
Sommaire

Avant-propos	ix
I Exercices et problèmes d'analyse et de probabilités	1
1 Espaces normés	3
2 Suites et séries numériques	31
3 Suites et séries de fonctions	71
4 Fonctions convexes	121
5 Intégration	145
6 Transformées de Fourier et de Laplace	185
7 Équations fonctionnelles	227
8 Fonctions de plusieurs variables réelles	263
9 Dénombrements et probabilités	285
II Exercices et problèmes d'algèbre et de géométrie	343
10 Groupes, anneaux, corps	345
11 Polynômes	383
12 Algèbre linéaire et bilinéaire	407
13 Géométrie	439
Bibliographie	469

Table des matières

Avant-propos	ix
I Exercices et problèmes d'analyse et de probabilités	1
1 Espaces normés	3
Exercice 1.1. Normes $\ \cdot\ _p$ sur $\mathbb{R}^n$	3
Exercice 1.2. Normes $\ \cdot\ _p$ sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$	5
Exercice 1.3. Norme d'une application linéaire en dimension finie	7
Exercice 1.4. Norme d'une forme linéaire continue sur ℓ^∞	8
Exercice 1.5. Normes d'applications linéaires continues sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$	9
Exercice 1.6. Norme d'une application linéaire continue sur un espace préhilbertien	14
Problème 1.1. Normes sur $\mathbb{R}[x]$ et sur ℓ^1	15
2 Suites et séries numériques	31
Exercice 2.1. Suites définies par $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$	31
Exercice 2.2. Suites définie par $x_{n+1} = \sin(\alpha x_n)$	36
Exercice 2.3. Formule de Stirling	39
Exercice 2.4. Série non commutativement convergente	40
Exercice 2.5. Série alternée de Bertrand	42
Exercice 2.6. Une formule pour π	44
Exercice 2.7. $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n)$ convergentes	47
Exercice 2.8. Un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	50
Exercice 2.9. Restes d'une série alternée	53
Problème 2.1. Développement de $\frac{\sin(z)}{z}$ en produit infini	54
3 Suites et séries de fonctions	71
Exercice 3.1. Étude de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}$	71
Exercice 3.2. Un théorème de Berstein	75
Exercice 3.3. Un théorème de Borel	78

Exercice 3.4. Une caractérisation des fonctions analytiques réelles	84
Exercice 3.5. Le théorème des zéros isolés	88
Exercice 3.6. Série trigonométrique et série de Fourier	89
Exercice 3.7. Série entière et série de Fourier	90
Exercice 3.8. Développements en série de Fourier	91
Exercice 3.9. Série de Fourier et équation différentielle	94
Exercice 3.10. Inégalité de Wirtinger	95
Exercice 3.11. Équation de la chaleur	96
Problème 3.1. Formule sommatoire de Poisson. Fonction $\mathcal{P}$ de Weierstrass	99
4 Fonctions convexes	121
Exercice 4.1. Les inégalités de Jensen	121
Exercice 4.2. Fonctions mid-convexes	122
Exercice 4.3. Fonctions logarithmiquement convexes	124
Exercice 4.4. Comparaison de la longueur de deux courbes	127
Problème 4.1. Théorème de Bohr-Møllerup et fonction gamma	129
5 Intégration	145
Exercice 5.1. Calcul élémentaire de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$ pour $\Re(\alpha) > 0$	145
Exercice 5.2. Une condition nécessaire d'intégrabilité	146
Exercice 5.3. L'intégrale de Poisson	147
Exercice 5.4. Intégrales de Wallis	149
Exercice 5.5. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^{\alpha x} - 1} dx$ pour $\Re(\alpha) > 0$	151
Exercice 5.6. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-x}} dx$	152
Exercice 5.7. La méthode de Laplace	154
Exercice 5.8. Volume de la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$	155
Exercice 5.9. Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$	159
Exercice 5.10. Comparaison série-intégrale	161
Exercice 5.11. Aire du domaine délimité par une courbe simple	171
Problème 5.1. Produit de convolution et un théorème de Titchmarsh	173
6 Transformées de Fourier et de Laplace	185
Exercice 6.1. Théorème de Riemann-Lebesgue	185
Exercice 6.2. Transformation de Fourier et produit de convolution	187
Exercice 6.3. Transformation de Laplace et intégrale de Dirichlet	192
Exercice 6.4. Transformées de Laplace et de Fourier. Intégrales de Fresnel	196
Exercice 6.5. Transformation de Laplace et équations différentielles linéaires à coefficients constants	199
Problème 6.1. Quelques propriétés de la transformation de Laplace	203

7 Équations fonctionnelles	227
Exercice 7.1. Exemples d'équations fonctionnelles	227
Exercice 7.2. Équation fonctionnelle de Cauchy	229
Exercice 7.3. Caractérisation des fonctions cos et ch par l'équation fonctionnelle $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$	232
Exercice 7.4. L'équation fonctionnelle $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$	234
Exercice 7.5. Fonction Γ et équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$	237
Exercice 7.6. Fonction thêta de Jacobi	239
Problème 7.1. Équation fonctionnelle de Guichard	242
8 Fonctions de plusieurs variables réelles	263
Exercice 8.1. Fonctions implicites et développements limités	263
Exercice 8.2. Points fixes et fonctions implicites	265
Exercice 8.3. Un résultat de continuité des valeurs propres	266
Exercice 8.4. Théorème des extrema liés	268
Exercice 8.5. Extrema liés et inégalité arithmético-géométrique	272
Problème 8.1. Différentiabilité d'une distance et d'une norme	273
9 Dénombrements et probabilités	285
Exercice 9.1. Dérangements d'un ensemble fini	285
Exercice 9.2. Dénombrement des surjections d'un ensemble fini sur un autre	289
Exercice 9.3. Nombres de Bell	291
Exercice 9.4. Fonction indicatrice d'Euler et probabilités	293
Exercice 9.5. Un théorème de Cesàro	295
Exercice 9.6. Fonction ζ de Riemann et probabilités	301
Exercice 9.7. L'aiguille de Buffon	302
Exercice 9.8. Marche aléatoire sur une droite	305
Exercice 9.9. Preuve probabiliste du théorème de Weirstrass	310
Problème 9.1. Une approche stochastique de la fonction gamma	312
II Exercices et problèmes d'algèbre et de géométrie	343
10 Groupes, anneaux, corps	345
Exercice 10.1. Involutions dans S_n	345
Exercice 10.2. Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par translation	347
Exercice 10.3. Action de $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par équivalence	351
Exercice 10.4. Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison	356
Exercice 10.5. Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$ par congruence	360
Exercice 10.6. Théorème de Lamé	362
Problème 10.1. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}^n$	364
11 Polynômes	383
Exercice 11.1. pgcd de $P_n = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$ et P'_n	383
Exercice 11.2. Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton	384
Exercice 11.3. Polynômes d'interpolation de Lagrange	385

Exercice 11.4. Nombres réels algébriques	388
Problème 11.1. Constructions à la règle et au compas	389
12 Algèbre linéaire et bilinéaire	407
Exercice 12.1. Matrices de Pascal et de Hankel	407
Exercice 12.2. Matrices compagons	409
Exercice 12.3. Matrices de permutation et matrices circulantes	414
Exercice 12.4. Matrice de Hessenberg	417
Exercice 12.5. Diagonalisation et puissances d'une matrice	420
Exercice 12.6. Décomposition polaire	422
Exercice 12.7. Séries matricielles	424
Exercice 12.8. Exponentielle de matrice et système différentiel	426
Problème 12.1. $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 0$ pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	427
13 Géométrie	439
Exercice 13.1. Coniques et quadriques	439
Exercice 13.2. Nombres complexes et géométrie du triangle	441
Exercice 13.3. Un théorème de Ptolémée	445
Exercice 13.4. Puissance d'un point par rapport à une sphère	448
Problème 13.1. Ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$. Théorèmes de F. John et C. Loewner	451
Bibliographie	469

Avant-propos

Ce livre est un complément sous forme d'exercices et problèmes aux livres de Jean-François Dantzer (mathématiques pour l'agrégation, analyse et probabilités) et de l'auteur (mathématiques pour l'agrégation, algèbre et géométrie) publiés dans la même collection.

On pourra se reporter à ces ouvrages pour les notions de cours utilisées dans la résolution des exercices et problèmes.

Les exercices proposés peuvent servir de développement pour les leçons d'oral de l'agrégation interne ou externe et les problèmes peuvent être utiles comme entraînements aux épreuves écrites. Certains énoncés de problèmes sont en fait inspirés de problèmes d'agrégation interne ou externe.

Le choix des thèmes abordés est limité par le nombre de pages de ce volume que l'on a voulu de taille raisonnable.

En vue des épreuves écrites d'agrégation, une façon efficace d'exploiter ces problèmes consiste à les rechercher et rédiger sa propre solution de façon détaillée, puis à confronter les résultats aux solutions proposées.

Je tiens enfin à remercier les éditions De Boeck et en particulier Alain Luguët pour la confiance qu'ils m'accordent.

Première partie

Exercices et problèmes d'analyse et de probabilités

Chapitre 1

Espaces normés

Exercice 1.1. Normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$

Pour tout entier $n \geq 2$, tout réel $p > 0$ et tout $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Pour $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ ne définit pas une norme pour $p \in]0, 1[$.
2. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on désigne par $B_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$ la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_p$ et par A_p l'aire de B_p . Montrer que l'application A est croissante sur $[p, +\infty[$. Déterminer ses bornes inférieure et supérieure. Calculer A_p pour tout $p \geq 1$.

Solution. On désigne par $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

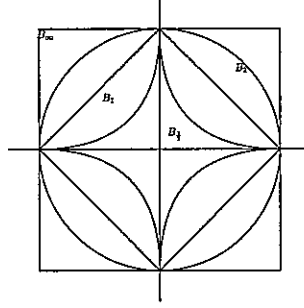
1. Pour $p \in]0, 1[$, l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée. Par exemple, on a $\|e_1 + e_2\|_p = 2^{\frac{1}{p}} > \|e_1\|_p + \|e_2\|_p = 2$. Sur la figure 1.1, on a représenté les ensembles B_p pour $p = \frac{1}{2}$, $p = 1$, $p = 2$ et $p = +\infty$. On constate que $B_{\frac{1}{2}}$ n'est pas convexe et en conséquence, $x \mapsto \|x\|_{\frac{1}{2}}$ n'est pas une norme.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et tout entier i compris entre 1 et n on a $|x_i|^p \leq \|x\|_\infty^p$. Il en résulte que $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$. D'autre part il existe un entier k compris entre 1 et n tel que $\|x\|_\infty = |x_k|$ et avec $|x_k|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p$, on déduit que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

On a donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ce qui montre au passage que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_p$ sont équivalentes et par transitivité que pour tous réels $p \geq 1$ et $q \geq 1$ les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

Avec $\lim_{p \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$ pour tout entier $n \geq 1$ on déduit que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

3. La croissance de A provient des inclusions :

$$\forall q > p \geq 1, B_p \subset B_q \subset B_\infty$$

FIGURE 1.1 – Boules B_p pour $p = \frac{1}{2}, 1, 2, +\infty$

ce qui peut se montrer comme suit. Pour tout $x \in B_p$, on a $|x_1|^p + |x_2|^p \leq 1$, donc $|x_1| \leq 1$ et $|x_2| \leq 1$, soit $\|x\|_\infty \leq 1$ et $x \in B_\infty$. On a donc $B_p \subset B_\infty$ pour tout $p \geq 1$. Pour $q > p \geq 1$ et $x \in B_p$, on a $|x_2| \leq (1 - |x_1|^p)^{\frac{1}{p}}$ avec $|x_1| \in [0, 1]$. Il nous suffit donc de montrer que $(1 - t^p)^{\frac{1}{p}} \leq (1 - t^q)^{\frac{1}{q}}$ pour tout $t \in [0, 1]$ (pour $t = |x_2|$, cela donne $|x_2| \leq (1 - |x_1|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (1 - |x_1|^q)^{\frac{1}{q}}$ et $\|x\|_q \leq 1$), ce qui équivaut à $(1 - u)^{\frac{q}{p}} \leq 1 - u^{\frac{q}{p}}$ pour tout $u \in [0, 1]$ (l'application $t \mapsto u = t^p$ est bijective de $[0, 1]$ sur lui même). Il s'agit donc de montrer que :

$$\forall r > 1, \forall u \in [0, 1], (1 - u)^r \leq 1 - u^r$$

ce qui résulte de :

$$\forall r > 1, \forall u \in [0, 1], (1 - u)^r \leq 1 - u \leq 1 - u^r$$

(pour $r > 1$, on a $0 \leq v^r \leq v$ pour $0 \leq v \leq 1$). On en déduit que :

$$\forall p \geq 1, \mathcal{A}_1 = 2 \leq \mathcal{A}_p \leq \mathcal{A}_\infty = 4$$

Par symétrie, on a :

$$\mathcal{A}_p = 4 \int_0^1 (1 - x_1^p)^{\frac{1}{p}} dx_1 = \frac{4}{p} \int_0^1 (1 - t)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p}-1} dt = \frac{4}{p} B\left(\frac{1}{p} + 1, \frac{1}{p}\right)$$

où B désigne la fonction définie par :

$$\forall x > 0, \forall y > 0, B(x, y) = \int_0^1 (1 - t)^{x-1} t^{y-1} dt$$

Sachant que $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, où la fonction Γ est définie par :

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

on a la formule $\mathcal{A}_p = \frac{4}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{p} + 1\right)}$ et avec $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on obtient

$$\mathcal{A}_p = \frac{2}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}. \text{ Sachant que } \Gamma(1) = 1 \text{ et } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \text{ on vérifie que } \mathcal{A}_2 = \pi.$$

En écrivant que $\mathcal{A}_p = 4 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{p} + 1\right)}$ et en utilisant la continuité de Γ en 1, on en déduit que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_p = 4 = \mathcal{A}_\infty$ et $\mathcal{A}_\infty$ est bien la borne supérieure de $\mathcal{A}$.

Exercice 1.2. Normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$

Pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on note :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

2. Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, la fonction g étant à valeurs strictement positives. Calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left\| fg^{\frac{1}{p}} \right\|_p$.

3. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on note $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_1$.

(a) Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, puis que $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

(b) Montrer que l'ensemble $F = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|)$.

(c) Montrer que $\|1 - f\| > 1$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, puis que $d(1, F) = \inf_{f \in F} \|1 - f\| = 1$, cette distance n'étant pas atteinte.

Solution.

1. On suppose f non identiquement nulle. Pour tout réel $p \geq 1$, on a :

$$(\forall x \in [a, b], 0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty) \Rightarrow \left(0 \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} \right)$$

La fonction f étant continue sur le compact $[a, b]$, il existe un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $0 \leq |f(x_0)| - |f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in I_0 = [a, b] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. On a alors,

en notant α la longueur de l'intervalle I_0 :

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \geq \int_{I_0} |f(x)|^p dx \geq \int_{I_0} (|f(x_0)| - \varepsilon)^p dx \geq \alpha (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p$$

Ce qui donne pour tout réel $\varepsilon > 0$, $(\|f\|_\infty - \varepsilon) \alpha^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$.
Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \alpha^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty - \varepsilon$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty$, on déduit qu'il existe un entier p_0 tel que :

$$\forall p \geq p_0, \|f\|_\infty - 2\varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty + 2\varepsilon$$

On a donc ainsi prouvé que $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\|f\|_p) = \|f\|_\infty$.

2. La fonction g étant continue à valeurs strictement positives sur le compact $[a, b]$, on a $M = \sup_{x \in [a, b]} g(x) \geq m = \inf_{x \in [a, b]} g(x) > 0$ et avec $m|f|^p \leq g|f|^p \leq M|f|^p$, on en déduit que $m^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \|g^{\frac{1}{p}} f\|_p \leq M^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$, puis en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|g^{\frac{1}{p}} f\|_p = \|f\|_\infty$.
- 3.

- (a) Il est clair que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Avec $\|f\|_\infty \leq \|f\| \leq 2\|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on déduit que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. Enfin, sachant que $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, on en déduit que $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
- (b) Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on a $|f(0)| \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|$, donc la forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(0)$ est continue et $F = \ker(\varphi) = \varphi^{-1}\{0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|)$.
- (c) Pour toute fonction $f \in F$, on a $|1 - f| \neq 0$ (puisque $f(0) = 0$) la fonction $|1 - f|$ étant continue, donc $\|1 - f\|_1 = \int_0^1 |1 - f(t)| dt > 0$ et :

$$\begin{aligned} \|1 - f\| &= \sup_{t \in [0, 1]} |1 - f(t)| + \int_0^1 |1 - f(t)| dt \\ &> \sup_{t \in [0, 1]} |1 - f(t)| \geq |1 - f(0)| = 1 \end{aligned}$$

Il en résulte que $d(1, F) = \inf_{f \in F} \|1 - f\| \geq 1$. Pour tout réel $\varepsilon \in]0, 1[$, on désigne par f_ε la fonction affine par morceau et continue définie par :

$$f_\varepsilon(0) = 0, f_\varepsilon \text{ est affine sur } [0, \varepsilon], f_\varepsilon(t) = 1 \text{ pour tout } t \in [\varepsilon, 1]$$

On a $f_\varepsilon \in F$ et $\|1 - f_\varepsilon\| = 1 + \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}t\right) dt = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \geq d(1, F)$. Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $d(1, F) \leq 1$ et $d(1, F) = 1$. Comme $\|1 - f\| > 1$ pour tout $f \in F$, cette distance n'est pas atteinte.

Exercice 1.3. Norme d'une application linéaire en dimension finie

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de dimensions respectives $n \geq 1$, $m \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E , $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de F , $u \neq 0$ une application linéaire de E dans F et $A = ((a_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

1. En munissant ces espaces de la norme $\|\cdot\|_\infty$, montrer que :

$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

2. En munissant ces espaces de la norme $\|\cdot\|_1$, montrer que :

$$\|u\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

Solution.

1. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|u(x)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty$$

donc $\|u\|_\infty \leq \alpha = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. On désigne par k un entier compris entre 1

et m tel que $\alpha = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \sum_{j=1}^n a_{kj} \operatorname{sgn}(a_{kj})$, en notant pour tout réel t :

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} \frac{t}{|t|} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (\text{signe de } t)$$

Comme u est non nul, on a $\alpha > 0$, donc le vecteur $x = \sum_{j=1}^n \operatorname{sgn}(a_{kj}) e_j$ est unitaire et en notant $y = u(x)$, on a $\|y\|_\infty = \|u(x)\|_\infty \leq \alpha$ avec :

$$|y_k| = \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} \operatorname{sgn}(a_{kj}) \right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \alpha$$

donc $\|u(x)\|_\infty = \alpha$ et $\|u\|_\infty = \alpha$.

2. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_1 &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) |x_j| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) \|x\|_1 \end{aligned}$$

donc $\|u\|_1 \leq \alpha = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$. En notant k un entier compris entre 1 et n

tel que $\alpha = \sum_{i=1}^m |a_{ik}|$, on a $\alpha = \|u(e_k)\|_1 \leq \|u\|_1$ (colonne k de A) et $\|u\|_1 = \alpha$.

Exercice 1.4. Norme d'une forme linéaire continue sur ℓ^∞

On désigne par ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées, on se donne une suite $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq 0$ telle que la série $\sum \varphi_n$ soit absolument convergente et u est la forme linéaire définie par :

$$\forall x \in \ell^\infty, u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \varphi_n$$

1. En munissant ℓ^∞ de la norme $x \mapsto \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$, montrer que u est

continue de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec $\|u\|_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n|$, cette borne supérieure étant atteinte.

2. On désigne par E le sous-espace de ℓ^∞ formé des suites convergentes vers 0 et par v la restriction de u à E . Montrer que v est continue de

$(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec $\|v\|_\infty = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_\infty = 1}} |v(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n|$, puis que,

dans le cas où $\varphi_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette borne supérieure n'est pas atteinte.

Solution.

1. Pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_n \varphi_n| \leq \|x\|_\infty |\varphi_n|$ avec $\sum |\varphi_n| < +\infty$, ce qui entraîne l'absolue convergence de $\sum x_n \varphi_n$, donc $u(x)$

est bien défini et $|u(x)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \varphi_n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n| \right) \|x\|_\infty$, d'où la continuité

de l'application linéaire u avec $\|u\|_\infty \leq \alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n|$. La suite x définie par

$x_n = \text{sgn}(\varphi_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est dans E et comme φ est non nulle, il existe

au moins un indice n tel que $\varphi_n \neq 0$, donc $\|x\|_\infty = 1$ et :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \varphi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sgn}(\varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n| = \alpha$$

donc $\|u\|_\infty = \alpha$, cette borne supérieure étant atteinte.

2. Une suite convergente étant bornée, E est bien un sous-espace de ℓ^∞ et la

restriction v de u à F est continue avec $\|v\|_\infty \leq \alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n|$.

Le calcul fait à la question précédente n'est pas valable pour E car la suite x définie par $x_n = \operatorname{sgn}(\varphi_n)$ n'est pas dans E . On utilise plutôt la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n^{(k)} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\varphi_n) & \text{si } 0 \leq n \leq k \\ 0 & \text{si } n \geq k+1 \end{cases}$$

(on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{(k)} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$). Pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, on a $\|x^{(k)}\|_\infty = 1$ puisque φ est non nulle et on a :

$$\left| v(x^{(k)}) - \alpha \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n^{(k)} \varphi_n - |\varphi_n|) \right| = \sum_{n=k+1}^{+\infty} |\varphi_n| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} |v(x^{(k)})| = \lim_{k \rightarrow +\infty} v(x^{(k)}) = \alpha$, avec $|v(x^{(k)})| \leq \|v\|_\infty \|x^{(k)}\|_\infty = \|v\|_\infty$, ce qui nous donne $\alpha \leq \|v\|_\infty$ et en conséquence, $\|v\|_\infty = \alpha$.

Supposons que $\varphi_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. S'il existe une suite $x \in E$ telle $\|x\|_\infty = 1$ et $|v(x)| = \|u\|_\infty$, quitte à changer x en $-x$, on peut supposer que

$v(x) \geq 0$ et on a $v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \varphi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n$. S'il existe un entier m tel que $x_m < 1$, on a alors :

$$v(x) = x_m \varphi_m + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{+\infty} x_n \varphi_n < \varphi_m + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{+\infty} \varphi_n = v(x)$$

ce qui est impossible. On a donc $x_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est incompatible avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Exercice 1.5. Normes d'applications linéaires continues sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$

$E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On se donne une fonction $\varphi \in E \setminus \{0\}$ et u est la forme linéaire définie sur E par :

$$\forall f \in E, u(f) = \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt$$

- (a) En munissant E de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, montrer que u est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec :

$$\|u\|_\infty = \int_0^1 |\varphi(t)| dt$$

- (b) En munissant E de la norme $f \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, montrer que u est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec :

$$\|u\|_1 = \|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\varphi(t)|$$

- (c) En munissant E de la norme $f \mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}$, montrer que u est continue de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec $\|u\|_2 = \|\varphi\|_2$.

- (d) On suppose φ est à valeurs positives et on se donne un réel $p > 1$.

Munissant E de la norme $f \mapsto \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p dt}$, montrer que u est continue de $(E, \|\cdot\|_p)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec $\|u\|_p = \|\varphi\|_q$, où $q > 1$ est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. On se donne une fonction continue $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ est défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], u(f)(x) = \int_0^1 f(t) \varphi(x, t) dt$$

Montrer que u est continue avec $\|u\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |\varphi(x, t)| dt$.

Solution.

1.

- (a) Pour tout $f \in E$, on a :

$$|u(f)| = \left| \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt \right| \leq \left(\int_0^1 |\varphi(t)| dt \right) \|f\|_\infty$$

donc u est continue avec $\|u\|_\infty \leq \alpha = \int_0^1 |\varphi(t)| dt = \|\varphi\|_1$.

On désigne par $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions continues définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], f_k(t) = \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \varepsilon_k}$$

où $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $|f_k(t)| = \frac{|\varphi(t)|}{|\varphi(t)| + \varepsilon_k} < 1$, soit $\|f_k\|_\infty \leq 1$ et :

$$|u(f_k) - \alpha| = \left| \int_0^1 \left(\frac{\varphi^2(t)}{|\varphi(t)| + \varepsilon_k} - |\varphi(t)| \right) dt \right| = \varepsilon_k \int_0^1 \frac{|\varphi(t)|}{|\varphi(t)| + \varepsilon_k} dt \leq \varepsilon_k$$

donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} |u(f_k)| = \lim_{k \rightarrow +\infty} u(f_k) = \alpha$ et avec $|u(f_k)| \leq \|u\|_\infty \|f_k\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, on déduit que $\alpha \leq \|u\|_\infty$ et $\|u\|_\infty = \alpha$.

Si la fonction φ est de signe constant, prenant $f = 1$ pour φ à valeurs positives, ou $f = -1$ pour φ à valeurs négatives, on a $\|f\|_\infty = 1$ et :

$$|u(f)| = u(f) = \int_0^1 |\varphi(t)| dt = \|u\|_\infty$$

donc la borne supérieure $\|u\|_\infty$ est atteinte.

Si φ n'est pas de signe constant, cette borne supérieure n'est pas nécessairement atteinte. Considérons par exemple le cas d'une fonction φ telle que $\varphi(t) < 0$ pour tout $t \in [0, \alpha[$, $\varphi(\alpha) = 0$ et $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \in]\alpha, 1]$, où $0 < \alpha < 1$. S'il existe $f \in E$ telle $\|f\|_\infty = 1$ et $|u(f)| = \int_0^1 |\varphi(t)| dt$, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $u(f) \geq 0$ et on a :

$$u(f) = \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt = \int_0^1 |\varphi(t)| dt = \int_\alpha^1 \varphi(t) dt - \int_0^\alpha \varphi(t) dt$$

soit :

$$\int_\alpha^1 (1 - f(t)) \varphi(t) dt = \int_0^\alpha (1 + f(t)) \varphi(t) dt$$

avec $\int_\alpha^1 (1 - f(t)) \varphi(t) dt \geq 0$ et $\int_0^\alpha (1 + f(t)) \varphi(t) dt \leq 0$ puisque $-1 \leq f(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc :

$$\int_\alpha^1 (1 - f(t)) \varphi(t) dt = \int_0^\alpha (1 + f(t)) \varphi(t) dt = 0$$

ce qui équivaut à $(1 - f(t)) \varphi(t) = 0$ sur $]\alpha, 1]$ et $(1 + f(t)) \varphi(t) = 0$ sur $[0, \alpha[$, soit à $f(t) = 1$ pour tout $t \in]\alpha, 1]$ et $f(t) = -1$ pour tout $t \in [0, \alpha[$, ce qui est impossible pour t continue en α .

(b) Pour tout $f \in E$, on a :

$$|u(f)| = \left| \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt \right| \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^1 |f(t)| dt = \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$$

donc u est continue avec $\|u\|_1 \leq \alpha = \|\varphi\|_\infty$. La fonction φ étant continue sur le segment $[0, 1]$, est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $t_0 \in [0, 1]$ tel que $|\varphi(t_0)| = \|\varphi\|_\infty$. En se donnant une suite de réels strictement positifs $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$, par continuité de φ en t_0 , on peut trouver, pour tout entier naturel k , un réel $\eta_k > 0$ tel que :

$$\forall t \in [a_k, b_k] = [0, 1] \cap [t_0 - \eta_k, t_0 + \eta_k], \quad |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon_k$$

On désigne alors par $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction affine par morceaux et continue qui est nulle en dehors de $]a_k, b_k[$ et telle que $\int_{a_k}^{b_k} f_k(t) dt = 1$ (voir la figure 1.2) et on a :

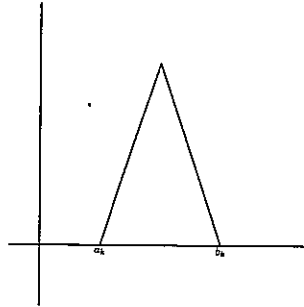


FIGURE 1.2 – graphe de f_k

$$|u(f_k) - \varphi(t_0)| = \left| \int_{a_k}^{b_k} f_k(t) (\varphi(t) - \varphi(t_0)) dt \right| \leq \varepsilon_k \int_{a_k}^{b_k} f_k(t) dt = \varepsilon_k$$

donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} |u(f_k)| = |\varphi(t_0)| = \alpha$. Avec $|u(f_k)| \leq \|u\|_1 \|f_k\|_1 = \|u\|_1$, on en déduit que $\alpha \leq \|u\|_1$ et $\|u\|_1 = \alpha$.

(c) Pour tout $f \in E$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|u(f)| = \left| \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt \right| \leq \|\varphi\|_2 \|f\|_2$$

donc u est continue avec $\|u\|_2 \leq \|\varphi\|_2$. Avec :

$$u(\varphi) = \int_0^1 \varphi^2(t) dt = \|\varphi\|_2^2 \leq \|u\|_2 \|\varphi\|_2$$

on déduit que $\|\varphi\|_2 \leq \|u\|_2$ et l'égalité.

(d) En utilisant l'inégalité de Hölder, on a pour tout $f \in E$:

$$\left| \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| |\varphi(t)| dt \leq \|f\|_p \|\varphi\|_q$$

donc u est continue avec $\|u\|_p \leq \|\varphi\|_q$. De $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_q^q &= \int_0^1 \varphi^q(t) dt = \int_0^1 (\varphi^q(t))^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} dt = \int_0^1 \varphi^{\frac{q}{p}}(t) \varphi(t) dt \\ &= u\left(\varphi^{\frac{q}{p}}\right) \leq \|u\|_p \left\| \varphi^{\frac{q}{p}} \right\|_p \end{aligned}$$

avec $\left\| \varphi^{\frac{q}{p}} \right\|_p^p = \int_0^1 \varphi^q(t) dt = \|\varphi\|_q^q$, donc $\|\varphi\|_q^q \leq \|u\|_p \left(\|\varphi\|_q\right)^{\frac{q}{p}}$ et :

$$\left(\|\varphi\|_q\right)^{q - \frac{q}{p}} = \left(\|\varphi\|_q\right)^{q(1 - \frac{1}{p})} = \|\varphi\|_q \leq \|u\|_p$$

ce qui nous donne l'égalité.

2. La fonction $(x, t) \mapsto f(t) \varphi(x, t)$ étant continue sur $[0, 1]^2$ et l'intégration se faisant sur un segment, on déduit que pour toute fonction $f \in E$, la fonction $u(f)$ est continue sur $[0, 1]$. De la linéarité de l'intégrale, on déduit que u est linéaire. Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |u(f)(x)| &= \left| \int_0^1 f(t) \varphi(x, t) dt \right| \leq \left(\int_0^1 |\varphi(x, t)| dt \right) \|f\|_\infty \\ &\leq \left(\sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |\varphi(x, t)| dt \right) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

donc u est continue avec $\|u\|_\infty \leq \alpha = \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |\varphi(x, t)| dt$.

La fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^1 |\varphi(x, t)| dt$ étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée et atteint ses bornes, il existe donc un réel $x_0 \in [0, 1]$ tel que $\alpha = \sup_{x \in [0, 1]} \Phi(x) = \Phi(x_0)$. On utilise la suite de fonctions continues $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], f_k(t) = \frac{\varphi(x_0, t)}{|\varphi(x_0, t)| + \varepsilon_k}$$

où $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $|f_k(t)| = \frac{|\varphi(x_0, t)|}{|\varphi(x_0, t)| + \varepsilon_k} < 1$, soit $\|f_k\|_\infty \leq 1$ et :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(f_k)(x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\varphi^2(x_0, t)}{|\varphi(x_0, t)| + \varepsilon_k} dt = \int_0^1 |\varphi(x_0, t)| dt = \alpha$$

avec $|u(f_k)(x_0)| \leq \|u(f_k)\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|f_k\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, donc $\alpha \leq \|u\|_\infty$ et en conséquence, $\|u\|_\infty = \alpha$.

Exercice 1.6. Norme d'une application linéaire continue sur un espace préhilbertien

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien (de dimension finie ou non), $\|\cdot\|_2$ est la norme associée, on se donne $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ et son adjoint u^* est défini par $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$ pour tout $(x, y) \in E^2$.

1. Montrer que si u est continue, on a alors $\|u\| = \sup_{\|x\|_2=\|y\|_2=1} |\langle u(x) | y \rangle|$ et dans le cas où u est symétrique, $\|u\| = \sup_{\|x\|_2=1} |\langle u(x) | x \rangle|$.
2. On suppose que $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est euclidien de dimension $n \geq 1$, on désigne par $\text{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u et par $\rho(u) = \max_{\lambda \in \text{sp}(u)} |\lambda|$ le rayon spectral de u . Montrer que :

- (a) si u est symétrique, on a alors $\|u\|_2 = \rho(u)$;
- (b) $\|u^*\|_2 = \|u\|_2$ et $\|u\|_2 = \sqrt{\|u^* \circ u\|_2} = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$;
- (c) si u et v sont deux endomorphismes symétriques, on a alors $\rho(u \circ v) \leq \rho(u) \rho(v)$.

Solution.

1.

- (a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout x, y dans E :

$$|\langle u(x) | y \rangle| \leq \|u(x)\|_2 \|y\|_2 \leq \|u\| \|x\|_2 \|y\|_2$$

et en conséquence $\alpha = \sup_{\|x\|_2=\|y\|_2=1} |\langle u(x) | y \rangle| \leq \|u\|$. Pour $x \in E$ tel que $\|x\|_2 = 1$ et $u(x) \neq 0$, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_2^2 &= \langle u(x) | u(x) \rangle = \|u(x)\|_2 \left\langle u(x) | \frac{1}{\|u(x)\|_2} u(x) \right\rangle \\ &\leq \|u(x)\|_2 \alpha \end{aligned}$$

(puisque $y = \frac{1}{\|u(x)\|_2} u(x)$ est de norme 1), donc $\|u(x)\|_2 \leq \alpha$, cette dernière inégalité étant trivialement vérifiée si $u(x) = 0$. On en déduit donc que $\|u\| \leq \alpha$ et l'égalité.

- (b) Pour u symétrique, on a :

$$\beta = \sup_{\|x\|_2=1} |\langle u(x) | x \rangle| \leq \|u\| = \sup_{\|x\|_2=\|y\|_2=1} |\langle u(x) | y \rangle|$$

et l'application bilinéaire $\varphi : (x, y) \mapsto \langle u(x) | y \rangle$ est symétrique ($\varphi(y, x) = \langle u(y) | x \rangle = \langle x | u(y) \rangle = \langle u(x) | y \rangle$), ce qui nous donne l'identité de polarisation $\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y))$, soit :

$$\langle u(x) | y \rangle = \frac{1}{4} (\langle u(x+y) | x+y \rangle - \langle u(x-y) | x-y \rangle)$$

avec $|\langle u(x \pm y) | x \pm y \rangle| \leq \beta \|x \pm y\|_2^2$, donc :

$$|\langle u(x) | y \rangle| \leq \frac{\beta}{4} (\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2) = \frac{\beta}{2} (\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$$

et pour $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$, on obtient $|\langle u(x) | y \rangle| \leq \beta$. On a donc $\|u\| \leq \beta$ et l'égalité.

2.

- (a) Un endomorphisme symétrique réel se diagonalisant dans une base orthonormée, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et une base orthonormée $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E tels que $u(e_k) = \lambda_k e_k$ pour tout k compris entre 1 et n . Pour tout $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$, on a alors :

$$\|u(x)\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \cdot x_k^2 \leq \rho(u)^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 = \rho(u)^2 \|x\|_2^2$$

Donc $\|u\|_2 \leq \rho(u)$. Si $k \in \{1, \dots, n\}$ est tel que $\rho(u) = |\lambda_k|$, on a alors $\rho(u) = |\lambda_k| = \|u(e_k)\|_2$ avec $\|e_k\|_2 = 1$. Donc $\|u\|_2 = \rho(u)$.

