème de l'angle inscrit, on écrit l'égalité des angles.
2. On repère un angle au centre et un angle inscrit, interceptant le même arc, dont l'un est de mesure connue. Avec le théorème de l'angle au centre, on écrit l'égalité des angles.

CORRIGÉ

Solution	Commentaires
● Les points B, C et D sont sur $\mathcal{C}$. $\widehat{BDC}$ est un angle inscrit dans $\mathcal{C}$. Il intercepte l'arc $\widehat{BC}$. ● $\widehat{BAC}$, de mesure 35°, est aussi un angle inscrit (car A, B et C sont sur $\mathcal{C}$) interceptant $\widehat{BC}$. ● D'après le théorème de l'angle inscrit : $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$. En conclusion, $\widehat{BDC} = 35^\circ$.	1. • On repère sur la figure deux angles inscrits qui interceptent le même arc : l'un est celui dont on cherche la valeur, l'autre est de mesure connue. ● Deux angles inscrits interceptant le même arc ont même mesure.
● $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans $\mathcal{C}$ de mesure 35°, interceptant $\widehat{BC}$. ● $\widehat{BOC}$ est un angle au centre (car B et C sont sur $\mathcal{C}$ de centre O) interceptant $\widehat{BC}$. ● D'après le théorème de l'angle au centre : $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$, soit $35^\circ = \frac{1}{2} \times \widehat{BOC}$. On en déduit : $\widehat{BOC} = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$.	2. • On repère un angle inscrit et un angle au centre qui interceptent le même arc : l'un est de mesure connue, l'autre est celui dont on cherche une mesure. ● L'angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.

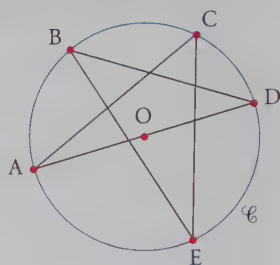


QCM



1 Cochez la ou les réponses correctes.

Les points A, B, C, D et E sont situés sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O.



1. L'angle proposé est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$:

- a) ☐ $\widehat{CAO}$ b) ☐ $\widehat{ADB}$ c) ☐ $\widehat{DAC}$

2. L'angle proposé est un angle au centre :

- a) ☐ $\widehat{CAO}$ b) ☐ $\widehat{DOA}$ c) ☐ $\widehat{COE}$

3. Cet angle intercepte le même arc que l'angle $\widehat{BED}$:

- a) ☐ $\widehat{BAD}$ b) ☐ $\widehat{DOB}$ c) ☐ $\widehat{BCD}$

4. $\widehat{COD}$ est égal à :

- a) ☐ $\widehat{CAD}$ b) ☐ $\frac{1}{2} \times \widehat{CAD}$ c) ☐ $2\widehat{CAD}$

5. Le triangle proposé est rectangle :

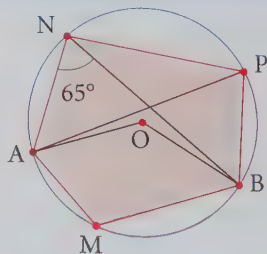
- a) ☐ $\triangle ABD$ b) ☐ $\triangle ACD$ c) ☐ $\triangle AED$

6. $\widehat{BDA}$ est égal à :

- a) ☐ $\widehat{BEA}$ b) ☐ $\widehat{ACB}$ c) ☐ $\widehat{CEA}$

2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
D'après la figure ci-contre :	
1. $\widehat{MOP}$ et $\widehat{PNM}$ interceptent le même arc.	☐ V ☐ F
2. $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc.	☐ V ☐ F
3. $\widehat{APB} = 65^\circ$.	☐ V ☐ F
4. $\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \times \widehat{ANB}$.	☐ V ☐ F
5. Le triangle $\triangle APN$ est rectangle en N.	☐ V ☐ F
6. $\triangle MANPB$ est un pentagone régulier.	☐ V ☐ F
7. $\widehat{AOB} = 130^\circ$.	☐ V ☐ F

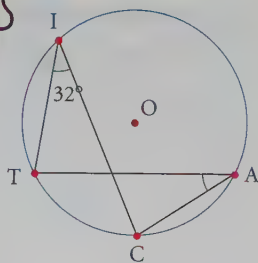


→ Exercices d'entraînement



3 C'est l'histoire de Tic, Tac et Toc...

En utilisant la figure ci-contre, déterminez les mesures des angles $\widehat{TAC}$ et $\widehat{TOC}$.



4 Tic, Tac et Toc, version 2

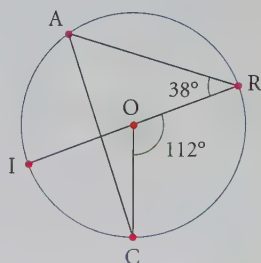
En utilisant la figure ci-contre, où O est le milieu de $[RI]$,

1. calculez $\widehat{RAC}$.

2. a) Étudiez la nature du triangle AIR.

b) Déterminez $\widehat{RIA}$.

c) Déduisez-en $\widehat{RCA}$.



5 Sortez votre matériel de bon géomètre

On considère deux points O et A.

1. Construisez à la règle et au compas le carré ABCD de centre O.

2. ABCDE est un pentagone régulier de centre O.

a) Quelle est la mesure de $\widehat{AOB}$?

b) Déduisez-en sa construction en vous aidant d'un rapporteur.



6 Du triangle à l'hexagone

PLI est un triangle équilatéral de côté 4 cm.

H est le pied de la hauteur issue de P dans le triangle PLI.

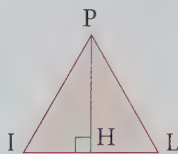
1. a) Calculez la valeur exacte de la hauteur PH.

b) Déduisez-en que l'aire exacte du triangle PLI est $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

2. CELIAN est un hexagone régulier de centre P inscrit dans un cercle de rayon 4 cm.

a) Quelle est la nature du triangle PLI ?

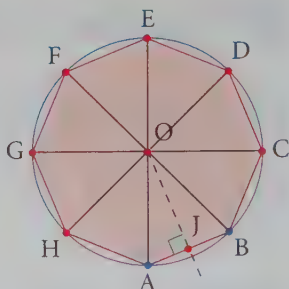
b) Déduisez-en l'aire de CELIAN.



7 Rayon d'un octogone régulier

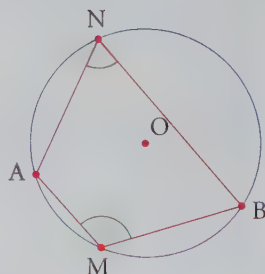
ABCDEFGH est un octogone régulier $\mathcal{O}$ de centre O.

1. a) Quelle est la nature du triangle OAB ?
- b) Calculez les mesures des angles du triangle OAB.
2. a) En sachant que le périmètre de $\mathcal{O}$ est de 24 cm, calculez la longueur AJ où J est le pied de la hauteur issue de O.
- b) Justifiez la mesure de $\widehat{AOJ}$.
- c) Déduisez-en une valeur approchée à 0,01 près du rayon du cercle de centre O circonscrit à $\mathcal{O}$.



8 Des angles inscrits

1. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent-ils le même arc ?
2. a) Quelle est la nature des triangles AOM et MOB ?
- b) En utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle vaut 180° , justifiez que $\widehat{AOB} = 360 - 2\widehat{AMB}$.
- c) Exprimez $\widehat{ANB}$ en fonction de $\widehat{AOB}$.
- d) Déduisez-en que $\widehat{ANB} = 180 - \widehat{AMB}$.
3. On donne $\widehat{AMB} = 65^\circ$. Calculez $\widehat{ANB}$.



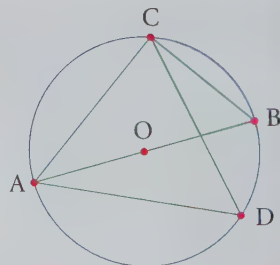
→ Vers le brevet



9 Le classique

Sur la figure ci-contre, le triangle ACD est équilatéral. Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ACD. Le point B est diamétralement opposé au point A sur le cercle.

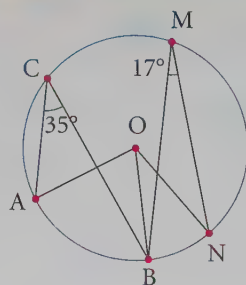
1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Déterminez une mesure de $\widehat{ABC}$.
3. Démontrez que le triangle OBC est équilatéral.
4. Calculez $\widehat{AOC}$.



10 Le deux-en-un

Sur la figure ci-contre, calculez $\widehat{AON}$.

Indication : on utilisera deux fois le théorème de l'angle inscrit.



11 Des angles divers et variés

ABCDEFGHJI est un décagone régulier inscrit dans un cercle de centre O.

Déterminez la mesure de chacun des angles proposés :

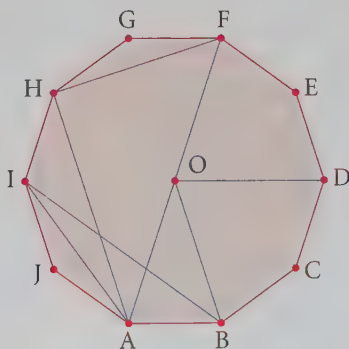
1. $\widehat{BOA}$.

2. $\widehat{OAB}$.

3. $\widehat{AIB}$.

4. $\widehat{BOD}$.

5. $\widehat{AHF}$.



→ QCM

❶ 1. Les points A et C sont sur $\mathcal{C}$, mais pas O.

$\widehat{CAO}$ n'est pas inscrit dans $\mathcal{C}$.

• Les points A, D et B ainsi que les points D, A et C sont sur $\mathcal{C}$: $\widehat{ADB}$ et $\widehat{DAC}$ sont inscrits dans $\mathcal{C}$.

Réponses : **b)** $\widehat{ADB}$ et **c)** $\widehat{DAC}$.

2. • Le sommet de $\widehat{CAO}$ est A qui n'est pas le centre du cercle. Donc $\widehat{CAO}$ n'est pas un angle au centre.

• D et A sont sur $\mathcal{C}$. O est le centre de $\mathcal{C}$. $\widehat{DOA}$ est un angle au centre.

• C et E sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O : $\widehat{COE}$ est un angle au centre.

Réponses : **b)** $\widehat{DOA}$ et **c)** $\widehat{COE}$.

3. $\widehat{BED}$ intercepte l'arc $\widehat{BD}$, en rouge ci-contre.

$\widehat{BAD}$ et $\widehat{DOB}$ interceptent le même arc.

En revanche, $\widehat{BCD}$ intercepte l'arc $\widehat{BD}$ vert, donc pas le même que $\widehat{BED}$.

Réponses : **a)** $\widehat{BAD}$ et **b)** $\widehat{DOB}$.

4. L'angle $\widehat{COD}$ est un angle au centre, interceptant le même arc $\widehat{CD}$ que l'angle inscrit $\widehat{CAD}$. D'après le théorème de l'angle au centre :

$$\widehat{CAD} = \frac{1}{2} \times \widehat{COD}, \text{ qui s'écrit aussi } \widehat{COD} = 2\widehat{CAD}.$$

Réponse : **c)** $2\widehat{CAD}$.

5. • [AD] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Le point B est sur $\mathcal{C}$. Donc le triangle ABD est rectangle en B.

• De même, C est sur $\mathcal{C}$: le triangle ACD est rectangle en C.

• De même, E est sur $\mathcal{C}$: le triangle AED est rectangle en E.

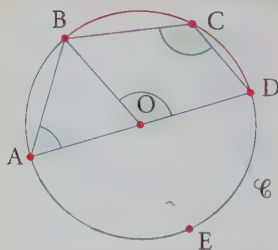
Réponses : **a)** ABD, **b)** ACD et **c)** AED.

Rappel

Un angle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ est formé de trois points de $\mathcal{C}$.

Rappel

Un angle au centre s'écrit :



L'astuce du prof

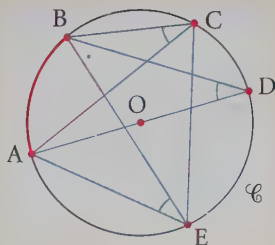
Le théorème de l'angle au centre peut se formuler ainsi : l'angle au centre est le double de l'angle inscrit interceptant le même arc.

6. ● Les angles $\widehat{BDA}$, $\widehat{BEA}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$ (en rouge). Mais $\widehat{CEA}$ intercepte $\widehat{CA}$.

● $\widehat{BDA}$, $\widehat{BEA}$ et $\widehat{ACB}$ sont inscrits dans $\mathcal{C}$.

D'après le théorème de l'angle inscrit, ils sont égaux.

Réponses : a) $\widehat{BEA}$ et b) $\widehat{ACB}$.



L'astuce du prof

Surlignez en couleur les arcs interceptés par les angles demandés.

2 1. Vrai. $\widehat{MOP}$ et $\widehat{PNM}$ interceptent le même arc $\widehat{PM}$.

2. Faux. $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent tous deux un arc $\widehat{AB}$, mais pas le même. $\widehat{AMB}$ intercepte le grand arc $\widehat{AB}$, tandis que $\widehat{ANB}$ intercepte le petit arc $\widehat{AB}$.

Piège à éviter

Il y a deux arcs $\widehat{AB}$: un petit et un grand.

3. Vrai. $\widehat{ANB}$ et $\widehat{APB}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc $\widehat{AB}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, ils sont égaux.

De $\widehat{ANB} = 65^\circ$, on déduit $\widehat{APB} = 65^\circ$.

4. Faux. $\widehat{ANB}$, angle inscrit, et $\widehat{AOB}$, angle au centre, interceptent le même arc $\widehat{AB}$. D'après le théorème de l'angle au centre : $\widehat{ANB} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$.

5. Faux. Le triangle APN est inscrit dans le cercle, mais aucun de ses côtés n'est un diamètre du cercle.

6. Faux. Par exemple, les longueurs AM et NP ne sont pas égales.

7. Vrai. De l'application du théorème de l'angle au centre dans la question 4, il vient $65^\circ = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$. Soit $\widehat{AOB} = 2 \times 65^\circ = 130^\circ$.

Rappel

Un pentagone régulier a tous ses côtés de même longueur.

➔ Exercices d'entraînement

3 • On lit sur la figure $\widehat{TIC} = 32^\circ$.

$\widehat{TIC}$ et $\widehat{TAC}$ sont deux angles inscrits dans le cercle qui interceptent le même arc $\widehat{TC}$.

D'après le théorème de l'angle inscrit, ils sont égaux.

D'où $\widehat{TAC} = 32^\circ$.

• $\widehat{TIC}$ est un angle inscrit dans le cercle de centre O.

$\widehat{TOC}$ est un angle au centre.

D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{TIC} = \frac{1}{2} \times \widehat{TOC}$.