- (b) i. Pour tout $x \in E$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_2^2 &= \langle u(x) | u(x) \rangle = \langle x | u^* \circ u(x) \rangle \leq \|x\|_2 \|u^* \circ u(x)\|_2 \\ &\leq \|x\|_2 \|u^* \circ u\|_2 \|x\|_2 = \|u^* \circ u\|_2 \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

donc $\|u\|_2^2 \leq \|u^* \circ u\|_2 \leq \|u^*\|_2 \|u\|_2$ et $\|u\|_2 \leq \|u^*\|_2$. En appliquant cette inégalité à u^* on obtient $\|u^*\|_2 \leq \|u\|_2$ ($(u^*)^* = u$), ce qui donne, $\|u^*\|_2 = \|u\|_2$.

- ii. On a $\|u\|_2^2 \leq \|u^* \circ u\|_2 \leq \|u^*\|_2 \|u\|_2 = \|u\|_2^2$, donc $\|u\|_2^2 = \|u^* \circ u\|_2$. Comme l'endomorphisme $u^* \circ u$ est symétrique réel, on a $\|u^* \circ u\|_2 = \rho(u^* \circ u)$ et $\|u\|_2 = \sqrt{\|u^* \circ u\|_2} = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$.

- (c) On a $\rho(u \circ v) \leq \|u \circ v\|_2 \leq \|u\|_2 \|v\|_2 = \rho(u) \rho(v)$ pour u, v symétriques.

Problème 1.1. Normes sur $\mathbb{R}[x]$ et sur ℓ^1

On désigne par $\mathbb{R}[x]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles sur $[0, 1]$ et par ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ soit absolument convergente.

- I - Normes sur $\mathbb{R}[x]$

On note respectivement $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ les normes définies sur $\mathbb{R}[x]$ par :

$$\|P\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|, \quad \|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)| dx, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |P(x)|^2 dx}$$

pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$.

Pour tout entier naturel n , et toute fonction polynomiale P , on note :

$$\nu_n(P) = \int_0^1 P(x) x^n dx$$

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n(P) = 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$.
2. Montrer que l'application $\nu : P \mapsto \nu(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\nu_n(P)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[x]$.
3. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P , il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\nu(P) = |\nu_{n_0}(P)|$ (le sup est atteint).
4. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P , on a :

$$\nu(P) \leq \|P\|_1 \leq \|P\|_2 \leq \|P\|_\infty \quad (1.1)$$

5. Quels sont les fonctions polynomiales P pour lesquelles on a respectivement : $\|P\|_1 = \|P\|_2$; $\|P\|_2 = \|P\|_\infty$; $\nu(P) = \|P\|_1$?
6. Soit N l'une des normes $\nu, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}[x]$.

(a) Montrer que la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[x], N)$.

(b) L'espace normé $(\mathbb{R}[x], N)$ est-il complet ?

7. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (a) les normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}[x]$ sont équivalentes ;
 - (b) une suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$ si, et seulement si, elle est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[x], N_2)$;
 - (c) une suite est convergente dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$ si, et seulement si, elle est convergente dans $(\mathbb{R}[x], N_2)$.
8. Montrer que si N_1, N_2 sont deux normes équivalentes sur $\mathbb{R}[x]$, alors $(\mathbb{R}[x], N_1)$ est complet si, et seulement si, $(\mathbb{R}[x], N_2)$ est complet.
9. Montrer que, sur $\mathbb{R}[x]$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$; $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$; $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$; ν et $\|\cdot\|_\infty$; ne sont pas équivalentes.
10. Pour tout réel $\alpha \in [0, 1]$, on désigne par ℓ_α la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[x]$ par $\ell_\alpha(P) = P(\alpha)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$.
 - (a) Soient $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in [0, 1]$. Montrer que la forme linéaire ℓ_α est continue si, et seulement si, il existe une constante réelle $M_\alpha > 0$ telle que $|\ell_\alpha(P)| \leq M_\alpha \|P\|$ pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$.
 - (b) Peut-on trouver une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}[x]$ telle que toutes les formes linéaires ℓ_α soient continues.

- (c) Soit N l'une des normes $\nu, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}[x]$. Déterminer l'ensemble C_N des réels $\alpha \in [0, 1]$ tels que ℓ_α soient continue de $(E, \mathbb{R}[x])$ dans $\mathbb{R}$.

11. On désigne par N_1 et N_2 les applications définies sur $\mathbb{R}[x]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[x], N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |P^{(n)}(n)|, N_2(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(e^{2i\pi t})|$$

- (a) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur $\mathbb{R}[x]$.
 (b) Les espaces (E, N_1) et (E, N_2) sont-ils complets ?

- II - Un résultat de géométrie euclidienne

Ici $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et on note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne correspondante. $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et $\|\cdot\|_1$ est la norme définie sur E par :

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

On note $S^1 = \{x \in E \mid \|x\|_1 = 1\}$ la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_1)$.

On se propose de montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension r comprise entre 1 et $n-1$, on a alors $\sqrt{r} \leq \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$.

1. Pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$, on note :

$$e_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i \text{ et } H_\varepsilon = \left\{ x \in E \mid \langle x | e_\varepsilon \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$$

(a) Montrer que H_ε est un hyperplan affine de E .

(b) Montrer que $S^1 \subset \bigcup_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} H_\varepsilon$.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension r comprise entre 1 et $n-1$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq n-r}$ une base orthonormée de $F^\perp$. Pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$, on note :

$$\delta_\varepsilon = \begin{cases} +\infty & \text{si } H_\varepsilon \cap F = \emptyset \\ d(0, H_\varepsilon \cap F) & \text{si } H_\varepsilon \cap F \neq \emptyset \end{cases}$$

où $d(0, H_\varepsilon \cap F)$ est la distance euclidienne du vecteur nul à $H_\varepsilon \cap F$. On utilise la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$.

(a) Justifier, dans le cas où $H_\varepsilon \cap F \neq \emptyset$, l'existence de $x \in E$ tel que $\delta_\varepsilon = \|x\|_2$.

(b) Précisément, dans le cas où $H_\varepsilon \cap F \neq \emptyset$, montrer que $x = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i a_i + \lambda e_\varepsilon$,

$$\text{où } \lambda = \frac{1}{\sqrt{n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i | e_\varepsilon \rangle^2 \right)} \text{ et } \lambda_i = -\lambda \langle a_i | e_\varepsilon \rangle \quad (1 \leq i \leq n-r).$$

- (c) Montrer, dans tous les cas, que $\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} = n \left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i | e_\varepsilon \rangle^2 \right)$.
- (d) Montrer que $\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} = r$.
- (e) Dédurre de ce qui précède que $\sqrt{r} \leq \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$.

– III – Normes sur ℓ^1

On note $\|\cdot\|_1$ la norme définie sur ℓ^1 par :

$$\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1, \|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$$

1. Montrer que ℓ^1 est un espace vectoriel.
2. Montrer que pour toutes suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ℓ^1 , la série $\sum x_n y_n$ est absolument convergente et que l'application $(x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ définit un produit scalaire sur ℓ^1 . On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.
3. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes sur ℓ^1 ?
4. Montrer que $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est complet.
5. L'espace $(\ell^1, \|\cdot\|_2)$ est-il complet ?
6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par π_n l'application qui à $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ associe le réel $\pi_n(x) = x_n$. Montrer que les applications π_n sont des formes linéaires continues sur $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ et sur $(\ell^1, \|\cdot\|_2)$.
7. Une forme linéaire ℓ sur ℓ^1 qui est continue pour $\|\cdot\|_1$, est-elle combinaison linéaire de π_n ?

Solution.

– I – Normes sur $\mathbb{R}[x]$

1. Pour toute fonction polynomiale P et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$|\nu_n(P)| \leq \|P\|_\infty \int_0^1 x^n dx = \frac{\|P\|_\infty}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2. La suite $(\nu_n(P))_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergente, elle est bornée et le réel $\nu(P)$ est bien défini. Il est clair que ν est valeurs positive. Si $\nu(P) = 0$, on a alors $\nu_n(P) = \int_0^1 P(x) x^n dx = 0$ pour tout entier naturel n , ce qui équivaut du fait de la linéarité de l'intégrale à $\int_0^1 P(x) Q(x) dx = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}[x]$. En

particulier, on a $\int_0^1 P^2(x) dx = 0$ et $P = 0$ puisque P^2 est continue positive. Avec $|\nu_n(\lambda P)| = |\lambda| |\nu_n(P)|$ et :

$$|\nu_n(P + Q)| \leq \left| \int_0^1 P(x) x^n dx \right| + \left| \int_0^1 Q(x) x^n dx \right|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, P, Q dans $\mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on déduit que $\nu(\lambda P) = |\lambda| \nu(P)$ et $\nu(P + Q) \leq \nu(P) + \nu(Q)$. En définitive, ν est une norme sur $\mathbb{R}[x]$.

3. Si $\nu(P) = 0$, on a alors $P = 0$ et $n_0 = 0$ (ou n'importe quel entier) convient. Si $\nu(P) > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n(P) = 0$, il existe un entier $r \geq 0$ tel que :

$$\forall n > r, 0 \leq |\nu_n(P)| \leq \frac{\nu(P)}{2}$$

et $\nu(P) = \sup_{0 \leq n \leq r} |\nu_n(P)|$ est atteint (c'est le plus grand élément d'un ensemble fini).

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|\nu_n(P)| = \left| \int_0^1 P(x) x^n dx \right| \leq \int_0^1 |P(x)| dx = \|P\|_1$$

donc $\nu(P) \leq \|P\|_1$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)| \cdot 1 dx \leq \|P\|_2 \|1\|_2 = \|P\|_2 \quad (1.2)$$

Enfin, l'inégalité $\|P\|_2^2 = \int_0^1 |P(x)|^2 dx \leq \|P\|_\infty^2$ est évidente.

5.

- (a) L'égalité $\|P\|_1 = \|P\|_2$ est réalisée si, et seulement si, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.2), ce qui équivaut à dire qu'il existe un réel λ tel que $|P| = \lambda \cdot 1 = \lambda$. Si $\lambda = 0$, on a alors $P = 0$, sinon le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que $P = \lambda$ ou $P = -\lambda$. Dans tous les cas, on a $\|P\|_1 = \|P\|_2$ si, et seulement si, P est constant.
- (b) L'égalité $\|P\|_2 = \|P\|_\infty$ est réalisée si, et seulement si, on a :

$$\int_0^1 (\|P\|_\infty^2 - |P(x)|^2) dx = 0$$

la fonction $\|P\|_\infty^2 - |P(x)|^2$ étant positive continue, ce qui équivaut à $|P| = \|P\|_\infty$ et P est constante.

- (c) Si $P = 0$, on a bien $\nu(P) = \|P\|_1$. Soit $P \neq 0$ tel que $\nu(P) = \|P\|_1$. Comme il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\nu(P) = |\nu_{n_0}(P)|$, l'égalité $\nu(P) = \|P\|_1$ se traduit par :

$$\left| \int_0^1 P(x) x^{n_0} dx \right| = \int_0^1 |P(x)| dx$$

Si $n_0 = 0$, cela signifie que $\int_0^1 P(x) dx = \pm \int_0^1 |P(x)| dx$, ou encore $\int_0^1 (|P(x)| \pm P(x)) dx = 0$, la fonction $|P| \pm P$ étant continue positive, ce qui équivaut à $P = \pm |P|$ et P a un signe constant. Si $n_0 \geq 1$, on a :

$$\int_0^1 |P(x)| dx = \left| \int_0^1 P(x) x^{n_0} dx \right| \leq \int_0^1 |P(x)| x^{n_0} dx$$

soit $\int_0^1 (1 - x^{n_0}) |P(x)| dx \leq 0$ avec $\int_0^1 (1 - x^{n_0}) |P(x)| dx \geq 0$, donc $\int_0^1 (1 - x^{n_0}) |P(x)| dx = 0$ et en conséquence, $(1 - x^{n_0}) |P(x)| = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, puisque cette fonction est continue positive, donc $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$ puisque $1 - x^{n_0} > 0$ pour $n_0 \geq 1$ et $x \in [0, 1[$. Par continuité, on en déduit que $P = 0$ sur $[0, 1]$. En définitive, si $\nu(P) = \|P\|_1$, la fonction polynomiale P est de signe constant sur $[0, 1]$. Réciproquement si P est de signe constant sur $[0, 1]$, on a alors en supposant $P \geq 0$ (on s'y ramène en remplaçant P par $-P$), $\|P\|_1 = \int_0^1 P(x) dx \leq \nu(P)$ et en conséquence, $\nu(P) = \|P\|_1$ puisqu'on a toujours l'autre inégalité.

6.

- (a) Avec les inégalités (1.1), il nous suffit de vérifier que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Pour $m > n \geq 0$ et $x \in [0, 1]$, on a :

$$0 \leq P_m(x) - P_n(x) = \sum_{k=n+1}^m \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

donc $\|P_m - P_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, donc dans (E, N) .

- (b) Avec les inégalités (1.1), il nous suffit de vérifier que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente dans (E, ν) pour montrer qu'elle diverge dans chacun des (E, N) et en conséquence, aucun de ces espaces n'est de Banach. Supposons que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P \in \mathbb{R}[x]$ dans $(\mathbb{R}[x], \nu)$. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(P_n - P) = 0$ et avec $0 \leq \nu_k(P_n - P) \leq \nu(P_n - P)$ pour tout entier naturel k , on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_k(P_n - P) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (P_n(x) - P(x)) x^k dx = 0$$

Sachant que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur $[0, 1]$, on en déduit que $\int_0^1 (e^x - P(x)) x^k dx = 0$ pour tout

$k \in \mathbb{N}$ et par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 (e^x - P(x)) Q(x) dx = 0$ pour tout $Q \in E$. Prenant pour polynômes Q les polynômes P_n , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 (e^x - P(x)) P_n(x) dx = 0$$

et faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\int_0^1 (e^x - P(x)) e^x dx = 0$ par convergence uniforme avec $\int_0^1 (e^x - P(x)) P(x) dx = 0$, ce qui donne $\int_0^1 (e^x - P(x))^2 dx = 0$ et en conséquence $\exp = P \in \mathbb{R}[x]$, ce qui n'est pas (sinon $P^{(k)}(0) = 1$ pour tout entier $k \geq 0$, avec P polynomiale, ce qui n'est pas possible).

On aurait aussi pu utiliser le théorème des moments qui nous dit si une fonction $f \in C^0([0, 1])$ est telle que $\int_0^1 f(x) x^k dx = 0$ pour tout entier $k \geq 0$, c'est alors la fonction nulle (conséquence du théorème de Stone-Weierstrass).

En utilisant le théorème de Baire, on peut montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie ne peut avoir de base dénombrable, ce qui résout la question immédiatement.

7. Supposons les normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}[x]$ équivalentes (i.e. $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$). Si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}[x]$ qui est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$ [resp. dans $(\mathbb{R}[x], N_2)$], avec $0 \leq N_2(P_m - P_n) \leq \beta N_1(P_m - P_n)$ [resp. $0 \leq N_1(P_m - P_n) \leq \frac{1}{\alpha} N_2(P_m - P_n)$], on déduit que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[x], N_2)$ [resp. dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$]. Donc (a) $\Rightarrow$ (b).

Supposons (b) vérifiée et soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$ vers $P \in \mathbb{R}[x]$. On lui associe la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $Q_{2n} = P_n$ et $Q_{2n+1} = P$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers P dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$, elle est donc de Cauchy dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$ et aussi dans $(\mathbb{R}[x], N_2)$ si (b) est vérifié. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un entier n_0 tel que pour tous p, q supérieurs à n_0 on ait $N_2(Q_q - Q_p) < \varepsilon$, ce qui nous donne :

$$\forall n \geq \frac{n_0}{2}, N_2(Q_{2n+1} - Q_{2n}) = N_2(P - P_n) < \varepsilon$$

et signifie que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers P dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$. Donc (b) $\Rightarrow$ (c).

Supposons (c) vérifiée. Il s'agit alors de montrer que les fonctions $\frac{N_1}{N_2}$ et $\frac{N_2}{N_1}$ sont

majorées sur $\mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$. Si $\frac{N_1}{N_2}$ n'est pas majorée (la démonstration est analogue pour $\frac{N_2}{N_1}$), pour tout entier $n \geq 1$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ tel que $\frac{N_1(P_n)}{N_2(P_n)} \geq$

n^2 . En désignant par $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $Q_n = \frac{n}{N_1(P_n)} P_n$, on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_1(Q_n) = +\infty$ et $0 \leq N_2(Q_n) \leq \frac{1}{n^2} N_1(Q_n) = \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = 0$

dans $(\mathbb{R}[x], N_2)$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ doit aussi converger dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$ si (c) est vérifié, ce qui est incompatible avec le fait que la suite $(N_1(Q_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

8. Résulte immédiatement de ce qui précède.

9.

(a) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}[x]$ définie par $P_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$. Avec $\|P_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ et $\|P_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, on voit que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}[x]$ muni de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ et avec $\|P_n\|_\infty = 1$, on voit que ce n'est pas le cas pour $\|\cdot\|_\infty$. Donc $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ [resp. $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$] ne sont pas équivalentes.

(b) En utilisant l'exemple précédent, on a $\frac{\|P_n\|_2}{\|P_n\|_1} = \sqrt{2n+1}$, donc la fonction $\frac{\|\cdot\|_2}{\|\cdot\|_1}$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ et les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

(c) Avec $\nu \leq \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$, on déduit qu'une suite convergente pour $\|\cdot\|_\infty$ converge toujours vers $\|\cdot\|_1$ et l'équivalence entre ν et $\|\cdot\|_\infty$ entraînerait qu'une suite convergente pour $\|\cdot\|_1$, va converger vers ν , donc vers $\|\cdot\|_\infty$, ce qui contredit la non équivalence de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. De manière analogue, on voit que ν et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

10.

(a) C'est du cours et valable pour toute forme linéaire ℓ sur $\mathbb{R}[x]$. Si ℓ est continue sur $\mathbb{R}[x]$, elle est alors continue en 0 et il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$P \in \mathbb{R}[x], \|P\| \leq \eta \Rightarrow |\ell(P)| = |\ell(P) - \ell(0)| \leq 1$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$, on a $\left\| \frac{\eta}{\|P\|} P \right\| = \eta$ et $\left| \ell \left(\frac{\eta}{\|P\|} P \right) \right| \leq 1$ revient

à dire que $|\ell(P)| \leq M \|P\|$ avec $M = \frac{1}{\eta}$, ce qui est encore valable pour $P = 0$. Réciproquement s'il existe $M > 0$ tel que $|\ell(P)| \leq M \|P\|$ pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, l'application linéaire ℓ est lipschitzienne, donc continue et même uniformément continue.

(b) Soit $\|\cdot\|$ l'application définie sur E par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[x], \|P\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |P^{(n)}(0)|$$

Comme $P^{(n)} = 0$ pour n assez grand, cette application est bien définie. Elle est à valeurs positives et $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$, $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et P, Q dans $\mathbb{R}[x]$. En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, on voit que $\|P\| = 0$ si, et seulement si, $P = 0$. Donc $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[x]$.

Pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et tout $P \in \mathbb{R}[x]$, on peut écrire en utilisant la formule de Taylor pour les polynômes que :

$$|\ell_\alpha(P)| = |P(\alpha)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \alpha^n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| P^{(n)}(0) \right| = \|P\|$$

(on peut aussi prendre $\alpha \in \mathbb{R}$ et avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$, on déduit que la suite

$$\left(\frac{\alpha^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée, donc } |\ell_\alpha(P)| \leq M_\alpha \|P\| \text{ avec } M_\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\alpha|^n}{n!}.$$

- (c) De $|\ell_\alpha(P)| = |P(\alpha)| \leq \|P\|_\infty$, on déduit que $C_{\|\cdot\|_\infty} = [0, 1]$. Supposons qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que ℓ_α soit continue pour $\|\cdot\|_1$. Il existe alors $M_\alpha > 0$ tel que $|\ell_\alpha(P)| \leq M_\alpha \|P\|_1$ pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$. Prenant $P = 1$, on déduit que $M_\alpha \geq 1$. Le théorème de Weierstrass nous dit que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[x]$ qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_\alpha(P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\alpha) = f(\alpha)$ (convergence simple) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n\|_1 = \|f\|_1$ (conséquence de la convergence uniforme) et en conséquence :

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |\ell_\alpha(P_n)| \leq M_\alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n\|_1 \\ &\leq M_\alpha \|f\|_1 = M_\alpha \int_0^1 |f(x)| dx \end{aligned}$$

Mais pour $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ affine par morceaux telle que $f(x) = 0$ pour $x \notin [0, 1] \cap \left[\alpha - \frac{1}{4M_\alpha}, \alpha + \frac{1}{4M_\alpha} \right]$, $f(\alpha) = 1$ et f affine sur $[0, 1] \cap \left[\alpha - \frac{1}{4M_\alpha}, \alpha \right]$ et $[0, 1] \cap \left[\alpha, \alpha + \frac{1}{4M_\alpha} \right]$ (faire un dessin), cela donne :

$$|f(\alpha)| = 1 \leq M_\alpha \int_0^1 |f(x)| dx \leq M_\alpha \frac{1}{4M_\alpha} = \frac{1}{4}$$

ce qui est faux. On a donc $C_{\|\cdot\|_1} = \emptyset$. On voit de même que $C_{\|\cdot\|_2} = \emptyset$. Avec $\nu \leq \|\cdot\|_1$, on déduit que $C_\nu \subset C_{\|\cdot\|_1}$ et $C_\nu = \emptyset$.

11.

- (a) Comme $P^{(n)} = 0$ pour n assez grand, l'application N_1 est bien définie. Elle est à valeurs positives et $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$, $N_1(P + Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et P, Q dans $\mathbb{R}[x]$. Si $N_1(P) = 0$, on a alors $P^{(n)}(n) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$.

Montrons, par récurrence sur $p \geq 0$, que si $P \in \mathbb{R}_p[X]$ est telle que $P^{(n)}(n) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$, on a alors $P = 0$. Pour $p = 0$, c'est clair. Supposons le résultat acquis au rang $p - 1 \geq 0$ et soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que $P^{(n)}(n) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$. Le polynôme $Q(X) = P'(X + 1)$ est dans $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ avec $Q^{(n)}(n) = P^{(n+1)}(n + 1) = 0$ pour tout $n \geq 0$,

donc $Q = 0$ et P est constant égal à $P(0) = 0$.

On peut aussi procéder comme suit. L'application :

$$\varphi_p : P \in \mathbb{R}_p[X] \mapsto (P(0), P'(1), \dots, P^{(p)}(p)) \in \mathbb{R}^{p+1}$$

est linéaire et sa matrice dans les bases canoniques est :

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & p \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & p(p-1)2^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p!(p-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p! \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A_p) \neq 0$, cette application réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$ et en particulier, $N_1(P) = 0$ qui équivaut à $\varphi_p(P) = 0$ nous donne $P = 0$. L'application N_1 est donc une norme sur $\mathbb{R}[x]$.

L'application $t \mapsto P(e^{2i\pi t})$ étant continue sur le segment $[0, 1]$ y est bornée et atteint ses bornes, donc N_2 est bien définie. Cette application est à valeurs positives avec $N_2(\lambda P) = |\lambda| N_2(P)$, $N_2(P + Q) \leq N_2(P) + N_2(Q)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et P, Q dans $\mathbb{R}[x]$. Si $N_2(P) = 0$, on a alors $P(e^{2i\pi t}) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et P a une infinité de racines sur le cercle unité du plan complexe, c'est donc le polynôme nul. N_2 est donc une norme sur $\mathbb{R}[x]$.

- (b) En utilisant les isomorphismes φ_n de la question précédente, on peut construire une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[x]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, n\}, P_n^{(k)}(k) = \frac{1}{2^k}$$

Pour $m > n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} N_1(P_m - P_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |P_m^{(k)}(k) - P_n^{(k)}(k)| \\ &= \sum_{k=n+1}^m P_m^{(k)}(k) = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

ce qui signifie que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$. Supposons qu'elle converge dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$ vers un polynôme P . Avec :

$$|P^{(k)}(k) - P_n^{(k)}(k)| \leq N_1(P - P_n)$$

pour tout entier $k \geq 0$, on déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n^{(k)}(k) = P^{(k)}(k)$$

Mais, pour k fixé et tout $n \geq k$, on a $P_n^{(k)}(k) = \frac{1}{2^k}$, c'est-à-dire que la suite $(P_n^{(k)}(k))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire sur $\frac{1}{2^k}$ à partir du rang k et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k)}(k) = \frac{1}{2^k} \neq 0$$

ce qui est impossible. La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc divergente dans $(\mathbb{R}[x], N_1)$ et $(\mathbb{R}[x], N_1)$ n'est pas complet.

(c) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Pour $m > n \geq 0$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$|P_m(e^{2i\pi t}) - P_n(e^{2i\pi t})| = \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{e^{2i\pi kt}}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

donc :

$$N_2(P_m - P_n) = \sup_{t \in [0, 1]} |P_m(e^{2i\pi t}) - P_n(e^{2i\pi t})| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[x], N_2)$. Supposons qu'elle converge dans $(\mathbb{R}[x], N_2)$ vers P . De $|P(e^{2i\pi t}) - P_n(e^{2i\pi t})| \leq N_2(P - P_n)$ pour tout $t \in [0, 1]$, on déduit que :

$$\forall t \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(e^{2i\pi t}) = P(e^{2i\pi t})$$

On a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(e^{2i\pi t}) = \exp(e^{2i\pi t})$, donc $P(e^{2i\pi t}) = \exp(e^{2i\pi t})$, soit $P(z) = e^z$ pour tout z sur le cercle unité complexe et $P \neq 0$. En désignant par p le degré de P et en tenant compte de $\int_0^1 e^{2i\pi kt} dt = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a pour tout entier $n > p$, $\int_0^1 P(e^{2i\pi t}) e^{-2i\pi nt} dt = 0$ et :

$$\int_0^1 \exp(e^{2i\pi t}) e^{-2i\pi nt} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{k!} e^{2i(k-n)\pi t} dt = \frac{1}{p!} \neq 0$$

(convergence uniforme ou coefficients de Fourier), soit une impossibilité. Donc $(\mathbb{R}[x], N_2)$ n'est pas complet.

- II - Un résultat de géométrie euclidienne

1.

- (a) L'application $\varphi_\varepsilon : x \mapsto \langle x | e_\varepsilon \rangle$ étant une forme linéaire sur E , l'ensemble $H_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est un hyperplan affine de direction $\ker(\varphi_\varepsilon) = (\mathbb{R}e_\varepsilon)^\perp$. Comme φ_ε est une forme linéaire non nulle, elle est surjective, donc H_ε est non vide et pour x_0 fixé dans H_ε , un vecteur $x \in E$ est dans H_ε si, et seulement si, $x - x_0 \in \ker(\varphi_\varepsilon)$, donc $H_\varepsilon = x_0 + \ker(\varphi_\varepsilon)$.

- (b) Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in S^1$, on a alors $\sum_{i=1}^n |x_i| = 1$ et en désignant pour tout i compris entre 1 et n par ε_i le signe de x_i (avec la convention $\text{sgn}(0) = 1$), on a $\langle x | e_\varepsilon \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n |x_i| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $x \in H_\varepsilon$.

2.

- (a) En supposant que $H_\varepsilon \cap F \neq \emptyset$, on se donne x_0 dans $H_\varepsilon \cap F$. On a :

$$H_\varepsilon \cap F = (x_0 + \ker(\varphi_\varepsilon)) \cap F = x_0 + \ker(\varphi_\varepsilon) \cap F$$

et :

$$\begin{aligned} d(0, H_\varepsilon \cap F) &= \inf_{z \in H_\varepsilon \cap F} \|z\|_2 = \inf_{y \in \ker(\varphi_\varepsilon) \cap F} \|x_0 - y\|_2 \\ &= d(x_0, \ker(\varphi_\varepsilon) \cap F) = \|x_0 - p_{\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F}(x_0)\|_2 \end{aligned}$$

où $p_{\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F}(x_0) \in \ker(\varphi_\varepsilon) \cap F$ est la projection orthogonale de x_0 sur $\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F$ ($x_0 - p_{\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F}(x_0)$ est unique et c'est la projection orthogonale de 0 sur $H_\varepsilon \cap F$). On a donc $\delta_\varepsilon = d(0, H_\varepsilon \cap F) = \|x\|_2$ avec :

$$x = x_0 - p_{\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F}(x_0) \in (\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F)^\perp$$

et :

$$(\ker(\varphi_\varepsilon) \cap F)^\perp = (\ker(\varphi_\varepsilon))^\perp + F^\perp = ((\mathbb{R}e_\varepsilon)^\perp)^\perp + F^\perp = \mathbb{R}e_\varepsilon + F^\perp$$

- (b) Le vecteur $x \in H_\varepsilon \cap F$ s'écrit donc $x = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i a_i + \lambda e_\varepsilon$. Comme $x \in F$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq n-r}$ est une base orthonormée de $F^\perp$, on a :

$$\langle x | a_i \rangle = \lambda_i + \lambda \langle e_\varepsilon | a_i \rangle = 0 \quad (1 \leq i \leq n-r)$$

donc $\lambda_i = -\lambda \langle a_i | e_\varepsilon \rangle$ ($1 \leq i \leq n-r$) et comme $x \in H_\varepsilon$, on a :

$$\langle x | e_\varepsilon \rangle = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \langle a_i | e_\varepsilon \rangle + \lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

soit $\lambda \left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle e_\varepsilon | a_i \rangle^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui impose $\sum_{i=1}^{n-r} \langle e_\varepsilon | a_i \rangle^2 \neq 1$ et :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i | e_\varepsilon \rangle^2 \right)}$$

(c) Pour $H_\varepsilon \cap F \neq \emptyset$, on a donc :

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon^2 &= \|x\|_2^2 = \left\langle x \mid \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i a_i + \lambda e_\varepsilon \right\rangle = \lambda \langle x \mid e_\varepsilon \rangle \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n \left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 \right)}\end{aligned}$$

($x \in H_\varepsilon \cap F$). Pour $H_\varepsilon \cap F = \emptyset$, on a $e_\varepsilon \in F^\perp$ (sinon il existe $y \in F$ tel que $\alpha = \langle y \mid e_\varepsilon \rangle \neq 0$ et $\left\langle \frac{1}{\alpha\sqrt{n}} y \mid e_\varepsilon \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\frac{1}{\alpha\sqrt{n}} y \in H_\varepsilon \cap F$), donc $\sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 = \|e_\varepsilon\|_2^2 = 1$ et $\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} = 0 = n \left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 \right)$.

(d) Comme $\text{card}(\{-1, 1\}^n) = 2^n$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} &= n \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 \right) \\ &= n2^n - n \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \left(\sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 \right)\end{aligned}$$

Dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a :

$$a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \text{ et } e_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j e_j$$

donc :

$$\begin{aligned}\langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j \right)^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} a_{ij} a_{ik} \varepsilon_j \varepsilon_k \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} a_{ij} a_{ik} \varepsilon_j \varepsilon_k \right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 &= \frac{n-r}{n} + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-r} \left(\sum_{1 \leq j < k \leq n} a_{ij} a_{ik} \varepsilon_j \varepsilon_k \right) \\ &= \frac{n-r}{n} + \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \varepsilon_j \varepsilon_k \left(\sum_{i=1}^{n-r} a_{ij} a_{ik} \right)\end{aligned}$$

En notant $b_{j,k} = \sum_{i=1}^{n-r} a_{ij} a_{ik}$, on a :

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \left(\sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i \mid e_\varepsilon \rangle^2 \right) = \frac{n-r}{n} 2^n + \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < k \leq n} b_{j,k} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \varepsilon_j \varepsilon_k$$

avec :

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_j \varepsilon_k = 0 \quad (1 \leq j < k \leq n)$$

Par exemple pour $(j, k) = (1, 2)$, cette somme est :

$$\sum_{(1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)} \varepsilon_2 - \sum_{(-1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)} \varepsilon_2 = 0$$

Il en résulte que :

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left(\sum_{i=1}^{n-r} \langle a_i | e_\varepsilon \rangle^2 \right) = \frac{n-r}{n} 2^n$$

et :

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} = n 2^n - n \frac{n-r}{n} 2^n = r 2^n$$

(e) On a $r = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \frac{1}{\delta_\varepsilon^2} \leq \max_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \frac{1}{\delta_\varepsilon^2}$, donc il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$ tel que

$\frac{1}{\delta_\varepsilon^2} \geq r$, soit $\delta_\varepsilon^2 \leq \frac{1}{r}$. En désignant par $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in H_\varepsilon \cap F$ la projection orthogonale de 0 sur $H_\varepsilon \cap F$, on a :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i = \sqrt{n} \langle x | e_\varepsilon \rangle = 1$$

et $\|x\|_2 = \delta_\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{r}}$, ce qui nous donne $\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \geq \sqrt{r}$ avec $x \in F \setminus \{0\}$. Il en résulte que $\sup_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \geq \sqrt{r}$. Il reste à prouver que cette borne supérieure

est atteinte (c'est un max d'après l'énoncé). Pour ce faire, on remarque, en désignant par S^2 la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_2)$, que $\sup_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} =$

$\sup_{x \in S^2 \cap F} \|x\|_1$ ($\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} = \frac{\|\lambda x\|_1}{\|\lambda x\|_2}$ pour $\lambda = \frac{1}{\|x\|_2}$), la fonction $x \mapsto \|x\|_1$ étant continue sur le compact $S^2 \cap F$ (on est en dimension finie), donc la borne supérieure est atteinte.

- III - Normes sur ℓ^1

1. Il s'agit de montrer que ℓ^1 est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles. La suite nulle est dans ℓ^1 et pour x, y dans ℓ^1 , λ dans $\mathbb{R}$, on a

$$|x_n + \lambda y_n| \leq |x_n| + |\lambda| |y_n|, \text{ donc } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n + y_n| < +\infty \text{ et } x + \lambda y \in \ell^1.$$

2. Si $y \in \ell^1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, donc la suite y est bornée et pour $x \in \ell^1$, on a $|x_n y_n| \leq \|y\|_\infty |x_n|$, ce qui implique l'absolue convergence de la série $\sum x_n y_n$. On peut donc définir l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Il est clair que cette application est symétrique, bilinéaire et positive. Enfin l'égalité $\langle x | x \rangle = 0$ équivaut à $x_n = 0$ pour tout n , soit à $x = 0$. On a donc un produit scalaire sur E .
3. Pour $x \in \ell^1$ et tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\left(\sum_{k=0}^n |x_k| \right)^2 = \sum_{k=0}^n x_k^2 + 2 \sum_{0 \leq j < k \leq n} |x_k| |x_j| \geq \sum_{k=0}^n x_k^2$$

et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\|x\|_1^2 \geq \|x\|_2^2$, soit $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$. Mais il n'est pas possible de trouver une constante $\alpha > 0$ telle que $\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$. Si c'était le cas, en considérant pour tout entier $r \geq 1$, la suite $x^{(r)} \in \ell^1$ définie par $x_k^{(r)} = 1$ pour $0 \leq k \leq r-1$ et $x_k^{(r)} = 0$ pour $k \geq r$, on aurait :

$$\forall r \geq 1, \|x^{(r)}\|_1 = r \leq \|x^{(r)}\|_2 = \sqrt{r}$$

ce qui est impossible. Ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

4. Soit $(x^{(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. Avec $|x_k^{(s)} - x_k^{(r)}| \leq \|x^{(s)} - x^{(r)}\|_1$ pour tout entier k , on déduit que chaque suite réelle $(x_k^{(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente. On note $x_k = \lim_{r \rightarrow +\infty} x_k^{(r)}$ pour tout k et $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite $(x^{(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ étant de Cauchy dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ y est bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que $\|x^{(r)}\|_1 \leq M$ pour tout $r \geq 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, on a alors :

$$\sum_{k=0}^n |x_k| = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n |x_k^{(r)}| \leq \|x^{(r)}\|_1 \leq M$$

et la série $\sum |x_n|$ est convergente, donc $x \in \ell^1$. Comme $(x^{(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que :

$$\forall s > r \geq n_\varepsilon, \|x^{(s)} - x^{(r)}\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k^{(s)} - x_k^{(r)}| < \varepsilon$$

Pour $s > r \geq n_\varepsilon$ et $n \geq 0$, on a, $\sum_{k=0}^n |x_k^{(s)} - x_k^{(r)}| \leq \|x^{(s)} - x^{(r)}\|_1 < \varepsilon$. Faisant

tendre s vers l'infini à $r \geq n_\varepsilon$ fixé, on en déduit que $\sum_{k=0}^n |x_k - x_k^{(r)}| \leq \varepsilon$ et

$\|x - x^{(r)}\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k - x_k^{(r)}| \leq \varepsilon$, ce qui signifie que la suite $(x^{(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans ℓ^1 . L'espace $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est donc complet.