On obtient : $32 = \frac{1}{2} \times \widehat{TOC}$.

D'où $\widehat{TOC} = 2 \times 32$

$$\widehat{TOC} = 64^\circ.$$

4 1. On lit sur la figure $\widehat{ROC} = 112^\circ$.

Les points R, A, et C sont sur le cercle de centre O.

$\widehat{ROC}$ est un angle au centre et $\widehat{RAC}$ est un angle inscrit dans le cercle.

$\widehat{ROC}$ et $\widehat{RAC}$ interceptent le même arc $\widehat{RC}$.

On applique le théorème de l'angle au centre : $\widehat{RAC} = \frac{1}{2} \times \widehat{ROC}$.

On obtient : $\widehat{RAC} = \frac{1}{2} \times 112$

$$\widehat{RAC} = 56^\circ.$$

2. a) R et I sont deux points du cercle de centre O. O étant le milieu de [RI], [RI] est un diamètre du cercle.

Comme A est également un point du cercle, on conclut que le triangle AIR ayant pour côté un diamètre du cercle est rectangle en A.

b) Dans le triangle AIR, on a : $\widehat{ARI} + \widehat{RIA} + \widehat{IAR} = 180^\circ$.

Soit $38 + \widehat{RIA} + 90 = 180$

$$\widehat{RIA} = 180 - 38 - 90$$

$$\widehat{RIA} = 52^\circ.$$

Gagnez
des points !

Deux angles
interceptant le même arc
ont même mesure.

Rappel

Un angle inscrit mesure
la moitié de l'angle
au centre qui intercepte
le même arc.

Gagnez
des points !

On justifie d'abord que
[RI] est un diamètre.

Rappel

La somme des angles
d'un triangle vaut 180° .

c) Les angles $\widehat{RIA}$ et $\widehat{RCA}$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc $\widehat{RA}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, ils ont même mesure, soit $\widehat{RIA} = \widehat{RCA}$.
Finalement : $\widehat{RCA} = 52^\circ$.

5 1. ● On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OA.

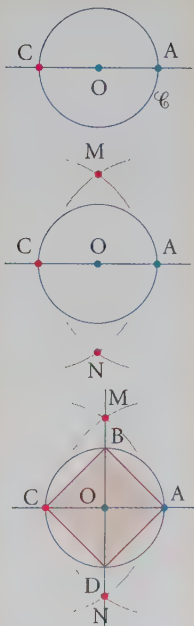
Puis on construit la droite (OA) qui coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point C, second sommet du carré.

● Reste à construire la perpendiculaire à [AC] passant par O : c'est la médiatrice de [AC].

Avec un écartement de compas assez grand, on trace un arc de cercle de centre A « au-dessus » de O, puis un second « en dessous » de O.

À partir de C, en conservant le même écartement, on construit deux arcs recoupant les précédents en deux points M et N, situés sur la médiatrice cherchée.

● La droite (MN) coupe $\mathcal{C}$ en deux points B et D qui sont les deux derniers sommets du carré ABCD.



2. a) Un pentagone est un polygone à 5 côtés.

Dans un pentagone régulier ABCDE de centre O, où [AB] est un côté, $\widehat{AOB} = \frac{360}{5} = 72^\circ$.

b) ● Pour construire le pentagone ABCDE, on commence par tracer le cercle $\mathcal{C}$ de rayon OA ainsi que le segment [OA].

Avec le rapporteur, on construit le point B de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{AOB} = 72^\circ$.

● Avec le compas, on mesure la longueur AB.

On reporte cette longueur à partir de B : on obtient C.

De même à partir de C : on obtient D.

De même à partir de D : on obtient E.

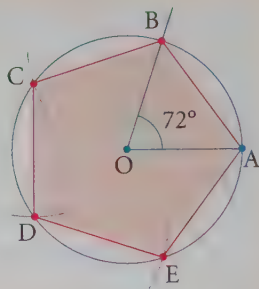
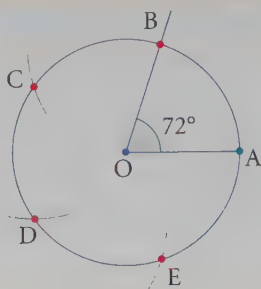
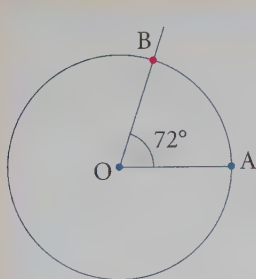
Rappel

Dans un polygone régulier de centre O à n côtés où [AB] est un côté :

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}.$$

L'astuce du prof

Si on reporte la longueur AB à partir de E, on doit retomber sur A.



6 1. a) Dans le triangle PHL rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a : $PL^2 = PH^2 + HL^2$.

[PL] est un côté du triangle équilatéral PLI de côté 4 cm. Donc $PL = 4$ cm.

Dans un triangle équilatéral, le pied de la hauteur issue d'un sommet est aussi le milieu du côté opposé. Ainsi H est milieu de [IL] et $LH = 2$ cm.

L'égalité de Pythagore devient :

$$4^2 = PH^2 + 2^2$$

$$16 = PH^2 + 4$$

$$PH^2 = 16 - 4 = 12.$$

$$PH = \sqrt{12} \text{ ou } 2\sqrt{3} \text{ cm (valeur exacte).}$$

b) L'aire $\mathcal{A}$ du triangle PLI est :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{IL \times PH}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathcal{A} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

On trouve le résultat annoncé.

2. a) Dans un hexagone régulier CELIAN de centre P, on étudie le triangle PLI.

$PL = PI$: le triangle PLI est isocèle en P.

De plus, l'angle au centre $\widehat{IPL}$ vaut $\frac{360}{6} = 60^\circ$.

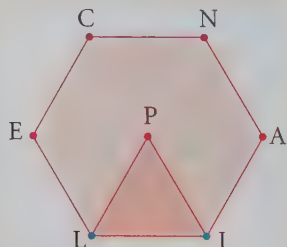
Un triangle isocèle avec un angle mesurant 60° est équilatéral. En conclusion, le triangle PLI est équilatéral.

L'astuce du prof

Connaissant 2 longueurs sur 3 dans un triangle rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur manquante.

Rappel

$$\begin{aligned} \sqrt{12} &= \sqrt{4 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$



b) L'hexagone CELIAN d'aire $\mathcal{A}_H$ est composé de 6 triangles équilatéraux de même aire que celle du triangle PLI. L'aire de CELIAN vaut :

$$\mathcal{A}_H = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ (valeur exacte).}$$

$$\mathcal{A}_H \approx 41,6 \text{ cm}^2 \text{ (valeur arrondie à 0,1 près).}$$

Gagnez
des points !

On a calculé dans la question

2. a. l'aire d'un triangle équilatéral de côté 4 cm.

7 1. a) Dans le triangle OAB, $OA = OB =$ rayon du cercle circonscrit.

Le triangle OAB est isocèle en O.

b) ● [AB] est un côté de l'octogone régulier ABCDEFGH de centre O.

$$\widehat{AOB} \text{ mesure } \frac{360}{8} = 45^\circ.$$

● Le triangle OAB est isocèle en O. Donc $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Dans le triangle OAB, on a : $\widehat{AOB} + \widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 180^\circ$.

$$\text{Soit } 45 + 2\widehat{OAB} = 180$$

$$2\widehat{OAB} = 180 - 45$$

$$2\widehat{OAB} = 135$$

$$\widehat{OAB} = \frac{135}{2}$$

$$\widehat{OAB} = 67,5^\circ$$

De même $\widehat{OBA} = 67,5^\circ$.

2. a) ● ⑧, octogone régulier, a tous ses côtés de même longueur.

Son périmètre $\mathcal{P}$ est :

$$\mathcal{P} = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA = 8 \text{ AB.}$$

De $\mathcal{P} = 24$ cm, on déduit $8 \text{ AB} = 24$.

$$\text{Soit } AB = \frac{24}{8} = 3 \text{ cm.}$$

● Dans le triangle OAB isocèle en O, J est le pied de la hauteur issue de O, c'est aussi le milieu de [AB].

$$\text{Ainsi } AJ = \frac{1}{2} \times AB = \frac{1}{2} \times 3 = 1,5 \text{ cm.}$$

b) Dans le triangle OAB isocèle en O, la hauteur (OJ) est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

$$\text{C'est pourquoi } \widehat{AOJ} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \times 45 = 22,5^\circ.$$

Rappel

Un octogone a 8 côtés.

Gagnez
des points !

Le périmètre

d'un octogone régulier est
 $8 \times$ longueur d'un côté.

c) Dans le triangle OAJ rectangle en J , on connaît la mesure de $\widehat{AOJ}$ ainsi que la longueur de son côté opposé $[AJ]$.

On veut déterminer la longueur de l'hypoténuse $[OA]$.

On utilise la trigonométrie :

$$\sin \widehat{AOJ} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{AOJ}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AJ}{OA}$$

$$\text{Soit } \sin 22,5 = \frac{1,5}{OA}.$$

On en déduit par produit : $OA \times \sin 22,5 = 1,5$

$$\text{soit } OA = \frac{1,5}{\sin 22,5}.$$

À la calculatrice, $OA \approx 3,92$ cm.

8 1. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent tous deux un arc $\widehat{AB}$, mais pas le même.

$\widehat{AMB}$ intercepte le grand arc $\widehat{AB}$. $\widehat{ANB}$ intercepte le petit arc $\widehat{AB}$.

2. a) Dans le triangle AOM , $OA = OM =$ le rayon du cercle.

Ainsi le triangle AOM est isocèle en O .

• De même $OM = OB$: le triangle MOB est aussi isocèle en O .

b) • Dans le triangle AOM :

$$\widehat{AOM} + \widehat{OMA} + \widehat{MAO} = 180^\circ$$

$$\text{Comme } AOM \text{ est isocèle en } O : \widehat{OMA} = \widehat{MAO}.$$

$$\text{D'où } \widehat{AOM} + 2\widehat{OMA} = 180^\circ.$$

$$\bullet \text{ Dans le triangle } MOB : \widehat{MOB} + \widehat{OBM} + \widehat{BMO} = 180^\circ.$$

$$\text{Comme } MOB \text{ est isocèle en } O : \widehat{OBM} = \widehat{BMO}.$$

$$\text{D'où } \widehat{MOB} + 2\widehat{BMO} = 180^\circ.$$

• Par somme de ces deux égalités, il vient :

$$(\widehat{AOM} + 2\widehat{OMA}) + (\widehat{MOB} + 2\widehat{BMO}) = 180 + 180$$

$$(\widehat{AOM} + \widehat{MOB}) + (2\widehat{OMA} + 2\widehat{BMO}) = 360$$

$$\widehat{AOB} + 2(\widehat{OMA} + \widehat{BMO}) = 360$$

$$\widehat{AOB} + 2\widehat{AMB} = 360$$

$$\text{D'où le résultat cherché : } \widehat{AOB} = 360 - 2\widehat{AMB}.$$

Rappel

Le quotient mettant en relation côté opposé et hypoténuse est le sinus.

Piège à éviter

Vérifiez que la calculatrice est en mode degrés !

Piège à éviter

On ne peut pas appliquer le théorème de l'angle inscrit.

Rappel

La somme des angles d'un triangle vaut 180° .

L'astuce du prof

$$\widehat{OMA} + \widehat{BMO} = \widehat{AMB}.$$

L'astuce du prof

On doit toujours trouver le résultat annoncé !

c) $\widehat{ANB}$, angle inscrit dans le cercle, et $\widehat{AOB}$, angle au centre, interceptent tous deux le même arc $\widehat{AB}$.

D'après le théorème de l'angle au centre : $\widehat{ANB} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$.

d) D'après la question 2. b) : $\widehat{AOB} = 360 - 2\widehat{AMB}$.

D'après la question 2. c) : $\widehat{ANB} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$.

On en déduit : $\widehat{ANB} = \frac{1}{2}(360 - 2\widehat{AMB})$

$$\widehat{ANB} = \frac{1}{2}(360 - 2\widehat{AMB})$$

$$\widehat{ANB} = \frac{1}{2} \times 360 - \frac{1}{2} \times 2\widehat{AMB}$$

$$\widehat{ANB} = 180 - \widehat{AMB}.$$

3. On applique le résultat établi à la question 2. d) : $\widehat{ANB} = 180 - \widehat{AMB}$.

Avec $\widehat{AMB} = 65^\circ$, on obtient : $\widehat{ANB} = 180 - 65 = 115^\circ$.

L'astuce du prof

On remplace $\widehat{AOB}$
par son expression.

→ Vers le Brevet

1. Le point B est diamétralement opposé au point A sur le cercle : $[AB]$ est un diamètre du cercle. De plus, C est un point du cercle. Le triangle ABC est donc rectangle en C.

2. Les points A, B et C étant sur le cercle, $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit.

Le triangle ACD est équilatéral : chacun de ses angles mesure 60° .

Notamment $\widehat{ADC} = 60^\circ$.

$\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc $\widehat{AC}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, ils ont même mesure.

On conclut $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

3. ● B et C sont sur le cercle de centre O : $OB = OC$.

On en déduit que le triangle OBC est isocèle en O.

● Les points A, O et B étant alignés : $\widehat{ABC} = \widehat{OBC}$ ($= 60^\circ$).

L'angle $\widehat{OBC}$ du triangle OBC mesure 60° .

● Le triangle OBC est isocèle avec un angle mesurant 60° : il est équilatéral.

L'astuce du prof

Un triangle isocèle avec un
angle de 60° est équilatéral.

4. $\widehat{AOC}$ est un angle au centre. Il intercepte le même arc $\widehat{AC}$ que $\widehat{ABC}$, angle inscrit dans le cercle.

D'après le théorème de l'angle au centre : $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOC}$.

$$\text{Soit } 60 = \frac{1}{2} \times \widehat{AOC}.$$

On en déduit : $\widehat{AOC} = 2 \times 60 = 120^\circ$.

Remarque

ACD est un triangle équilatéral (polygone régulier) de centre O.

$$\widehat{AOC} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

10 $\widehat{AON} = \widehat{AOB} + \widehat{BON}$.

● Déterminons une mesure de $\widehat{AOB}$.

$\widehat{AOB}$ est un angle au centre interceptant le même arc $\widehat{AB}$ que $\widehat{ACB}$, angle inscrit mesurant 35° .

D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$.

$$\text{Soit } 35 = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}.$$

$$\text{D'où } \widehat{AOB} = 2 \times 35.$$

$$\widehat{AOB} = 70^\circ.$$

● Déterminons une mesure de $\widehat{BON}$.

$\widehat{BON}$ est un angle au centre interceptant le même arc

$\widehat{BN}$ que $\widehat{BMN}$, angle inscrit mesurant 17° .