5. Soit $(x^{(r)})_{r \geq 1}$ la suite d'éléments de ℓ^1 définie par $x_k^{(r)} = \frac{1}{k+1}$ pour k compris entre 0 et $r-1$ et $x_k^{(r)} = 0$ pour $k \geq r$. Pour $s > r \geq 1$, on a :

$$\|x^{(s)} - x^{(r)}\|_2^2 = \sum_{k=r}^{s-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=r+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

donc $(x^{(r)})_{r \geq 1}$ est de Cauchy dans $(\ell^1, \|\cdot\|_2)$. Supposons qu'elle converge vers $x \in \ell^1$, soit :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \|x - x^{(r)}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k - x_k^{(r)})^2 = 0$$

avec $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| < +\infty$. Tenant compte de $|x_k - x_k^{(r)}| \leq \|x - x^{(r)}\|_2$, on déduit que

$\lim_{r \rightarrow +\infty} |x_k - x_k^{(r)}| = 0$ pour tout $k \geq 0$, soit $\lim_{r \rightarrow +\infty} x_k^{(r)} = x_k$ avec $x_k^{(r)} = \frac{1}{k+1}$ pour $r \geq k+1$, ce qui signifie que $x_k = \frac{1}{k+1}$ pour tout $k \geq 0$, mais contredit

le fait $x \in \ell^1$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$. L'espace $(\ell^1, \|\cdot\|_2)$ n'est donc pas complet.

6. Les projections π_n sont linéaires et avec $|\pi_n(x)| = |x_n| \leq \|x\|_j$ pour $j = 1, 2$, on déduit qu'elles sont continues.

7. Soit ℓ la forme linéaire définie sur ℓ^1 par $\ell(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ (une série absolument

convergente est convergente). Avec $|\ell(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| = \|x\|_1$, on déduit que ℓ

est continue. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\ell = \sum_{k=0}^n \lambda_k \pi_k$. En

prenant pour $x \in \ell^1$ la suite définie par $x_{n+1} = 1$ et $x_k = 0$ pour $k \neq n+1$, on a $\ell(x) = 1$ et $\sum_{k=0}^n \lambda_k \pi_k(x) = 0$, ce qui est contradictoire. Donc ℓ ne peut s'écrire

comme combinaison linéaire (finie) de π_n .

Chapitre 2

Suites et séries numériques

Exercice 2.1. Suites définies par $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{+,*}$ et f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$.

1. Montrer que les points fixes de f_λ sont $\alpha = 0$, $\beta_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$ et que l'intervalle $I = [0, 1]$ est stable par f_λ si, et seulement si, $\lambda \in]0, 4]$.
On désigne par $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de points de I définie par $x_0 \in]0, 1[$ et $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour $\lambda \in]0, 1[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, la convergence étant géométrique de rapport λ .
3. On suppose que $\lambda = 1$. Montrer que :
 - (a) la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, la convergence étant lente ;
 - (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = x_0$;
 - (c) $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$;
 - (d) $x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$;
 - (e) $x_n = \frac{\sin^2(2^n \theta)}{2^{2n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où θ dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ est tel que $x_0 = \sin^2(\theta)$.
4. Montrer que pour $\lambda \in]1, 3]$, le point fixe α de f_λ est répulsif, le point fixe β_λ est attractif pour $\lambda \neq 3$ et α , β_λ sont les seuls points fixes réels de $f_\lambda \circ f_\lambda$.
5. On suppose que $\lambda \in]1, 2]$.
 - (a) Montrer que pour $x_0 = \beta_\lambda$ ou $x_0 = \frac{1}{\lambda}$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire sur β_λ .
 - (b) Montrer que les intervalle $]0, \beta_\lambda[$ et $\left] \beta_\lambda, \frac{1}{2} \right]$ sont stables par f_λ .

(c) Montrer que pour $x_0 \in]0, \beta_\lambda[$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante convergente vers β_λ et que pour $x_0 \in \left] \beta_\lambda, \frac{1}{2} \right]$ elle est strictement décroissante convergente vers β_λ . Que se passe-t-il pour $x_0 \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$?

6. On suppose que $\lambda \in]2, 3]$.

(a) Montrer que $f_\lambda \circ f_\lambda \left(\left] \frac{1}{\lambda}, \beta_\lambda \right[\right) \subset \left] \frac{1}{2}, \beta_\lambda \right[$ et en conséquence, l'intervalle $\left] \frac{1}{\lambda}, \beta_\lambda \right[$ est stable par $f_\lambda \circ f_\lambda$.

(b) Montrer que $f_\lambda \circ f_\lambda$ est strictement croissante sur $\left] \frac{1}{2}, \beta_\lambda \right[$.

(c) Montrer que pour $x_0 \in \left] \frac{1}{\lambda}, \beta_\lambda \right[$ la suite $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante convergente vers β_λ , puis que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers β_λ .

(d) Montrer que pour $x_0 \in \left] 0, \frac{1}{\lambda} \right[$, il existe un entier $p \geq 1$ tel que $x_p \in \left] \frac{1}{\lambda}, \beta_\lambda \right[$, puis conclure.

(e) Montrer que pour $x_0 \in]\beta_\lambda, 1[$, on a $x_1 \in]0, \beta_\lambda[$, puis conclure.

7. Que se passe-t-il pour $\lambda \in]3, 4]$?

Solution. Pour $x_0 \in \{0, 1\}$, on a $x_n = 0$ pour $n \geq 1$, d'où le choix de $x_0 \in]0, 1[$.

1.

(a) L'équation $f_\lambda(x) = x$ équivaut à $x(1 - \lambda + \lambda x) = 0$, ce qui donne les deux points fixes, $\alpha = 0$ et $\beta_\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ avec $\beta_\lambda = \alpha$ pour $\lambda = 1$.

(b) f_λ est polynomiale de degré 2 avec $\inf_{x \in I} f_\lambda(x) = f_\lambda(0) = f_\lambda(1) = 0$ et $\sup_{x \in I} f_\lambda(x) = f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4}$ (arc de parabole), donc $f_\lambda(I) = \left[0, \frac{\lambda}{4}\right]$ et I est stable par f_λ si, et seulement si, $\lambda \in]0, 4]$.

2. Pour $\lambda \in]0, 1[$, on vérifie par récurrence que $x_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec $0 < x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) < \lambda x_n$, on vérifie par récurrence que $0 < x_n \leq \lambda^n x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en conséquence $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = 0$ (le point fixe de f_λ dans I puisque $\beta_\lambda < 0$). Enfin avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(1 - x_n) = \lambda \in]0, 1[$, on déduit que la convergence est géométrique de rapport λ .

3.

(a) Pour $\lambda = 1$, on a encore $x_n \in]0, 1[$, $0 < x_{n+1} = x_n(1 - x_n) < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée et en

conséquence convergente vers 0 qui est l'unique point fixe de f_1 dans I puisque $\beta_1 = \alpha$. Puis avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - x_n) = 1$, on déduit que la convergence est lente.

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n x_k^2 = \sum_{k=0}^n (x_k - x_{k+1}) = x_0 - x_{n+1}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = x_0$.
- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{1 - x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et le théorème de Cesàro nous dit que :

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_0} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n x_n} \right)$$

soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x_n = 1$ ou encore $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Avec ce résultat, on retrouve la convergence lente de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la convergence de la série $\sum x_n^2$.

- (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1 - x_n} = 1 + x_n + x_n^2 + o(x_n^2)$, donc :

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} - 1 = x_n (1 + x_n + o(x_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

la série $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente, d'où l'équivalence des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} - 1 \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

soit $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1} - (n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n x_n} = 1 + \left(\frac{1}{x_1} - 1 \right) \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

ou encore :

$$n x_n = \left(1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)^{-1} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

$$\text{soit } x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

- (e) Pour $x_0 \in]0, 1[$, il existe un unique $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x_0 = \sin^2(\theta)$ et on a $x_1 = \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) = \left(\frac{\sin(2\theta)}{2} \right)^2$. Supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a $x_{n+1} = x_n (1 - x_n) = \frac{\sin^2(2^n \theta) \cos^2(2^n \theta)}{2^{2n}} = \frac{\sin^2(2^{n+1} \theta)}{2^{2(n+1)}}$.

4.

- (a) Pour $\lambda \in]1, 3]$, on a $\beta_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda} \in \left]0, \frac{2}{3}\right] \subset I$, donc f_λ a deux points fixes distincts dans I . On a $f'_\lambda(x) = \lambda(1 - 2x)$, donc $f'_\lambda(0) = \lambda > 1$ et $\alpha = 0$ est répulsif, $f'_\lambda(\beta_\lambda) = 2 - \lambda \in]-1, 1[$ pour $\lambda \neq 3$, donc β_λ est attractif.
- (b) Les points fixes de $f_\lambda \circ f_\lambda$ sont les zéros dans $[0, 1]$ du polynôme :

$$\begin{aligned} P_\lambda(x) &= x - f_\lambda \circ f_\lambda(x) = x - \lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x)) \\ &= x(\lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 x^2 + (1+\lambda)\lambda^2 x + 1 - \lambda^2) \\ &= \lambda^3 x \left(x^2 - \frac{1+\lambda}{\lambda} x + \frac{\lambda+1}{\lambda^2} \right) \left(x - \frac{\lambda-1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

(on sait que 0 et β_λ sont points fixes de $f_\lambda \circ f_\lambda$), le discriminant du facteur de degré 2 étant $\delta = \frac{\lambda+1}{\lambda^2}(\lambda-3) \leq 0$. Donc α et β_λ sont les seuls points

fixes réels de $f_\lambda \circ f_\lambda$ (pour $\lambda = 3$, on a $P_\lambda(x) = 27x \left(x - \frac{2}{3} \right)^3$).

5. Pour $\lambda \in]1, 2]$, on a $0 < \beta_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\lambda} \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

- (a) Pour $x_0 = \beta_\lambda$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire sur β_λ . Pour $x_0 = \frac{1}{\lambda}$, on a $x_1 = \lambda \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) = \beta_\lambda$ et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire sur β_λ .

- (b) Comme f_λ est continue strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$f_\lambda([0, \beta_\lambda]) =]f_\lambda(0), f_\lambda(\beta_\lambda)[=]0, \beta_\lambda[$$

et $f_\lambda\left(\left[\beta_\lambda, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f_\lambda(\beta_\lambda), f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\beta_\lambda, \frac{\lambda}{4}\right]$ avec $\frac{\lambda}{4} \leq \frac{1}{2}$, donc $f_\lambda\left(\left[\beta_\lambda, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[\beta_\lambda, \frac{1}{2}\right]$.

- (c) Pour $x_0 \in]0, \beta_\lambda[$, on a $1 - x_0 > 1 - \beta_\lambda = \frac{1}{\lambda}$ et $x_1 = \lambda x_0(1 - x_0) > x_0$, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante majorée par β_λ et en conséquence convergente vers β_λ .

Pour $x_0 \in \left[\beta_\lambda, \frac{1}{2}\right]$, on a $0 < 1 - x_0 < 1 - \beta_\lambda = \frac{1}{\lambda}$ et $x_1 = \lambda x_0(1 - x_0) < x_0$, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante minorée par β_λ et en conséquence convergente vers β_λ .

Pour $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a $0 = f_\lambda(1) < x_1 = f_\lambda(x_0) < f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4} \leq \frac{1}{2}$ (f_λ est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$) ce qui nous ramène aux deux cas précédents.

6. Pour $\lambda \in]2, 3]$, on a $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{2} < \beta_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda} \leq \frac{2}{3}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire sur β_λ pour $x_0 = \beta_\lambda$ ou $x_0 = \frac{1}{\lambda}$.

(a) La fonction f_λ est polynomiale de degré 2 sur $J = \left] \frac{1}{\lambda}, \beta_\lambda \right[$ avec :

$$\inf_{x \in J} f_\lambda(x) = f_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) = f_\lambda(\beta_\lambda) = \beta_\lambda \text{ et } \sup_{x \in J} f_\lambda(x) = f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4} > \beta_\lambda$$

(la dernière inégalité équivaut à $\frac{\lambda}{4} > 1 - \frac{1}{\lambda}$, soit à $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 > 0$), donc $f_\lambda(J) = \left] \beta_\lambda, \frac{\lambda}{4} \right[$ et $f_\lambda \circ f_\lambda(J) = f_\lambda\left(\left] \beta_\lambda, \frac{\lambda}{4} \right[\right) = \left] f_\lambda\left(\frac{\lambda}{4}\right), \beta_\lambda \right[$ (on a $\frac{1}{2} < \beta_\lambda < \frac{\lambda}{4} < 1$ et f_λ est strictement décroissante sur $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$) avec $f_\lambda\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\lambda^2}{4} \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) > \frac{1}{2}$ pour $\lambda \in]2, 3]$ (équivaut à $\varphi(\lambda) = \lambda^2(4 - \lambda) - 8 = (\lambda - 2)(5 - (\lambda - 1)^2) > 0$ qui est réalisé sur $]2, 3[$), donc $f_\lambda \circ f_\lambda(J) \subset \left] \frac{1}{2}, \beta_\lambda \right[\subset J$.

(b) On a :

$$\begin{aligned} g_\lambda(x) &= \frac{f_\lambda \circ f_\lambda(x)}{\lambda^2} = x(1-x)(1-\lambda x(1-x)) \\ &= x - (1+\lambda)x^2 + 2\lambda x^3 - \lambda x^4 \end{aligned}$$

et $g'_\lambda(x) = 1 - 2(1+\lambda)x + 6\lambda x^2 - 4\lambda x^3$ s'annule en $\frac{1}{2} ((f_\lambda \circ f_\lambda)'(\frac{1}{2}) = f'_\lambda\left(f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)\right) f'_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0$), donc :

$$\begin{aligned} g'_\lambda(x) &= (1-2x)(2\lambda x^2 - 2\lambda x + 1) \\ &= 2\lambda(1-2x)\left(x^2 - x + \frac{1}{2\lambda}\right) = 4\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\lambda-2}{4\lambda} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

avec $0 < x - \frac{1}{2} < \beta_\lambda - \frac{1}{2} = \frac{\lambda-2}{2\lambda}$, donc $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{(\lambda-2)^2}{4\lambda^2} < \frac{\lambda-2}{4\lambda}$ et $g'_\lambda(x) > 0$. Donc $f_\lambda \circ f_\lambda$ est strictement croissante sur $\left] \frac{1}{2}, \beta_\lambda \right[$.

(c) Pour $x_0 \in \left] \frac{1}{\lambda}, \beta_\lambda \right[$, on a $x_2 = f_\lambda \circ f_\lambda(x_0) \in \left] \frac{1}{2}, \beta_\lambda \right[$ et $x_{2n} \in \left] \frac{1}{2}, \beta_\lambda \right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_\lambda \circ f_\lambda$ est strictement croissante sur $\left] \frac{1}{2}, \beta_\lambda \right[$, la suite $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone bornée, donc convergente vers β_λ qui est l'unique point fixe de $f_\lambda \circ f_\lambda$ sur J et cette suite est nécessairement

croissante.

Avec $x_{2n+1} = f_\lambda(x_{2n})$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1} = f_\lambda(\beta_\lambda) = \beta_\lambda$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \beta_\lambda$.

- (d) Si tous les x_n sont dans $\left]0, \frac{1}{\lambda}\right[$, en remarquant que $f_\lambda(x) > x$ pour tout $x \in]0, \beta_\lambda[$ (voir le graphe de f_λ), on déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée donc convergente vers une limite $\ell \leq \frac{1}{\lambda} < \beta_\lambda$, ce qui est impossible.

Il existe donc un plus petit entier $p \geq 1$ tel que $x_p \geq \frac{1}{\lambda}$, ce qui nous donne $x_{p-1} < \frac{1}{\lambda}$ et $x_p = f_\lambda(x_{p-1}) < f_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \beta_\lambda$, donc $x_p \in \left[\frac{1}{\lambda}, \beta_\lambda\right]$ et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers λ .

- (e) Comme f_λ est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ qui contient $]\beta_\lambda, 1[$, on a $x_1 \in]0, \beta_\lambda[$, ce qui nous ramène aux cas précédents.

7. Pour $\lambda \in]3, 4]$ les deux points fixes de f_λ sont répulsifs et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est soit stationnaire sur β_λ , soit divergente.

Exercice 2.2. Suites définie par $x_{n+1} = \sin(\alpha x_n)$

Pour tout réel $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on désigne par $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in]0, 1]$ et $x_{n+1} = \sin(\alpha x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour $\alpha \in]0, 1[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 0.
2. On suppose que $\alpha = 1$.

(a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

(b) Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

(c) Justifier le développement asymptotique :

$$x_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} \right)$$

3. On suppose que $\alpha \in \left]1, \frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

(b) Montrer que les points fixes de la fonction $f : x \mapsto \sin(\alpha x)$ sur $[0, 1]$ sont 0 et $\ell \in]0, 1]$.

(c) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Solution. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sin(\alpha x)$. Pour $\alpha \in]0, \pi]$, l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f (pour $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq \sin(\alpha x) \leq \alpha x \leq \pi$).

Plus précisément, on a $f(x) \in]0, 1]$ pour tout $x \in]0, 1]$, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $]0, 1]$ pour $x_0 \in]0, 1]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq x_{n+1} = \sin(\alpha x_n) \leq \alpha x_n$ et, par récurrence, on en déduit que $0 \leq x_n \leq \alpha^n x_0 \leq \alpha^n$, donc pour $\alpha \in]0, 1[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2.

- (a) Pour $\alpha = 1$, on a $x_n \in [0, 1]$ et $0 \leq x_{n+1} = \sin(x_n) \leq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0 et en conséquence convergente vers un réel $\ell \in [0, 1]$ point fixe de f . Comme $f(0) = 0$ et $f(x) < x$ pour $x \in]0, 1]$ (la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ est strictement croissante sur $[0, 1]$), on a nécessairement $\ell = 0$.
- (b) Le développement limité de la fonction $\sin$ en 0 à l'ordre 3 nous donne pour $x \in]0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} = \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}{x^2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2} \\ &= \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Comme $x_n \in]0, 1]$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \right) = \frac{1}{3} \text{ et le théorème de Césàro nous dit que :}$$

$$\frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{x_k^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_0^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{1}{x_n^2} \right)$$

$$\text{soit } x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}.$$

- (c) En utilisant le développement limité $\sin(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5) \right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(x)} &= \frac{1}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5) \right)^2} = \frac{1}{x^2 \left(1 - \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x^4}{45} + o(x^5) \right) \right)} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{15} + o(x^5) \right) \end{aligned}$$

$$\text{soit } \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} = \frac{x^2}{15} + o(x^3) \text{ et :}$$

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x_n^2}{15} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{5n}$$

La série $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente, on a l'équivalence des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{x_k^2} - \frac{1}{3} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{5} \ln(n)$$

soit $\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_1^2} - \frac{n-1}{3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{5} \ln(n)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{nx_n^2} &= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{n} + \frac{1}{5} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

ou encore :

$$nx_n^2 = 3 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)^{-1} = 3 \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)$$

soit :

$$x_n = \sqrt{\frac{3}{n} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

3.

- (a) Pour $\alpha \in \left]1, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f'(x) = \alpha \cos(\alpha x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1[$, donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone bornée et en conséquence convergente vers un réel $\ell \in [0, 1]$ point fixe de la fonction continue f .
- (b) En notant $g(x) = f(x) - x$, on a $g'(x) = \alpha \cos(\alpha x) - 1 = 0$ avec $x \in [0, 1]$ si, et seulement si, $x = \beta = \frac{1}{\alpha} \arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ (on a $\frac{1}{\alpha} \in \left[\frac{2}{\pi}, 1\right]$, donc $\beta \in \left]0, \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)\right[$ avec $\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right) \simeq 0.88$) avec $g'(0) = \alpha - 1 > 0$ et $g'(1) = \alpha \cos(\alpha) - 1 \leq \frac{\pi}{2} \cos(1) - 1 \simeq -0.151$, la fonction g' étant strictement décroissante. Il en résulte que la fonction g est strictement croissante de $g(0) = 0$ à $g(\beta)$ sur $[0, \beta]$ et strictement décroissante de $g(\beta) > 0$ à $g(1) = \sin(\alpha) - 1 \leq 0$ sur $\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui nous assure de l'existence d'un deuxième point fixe $\ell \in]\beta, 1]$ (pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a $\ell = \frac{\pi}{2}$).
- (c) Pour $x_0 = \ell$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire sur ℓ . Pour $x_0 \in]0, \ell[$, on a $x_1 - x_0 = g(x_0) > 0$, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et elle converge vers ℓ (on a $x_n \geq x_0 > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \geq x_0 > 0$). Pour $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $x_0 \in]\ell, 1]$, on a $x_1 - x_0 = g(x_0) < 0$, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée par ℓ (on a $x_0 > \ell$ et par récurrence, $x_n > \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque f est strictement croissante et $f(\ell) = \ell$), donc elle converge vers ℓ .

Exercice 2.3. Formule de Stirling

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\alpha > 0$.
3. Montrer que $n! \sim \lambda \frac{\sqrt{\pi n} n^n}{e^n}$ avec $\lambda = \frac{1}{\alpha}$.
4. En admettant la formule de Wallis, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \sqrt{\pi}$ et en simplifiant $\frac{u_{2n}}{u_n^2}$, montrer que $\lambda = \sqrt{2\pi}$ (formule de Stirling).
5. Étudier les séries de termes généraux $\frac{e^n n!}{n^n}$ et $\frac{n^n}{e^n n^\alpha n!}$.

Solution.

1. On a $v_n = \ln \left(\frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) = -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ et un développement limité donne $v_n = -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc la série $\sum v_n$ converge absolument (puisque l'on a aussi $|v_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$).
2. Comme $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, la série $\sum v_n$ est de même nature que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge. Notant ℓ sa limite, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha = e^\ell > 0$.
3. Il en résulte que $n! \sim \lambda \frac{\sqrt{\pi n} n^n}{e^n}$.
4. On a $\frac{u_{2n}}{u_n^2} = \frac{(2n)^{2n} \sqrt{2n} (n!)^2 e^{2n}}{e^{2n} (2n)! n^{2n} n} = \frac{2^{2n} \sqrt{2} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}$ avec :

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot 2^n (n!)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{u_{2n}}{u_n^2} &= \frac{2^n \sqrt{2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{n}} \frac{n!}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{n}} \sqrt{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi} \sqrt{2} \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Wallis. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{2n}}{u_n^2} = \frac{1}{\alpha} = \lambda = \sqrt{2\pi}$, soit $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

5. Pour $u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure. En utilisant la formule de Stirling, on a :

$$u_n \sim \lambda \frac{e^n \sqrt{nn^n}}{n^n e^n} = \lambda \sqrt{n}$$

et $\sum u_n$ diverge.

Pour $u_n = \frac{n^n}{e^n n^\alpha n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure. En utilisant la formule de Stirling, on a $u_n \sim \frac{1}{\lambda} \frac{n^n}{e^n n^\alpha \sqrt{nn^n}} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ et $\sum u_n$ diverge pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$, converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 2.4. Série non-commutativement convergente

On s'intéresse à la série de Riemann alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

On se donne deux entiers naturels non nuls p, q et on désigne par σ la permutation de $\mathbb{N}$ qui ordonne $\mathbb{N}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbb{N}) = & \{0, 2, \dots, 2(p-1)\} \cup \{1, 3, \dots, 2q-1\} \\ & \cup \{2p, \dots, 2(2p-1)\} \cup \{2q+1, \dots, 4q-1\} \cup \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on place les p premiers entiers pairs, puis les q premiers entiers impairs, puis les p entiers pairs suivants, les q entiers impairs suivants, et ainsi de suite. En effectuant la division euclidienne par $p+q$ tout entier n s'écrit de manière unique $n = (p+q)k+r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r \leq p+q-1$ et une telle permutation σ peut être définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n) = \begin{cases} 2(pk+r) & \text{si } 0 \leq r \leq p-1 \\ 2(qk+r-p)+1 & \text{si } p \leq r \leq p+q-1 \end{cases}$$

1. Montrer que σ est bien permutation de $\mathbb{N}$.

2. En notant $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, on désigne par $\sum v_n$ la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$.

On se donne un entier $n \geq p+q$ et on écrit $n = (p+q)k+r$ sa division euclidienne par $p+q$ avec $k \geq 1$ et $0 \leq r \leq p+q-1$.

- (a) Écrire la somme partielle $S_n = \sum_{j=0}^n v_j$ sous la forme $S_n = T_k - \varepsilon_k$ où $T_k = S_{(p+q)k+p+q-1}$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$.

- (b) Pour tout entier $k \geq 1$, on note $H_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i+1}$. Montrer que :

$$T_k = T_k = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2} (H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)})$$

$$(c) \text{ En déduire que } \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Solution.

1. Soient n, m deux entiers naturels et $n = (p+q)k + r$, $m = (p+q)k' + r'$ les divisions euclidiennes de ces entiers par $p+q$. Si $\sigma(n) = \sigma(m)$, les restes r et r' sont tous deux dans $\{0, 1, \dots, p-1\}$ ou $\{p, \dots, p+q-1\}$, sinon $\sigma(n)$ et $\sigma(m)$ sont deux entiers de parités différentes. En supposant qu'ils sont tous deux dans $\{0, 1, \dots, p-1\}$ [resp. dans $\{p, \dots, p+q-1\}$] l'égalité $\sigma(n) = \sigma(m)$ se traduit par $2(pk+r) = 2(pk'+r')$ [resp. par $2(qk+r-p)+1 = 2(qk'+r'-p)+1$] soit par $pk+r = pk'+r'$ [resp. par $qk+r-p = qk'+r'-p$] avec $0 \leq r, r' \leq p-1$ [resp. $0 \leq r-p, r'-p \leq q-1$] ce qui équivaut à $k = k'$ et $r = r'$ du fait de l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne par p [resp. par q]. On a donc $n = m$ et σ est injective.

Si m est un entier pair, il s'écrit $m = 2s = 2(pk+r)$ avec $0 \leq r \leq p-1$ en effectuant la division euclidienne de s par p , soit $m = \sigma(n)$ où $n = (p+q)k+r$. Si m est un entier impair, il s'écrit $m = 2s+1 = 2(qk+r-p)+1$ avec $0 \leq r' \leq q-1$ en effectuant la division euclidienne de s par q , soit $m = \sigma(n)$ où $n = (p+q)k+p+r'$. L'application σ est donc surjective.

2. Soit $n = (p+q)k + r$ un entier avec $k \geq 1$ et $0 \leq r \leq p+q-1$.

(a) Pour $r = p+q-1$, on a $S_n = T_k$ et $\varepsilon_k = 0$, pour $0 \leq r \leq p+q-2$, on a :

$$S_n = \sum_{j=0}^{(p+q)k+p+q-1} v_j - \sum_{j=(p+q)k+r+1}^{(p+q)k+p+q-1} v_j = T_k - \varepsilon_k$$

avec $T_k = S_{(p+q)k+p+q-1}$ et :

$$|\varepsilon_k| \leq |v_{(p+q)k+1}| + \dots + |v_{(p+q)k+p+q-1}| \leq \frac{p+q-1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} T_k &= \sum_{j=0}^{(p+q)k+p+q-1} u_{\sigma(j)} = \sum_{r=0}^{p+q-1} \sum_{i=0}^k u_{\sigma((p+q)i+r)} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^k u_{2(pi+r)} + \sum_{r=p}^{p+q-1} \sum_{i=0}^k u_{2(qi+r-p)+1} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{2(pi+r)+1} - \sum_{r=p}^{p+q-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{2(qi+r-p)+2} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{2(pi+r)+1} - \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{qi+s+1} \end{aligned}$$

En utilisant la division euclidienne par q , on a :

$$\{qi + s + 1 \mid 0 \leq i \leq k \text{ et } 0 \leq s \leq q - 1\} = \{1, 2, \dots, qk + q\}$$

et $\sum_{s=0}^{q-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{qi + s + 1} = \sum_{j=1}^{q(k+1)} \frac{1}{j} = H_{q(k+1)}$. En remarquant que les entiers de la forme $2(pi + r) + 1$ où $0 \leq i \leq k$ et $0 \leq r \leq p - 1$ sont les entiers impairs compris entre 1 et $2pk + 2p - 1$ (division euclidienne par $2p$), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{2(pi + r) + 1} &= \sum_{s=0}^{2p-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{2pi + s + 1} - \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{2pi + 2r + 2} \\ &= \sum_{s=0}^{2p-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{2pi + s + 1} - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{pi + r + 1} \\ &= \sum_{j=1}^{2p(k+1)} \frac{1}{j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p(k+1)} \frac{1}{j} = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2} H_{p(k+1)} \end{aligned}$$

On a donc $T_k = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2} (H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)})$.

(c) On utilisant $H_n = \ln(n) + \delta_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = \gamma$, on a :

$$\begin{aligned} T_k &= H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2} (H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}) \\ &= \ln \left(2\sqrt{\frac{p}{q}} \right) + \delta_{2p(k+1)} - \frac{1}{2} (\delta_{p(k+1)} + \delta_{q(k+1)}) \end{aligned}$$

et $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q} \right)$. Toutes les suites extraites $(S_{(p+q)k+r})_{k \geq 1}$ pour $0 \leq r \leq p+q-1$ convergent alors vers la même limite, ce qui revient à dire que $(S_n)_{n \geq 1}$ converge vers cette limite, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n) + 1} = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q} \right)$$

Exercice 2.5. Série alternée de Bertrand

On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$, où α et β sont deux réels donnés. Les résultats sur les séries de Bertrand positives sont supposés connus.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur α et β , pour que cette série soit absolument convergente.

2. On suppose que $\alpha = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur β , pour que cette série soit convergente.
3. On suppose que $\alpha < 0$. Quelle est la nature de cette série ?
4. Montrer que cette série converge pour $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Solution.

1. La série $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
2. On a $u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln(n))^\beta}$. Si $\beta \leq 0$, $(|u_n|)_{n \geq 2} = ((\ln(n))^{-\beta})_{n \geq 2}$ ne tend pas vers 0 et la série diverge. Si $\beta > 0$, le théorème des séries alternées nous dit que $\sum u_n$ converge.
3. Pour $\alpha < 0$, on a $|u_n| = \frac{n^{-\alpha}}{(\ln(n))^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et la série diverge.
4. Il reste à traiter les cas $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$ ou $0 < \alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
 - (a) Supposons $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$. La fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = x(\ln(x))^\beta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$f'(x) = (\ln(x))^\beta + \beta(\ln(x))^{\beta-1} = (\ln(x))^\beta \left(1 + \frac{\beta}{\ln(x)}\right)$$

Pour $0 \leq \beta \leq 1$, on a $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $[2, +\infty[$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $(|u_n|)_{n \geq 2}$ tend vers 0 en décroissant et le théorème des séries alternées nous dit que $\sum u_n$ converge. Pour $\beta < 0$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta}{\ln(x)} = 0$, on déduit que pour x grand $f'(x) > 0$ (précisément $f'(x) > 0$ pour $x > e^{-\beta}$ et $x > 2$) et comme on a encore $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x))^\beta = +\infty$, on déduit du théorème des séries alternées que $\sum u_n$ converge.

- (b) Supposons $0 < \alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. La fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = x^\alpha (\ln(x))^\beta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} (\ln(x))^\beta + \beta x^{\alpha-1} (\ln(x))^{\beta-1} = x^{\alpha-1} (\ln(x))^\beta \left(\alpha + \frac{\beta}{\ln(x)}\right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha + \frac{\beta}{\ln(x)}\right) = \alpha > 0$, on déduit que pour x grand, on a $f'(x) > 0$ (précisément $f'(x) > 0$ pour $x > e^{-\frac{\beta}{\alpha}}$) et comme on a encore $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha (\ln(x))^\beta = +\infty$, on déduit du théorème des séries alternées que $\sum u_n$ converge.

Exercice 2.6. Une formule pour π

On se propose de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \frac{1}{16^n} = \pi$$

1. Justifier la convergence de cette série. On notera S sa somme.
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul q , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+q} \frac{1}{16^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^q = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^{q-1}}{1-t^8} dt$$

3. Montrer que :

$$S = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+t^4} dt - 8 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{(1-t^2)(1+t^4)} dt$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+t^4} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln(5) + \arctan(2) \right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{(1-t^2)(1+t^4)} dt = \frac{1}{8} \ln(2) - \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

et conclure.

Solution.

1. Le terme général est majoré en valeur absolue par $\frac{8}{16^n}$, la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{16}\right)^n$ étant convergente.

2. On a $\frac{t^{q-1}}{1-t^8} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{8n+q-1}$, la convergence étant uniforme sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^{q-1}}{1-t^8} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^{8n+q-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+q} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{8n+q} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+q} \frac{1}{16^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^q \end{aligned}$$

- 3.

- (a) Prenant pour valeurs successives de q , 1, 4, 5 et 6, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+1} \frac{1}{16^n} \frac{1}{\sqrt{2}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^8} dt$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+4} \frac{1}{16^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+4} \frac{1}{16^n} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{1-t^8} dt \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+5} \frac{1}{16^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+5} \frac{1}{16^n} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^4}{1-t^8} dt \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+6} \frac{1}{16^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+6} \frac{1}{16^n} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^5}{1-t^8} dt\end{aligned}$$

et la série qui nous intéresse vaut $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(t) dt$ où on a posé :

$$\begin{aligned}f(t) &= \left(4\sqrt{2} - 8t^3 - 4\sqrt{2}t^4 - 8t^5\right) \frac{1}{1-t^8} \\ &= \frac{4\sqrt{2}(1-t^4) - 8t^3(1+t^2)}{(1-t^2)(1+t^2)(1+t^4)} = \frac{4\sqrt{2}}{1+t^4} - \frac{8t^3}{(1-t^2)(1+t^4)}\end{aligned}$$

- (b) On a $1+t^4 = (1+t^2)^2 - 2t^2 = (1-\sqrt{2}t+t^2)(1+\sqrt{2}t+t^2)$ et la décomposition en éléments simples, $\frac{1}{1+t^4} = \frac{at+b}{1-\sqrt{2}t+t^2} + \frac{ct+d}{1+\sqrt{2}t+t^2}$. Par parité et unicité de la décomposition, on a $c = -a$ et $d = b$. Prenant $t = 0$, on a $1 = 2b$, soit $b = \frac{1}{2}$, puis $t = i$, donne $\frac{1}{2} = -\frac{ai+b}{\sqrt{2}i} + \frac{-ai+b}{\sqrt{2}i} = -\sqrt{2}a$ et $a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ce qui donne :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+t^4} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t+t^2} dt - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}t+t^2} dt \right)$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t+t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2t+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t+t^2} dt + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+\sqrt{2}t+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(1+\sqrt{2}t+t^2) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(1+\sqrt{2}t+t^2) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(\sqrt{2}t+1)^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(1+\sqrt{2}t+t^2) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[\arctan(\sqrt{2}t+1) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{2}\right) + \arctan(2) - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}t + t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2t - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}t + t^2} dt - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1 - \sqrt{2}t + t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\ln(1 - \sqrt{2}t + t^2) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\ln(1 - \sqrt{2}t + t^2) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(\sqrt{2}t - 1)^2 + 1} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\ln(1 - \sqrt{2}t + t^2) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \left[\arctan(\sqrt{2}t - 1) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

En définitive :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1 + t^4} dt &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{2}\right) + \arctan(2) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln(5) + \arctan(2) \right)
 \end{aligned}$$

(c) Le changement de variable $x = t^2$ donne :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{(1 - t^2)(1 + t^4)} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(1 - x)(1 + x^2)} dx$$

et la décomposition en éléments simples :

$$g(x) = \frac{x}{(1 - x)(1 + x^2)} = \frac{a}{1 - x} + \frac{cx + d}{1 + x^2}$$

avec $a = \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)g(x) = \frac{1}{2}$, $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) = -a + c$, donc $c = a$ et $x = 0$ donne $d = -a$. On a donc :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{(1 - t^2)(1 + t^4)} dt &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - x} + \frac{x - 1}{1 + x^2} dx \\
 &= \frac{1}{4} \left(\ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{8} \ln(5) - \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

(d) En conclusion :

$$\begin{aligned}
 S &= 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln(5) + \arctan(2) \right) \right) - 8 \left(\frac{1}{8} \ln(5) - \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\
 &= 2 \left(\arctan(2) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right) = 2\frac{\pi}{2} = \pi
 \end{aligned}$$

en utilisant l'égalité $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$. Cette série converge très vite vers π , par exemple pour $n = 20$, on a :

$$\begin{cases} S \simeq 3.141592653589793238462643383251 \\ \pi \simeq 3.141592653589793238462643383280 \end{cases}$$

soit 28 décimales exactes.