D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{BMN} = \frac{1}{2} \times \widehat{BON}$.

$$\text{Soit } 17 = \frac{1}{2} \times \widehat{BON}.$$

$$\text{D'où } \widehat{BON} = 2 \times 17.$$

$$\widehat{BON} = 34^\circ.$$

● L'angle dont on cherche une mesure est $\widehat{AON}$:

$$\widehat{AON} = \widehat{AOB} + \widehat{BON}.$$

$$\widehat{AON} = 70 + 34$$

$$\widehat{AON} = 104^\circ.$$

Gagnez des points !

On applique deux fois le théorème de l'angle au centre.

Gagnez des points !

N'oubliez pas de répondre à la question !

11 1. Dans le décagone régulier ABCDEFGHIJ de centre O, [AB] étant un côté, $\widehat{BOA} = \frac{360}{10} = 36^\circ$.

2. Comme OA = OB, le triangle OAB est isocèle en O et $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Méthode

On utilise encore la mesure de l'angle au centre d'un polygone régulier.

Dans le triangle OAB, on a : $\widehat{BOA} + \widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 180$

$$36 + 2\widehat{OAB} = 180$$

$$2\widehat{OAB} = 180 - 36$$

$$2\widehat{OAB} = 144$$

$$\widehat{OAB} = \frac{144}{2}, \text{ soit } \widehat{OAB} = 72^\circ.$$

3. $\widehat{AIB}$ est un angle inscrit dans le cercle interceptant le même arc $\widehat{AB}$ que l'angle au centre $\widehat{BOA}$.

D'après le théorème de l'angle au centre : $\widehat{AIB} = \frac{1}{2} \times \widehat{BOA}$.

$$\widehat{AIB} = \frac{1}{2} \times 36 = 18^\circ.$$

$$4. \widehat{BOD} = \widehat{BOC} + \widehat{COD}$$

[BC] et [CD] sont deux côtés du décagone régulier.

$$\text{Donc } \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{BOA} = 36^\circ.$$

$$\text{Par suite : } \widehat{BOD} = 36 + 36 = 72^\circ.$$

5. ● On justifie d'abord que [AF] est un diamètre du cercle.

$$\begin{aligned} \widehat{AOF} &= \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOF} \\ &= 5\widehat{AOB} = 5 \times 36 = 180^\circ. \end{aligned}$$

Les points A, O et F sont alignés.

Comme OA = OF, [AF] est un diamètre du cercle.

● [AF] est un diamètre du cercle et H un point du cercle.

C'est pourquoi le triangle AHF est rectangle en H.

$$\text{D'où } \widehat{AHF} = 90^\circ.$$

Rappel

Tous les angles
d'un décagone régulier
sont égaux.

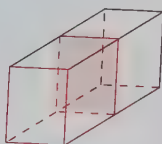
Piège à éviter

Il faut justifier que [AF]
est un diamètre car cela ne
figure pas dans l'énoncé.

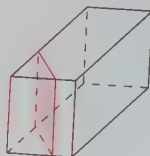
1 Sections planes

1 Section d'un parallélépipède rectangle

La section d'un parallélépipède par un plan parallèle à une de ses faces est un rectangle de même dimension que la face.

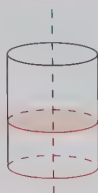


La section d'un parallélépipède par un plan parallèle à une de ses arêtes est un rectangle dont l'un des côtés a la longueur de l'arête.

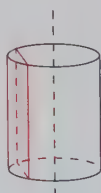


2 Section d'un cylindre de révolution

La section d'un cylindre par un plan parallèle à sa base (et donc perpendiculaire à son axe) est un cercle de même rayon que le cercle de base.

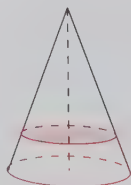


La section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe est un rectangle dont l'un des côtés a pour longueur la hauteur du cylindre.

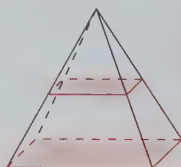


3 Section d'un cône de révolution et d'une pyramide

La section d'un cône par un plan parallèle à sa base (et donc perpendiculaire à son axe) est un cercle. Ce cercle est une réduction de celui de la base.



La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même forme que le polygone de base (c'en est une réduction).



EXERCICE RÉSOLU

► Section d'un cône

ÉNONCÉ

La figure ci-contre représente un cône de révolution de sommet A. On sait que :

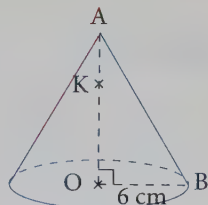
- $OA = 9 \text{ cm}$;
- $AK = 3 \text{ cm}$.

On coupe le cône par un plan parallèle à sa base passant par K.

1. Donnez la nature de la section de ce plan avec le cône.

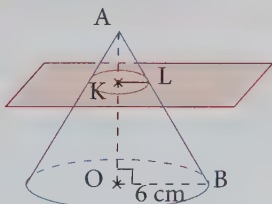
Représentez cette section sur le graphique.

2. Calculez l'aire de la section du cône par ce plan de deux façons différentes.



CORRIGÉ

1. La section d'un cône par un plan parallèle à sa base est un cercle.



Conseil

Dans une figure en perspective, un cercle n'est pas représenté par un cercle. On le représente par un cercle « écrasé ». Il s'agit en fait d'une ellipse.

2. La section est donc un cercle qui est une réduction du cercle de base. Le coefficient de réduction est $k = \frac{AK}{AO} = \frac{1}{3}$.

Première méthode : en utilisant le coefficient de réduction

Dans une réduction de rapport k , si les longueurs sont multipliées par k , les aires sont multipliées par k^2 .

• L'aire de la base est $\pi \times OB^2 = \pi \times 6^2 = 36\pi \text{ cm}^2$.

• L'aire de la section est donc : $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 36\pi = \frac{1}{9} \times 36\pi = \frac{36 \times 4}{9} = 4\pi \text{ cm}^2$.

Deuxième méthode : en utilisant le rayon de la section

• Le rayon de la section est $\frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{ cm}$.

• L'aire de la section est donc $\pi \times 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2$.

Remarque

Il s'agit d'un résultat de cours. À énoncer dès qu'on l'utilise.

Rappel

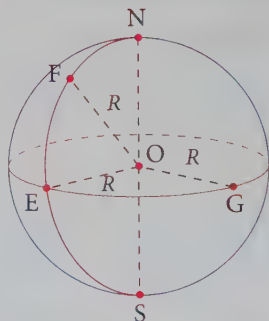
L'aire d'un disque de rayon r est $\pi \times r^2$.

2 La sphère

1 Définition

Une sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble de tous les points de l'espace qui sont situés à la même distance R du point O .

On a $R = OE = OG = OF$.

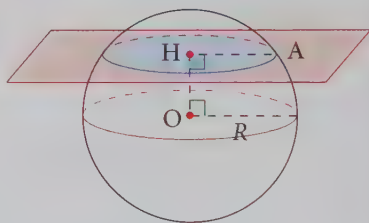


2 Section d'une sphère par un plan

• Si $OH < R$: la section de la sphère par le plan perpendiculaire à (OH) passant par H est un cercle.

• Si $OH = R$: le plan et la sphère sont tangents. Ils n'ont qu'un point en commun (H).

• Si $OH > R$: le plan et la sphère n'ont aucun point commun.



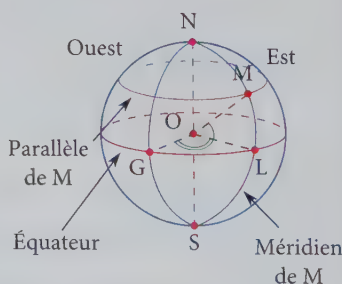
3 Repérage sur la sphère

• L'équateur est le grand cercle situé dans le plan perpendiculaire à l'axe (NS) qui passe par le centre O de la sphère.

• Un méridien est un demi-grand cercle.

• Un parallèle est l'intersection de la sphère terrestre avec un plan parallèle au plan de l'équateur.

• La latitude du point M est la mesure en degré de l'angle $\widehat{MOL}$ suivie de l'indication Nord ou Sud.



• La longitude du point M est la mesure en degré de l'angle $\widehat{GOL}$ suivie de l'indication Est ou Ouest.

EXERCICE RÉSOLU

► Coordonnées géographiques

ÉNONCÉ

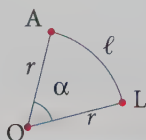
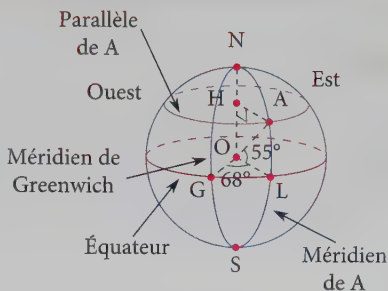
La Terre est assimilée à une sphère de 6 370 km de rayon. On repère une ville par sa latitude et sa longitude. Ces deux mesures sont les coordonnées géographiques de la ville A.

1. Donnez les coordonnées géographiques de la ville A.

2. La longueur d'un arc de cercle est donnée par la formule :

$$\ell = \frac{2\pi \times r \times \alpha}{360}. \text{ Calculez la longueur de l'arc } \widehat{LA} \text{ (au km près).}$$

3. Calculez la longueur OH.



CORRIGÉ

1. ● La longitude est donnée par la mesure de l'angle $\widehat{GOL} = 68^\circ$. De plus, l'angle est mesuré côté Est par rapport au méridien de Greenwich.

● La latitude est donnée par la mesure de l'angle $\widehat{LOA} = 55^\circ$. De plus, le point A se trouve dans l'hémisphère Nord.

Les coordonnées géographiques du point A sont donc (68E ; 55N).

2. En utilisant la formule, on obtient :

$$\ell = \frac{2\pi \times 6\,370 \times 55}{360} \approx 6\,115 \text{ km}$$

3. On a $\widehat{AOH} = 90 - 55 = 45^\circ$. De plus, $OA = 6\,370 \text{ km}$. Dans le triangle AOH rectangle en H,

$$\cos \widehat{AOH} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{AOH}}{\text{hypoténuse}} = \frac{OH}{OA}.$$

$$\cos 45^\circ = \frac{OH}{6\,370}.$$

On en déduit : $OH = 6\,370 \times \cos(45^\circ) \approx 4\,504 \text{ km}$.

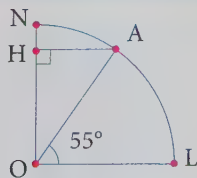
Rappel

Le méridien de Greenwich est le méridien d'origine pour la longitude.

Rappel

La mesure d'un arc est proportionnelle à la mesure de l'angle. On utilise un tableau de proportionnalité.

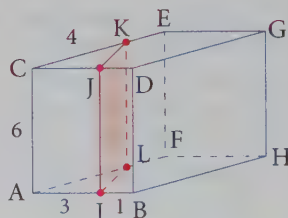
Longueur de l'arc	$2\pi r$	ℓ
Angle	360	α



→ Représenter en vraie grandeur une section plane dans un pavé droit

ÉNONCÉ

On a coupé un pavé droit $ABDCEF$ par un plan parallèle à l'arête $[AC]$. Sans aucun calcul, construisez en vraie grandeur le quadrilatère $IJKL$. Les longueurs sont exprimées en cm.



MÉTHODE

1. On identifie la nature de la section.
2. On utilise les triangles rectangles et les longueurs indiquées pour représenter la section en vraie grandeur.

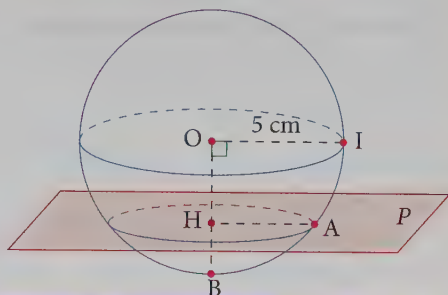
CORRIGÉ

Solution	Commentaires
La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle. Donc $IJKL$ est un rectangle.	1. $IJKL$ n'est pas représenté par un rectangle sur la figure du fait de la perspective cavalière. Mais on sait que toute section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face ou à une arête est un rectangle.
	2. • On commence par tracer le triangle CIK rectangle en C dont on connaît deux longueurs. L'hypoténuse de ce triangle est la largeur du rectangle qu'on doit représenter en vraie grandeur. • On complète le graphique en traçant le rectangle dont on connaît la longueur.

→ Calculer le rayon d'un « parallèle »

ÉNONCÉ

On coupe une sphère de centre O et de rayon 5 cm par un plan P perpendiculaire à (OH) . Sachant que la distance de O à H est $OH = 3$ cm, calculez le rayon de cette section.



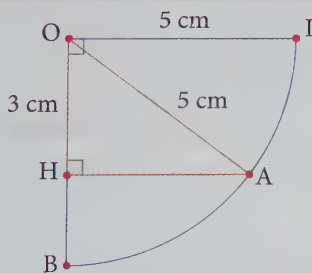
MÉTHODE

1. On identifie la nature de la section.
2. On se place dans un plan judicieusement choisi dans lequel on pourra calculer la longueur demandée.
3. On utilise les théorèmes et propriétés qui permettent de calculer la longueur.

CORRIGÉ

Solution

La section d'une sphère par un plan perpendiculaire à (OH) est un cercle.



Dans le triangle OAH rectangle en H , d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$HO^2 + HA^2 = OA^2$$

$$3^2 + HA^2 = 5^2$$

Soit $HA^2 = 25 - 9$. D'où $HA = \sqrt{16} = 4$
Le rayon de la section est 4 cm.

Commentaires

1. La section n'est pas représentée sur la figure par un cercle du fait de la perspective.

2. On se place dans le plan (OHA) . On indique sur la figure les longueurs que l'on connaît. $[OA]$ est un rayon de la sphère donc il mesure 5 cm et $OH = 3$ cm d'après l'énoncé.

3. Le rayon du cercle cherché est donné par la longueur AH .

→ QCM



1 Cochez la ou les réponses correctes.

Toutes les questions portent sur le cube $ABCDEFGH$ d'arête 3 cm.

1. $\widehat{HCF}$ est égal à :

- a) ☐ 60° b) ☐ 90° c) ☐ 45°

2. Le triangle CGH est :

- a) ☐ rectangle b) ☐ isocèle c) ☐ équilatéral

3. Le triangle CEG est :

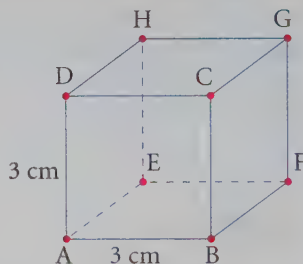
- a) ☐ rectangle b) ☐ isocèle c) ☐ équilatéral

4. CH est égal à :

- a) ☐ $3\sqrt{2}$ cm b) ☐ 3 cm c) ☐ $2\sqrt{3}$ cm

5. On coupe le cube par un plan passant par les points C , H et E . La section est :

- a) ☐ un carré b) ☐ un rectangle c) ☐ un triangle



2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
On considère la pyramide ci-contre. On sait que $SO = 5$ cm et $ABCD$ est un rectangle tel que $BC = 3$ cm. On coupe la pyramide par un plan parallèle à sa base tel que $SO' = 3$ cm. La section est le quadrilatère $A'B'C'D'$.	
1. La hauteur de la pyramide est $[SA]$.	☐ V ☐ F
2. $A'B'C'D'$ est un rectangle.	☐ V ☐ F
3. $B'C' = 2$ cm.	☐ V ☐ F
4. $\frac{SB'}{SB} = 0,6$.	☐ V ☐ F
5. Aire $(ABCD) = \frac{25}{9} \times$ Aire $(A'B'C'D')$.	☐ V ☐ F
6. Volume $(A'B'C'D') = 0,36 \times$ Volume $(ABCD)$.	☐ V ☐ F

➔ Exercices d'entraînement



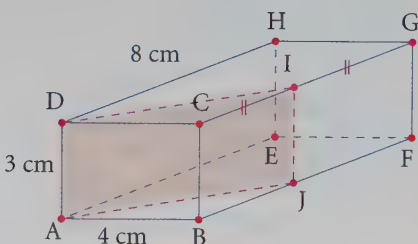
3 Dans un pavé pour commencer

On considère un pavé droit ABCDEFGH. I est le milieu de [CG].

1. Quelle est la nature du quadrilatère ADIJ ? Sans aucun calcul, représentez ce quadrilatère en vraie grandeur.

2. Justifiez que $\widehat{DIC} = 45^\circ$, puis calculez une valeur approchée de DI arrondie au dixième.

3. Un élève affirme que les points G, E et A sont alignés. A-t-il raison ? Justifiez.



4 On continue avec un cylindre

On considère un cylindre de révolution de rayon 3 cm et de hauteur $6\sqrt{5}$ cm.

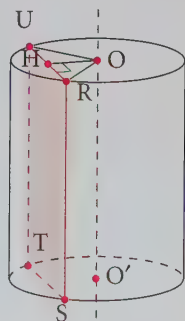
On coupe ce cylindre par un plan parallèle à l'axe (OO') de façon que OH = 2 cm.

1.a) Quelle est la nature de la section ?

b) Quelle est la nature du triangle OUR ? Représentez ce triangle en vraie grandeur.

2.a) Montrez que $UR = 2\sqrt{5}$ cm.

b) Montrez que l'aire de la section RSTU est un nombre entier.



5 Et maintenant : un cône !

On considère un cône de révolution de rayon 4 cm et de hauteur SO = 8 cm.

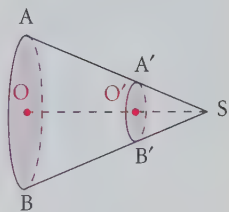
On coupe ce cône par un plan parallèle à sa base de façon que SO' = 3 cm.

1.a) Quelle est la nature de la section ?

b) Calculez le rayon de la section.

2. Déterminez la valeur exacte de l'aire de la base du cône puis déduisez en celle de l'aire de la section.

3. Calculez la mesure de l'angle $\widehat{ASB}$. Donnez une valeur approchée au degré près.



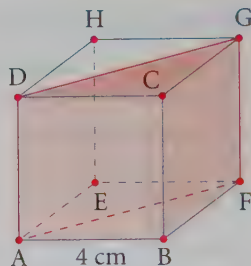
→ Vers le Brevet



6 Un autre solide pour changer

La figure ci-contre représente un cube en perspective dans lequel on a découpé le solide coloré dont les bases sont les triangles DCG et AFB.

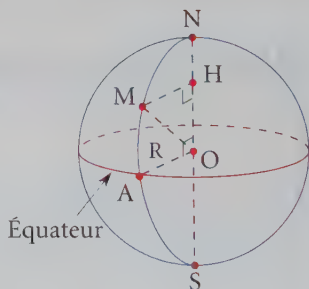
- Quelle est la nature du solide coloré ?
 - Donnez le nombre de faces, sommets et arêtes.
 - Quel est le volume de ce solide ?
2. Tracez un patron du solide coloré en vraie grandeur.



7 Avec la planète Terre

Le dessin ci-contre représente la Terre assimilée à une sphère de rayon $R = 6\,370$ km. Le point M désigne une ville située sur le même méridien que la ville A. La latitude nord de la ville M est donnée par l'angle $\alpha = \widehat{MOA}$. On sait que $OH = 4\,255$ km.

- Calculez (au degré près) la mesure de l'angle $\widehat{MOH}$.
- Déduisez en la latitude nord de la ville située en M.
- La distance entre les villes A et M est donnée par



la longueur de l'arc $\widehat{AM}$. Soit le tableau

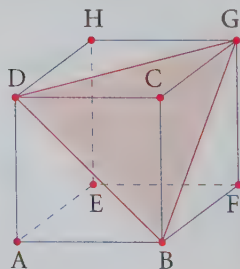
Longueur de l'arc	$2\pi R$	ℓ
Angle (en degré)	360	α

C'est un tableau de proportionnalité, déterminez au kilomètre près la distance séparant ces deux villes.

8 Dans un cube

ABCDEFGH est un cube d'arête 3 cm.

- Quelle est la nature du triangle DGB ? Justifiez.
- a) Quelle est la nature du solide DBCG ?
b) Donnez le nombre de faces, sommets et arêtes.
c) Tracez en vraie grandeur un patron du solide DBCG.
- Un élève affirme que le volume du solide DBCG représente le tiers du volume du cube. A-t-il raison ? Justifiez.



→ QCM

1. ● [CH] est la diagonale du carré DCGH.

● [CF] est la diagonale du carré GCBF.

● [FH] est la diagonale du carré HEFG.

Le triangle HCF a donc ses 3 côtés de même longueur : il est équilatéral. Chacun de ses angles mesure 60° .

Réponse : a) 60° .

2. ● Le quadrilatère CDHG est un carré. Donc $\widehat{CGH} = 90^\circ$.

Le triangle CGH est rectangle.

● $CG = HG$. Donc le triangle CGH est aussi isocèle.

Réponses : a) rectangle et **b)** isocèle.

3. ● Les longueurs CG, GE et CE ne sont pas égales (arête d'une face, diagonale d'une face et diagonale du cube). Donc le triangle n'est ni isocèle, ni équilatéral.

● Les droites (CG) et (GE) sont perpendiculaires, donc le triangle est rectangle.

Réponse : a) rectangle.

4. Le triangle CHG est rectangle en G. D'après le théorème de Pythagore, on écrit :

$$CG^2 + GH^2 = CH^2$$

$$3^2 + 3^2 = CH^2$$

$$9 + 9 = CH^2$$

$$CH^2 = 18$$

$$CH = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

Réponse : a) $3\sqrt{2}$.

5. La section est le quadrilatère CHEB. Dans celui-ci :

● $CH = BE$,

● $HE = CB$,

● $(HE) \perp (EB)$.

On en déduit que CHEB est un rectangle.

Réponse : b) un rectangle.

2. 1. Faux. La hauteur d'une pyramide est orthogonale à sa base. Ce n'est pas le cas de [SA].

Remarque

Les faces d'un cube sont des carrés.

Rappel

Un triangle équilatéral a trois angles mesurant 60° .

L'astuce du prof

La longueur de la diagonale d'un carré de côté a est $a\sqrt{2}$.

Rappel

Un quadrilatère qui a des côtés opposés de même longueur est un parallélogramme. Si en plus, il a un angle droit, c'est un rectangle.

Gagnez des points !

La hauteur de la pyramide est [SO].

2. Vrai. La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que le polygone de base. La base de la pyramide est un rectangle. La section est donc un rectangle.

3. Faux. La section est une réduction de la base. Le coefficient de réduction est $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{3}{5}$. Les longueurs

sont donc multipliées par $\frac{3}{5} = 0,6$.

Ainsi, $B'C' = \frac{3}{5} \times BC = \frac{3}{5} \times 3 = \frac{9}{5} = 1,8$ cm.

4. Vrai. Le coefficient de réduction est $k = \frac{3}{5} = 0,6$, on en déduit que $\frac{SB'}{SB} = 0,6$.

5. Vrai. $A'B'C'D'$ est une réduction de rapport $k = \frac{3}{5}$ de ABCD. On en déduit que ABCD est un agrandissement de $A'B'C'D'$ de rapport $k' = \frac{1}{k} = \frac{5}{3}$.

Dans un agrandissement de rapport $k' = \frac{5}{3}$, les aires

sont multipliées par $k'^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$.

Par conséquent,

$$\text{Aire}(ABCD) = \frac{25}{9} \times \text{Aire}(A'B'C'D').$$

6. Faux. Dans une réduction de rapport $k = 0,6$, les volumes sont multipliés par $k^3 = 0,6^3 = 0,216$.

On en déduit $\text{Volume}(A'B'C'D') = 0,216 \times \text{Volume}(ABCD)$.

Rappel

Le coefficient de réduction est donné par :

$$\frac{\text{longueur réduite}}{\text{longueur initiale}}.$$

C'est un nombre plus petit que 1.

L'astuce du prof

Si une figure F' est une réduction de rapport k d'une figure F , alors F est un agrandissement de F'

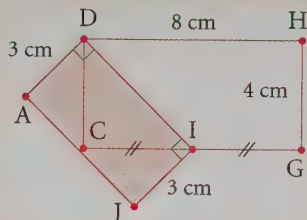
de rapport $\frac{1}{k}$.

→ Exercices d'entraînement

③ 1. La section du cube se fait parallèlement à l'arête [BC]. La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle dont l'un des côtés a la longueur de l'arête. Donc le quadrilatère ADIJ est un rectangle.

Programme de construction

- On commence par tracer le rectangle DCGH. On place le point I au milieu de [CG].
- On trace le côté [DI] du rectangle.
- On complète en traçant les autres côtés du rectangle.



2. ● Le triangle DIC est rectangle isocèle car :

$DC = CI = 4 \text{ cm}$ et $\widehat{DCI}$ est un angle droit.

Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux

$\widehat{D} = \widehat{I} = \alpha$. De plus, le triangle est rectangle en C, donc $\widehat{C} = 90^\circ$.

La somme des angles dans un triangle vaut 180° , donc $90 + \alpha + \alpha = 180$,

$$\text{soit } \alpha = \frac{90}{2} = 45^\circ = \widehat{DIC}.$$

- Dans le triangle rectangle DCI,

$$\cos \widehat{CDI} = \cos 45^\circ = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{D}}{\text{hypoténuse}} = \frac{DC}{DI} = \frac{4}{DI}.$$

Par produit en croix, on obtient :

$$DI \times \cos 45^\circ = 4,$$

$$\text{soit } DI = \frac{4}{\cos 45^\circ} \approx 5,7 \text{ cm}$$

(valeur arrondie au dixième).

3. Le triangle GEA est un triangle rectangle, les points G, E et A ne sont pas alignés. L'élève a tort.

Remarque

En procédant ainsi, on n'utilise pas de valeur approchée pour tracer [DI].

Gagnez des points !

Un triangle rectangle isocèle est (toujours) constitué d'un angle de 90° et de deux angles de 45° .

Gagnez des points !

Pour calculer DI, on pouvait aussi utiliser le sinus.

Piège à éviter

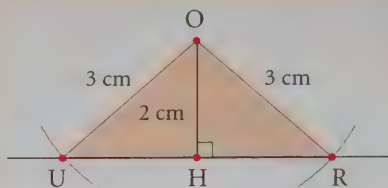
Dans l'espace, il faut prendre en compte la perspective.

4 1. a) La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe est un rectangle dont l'un des côtés a la longueur de la hauteur du cylindre. Donc RSTU est un rectangle.

b) $OU = OR$ car ce sont des rayons du cercle. On en déduit que le triangle OUR est isocèle en O.

Programme de construction

- On trace le segment $[OH]$ de 2 cm.
- On trace une droite perpendiculaire à $[OH]$ passant par H.
- À l'aide du compas, on place les points U et R à 3 cm du point O sur la droite.



2. a) Dans le triangle OHR rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} OH^2 + HR^2 &= OR^2 \\ 2^2 + HR^2 &= 3^2 \\ HR^2 &= 9 - 4 = 5 \\ HR &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Finalement, $UR = 2 \times HR = 2\sqrt{5}$ cm.

C'est le résultat annoncé.

L'astuce du prof

On calcule d'abord HR pour en déduire UR sachant que H est le milieu de $[UR]$ (le triangle est isocèle).

b) La section est le rectangle RSTU. L'aire est donc :

longueur $\times$ largeur $= 6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$ cm². Le résultat est bien un nombre entier.

5 1. a) La section d'un cône par un plan parallèle à sa base est un cercle, le rayon de ce cercle est $O'A'$.

b) Le rayon de la section est une réduction du rayon de la base. Le rapport de réduction est $\frac{SO'}{SO} = \frac{3}{8} = 0,375$.

Le rayon de la base est 4 cm, donc le rayon de la section est $4 \times 0,375 = 1,5$ cm.

2. ● L'aire de la base du cône est

$$\pi \times R^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2.$$

● Dans une réduction, quand les longueurs sont multipliées par $k = 0,375$, les aires sont multipliées par $k^2 = 0,375^2 = 0,140\,625$.

Donc l'aire de la section est $0,140\,625 \times 16\pi = 2,25\pi$ cm².

Remarque

Les valeurs exactes sont données en fonction de π . Il ne faut pas remplacer π par 3,14 qui est une valeur approchée.

3. Il s'agit d'un cône de révolution, donc la demi-droite $[SO)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ASB}$.

Dans le triangle SAO rectangle en O, on écrit

$$\tan \widehat{ASO} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{S}}{\text{côté adjacent à } \widehat{S}} = \frac{AO}{SO} = \frac{4}{8} = 0,5.$$

À l'aide de la calculatrice, $\widehat{ASO} = \tan^{-1}(0,5) \approx 27^\circ$.

Par conséquent, $\widehat{ASB} \approx 2 \times 27 = 54^\circ$.

→ Vers le Brevet

6 1. a) Le solide coloré est un prisme. En effet, il a deux faces polygonales (les triangles DCG et AFB) qui sont superposables et les autres faces sont des rectangles.

b) Ce prisme a 5 faces, 6 sommets et 9 arêtes.

c) Le volume d'un prisme est donné par la formule : aire d'une base $\times$ hauteur.