Exercice 2.7. $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n)$ convergentes

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour toute série réelle convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n)$ est encore convergente. On se propose de montrer qu'il existe alors un voisinage ouvert de 0 sur lequel f est linéaire.

1. Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est continue en 0.
2. On suppose, pour cette question seulement, que la fonction f est paire. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, c'est-à-dire que sur un voisinage ouvert de 0, la fonction f est identiquement nulle.
3. On revient maintenant au cas général. Montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que f soit impaire sur $]-\delta_1, \delta_1[$.
4. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in]-\delta, \delta[$.
5. On se fixe un réel $\delta > 0$ comme dans la question précédente.
 - (a) Montrer que si x est un réel et n un entier naturel tels que $2^n x$ soit dans $]-\delta, \delta[$, alors $f(2^n x) = 2^n f(x)$.
 - (b) Montrer qu'on peut définir une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

où, pour x donné dans $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ est tel que $\frac{x}{2^n} \in]-\delta, \delta[$.

- (c) Montrer qu'il existe un réel α tel que $g(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (d) En déduire que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in]-\delta, \delta[$.
6. Ce résultat est-il encore vrai pour f transformant toute série absolument convergente en série convergente ?

Solution.

1. En considérant la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 0, on déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(0)$ est convergente et nécessairement $f(0) = 0$.

Dire que f n'est pas continue en 0 signifie, compte tenu de $f(0) = 0$, qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0, \exists x \in]-\eta, \eta[\mid |f(x)| > \varepsilon$$

Prenant pour η les valeurs successives $\eta = \frac{1}{n^2}$, on construit une suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ et $|f(u_n)| > \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$, mais dans ce cas on obtient alors une série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ absolument convergente telle que la série $\sum f(u_n)$ soit divergente (les inégalités $|f(u_n)| > \varepsilon$ nous disent que la suite $(f(u_n))_{n \geq 1}$ ne peut pas converger vers 0), ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.

2. Supposons le contraire, soit compte tenu de la parité de f avec $f(0) = 0$, que :

$$\forall \delta > 0, \exists x \in]0, \delta[\mid f(x) \neq 0$$

Prenant pour δ les valeurs successives $\delta = \frac{1}{n}$, on construit une suite réelle $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$\forall n \geq 1, 0 < x_n < \frac{1}{n}, f(x_n) \neq 0$$

On associe à cette suite une suite d'entiers naturels non nuls $(p_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$\forall n \geq 1, p_n |f(x_n)| \geq 1$$

(c'est possible puisque $\mathbb{R}$ est archimédien). On définit alors la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ par :

$$u = (x_1, -x_1, \dots, x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_2, -x_2, \dots, x_k, -x_k, \dots, x_k, -x_k, \dots)$$

où, pour tout $k \geq 1$, le couple $(x_k, -x_k)$ est répété p_k fois. Désignant par $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, on a :

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2r \\ x_{q_r} & \text{si } n = 2r + 1 \end{cases}$$

avec $\lim_{r \rightarrow +\infty} q_r = +\infty$, ce qui entraîne, compte tenu de $0 < x_{q_r} < \frac{1}{q_r}$ que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} x_{q_r} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0, \text{ c'est-à-dire que la série } \sum u_n \text{ est convergente.}$$

Mais, pour ce qui est de la série $\sum f(u_n)$, compte tenu de la parité de f , en désignant par $(T_n)_{n \geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série, on a :

$$|T_{2(p_1+\dots+p_{k+1})} - T_{2(p_1+\dots+p_k)}| = 2p_{k+1} |f(x_{k+1})| \geq 2$$

Mais la convergence de la série $\sum f(u_n)$ vers un réel T nous dit que la suite :

$$(T_{\varphi(k)})_{k \geq 1} = (T_{2(p_1+\dots+p_k)})_{k \geq 1}$$

extraite de $(T_n)_{n \geq 1}$ doit aussi converger vers T et la suite $(T_{\varphi(k+1)} - T_{\varphi(k)})_{n \geq 1}$ doit alors converger vers 0, ce qui contredit les inégalités $|T_{\varphi(k+1)} - T_{\varphi(k)}| \geq 2$. En définitive, f est identiquement nulle sur un voisinage ouvert de 0.

3. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$ est paire et vérifie les mêmes hypothèses que f , elle est donc identiquement nulle sur un voisinage ouvert $]-\delta_1, \delta_1[$ de 0 et sur ce voisinage, f est impaire.
4. Supposons le contraire. On construit alors deux suites réelles $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $]-\delta_1, \delta_1[$ et de limite nulle telles que :

$$\forall n \geq 1, \alpha_n = |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \neq 0$$

On associe à ces suites une suite d'entiers naturels non nuls $(p_n)_{n \geq 1}$ telle que $p_n \alpha_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$ et on définit la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ par :

$$u = (x_1 + y_1, -x_1, -y_1, \dots, x_1 + y_1, -x_1, -y_1, \\ x_2 + y_2, -x_2, -y_2, \dots, x_2 + y_2, -x_2, -y_2, \\ \dots, x_k + y_k, -x_k, -y_k, \dots, x_k + y_k, -x_k, -y_k, \dots)$$

où, pour tout $k \geq 1$, le triplet $(x_k + y_k, -x_k, -y_k)$ est répété p_k fois. En désignant par $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, on a alors :

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3r \\ x_{q_r} + y_{q_r} & \text{si } r = 3r + 1 \\ y_{q_r} & \text{si } r = 3r + 2 \end{cases}$$

avec $\lim_{r \rightarrow +\infty} q_r = +\infty$, ce qui entraîne, compte tenu de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$, c'est-à-dire que la série $\sum u_n$ est convergente. Mais, pour ce qui est de la série $\sum f(u_n)$, compte tenu de l'impairité de f , en désignant par $(T_n)_{n \geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série, on a :

$$|T_{3(p_1 + \dots + p_{k+1})} - T_{3(p_1 + \dots + p_k)}| = 3p_{k+1} \alpha_{k+1} \geq 3$$

Mais la convergence de la série $\sum f(u_n)$ vers un réel T nous dit que la suite $(T_{\varphi(k)})_{n \geq 1} = (T_{3(p_1 + \dots + p_k)})_{k \geq 1}$ extraite de la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ doit converger vers T et la suite $(T_{\varphi(k+1)} - T_{\varphi(k)})_{n \geq 1}$ doit alors converger vers 0, ce qui est incompatible avec les inégalités $|T_{\varphi(k+1)} - T_{\varphi(k)}| \geq 3$. En définitive, on a le résultat souhaité avec $\delta \in]0, \delta_1[$.

5.

- (a) On procède par récurrence sur $n \geq 0$ à x fixé. Pour $n = 0$ c'est clair. En supposant le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 0$, si $2^n x \in]-\delta, \delta[$, alors $2^{n-1}x \in]-\delta, \delta[$ et $f(2^n x) = f(2^{n-1}x + 2^{n-1}x) = 2f(2^{n-1}x) = 2^n f(x)$.
- (b) Si $m > n$ sont deux entiers naturels tel que $\frac{x}{2^n}$ et $\frac{x}{2^m}$ soient dans $]-\delta, \delta[$, alors $2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n f\left(2^{m-n} \frac{x}{2^m}\right) = 2^n 2^{m-n} f\left(\frac{x}{2^m}\right) = 2^m f\left(\frac{x}{2^m}\right)$. La fonction g est donc bien définie (i.e. la définition de $g(x)$ ne dépend pas du choix de l'entier n tel que $\frac{x}{2^n} \in]-\delta, \delta[$).

- (c) La fonction g coïncide avec f sur $]-\delta, \delta[$, elle est donc continue en 0 avec $g(0) = 0$. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$ tel que $\frac{x}{2^n}$ et $\frac{y}{2^n}$ soient dans $]-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[$, les trois réels $\frac{x}{2^n}$, $\frac{y}{2^n}$ et $\frac{x+y}{2^n}$ sont dans $]-\delta, \delta[$ et :

$$g(x+y) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n} + \frac{y}{2^n}\right) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) + 2^n f\left(\frac{y}{2^n}\right) = g(x) + g(y)$$

La fonction g est donc une fonction continue en un point (en 0) et vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy $g(x+y) = g(x) + g(y)$ sur $\mathbb{R}$, on sait alors que c'est nécessairement une fonction linéaire définie par $g(x) = \alpha x$. Comme $f = g$ sur $]-\delta, \delta[$, on a bien le résultat souhaité.

6. La fonction f définie par $f(x) = x^2$ transforme toute série absolument convergente $\sum u_n$ en série convergente puisque $|u_n|^2 \leq |u_n|$ pour n assez grand. Le résultat n'est donc plus valable.

Exercice 2.8. Un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Montrer que :

(a) si $\sum u_n$ converge, il en est alors de même de $\sum v_n$ et les restes de ces séries sont équivalents, soit $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$;

(b) si $\sum u_n$ diverge, il en est alors de même de $\sum v_n$ et les sommes partielles de ces séries sont équivalentes, soit $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k$.

2. Justifier le développement asymptotique :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où $\gamma \in [0, 1]$ est la constante d'Euler.

3. Donner, pour tout entier naturel $p \geq 2$, un développement asymptotique

$$\text{de } u_n = \sum_{k=n^2+1}^{pn^2} \frac{1}{k}.$$

Solution.

1. Dire que les suites à termes positifs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes signifie que pour tout réel $\varepsilon \in]0, 1[$ il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon) u_n \leq v_n \leq (1 + \varepsilon) u_n$$

Dans ce qui suit on se donne un tel couple (ε, n_0) .

- (a) Si la série $\sum u_n$ est convergente, des inégalités $0 \leq v_n \leq (1 + \varepsilon) u_n$ pour tout $n \geq n_0$, on déduit qu'il en est de même de la série $\sum v_n$. On peut donc définir les restes d'ordre n de ces séries, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ et on a $(1 - \varepsilon) R_n \leq R'_n \leq (1 + \varepsilon) R_n$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui traduit l'équivalence de R_n et R'_n quand n tend vers l'infini.
- (b) Si la série $\sum u_n$ est divergente, des inégalités $v_n \geq (1 - \varepsilon) u_n$ pour tout $n \geq n_0$ avec $1 - \varepsilon > 0$ et $u_n \geq 0$, on déduit qu'il en est de même de la série $\sum v_n$. De plus, on a $S_n = \sum_{k=0}^n u_k > 0$ à partir d'un certain rang $n_1 > n_0$

et en notant $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$, on a :

$$\forall n > n_1, (1 - \varepsilon)(S_n - S_{n_0-1}) \leq T_n - T_{n_0-1} \leq (1 + \varepsilon)(S_n - S_{n_0-1})$$

ce qui entraîne pour $n > n_1$:

$$(1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{S_{n_0-1}}{S_n}\right) + \frac{T_{n_0-1}}{S_n} \leq \frac{T_n}{S_n} \leq (1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{S_{n_0-1}}{S_n}\right) + \frac{T_{n_0-1}}{S_n}$$

Avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n} = 0$, on en déduit alors qu'il existe $n_2 \geq n_1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, 1 - 2\varepsilon \leq \frac{T_n}{S_n} \leq 1 + 2\varepsilon$$

ce qui traduit l'équivalence de S_n et T_n quand n tend vers l'infini.

2. On note $(H_n)_{n \geq 1} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série

harmonique. Comme cette série est divergente à termes positifs avec $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$

$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, on a l'équivalence des sommes partielles :

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right) \right) = \ln(n+1)$$

ou encore $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

La suite $(K_n)_{n \geq 1}$ définie par $K_n = H_n - \ln(n)$ étant de même nature que la série de terme général $K_{n+1} - K_n = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, elle

est convergente. Sa limite $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$ est la constante d'Euler.

La suite $(L_n)_{n \geq 1} = (H_n - \ln(n) - \gamma)_{n \geq 1}$ converge vers 0 et est de même nature que la série de terme général :

$$L_{n+1} - L_n = K_{n+1} - K_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

Cette série est donc convergente à termes négatifs à partir d'un certain rang, ce qui entraîne l'équivalence des restes $\sum_{k=n}^{+\infty} (L_{k+1} - L_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ avec :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (L_{k+1} - L_k) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^m (L_{k+1} - L_k) = \lim_{m \rightarrow +\infty} L_{m+1} - L_n = -L_n$$

On a donc $L_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ et le développement asymptotique :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

En notant $(M_n)_{n \geq 1} = \left(H_n - \ln(n) - \frac{1}{2n} - \gamma\right)_{n \geq 1}$, on a :

$$\begin{aligned} M_n - M_{n-1} &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\right) \\ &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2n} \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

et $-M_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (M_{k+1} - M_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$, ce qui nous donne le développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{pn^2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} \\ &= \ln(pn^2) + \gamma + \frac{1}{2pn^2} - \frac{1}{12p^2n^4} - \ln(n^2) - \gamma - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{12n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ &= \ln(p) + \frac{1-p}{2pn^2} + \frac{p^2-1}{12p^2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}$$

Exercice 2.9. Restes d'une série alternée

1. Soit $\sum (-1)^n a_n$ est une série alternée telle que :

- la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît strictement vers 0 ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$;
- $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{2}$.

2. Donner un équivalent des restes des séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

Solution.

1. Le théorème des séries alternées nous dit que la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} -a_{2n+1} \leq R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0 \\ 0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq a_{2n+2} \end{cases}$$

En particulier, R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$, soit $R_n = (-1)^{n+1} |R_n|$. Il en résulte que :

$$|R_n| + |R_{n+1}| = (-1)^{(n+1)} R_n + (-1)^{(n+2)} R_{n+1} = (-1)^{(n+1)} (R_n - R_{n+1}) = a_{n+1}$$

et :

$$\begin{aligned} |R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^{(n+1)} R_n - (-1)^{(n+2)} R_{n+1} = (-1)^{(n+1)} (R_n + R_{n+1}) \\ &= (-1)^{(n+1)} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k + \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-1)^k a_k \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+n+1} a_k - \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-1)^{k+n+2} a_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-(n+1)} a_k - \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-1)^{k-(n+2)} a_k \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j a_{j+n+1} - \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j a_{j+n+2} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} (a_{n+2j+1} - 2a_{n+2j+2} + a_{n+2j+3}) \geq 0 \end{aligned}$$

donc $(|R_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On a alors :

$$2|R_{n+1}| \leq a_{n+1} = |R_n| + |R_{n+1}| \leq 2|R_n|$$

soit $a_{n+1} \leq 2|R_n| \leq a_n$, ou encore $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2 \frac{|R_n|}{a_n} \leq 1$. Il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{|R_n|}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \frac{(-1)^{-(n+1)} R_n}{a_n} = 1, \text{ soit } R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{2}.$$

2. On a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{2n}$.

Problème 2.1. Développement de $\frac{\sin(z)}{z}$ en produit infini

À toute suite de nombres complexes $(u_n)_{n \geq n_0}$ on associe la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ de ses produits partiels définie par $P_n = \prod_{k=n_0}^n u_k$ pour tout $n \geq n_0$. On dit que le produit infini $\prod u_n$ est convergent si la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ est convergente et on note alors $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=n_0}^n u_k \right)$ la limite de cette suite. Dans le cas où cette limite est non nulle, on dit que le produit infini est strictement convergent.

- I - Développement en produit infini de $\frac{\sin(x)}{x}$ pour x réel

1. Montrer que, pour tout réel x , le produit infini $\prod \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$ est convergent, la convergence étant stricte pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$.

2.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} = 2^{2n}$$

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe un polynôme P_n de degré n tel que $\sin((2n+1)t) = \sin(t) P_n(\sin^2(t))$ pour tout réel t . On vérifiera que le coefficient dominant de P_n est $\alpha_n = (-1)^n 2^{2n}$ et que $P_n(0) = 2n+1$ (on peut utiliser la relation : $\sin((2n+1)t) = \Im(e^{i(2n+1)t})$).

(c) Déterminer les racines du polynôme P_n , pour tout entier naturel non nul n et en déduire que, pour tout réel X , on a :

$$P_n(X) = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{X}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)$$

(d) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et tout réel x , on a :

$$\sin(x) = (2n+1) \sin\left(\frac{x}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)$$

3. On se fixe un réel x dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et pour $n > m$ dans $\mathbb{N}^*$, on note :

$$P_{m,n} = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right), \quad Q_{m,n} = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)$$

(a) Montrer que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ les suites $(P_{m,n})_{n>m}$ et $(Q_{m,n})_{n>m}$ sont convergentes et en notant respectivement P_m et Q_m les limites de ces suites, vérifier que ces limites sont non nulles et que l'on a $\frac{\sin(x)}{x} = P_m Q_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que, pour α, β dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $1 - \frac{\pi^2}{4} \frac{\alpha^2}{\beta^2} < 1 - \frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\beta)} < 1$.

(c) Montrer que pour $m \in \mathbb{N}^*$ assez grand et tout $n > m$, on a :

$$\prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{4k^2} \right) < Q_{m,n} < 1$$

et en déduire que $\lim_{m \rightarrow +\infty} Q_m = 1$.

(d) Dédire de ce qui précède que, pour tout réel x , on a :

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \quad (2.1)$$

4. Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$, on a $\cotan(x) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 - x^2}$.

5. On peut retrouver le développement (2.1) en utilisant le développement en série de Fourier de la fonction 2π -périodique $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$$

où α est donné dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(a) Montrer que la fonction f_α est développable en série de Fourier et calculer ses coefficients de Fourier.

(b) Retrouver le résultat de I.4.

(c) En déduire le développement (2.1).

- II - Développement en produit infini de $\frac{\sin(z)}{z}$ pour z complexe

1. Soit $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres complexes telle que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe u_k . Montrer que s'il existe une suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum \alpha_k$ soit convergente et $|u_{n,k}| \leq \alpha_k$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_{n,k}$ converge absolument vers un nombre complexe S_n , la

série $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ converge absolument vers un nombre complexe S et la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

converge vers S , soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k}$ (théorème de convergence dominée pour les séries numériques).

2. On désigne par $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{C}$ par :

$$S_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

- (a) En utilisant le théorème de convergence dominée pour les séries numériques, montrer que pour tout nombre complexe z , la suite $(S_n(z))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e^z .
- (b) On propose ici une deuxième démonstration du résultat précédent.
- Montrer que, pour tout réel positif x , la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e^x .
 - Montrer que, pour tout nombre complexe z , la suite $(S_n(z))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, puis que sa limite est égale à e^z .

3. On désigne par $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions polynomiales définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P_n(z) = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} \right)$$

- (a) Montrer que, pour tout nombre complexe z , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(z) = \sin(z)$.
- (b) Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n , la fonction polynomiale P_n est impaire de degré $2n+1$ en précisant les coefficients de z et de z^{2n+1} .
- (c) Déterminer les racines du polynôme P_n , puis en déduire que :

$$P_n(z) = z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)$$

On a donc pour tout nombre complexe z :

$$\sin(z) = z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)$$

4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum v_n$ soit absolument convergente.

- (a) Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\prod_{k=0}^n (1 + v_k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ des produits partiels du produit infini $\prod (1 + v_n)$ est bornée.

(b) Montrer que la série $\sum (P_n - P_{n-1})$ est absolument convergente et en déduire que le produit infini $\prod (1 + v_n)$ est convergent.

5. Montrer que, pour tout nombre complexe z , le produit infini $\prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$ est convergent.

6. Soit $(v_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres complexes telle que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite $(v_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe v_k . Montrer que s'il existe une suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum \alpha_k$ soit convergente et $|v_{n,k}| \leq \alpha_k$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le produit infini $\prod_{k \in \mathbb{N}} (1 + v_{n,k})$ converge vers un nombre complexe T_n , le produit infini $\prod_{k \in \mathbb{N}} (1 + v_k)$ converge vers un nombre complexe T et la suite

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers T , soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + v_{n,k}) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n,k}\right)$ (théorème de convergence dominée pour les produits infinis).

7. Dédurre de ce qui précède que, pour tout nombre complexe z , on a :

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right) \quad (2.2)$$

8. Montrer que $\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$ (formule de Wallis).

9.

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{4k^2}{4k^2 - 1} \left(1 - \frac{(2t+1)^2}{4k^2}\right) = \frac{1 - \frac{2t}{2k-1}}{1 - \frac{2t}{2k+1}} \left(1 - \frac{4t^2}{(2k+1)^2}\right)$$

(b) En déduire que pour tout nombre complexe z , on a :

$$\cos(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k+1)^2 \pi^2}\right) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}\right)$$

(c) Montrer que pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\tan(x) = 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(2n+1)^2 \pi^2 - 4x^2}$$

10. Montrer que pour tout nombre complexe z , on a :

$$\operatorname{sh}(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2k+1)^2 \pi^2}\right)$$

11. Montrer que pour tout réel non nul x , on a :

$$\frac{1}{\operatorname{th}(x)} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 \pi^2 + x^2} \text{ et } \operatorname{th}(x) = 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(2n+1)^2 \pi^2 + 4x^2}$$

Solution.

– I – Développement en produit infini de $\frac{\sin(x)}{x}$ pour x réel

1. Pour $x = 0$ ou $x \in \pi\mathbb{Z}^*$, le produit infini est visiblement convergent vers 1 ou vers 0. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} > 0$ pour tout entier $n > n_x$ et on a $\ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x^2}{n^2 \pi^2} < 0$, la série $\sum_{n > n_x} \frac{x^2}{n^2 \pi^2}$ étant convergente, donc la série $\sum_{n > n_x} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$ converge vers un réel $S(x)$, c'est-à-dire que $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n > n_x}} \ln \left(\prod_{k=n_x+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right) \right) = S(x)$ et en conséquence, on a $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n > n_x}} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right) = \prod_{k=1}^{n_x} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right) e^{S(x)} \neq 0$.

2. (a) On a :

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1}$$

$$0 = (1-1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} - \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1}$$

ce qui donne par addition $2^{2n+1} = 2 \cdot 2^{2n} = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k}$ et en consé-

quence, $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} = 2^{2n}$.

- (b) Pour tout entier naturel n et tout réel t , on a :

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)t) &= \Im \left(e^{i(2n+1)t} \right) = \Im \left((\cos(t) + i \sin(t))^{2n+1} \right) \\ &= \Im \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^{2n+1-k}(t) i^k \sin^k(t) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2n-2k}(t) \sin^{2k+1}(t) \\ &= \sin(t) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (1 - \sin^2(t))^{n-k} \sin^{2k}(t) \\ &= \sin(t) P_n(\sin^2(t)) \end{aligned}$$

où $P_n(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (1-X)^{n-k} X^k$ est de degré égal à n

puisque le coefficient de X^n est $\alpha_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} = (-1)^n 2^{2n}$.

Son coefficient constant est $P_n(0) = \binom{2n+1}{1} = 2n+1$.

(c) Pour k entier compris entre 1 et n , on a :

$$0 = \sin \left((2n+1) \frac{k\pi}{2n+1} \right) = \sin \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) P_n \left(\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right)$$

avec $\sin \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \neq 0$ (pour $1 \leq k \leq n$, on a $0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$), donc $P_n \left(\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right) = 0$. Les $x_{n,k} = \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)$ nous fournissent donc n racines distinctes de P_n (la fonction $\sin^2$ est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$) et on les a toutes. On a donc pour tout réel X :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= (-1)^n 2^{2n} \prod_{k=1}^n \left(X - \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right) \\ &= 2^{2n} \prod_{k=1}^n \left(\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) - X \right) \\ &= 2^{2n} \prod_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{X}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right) \end{aligned}$$

avec $2^{2n} \prod_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = P_n(0) = 2n+1$, ce qui nous donne :

$$P_n(X) = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{X}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right)$$

et, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)t) &= \sin(t) P_n(\sin^2(t)) \\ &= (2n+1) \sin(t) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2(t)}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right) \end{aligned}$$

(d) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , on déduit de la question précédente, en posant $t = \frac{x}{2n+1}$, que :

$$\sin(x) = (2n+1) \sin \left(\frac{x}{2n+1} \right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2n+1} \right)}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right)$$

3.

(a) Pour $m \in \mathbb{N}^*$ fixé et k entier compris entre 1 et n , on a :

$$\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{x}{2n+1}\right)^2}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} = \frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{m,n} = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = P_m$, cette limite P_m étant non

nulle pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Des égalités $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\frac{x}{2n+1}} P_{m,n} Q_{m,n}$ avec

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\frac{x}{2n+1}} = 1$ et $P_{m,n} \neq 0$ pour n assez grand, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{m,n} = \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{P_m} = Q_m \text{ et } \frac{\sin(x)}{x} = P_m Q_m.$$

(b) Pour tout réel $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\frac{2}{\pi}\theta < \sin(\theta) < \theta$ (concavité de la fonction $\sin$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$), donc $\frac{4}{\pi^2}\theta^2 < \sin^2(\theta) < \theta^2$ pour tout réel $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (par parité). Il en résulte que, pour tous réels α, β dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\frac{4}{\pi^2} \frac{\alpha^2}{\beta^2} < \frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\beta)} \text{ et } 1 - \frac{\pi^2}{4} \frac{\alpha^2}{\beta^2} < 1 - \frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\beta)} < 1$$

(c) Il existe un entier m_x tel que $\frac{|x|}{2m_x+1} < \frac{\pi}{2}$ et pour $n > m > m_x$, on a $\frac{x}{2n+1} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Comme pour tout entier k compris entre $m+1$ et n , on a $\frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on déduit de la question précédente que :

$$1 - \frac{\pi^2}{4} \frac{\frac{x^2}{(2n+1)^2}}{\frac{k^2\pi^2}{(2n+1)^2}} = 1 - \frac{x^2}{4k^2} < 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} < 1$$

avec $1 - \frac{x^2}{4k^2} > 1 - \frac{x^2}{4m^2} > 1 - \frac{x^2}{4m_x^2} > 0$ en prenant m_x assez grand. Il

en résulte que, pour $n > m > m_x$, on a $\prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) < Q_{m,n} < 1$ et faisant tendre n vers l'infini à $m > m_x$ fixé, on en déduit que :

$$R_m = \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) \leq Q_m \leq 1$$

Comme le produit infini $\prod_{k=m_x+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right)$ est convergent, son reste R_m tend vers 1 quand m tend vers l'infini (la série $\sum_{k=m_x+1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right)$ est convergente, donc son reste R'_m tend vers 0 et $\prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) = e^{R'_m}$ tend vers 1), donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} Q_m = 1$.

(d) Pour $x \in \pi\mathbb{Z}$, les deux quantités sont nulles et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, le résultat se déduit des égalités $\frac{\sin(x)}{x} = P_m Q_m$ avec $\lim_{m \rightarrow +\infty} Q_m = 1$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} P_m = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

4. Pour $x \in]0, \pi[$, de la continuité de la fonction $\ln$, on déduit du développement en produit infini de $\frac{\sin(x)}{x}$ que $\ln(\sin(x)) - \ln(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ (pour $x \in]0, \pi[$, on a $\sin(x) > 0$ et $1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} > 0$ pour tout $n \geq 1$). En notant $f_n(x) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ pour $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \pi[$ de dérivée $f'_n : x \mapsto \frac{-2x}{n^2\pi^2 - x^2}$, la série de fonctions $\sum f'_n$ étant normalement convergente sur tout segment $[a, b] \subset]0, \pi[$ (pour $x \in [a, b]$, on a $|f'_n(x)| \leq \frac{2b}{n^2\pi^2 - b^2} = u_n$ avec $\sum u_n < +\infty$), ce qui nous permet de dériver sous le signe somme pour obtenir :

$$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2\pi^2 - x^2}$$

5.

(a) La fonction f_α est 2π -périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc développable en série de Fourier, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_\alpha(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$

Comme f_α est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((\alpha+n)t) + \cos((n-\alpha)t)) dt \\ &= \frac{(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{n-\alpha} \right) = -2 \frac{(-1)^n \alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

(b) On a donc :

$$\forall t \in [0, \pi], \cos(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \alpha^2} \cos(nt) \right)$$

ce qui nous donne pour $t = \pi$:

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \right)$$

ou encore :

$$\cotan(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} - 2\alpha\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - \pi^2 \alpha^2}$$

et pour $x = \alpha\pi \in]0, \pi[$ avec $\alpha \in]0, 1[$, on obtient :

$$\cotan(x) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 - x^2}$$

(c) La relation précédente s'écrit aussi, pour $x \in]0, \pi[$:

$$\varphi(x) = \cotan(x) - \frac{1}{x} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 \pi^2 - x^2}$$

La fonction φ se prolonge par continuité en 0. En effet, un développement limité nous donne :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)} = \frac{x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} \\ &= \frac{x \left(-\frac{1}{3} + o(1)\right)}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

et l'égalité précédente est valable sur $]0, \pi[$, la convergence de la série de fonctions étant uniforme sur tout segment $[-a, a] \subset]-\pi, \pi[$ (le terme général est majoré en valeur absolue par $\frac{2a}{n^2 \pi^2 - a^2}$ pour $n \geq 1$). On peut donc écrire pour tout $x \in]0, \pi[$:

$$\int_0^x \varphi(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{-2t}{n^2 \pi^2 - t^2} dt$$

soit :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) &= \left[\ln \left(\frac{\sin(t)}{t} \right) \right]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln(n^2 \pi^2 - t^2) \right]_0^x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n^2 \pi^2 - x^2}{n^2 \pi^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \end{aligned}$$

et en conséquence :

$$\frac{\sin(x)}{x} = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

(continuité de la fonction exp).

– II – Développement en produit infini de $\frac{\sin(z)}{z}$ pour z complexe

1. Des conditions $|u_{n,k}| \leq \alpha_k$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ on déduit en faisant tendre n vers l'infini pour $k \in \mathbb{N}$ fixé que $|u_k| \leq \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La convergence de la série $\sum \alpha_k$ entraîne alors que les séries $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_{n,k}$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ sont absolument convergentes. En notant S_n et S les sommes respectives de ces séries, on a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |S_n - S| &\leq \sum_{k=0}^m |u_{n,k} - u_k| + \sum_{k=m+1}^{+\infty} (|u_{n,k}| + |u_k|) \\ &\leq \sum_{k=0}^m |u_{n,k} - u_k| + 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} \alpha_k \end{aligned}$$

et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier m tel que $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \alpha_k < \varepsilon$ (convergence de $\sum \alpha_k$). Pour ε et m ainsi choisis, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m |u_{n,k} - u_k| = 0$, donc il existe un entier n_0 tel que $\sum_{k=0}^m |u_{n,k} - u_k| < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_0$, ce qui donne $|S_n - s| < 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers S .

2.

- (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(z)$, où on a noté, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$u_{n,k}(z) = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a pour tout $n \geq k+1$:

$$\begin{aligned} u_{n,k}(z) &= \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!n^k} z^k \\ &= \frac{z^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_k(z) = \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

avec $|u_{n,k}(z)| \leq \alpha_k(z) = \frac{|z|^k}{k!}$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k(z)$ étant convergente (vers $e^{|z|}$). On déduit alors du théorème de convergence dominée pour les séries numériques que :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(z) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \end{aligned}$$

(b)

- i. Cela résulte de $\ln(S_n(x)) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{x}{n} = x$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(S_n(x)) = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = e^x$ par continuité de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$.
- ii. Pour $m > n$, on a :

$$\begin{aligned} |S_m(z) - S_n(z)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(\binom{m}{k} \frac{1}{m^k} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) z^k - \sum_{k=n+1}^m \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} z^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right| |z|^k + \sum_{k=n+1}^m \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} |z|^k \end{aligned}$$

Pour k compris entre 2 et n , on a :

$$\begin{aligned} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} &= \frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k!m^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \\ &\geq \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \end{aligned}$$

et pour $k=0$ ou 1 , ces deux quantités valent 1. On a donc :

$$\begin{aligned} |S_m(z) - S_n(z)| &\leq \sum_{k=0}^n \left(\binom{m}{k} \frac{1}{m^k} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) |z|^k + \sum_{k=n+1}^m \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} |z|^k \\ &\leq S_m(|z|) - S_n(|z|) \end{aligned}$$

et il en résulte que la suite $(S_n(z))_{n \geq 1}$ est de Cauchy, donc convergente.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a en notant $T_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$:

$$|T_n(z) - S_n(z)| \leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right| |z|^k$$

avec :

$$\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right) \geq 0$$

pour $0 \leq k \leq n$, donc :

$$|T_n(z) - S_n(z)| \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) |z|^k = T_n(|z|) - S_n(|z|)$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(|z|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(|z|) = e^{|z|}$. On peut donc en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(z) = e^z$.

3.

(a) On a $P_n(z) = \frac{S_{2n+1}(iz) - S_{2n+1}(-iz)}{2i}$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z)$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \frac{1}{(2n+1)^k} (1 - (-1)^k) (iz)^k \\ &= z \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \frac{(-1)^k}{(2n+1)^{2k+1}} z^{2k} \end{aligned}$$

donc P_n est impaire de degré $2n+1$ avec 1 pour coefficient de z et $\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}}$ pour coefficient dominant.

(c) Un nombre complexe z est racine de P_n si, et seulement si, $1 - \frac{iz}{2n+1} \neq 0$ et $w = \frac{1 + \frac{iz}{2n+1}}{1 - \frac{iz}{2n+1}}$ est racine $2n+1$ -ème de l'unité, ce qui équivaut à $\frac{2n+1+iz}{2n+1-iz} = e^{i\theta_k}$ où $\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ avec k compris entre $-n$ et n , ce qui nous $z = \frac{2n+1}{i} \frac{e^{i\theta_k} - 1}{e^{i\theta_k} + 1} = (2n+1) \tan\left(\frac{\theta_k}{2}\right)$, soit les $2n+1$ racines réelles distinctes $x_k = (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ où k est compris entre $-n$ et n (les $\frac{k\pi}{2n+1}$ sont dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction $\tan$ est injective sur cet intervalle). On a donc :

$$P_n(z) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}} \prod_{k=-n}^n (z - x_k) = \frac{z}{(2n+1)^{2n+1}} \prod_{k=1}^n (x_k^2 - z^2)$$

(puisque $x_{-k} = x_k$ pour $1 \leq k \leq n$), ce qui peut aussi s'écrire :

$$P_n(z) = \frac{z}{(2n+1)^{2n+1}} \prod_{k=1}^n x_k^2 \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{x_k^2}\right)$$

avec $1 = \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}} \prod_{k=1}^n x_k^2$ (coefficient de z), soit :

$$P_n(z) = z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)$$

4.

(a) Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} |P_n| &= \prod_{k=0}^n |1 + v_k| \leq \prod_{k=0}^n (1 + |v_k|) \leq \prod_{k=0}^n e^{|v_k|} = \exp\left(\sum_{k=0}^n |v_k|\right) \\ &\leq M = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|\right) < +\infty \end{aligned}$$

(on a $1 + x \leq e^x$ pour tout réel x).

(b) Pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$|P_n - P_{n-1}| = |P_{n-1}v_n - P_{n-1}| = |P_{n-1}(v_n - 1)| = |P_{n-1}v_n| \leq M |v_n|$$

la série $\sum |v_n|$ étant convergente, ce qui implique l'absolue convergence de la série $\sum (P_n - P_{n-1})$. La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est de même nature que la série $\sum (P_n - P_{n-1})$ est donc convergente. Précisément, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + v_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = P_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (P_k - P_{k-1}) \\ &= P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (P_n - P_{n-1}) \end{aligned}$$

5. Pour tout nombre complexe z , la convergence du produit infini $\prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$ résulte de l'absolue convergence de la série $\sum \frac{z^2}{n^2 \pi^2}$.

6. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $|v_k| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |v_{n,k}| \leq \alpha_k$. De la question précédente, on déduit que les produits infinis $\prod_{k \in \mathbb{N}} (1 + v_{n,k})$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\prod_{k \in \mathbb{N}} (1 + v_k)$ convergent respectivement vers T_n et T . En notant respectivement :

$$(P_{n,k})_{k \in \mathbb{N}} = \left(\prod_{j=0}^k (1 + v_{n,j}) \right)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (P_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\prod_{j=0}^k (1 + v_j) \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

les suites de produits partiels de ces produits infinis, on a :

$$\begin{aligned} T_n &= \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + v_{n,k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P_{n,k} = P_{n,0} + \sum_{k=1}^{+\infty} (P_{n,k} - P_{n,k-1}) \\ &= (1 + v_{n,0}) + \sum_{k=1}^{+\infty} P_{n,k-1} v_{n,k} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$\begin{aligned} T &= \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + v_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = P_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (P_k - P_{k-1}) \\ &= (1 + v_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P_{k-1} v_k \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} |P_{n,k-1} v_{n,k}| &\leq |v_{n,k}| \prod_{j=0}^{k-1} (1 + |v_{n,j}|) \leq |\alpha_k| \exp \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |v_{n,j}| \right) \\ &\leq \alpha_k \exp \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \right) = M \alpha_k \end{aligned}$$

la série $\sum |\alpha_k|$ étant convergente. On déduit alors du théorème de convergence dominée pour les séries que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T$, soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + v_{n,k}) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n,k} \right)$$

7. Pour tout nombre complexe z , on a :

$$\sin(z) = z \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + v_{n,k}(z))$$

en posant $v_{n,0}(z) = z - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$v_{n,k}(z) = \begin{cases} -\frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n,k}(z) = v_k(z)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, où $v_0(z) = z - 1$ et $v_k(z) = -\frac{z^2}{k^2 \pi^2}$ pour $k \geq 1$ et $|v_{n,k}(z)| \leq \alpha_k(z)$ pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, où $\alpha_0(z) = |z - 1|$ et $\alpha_k(z) = \frac{|z|^2}{k^2 \pi^2}$ pour $k \geq 1$ (en utilisant l'encadrement $0 < t < \tan(t)$)

valable pour tout réel $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On déduit alors du théorème de convergence dominée pour les produits infinis que :

$$\sin(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n,k}(z) \right) = \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + v_k(z)) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right) \quad (2.3)$$

8. Le développement (2.3) pour $z = \frac{\pi}{2}$ nous donne :

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{4k^2 - 1}{4k^2}$$

ou encore $\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$ (continuité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$).

9.

(a) Pour $t \in \mathbb{C} \setminus \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \right)$ et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} \left(1 - \frac{(2t+1)^2}{4k^2} \right) &= \frac{1}{4k^2 - 1} (4k^2 - (2t+1)^2) \\ &= \frac{1}{4k^2 - 1} (2k - 2t - 1)(2k + 2t + 1) \\ &= \frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2 - 1} \left(1 - \frac{2t}{2k-1} \right) \left(1 + \frac{2t}{2k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{2t}{2k-1} \right) \left(1 + \frac{2t}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1 - \frac{2t}{2k-1}}{1 - \frac{2t}{2k+1}} \left(1 - \frac{4t^2}{(2k+1)^2} \right) \end{aligned}$$

(b) Pour tout nombre complexe $z = t\pi \in \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right)$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \left(z + \frac{\pi}{2}\right) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\left(z + \frac{\pi}{2}\right)^2}{k^2 \pi^2} \right) \\ &= \pi \left(t + \frac{1}{2}\right) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2}{k^2} \right) = \frac{\pi}{2} (2t+1) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{(2t+1)^2}{4k^2} \right) \\ &= (2t+1) \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{(2t+1)^2}{4k^2} \right) \\ &= (2t+1) \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} \left(1 - \frac{(2t+1)^2}{4k^2} \right) \\ &= (2t+1) \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - \frac{2t}{2k-1}}{1 - \frac{2t}{2k+1}} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4t^2}{(2k+1)^2} \right) \end{aligned}$$

avec $\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - \frac{2t}{2k-1}}{1 - \frac{2t}{2k+1}} = 1 - 2t$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\cos(z) &= (2t+1)(1-2t) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4t^2}{(2k+1)^2}\right) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{4t^2}{(2k+1)^2}\right) \\ &= \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}\right)\end{aligned}$$

Pour $z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, les deux termes de cette égalité sont nuls.

On peut aussi remplacer z par $2z$ dans le développement (2.3), ce qui nous donne :

$$\frac{\sin(2z)}{2z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{n^2\pi^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{2n+1} \left(1 - \frac{4z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

soit :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(z)}{z} \cos(z) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{4z^2}{4k^2\pi^2}\right) \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right) \\ &= \frac{\sin(z)}{z} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)\end{aligned}$$

avec $\frac{\sin(z)}{z} \neq 0$ pour z dans $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, ce qui nous donne :

$$\cos(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}\right)$$

Cette égalité étant encore vraie pour $z \in \pi\mathbb{Z}$ par continuité (ayant vérifié la convergence uniforme sur tout compact du produit infini).

- (c) Avec la continuité de la fonction $\ln$, on déduit du développement en produit infini de $\cos(x)$ que :

$$\ln(\cos(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$$

(pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(x) > 0$ et $1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2} > 0$ pour tout

$n \geq 0$). En notant $g_n(x) = \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$ pour $n \geq 0$, la fonction

g_n est de classe C^∞ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ de dérivée $g'_n : x \mapsto \frac{-8x}{(2n+1)^2\pi^2 - 4x^2}$, la

série de fonctions $\sum g'_n$ étant normalement convergente sur tout segment

$[a, b] \subset]0, \frac{\pi}{2}[$ (pour $x \in [a, b]$, on a $|g'_n(x)| \leq \frac{8b}{(2n+1)^2\pi^2 - 4b^2} = v_n$ avec $\sum v_n < +\infty$), ce qui nous permet de dériver sous le signe somme pour obtenir $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(2n+1)^2\pi^2 - 4x^2}$.

10. Pour tout nombre complexe z , on a :

$$\operatorname{sh}(z) = -i \sin(iz) = -i \left(iz \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{(iz)^2}{k^2\pi^2} \right) \right) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right)$$

$$\text{et } \operatorname{ch}(z) = \cos(iz) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2} \right).$$

11. Avec la continuité de la fonction $\ln$, on déduit du développement en produit infini de $\operatorname{sh}(x)$ pour x réel strictement positif, que :

$$\ln(\operatorname{sh}(x)) = \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$$

En notant $f_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$ pour $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de dérivée $g'_n : x \mapsto \frac{2x}{n^2\pi^2 + x^2}$, la série de fonctions $\sum f'_n$ étant normalement convergente sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+,*}$ (pour $x \in [a, b]$, on a $|f'_n(x)| \leq \frac{2b}{n^2\pi^2} = \alpha_n$ avec $\sum \alpha_n < +\infty$), ce qui nous permet de dériver sous le signe somme pour obtenir $\frac{1}{\operatorname{th}(x)} = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2\pi^2 + x^2}$, ce résultat étant encore valable pour $x < 0$ par imparité. De manière analogue, on a pour tout réel x , $\operatorname{th}(x) = 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(2n+1)^2\pi^2 + 4x^2}$.

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

Exercice 3.1. Etude de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1-te^{ix}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}$, la convergence de la série de fonction du second membre de cette égalité étant uniforme sur tout segment $[a, b]$ contenu dans $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$.

2. Retrouver les égalités $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

3. Pour tout $\lambda \in]-1, 1[$, on note $P_\lambda(X) = X^2 - 2\lambda X + 1$. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{P_\lambda(t)} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(\arctan\left(\frac{1-\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) + \arctan\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) \right)$$

puis en déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{t dt}{P_\lambda(t)}$.

4. Dédire de ce qui précède que, pour tout réel $x \in]0, \pi[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

5. Montrer que, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{(\pi - x)^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

6. Dédire de ce qui précède que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{(\pi - x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi].$$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t)) dt = \frac{1}{2} \left(\ln(2)(x - \pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \right)$$

puis en déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$.

Solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\sum_{k=1}^n t^{k-1} e^{ikx} = e^{ix} \sum_{k=1}^n (te^{ix})^{k-1} = e^{ix} \frac{1 - t^n e^{inx}}{1 - te^{ix}}$$

(l'égalité $1 - te^{ix} = 0$ entraîne $t = 1$ et $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui n'est pas), ce qui nous donne en intégrant sur $[0, 1]$, $\sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt - \int_0^1 \frac{t^n e^{i(n+1)x}}{1 - te^{ix}} dt$

$$\text{et } \left| \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{k} - \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1 - te^{ix}} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - te^{ix}|} dt.$$

Pour $[a, b] \subset]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $\varphi : (x, t) \mapsto |1 - te^{ix}|$ est continue sur le compact $[a, b] \times [0, 1]$ et à valeurs strictement positives, elle est donc minorée et atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ (dépendant de a et b) tel que $|1 - te^{ix}| \geq \alpha$ pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [0, 1]$. Il en résulte que, pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{k} - \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt \right| \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{\alpha(n+1)}$$

et la convergence uniforme sur $[a, b]$ de la série de fonctions $\sum \frac{e^{inx}}{n}$ vers la fonction $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt$ en résulte.

2. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, cela donne :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\pi}}{2k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(k\pi+\frac{\pi}{2})}}{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= \int_0^1 \frac{i}{1-it} dt = i \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = i\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Pour tout réel $\lambda \in]-1, 1[$, on a $P_\lambda(t) = (t - \lambda)^2 + (1 - \lambda^2) \geq (1 - \lambda^2) > 0$ pour tout réel $t \in [0, 1]$ et :

$$I(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{P_\lambda(t)} = \int_0^1 \frac{dt}{(t - \lambda)^2 + 1 - \lambda^2} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}\right)^2 + 1}$$

ce qui nous donne en effectuant le changement de variable $u = \frac{t - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$:

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \int_{-\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}}^{\frac{1 - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \int_{-\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}}^{\frac{1 - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}} \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \left(\arctan \left(\frac{1 - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right) + \arctan \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale, on a :

$$J(\lambda) = \int_0^1 \frac{t dt}{P_\lambda(t)} = \int_0^1 \frac{(t - \lambda) dt}{P_\lambda(t)} + \lambda I(\lambda) = \ln \left(\sqrt{2(1 - \lambda)} \right) + \lambda I(\lambda)$$

4. Par périodicité, il nous suffit de montrer ces formules pour $x \in]0, 2\pi[$. Pour $x = \pi$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2) = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi)}{n} \\ &= 0 = \frac{\pi - \pi}{2} \end{aligned}$$

Pour $x \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, on a $\cos(x) \in]-1, 1[$, donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{1 - 2t \cos(x) + t^2} &= I(\cos(x)) \\ &= \frac{1}{\sin(x)} \left(\arctan \left(\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \right) + \arctan \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sin(x)} \left(\arctan \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \arctan \left(\frac{1}{\tan(x)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sin(x)} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctan(\tan(x)) \right) = \frac{1}{\sin(x)} \frac{\pi - x}{2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t dt}{1 - 2t \cos(x) + t^2} &= \ln \left(\sqrt{2(1 - \cos(x))} \right) + \cos(x) I(\cos(x)) \\ &= \ln \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \cotan(x) \frac{\pi - x}{2} \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n} &= \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1-te^{ix}} dt = \int_0^1 \frac{e^{ix}(1-te^{-ix})}{1-2t\cos(x)+t^2} dt \\ &= \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{\sin(x)} \frac{\pi-x}{2} - \ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \cotan(x) \frac{\pi-x}{2} \\ &= -\ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + i\frac{\pi-x}{2}\end{aligned}$$

$$\text{soit } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}.$$

5. La série de fonctions $\sum \frac{\sin(nt)}{n}$ étant uniformément convergente sur tout segment $[a, b]$ contenu dans $]0, 2\pi[$ (question 1), on a pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\pi}^x \frac{\sin(nt)}{n} dt = \int_{\pi}^x \frac{\pi-t}{2} dt = -\frac{(\pi-x)^2}{4}$$

$$\text{soit } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{(\pi-x)^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

La série de fonctions $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (puisque $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$), sa somme est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'égalité précédente est valable sur $[0, 2\pi]$ par continuité.

6. Pour $x = 0$, cela donne, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, soit :

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et avec } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \text{ on dé-}$$

$$\text{duit que } \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ ce qui nous donne } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

7. De manière analogue, on a du fait de la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ sur tout segment $[a, b] \subset]0, 2\pi[$, pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\pi}^x \frac{\cos(nt)}{n} dt &= -\int_{\pi}^x \ln\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt \\ &= -\ln(2)(x-\pi) - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{x}{2}} \ln(\sin(t)) dt\end{aligned}$$

soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} = -\ln(2)(x - \pi) - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{x}{2}} \ln(\sin(t)) dt$, ou encore :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{x}{2}} \ln(\sin(t)) dt = \frac{1}{2} \left(\ln(2)(x - \pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \right)$$

cette égalité étant valable sur $[0, 2\pi]$ par continuité.

Pour $x = 0$, cela donne, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$.

Exercice 3.2. Un théorème de Bernstein

À toute fonction f à valeurs réelles et de classe C^∞ sur un voisinage $] -r, r[$ de 0 avec $r > 0$, on associe les suites de fonctions $(P_{n,f})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(R_{n,f})_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $] -r, r[$ par :

$$P_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad R_{n,f}(x) = f(x) - P_{n,f}(x)$$

- Donner pour $f \in C^\infty(]-r, r[, \mathbb{R})$, une expression intégrale de $R_{n,f}$.
- Soit $f \in C^\infty(]-r, r[, \mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] -r, r[$. Montrer que :
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, r[$, on a $0 \leq R_{n,f}(x) \leq f(x)$;
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{R_{n,f}(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur l'intervalle $]0, r[$;
 - f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r .
- On suppose que $f \in C^\infty(]-r, r[, \mathbb{R})$ est paire telle que $f^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] -r, r[$. Montrer que :
 - pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, r[$, on a $f^{(2k+1)}(x) \geq 0$;
 - f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r .
- On suppose que $f \in C^\infty(]-r, r[, \mathbb{R})$ est telle que $f^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] -r, r[$. On associe à cette fonction, la fonction g définie sur $] -r, r[$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$. Montrer que :
 - g est de classe C^∞ sur $] -r, r[$, paire et telle que $g^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in] -r, r[$;
 - $0 \leq R_{2n-1,f}(x) \leq R_{2n-1,g}(x)$, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in] -r, r[$;
 - f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r .

5. Soit $f \in C^\infty]-r, r[, \mathbb{R})$ telle que $f^{(2k+1)}(x) \geq 0$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-r, r[$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r .
6. Montrer que la fonction $\tan$ est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
7. Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I non vide telle que $f^{(2k)}(x) \geq 0$ [resp. $f^{(2k+1)}(x) \geq 0$] pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de tout point de I (théorème de Bernstein).

Solution.

1. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour tout $x \in]-r, r[$:

$$R_{n,f}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

2. La fonction f étant fixée, on notera P_n et R_n pour $P_{n,f}$ et $R_{n,f}$.

- (a) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, r[$, on a $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \geq 0$

$$\text{et } P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geq 0, \text{ donc } R_n(x) = f(x) - P_n(x) \leq f(x).$$

- (b) Le changement de variable $t = xu$ nous donne pour tout $x \in]0, r[$:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$$

et avec la croissance de $f^{(n+1)}$ qui résulte de $f^{(n+2)} \geq 0$, on déduit que pour $0 < x < y < r$, on a :

$$R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(yu) du = \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} R_n(y)$$

$$\text{soit } 0 \leq \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}.$$

On peut aussi dire que la fonction $(x, u) \mapsto (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc la fonction $x \mapsto \varphi_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (on intègre sur un segment une fonction C^∞ des deux variables) avec $\varphi'_n(x) = \int_0^1 u(1-u)^n f^{(n+2)}(xu) du \geq 0$ pour $x \in]0, r[$, ce qui assure la croissance de φ_n .

- (c) Pour $0 < x < y < r$, on a $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$. Pour $x = 0$, on a $R_n(0) = 0$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in]-r, 0[$, on a :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} |x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(-|x|u) du \right| \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(-|x|u) du \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(|x|u) du = R_n(|x|) \end{aligned}$$

($f^{(n+1)}$ est positive croissante) et en conséquence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in]-r, r[$, ce qui se traduit par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ et signifie que f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r .

3.

- (a) Comme f est paire et $f^{(2k+2)} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(2k+1)}$ est impaire et croissante, donc $f^{(2k+1)}(x) \geq f^{(2k+1)}(0) = 0$ pour tout $x \in]0, r[$.
- (b) On a donc $f^{(k)}(x) \geq 0$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, r[$, ce qui nous donne encore les encadrements $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$ sur $]0, r[$ desquels on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$. Comme $f^{(2k+1)}(0) = 0$ pour tout entier k , les fonctions P_n sont paires et il en est de même des fonctions R_n , ce qui nous assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ sur $]-r, r[$ et signifie que la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r .

4. On se ramène à l'hypothèse de parité de la question précédente en introduisant la fonction g définie sur $]-r, r[$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$.

- (a) g est $\mathcal{C}^\infty$, paire avec $g^{(2k)}(x) = f^{(2k)}(x) + f^{(2k)}(-x) \geq 0$ sur $]-r, r[$.

- (b) On a $R_{2n-1,f}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n-1} f^{(2n)}(xu) du$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $|x| < r$ (pour $x = 0$, on a $R_{2n-1}(x) = 0$) avec $0 \leq f^{(2n)}(xu) \leq g^{(2n)}(xu)$, donc $0 \leq R_{2n-1,f}(x) \leq R_{2n-1,g}(x)$. En utilisant la question précédente, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{2n-1,f}(x) = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{2n-1,f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in]-r, r[$, puis avec :

$$P_{2n,f}(x) = P_{2n-1,f}(x) + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} = P_{2n-1,f}(x) + \frac{1}{2} \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} = 0$ (convergence de la série de Taylor de la fonction g), on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{2n,f}(x) = f(x)$. D'où le résultat annoncé.

5. La fonction $h = f'$ qui vérifie les hypothèses de la question précédente est développable en série entière sur le voisinage $] -r, r[$ de 0, donc il en est de même de f par primitivation.
6. On vérifie par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe un polynôme P_n à coefficients réels positifs telle que $\tan^{(2n+1)}(x) = P_n(\tan^2(x))$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En effet, pour $n = 0$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\tan^{(2n+3)}(x) &= (2 \tan(x) (1 + \tan^2(x)) P'_n(\tan^2(x)))' \\ &= 4 \tan^2(x) (1 + \tan^2(x))^2 P''_n(\tan^2(x)) \\ &\quad + 2 (1 + \tan^2(x))^2 P'_n(\tan^2(x)) \\ &\quad + 4 \tan^2(x) (1 + \tan^2(x)) P'_n(\tan^2(x)) = P_{n+1}(\tan^2(x))\end{aligned}$$

où $P_{n+1}(X) = 2(1+X) \left(2X(1+X)^2 P''_n(X) + P'_n(X)(1+3X) \right)$ est un polynôme à coefficients positifs. Donc $\tan^{(2n+1)}(x) \geq 0$ et la fonction $\tan$ est développable en série entière sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

7. La fonction $g : t \in]-r, r[\mapsto g(t) = f(x_0 + t)$, pour $x_0 \in I$ et $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\subset I$, est C^∞ sur $] -r, r[$ avec $g^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(x_0 + t) \geq 0$ pour tout entier naturel n et tout $t \in]-r, r[$. Elle est donc développable en série entière sur $] -r, r[$, ce qui revient à dire que f est développable en série entière en x_0 .

Exercice 3.3. Un théorème de Borel

Une fonction développable en série entière sur un ouvert $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ est indéfiniment dérivable sur cet ouvert. On s'intéresse ici à la réciproque de ce résultat.

1. Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n(1-inx)}$, $h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$, sont de classe C^∞ et non développables en série entière au voisinage de 0.
2. On se propose de montrer un théorème de Borel qui nous permet de construire des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas développables en série entière au voisinage de 0.

(a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on a, en notant $y = \arctan(x)$:

$$\begin{aligned}\arctan^{(n)}(x) &= (n-1)! \cos^n(y) \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\text{En déduire que } |\arctan^{(n)}(x)| \leq \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

- (b) Pour tout réel α , on désigne par φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2}$. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on a $|\varphi_\alpha^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{|x|^n \sqrt{1 + \alpha^2 x^2}}$.
- (c) On se donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0(x) = a_0$ et $u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1 + n! a_n^2 x^2}$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n(x)| \leq \frac{|x|^{n-1}}{\sqrt{n!}}$. En déduire que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, tout entier $n \geq p + 1$ et tout réel x , on a $|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! (n+1)^p$.
 - En déduire que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$ et $f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k^{(n)}(0) + n! a_n$ pour tout $n \geq 2$.
3. Montrer que, pour toute suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(0) = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (théorème de Borel).
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable et paire.
- Justifier l'existence d'une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\frac{h^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - h(x^2)$ est telle que $\varphi^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n .
 - Montrer que la fonction $\theta : x \mapsto \varphi(\sqrt{|x|}) = f(\sqrt{|x|}) - h(x)$ est de classe C^∞ et de série de Taylor en 0 nulle.
 - Déduire de ce qui précède, l'existence d'une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f(x) = g(x^2)$ pour tout réel x .

Solution.

1.

- (a) La fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions indéfiniment dérivables avec $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout entier naturel n et tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, où P_n est un polynôme de degré $3n$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$, $n = 1$ avec $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = 2X^3$

et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{2}{x^3} P_n \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} P'_n \left(\frac{1}{x} \right) \right) e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

où $P_{n+1}(X) = 2X^3 P_n(X) - X^2 P'_n(X)$ est un polynôme de degré $3(n+1)$.

Puis avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^\pm \\ x \neq 0}} f^{(n)}(x) = \lim_{X \rightarrow \pm\infty} P_n(X) e^{-X^2} = 0$ pour tout entier naturel

n , on déduit que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec toutes ses dérivées nulles en 0 (conséquence du théorème des accroissements finis). Il en résulte que f ne peut être développable en série entière au voisinage de 0, puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$ pour tout réel non nul x .

- (b) Notons, pour tout entier naturel n et tout réel x , $u_n(x) = e^{-n(1-ix)}$. Toutes les fonctions u_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout entier naturel p et tout réel x , $|u_n^{(p)}(x)| = n^{2p} e^{-n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(e^{-\frac{n}{2}} \right)$, donc la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que g est C^∞

sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $g^{(p)}(x) = i^p \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2p} e^{-n(1-ix)}$.

Pour $x = 0$, on a $a_p = \frac{|g^{(p)}(0)|}{p!} = \frac{1}{p!} \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2p} e^{-n} \geq \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} \geq p^p e^{-p}$,

donc, $\sqrt[p]{a_p} \geq \frac{p}{e} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ et en conséquence, le rayon de convergence de

la série de Taylor $\sum \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$ est nul. Il en résulte que g ne peut être développable en série entière au voisinage de 0.

De manière plus générale, on peut considérer une fonction g définie sur $\mathbb{R}$

par $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{in^2 x}$, où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à préciser. Les fonctions

$u_n : x \mapsto \alpha_n e^{in^2 x}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout entier naturel p et tout réel x , $|u_n^{(p)}(x)| = n^{2p} \alpha_n$ en supposant que tous les α_n sont strictement positifs. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{\alpha_n} = \ell \in]0, 1[$, le rayon de convergence

de la série entière $\sum \alpha_n x^n$ est alors égal à $R = \frac{1}{\ell} > 1$ et ce rayon de convergence est aussi celui de toutes ses dérivées d'ordre p et en particulier la série $\sum n^{2p} \alpha_n$ converge, donc la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$a_p = \frac{|g^{(p)}(0)|}{p!} = \frac{1}{p!} \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2p} \alpha_n \geq \frac{p^{2p} \alpha_p}{p!} \geq p^p \alpha_p$, $\sqrt[p]{a_p} \geq p \sqrt[p]{\alpha_p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$

et le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$ est nul.

(c) La fonction $(x, t) \mapsto \varphi(x, t) = e^{-t(1-itx)}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ avec, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) \right| = t^{2n} e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(e^{-\frac{t}{2}} \right)$. On déduit alors du théorème de dérivation de Lebesgue que h est indéfiniment dérivable avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x , $h^{(n)}(x) = i^n \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t(1-itx)} dt$. En 0, on a $a_n = \frac{|h^{(n)}(0)|}{n!} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n} e^{-t}}{n!} dt = \frac{(2n)!}{n!}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ et le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est nul. Donc h ne peut être développable en série entière au voisinage de 0.

2.

(a) Par définition de la fonction arctan, on a :

$$(x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \arctan(x)) \Leftrightarrow \left(y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et } x = \tan(y) \right)$$

Pour $n = 1$, on a :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \cos^2(y) = \cos(y) \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

Supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\arctan^{(n+1)}(x)}{(n-1)!} \\ &= \frac{n \cos^{n-1}(y)}{1+x^2} \left(\cos(y) \cos\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \sin(y) \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) \right) \\ &= n \cos^{n+1}(y) \cos\left((n+1)y + n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= n \cos^{n+1}(y) \sin\left((n+1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

soit $\arctan^{(n+1)}(x) = n! \cos^{n+1}(y) \sin\left((n+1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, c'est-à-dire le résultat attendu au rang $n+1$.

Comme $y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a $\cos(y) > 0$ et on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \arctan^{(n)}(x) &= (n-1)! (\cos^2(y))^{\frac{n}{2}} \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= (n-1)! \left(\frac{1}{1+\tan^2(y)} \right)^{\frac{n}{2}} \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

ce qui nous donne $|\arctan^{(n)}(x)| \leq \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}$.

- (b) Pour $\alpha = 0$, c'est clair. Pour $\alpha \neq 0$, la fonction φ_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et en écrivant que $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$, on a $\varphi_\alpha^{(n)}(x) = \alpha^n \varphi_1^{(n)}(\alpha x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x avec $|\varphi_1^{(n)}(x)| = |\arctan^{(n+1)}(x)| \leq \frac{n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, ce qui nous donne pour x non nul :

$$|\varphi_\alpha^{(n)}(x)| \leq \frac{|\alpha|^n n!}{(1+\alpha^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \leq \frac{n!}{|x|^n} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}}$$

- (c) Pour $n \geq 1$, on note $\alpha_n = \sqrt{n} a_n$, de sorte que $u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n! a_n^2 x^2} = a_n x^n \varphi_{\alpha_n}(x)$, toutes ces fonctions étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- i. Pour $n \geq 1$ et $x \neq 0$, on a $|u_n(x)| \leq |a_n| |x|^n \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_n^2 x^2}} \leq \frac{|x|^{n-1}}{\sqrt{n!}}$, ce qui est aussi valable pour $x = 0$. Pour $R > 0$ et $|x| \leq R$, on a donc $|u_n(x)| \leq \frac{R^{n-1}}{\sqrt{n!}}$, la série $\sum \frac{R^{n-1}}{\sqrt{n!}}$ étant convergente (critère de d'Alembert), ce qui entraîne la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n(x)$ sur tout segment $[-R, R]$. Il en résulte que la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- ii. Pour $p \geq 1$, $n \geq p+1$ et $x \neq 0$, on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$$

avec :

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \leq n^k \text{ et } |\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)| \leq \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k}} \frac{1}{\sqrt{1+n! a_n^2 x^2}}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} |u_n^{(p)}(x)| &\leq |a_n| \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k |x|^{n-k} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k}} \frac{1}{\sqrt{1+n! a_n^2 x^2}} \\ &\leq \frac{|a_n| |x|^{n-p}}{\sqrt{1+n! a_n^2 x^2}} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k (p-k)! \\ &\leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k = \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! (n+1)^p \end{aligned}$$

- iii. Donc pour tout réel $R > 0$ et tout $x \in [-R, R]$, on a :

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq v_n = \frac{R^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! (n+1)^p$$

$\sum v_n$ étant convergente ($\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{R}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$), ce qui nous assure de la convergence uniforme des séries dérivées sur tout

compact. Donc f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $k \geq 1$, on a $u_k(0) = 0$, donc $f(0) = a_0$. Pour $k = 0$ ou $k \geq 2$, on a $u'_k(0) = 0$ (pour $k \geq 2$, 0 est racine d'ordre au moins 2 de u_k) et pour $k = 1$, $u'_1(0) = a_1$, donc $f'(0) = a_1$.

Pour $n \geq 2$, on a $u_0^{(n)}(0) = 0$ et $u_k^{(n)}(0) = 0$ pour tout $k \geq n+1$ puisque u_0 est constante et 0 est racine d'ordre au moins égal à $n+1$

de u_k , donc $f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^n u_k^{(n)}(0)$ avec :

$$u_n^{(n)}(x) = a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(n-k)}(x)$$

ce qui nous donne $u_n^{(n)}(0) = a_n n! \varphi_{\alpha_n}(0) = n! a_n$.

- (d) Pour $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée, on définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations de récurrence : $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ et pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{n!} \left(b_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_k^{(n)}(0) \right)$, de sorte que la fonction f définie à la question précédente est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = b_0$, $f'(0) = b_1$ et $f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k^{(n)}(0) + n! a_n$ pour tout $n \geq 2$.

3.

- (a) Comme f est indéfiniment dérivable et paire, on a $f^{(2n+1)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n . Le théorème de Borel nous assure de l'existence d'une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable telle que $\frac{h^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$.
- (b) Comme φ est paire, on a $\varphi^{(2n+1)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n . Pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \int_0^x \frac{f^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^{2k} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 \frac{f^{(2n+2)}(xt)}{(2n)!} (1-t)^{2n+1} dt \end{aligned}$$

$$\text{et } h(x) = \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 \frac{h^{(n+1)}(xt)}{n!} (1-t)^n dt \text{ (formule de Taylor}$$

avec reste intégral), donc $\varphi(x) = x^{2n+2} \psi_n(x)$, la fonction ψ_n étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce qui nous donne $\varphi^{(2n)}(0) = 0$ (0 est racine de φ d'ordre au moins $2n+2$). On a donc $\varphi^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que, pour tout entier $p \geq 0$, le développement limité de $\varphi^{(p)}$ à l'ordre n au voisinage de 0 est de la forme $\varphi^{(p)}(x) = o(x^n)$.

- (c) Il est clair que la fonction θ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, paire et continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x > 0$, on a $\theta'(x) = \frac{\varphi'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{o(x)}{2\sqrt{x}} = o(\sqrt{x})$, donc

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta'(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \theta'(x) = 0$ par parité. Il en résulte que θ est dérivable en 0 de dérivée nulle (théorème des accroissements finis), la fonction θ' étant continue en 0. Supposons, pour $n \geq 1$, que θ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $\theta^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$ et $\theta^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\varphi^{(k)}(\sqrt{x})}{x^{n-\frac{k}{2}}}$ pour $x > 0$, la fonction $\theta^{(n)}$ étant de la parité de n . On a alors, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} \theta^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=1}^n a_k \frac{\varphi^{(k+1)}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}x^{n-\frac{k}{2}}} - \sum_{k=1}^n \left(n - \frac{k}{2}\right) a_k \frac{\varphi^{(k)}(\sqrt{x})}{x^{n+1-\frac{k}{2}}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} \frac{\varphi^{(k+1)}(\sqrt{x})}{x^{n+1-\frac{k+1}{2}}} - \sum_{k=1}^n \left(n - \frac{k}{2}\right) a_k \frac{\varphi^{(k)}(\sqrt{x})}{x^{n+1-\frac{k}{2}}} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{2} \frac{\varphi^{(k)}(\sqrt{x})}{x^{n+1-\frac{k}{2}}} - \sum_{k=1}^n \left(n - \frac{k}{2}\right) a_k \frac{\varphi^{(k)}(\sqrt{x})}{x^{n+1-\frac{k}{2}}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} b_k \frac{\varphi^{(k)}(\sqrt{x})}{x^{n+1-\frac{k}{2}}} \end{aligned}$$

avec $\frac{\varphi^{(k)}(\sqrt{x})}{x^{n+1-\frac{k}{2}}} = \frac{o(x^{n+1})}{x^{n+1-\frac{k}{2}}}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta^{(n+1)}(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \theta^{(n+1)}(x) = 0$ par parité ou imparité. Il en résulte que $\theta^{(n)}$ est dérivable en 0 de dérivée nulle, la fonction $\theta^{(n+1)}$ étant continue en 0. En conclusion, la fonction θ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivées en 0 toutes nulles.

- (d) La fonction g définie par $g(x) = h(x) + \varphi(\sqrt{|x|})$ est alors indéfiniment dérivable de série de Taylor en 0 nulle et on a $f(x) = \varphi(x) + h(x^2) = g(x^2)$ pour $x \geq 0$, donc $f(x) = g(x^2)$ pour tout réel x par parité.

Exercice 3.4. Une caractérisation des fonctions analytiques réelles

Soit I un intervalle réel ouvert non vide. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique sur I , si elle est développable en série entière au voisinage de tout point x_0 de I , ce qui signifie qu'il existe un réel $r_0 > 0$ tel que $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \subset I$ et une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes tels que :

$$\forall x \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0], f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

On rappelle qu'une telle fonction est indéfiniment dérivable sur I .

1. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique et x_0 un point de I .

(a) Montrer qu'il existe deux réels positifs α_0 et β_0 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]x_0 - \frac{r_0}{2}, x_0 + \frac{r_0}{2}\right[, |f^{(n)}(x)| \leq n! \alpha_0 \beta_0^n$$

- (b) Montrer que pour tout segment K contenu dans I , il existe deux réels positifs α_K, β_K tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in K, |f^{(n)}(x)| \leq n! \alpha_K \beta_K^n \quad (3.1)$$

(on pourra utiliser le fait que du recouvrement du compact K par les ouverts $\left]x_0 - \frac{r_0}{2}, x_0 + \frac{r_0}{2}\right]$, où x_0 décrit K , on peut extraire un sous-recouvrement fini).

2. Réciproquement, montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^∞ telle que pour tout segment $K \subset I$, il existe α_K, β_K dans $\mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in K, |f^{(n)}(x)| \leq n! \alpha_K \beta_K^n$$

alors f est analytique sur I .

3. Montrer que la somme et le produit de deux fonctions analytiques, l'inverse d'une fonction analytique à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et les primitives d'une fonction analytique sur I sont analytiques sur I .
4. Montrer que la fonction arctan est analytique sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $t \mapsto \varphi(t) e^t$ soit bornée. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt$ est analytique sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1.

- (a) Pour tout $x \in \left]x_0 - \frac{r_0}{2}, x_0 + \frac{r_0}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &= \left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} (x-x_0)^{k-n} \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k| \frac{k!}{(k-n)!} |x-x_0|^{k-n} \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k| \frac{k!}{(k-n)!} \left(\frac{r_0}{2}\right)^{k-n} = \frac{1}{r_0^n} \sum_{k=n}^{+\infty} |a_k r_0^k| \frac{k!}{(k-n)!} \frac{1}{2^{k-n}} \end{aligned}$$

De l'égalité $f(x_0 + r_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r_0^k$, on déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k r_0^k = 0$ et en particulier la suite $(|a_k r_0^k|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc en désignant par $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ un majorant de cette suite, on a $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{\lambda_0}{r_0^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{1}{2^{k-n}}$ avec, pour tout réel $t \in]-1, 1[$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} t^{k-n} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k \right)^{(n)} = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}$$

ce qui nous donne $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{\lambda_0}{r_0^n} 2^{n+1} n!$, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left] x_0 - \frac{r_0}{2}, x_0 + \frac{r_0}{2} \right[, \quad |f^{(n)}(x)| \leq n! \alpha_0 \beta_0^n$$

en notant $\alpha_0 = 2\lambda_0$ et $\beta_0 = \frac{2}{r_0}$.

- (b) Si K est un compact contenu dans I , il est alors recouvert par les ouverts $\left] x_0 - \frac{r_0}{2}, x_0 + \frac{r_0}{2} \right[$ et de ce recouvrement, on peut extraire un sous recouvrement fini $K \subset \bigcup_{j=1}^q \left] x_j - \frac{r_j}{2}, x_j + \frac{r_j}{2} \right[$. En posant, avec des notations évidentes, $\alpha_K = \max_{1 \leq j \leq q} \alpha_j$ et $\beta_K = \max_{1 \leq j \leq q} \beta_j$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in K, \quad |f^{(n)}(x)| \leq n! \alpha_K \beta_K^n$$

2. Soient $x_0 \in I$, $r_0 > 0$ tel que $K = [x_0 - r_0, x_0 + r_0] \subset I$ et α_K, β_K dans $\mathbb{R}^+$ tels que $|f^{(n)}(x)| \leq n! \alpha_K \beta_K^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in K$. Pour x dans $]x_0 - r_0, x_0 + r_0[$, on peut écrire en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n \geq 1$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$, où :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \right| \\ &\leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!} \left| \int_0^1 f^{(n+1)}(x_0 + (x-x_0)t) (1-t)^n dt \right| \\ &\leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!} \int_0^1 |f^{(n+1)}(x_0 + (x-x_0)t)| (1-t)^n dt \\ &\leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!} (n+1)! \alpha_K \beta_K^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n dt \leq \alpha_K (\beta_K |x-x_0|)^{n+1} \end{aligned}$$

Choissant r dans $]0, r_0[$ tel que $r\beta_K < 1$, on aboutit à $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, ce qui signifie que f est développable en série entière en x_0 .

3. Soient f, g deux fonctions analytiques sur I , K un segment contenu dans I et α_K, β_K dans $\mathbb{R}^+$ tels que $|f^{(n)}(x)| \leq n! \alpha_K \beta_K^n$ et $|g^{(n)}(x)| \leq n! \alpha_K \beta_K^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in K$ (on prend $\alpha_K = \max(\alpha_{K,f}, \alpha_{K,g})$ et $\beta_K = \max(\beta_{K,f}, \beta_{K,g})$ avec des notations évidentes). On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

tout $x \in K$, $\left| (f+g)^{(n)}(x) \right| \leq n! (2\alpha_K) \beta_K^n$ et :

$$\begin{aligned} \left| (f \cdot g)^{(n)}(x) \right| &\leq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left| f^{(j)}(x) \right| \left| g^{(n-j)}(x) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j! \alpha_K \beta_K^j (n-j)! \alpha_K \beta_K^{n-j} \leq (n+1)! \alpha_K^2 \beta_K^n \\ &\leq n! \alpha_K^2 (2\beta_K)^n \end{aligned}$$

donc $f+g$ et fg sont analytiques sur I .

Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, la fonction $g = \frac{1}{f}$ est indéfiniment dérivable. Étant continue sur I , elle est bornée sur le compact K et pour $n \geq 1$, de $fg = 1$, on déduit que $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)} = 0$, donc $fg^{(n)} = -\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}$, ce qui permet de déduire par récurrence l'existence de constantes positives α'_K, β'_K telles que $\left| g^{(n)}(x) \right| \leq n! \alpha'_K (\beta'_K)^n$ pour tout $x \in K$ (on utilise le fait que la fonction continue $\frac{1}{f}$ est bornée sur K).

Toute primitive F de f est bornée sur K et pour $n \geq 1$, on a :

$$\left| F^{(n)}(x) \right| = \left| f^{(n-1)}(x) \right| \leq (n-1)! \alpha_K \beta_K^{n-1} \leq n! \frac{\alpha_K}{\beta_K} \beta_K^n$$

pour tout $x \in K$, en prenant $\beta_K > 0$.

4. La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est analytique sur $\mathbb{R}$, donc il en est de même de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et de sa primitive nulle en 0.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \psi(x, t) = \varphi(t) e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $|\psi(x, t)| = |\varphi(t)| = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}(e^{-t})$, donc cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}(x, t) = (-it)^n \varphi(t) e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$\left| \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}(x, t) \right| = t^n |\varphi(t)| = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}(t^n e^{-t}) = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$$

On déduit alors du théorème de dérivation de Lebesgue que la fonction f est n fois dérivable avec, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(x) \right| &= \left| (-i)^n \int_0^{+\infty} t^n \varphi(t) e^{-ixt} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} t^n |\varphi(t)| dt \leq \lambda \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \lambda n! \end{aligned}$$

Les conditions (3.1) sont donc vérifiées avec $\alpha_K = \lambda, \beta_K = 1$ pour tout compact K et f est analytique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.5. Le théorème des zéros isolés

1. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique et x_0 un point de I . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$;
- (b) il existe un réel $r > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout x dans $]x_0 - r, x_0 + r[$;
- (c) $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout entier naturel n .

2. Montrer que si f, g sont deux fonctions analytiques sur I qui coïncident au voisinage d'un point x_0 de I , elles sont alors égales.

3. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle et $x_0 \in I$ un zéro de f . Montrer qu'il existe un entier $m \geq 1$ et une fonction analytique $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas sur un voisinage de x_0 tels que $f(x) = (x - x_0)^m g(x)$ pour tout $x \in I$.

4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle. Montrer que l'ensemble des zéros de f est une partie fermée et discrète de I . En particulier pour tout compact K contenu dans I , l'ensemble des zéros dans K de f est fini.

Solution.

1. Les implications $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ sont évidentes. Comme f est développable en série entière en x_0 , il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\forall z \in]x_0 - r, x_0 + r[, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (z - x_0)^n$$

ce qui nous donne l'implication $(c) \Rightarrow (b)$ et l'équivalence $(b) \Leftrightarrow (c)$. Il reste à montrer que $(b) \Rightarrow (a)$, ce qui se déduit de la connexité de I .

Soit E l'ensemble des éléments x de I pour lesquels il existe un réel $r > 0$ tel que $f(t) = 0$ pour tout $t \in]x - r, x + r[$. Supposant que (b) est vérifié, on a $x_0 \in E$, donc E est non vide. Pour $x \in E$, il existe un intervalle ouvert $]x - r, x + r[$ contenu dans E , donc E est ouvert. Pour montrer que $E = I$, il reste à montrer que E est fermé. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de E qui converge vers x . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est nulle dans un voisinage de x_n , donc $f^{(k)}(x_n) = 0$ pour tout entier naturel k et $f^{(k)}(x) = 0$ par continuité de $f^{(k)}$. Il en résulte que f est nulle sur un intervalle ouvert $]x - r, x + r[$ (équivalence entre (b) et (c)), ce qui signifie que $x \in E$. L'ensemble non vide E est donc ouvert et fermé dans le connexe I , ce qui revient à dire $E = I$, soit que (a) est vérifié.

2. Résulte de la question précédente appliquée à $f - g$.
3. Comme $f \neq 0$, le théorème précédent nous dit qu'il existe un plus petit entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}(x_0) \neq 0$ (on a $f(x_0) = 0$). Sur un intervalle ouvert

$$]x_0 - r, x_0 + r[\subset I, \text{ on a } f(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = (x - x_0)^m h(x)$$

avec :

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, h(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^{n-m}$$

La fonction g définie sur I par :

$$\forall x \in I, g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{(x - x_0)^m} & \text{si } x \neq x_0 \\ \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est analytique sur $I \setminus \{x_0\}$ et coïncide avec h sur $]x_0 - r, x_0 + r[$, elle est donc analytique sur I , ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 et on a $f(x) = (x - x_0)^m g(x)$ pour tout $x \in I$.

4. L'ensemble $f^{-1}\{0\}$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Pour $x_0 \in f^{-1}\{0\}$, on a $f(x) = (x - x_0)^m g(x)$ avec g ne s'annulant pas sur un voisinage de x_0 , donc x_0 est l'unique zéro de f dans ce voisinage.

Exercice 3.6. Série trigonométrique et série de Fourier

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers 0 en décroissant et telle que $\sum u_n^2 = +\infty$. Montrer que la série trigonométrique $\sum u_n \sin(nx)$ est convergente sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle ne peut être la série de Fourier d'une fonction 2π -périodiques et continues par morceaux.

Solution. Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ la somme $\sum u_n \sin(nx)$ est nulle. Pour $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \\ &= e^{in\frac{x}{2}} \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

et $\left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| = |\Im(A_n(x))| \leq |A_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$ (on a $\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$). Dans le cas où la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, le théorème d'Abel nous dit alors que la série $\sum u_n \sin(nx)$ est convergente. Si cette série est la série de Fourier d'une fonction f 2π -périodiques et continues par morceaux, cela signifie que $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$, $b_n(f) = u_n$ pour tout $n \geq 1$ et le théorème de Bessel nous dit que la série $\sum (b_n(f))^2 = \sum u_n^2$ est convergente, ce qui n'est pas.

La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \geq 1}$ avec $0 < 2\alpha \leq 1$ nous donne un exemple de telle situation.

Exercice 3.7. Série entière et série de Fourier

Soient $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\lambda + \cos(x)}$.

1. Montrer que l'équation polynomiale $P(z) = z^2 + 2\lambda z + 1$ a deux solutions complexes z_1, z_2 telles que $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$.
2. Montrer que, pour tout réel x , on a $f(x) = \frac{2e^{ix}}{P(e^{ix})}$.
3. En utilisant la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P(z)}$ et le développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$ dans $\mathbb{C}$, donner le développement en série de Fourier de la fonction f .
4. En déduire les valeurs des intégrales $\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\lambda + \cos(x)} dx$, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Calculer en particulier les intégrales suivantes :

$$\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{2 + \cos(x)} dx, \quad \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\cosh(a) + \cos(x)} dx$$

pour tout entier $n \geq 0$, tout réel $a > 0$.

Solution.

1. En désignant par z_1, z_2 les solutions complexes de $P(z) = 0$, on a $z_1 z_2 = 1$ et $z_1 + z_2 = -2\lambda$. Ces solutions sont donc non nulles et $z_2 = \frac{1}{z_1}$. L'une d'entre elles, disons z_1 , est donc telle que $0 < |z_1| \leq 1$. Si $|z_1| = 1$, on a alors $z_1 = e^{i\theta}$, $z_2 = \frac{1}{z_1} = e^{-i\theta}$ et $z_1 + z_2 = 2 \cos(\theta) = -2\lambda$, soit $\lambda = -\cos(\theta) \in [-1, 1]$, ce qui n'est pas. On a donc $0 < |z_1| < 1$ et $|z_2| = \frac{1}{|z_1|} > 1$.

2. On a :

$$e^{-ix} P(e^{ix}) = e^{-ix} (e^{2ix} + 2\lambda e^{ix} + 1) = e^{ix} + e^{-ix} + 2\lambda = 2(\lambda + \cos(x))$$

$$\text{c'est-à-dire que } f(x) = \frac{1}{\lambda + \cos(x)} = \frac{2e^{ix}}{P(e^{ix})}.$$

3. On a $\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right)$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2e^{ix}}{P(e^{ix})} = \frac{2e^{ix}}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{e^{ix} - z_1} - \frac{1}{e^{ix} - z_2} \right) \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} \frac{1}{1 - e^{-ix} z_1} + \frac{2e^{ix} z_1}{z_1 - z_2} \frac{1}{1 - e^{ix} z_1} \end{aligned}$$

avec $|e^{\pm ix} z_1| = |z_1| < 1$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{z_1 - z_2} \sum_{n=0}^{\infty} z_1^n e^{-inx} + \frac{2e^{ix} z_1}{z_1 - z_2} \sum_{n=0}^{\infty} z_1^n e^{inx} \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_1^n e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} z_1^n e^{inx} \right) \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} z_1^n (e^{inx} + e^{-inx}) \right) = \frac{2}{z_1 - z_2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z_1^n \cos(nx) \right) \end{aligned}$$

4. Comme les coefficients de Fourier de f sont uniquement déterminés, on en déduit que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ (f est paire) et :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\lambda + \cos(x)} dx = \frac{4}{z_1 - z_2} z_1^n = \frac{4z_1}{z_1^2 - 1} z_1^n$$

pour tout $n \geq 0$. Ce qui donne la valeur des intégrales :

$$\forall n \geq 0, \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\lambda + \cos(x)} dx = \frac{2\pi}{z_1 - z_2} z_1^n$$

5. Pour $\lambda = 2$, les racines de $P(z) = z^2 + 4z + 1 = 0$ sont $z_1 = \sqrt{3} - 2$, $z_2 = -\sqrt{3} - 2$ et :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{2 + \cos(x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} (2 - \sqrt{3})^n (-1)^n$$

Pour $\lambda = \operatorname{ch}(a) > 1$, on a $P(z) = z^2 + 2 \operatorname{ch}(a)z + 1 = (z + e^a)(z + e^{-a})$, donc $z_1 = -e^{-a}$ et :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\operatorname{ch}(a) + \cos(x)} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sh}(a)} (-1)^n e^{-na}$$

Exercice 3.8. Développements en série de Fourier

1. En utilisant la fonction 2π -périodique f qui vaut $\pi^2 - x^2$ sur $[0, \pi]$, calculer les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

2. À tout réel $a \in]0, \pi[$ on associe la fonction f_a , 2π -périodique et impaire telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], f_a(x) = \begin{cases} x(\pi - a) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ a(\pi - x) & \text{si } a \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(a) Étudier la série de Fourier de f_a .

(b) En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx) \sin(na)}{n^2} = \begin{cases} \frac{x(\pi-a)}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \frac{a(\pi-x)}{2} & \text{si } a \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{x(\pi-x)}{2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - x(\pi-x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x(\pi-x)}{2}$$

pour x, a dans $]0, \pi[$.

(c) En utilisant la fonction 2π -périodique, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi-1}{2}$$

Solution.

1. On a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque f est paire et :

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - t^2) dt = \frac{4}{3} \pi^2$$

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - t^2) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[(\pi^2 - t^2) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi t \sin(nt) dt \right\} \\ &= \frac{4}{\pi n} \left\{ \left[-t \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nt) dt \right\} = 4 \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$. Avec $|a_n(f)| = \frac{4}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que la série $\sum a_n(f)$ est absolument convergente et la série de Fourier de f converge normalement vers f . On a donc, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) = \frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \pi^2 - x^2 = \frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx)$$

Les évaluations en $x = \pi$ et $x = 0$ respectivement nous donnent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

La somme de ces deux séries nous donne, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Enfin le théorème de Parseval nous donne :

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - t^2)^2 dt = \frac{16}{15} \pi^4$$

$$\text{soit, } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \left(\frac{16}{15} \pi^4 - \frac{8}{9} \pi^4 \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

2.

- (a) La fonction f_a étant 2π -périodique continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est développable en série de Fourier, la convergence étant uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ces coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par $a_n = 0$ puisque la fonction f est impaire et pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left((\pi - a) \int_0^a t \sin(nt) dt + a \int_a^\pi (\pi - t) \sin(nt) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left((\pi - a) \left(\left[-t \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^a + \frac{1}{n} \int_0^a \cos(nt) dt \right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \left(a \left(\left[-(\pi - t) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_a^\pi - \frac{1}{n} \int_a^\pi \cos(nt) dt \right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left((\pi - a) \left(-a \frac{\cos(na)}{n} + \frac{1}{n^2} \sin(na) \right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \left(a \left((\pi - a) \frac{\cos(na)}{n} + \frac{1}{n^2} \sin(na) \right) \right) = \frac{2}{n^2} \sin(na) \end{aligned}$$

- (b) Ce qui donne, pour tout réel $x \in]0, \pi[$:

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx) \sin(na)}{n^2} = f_a(x) = \begin{cases} x(\pi - a) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ a(\pi - x) & \text{si } a \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(pour $x = 0$ ou $x = \pi$ tout est nul) et $x = a \in]0, \pi[$ donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{x(\pi - x)}{2}$$

En écrivant que $\cos(2nx) = 1 - 2\sin^2(nx)$, on en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - x(\pi - x)$$

Prenant $x = \frac{\pi}{2}$, on retrouve, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}$. On a aussi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x(\pi-x)}{2}$$

- (c) La fonction f étant de classe C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet nous dit que sa série de Fourier converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) \cos(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u \cos(n(\pi - u)) du \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u \cos(nu) du = 0 \end{aligned}$$

(par parité) et :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) \sin(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u \sin(n(\pi - u)) du \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u \sin(nu) du = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \int_0^{\pi} u \sin(nu) du \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \left(\left[-u \frac{\cos(nu)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nu)}{n} du \right) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$, ce qui donne pour

$$x = 1, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}.$$

Exercice 3.9. Série de Fourier et équation différentielle

En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction $|\sin|$, donner une solution particulière π -périodique de l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = |\sin(x)|$ et en déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

Solution. La fonction $x \mapsto |\sin(x)|$ étant π -périodique continue et de classe C^1 par morceaux, est développable en série de Fourier, la convergence étant uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \cos(2nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin((1+2n)t) + \sin((1-2n)t)) dt = \frac{-4}{\pi(4n^2 - 1)} \end{aligned}$$

et $b_n = 0$ puisque la fonction f est paire. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$$

On cherche tout d'abord une solution particulière π -périodique (comme le second membre). Si une telle solution existe elle est alors de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{C}^3$ par morceaux, elle est donc développable en série de Fourier sous la forme :

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx))$$

la convergence de cette série et des séries dérivées d'ordre 1 et 2 étant uniformes sur $\mathbb{R}$ ($\sum_{n=0}^{+\infty} |n^k a_n| < +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |n^k b_n| < +\infty$ pour $k = 0, 1, 2$). On peut donc

dériver terme à terme et on a $y''(x) = -4 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx))$, de sorte que l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n (1 - 4n^2) \cos(2nx) + b_n (1 - 4n^2) \sin(2nx)) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$$

De l'unicité du développement en série de Fourier, on déduit alors que :

$$a_0 = \frac{4}{\pi}, \forall n \geq 1, a_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}, b_n = 0$$

En définitive, $y(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2 - 1)^2}$ est une solution particulière et toute solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2 - 1)^2}$$

Exercice 3.10. Inégalité de Wirtinger

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction 2π -périodique telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

Montrer que $\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \leq \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt$ en précisant le cas d'égalité.

Solution. Comme f et f' sont dans $\mathcal{D}$, on dispose du théorème de Parseval qui nous dit que :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f))$$

$$(a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0) \text{ et :}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt = \frac{a_0^2(f')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f') + b_n^2(f')) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f') + b_n^2(f'))$$

$$(a_0(f') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) dt = \frac{f(2\pi) - f(0)}{\pi} = 0). \text{ Et comme :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \text{ et } b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$$

on a $a_n^2(f) + b_n^2(f) = \frac{a_n^2(f') + b_n^2(f')}{n^2} \leq a_n^2(f') + b_n^2(f')$, ce qui nous donne l'inégalité de Wirtinger. Avec :

$$\int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt - \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - 1) (a_n^2(f) + b_n^2(f))$$

on déduit que l'égalité est réalisée si, et seulement si, $a_n^2(f) + b_n^2(f) = 0$ pour tout $n \geq 2$, ce qui équivaut à $a_n(f) = b_n(f) = 0$ et comme f est développable en série de Fourier, cela revient à dire que, $f(x) = a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$.

Exercice 3.11. Équation de la chaleur

Le problème est de déterminer une fonction $u : [0, \pi] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}^+$, de classe C^1 sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}^{+,*}$, de classe C^2 sur $]0, \pi[\times \mathbb{R}^{+,*}$ et telle que :

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in]0, \pi[\times \mathbb{R}^{+,*}, \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}^+, u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ \forall x \in [0, \pi], u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

où f est une fonction continue et C^1 par morceaux sur $[0, \pi]$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. On note E_f l'ensemble des solutions de cette équation aux dérivées partielles.

1. Montrer que pour toute fonction $u \in E_f$, la fonction φ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \varphi(t) = \int_0^\pi u^2(x, t) dx$$

est continue sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$. En déduire qu'il existe au plus une fonction dans E_f .

2. On prolonge la fonction f en une fonction qu'on note encore $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique et impaire. Ce prolongement est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'unique élément de E_f peut être défini

par :

$$\forall (x, t) \in]0, \pi[\times \mathbb{R}^{+,*}, u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

où $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des coefficients de Fourier de f .

Solution.

1. Si $u \in E_f$, la fonction u^2 est alors continue sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}^+$ et la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (intégration sur un segment d'une fonction continue des deux variables). Comme u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}^{+,*}$, il en est de même de u^2 et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*}, \varphi'(t) = 2 \int_0^\pi u(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = 2 \int_0^\pi u(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx$$

la fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ étant continue sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}^{+,*}$ (elle l'est sur $]0, \pi[\times \mathbb{R}^{+,*}$ et égale sur ce domaine à $\frac{\partial u}{\partial t}$ qui est continue sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}^{+,*}$). Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx &= \left[u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \\ &= - \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \end{aligned}$$

puisque $u(0, 0) = f(0) = u(\pi, 0) = f(\pi) = 0$, ce qui nous donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*}, \varphi'(t) = -2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \leq 0$$

La fonction φ est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

Si u_1, u_2 sont deux fonctions dans E_f , la fonction $u = u_2 - u_1$ est également dans E_f , donc la fonction φ associée est continue sur $\mathbb{R}^+$, décroissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$, à valeurs positives avec $\varphi(0) = \int_0^\pi u^2(0, t) dx = 0$, donc $\varphi = 0$ et $u = 0$ par continuité, soit $u_1 = u_2$. On a donc, en cas d'existence, l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur.

2. f étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série $\sum b_n(f)$ est absolument convergente (ce qui résulte de $|b_n(f)| = \left| \frac{a_n(f')}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(|a_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2} \right)$ et de l'inégalité de Bessel) et la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$. On cherche une solution de l'équation de la chaleur sous la forme $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n(t) \sin(nx)$. En travaillant

formellement, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta'_n(t) \sin(nx), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \beta_n(t) \sin(nx)$$

et l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$ équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}^{+,*}, \beta'_n(t) = n^2 \beta_n(t)$$

ce qui donne $\beta_n(t) = \lambda_n e^{-n^2 t}$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$, la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$ donnant $\lambda_n = b_n(f)$. Il reste à vérifier que tout cela est valable.

Comme $|b_n(f) e^{-n^2 t} \sin(nx)| \leq |b_n(f)|$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ avec $\sum |b_n(f)| < +\infty$, la série $\sum b_n(f) e^{-n^2 t} \sin(nx)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et sa somme y définit une fonction continue.

Pour tout couple d'entiers positifs (p, q) , on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} (b_n(f) e^{-n^2 t} \sin(nx)) \right| &= \left| n^p (-n^2)^q b_n(f) e^{-n^2 t} \sin\left(nx + p \frac{\pi}{2}\right) \right| \\ &\leq n^{p+2q} |b_n(f)| e^{-n^2 a} \end{aligned}$$

pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [a, +\infty[$, où $a > 0$ avec $\sum n^{p+2q} |b_n(f)| e^{-n^2 a} < +\infty$ puisque $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. Donc les séries $\sum \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} (b_n(f) e^{-n^2 t} \sin(nx))$ sont toutes normalement convergentes sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$. On en déduit que la fonction u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}$ et que les dérivations sous le signe somme sont justifiées. La fonction u , restreinte à $[0, \pi] \times \mathbb{R}^+$, est donc l'unique élément de E_f . En écrivant que :

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(nu) du \text{ et } a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(nu) du = 0$$

on a, pour $n \geq 1$:

$$b_n(f) \sin(nx) = a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(n(x-u)) dt$$

et pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(n(x-u)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t} \cos(n(x-u)) \right) f(u) dt \end{aligned}$$

(pour $t > 0$ la série en u , $\sum e^{-n^2 t} f(u) \cos(n(x-u))$ est normalement convergente).

Problème 3.1. Formule sommatoire de Poisson. Fonction $\mathcal{P}$ de Weierstrass

– I – Formule sommatoire de Poisson

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $|x| \rightarrow +\infty$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx$.

1. Établir que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$, puis que la fonction $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x , on pose $u_0(x) = f(x)$ et $u_n(x) = f(x + 2n\pi) + f(x - 2n\pi)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une fonction g en posant :

$$g(x) = f(x) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n (f(x + 2k\pi) + f(x - 2k\pi))$$

lorsque cette limite existe, ce que l'on note $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2n\pi)$.

- (a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique.
 - (b) Montrer que les séries de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n$ convergent normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$, puis en déduire que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. À l'aide de ce qui précède, établir la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

4. On fixe $t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ et on définit une fonction h_t sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : pour $x \in [-\pi, \pi[$, $h_t(x) = e^{tx}$ et on étend à $\mathbb{R}$ en une fonction 2π -périodique.
 - (a) Préciser le domaine de convergence de la série de Fourier de h_t .
 - (b) En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^2}{t^2 + n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} - 1 \right)$$

– II – Théorème de Fubini pour les suites doubles sommables

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes est sommable si, et seulement si, il existe un réel positif M vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=-n}^n |u_k| \leq M$$

Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ une suite double de nombres complexes. On dit que cette suite est sommable si, et seulement si, il existe un réel positif M vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{-n \leq k, \ell \leq n} |u_{k,\ell}| \leq M$$

1.

(a) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ une suite sommable, on pose $S_n = \sum_{k=-n}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ la limite de cette suite

(b) Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ une suite double sommable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{-n \leq k, \ell \leq n} u_{k,\ell}$. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans un tel cas, on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,\ell}$.

2. On considère $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ une suite double de nombres réels positifs telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite $(u_{k,\ell})_{\ell \in \mathbb{Z}}$ soit sommable et on note alors $\alpha_k = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell}$ la somme de cette série. On suppose de plus que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable. Montrer que la suite double $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable et que :

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$$

3. Réciproquement soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ une suite double sommable de nombres réels positifs. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ la suite $(u_{k,\ell})_{\ell \in \mathbb{Z}}$ est sommable. On note α_k sa somme. Établir la sommabilité de la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et l'égalité

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k.$$

4. Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ une suite double de nombres complexes. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite double $(|u_{k,\ell}|)_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable de somme α_k et que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est aussi sommable. Dédurre de ce qui précède que :

- la suite double $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable ;
- pour tout ℓ , la suite $(|u_{k,\ell}|)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable et si β_ℓ en est la somme, alors la suite $(\beta_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ est sommable ;
- de plus :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right) = \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,\ell}$$

- III -

Pour x réel et, lorsque la série converge, on note $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \frac{\text{ch}(nx)}{\text{sh}(n\pi)}$.

1. Montrer que φ est définie et de classe C^∞ sur $] -\pi, \pi[$.
2. Établir que pour $n \geq 1$, $\frac{1}{\text{sh}(n\pi)} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)n\pi}$ et en déduire que :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \left(e^{nx-(2k+1)n\pi} + e^{-nx-(2k+1)n\pi} \right) \right)$$

3. Démontrer que :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \text{ch}(x - (2k+1)\pi)}$$

4. En déduire que φ se prolonge en une fonction paire, 2π -périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer une fonction à valeurs réelles ψ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(n) e^{inx} \text{ et } \psi(\pi) = \frac{1}{4}$$

- IV -

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{\text{ch}^2(t)} dt$.

1. Montrer que la fonction γ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Avec les notations de la partie précédente, relier simplement $\hat{\psi}$ et γ .
3. Établir la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \gamma(x) = 1 - 4x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{1 + e^{2t}} dt$$

4. En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \gamma(x) = 1 + 2x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$$

5. Déterminer une expression de la fonction γ à l'aide des fonctions usuelles.
6. Établir que :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\text{sh}(n\pi)} \text{ch}(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\text{sh}(n\pi)} \cos(nx) = 0$$

Que vaut $\varphi(0)$?

- V - Fonction $\mathcal{P}$ de Weierstrass

1. Établir pour $t \in \mathbb{C} \setminus i\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$ la sommabilité de $\left(\frac{1}{(t + i(\frac{1}{2} + n))^2}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$.
- 2.

(a) À l'aide de la question I.4b établir pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$, l'égalité :

$$\frac{\operatorname{ch}(\pi t)}{\operatorname{sh}(\pi t)} = \frac{1}{\pi t} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{t - in} + \frac{1}{t + in} \right)$$

(b) En déduire que, pour $t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$, on a : $\frac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2(\pi t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t + in)^2}$.

(c) En déduire l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{C} \setminus i\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right), \quad \frac{\pi^2}{\operatorname{ch}^2(\pi t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{(t + i(\frac{1}{2} + n))^2}$$

Définissons enfin la fonction $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}$ par $\mathcal{P}(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$ où φ est la fonction définie à la partie III et prolongée sur $\mathbb{R}$ à la question III.4.

3. Établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}(x) = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2} - (k + \frac{1}{2})\pi\right)} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left((k + \frac{1}{2})\pi\right)} \right)$$

4. Établir, pour tout réel x , la sommabilité de la famille :

$$\left(\frac{1}{(x - (2k+1)\pi - (2\ell+1)i\pi)^2} - \frac{1}{((2k+1)\pi + (2\ell+1)i\pi)^2} \right)_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$$

5. En déduire que, pour tout réel x , on a :

$$\mathcal{P}(x) = - \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{(x - (2k+1)\pi - (2\ell+1)i\pi)^2} - \frac{1}{((2k+1)\pi + (2\ell+1)i\pi)^2} \right)$$

6. On note $\Gamma = (2\mathbb{Z} + 1)\pi + (2\mathbb{Z} + 1)i\pi$. Établir, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, la sommabilité de la famille :

$$\left(\frac{1}{(z - (2k+1)\pi - (2\ell+1)i\pi)^2} - \frac{1}{((2k+1)\pi + (2\ell+1)i\pi)^2} \right)_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$$

7. D'après ce qui précède la fonction $\mathcal{P}$ admet un prolongement sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ donné par :

$$\mathcal{P}(z) = - \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{(z - (2k+1)\pi - (2\ell+1)i\pi)^2} - \frac{1}{((2k+1)\pi + (2\ell+1)i\pi)^2} \right)$$

Pour la suite, on désigne aussi par $\mathcal{P}$ cette fonction prolongée.

- (a) Vérifier que la fonction $\mathcal{P}$ est 2π -périodique, $2i\pi$ -périodique et paire.
- (b) Établir que $\mathcal{P}$ est développable en série entière de la variable complexe au voisinage de 0, le rayon de convergence de la série entière étant $\sqrt{2}\pi$.
- (c) Établir que $\mathcal{P}$ est développable en série entière au voisinage de tout point $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Solution.

– I – Formule sommatoire de Poisson

1. L'hypothèse $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ nous dit qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ pour tout réel x tel que $|x| \geq 1$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx < +\infty$ (puisque $\int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{x^2} < +\infty$) et en conséquence $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty$, ce qui signifie que f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme $|f(x)e^{-ixy}| = |f(x)|$ pour tout réel y , chaque fonction $x \mapsto f(x)e^{-ixy}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $|f(x \pm 2n\pi)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc chaque série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x \pm 2n\pi)$ est absolument convergente, ce qui nous assure de la définition sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$x \mapsto g(x) = f(x) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (f(x + 2n\pi) + f(x - 2n\pi))$$

Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} g(x + 2\pi) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} f(x + 2(n+1)\pi) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(x - 2(n-1)\pi) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^*} f(x + 2m\pi) + \sum_{p \in \mathbb{N}} f(x - 2p\pi) = g(x) \end{aligned}$$

ce qui signifie que la fonction g est 2π -périodique.

- (b) Comme f est continue et $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq \frac{M}{t^2}$ pour tout réel t tel que $|t| \geq 1$. Si K est un compact de $\mathbb{R}$, il existe alors un entier $n_0 \geq 1$ tel que $|x \pm 2n\pi| \geq 2n\pi - |x| \geq 1$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in K$. En effet, il existe un réel $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$ et pour tout $x \in K$, on a $|x \pm 2n\pi| \geq |2n\pi - |x|| \geq 2n\pi - |x| \geq 2n\pi - R \geq 1$ dès que $n \geq n_0 = \left\lceil \frac{R+1}{2\pi} \right\rceil + 1$, où $\lceil \cdot \rceil$ est la partie entière. Il en résulte que $|f(x \pm 2n\pi)| \leq \frac{M}{|x \pm 2n\pi|^2} \leq \frac{M}{(2n\pi - R)^2}$ pour tout $n \geq n_0$ et tout

$x \in K$, ce qui nous assure de la convergence normale de chaque série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x \pm 2n\pi)$ sur K et en conséquence de la convergence normale de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ sur K . La fonction f' étant également continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f'(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{, on a aussi la convergence normale de } \sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n \text{ sur } K.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $R > 0$ les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n$ sont uniformément convergentes sur

segment $[-R, R]$, donc la fonction $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-R, R]$

de dérivée $g' = \sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n$. Comme $R > 0$ est quelconque, on en déduit que la

fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g' = \sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n$.

3. Les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt$$

De la convergence uniforme de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ sur $[0, 2\pi]$, on déduit que pour tout entier relatif n , on a :

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(g) &= \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} u_k(t) e^{-int} dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} f(t + 2k\pi) e^{-int} dt + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_0^{2\pi} f(t - 2k\pi) e^{-int} dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x) e^{-in(x-2k\pi)} dx + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{-2k\pi}^{-2(k-1)\pi} f(x) e^{-in(x+2k\pi)} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x) e^{-inx} dx + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{-2k\pi}^{-2(k-1)\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x) e^{-inx} dx &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{2(m+1)\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{-2k\pi}^{-2(k-1)\pi} f(x) e^{-inx} dx &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \int_{-2k\pi}^{-2(k-1)\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-2(m-1)\pi}^0 f(x) e^{-inx} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

ce qui nous donne $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La fonction g étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet nous dit que sa série de Fourier converge normalement vers g sur $\mathbb{R}$, ce qui se traduit par la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

Rappelons que la somme $\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ est par définition la limite de la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Pour tout nombre complexe $t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ la fonction h_t est 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(a) Ses coefficients de Fourier exponentiels sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(h_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_t(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(t-in)x} dx$$

avec :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{(t-in)x} dx = \left[\frac{e^{(t-in)x}}{t-in} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = (-1)^n \frac{e^{t\pi} - e^{-t\pi}}{t-in} = 2(-1)^n \frac{\text{sh}(\pi t)}{t-in}$$

soit $c_n(h_t) = \frac{\text{sh}(\pi t)}{\pi} \frac{(-1)^n}{t-in}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Chaque fonction h_t étant de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet nous dit que sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de h_t , soit en tenant compte de la 2π -périodicité :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \frac{\text{sh}(\pi t)}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t-in} e^{inx} = h_t(x) = e^{tx}$$

et pour $x = -\pi$:

$$\frac{\text{sh}(\pi t)}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-in} = \frac{e^{t\pi} + e^{-t\pi}}{2} = \text{ch}(\pi t)$$

avec :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - in} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{t - ik} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \frac{t + ik}{t^2 + k^2}$$

où $\sum_{k=-n}^n \frac{1}{t^2 + k^2} = \frac{1}{t^2} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{t^2 + k^2}$ et $\sum_{k=-n}^n \frac{k}{t^2 + k^2} = 0$, ce qui nous donne :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - in} = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + n^2} = \pi \frac{\operatorname{ch}(\pi t)}{\operatorname{sh}(\pi t)}$$

(pour $t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$, on a $\operatorname{sh}(\pi t) \neq 0$), ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^2}{t^2 + k^2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}(\pi t) \frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} - 1 \right)$$

(b) L'évaluation en $x = 0$ nous donne $\frac{\operatorname{sh}(\pi t)}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t - in} = 1$, soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n (-1)^k \frac{t + ik}{t^2 + k^2} = \frac{\pi}{\operatorname{sh}(\pi t)}$$

avec :

$$\sum_{k=-n}^n (-1)^k \frac{t + ik}{t^2 + k^2} = \frac{1}{t} + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{t}{t^2 + k^2}$$

donc :

$$\forall t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^2}{t^2 + n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} - 1 \right)$$

- II - Théorème de Fubini pour les suites doubles sommables

1.