● La base étant un triangle rectangle d'aire :

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8 \text{ cm}^2.$$

● Sa hauteur est $BC = 4 \text{ cm}$.

● Le volume du prisme est $8 \times 4 = 32 \text{ cm}^3$.

Remarque

Le prisme est obtenu par section du cube selon la diagonale [DG]. On pouvait aussi calculer son volume en divisant par 2 le volume du cube.

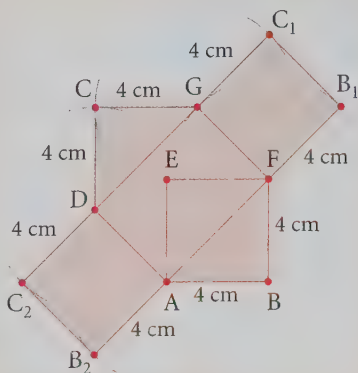
2. Programme de construction

● On commence par tracer le carré ABFE de côté 4 cm.

● On trace ensuite le rectangle AFGD.

● On complète le patron avec le triangle DGC et les carrés GFB₁C₁ et DAB₂C₂.

On vérifie bien que le prisme a 5 faces.



7 1. a) Dans le triangle MOH rectangle en H, on écrit :

$$\cos \widehat{\text{MOH}} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{\text{O}}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{\text{MOH}} = \frac{\text{OH}}{\text{OM}}$$

$$\cos \widehat{\text{MOH}} = \frac{4\,255}{6\,370}$$

$$\widehat{\text{MOH}} = \cos^{-1}\left(\frac{4\,255}{6\,370}\right)$$

$$\widehat{\text{MOH}} \approx 48^\circ.$$

b) L'angle $\widehat{\text{HOA}}$ est un angle droit, donc $\widehat{\text{MOH}} + \widehat{\text{MOA}} = 90^\circ$.

On en déduit : $\widehat{\text{MOA}} = 90 - 48 \approx 42^\circ$.

La latitude nord de la ville située en M est 42° .

2. Dans un tableau de proportionnalité, les produits en croix sont égaux, donc $\ell \times 360 = 2\pi R \times \alpha$.

On obtient $\ell = \frac{2\pi R \times \alpha}{360}$ avec $R = 6\,370$ et $\alpha = 42^\circ$:

$$\ell = \frac{2\pi \times 6\,370 \times 42}{360} \approx 4\,669 \text{ km.}$$

Les 2 villes sont distantes d'environ 4 669 km.

8 1. Les faces d'un cube sont des carrés de même dimension. [DG], [GB] et [DB] sont les diagonales de trois carrés de même dimension.

On en déduit que le triangle DGB est équilatéral.

2. a) Le solide DBCG est une pyramide. En effet ce solide est constitué d'une base (le triangle CDB par exemple) et de 3 autres faces qui sont également des triangles (GCB, GCD et GDB) et qui ont un sommet commun (le point C).

b) Cette pyramide a 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes.

Gagnez
des points !

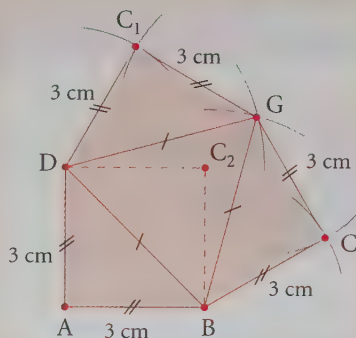
On utilise la calculatrice pour déterminer la mesure de l'angle. Gardez la valeur exacte du quotient et n'oubliez pas les parenthèses pour la calculatrice.

Remarques

- On pouvait prendre comme base un des autres triangles.
- Dans une pyramide, les faces sont forcément des triangles. Comme la base est un triangle, on parle alors de tétraèdre.

c) Programme de construction

- On trace le carré ABCD.
 - On trace la diagonale [BD] qui est un côté du triangle équilatéral DBG.
 - On place le point G à l'aide du compas.
 - On complète le patron (à l'aide du compas) avec les deux triangles DGC et GBC qui sont isocèles (et rectangle) en C.
- On vérifie que la pyramide a bien 4 faces.



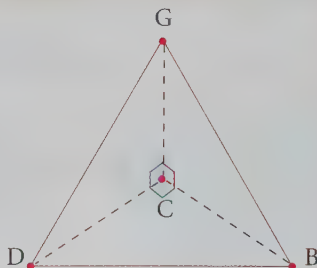
3. Le volume de la pyramide est : $\frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$

où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.

- La base est le triangle DCB rectangle en C.

Son aire est $\frac{CD \times CB}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = 4,5$.

- La hauteur est $h = CG = 3$.



- Le volume de la pyramide est

$$V = \frac{1}{3} \times 4,5 \times 3 = 4,5 \text{ cm}^3.$$

Le volume du cube est $3^3 = 27 \text{ cm}^3$.

Le volume de la pyramide représente $\frac{4,5}{27}$ du volume du cube.

$$\text{Or, } \frac{4,5}{27} = \frac{45}{270} = \frac{9 \times 5}{9 \times 30} = \frac{9 \times 1}{9 \times 6} = \frac{1}{6}.$$

Donc, le volume de la pyramide représente $\frac{1}{6}$ du volume du cube.

En d'autres termes, le volume du cube représente 6 fois le volume de la pyramide. L'élève a donc tort.

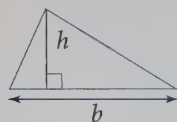
Gagnez
des points !

La proportion que
représente le volume
de la pyramide par rapport
au volume du cube est
 $\frac{\text{volume de la pyramide}}{\text{volume du cube}}$.

1 Formules

1 Les aires

• Triangle



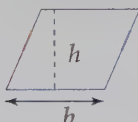
$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$$

• Disque



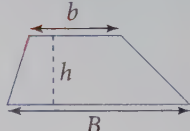
$$\mathcal{A} = \pi r^2$$

• Parallélogramme



$$\mathcal{A} = b \times h$$

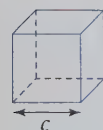
• Trapèze



$$\mathcal{A} = \frac{(b + B) \times h}{2}$$

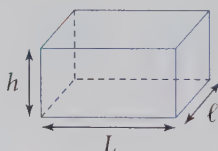
2 Les volumes

• Cube



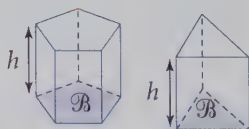
$$\mathcal{V} = c^3$$

• Parallélépipède rectangle (ou pavé droit)



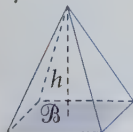
$$\mathcal{V} = \ell \times L \times h$$

• Prisme droit

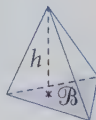


$$\mathcal{V} = \text{surface de } \mathcal{B} \times h$$

• Pyramide



$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{surface de } \mathcal{B} \times h$$

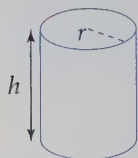


• Cône (de révolution)



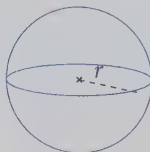
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$$

• Cylindre



$$\mathcal{V} = \pi r^2 h$$

• Boule



$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\mathcal{S} = 4 \pi r^2$$

EXERCICE RÉSOLU

▶ Calculer des volumes dans une pyramide

ÉNONCÉ

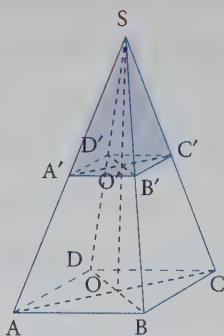
La pyramide SABCD ci-contre représente un flacon de parfum avec son bouchon SA'B'C'D'.

La base est rectangulaire de dimensions :

$$AB = 9 \text{ cm et } BC = 6 \text{ cm.}$$

La hauteur [SO] mesure 15 cm.

1. Calculez le volume de la pyramide SABCD.
2. Sachant que $SO' = 5 \text{ cm}$, calculez le volume du bouchon.
3. Déduisez-en la contenance en mL du flacon de parfum.



CORRIGÉ

1. SABCD est une pyramide de volume $\mathcal{V}$ dont la base est un rectangle :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{surface de la base} \times \text{hauteur}$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (AB \times BC) \times SO = \frac{1}{3} \times 9 \times 6 \times 15 = 270 \text{ cm}^3.$$

2. Le bouchon SA'B'C'D' est la réduction de la pyramide SABCD de coefficient : $\frac{SO'}{SO} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Dans une réduction de coefficient k , les volumes sont multipliés par k^3 .

On en déduit que le volume $\mathcal{V}'$ du bouchon est :

$$\mathcal{V}' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 270 = 10 \text{ cm}^3.$$

3. En conclusion, le flacon peut contenir un volume de parfum $\mathcal{V}''$ tel que :

$$\mathcal{V}'' = \mathcal{V} - \mathcal{V}' = 270 - 10 = 260 \text{ cm}^3.$$

Comme $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$, on conclut que le flacon a une contenance de 260 mL.

Rappel

La base est un rectangle d'aire longueur $\times$ largeur.

Remarque

On pouvait aussi recalculer les dimensions du bouchon et utiliser alors la formule du volume d'une pyramide.

Rappel

$$1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3 \\ = 1 \text{ L} = 1\,000 \text{ mL.}$$



QCM



1 Cochez la ou les réponses correctes.

1. Le volume exact d'une boule de rayon 3 est :

- a) ☐ 36π b) ☐ 72π c) ☐ 113

2. L'aire d'une sphère de rayon 3 est :

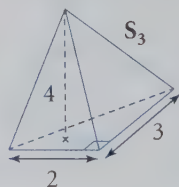
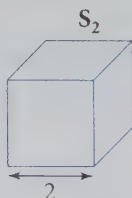
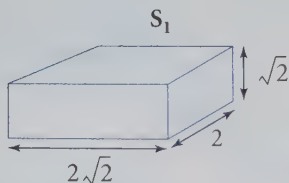
- a) ☐ 6π b) ☐ 36π c) ☐ 72π

3. $\frac{1}{3} \times$ surface de la base $\times$ hauteur est la formule donnant le volume :

- a) ☐ d'un cône de révolution
b) ☐ d'une pyramide
c) ☐ d'un prisme droit

4. Ce solide a pour volume 8 :

- a) ☐ le parallélépipède S_1
b) ☐ le cube de côté S_2
c) ☐ la pyramide S_3 dont la base est un triangle rectangle rectangle



2 Répondez par vrai ou faux.

Affirmations	Réponse
1. Le volume d'un cube de côté 10 cm est 1 litre.	☐ V ☐ F
2. L'aire d'une sphère de rayon 10 est 400.	☐ V ☐ F
3. Le volume d'une boule de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^2$.	☐ V ☐ F
4. Si on multiplie par 2 le rayon d'une boule, son volume double.	☐ V ☐ F
5. Le volume d'un cône de révolution de rayon 1 et de hauteur 1 est $\frac{\pi}{3}$.	☐ V ☐ F

➔ Exercices d'entraînement



3 Calculs sur sphères et boules

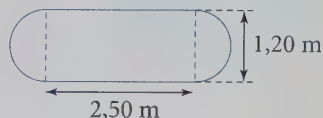
Complétez par des valeurs exactes les données manquantes relatives à une sphère de rayon r .

Rayon r	12 m		2 dm
Aire $\mathcal{A}$		$1,44 \pi \text{ cm}^2$	
Volume $\mathcal{V}$			

4 Calculs sur une citerne

Une citerne à gaz est formée d'un cylindre et d'une demi-sphère à chaque extrémité.

Calculez les valeurs exactes puis approchées (à 0,1 près) de la surface et du volume de la citerne.



5 Une niche-palace !

Fabien construit une niche pour son chien.

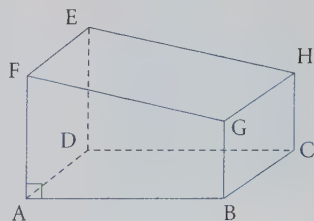
Cette niche est un prisme droit, avec une façade en forme de trapèze rectangle EFGH.

On a : $AB = 3 \text{ m}$, $AF = 2 \text{ m}$, $BC = 2 \text{ m}$, $BG = 1,50 \text{ m}$.

1. Quel est le volume de la niche ?

2. Pour peindre les quatre façades de la niche,

Fabien aura-t-il assez d'un pot de peinture proposé pour 18 m^2 ?



6 C'est l'histoire d'une bille dans un verre

Dans un verre cylindrique de 14 cm de haut et de 3 cm de rayon, on met 10 cm d'eau. Puis on met une bille de 4 cm de diamètre.

1. Quel est le volume exact de la bille ?

2. De quelle hauteur en cm s'élève le niveau d'eau ?

→ Vers le Brevet



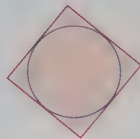
7 Joyeux Noël

Une bougie cylindrique haute de 20 cm et de 3 cm de rayon est vendue pour Noël.

1. Quel volume de cire au cm^3 près est utilisé pour la fabrication de la bougie ?

2. Pour expédier une bougie, des boîtes en forme de pavé sont prévues, de façon que la bougie entre exactement dans la boîte (comme dans la vue ci-contre). Quel est le volume d'une telle boîte ?

Vue de dessus



3. Quel pourcentage de la boîte (arrondi à l'unité) occupe la bougie ?

8 Découpe de pavé

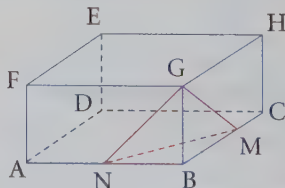
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

On donne les dimensions : $AB = 20$, $BC = 12$, $BG = 7,2$, $BM = 7$, $BN = 10$.

1. a) Calculez l'aire du triangle BNM.

b) Déduisez-en que la pyramide $\mathcal{P}$ de sommet G et de base le triangle BNM a pour volume $1\,728\text{ cm}^3$.

2. On considère le solide $\mathcal{S}$ obtenu en sectionnant la pyramide $\mathcal{P}$ du pavé. Quel est le volume de $\mathcal{S}$?

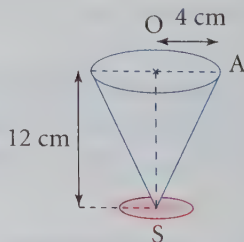


9 Une petite soif ?

Un verre a la forme d'un cône de révolution de sommet S, de hauteur [OS] et de rayon [OA].

1. Montrez que le volume exact du verre est 64π .

2. Les verres étant pleins aux trois-quarts, combien de verres sont remplis avec une bouteille d'un litre ?



→ QCM

1. Le volume exact $\mathcal{V}$ d'une boule de rayon 3 est :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi.$$

Réponse : a) 36π .

2. L'aire exacte $\mathcal{A}$ d'une boule de rayon 3 est :

$$\mathcal{A} = 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 3^2 = 36\pi.$$

Réponse : a) 36π .

3. ● Le volume d'un cône est $\frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$.

Or πr^2 est l'aire du disque « de base ».

La **réponse a)** est correcte.

● De plus, le volume d'une pyramide est $\frac{1}{3} \times \text{surface de } \mathcal{B} \times h$.

En revanche, le volume d'un prisme droit est surface de $\mathcal{B} \times h$.

Réponses : a) d'un cône de révolution et **b)** d'une pyramide.

4. ● Le pavé S_1 a pour volume :

$$\ell \times L \times h = 2\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4 \times 2 = 8.$$

● Le cube S_2 a pour volume $c^3 = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

● La pyramide S_3 a pour volume :

$$\frac{1}{3} \times \mathcal{S}_{\text{base}} \times \text{hauteur} = \frac{1}{3} \times \frac{(2 \times 3)}{2} \times 4 = \frac{1}{3} \times 3 \times 4 = 4.$$

Réponses : a) le parallélépipède S_1 et **b)** le cube de côté S_2 .

2. 1. Vrai. Un cube de côté 10 cm a pour volume $10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$.

De plus $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ et $1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$. Ainsi $1\,000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L}$.

2. Faux. L'aire d'une sphère de rayon 10 est $4\pi \times 10^2 \approx 1\,256$.

3. Faux. Dans la formule proposée, le r doit être au cube.

4. Faux. Si on multiplie par 2 le rayon de la boule (c'est une longueur), alors son volume est multiplié par $2^3 = 8$.

5. Vrai. Un cône de révolution de hauteur 1 et de rayon

1 a pour volume : $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{3}\pi$.

Gagnez
des points !

Pour avoir la valeur exacte,
on calcule seulement

$$\frac{4}{3} \times 3^3.$$

Piège à éviter

La base d'un cône est
un disque de rayon πr^2 .

Rappel

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.$$

Gagnez
des points !

La base de S_3 est un triangle

$$\text{rectangle d'aire } \frac{b \times h}{2}$$

avec $b = 2$ et $h = 3$.

Rappel

Dans un agrandissement,
quand les longueurs
sont multipliées par k , les
volumes sont multipliés
par k^3 .

→ Exercices d'entraînement

③ • Une sphère S_1 a pour rayon $r = 12$ m.

Son aire exacte est $\mathcal{A}_1 = 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 12^2 = 576\pi \text{ m}^2$.

Son volume exact est $\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 12^3 = 2\,304\pi \text{ m}^3$.

• Une sphère S_2 a pour aire $\mathcal{A}_1 = 1,44\pi \text{ cm}^2$.

On cherche son rayon r . De $\mathcal{A}_2 = 4\pi r^2$, il vient : $4\pi r^2 = 1,44\pi$.

Soit $4r^2 = 1,44$

$$r^2 = \frac{1,44}{4} = 0,36$$

$$r = \sqrt{0,36} \text{ ou } r = -\sqrt{0,36}$$

$$r = 0,6 \text{ ou } r = -0,6$$

La solution négative n'est pas acceptable car un rayon est une grandeur positive. On conclut $r = 0,6$ cm.

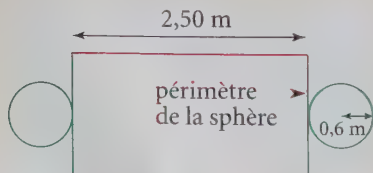
Le volume exact de S_2 est : $\mathcal{V}_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 0,6^3 = 0,288\pi \text{ cm}^3$.

• Une sphère S_3 a pour rayon $r = 2$ dm.

Son aire exacte est $\mathcal{A}_3 = 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 2^2 = 16\pi \text{ dm}^2$.

Son volume exact est $\mathcal{V}_3 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi \text{ dm}^3$.

④ • L'aire $\mathcal{A}$ de la citerne se décompose comme l'aire $\mathcal{A}_1$ des deux demi-sphères et l'aire latérale $\mathcal{A}_2$ d'un cylindre :



$$\mathcal{A}_1 = 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 0,6^2 = 1,44\pi.$$

L'aire latérale $\mathcal{A}_2$ du cylindre est l'aire d'un rectangle de longueur 2,50 m et de largeur le périmètre du cercle ($2\pi r$).

$$\mathcal{A}_2 = 2\pi r \times h = 2 \times \pi \times 0,6 \times 2,5 = 3\pi.$$

D'où : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 1,44\pi + 3\pi = 4,44\pi$ (valeur exacte).

Rappel

L'équation $x^2 = a$,
avec $a > 0$, admet
2 solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Piège à éviter

Sur le schéma, c'est
le diamètre de la sphère
(1,20 m) qui est donné.

$$\text{rayon} = \frac{\text{diamètre}}{2}.$$

Rappel

L'aire latérale
d'un cylindre de rayon r
est $2\pi rh$.

$\mathcal{A} \approx 13,9 \text{ m}^2$ (valeur approchée à 0,1 près).

● Le volume $\mathcal{V}$ de la citerne est le volume $\mathcal{V}_1$ des deux demi-boules ajouté au volume $\mathcal{V}_2$ du cylindre :

$$\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 0,6^3 = 0,288\pi$$

$$\mathcal{V}_2 = \pi r^2 \times h = \pi \times 0,6^2 \times 2,5 = 0,9\pi$$

D'où : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = 0,288\pi + 0,9\pi = 1,188\pi$ (valeur exacte)

$$\mathcal{V} \approx 3,7 \text{ m}^3 \text{ (valeur approchée à 0,1 près).}$$

Gagnez
des points !

Le volume de 2 demi-boules
est le volume d'une boule.

5 1. Le volume $\mathcal{V}$ de la niche est celui d'un prisme droit de hauteur $h = BC = 2 \text{ m}$, dont la base est un trapèze rectangle d'aire $\mathcal{A}_{ABGF}$.

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABGF} \times h$$

$$\mathcal{V} = \frac{(BG + AF) \times AB}{2} \times h = \frac{(1,5 + 2) \times 3}{2} \times 2$$

$$\mathcal{V} = 10,5 \text{ m}^3.$$

Gagnez
des points !

ABGF est un trapèze d'aire

$$\frac{(b + B) \times h}{2}$$

2. Les quatre façades de la niche sont les deux trapèzes rectangles de mêmes dimensions ABGF et DCHE, ainsi que les rectangles BCHG et ADEF.

L'aire $\mathcal{A}$ de ces quatre surfaces est :

$$\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_{ABGF} + \mathcal{A}_{BCHG} + \mathcal{A}_{ADEF}$$

$$\mathcal{A} = 2 \times \frac{(1,5 + 2) \times 3}{2} + 2 \times 1,5 + 2 \times 2$$

$$\mathcal{A} = 17,5 \text{ m}^2.$$

Avec son pot de peinture annoncé pour 18 m^2 , Fabien aura assez de peinture.

6 1. La bille a un diamètre de 3 cm, soit un rayon $r = 1,5 \text{ cm}$.

Son volume est $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 1,5^3 = 4,5\pi$ ($\approx 14,1 \text{ cm}^3$).

2. Le verre est un cylindre de rayon 3 cm. On cherche alors la hauteur h d'un cylindre de rayon 3 cm ayant pour volume $4,5\pi$.

On cherche h telle que : $\pi \times 3^2 \times h = 4,5\pi$.

On résout l'équation : $9\pi h = 4,5\pi$.

On déduit : $9h = 4,5$.

Soit $h = \frac{4,5}{9} = 0,5 \text{ cm}$.

Le niveau d'eau s'élève de 0,5 cm.

L'astuce du prof

On cherche h telle que
le volume du cylindre
de hauteur h soit égal
au volume de la bille.

Piège à éviter

La donnée de 10 cm d'eau
dans le verre était inutile.

→ Vers le Brevet

7 1. La bougie est un cylindre de volume :

$$\mathcal{V}_{\text{bougie}} = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 20 \approx 565 \text{ cm}^3.$$

2. La boîte a la forme d'un parallélépipède rectangle (pavé droit) de volume :

$$\mathcal{V}_{\text{boîte}} = \ell \times L \times h = 6 \times 6 \times 20 = 720 \text{ cm}^3.$$

3. L'espace occupé par la bougie dans la boîte est :

$$\frac{\mathcal{V}_{\text{bougie}}}{\mathcal{V}_{\text{boîte}}} = \frac{565}{720} \approx 0,78, \text{ soit } 78 \%.$$

Rappel

Le pourcentage cherché se calcule comme :

$$\frac{\text{volume de la bougie}}{\text{volume de la boîte}}$$

8 1. a) Le triangle BNM est rectangle en B et d'aire $\mathcal{A}$ telle que :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{BN \times BM}{2} = \frac{10 \times 7}{2} = 35 \text{ cm}^2.$$

b) Le volume $\mathcal{V}_1$ de la pyramide $\mathcal{P}$ de base le triangle BNM est :

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times BG = \frac{1}{3} \times 35 \times 7,2 = 84 \text{ cm}^3.$$

L'astuce du prof

L'aire d'un triangle rectangle est le demi-produit des longueurs des côtés perpendiculaires.

2. ● On calcule d'abord le volume $\mathcal{V}_2$ du parallélépipède rectangle :

$$\mathcal{V}_2 = AB \times BC \times BG = 20 \times 12 \times 7,2 = 1\,728 \text{ cm}^3.$$

● Le volume $\mathcal{V}_3$ du solide coupé s'obtient alors comme :

$$\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1 = 1\,728 - 84 = 1\,644 \text{ cm}^3.$$

9 1. Le verre est un cône de volume :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ avec } r = 4 \text{ cm et } h = 12 \text{ cm}$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 12 = 64\pi.$$

2. ● Un verre, plein aux trois quarts, contient :

$$\frac{3}{4} \times 64\pi = 48\pi \text{ soit } \approx 150,8 \text{ cm}^3.$$

● $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3.$

Une bouteille d'un litre permet de remplir :

$$\frac{1\,000}{150,8} \approx 6,6 \text{ soit } 6 \text{ verres pleins.}$$

Gagnez des points !

On calcule d'abord le volume de liquide versé dans un verre.

Gagnez des points !

Le 7^e verre ne sera pas rempli aux $\frac{3}{4}$.

Sujet de brevet

→ Sujet de brevet

France métropolitaine, juin 2009

Activités numériques

EXERCICE 1

1. Calculer A :

$$A = \frac{8 + 3 \times 4}{1 + 2 \times 1,5} \quad [1 \text{ pt}]$$

2. Pour calculer A, un élève a tapé sur sa calculatrice la succession de touches ci-dessous :

$\boxed{8} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{\times} \boxed{4} \boxed{:} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\times} \boxed{1} \boxed{\cdot} \boxed{5} \boxed{=}$

Expliquer pourquoi il n'obtient pas le bon résultat.

[1 pt]

EXERCICE 2

Trois personnes, Aline, Bernard et Claude, ont chacune un sac de billes. Chacune tire au hasard une bille de son sac.

1. Le contenu des sacs est le suivant :

Sac d'Aline :

5 billes rouges

Sac de Bernard :

10 billes rouges
et 30 billes noires

Sac de Claude :

100 billes rouges
et 3 billes noires

Laquelle de ces personnes a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge ? [2 pts]

2. On souhaite qu'Aline ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge. Avant le tirage, combien de billes noires faut-il ajouter pour cela dans le sac d'Aline ? [1,5 pt]

EXERCICE 3

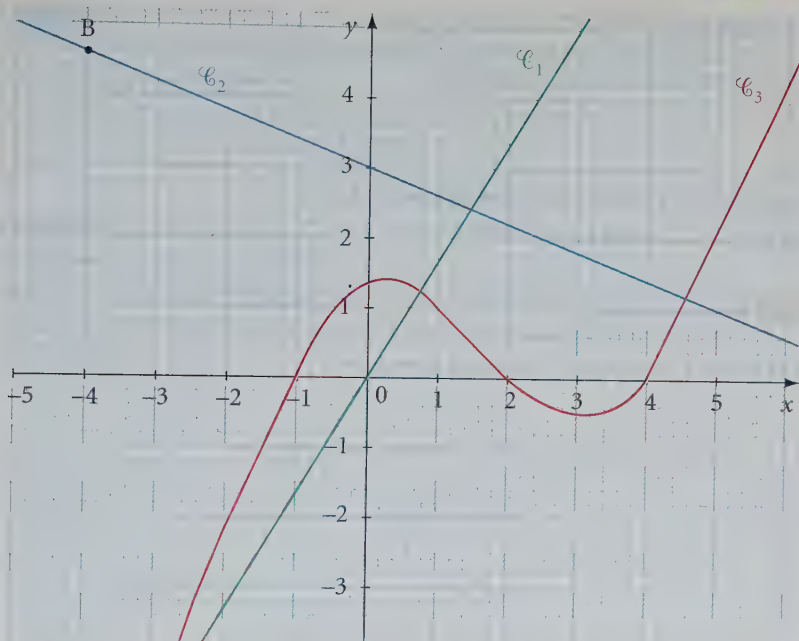
On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions.

Ces représentations sont nommées $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

L'une d'entre elle est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Une autre est la représentation graphique de la fonction f telle que :

$$f: x \mapsto -0,4x + 3.$$



1. Lire graphiquement les coordonnées du point B. [0,5 pt]
2. Par lecture graphique, déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_3$ avec l'axe des abscisses. [1 pt]
3. Laquelle de ces représentations est celle de la fonction linéaire ? Justifier. [1 pt]
4. Laquelle de ces représentations est celle de la fonction f ? Justifier. [1 pt]
5. Quel est l'antécédent de 1 par la fonction f ? Justifier par un calcul. [1,5 pt]
6. A est le point de coordonnées (4,6 ; 1,2). A appartient-il à $\mathcal{C}_2$? Justifier par un calcul. [1,5 pt]

Activités géométriques

EXERCICE 1

L'unité de longueur est le centimètre.

ABC est un triangle tel que $AB = 16$ cm, $AC = 14$ cm et $BC = 8$ cm.

1. a) Tracer en vraie grandeur le triangle ABC. [1 pt]
- b) Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier. [2 pts]

2. Le mathématicien Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle) a trouvé une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle. En notant a, b, c les longueurs des trois côtés et p son périmètre, l'aire du triangle est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - a \right) \left(\frac{p}{2} - b \right) \left(\frac{p}{2} - c \right)}.$$

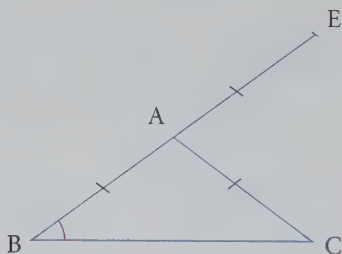
Calculer à l'aide de cette formule l'aire du triangle ABC.