(a) La suite $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S'_n = \sum_{k=-n}^n |u_k|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ qui est croissante ($S'_{n+1} - S'_n = |u_{n+1}| + |u_{-(n+1)}| \geq 0$) et majorée ($(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable) est convergente vers une limite $S' \in \mathbb{R}^+$. Pour $m > n \geq 0$, on a :

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{n+1 \leq |k| \leq m} u_k \right| \leq \sum_{n+1 \leq |k| \leq m} |u_k| = S'_m - S'_n \leq R'_n = S' - S'_n$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} R'_n = 0$. Il en résulte que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

- (b) La suite $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S'_n = \sum_{-n \leq k, \ell \leq n} |u_{k, \ell}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ qui est croissante et majorée est convergente vers une limite $S' \in \mathbb{R}^+$. Pour $m > n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= \left| \sum_{(k, \ell) \in [-m, m]^2 \setminus [-n, n]^2} u_{k, \ell} \right| \\ &\leq \sum_{(k, \ell) \in [-m, m]^2 \setminus [-n, n]^2} |u_{k, \ell}| = S'_m - S'_n \leq R'_n = S' - S'_n \end{aligned}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} R'_n = 0$. Il en résulte que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

2. Soit $(u_{k, \ell})_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2}$ une suite double de nombres réels positifs telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la série $\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k, \ell}$ soit convergente de somme α_k ainsi que la série à termes positifs $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k$ de somme α . Pour tout entier naturel n , on a :

$$S_n = \sum_{-n \leq k, \ell \leq n} u_{k, \ell} = \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{\ell=-n}^n u_{k, \ell} \right) \leq \sum_{k=-n}^n \alpha_k \leq \alpha$$

donc la suite double $(u_{k, \ell})_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable de somme :

$$S = \sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2} u_{k, \ell} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \alpha$$

D'autre part, pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n \alpha_k &= \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k, \ell} \right) = \sum_{k=-n}^n \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{\ell=-m}^m u_{k, \ell} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-m}^m u_{k, \ell} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{\ell=-m}^m \sum_{k=-n}^n u_{k, \ell} \end{aligned}$$

(somme finie de suites convergentes). Pour $m \geq n$ (n est fixé), on a :

$$\sum_{\ell=-m}^m \left(\sum_{k=-n}^n u_{k, \ell} \right) \leq \sum_{\ell=-m}^m \left(\sum_{k=-m}^m u_{k, \ell} \right) = S_m$$

donc $\sum_{k=-n}^n \alpha_k \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = S$ et $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=-n}^n \alpha_k \right) \leq S$, ce qui nous donne en définitive $S = \alpha$, soit :

$$\sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2} u_{k, \ell} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k, \ell} \right)$$

3. Réciproquement soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ une suite double sommable de nombres réels positifs de somme S . Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier naturel $n \geq |k|$, on a :

$$\sum_{\ell=-n}^n u_{k,\ell} \leq \sum_{-n \leq j, \ell \leq n} u_{j,\ell} \leq S = \sum_{(j,\ell) \in \mathbb{Z}^2} u_{j,\ell}$$

donc la suite à termes positifs $\left(\sum_{\ell=-n}^n u_{k,\ell} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et la suite $(u_{k,\ell})_{\ell \in \mathbb{Z}}$

est sommable de somme $\alpha_k = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell}$.

Avec $\sum_{k=-n}^n \alpha_k = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{\ell=-m}^m \left(\sum_{k=-n}^n u_{k,\ell} \right)$ et :

$$\forall m \geq n, \sum_{\ell=-m}^m \left(\sum_{k=-n}^n u_{k,\ell} \right) \leq \sum_{\ell=-m}^m \left(\sum_{k=-m}^m u_{k,\ell} \right) = S_m$$

on déduit comme à la question précédente que $\sum_{k=-n}^n \alpha_k \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = S$, donc

la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable et $\alpha = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \leq S$. À la question précédente,

on a vu que l'on a aussi l'autre inégalité $S \leq \alpha$, d'où l'égalité $S = \alpha$. Comme k et ℓ jouent des rôles symétriques, on a aussi $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} < +\infty$ pour tout ℓ et :

$$\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right) = \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,\ell}$$

4. Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ une suite double de complexes telle que $\alpha_k = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| < +\infty$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k < +\infty$. Dans ces conditions, la suite

double de réels positifs $(|u_{k,\ell}|)_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable de somme :

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} |u_{k,\ell}| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| \right) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| \right)$$

ce qui nous dit que $\beta_\ell = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| < +\infty$ pour tout ℓ et $\beta = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \beta_\ell < +\infty$.

Avec les inégalités :

$$\sum_{-n \leq k, \ell \leq n} |u_{k,\ell}| = \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{\ell=-n}^n |u_{k,\ell}| \right) \leq \sum_{k=-n}^n \alpha_k \leq \alpha < +\infty$$

on déduit que la suite double $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable.

Avec les inégalités $\sum_{\ell=-n}^n |u_{k,\ell}| \leq \alpha_k < +\infty$, on déduit que chaque suite $(u_{k,\ell})_{\ell \in \mathbb{Z}}$ est sommable et avec :

$$\sum_{k=-n}^n \left| \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right| \leq \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| \right) \leq \alpha$$

on déduit que la suite $\left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

Avec :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{-n \leq k, \ell \leq n} u_{k,\ell} - \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right) \right| &= \left| \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{|\ell| \geq n+1} u_{k,\ell} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{|\ell| \geq n+1} |u_{k,\ell}| \right) \\ &\leq \varepsilon_n = \sum_{-n \leq k, \ell \leq n} |u_{k,\ell}| - \sum_{k=-n}^n \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| \right) \end{aligned}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ (puisque $\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} |u_{k,\ell}| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |u_{k,\ell}| \right)$), on déduit que :

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$$

Comme k et ℓ jouent des rôles symétriques chaque suite $(u_{k,\ell})_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable,

la suite $\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ est sommable et on a l'égalité :

$$\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$$

– III –

1.

(a) On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x , $v_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{n \operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}(n\pi)}$.

Pour $x \geq 0$, on a $|v_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} ne^{n(x-\pi)}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n(x)| = +\infty$ pour

$x \geq \pi$ et la série $\sum v_n(x)$ diverge. Pour $0 \leq x < \pi$, on a $ne^{n(x-\pi)} =$

$\underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right)$, donc la série $\sum v_n(x)$ converge absolument. Les fonctions

v_n étant paires, on en déduit que le domaine de définition de la fonction φ est $]-\pi, \pi[$.

- (b) Les fonctions v_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$ et pour tout entier $p \geq 0$, tout réel $R \in]0, \pi[$, tout $x \in [-R, R]$, on a :

$$\begin{aligned} \left| v_n^{(p)}(x) \right| &= \begin{cases} n^{p+1} \frac{\text{sh}(n|x|)}{\text{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r + 1 \\ n^{p+1} \frac{\text{ch}(n|x|)}{\text{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r \end{cases} \\ &\leq \alpha_n = \begin{cases} n^{p+1} \frac{\text{sh}(nR)}{\text{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r + 1 \\ n^{p+1} \frac{\text{ch}(nR)}{\text{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r \end{cases} \end{aligned}$$

avec $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{p+1} e^{n(R-\pi)} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right)$, donc toutes les série $\sum v_n^{(p)}$

sont uniformément convergentes sur $[-R, R]$ et la somme $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-R, R]$ de dérivées successives $\sum v_n^{(p)}$. Comme R est quelconque dans $]0, \pi[$, cela revient à dire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$ de dérivées :

$$\varphi^{(p)}(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^{p+1} \frac{\text{sh}(nx)}{\text{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r + 1 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^{p+1} \frac{\text{ch}(nx)}{\text{sh}(n\pi)} & \text{si } p = 2r \end{cases}$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 < e^{-2n\pi} < 1$ et :

$$\frac{1}{\text{sh}(n\pi)} = \frac{2e^{-n\pi}}{1 - e^{-2n\pi}} = 2e^{-n\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kn\pi} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)n\pi}$$

Il en résulte que pour tout réel $x \in]-\pi, \pi[$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \frac{\text{ch}(nx)}{\text{sh}(n\pi)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{\text{sh}(n\pi)} (e^{nx} + e^{-nx}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n (e^{nx} + e^{-nx}) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)n\pi} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} n (e^{nx - (2k+1)n\pi} + e^{-nx - (2k+1)n\pi}) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(x) \right) \end{aligned}$$

en notant $u_{n,k}(x) = (-1)^{n-1} n (e^{nx-(2k+1)n\pi} + e^{-nx-(2k+1)n\pi})$, pour (n, k) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et x réel.

Vérifions que la suite $(u_{n,k}(x))_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ est sommable. Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < e^{-2n\pi} < 1$ et :

$$\begin{aligned} \alpha_n(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}(x)| = ne^{n(x-\pi)} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kn\pi} + ne^{-n(x+\pi)} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kn\pi} \\ &= n(e^{n(x-\pi)} + e^{-n(x+\pi)}) \frac{1}{1 - e^{-2n\pi}} < +\infty \end{aligned}$$

puis, pour $x \in]-\pi, \pi[$, on a $\alpha_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(e^{n(x-\pi)} + e^{-n(x+\pi)})$ avec $0 < e^{x-\pi}, e^{-(x+\pi)} < 1$, ce qui nous donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(e^{n(x-\pi)} + e^{-n(x+\pi)}) = \frac{e^{x-\pi}}{(1 - e^{x-\pi})^2} + \frac{e^{-(x+\pi)}}{(1 - e^{-(x+\pi)})^2} < +\infty$$

(pour $0 < q < 1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = q \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = q \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \right)' = \frac{q}{(1-q)^2}$). On déduit alors de II.4 que, pour tout réel $x \in]-\pi, \pi[$, la suite $(u_{n,k}(x))_{(n,k) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}}$ est sommable et le théorème de Fubini nous dit que :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(x) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k}(x) \right)$$

$$\text{soit } \varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n (e^{nx-(2k+1)n\pi} + e^{-nx-(2k+1)n\pi}) \right).$$

3. En utilisant l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} nq^n = q \sum_{n=1}^{+\infty} n(-q)^{n-1} = -q \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-q)^n \right)' = \frac{q}{(1+q)^2}$$

pour $q_1 = e^{x-(2k+1)\pi} = e^{\alpha_1}$ et $q_2 = e^{-x-(2k+1)\pi} = e^{\alpha_2}$ qui sont dans $]0, 1[$ pour $k \geq 0$ et $x \in]-\pi, \pi[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n (e^{nx-(2k+1)n\pi} + e^{-nx-(2k+1)n\pi}) = \frac{q_1}{(1+q_1)^2} + \frac{q_2}{(1+q_2)^2}$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{(1+q_1)^2} &= \frac{e^{\alpha_1}}{(1+e^{\alpha_1})^2} = \frac{1}{(e^{-\frac{\alpha_1}{2}} + e^{\frac{\alpha_1}{2}})^2} \\ &= \frac{1}{4 \operatorname{ch}^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} = \frac{1}{2(1 + \operatorname{ch}(\alpha_1))} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x - (2k+1)\pi)} \end{aligned}$$

(en utilisant $\operatorname{ch}(2a) = 2\operatorname{ch}^2(a) - 1$) et :

$$\begin{aligned}\frac{q_2}{(1+q_2)^2} &= \frac{1}{2(1+\operatorname{ch}(\alpha_2))} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\operatorname{ch}(-x-(2k+1)\pi)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x+(2k+1)\pi)}\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}2\varphi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2k+1)\pi)} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x+(2k+1)\pi)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2k+1)\pi)} + \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x+(-2(j+1)+1)\pi)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2k+1)\pi)} + \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2j+1)\pi)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2k+1)\pi)}\end{aligned}$$

(changement d'indice $k = -(j+1)$ dans la deuxième somme).

4. En notant, pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{1}{1+\operatorname{ch}(\pi-t)} = \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi-t}{2}\right)} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{th}^2\left(\frac{\pi-t}{2}\right)\right)$$

on a $f(x+2n\pi) = \frac{1}{1+\operatorname{ch}(\pi-x+2n\pi)} = \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x-(2n+1)\pi)}$ (parité de ch), de sorte que :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi)$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(t) = \operatorname{th}\left(\frac{\pi-t}{2}\right) \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi-t}{2}\right)} = \operatorname{th}\left(\frac{\pi-t}{2}\right) f(t)$$

et $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} t^2 f'(t) = 0$, donc $f(t) = \underset{|t| \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $f'(t) = \underset{|t| \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On déduit alors de la question I.2 que la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi)$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout

réel x , on a :

$$\begin{aligned} g(-x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(-x - (2n+1)\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x + (2n+1)\pi)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x + (-2(j+1)+1)\pi)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x - (2j+1)\pi)} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

(changement d'indice $n = -(j+1)$), donc la fonction g est paire. Enfin, la question précédente nous dit que $\frac{1}{2}g$ est un prolongement de φ à $\mathbb{R}$ (puisque $\varphi(x) = \frac{1}{2}g(x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$). On notera encore φ ce prolongement.

5. On peut alors utiliser la formule sommatoire de Poisson pour écrire que, pour tout réel x , on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(n) e^{inx}$$

$$\text{où } \psi(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\pi - x)} = \frac{1}{4 \operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi - x}{2}\right)}. \text{ Pour } x = \pi, \text{ on a bien } \psi(\pi) = \frac{1}{4}.$$

- IV -

1. La fonction $(x, t) \mapsto f(x, t) = \frac{\cos(2tx)}{\operatorname{ch}^2(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x, t)| \leq \varphi(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}$, la fonction φ étant intégrable sur $\mathbb{R}$ (puisque $\operatorname{ch}(t) \geq 1$ pour tout réel t et $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} = \frac{1}{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} \underset{|t| \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{t^2}\right)$), il en résulte que la fonction $\gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{\operatorname{ch}^2(t)} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction ψ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \frac{1}{4 \operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi - x}{2}\right)}$. Elle est intégrable et sa transformée de Fourier est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(y) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi - x}{2}\right)} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i(\pi - 2t)y}}{\operatorname{ch}^2(t)} dt \\ &= \frac{e^{-i\pi y}}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2tyi}}{\operatorname{ch}^2(t)} dt = e^{-i\pi y} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ty)}{\operatorname{ch}^2(t)} dt = e^{-i\pi y} \gamma(y) \end{aligned}$$

(la fonction $\cos$ est paire et la fonction $\sin$ est impaire).

3. Pour tout réel t , on a $(\operatorname{th}(t) - 1)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}$ et en intégrant par parties, on obtient, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{\operatorname{ch}^2(t)} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left([\cos(2tx)(\operatorname{th}(t) - 1)]_{t=0}^{t=T} + 2x \int_0^T \sin(2tx)(\operatorname{th}(t) - 1) dt \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\cos(2Tx)(\operatorname{th}(T) - 1) + 1 + 2x \int_0^T \sin(2tx)(\operatorname{th}(t) - 1) dt \right)\end{aligned}$$

avec $\operatorname{th}(t) - 1 = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} - 1 = -\frac{2e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = -\frac{2}{e^{2t} + 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $|\cos(2Tx)(\operatorname{th}(T) - 1)| \leq |\operatorname{th}(T) - 1| = \frac{2}{e^{2T} + 1} \underset{T \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= 1 + 2x \int_0^{+\infty} \sin(2tx)(\operatorname{th}(t) - 1) dt = 1 - 4x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{1 + e^{2t}} dt \\ &= 1 - 4x \int_0^{+\infty} e^{-2t} \frac{\sin(2tx)}{1 + e^{-2t}} dt\end{aligned}$$

4. Pour tout entier $n \geq 1$ et réel $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + e^{-2t}} &= \frac{1 + (-1)^n e^{-2(n+1)t}}{1 + e^{-2t}} - \frac{(-1)^n e^{-2(n+1)t}}{1 + e^{-2t}} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-2kt} - \frac{(-1)^n e^{-2(n+1)t}}{1 + e^{-2t}}\end{aligned}$$

ce qui nous donne pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-2t} \frac{\sin(2tx)}{1 + e^{-2t}} dt &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-2(k+1)t} \sin(2tx) dt \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-2(n+2)t}}{1 + e^{-2t}} \sin(2tx) dt\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-2(k+1)t} \sin(2tx) dt &= \Im \left(\int_0^{+\infty} e^{-2(k+1-ix)t} dt \right) = \frac{1}{2} \Im \left(\frac{1}{k+1-ix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \Im \left(\frac{k+1+ix}{(k+1)^2 + x^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{x}{(k+1)^2 + x^2}\end{aligned}$$

pour $k \geq 0$ et :

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-2(n+2)t}}{1 + e^{-2t}} \sin(2tx) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-2(n+2)t} dt = \frac{1}{2(n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

Il en résulte que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} \frac{\sin(2tx)}{1+e^{-2t}} dt = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 + x^2} = -\frac{x}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$$

et $\gamma(x) = 1 + 2x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$. Ici, les théorèmes classiques d'intégration terme à terme n'aboutissent pas.

5. Pour $x = 0$, on a $\gamma(0) = 1$. En I.4b on a vu que :

$$\forall t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^2}{t^2 + n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} - 1 \right)$$

$$\text{donc, pour } x \neq 0, \gamma(x) = 1 + 2x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2} = \frac{\pi x}{\operatorname{sh}(\pi x)}.$$

6. La formule sommatoire de Poisson appliquée à la fonction ψ nous donne pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi(x + 2n\pi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(n) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-in\pi} \gamma(n) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \gamma(n) e^{inx} \end{aligned}$$

avec $\psi(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(\pi - x)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x - \pi)}$ et $\gamma(n) = \frac{n\pi}{\operatorname{sh}(n\pi)}$ (qui vaut 1 pour $n = 0$), soit :

$$\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x + (2n-1)\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\pi}{\operatorname{sh}(n\pi)} (-1)^n e^{inx}$$

En identifiant les parties réelles, cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x + (2n-1)\pi)} &= \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi}{\operatorname{sh}(n\pi)} (-1)^n \cos(nx) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\operatorname{sh}(n\pi)} (-1)^n \cos(nx) \end{aligned}$$

En III.3 on a montré que, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x - (2k+1)\pi)} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \frac{\operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}(n\pi)}$$

ce qui s'écrit aussi $\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x + (2n-1)\pi)} = \varphi(x)$ (changement d'indice $k = -1$), ce qui nous donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \frac{\operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}(n\pi)} = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\operatorname{sh}(n\pi)} \cos(nx)$$

ou encore :

$$\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\operatorname{sh}(n\pi)} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\operatorname{sh}(n\pi)} \operatorname{ch}(nx) = 0$$

pour $x \in]-\pi, \pi[$. Pour $x = 0$, on obtient :

$$\varphi(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{\operatorname{sh}(n\pi)} = \frac{1}{4\pi}$$

- V - Fonction $\mathcal{P}$ de Weierstrass

1. Pour tout nombre complexe $t = x + iy \in \mathbb{C} \setminus i\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on a $t + i\left(\frac{1}{2} + n\right) \neq 0$ et :

$$\left| \frac{1}{\left(t + i\left(\frac{1}{2} + n\right)\right)^2} \right| = \frac{4}{4x^2 + (2y + 1 + 2n)^2} \underset{|n| \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

donc la famille $\left(\frac{1}{\left(t + i\left(\frac{1}{2} + n\right)\right)^2} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

2.

- (a) En I.4 on a montré que pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - in} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{t - in} + \frac{1}{t + in} \right) = \pi \frac{\operatorname{ch}(\pi t)}{\operatorname{sh}(\pi t)}$$

soit $\frac{\operatorname{ch}(\pi t)}{\operatorname{sh}(\pi t)} = \frac{1}{\pi t} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{t - in} + \frac{1}{t + in} \right)$, ou encore :

$$\frac{\operatorname{ch}(\pi t)}{\operatorname{sh}(\pi t)} = \frac{1}{\pi t} + \frac{2t}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + n^2}$$

- (b) L'ensemble $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ étant ouvert, pour tout $t_0 \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que la boule fermée $B(t_0, \delta)$ de centre t_0 et de rayon δ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$. En notant $t = x + iy$ et, pour $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé, $u_n(x) = \frac{1}{x - i(y - n)}$, on a des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{aligned} |u'_n(x)| &= \frac{1}{|x - i(y - n)|^2} = \frac{1}{x^2 + (y - n)^2} \\ &\leq \frac{1}{|y - n|^2} \leq \frac{1}{(|n| - |y|)^2} \leq \frac{1}{(|n| - M)^2} \end{aligned}$$

où M est un majorant de $y = \Im(t)$ pour $t \in B(t_0, \delta)$ (on a $|y - y_0| \leq |t - t_0| \leq \delta$, donc $|y| \leq |y_0| + \delta$). Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{t - in} + \frac{1}{t + in} \right)$ est normalement convergente sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et on peut dériver terme à terme, ce qui nous donne :

$$-\pi \frac{1}{\operatorname{sh}^2(\pi t)} = -\frac{1}{\pi t^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(t - in)^2} + \frac{1}{(t + in)^2} \right)$$

pour $t \in B(t_0, \delta)$ soit :

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2(\pi t)} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(t - in)^2} + \frac{1}{(t + in)^2} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t + in)^2}$$

pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$.

- (c) Pour $t \in \mathbb{C} \setminus i\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$, on a $t + \frac{i}{2} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ et :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t + i(\frac{1}{2} + n))^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2(\pi t + i\frac{\pi}{2})}$$

avec $\operatorname{sh}\left(\pi t + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\pi t + i\frac{\pi}{2}} - e^{-\pi t - i\frac{\pi}{2}}}{2} = i \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{2} = i \operatorname{ch}(\pi t)$, ce qui

nous donne $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t + i(\frac{1}{2} + n))^2} = -\frac{\pi^2}{\operatorname{ch}^2(\pi t)}$.

3. En III.4 on a prolongé la fonction φ à $\mathbb{R}$ en posant, pour tout réel x :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x - (2n + 1)\pi)} = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= \varphi(x) - \varphi(0) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)} \right) \end{aligned}$$

4. C'est le résultat montré en V.6 pour $z = x$ réel.
 5. Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= \varphi(x) - \varphi(0) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)} \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)} &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{x}{2\pi} - \left(k + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \ell\right)\right)^2} \\ &= -4 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x - (2k+1)\pi + (2\ell+1)i\pi)^2} \end{aligned}$$

(questions V.3 et III.2c), ce qui nous donne :

$$\mathcal{P}(x) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} v_{k,\ell}(x) \right) = - \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} v_{k,\ell}(x)$$

puisque la famille $(v_{k,\ell}(x))_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable.

6. Pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, on note :

$$z_{k,\ell} = 2k + 1 + (2\ell + 1)i \in (2\mathbb{Z} + 1) + (2\mathbb{Z} + 1)i$$

et tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$:

$$u_{k,\ell}(z) = \frac{1}{(z - z_{k,\ell}\pi)^2} = \frac{1}{(z_{k,\ell}\pi - z)^2}$$

$$v_{k,\ell}(z) = u_{k,\ell}(z) - u_{k,\ell}(0) = \frac{z}{\pi^2} \frac{2\pi z_{k,\ell} - z}{(\pi z_{k,\ell} - z)^2 z_{k,\ell}^2}$$

Pour $|k|, |\ell|$ assez grands de sorte que $\pi|z_{k,\ell}| > 2|z| > 0$, on a :

$$\begin{aligned} |v_{k,\ell}(z)| &\leq \frac{|z|}{\pi^2} \frac{2\pi|z_{k,\ell}| + |z|}{|\pi z_{k,\ell} - z|^2 |z_{k,\ell}|^2} \leq \frac{|z|}{\pi^2} \frac{2\pi|z_{k,\ell}| + |z|}{(\pi|z_{k,\ell}| - |z|)^2 |z_{k,\ell}|^2} \\ &\leq |z| \frac{2\pi|z_{k,\ell}| + |z|}{(\pi|z_{k,\ell}| - |z|)^4} \leq 16|z| \frac{3\pi|z_{k,\ell}|}{(\pi|z_{k,\ell}|)^4} = \frac{\alpha|z|}{|z_{k,\ell}|^3} \end{aligned}$$

(puisque $|z| < \pi|z_{k,\ell}|$ et $\pi|z_{k,\ell}| - |z| > \frac{\pi|z_{k,\ell}|}{2}$) avec

$$\sum \frac{1}{|z_{k,\ell}|^3} \leq \sum \frac{1}{\left((2k+1)^2 + (2\ell+1)^2\right)^{\frac{3}{2}}} < +\infty$$

(la famille $\left(\frac{1}{(k^2 + \ell^2)^p}\right)_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable si, et seulement si, $p > 1$). Il en résulte que la famille $(v_{k,\ell}(z))_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable.

7.

(a) Pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$\begin{aligned} z_{k,\ell} &= 2k + 1 + (2\ell + 1)i = -(-2k - 1 + (-2\ell - 1)i) \\ &= -(2(-k - 1) + 1 + (2(-\ell - 1) + 1)i) \\ &= -z_{-(k+1), -(\ell+1)} \end{aligned}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on a $-z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et :

$$\begin{aligned} v_{k,\ell}(-z) &= \frac{-z}{\pi^2} \frac{2\pi z_{k,\ell} + z}{(\pi z_{k,\ell} + z)^2 z_{k,\ell}^2} \\ &= \frac{-z}{\pi^2} \frac{-2\pi z_{-(k+1), -(\ell+1)} + z}{(-\pi z_{-(k+1), -(\ell+1)} + z)^2 z_{-(k+1), -(\ell+1)}^2} \\ &= \frac{z}{\pi^2} \frac{2\pi z_{-(k+1), -(\ell+1)} - z}{(\pi z_{-(k+1), -(\ell+1)} - z)^2 z_{-(k+1), -(\ell+1)}^2} = v_{-(k+1), -(\ell+1)}(z) \end{aligned}$$

donc :

$$\mathcal{P}(-z) = - \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} v_{k,\ell}(-z) = - \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} v_{-(k+1), -(\ell+1)}(z) = \mathcal{P}(z)$$

puisque l'application $(k, \ell) \mapsto (-(k+1), -(\ell+1))$ est une permutation de $\mathbb{Z}^2$. La fonction $\mathcal{P}$ est donc paire.Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on a $z + 2\pi \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et pour $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} v_{k,\ell}(z + 2\pi) &= \frac{1}{(z + 2\pi - (2k + 1)\pi - (2\ell + 1)i\pi)^2} \\ &\quad - \frac{1}{((2k + 1)\pi + (2\ell + 1)i\pi)^2} \\ &= \frac{1}{(z - z_{k-1,\ell}\pi)^2} - \frac{1}{(z_{k,\ell}\pi)^2} \end{aligned}$$

donc $v_{k,\ell}(z + 2\pi) - v_{k,\ell}(z) = \frac{1}{(z - z_{k-1,\ell}\pi)^2} - \frac{1}{(z - z_{k,\ell}\pi)^2}$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{-n \leq k, \ell \leq n} (v_{k,\ell}(z + 2\pi) - v_{k,\ell}(z)) \\ &= \sum_{-n \leq k, \ell \leq n} \frac{1}{(z - z_{k-1,\ell}\pi)^2} - \sum_{-n \leq k, \ell \leq n} \frac{1}{(z - z_{k,\ell}\pi)^2} \\ &= \sum_{\substack{-(n+1) \leq k \leq n-1 \\ -n \leq \ell \leq n}} \frac{1}{(z - z_{k,\ell}\pi)^2} - \sum_{-n \leq k, \ell \leq n} \frac{1}{(z - z_{k,\ell}\pi)^2} \\ &= \sum_{-n \leq \ell \leq n} \left(\frac{1}{(z - z_{-(n+1),\ell}\pi)^2} - \frac{1}{(z - z_{n,\ell}\pi)^2} \right) \end{aligned}$$

avec, pour $z = x + iy$ et $k \in \{-(n+1), n\}$:

$$\begin{aligned} |z - z_{k,\ell}\pi|^2 &= ((2k+1)\pi - x)^2 + ((2\ell+1)\pi - y)^2 \\ &\geq ((2k+1)\pi - x)^2 \end{aligned}$$

donc $\left| \sum_{-n \leq \ell \leq n} \frac{1}{(z - z_{k,\ell}\pi)^2} \right| \leq \frac{2n+1}{((2k+1)\pi - x)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$ et en conséquence $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$, ce qui signifie que $\mathcal{P}(z + 2\pi) = \mathcal{P}(z)$. On vérifie de manière analogue que $\mathcal{P}(z + 2i\pi) = \mathcal{P}(z)$. Donc $\mathcal{P}$ est 2π -périodique et $2i\pi$ -périodique.

- (b) En notant encore $z_{k,\ell} = 2k+1 + (2\ell+1)i$, on a pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \sqrt{2}\pi$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - z_{k,\ell}\pi)^2} &= \frac{1}{(z_{k,\ell}\pi)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_{k,\ell}\pi}\right)^2} \\ &= \frac{1}{(z_{k,\ell}\pi)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{z}{z_{k,\ell}\pi}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(z_{k,\ell}\pi)^{n+2}} z^n \end{aligned}$$

(on a $|z_{k,\ell}\pi|^2 = ((2k+1)^2 + (2\ell+1)^2)\pi^2 \geq 2\pi^2 > |z|$), ce qui nous donne

$\mathcal{P}(z) = - \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(z_{k,\ell}\pi)^{n+2}} z^n$, la famille $\left(\frac{n+1}{(z_{k,\ell}\pi)^{n+2}} z^n \right)_{(k,\ell,n) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^*}$ étant sommable (vérification fastidieuse à ce stade du problème), ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Fubini pour écrire que :

$$\mathcal{P}(z) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\pi^{n+2}} \left(\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{z_{k,\ell}^{n+2}} \right) z^n$$

- (c) Par double périodicité, on en déduit que $\mathcal{P}$ est développable en série entière au voisinage de chaque point de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Chapitre 4

Fonctions convexes

Exercice 4.1. Les inégalités de Jensen

Étant donnée une suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels, on dit qu'un réel x est combinaison linéaire convexe des x_i , s'il existe une suite $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels positifs ou nuls telle que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$.

1. Montrer qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, pour toute combinaison linéaire convexe $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ de points de I , on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

2. Montrer que si f est une fonction convexe définie sur un intervalle I , alors pour toute combinaison linéaire à coefficients réels positifs non tous nuls $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ d'éléments de I , on a en notant $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$,

$$f\left(\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que pour toute fonction continue $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a < b$), on a :

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \circ \varphi(t) dt$$

Solution.

1. Il est clair que la condition est suffisante (prendre $n = 2$). Pour la réciproque, on procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$ le résultat est trivial et pour $n = 2$ il s'agit de la définition d'une fonction convexe. Supposons le résultat acquis pour $n \geq 2$ et soit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ une combinaison linéaire convexe de points

de I . On note $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Si $\lambda = 0$, alors tous les λ_i , pour $1 \leq i \leq n$, sont nuls, $\lambda_{n+1} = 1$ et l'inégalité est trivialement une égalité. Si $\lambda \neq 0$, en notant $x' = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$, on a $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$, $x' \in I$ et :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(\lambda x' + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda f(x') + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

puisque $\lambda \geq 0$, $\lambda_{n+1} \geq 0$ et $\lambda + \lambda_{n+1} = 1$. De l'hypothèse de récurrence on déduit que $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$.

2. Résulte immédiatement de la question précédente.

3. On remarque tout d'abord que f convexe sur $\mathbb{R}$ est continue, il en donc de même de $f \circ \varphi$ et cette fonction est bien intégrable sur $[a, b]$.

Avec la convexité de f , on peut écrire que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \circ \varphi\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

qui par passage à la limite quand n tend vers l'infini donne, compte tenu de la continuité de f et de la définition de l'intégrale sur $[a, b]$ comme limite des sommes de Riemann, $f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \circ \varphi(t) dt$.

Exercice 4.2. Fonctions mid-convexes

I étant un intervalle réel non réduit à un point, on se donne une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est mid-convexe si :

$$\forall (x, y) \in I^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

1. Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est mid-convexe, on a alors pour tout entier $p \geq 1$ et toute suite $(x_k)_{1 \leq k \leq 2^p}$ de points de I :

$$f\left(\frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} x_k\right) \leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} f(x_k)$$

2. Montrer que la fonction f est mid-convexe si, et seulement si, pour tout entier $n \geq 2$ et toute suite $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ de points de I , on a :

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

3. Montrer que la fonction f est mid-convexe si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

4. Montrer qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue est convexe si, et seulement si, elle est mid-convexe.
5. Montrer qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone est convexe si, et seulement si, elle est mid-convexe.

Solution.

1. Le résultat est acquis pour $p = 1$. En le supposant acquis pour $p \geq 1$, on a pour toute suite $(x_k)_{1 \leq k \leq 2^{p+1}}$ de points de I :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{2^{p+1}} x_k\right) &= f\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} x_k + \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} x_{2^p+k}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} x_k\right) + f\left(\frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} x_{2^p+k}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} f(x_k) + \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} f(x_{2^p+k})\right) = \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{2^{p+1}} f(x_k) \end{aligned}$$

2. Il est clair que la condition est suffisante. Pour les entiers de la forme $n = 2^p$ avec $p \geq 1$, le résultat est acquis.

Si $n \geq 2$ est un entier qui n'est pas une puissance de 2, il existe alors un entier $p \geq 1$ tel que $2^{p-1} < n < 2^p$ et si $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite de points de I , en

notant $x_{n+1} = \dots = x_{2^p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) &= f\left(\frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=1}^n x_k + \frac{2^p - n}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)\right) = f\left(\frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} x_k\right) \\ &\leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} f(x_k) = \frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) + \frac{2^p - n}{2^p} f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)\right) \end{aligned}$$

soit $\left(1 - \frac{2^p - n}{2^p}\right) f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) = \frac{n}{2^p} f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^n f(x_k)$, ou encore

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

3. Il est clair que la condition est suffisante (prendre $\lambda = \frac{1}{2}$). Réciproquement, soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mid-convexe et $(x, y) \in I^2$. Pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, on a toujours une égalité. Si $\lambda \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$, il s'écrit $\lambda = \frac{p}{q}$, où p, q sont des entiers tels que

$$1 \leq p < q \text{ et on a } f((1 - \lambda)x + \lambda y) = f\left(\frac{q-p}{q}x + \frac{p}{q}y\right) = f\left(\frac{1}{q} \sum_{k=1}^q x_k\right) \text{ en}$$

notant $x_1 = \dots = x_{q-p} = x$ et $x_{q-p+1} = \dots = x_q = y$, ce qui nous donne :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q f(x_k) = \frac{q-p}{q} f(x) + \frac{p}{q} f(y) = (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

4. Si λ est un réel compris entre 0 et 1, on a $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$, où $\lambda_n \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) et avec la continuité de f on déduit que, pour $x < y$ dans I , on a :

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f((1-\lambda_n)x + \lambda_n y) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} ((1-\lambda_n) f(x) + \lambda_n f(y)) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

ce qui prouve la convexité de f .

5. Supposons que f soit croissante. En utilisant les approximation décimales par excès tout réel $\lambda \in]0, 1[$ peut s'écrire comme limite d'une suite décroissante $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels dans $]0, 1[$ et pour tous $x < y$ dans I , on a :

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &= f(x + \lambda(y-x)) \leq f(x + \lambda_n(y-x)) \\ &\leq (1-\lambda_n) f(x) + \lambda_n f(y) \end{aligned}$$

ce qui nous donne en faisant tendre n vers l'infini :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

Pour f décroissante, on utilise les approximation décimales par défaut qui nous donnent une suite croissante $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels dans $]0, 1[$ qui converge vers λ et on a :

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &= f(x + \lambda(y-x)) \leq f(x + \lambda_n(y-x)) \\ &\leq (1-\lambda_n) f(x) + \lambda_n f(y) \end{aligned}$$

Exercice 4.3. Fonctions logarithmiquement convexes

Soit I un intervalle réel non réduit à un point. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ est dite logarithmiquement convexe si la fonction $\ln(f)$ est convexe.