Donner le résultat arrondi au cm^2 près.

[2 pts]

EXERCICE 2

Dans cet exercice, on étudie la figure ci-dessous où :



• ABC est un triangle isocèle tel que :

$$AB = AC = 4 \text{ cm.}$$

• E est le symétrique de B par rapport à A.

Partie A

On se place dans le cas particulier où la mesure de $\widehat{ABC}$ est 43° .

1. Construire la figure en vraie grandeur.
2. Quelle est la nature du triangle BCE ? Justifier.
3. Prouver que l'angle $\widehat{EAC}$ mesure 86° .

[1 pt]

[1,5 pt]

[2 pts]

Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas général où la mesure de $\widehat{ABC}$ n'est pas donnée. Jean affirme que pour n'importe quelle valeur de $\widehat{ABC}$, on a :

$$\widehat{EAC} = 2\widehat{ABC}.$$

Jean a-t-il raison ? Faire apparaître sur la copie la démarche utilisée.

[2,5 pts]

Problème

On considère un triangle ABC tel que :

$$AB = 17,5 \text{ cm} ; \quad BC = 14 \text{ cm} ; \quad AC = 10,5 \text{ cm}.$$

Partie A

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

[1 pt]

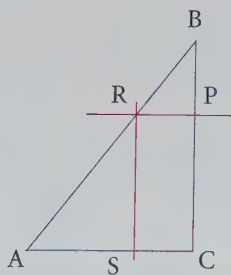
2. Soit P un point du segment [BC].

La parallèle à la droite (AC) passant par P coupe le segment [AB] en R.

La parallèle à la droite (BC) passant par R coupe le segment [AC] en S.

Montrer que le quadrilatère PRSC est un rectangle.

[1,5 pt]



La figure n'est pas en vraie grandeur.

3. Dans cette question, on suppose que le point P est situé à 5 cm du point B.

a) Calculer la longueur PR.

[1,5 pt]

b) Calculer l'aire du rectangle PRSC.

[1 pt]

Partie B

On déplace le point P sur le segment [BC] et on souhaite savoir quelle est la position du point P pour laquelle l'aire du rectangle PRSC est maximale.

1. L'utilisation d'un tableur a conduit au tableau de valeurs suivant :

Longueur BP en cm	0	1	3	5	8	10	12	14
Aire de PRSC en cm^2	0	9,75	24,75		36		18	0

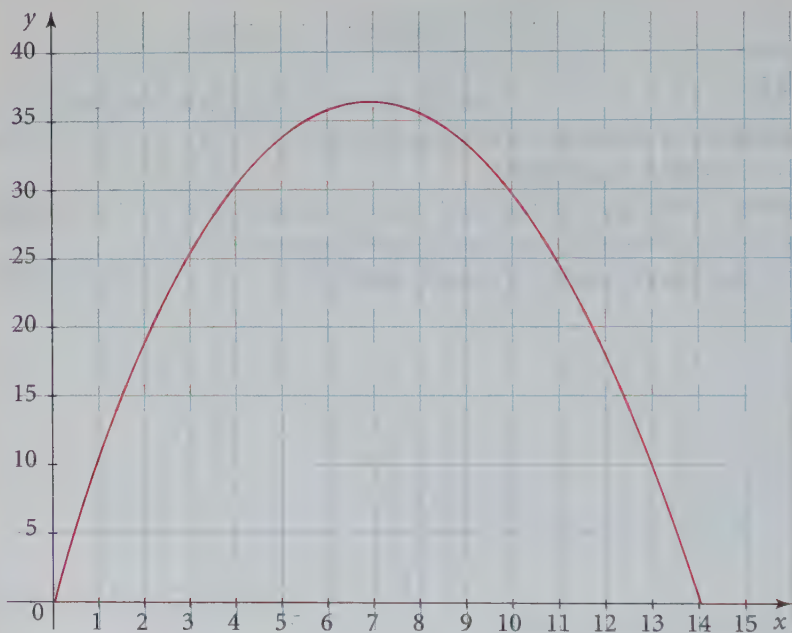
Indiquer les deux valeurs manquantes du tableau.

Justifier par un calcul la valeur trouvée pour BP = 10 cm.

[1,5 pt]

2. Un logiciel a permis d'obtenir la représentation graphique suivante.

Aire du rectangle PRSC en fonction de la longueur BP



À l'aide d'une lecture graphique, donner :

- a) les valeurs de BP pour lesquelles le rectangle PRSC a une aire de 18 cm^2 . [1 pt]
- b) la valeur de BP pour laquelle l'aire du rectangle semble maximale. [1 pt]
- c) un encadrement à 1 cm^2 près de l'aire maximale du rectangle PRSC. [1 pt]

Partie C

- 1. Exprimer PC en fonction de BP. [0,5 pt]
- 2. Démontrer que PR est égale à $0,75 \times \text{BP}$. [1 pt]
- 3. Pour quelle valeur de BP le rectangle PRSC est-il un carré ? [1 pt]

MÉTHODE

→ Activités numériques

EXERCICE 1

1. Les multiplications/divisions sont prioritaires devant les additions/soustractions.
2. Selon les règles de priorités opératoires, on calcule d'abord le contenu des parenthèses (quand il y en a !), puis les multiplications/divisions et enfin les additions/soustractions.

EXERCICE 2

1. La probabilité d'avoir une bille rouge se calcule comme :

$$\frac{\text{nombre de billes rouges}}{\text{nombre de billes dans le sac}}$$

2. On appelle x le nombre de billes noires à ajouter dans le cas d'Aline. On calcule la nouvelle probabilité pour Aline d'avoir une bille rouge.
La probabilité pour Bernard d'avoir une bille rouge a été calculée dans la question 1. On obtient une équation du premier degré.

EXERCICE 3

1. Les coordonnées du point B sont données par la lecture de son abscisse (x) et de son ordonnée (y).
2. On lit les abscisses (les x) des points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ avec l'axe des x . Il y en a trois.
3. Une fonction linéaire se représente graphiquement par une droite passant par l'origine du repère.
4. f est une fonction affine, représentée graphiquement par une droite.
5. On résout l'équation $f(x) = 1$.
6. On calcule $f(x_A)$ et on compare à y_A .

→ Activités géométriques

EXERCICE 1

1. a) On utilise le compas.
- b) On calcule AB^2 , puis $AC^2 + BC^2$. S'il y a égalité, on conclut avec la réciproque du théorème de Pythagore ; sinon, on applique la contraposée du théorème de Pythagore.

2. On commence par calculer le périmètre p du triangle. Puis on remplace dans la formule donnée.

EXERCICE 2

Partie A

1. En premier, on trace une demi-droite $[BC)$, puis équipé de son rapporteur et son compas, on construit le point A, puis C.

2. Remarquant que $AB = AC = AE$, le triangle ABC est inscrit dans un cercle. On utilise ensuite un théorème liant triangle et cercle.

3. D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{EBC} = \frac{1}{2} \times \widehat{EAC}$. Or on connaît $\widehat{EBC}$.

Partie B

On refait le raisonnement de la question 3 précédente dans le cas général (sans mesure de $\widehat{ABC}$).

→ Problème

Partie A

1. On connaît les trois longueurs des côtés du triangle ABC. On montre qu'il est rectangle avec la réciproque du théorème de Pythagore.

2. On procède en deux étapes : on justifie d'abord que le quadrilatère PRSC est un parallélogramme et ensuite qu'il possède un angle droit.

3. a) C'est une configuration de Thalès.

b) $PC = BC - BP$.

Partie B

1. On utilise la partie A :

- Le cas $BP = 5$ cm a déjà été étudié.

- Quand $BP = 10$ cm, on refait exactement le raisonnement de la question

3. a) de la partie A.

2. a) Pour $y = 18$, on cherche les abscisses de la courbe correspondantes.

b) L'aire est maximale au point le plus haut de la courbe.

c) On peut lire une valeur approchée de cette aire maximale mais surtout on donne un encadrement par deux entiers consécutifs de cette aire.

Partie C

1. $PC = BC - BP$.
2. C'est (toujours le même, dans le même triangle, avec les mêmes rapports) le théorème de Thalès.
3. Un rectangle est un carré quand sa longueur est égale à sa largeur, soit quand $PR = PC$ (on vient de les exprimer). En posant $BP = x$, on est ramené à résoudre une équation du premier degré.

CORRIGÉS

Activités numériques

EXERCICE 1

$$1. A = \frac{8 + 3 \times 4}{1 + 2 \times 1,5} = \frac{8 + 12}{1 + 3} = \frac{20}{4} = \frac{5 \times 4}{1 \times 4} = \frac{5}{1} = \boxed{5}.$$

2. • Dans le calcul proposé figurent des additions, multiplications et divisions. Respectant les règles de priorités opératoires, la calculatrice opérera d'abord les multiplications/divisions qui sont prioritaires sur les additions/ soustractions.

En premier, elle calculera $3 \times 4 \div 1 = 12$ et $2 \times 1,5 = 3$.

Elle affichera : $8 + 3 \times 4 \div 1 + 2 \times 1,5 = 8 + 12 + 3 = 23$.

• Pour afficher le bon résultat, il aurait fallu **mettre des parenthèses** au numérateur puis au dénominateur, rendant les calculs dans les parenthèses prioritaires sur les multiplications/divisions.

EXERCICE 2

1. • Soit R l'événement « obtenir une bille rouge ».

Chacun tirant une bille au hasard :

$$p(R) = \frac{\text{nombre de billes rouges}}{\text{nombre de billes dans le sac}}$$

Remarque

Le sac d'Aline ne contenant que des billes rouges, on est sûr de tirer une bille rouge.

On parle d'événement certain.

- Pour Bernard : $p(R_B) = \frac{10}{10+30} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25$.

- Pour Claude : $p(R_C) = \frac{100}{100+3} = \frac{100}{103} \approx 0,971$.

En conclusion, c'est Aline qui a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge.

2. • On note x le nombre de billes noires à ajouter dans le sac d'Aline. Elle a maintenant 5 billes rouges et $(5+x)$ billes au total.

D'où : $p(R_A) = \frac{5}{5+x}$.

- Pour Bernard : $p(R_B) = \frac{1}{4}$.

• Aline a la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge quand :

$$p(R_A) = p(R_B)$$

$$\frac{5}{5+x} = \frac{1}{4}$$

Par produit en croix :

$$5 \times 4 = (5+x) \times 1$$

$$20 = 5+x$$

$$x = 20 - 5$$

$x = 15$

Avant le tirage, il faut ajouter 15 billes noires dans le sac d'Aline pour qu'elle ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge.

Remarque :

Dans le sac de Bernard, il y a 3 fois plus de billes noires que de billes rouges. Il faut qu'il y ait cette même répartition dans le sac d'Aline. Or il y a 5 billes rouges dans son sac. Il faut donc ajouter $5 \times 3 = 15$ billes noires pour avoir la même répartition que celle du sac de Bernard.

Gagnez
des points !

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors
 $ad = bc$.

EXERCICE 3

1. Le point B a pour coordonnées :

$$(-4 ; 4,6)$$

(voir pointillés bleus sur la figure p. 326)

2. $\mathcal{C}_3$ coupe trois fois l'axe des abscisses (l'axe des x) aux points d'abscisses :

$$(-1 ; 2 \text{ et } 4)$$

(voir points rouges.)

3. Une fonction linéaire est représentée graphiquement par une droite passant par l'origine du repère.

La fonction linéaire est donc représentée par $\mathcal{C}_1$.

4. $f(x) = -0,4x + 3$: f est une fonction affine car elle est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = -0,4$ et $b = 3$.

Sa représentation graphique est donc une droite. $\mathcal{C}_3$ n'est pas une droite et $\mathcal{C}_1$ représente une fonction linéaire.

Donc la représentation graphique de f est $\mathcal{C}_2$.

5. Déterminer l'antécédent de 1 par la fonction f , c'est chercher le nombre x tel que $f(x) = 1$.

On est donc ramené à résoudre l'équation :

$$-0,4x + 3 = 1$$

$$-0,4x = 1 - 3$$

$$-0,4x = -2$$

$$x = \frac{-2}{-0,4}$$

$$x = 5$$

L'antécédent de 1 par la fonction f est le nombre 5.

6. Le point A est sur $\mathcal{C}_2$ (qui représente la fonction f) si et seulement si :

$$y_A = f(x_A).$$

On calcule $f(4,6) = -0,4 \times 4,6 + 3 = 1,16$.

Or $y_A = 1,2$ et $1,16 \neq 1,2$.

Donc le point A n'appartient pas à $\mathcal{C}_2$.

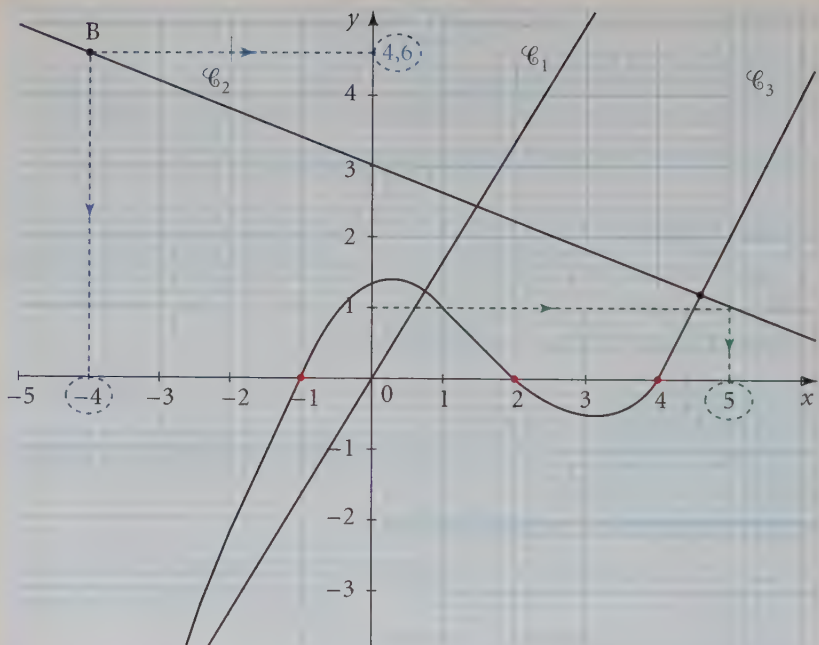
Remarque

On peut le trouver graphiquement (voir pointillés verts). Mais l'énoncé demandait une justification par le calcul.

Remarque

On pouvait se faire une idée de la conclusion en plaçant le point A dans le repère. Il est « juste au-dessus » de $\mathcal{C}_2$.

Mais un calcul était indispensable car demandé dans l'énoncé.

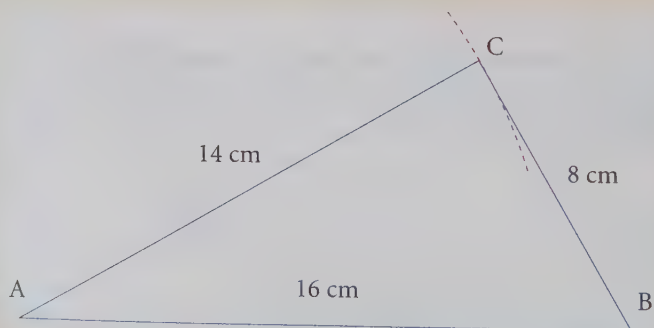


Activités géométriques

EXERCICE 1

1. a) Tracé en vraie grandeur

Échelle $\frac{1}{2}$:



b) Nature du triangle ABC

Dans le triangle ABC où [AB] est le plus grand côté :

$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = 16^2 = 256 \\ AC^2 + BC^2 = 14^2 + 8^2 = 196 + 64 = 260 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 256 \neq 260 \\ AB^2 \neq AC^2 + BC^2. \end{array}$$

D'après la contraposée du théorème de Pythagore :

le triangle ABC n'est pas rectangle.

2. Aire du triangle ABC

• Le périmètre p du triangle ABC vaut :

$$p = AB + AC + BC = 16 + 14 + 8 = 38$$

soit $p = 38$ cm.

• L'application de la formule de Héron donne l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC :

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{38}{2} \left(\frac{38}{2} - 16 \right) \left(\frac{38}{2} - 14 \right) \left(\frac{38}{2} - 8 \right)}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{19(19 - 16)(19 - 14)(19 - 8)}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{19 \times 3 \times 5 \times 11}$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{3\,135}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \approx 56 \text{ cm}^2}$$

(résultat arrondi au cm^2 près).

EXERCICE 2

Partie A : $\widehat{ABC} = 43^\circ$

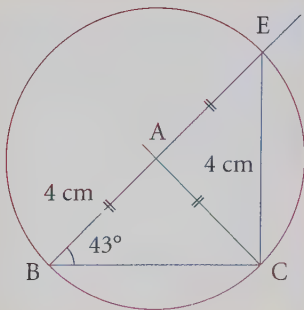
1. Construction en vraie grandeur

Échelle $\frac{1}{2}$:

2. Nature du triangle BCE

• Le triangle ABC est isocèle en A,
donc $AB = AC = 4$ cm.

E étant le symétrique de B par rapport à A,
A est le milieu de [BE] et notamment $AB = AE$.



- Comme $AB = AC = AE$, le triangle BEC est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 4 cm.

A étant le milieu de [BE], [BE] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.

Or, un triangle inscrit dans un cercle ayant pour côté un diamètre de ce cercle est rectangle.

Le triangle BEC est donc rectangle en C.

Remarques :

- On pouvait aussi montrer ce résultat par des calculs sur les angles dans les triangles de la figure.

On utilise le fait que les triangles ABC et AEC sont isocèles en A et que les points B, A, E sont alignés.

- Toutefois, si on lit la question suivante, on comprend que cette méthode-là empiète sur la question 3.

3. Calcul de l'angle $\widehat{EAC}$

- Comme les points B, A, E sont alignés : $\widehat{ABC} = \widehat{EBC} = 43^\circ$.
- D'après le théorème de l'angle au centre, les angles $\widehat{EBC}$ et $\widehat{EAC}$ interceptant le même arc $\widehat{EC}$:

$$\widehat{EBC} = \frac{1}{2} \times \widehat{EAC}.$$

D'où :

$$\widehat{EAC} = 2\widehat{EBC}$$

$$\widehat{EAC} = 2 \times 43$$

$$\boxed{\widehat{EAC} = 86^\circ}$$

Gagnez
des points !

On multiplie par 2
les 2 nombres de l'égalité :

$$a = \frac{1}{2}b, \text{ soit } 2a = b.$$

Remarque : autre méthode

- Le triangle ABC est isocèle en A, donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 43^\circ$.

La somme des angles dans un triangle vaut 180° .

Donc $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ$, soit $\widehat{BAC} = 180 - 2 \times 43 = 94^\circ$.

- E étant le symétrique de B par rapport à A, les points B, A, E sont alignés et :

$$\widehat{BAC} + \widehat{EAC} = 180^\circ$$

$$\widehat{EAC} = 180 - 94$$

$$\boxed{\widehat{EAC} = 86^\circ}$$

C'est le résultat annoncé.

Partie B : cas général

Étude du raisonnement de Jean.

On reprend le raisonnement fait dans la question A.3.

- Comme les points B, A, E sont alignés : $\widehat{ABC} = \widehat{EBC}$.
- D'après le théorème de l'angle au centre, les angles $\widehat{EBC}$ et $\widehat{EAC}$ interceptant le même arc $\widehat{EC}$:

$$\widehat{EBC} = \frac{1}{2} \times \widehat{EAC}.$$

D'où :

$$\widehat{EAC} = 2\widehat{ABC}.$$

Remarque
 $\widehat{EBC}$ et $\widehat{ABC}$
 ont les mêmes angles.

En conclusion, Jean a bien raison : pour n'importe quelle valeur de $\widehat{ABC}$,

$$\widehat{EAC} = 2\widehat{ABC}.$$

Remarque : autre méthode

Comme dans la remarque précédente, on pouvait obtenir ce même résultat sans citer le théorème de l'angle au centre.

- Le triangle ABC étant isocèle en A : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

La somme des angles d'un triangle vaut 180° .

$$\text{Donc } \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ.$$

$$\text{Soit } \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$$

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - 2\widehat{ABC}.$$

- Les points B, A et E sont alignés donc :

$$\widehat{BAC} + \widehat{EAC} = 180^\circ, \text{ soit :}$$

$$\widehat{EAC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$$

$$\widehat{EAC} = 180 - (180 - 2\widehat{ABC})$$

$$\widehat{EAC} = 180 - 180 + 2\widehat{ABC}$$

$$\widehat{EAC} = 2\widehat{ABC}.$$

Problème

Partie A

1. Nature du triangle ABC

Dans le triangle ABC où [AB] est le plus grand côté :

$$\begin{cases} AB^2 = 17,5^2 = 306,25 \\ BC^2 + AC^2 = 14^2 + 10,5^2 = 196 + 110,25 = 306,25 \end{cases}$$

$AB^2 = BC^2 + AC^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore :
le triangle ABC est rectangle en C.

2. Nature du quadrilatère PRSC

• Par construction, la parallèle à (AC) passant par P coupe [AB] en R, donc $(PR) \parallel (AC)$.

Comme A, S et C sont alignés, cela revient à $(PR) \parallel (SC)$. De plus, la parallèle à (BC) passant par R coupe [AC] en S, donc $(RS) \parallel (PC)$.

Le quadrilatère PRSC a ses côtés [PR] et [SC], puis [RS] et [PC] parallèles deux à deux, donc **le quadrilatère PRSC est un parallélogramme.**

• Le triangle ABC est rectangle en C, donc $(AC) \perp (BC)$.

Par alignement des points A, S, C et B, P, C, cela revient à :

$$(PC) \perp (SC).$$

• Finalement, le quadrilatère PRSC est un parallélogramme avec un angle droit.

Donc le quadrilatère PRSC est un rectangle.

3. a) Calcul de la longueur PR

Les droites (RP) et (AC) étant parallèles, les triangles BRP et BAC sont en configuration de Thalès.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BR}{BA} = \frac{BP}{BC} = \frac{PR}{CA}.$$

De l'égalité encadrée, il vient :

$$\frac{5}{14} = \frac{PR}{10,5}.$$

Par produit en croix :

Gagnez
des points !

Pensez à citer les droites
parallèles pour utiliser
le théorème de Thalès.

$$14 \times PR = 5 \times 10,5$$

$$PR = \frac{52,5}{14}$$

$$PR = 3,75.$$

La longueur PR mesure 3,75 cm.

b) Aire $\mathcal{A}$ du rectangle PRSC

$$\mathcal{A} = \text{longueur} \times \text{largeur} = PC \times PR.$$

Comme B, P et C sont alignés, $PC = BC - BP = 14 - 5 = 9$.

$$\mathcal{A} = 9 \times 3,75.$$

$$\mathcal{A} = 33,75.$$

Le rectangle PRSC a une aire de $33,75 \text{ cm}^2$.

Partie B

1. Tableau complété

• Pour $BP = 5 \text{ cm}$, on a trouvé dans la partie A en 3. b), que l'aire de PRSC est $33,75 \text{ cm}^2$.

• Pour $BP = 10 \text{ cm}$.

On refait, comme dans la partie A en 3. a), le raisonnement utilisant le théorème de Thalès dans les triangles BRP et BAC.

Les droites (RP) et (AC) étant parallèles, on obtient les égalités :

$$\frac{BR}{BA} = \frac{BP}{BC} = \frac{PR}{CA}.$$

Remarque

Souvent, on utilise deux quotients sur trois.

Ainsi :

$$PR = \frac{BP \times CA}{BC}$$

$$PR = \frac{10 \times 10,5}{14}$$

$$PR = 7,5.$$

L'aire $\mathcal{A}$ du rectangle PRSC vaut :

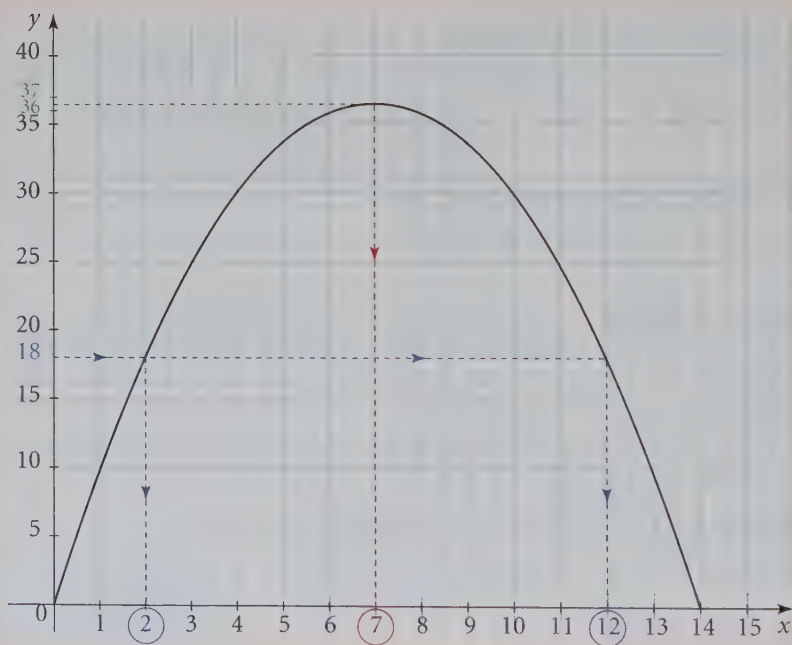
$$\mathcal{A} = PR \times PC$$

$$\mathcal{A} = 7,5 \times (14 - 10)$$

$$\mathcal{A} = 30 \text{ cm}^2.$$

Longueur BP en cm	0	1	3	5	8	10	12	14
Aire de PRSC en cm^2	0	9,75	24,75	33,75	36	30	18	0

2. Lectures graphiques



- a)** Déterminer les valeurs de BP pour lesquelles le rectangle PRSC a une aire de 18 cm^2 revient à chercher les abscisses des points de la courbe ayant 18 pour ordonnée (soit encore les antécédents de 18).

On lit graphiquement (voir pointillés bleus) :

$$\boxed{\text{BP} = 2 \text{ cm} \text{ ou } \text{BP} = 12 \text{ cm}}$$

- b)** La valeur de BP pour laquelle l'aire du rectangle semble maximale est l'abscisse du point le plus haut de la courbe.

On lit (voir pointillés rouges) :

$$BP = 7 \text{ cm}.$$

c) L'aire maximale $\mathcal{A}_{\max}$, qui correspond à $BP = 7 \text{ cm}$, est l'ordonnée du point correspondant.

On lit : $\mathcal{A}_{\max} \approx 36,7$.

L'encadrement cherché est donc :

$$36, < \mathcal{A}_{\max} < 37.$$

Partie C

1. Expression de PC en fonction de BP

Les points B, P et C étant alignés, $PC = BC - BP$, soit :

$$PC = 14 - BP.$$

2. Justification de l'expression de PR en fonction de BP

Comme on l'a fait deux fois précédemment, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BP}{BC} = \frac{PR}{CA}.$$

Ainsi :

$$PR = \frac{BP \times CA}{BC}$$

$$PR = \frac{BP \times 10,5}{14}$$

$$PR = \frac{10,5}{14} \times BP$$

$$PR = 0,75 \times BP.$$

C'est le résultat annoncé.

3. Étude d'un cas particulier : PRSC est un carré

Un rectangle est un carré quand sa longueur et sa largeur sont égales.

Ici, le rectangle PRSC est un carré quand $PR = PC$.

Avec les expressions déterminées en questions 1. et 2. :

$$0,75 \times BP = 14 - BP.$$

Avec $BP = x$:

$$0,75x = 14 - x$$

$$0,75x + x = 14$$

$$1,75x = 14$$

$$x = \frac{14}{1,75}$$

$$x = 8.$$

PRSC est un carré quand $BP = 8$ cm.

Imprimé en France par Loire Offset Titoulet à Saint-Etienne
Dépôt légal : mai 2010 - N° d'éditeur 10164983



Pour réviser toute l'année
et progresser à son rythme !

-  **Réviser** toutes les **notions** du programme.
-  **Progresser** plus vite avec des **méthodes** efficaces et des **clés** pour acquérir les bons réflexes.
-  **Éclaircir** les points-clés grâce aux **rubriques d'aide** :
Gagnez des points !, L'astuce du prof, Piège à éviter,...
-  **Entraînez-vous** à l'aide d'**exercices variés** de difficulté croissante et de leurs **corrigés** commentés.
-  **Préparez-vous** intensivement à l'**épreuve** du brevet.

Testé et approuvé
par les élèves

« L'ensemble est vraiment bien, ça donne envie ! »

Gary, 14 ans

« On s'y retrouve bien et on peut le lire assez vite. »

Florian, 14 ans

« Il donne des petites astuces
comme si on avait un professeur avec nous. »

Chloé, 14 ans

ABC du Brevet : une gamme complète pour réussir le brevet

Réussite

- Mathématiques 3^e
- Physique-Chimie 3^e
- Histoire-Géographie 3^e
- Français 3^e
- Anglais 3^e

10,95 €

ISBN : 978-2-09-188164-5



9 782091 881645

Compléments numériques sur
www.abc-brevet.com

 **Nathan**