1. Montrer que la limite simple d'une suite de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$ [resp. logarithmiquement convexes de I dans $\mathbb{R}^{+,*}$, la limite étant à valeurs dans $\mathbb{R}^{+,*}$] est convexe [resp. logarithmiquement convexe].
2. Soit $f : \mathbb{R}^{+,*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, les fonctions $x \mapsto f(x + \alpha)$ et $x \mapsto f(\alpha x)$ sont convexes.
3. Soit J un intervalle réel non réduit à un point. Montrer que la composée $\varphi \circ g$ d'une fonction convexe croissante $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec une fonction convexe $g : I \rightarrow J$ est convexe.
4. Montrer que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ logarithmiquement convexe est convexe.

5. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que pour tout segment $[a, b] \subset I$ et tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) \leq \max(f(a), f(b))$ (en fait, une fonction convexe sur I est bornée sur tout segment $[a, b] \subset I$).
6. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^{+,*} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et T -périodique (avec $T > 0$) est constante.
7. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- (a) f est logarithmiquement convexe ;
 - (b) pour tout réel $\alpha > 0$ la fonction $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe ;
 - (c) pour tous réels x, y dans I et tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on a $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda} (f(y))^\lambda$;
 - (d) pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction f^α est convexe.

Solution.

1. Une limite simple de fonctions convexes est convexe puisque les inégalités de convexité sont conservées par passage à la limite. Le résultat pour les fonctions logarithmiquement convexes s'en déduit facilement par continuité de $\ln$.
2. Pour x, y dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y + \alpha) &= f((1-\lambda)(x+\alpha) + \lambda(y+\alpha)) \\ &\leq (1-\lambda)f(x+\alpha) + \lambda f(y+\alpha) \end{aligned}$$

et $f(\alpha((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq (1-\lambda)f(\alpha x) + \lambda f(\alpha y)$, ce qui signifie que les fonctions $x \mapsto f(x+\alpha)$ et $x \mapsto f(\alpha x)$ sont convexes.

3. Pour $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $g((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)$ pour g convexe avec $g((1-\lambda)x + \lambda y)$ et $(1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)$ dans J , donc avec la croissance et la convexité de φ , on a :

$$\varphi(g((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq \varphi((1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)) \leq (1-\lambda)\varphi(g(x)) + \lambda\varphi(g(y))$$

ce qui signifie que la fonction $\varphi \circ g$ est convexe sur I . La composée de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe comme le montre l'exemple de la composée d'une fonction convexe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non affine avec la fonction $-Id$ qui donne la fonction $-f$ concave non convexe (car non affine).

4. En particulier, pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ logarithmiquement convexe, la fonction $f = e^{\ln(f)}$ est convexe comme la composée $\exp \circ \ln(f)$ de la fonction $\exp$ qui est convexe croissante et de la fonction $\ln(f)$ qui est convexe. La réciproque est fautive comme le montre l'exemple de la fonction $Id : x \in \mathbb{R}^{+,*} \mapsto x$ qui est convexe de logarithme concave non convexe.
5. Tout $x \in [a, b] \subset I$ s'écrit $x = (1-\lambda)a + \lambda b$ avec $\lambda \in [0, 1]$, donc par convexité :

$$f(x) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \leq \max(f(a), f(b))$$

6. Soit $f : \mathbb{R}^{+,*} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et T -périodique. De l'égalité $f(x) = f(x+T)$ pour tout réel $x > 0$, on déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+T) = f(T)$

(une fonction convexe sur un ouvert est continue), donc f se prolonge par continuité en 0. Pour $x \geq 0$, en désignant par n la partie entière de $\frac{x}{T}$, on a $nT \leq x < (n+1)T \leq x+T$, donc $f(x) \leq \max(f(nT), f((n+1)T)) = f(0)$ et $f(0) = f((n+1)T) \leq \max(f(x), f(x+T)) = f(x)$, donc $f(x) = f(0)$.

7.

(a) $\Rightarrow$ (b) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ est logarithmiquement convexe, pour tout réel $\alpha > 0$ la fonction $x \mapsto \ln(\alpha^x f(x)) = x \ln(\alpha) + \ln(f(x))$ est alors convexe comme somme de deux fonctions convexes, ce qui signifie que $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est logarithmiquement convexe, donc convexe.

(b) $\Rightarrow$ (c) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ telle que, pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe. Pour $x < y$ fixés dans I et λ fixé dans $]0, 1[$, on a :

$$\alpha^{(1-\lambda)x + \lambda y} f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) \alpha^x f(x) + \lambda \alpha^y f(y)$$

ou encore :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \varphi(\alpha) = (1-\lambda) \alpha^{-\lambda(y-x)} f(x) + \lambda \alpha^{(1-\lambda)(y-x)} f(y)$$

donc $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \inf_{\alpha > 0} \varphi(\alpha)$, cette borne inférieure étant atteinte pour $\alpha > 0$ tel que :

$$\varphi'(\alpha) = \lambda(1-\lambda)(y-x) \alpha^{-\lambda(y-x)-1} (\alpha^{y-x} f(y) - f(x)) = 0$$

ce qui équivaut à $\alpha^{y-x} = \frac{f(x)}{f(y)}$. On a donc :

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &\leq (1-\lambda) \left(\frac{f(x)}{f(y)} \right)^{-\lambda} f(x) + \lambda \left(\frac{f(x)}{f(y)} \right)^{1-\lambda} f(y) \\ &\leq (f(x))^{1-\lambda} (f(y))^\lambda \end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Résulte de la croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

Les conditions (a), (b) et (c) sont donc équivalentes.

(a) $\Rightarrow$ (d) Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ logarithmiquement convexe et $\alpha > 0$, la fonction $f^\alpha = e^{\alpha \ln(f)}$ est convexe comme la composée $\exp \circ (\alpha \ln(f))$ de la fonction $\exp$ qui est convexe croissante et de la fonction $\alpha \ln(f)$ qui est convexe.

(d) $\Rightarrow$ (c) Supposons que f^α soit convexe pour tout $\alpha > 0$, ce qui signifie que pour tous $x < y$ dans I et tous λ dans $]0, 1[$, on a :

$$f^\alpha((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f^\alpha(x) + \lambda f^\alpha(y)$$

ce qui équivaut à :

$$\alpha \ln(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq \varphi(\alpha) = \ln((1-\lambda) f^\alpha(x) + \lambda f^\alpha(y))$$

$(f^\alpha(x)$ et $f^\alpha(y)$ sont dans $\mathbb{R}^{+,*}$, donc aussi $(1-\lambda) f^\alpha(x) + \lambda f^\alpha(y)$), la fonction φ (à λ, x, y fixés) étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \varphi(\alpha) =$

$\ln(1) = 0$, elle se prolonge donc par continuité en 0. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \varphi'(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(1-\lambda) \ln(f(x)) f^\alpha(x) + \lambda \ln(f(y)) f^\alpha(y)}{(1-\lambda) f^\alpha(x) + \lambda f^\alpha(y)} \\ &= \frac{(1-\lambda) \ln(f(x)) + \lambda \ln(f(y))}{(1-\lambda) + \lambda} = \ln(f^{1-\lambda}(x) f^\lambda(y))\end{aligned}$$

ce qui signifie que φ est dérivable en 0. On en déduit alors que :

$$\ln(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} = \varphi'(0) = \ln(f^{1-\lambda}(x) f^\lambda(y))$$

soit $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda} (f(y))^\lambda$.

Exercice 4.4. Comparaison de la longueur de deux courbes

On se donne deux réels $a < b$. Pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on note $L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ la longueur de la courbe représentative de f . On se propose de montrer que si $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe de classe C^1 telle que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $L(g) \leq L(f)$, l'égalité étant réalisée si et seulement si $f = g$, ce qui peut paraître évident sur une figure.

1. En désignant par φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \sqrt{1+t^2}$, montrer que pour tous réels x et y , on a $\varphi(y) \geq \varphi(x) + (y-x)\varphi'(x)$, l'inégalité étant stricte pour $x \neq y$.
2. Montrer que $L(f) \geq L(g) + \int_a^b (f'(t) - g'(t)) \varphi' \circ g'(t) dt$.
3. En supposant que g est de classe C^2 sur $[a, b]$, montrer que $\int_a^b (f'(t) - g'(t)) \varphi' \circ g'(t) dt \geq 0$ et conclure.
4. Montrer que l'inégalité $L(f) \geq L(g)$ est encore réalisée pour g de classe C^1 sur $[a, b]$.
5. On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par $f_n(t) = t^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$ et par $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des longueurs des courbes correspondantes.

(a) Calculer λ_1 et λ_2 .

(b) En traçant sur un même graphe, les courbes représentatives de quelques fonctions f_n que peut-on conjecturer ?

(c) Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Solution.

1. Pour $x = y$, il est clair que l'on a l'égalité. Pour $x \neq y$, en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, on a $\varphi(y) = \varphi(x) + (y-x)\varphi'(x) + \frac{(y-x)^2}{2}\varphi''(t_{x,y})$ où

$t_{x,y}$ est un réel strictement compris entre x et y . Comme $\varphi''(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$ pour tout réel t , il en résulte que $\varphi(y) > \varphi(x) + (y-x)\varphi'(x)$.

2. On a :

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_a^b \varphi(f'(t)) dt \geq \int_a^b \varphi(g'(t)) dt + \int_a^b (f'(t) - g'(t)) \varphi'(g'(t)) dt \\ &\geq L(g) + \int_a^b (f'(t) - g'(t)) \varphi' \circ g'(t) dt \end{aligned}$$

3. Pour g de classe C^2 , une intégration par parties donne en posant $h = (f' - g') \cdot \varphi' \circ g'$:

$$\begin{aligned} \int_a^b h(t) dt &= [(f(t) - g(t)) \varphi' \circ g'(t)]_a^b - \int_a^b (f(t) - g(t)) (\varphi' \circ g')'(t) dt \\ &= - \int_a^b (f(t) - g(t)) \varphi''(g'(t)) g''(t) dt \end{aligned}$$

(on a $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$) avec $\varphi''(x) > 0$ pour tout réel x , $f(t) \leq g(t)$ et $g''(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ (g est convexe), donc $L(f) \geq L(g)$. Pour $f \neq g$, on a $f' \neq g'$ ($f' = g'$ équivaut à $f = g$ puisque $f(a) = g(a)$), donc il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $f'(t_0) \neq g'(t_0)$ et, pour tout $t \in [a, b]$, on a :

$$\varphi(f'(t)) \geq \varphi(g'(t)) + (f'(t) - g'(t)) \varphi'(g'(t))$$

l'inégalité étant stricte en t_0 . Par continuité, on en déduit que :

$$L(f) > L(g) + \int_a^b (f'(t) - g'(t)) \varphi' \circ g'(t) dt \geq L(g)$$

Donc l'égalité est réalisée si, et seulement si, $f = g$.

4. Comme la fonction $\varphi' \circ g'$ est continue, croissante à valeurs positive, le deuxième théorème de la moyenne nous dit qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\begin{aligned} \int_a^b h(t) dt &= \varphi'(g'(a)) \int_a^c (f'(t) - g'(t)) dt + \varphi'(g'(b)) \int_c^b (f'(t) - g'(t)) dt \\ &= \varphi'(g'(a)) (f(c) - g(c)) - \varphi'(g'(b)) (f(c) - g(c)) \\ &= (g(c) - f(c)) (\varphi'(g'(b)) - \varphi'(g'(a))) \geq 0 \end{aligned}$$

et en conséquence, $L(f) \geq L(g)$.

5.

(a) On a $\lambda_1 = 1$ et :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[x\sqrt{1+x^2} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx \right) = \sqrt{5} + \frac{\operatorname{argsh}(2)}{2} - \lambda_2 \end{aligned}$$

$$\text{soit } \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\operatorname{argsh}(2)}{4} = \frac{2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)}{4} \simeq 1.478\,942\,857\,544\,60.$$

- (b) Il semble que la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en croissant strictement vers 2 (figure 4.1).

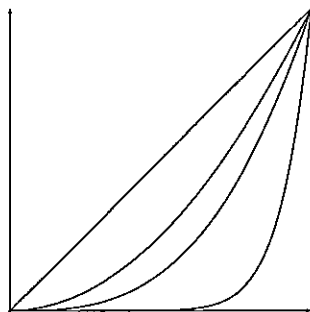


FIGURE 4.1 - $y = f_n(x)$, pour $n = 5, 10, 50$

- (c) On a :

$$\begin{aligned}\lambda_n - 1 &= \int_0^1 \left(\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} - nt^{n-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 + n^2 t^{2n-2} - n^2 t^{2n-2}}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + nt^{n-1}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + nt^{n-1}}\end{aligned}$$

Notons $u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + nt^{n-1}}$ pour $t \in [0, 1]$. La suite de fonctions continues $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction u définie par $u(t) = 1$ pour $t \in [0, 1[$ (on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nt^{n-1} = 0$ d'après le théorème de d'Alembert) et $u(1) = 0$, cette fonction u étant continue par morceaux. Comme $0 \leq u_n(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 2$. La suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante puisque les fonctions f_n sont convexes avec $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_{n+1}(t) < f_n(t)$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1[$.

Problème 4.1. Théorème de Bohr-Mollerup et fonction gamma

- I - Un produit infini de fonctions

À toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ on associe la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses produits partiels définie par $P_n = \prod_{k=1}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on dit que le produit infini $\prod u_n$ est convergent si la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note alors $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n u_k \right)$ la limite de cette suite. Dans le cas où cette limite est non nulle, on dit que le produit infini est strictement convergent.

1. Justifier la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. La limite de cette suite est notée γ (constante γ d'Euler).

2. Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

- (a) pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, le produit infini $\prod \varphi_n(x)$ est convergent vers un réel strictement positif $\varphi(x)$;
- (b) $\varphi(1) = e^\gamma$;
- (c) la fonction φ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$;
- (d) la fonction φ est logarithmiquement convexe.

3. Soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, \theta_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

Montrer que :

- (a) la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge sur $\mathbb{R}^{+,*}$ vers la fonction $\theta : x \mapsto \frac{e^{-\gamma x}}{x} \varphi(x)$;
- (b) $\theta(1) = 1$;
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, \theta(x+1) = x\theta(x)$;
- (d) θ est logarithmiquement convexe.

- II - Théorème de Bohr-Mollerup

On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^{+,*} \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ qui vérifie les trois conditions :

- (i) $f(1) = 1$;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, f(x+1) = xf(x)$;
- (iii) f est logarithmiquement convexe.

La fonction θ définie en I.3 par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, \theta(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}$$

vérifie ces conditions.

- 1. Montrer que la fonction $h = \frac{f}{\theta}$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
- 2. Montrer que la fonction h est convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
- 3. Dédurre de ce qui précède que $f = \theta$.

Nous avons donc montré le théorème de Bohr-Mollerup qui nous dit que θ est l'unique fonction de $\mathbb{R}^{+,*}$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$ qui vérifie les conditions (i), (ii) et (iii).

- III - Fonction gamma d'Euler

On rappelle que la fonction gamma est définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

et que la fonction bêta est définie sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ par :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2, B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

On admet que pour tout réel x , on a :

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \quad (4.1)$$

(voir le problème 2.1).

1. Justifier la définition de la fonction Γ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et de la fonction B sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$.
2. Montrer que la fonction Γ vérifie les conditions suivantes :

- (i) $\Gamma(1) = 1$;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;
- (iii) Γ est logarithmiquement convexe.

3. Dédurre de la question précédente que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}$$

La première formule est due à Gauss et la seconde à Weierstrass.

4. Montrer que :

- (a) pour tout entier naturel n , on a $\Gamma(n+1) = n!$;
- (b) la fonction gamma est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$, $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et en particulier $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$;
- (c) pour tout réel $x \in]0, 1[$, on a $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ (formule des compléments);
- (d) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;
- (e) pour tout entier naturel n , $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$;
- (f) pour tout réel $x > 0$, on a $\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ (formule de Legendre);

- (g) la fonction gamma est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif x :

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t} dt$$

- (h) pour tout réel strictement positif x , on a :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$$

(La fonction $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ est la fonction digamma.) ;

- (i) $\Gamma'(1) = -\gamma$ et $\Gamma'(n) = (n-1)! \left(-\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right)$ pour tout entier $n \geq 2$;
 (j) $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2 \ln(2))$ et pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\Gamma'\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \left(2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \ln(2) \right) - \gamma \right)$$

5. On se donne deux réels x, y strictement positifs et on se propose de démontrer de trois façons l'égalité $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

- (a) Montrer cette égalité en utilisant le théorème de Bohr-Mollerup.
 (b) Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^w u^{x-1} (w-u)^{y-1} du \right) e^{-w} dw$, puis en déduire l'égalité annoncée.
 (c) Montrer que :

$$\begin{aligned} B(x, y) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta) d\theta \text{ et } \Gamma(x)\Gamma(y) \\ &= 4 \iint_{(\mathbb{R}^{+,*})^2} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1} du dv \end{aligned}$$

puis en déduire l'égalité annoncée.

- IV - Exemples d'intégrales liées à la fonction Γ

1.

- (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

(b) En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{2x-1}(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2 \sin(\pi x)}$$

2.

(a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t) t^{2x-1} dt$ est convergente et donner sa valeur.

(b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin^{2x-1}(t) dt$ est convergente.

(c) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, puis en déduire que, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin^{2x-1}(t) dt = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(x + \frac{1}{2}) \Gamma'(x) - \Gamma'(x + \frac{1}{2}) \Gamma(x)}{4 \Gamma^2(x + \frac{1}{2})}$$

(d) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin^{2n}(t) dt$ pour tout entier naturel n .

Solution.

- I - Un produit infini de fonctions

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante positive sur $\mathbb{R}^{+,*}$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt < 0$$

et :

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - \ln(n) \\ &\geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} - \ln(n) = \ln(n+1) - \ln(n) > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante minorée par 0 et en conséquence convergente vers un réel $\gamma \in [0, 1[$ (pour $n \geq 2$ on a $0 \leq \gamma_n \leq \gamma_2 \simeq 0.80685$, donc $0 \leq \gamma \leq \gamma_2 < 1$).

2. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(x)$ et

$$S_n(x) = \ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^n \ln(\varphi_k(x)).$$

- (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\varphi_n(x) > 0$ et :

$$\ln(\varphi_n(x)) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série $\sum \ln(\varphi_n(x))$ est absolument convergente et, en notant $\psi(x)$ la somme de cette série, le produit infini $\prod \varphi_n(x)$ est convergent vers $\varphi(x) = e^{\psi(x)} > 0$.

- (b) Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} S_n(1) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \gamma_n - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(P_n(1)) = \gamma$ et $\varphi(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(1) = e^\gamma$.

- (c) Comme $\varphi = e^\psi$, il suffit de montrer que la fonction $\psi = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(\varphi_n)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
Chaque fonction $\psi_n = \ln(\varphi_n)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout entier $p \geq 1$:

$$\psi_n^{(p)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} & \text{si } p = 1 \\ (-1)^p \frac{(p-1)!}{(n+x)^p} & \text{si } p \geq 2 \end{cases}$$

Pour tout réel $b > 0$, on a pour tout $x \in [0, b]$, tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \psi_n^{(p)}(x) \right| \leq \alpha_n = \begin{cases} \frac{b}{n^2} & \text{si } p = 1 \\ \frac{(p-1)!}{n^p} & \text{si } p \geq 2 \end{cases}$$

avec $\sum \alpha_n < +\infty$, donc chaque série $\sum \psi_n^{(p)}(x)$ est uniformément convergente sur $[0, b]$. Il en résulte que la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout segment $[0, b]$, donc sur $\mathbb{R}^+$, avec $\psi'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}$ et, pour $p \geq 2$,

$$\psi_n^{(p)}(x) = (-1)^p (p-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}.$$

- (d) Pour tout réel $x \geq 0$, on a $\psi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} > 0$, donc la fonction $\psi = \ln(\varphi)$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

3. Pour tout réel $x > 0$, on a $\theta_n(x) = \frac{n^x}{x} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{x}{k}}$.

(a) Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\theta_n(x) &= \frac{n^x}{x} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{x}{k}} \varphi_k(x) = \frac{1}{x} \exp \left(-x \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \right) \prod_{k=1}^n \varphi_k(x) \\ &= \frac{e^{-x\gamma_n}}{x} P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\gamma x}}{x} \varphi(x)\end{aligned}$$

(b) On a $\theta(1) = e^{-\gamma} \varphi(1) = 1$ (ou $\theta(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$).

(c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{\theta_n(x+1)}{\theta_n(x)} = \frac{n! n^{x+1}}{(x+1) \cdots (x+n+1)} \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{n! n^x} = \frac{nx}{x+n+1}$$

ce qui nous donne en faisant tendre n vers l'infini $\frac{\theta(x+1)}{\theta(x)} = x$.

(d) La fonction $\ln(\theta) : x \in \mathbb{R}^{+,*} \mapsto -\gamma x - \ln(x) + \ln(\varphi(x))$ est convexe comme somme de fonctions convexes, donc θ est logarithmiquement convexe.

On peut aussi dire que chaque fonction :

$$\ln(\theta_n(x)) = \ln(n!) + x \ln(n) - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$$

est convexe (somme de fonctions convexes), donc $\ln(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\theta_n(x))$

est convexe comme limite simple de fonctions convexes.

- II - Théorème de Bohr-Mollerup

1. Pour tout réel $x > 0$, on a $h(x+1) = \frac{f(x+1)}{\theta(x+1)} = \frac{f(x)}{\theta(x)} = h(x)$, donc h est 1-périodique sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

2. Pour tout réel $x > 0$, on a $h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n(x)}{n!}$ où on a noté pour $n \geq 1$:

$$h_n(x) = \left(\frac{1}{n} \right)^x f(x) x(x+1) \cdots (x+n)$$

Comme la fonction f vérifie l'équation fonctionnelle (ii), on a pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}f(x+n+1) &= (x+n) f(x+n) = (x+n)(x+n-1) f(x+n-1) = \cdots \\ &= (x+n) \cdots (x+1) x f(x)\end{aligned}$$

(récurrence immédiate sur $n \geq 1$), donc $h_n(x) = \left(\frac{1}{n} \right)^x f(x+n+1)$. Comme f est logarithmiquement convexe, il en est de même de $x \mapsto f(x+n+1)$ et en conséquence la fonction h_n est convexe (exercice 4.3). Il en résulte que h est aussi convexe comme limite simple d'une suite de fonctions convexes.

3. La fonction h est 1-périodique et convexe, donc constante égale à $\frac{f(1)}{\theta(1)} = 1$ (question 6 de l'exercice 4.3). On a donc $f = \theta$.

– III – Fonction gamma d'Euler

1.

- (a) Pour tout réel $x > 0$, la fonction $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et à valeurs strictement positives. Avec $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$, on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge et avec $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$, on déduit que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ converge, donc la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
- (b) Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2$, la fonction $g : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$ et à valeurs strictement positives. Avec $g(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et $g(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$, on déduit que la fonction g est intégrable sur $]0, 1[$ et la fonction B est bien définie sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$.

2. La fonction Γ est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+,*}$ (intégrale sur un ouvert d'une fonction continue à valeurs strictement positives).

(i) Pour $x = 1$, on a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

- (ii) Pour $x > 0$, une intégration par parties nous donne, pour $0 < \varepsilon < R$:

$$\int_{\varepsilon}^R t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{\varepsilon}^R + x \int_{\varepsilon}^R t^{x-1} e^{-t} dt$$

et le passage à la limite quand (ε, R) tend vers $(0, +\infty)$ nous donne l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

- (iii) Pour justifier la log-convexité de Γ , il suffit de montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \alpha^x \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \alpha^x t^{x-1} e^{-t} dt$ est convexe (question 7 de l'exercice 4.3) et du fait de la positivité de l'intégrale, il suffit de montrer que pour tous réels $\alpha > 0$ et $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{te^t} \alpha^x t^x$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$, ce qui revient à montrer que la fonction $x \mapsto \alpha^x t^x$ est convexe (on a $\frac{1}{te^t} > 0$), ce qui résulte de la log-convexité de $x \mapsto t^x$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (le logarithme de cette fonction est affine).

Ce dernier résultat peut aussi se montrer en utilisant la question 7 de l'exercice 4.3 et l'inégalité de Hölder pour les intégrales. Pour ce faire, on écrit tout réel $\lambda \in]0, 1[$ sous la forme $\lambda = \frac{1}{p}$ avec $p > 1$, de sorte que

$1 - \lambda = \frac{1}{q}$ où $q > 1$ est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et pour $0 < x < y$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \Gamma\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} (t^{x-1} e^{-t})^{\frac{1}{p}} (t^{y-1} e^{-t})^{\frac{1}{q}} dt \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq (\Gamma(x))^{\frac{1}{p}} (\Gamma(y))^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

ce qui prouve que Γ est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

Sachant que Γ est indéfiniment dérivable (voir la question IV.4g), on peut aussi vérifier que la dérivée seconde de $\varphi = \ln(\Gamma)$ est positive en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales. Cette dérivée seconde

est donnée par $\varphi'' = \frac{\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$ avec :

$$\begin{aligned}(\Gamma'(x))^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2 \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \left(\ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\right) \left(\ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\right) dt\right)^2 \\ &\leq \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma''(x) \Gamma(x)\end{aligned}$$

3. Le théorème de Bohr-Mollerup nous dit que $\Gamma = \theta$, soit les égalités annoncées.

4.

(a) De l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on déduit facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$

(b) La fonction Γ étant logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$, elle est convexe et en conséquence continue (on peut aussi utiliser l'égalité $\Gamma = \theta$ et I.2c).

Pour tout réel $x > 0$, on a $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$

(continuité de Γ), donc $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

(c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in]0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned}\theta_n(x) \theta_n(1-x) &= \frac{n!n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \frac{n!n^{1-x}}{(1-x)(2-x) \cdots (n+1-x)} \\ &= \frac{1}{x \prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)} \frac{1}{\prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 - \frac{x}{k}\right)} \frac{n}{n+1-x} \\ &= \frac{1}{x \prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} \frac{n}{n+1-x}\end{aligned}$$

et en utilisant le produit eulérien (4.1), on en déduit que :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \theta(x)\theta(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n(x)\theta_n(1-x) \\ &= \frac{\pi}{\pi x \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{(\pi x)^2}{n^2 \pi^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\end{aligned}$$

- (d) Pour $x = \frac{1}{2}$, cela donne $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$, soit $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Il en résulte que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- (e) De l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

- (f) Notons, pour tout réel $x > 0$, $\Lambda(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$. La fonction Λ ainsi définie est à valeurs strictement positives et pour $x = 1$, on a $\Lambda(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\Lambda(x+1) &= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= x \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = x\Lambda(x)\end{aligned}$$

Les fonctions $x \mapsto 2^{x-1}$, $x \mapsto \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$ et $x \mapsto \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ étant logarithmiquement convexes sur $\mathbb{R}^{+,*}$, il en est de même de leur produit Λ . On déduit alors du théorème de Bohr-Mollerup que $\Lambda = \Gamma$.

- (g) On sait déjà que $\Gamma = \theta$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (question I.2c). Pour obtenir une expression de ses dérivées successives, on utilise un théorème de dérivation sous le signe d'intégration. La fonction $f : (x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est indéfiniment dérivable sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ avec pour n dans $\mathbb{N}^*$, $a < b$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et x dans $[a, b]$:

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| = |\ln(t)|^n t^{x-1} e^{-t} \leq g_n(t) = \begin{cases} (-\ln(t))^n t^{a-1} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ \ln(t)^n t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

la fonction g_n étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} |\ln(t)|^n t^{\frac{a}{2}} = 0$, donc pour $t > 0$ assez petit on a $|g_n(t)| \leq t^{\frac{a}{2}-1}$, la fonction $t^{\frac{a}{2}-1}$ étant intégrable sur $]0, 1[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\ln(t)|^n t^{b-1} e^{-\frac{t}{2}} = 0$, donc $|g_n(t)| \leq e^{-\frac{t}{2}}$ pour t assez grand, la fonction $e^{-\frac{t}{2}}$ étant intégrable sur $]1, +\infty[$). On en déduit alors que la fonction Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et que l'on peut dériver sous le signe d'intégration.

- (h) La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, donc il en est de même de la fonction $\ln(\Gamma)$ et pour tout réel $x > 0$, on a :

$$(\ln \circ \Gamma)(x) = \ln \left(\frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}} \right) = -\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right)$$

et :

$$\begin{aligned} (\ln \circ \Gamma)'(x) &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= -\gamma - \frac{1}{x} + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \end{aligned}$$

(question I.2c). En remarquant que cette fonction est croissante, on retrouve la log-convexité de la fonction Γ .

- (i) Pour $x = 1$, cela donne $\Gamma'(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma - 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = -\gamma$

(on a $0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$) et pour $x = n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on obtient :

$$\frac{\Gamma'(n)}{(n-1)!} = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = -\gamma - \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right)$$

avec pour $m > n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right) &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k+n} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

($\sum_{k=m+1}^{n+m} \frac{1}{k} \leq \frac{n}{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$), donc :

$$\Gamma'(n) = (n-1)! \left(-\gamma - \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = (n-1)! \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma \right)$$

On peut aussi utiliser l'équation fonctionnelle $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$ obtenue en prenant la dérivée logarithmique dans $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Cela nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma'(n-1)}{\Gamma(n-1)} + \frac{1}{n-1}$ et par récurrence, on en déduit que :

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$$

$$\text{soit } \Gamma'(n) = \Gamma(n) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma \right) = (n-1)! \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma \right).$$

(j) Pour $x = \frac{1}{2}$, cela donne :

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\gamma - 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+\frac{1}{2})} = -\gamma - 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$$

La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ est continue sur $[-1, 1]$ (convergence normale) et de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ (le rayon de convergence de cette série entière vaut 1) avec :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1-x^2) = -\ln(1-x) - \ln(1+x)$$

donc $f(x) = (1-x)\ln(1-x) - (1+x)\ln(1+x) + 2x$. Pour $x = 1$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln(2)$ et $\Gamma'(\frac{1}{2}) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2\ln(2))$.

L'équation fonctionnelle $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$ nous donne pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\Gamma'(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma'(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-\frac{1}{2})} + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma'(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-\frac{1}{2})} + \frac{2}{2n-1}$ et par récurrence, on en déduit que :

$$\frac{\Gamma'(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n-3} + \cdots + \frac{2}{3} + \frac{2}{1}$$

soit :

$$\begin{aligned} \Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \left(2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \ln(2) \right) - \gamma \right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi} \left(2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \ln(2) \right) - \gamma \right) \end{aligned}$$

5.

(a) Pour $y > 0$ fixé, on note $\Phi(x) = \frac{B(x,y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ (on a $\Gamma(y) > 0$). Cette fonction est à valeurs strictement positives telle que :

$$\Phi(1) = \frac{B(1,y)\Gamma(1+y)}{\Gamma(y)} = yB(1,y) = \int_0^1 y(1-t)^{y-1} dt = 1$$

et pour tout $x > 0$, on a :

$$\Phi(x+1) = \frac{B(x+1,y)\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(y)} = (x+y)B(x+1,y) \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 (x+y)B(x+1, y) &= x \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt + \int_0^1 t^x y (1-t)^{y-1} dt \\
 &= x \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt + [-t^x (1-t)^y]_0^1 + x \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\
 &= x \int_0^1 (t+1-t) t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = x \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\
 &= xB(x, y)
 \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\Phi(x+1) = x\Phi(x)$. Les fonctions $x \mapsto \Gamma(x+y)$ et $x \mapsto B(x, y)$ étant logarithmiquement convexes sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (pour la deuxième fonction c'est la même démonstration que pour Γ), il en est de même de leur produit Λ et donc de Φ . On déduit alors du théorème de Bohr-Mollerup que $\Phi = \Gamma$, c'est à dire que $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

(b) Pour (x, y) dans $(\mathbb{R}^{+,*})^2$, on a :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \int_0^{+\infty} v^{y-1} e^{-v} dv \\
 &= \int_0^{+\infty} u^{x-1} \left(\int_0^{+\infty} v^{y-1} e^{-(u+v)} dv \right) du
 \end{aligned}$$

et en effectuant à $u > 0$ fixé, le changement de variable $w = u+v$, $dw = dv$, cela donne :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} u^{x-1} \left(\int_u^{+\infty} (w-u)^{y-1} e^{-w} dw \right) du \\
 &= \int_0^{+\infty} u^{x-1} \left(\int_0^{+\infty} (w-u)^{y-1} e^{-w} \mathbf{1}_{]u, +\infty[}(w) dw \right) du
 \end{aligned}$$

où $\mathbf{1}_{]u, +\infty[}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $]u, +\infty[$. Le théorème de Fubini nous donne :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u^{x-1} (w-u)^{y-1} \mathbf{1}_{]u, +\infty[}(w) du \right) e^{-w} dw \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^w u^{x-1} (w-u)^{y-1} du \right) e^{-w} dw
 \end{aligned}$$

(pour $w > 0$ fixé et $u \geq w$, on a $\mathbf{1}_{]u, +\infty[}(w) = 0$, ce qui peut aussi se traduire par $\mathbf{1}_{]u, +\infty[}(w) = \mathbf{1}_{]0, w[}(u)$).

Le changement de variable $u = wt$, pour $w > 0$ fixé, nous donne :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \right) w^{x+y-1} e^{-w} dw \\
 &= \int_0^{+\infty} B(x, y) w^{x+y-1} e^{-w} dw = B(x, y) \Gamma(x+y)
 \end{aligned}$$

On peut aussi procéder comme suit. Le théorème de Fubini, puis le changement de variable $(t, z) = (u, u + v)$ nous donnent :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \iint_{(\mathbb{R}^+,*)^2} u^{x-1}v^{y-1}e^{-(u+v)}dudv \\ &= \iint_{0 < t < z < +\infty} t^{x-1}(z-t)^{y-1}e^{-z}dtdz \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^z t^{x-1}(z-t)^{y-1}dt \right) e^{-z}dz\end{aligned}$$

et on conclut avec le changement de variable $t = z\theta$, pour $z > 0$ fixé.

(c) Le changement de variable $t = \cos^2(\theta)$ nous donne :

$$\begin{aligned}B(x, y) &= 2 \int_0^1 \cos^{2(x-1)}(\theta) (1 - \cos^2(\theta))^{y-1} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^1 \cos^{2(x-1)}(\theta) \sin^{2(y-1)}(\theta) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta) d\theta\end{aligned}$$

Pour (x, y) dans $(\mathbb{R}^+,*)^2$, en effectuant les changements de variables $t = u^2$ dans $\Gamma(x)$ et $t = v^2$ dans $\Gamma(y)$, puis en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du \int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2y-1} dv \\ &= 4 \iint_{(\mathbb{R}^+,*)^2} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1} dudv\end{aligned}$$

Le passage en coordonnées polaires nous donne, en utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta) dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta) d\theta \right) dr \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} B(x, y) dr = \Gamma(x+y) B(x, y)\end{aligned}$$

- IV - Exemples d'intégrales liées à la fonction Γ

1.

(a) Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^+,*)^2$, le changement de variable $u = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$,

$du = \frac{dt}{(1+t)^2}$ nous donne :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

(b) Pour $x \in]0, 1[$ et $y = 1 - x$, cela donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

(formule des compléments), puis le changement de variable $t = \tan^2(\theta)$,
 $dt = 2 \tan(\theta) (1+t) d\theta$ donne $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{2x-1}(\theta) d\theta$.

2.

(a) Pour $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln(t) t^{2x-1} dt &= \frac{1}{2x} [\ln(t) t^{2x}]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2x} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} t^{2x-1} dt \\ &= \frac{1}{2x} [\ln(t) t^{2x}]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4x^2} [t^{2x}]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

et faisant tendre ε vers 0 il vient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t) t^{2x-1} dt = \frac{1}{2x} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x} \left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2x}\right)$$

(b) Pour tout réel $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\ln(\sin(t)) \sin^{2x-1}(t) = \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \sin^{2x-1}(t) + \ln(t) t^{2x-1} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2x-1}$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \ln(1) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2x-1} = 1$, donc

les fonctions $t \mapsto \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$ et $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2x-1}$ se prolongent par

continuité en 0 et la convergence des intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(t) dt$ (c'est

$\frac{1}{2} B\left(x, \frac{1}{2}\right)$) et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t) t^{2x-1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(t)}{t^{1-2x}} dt$ (intégrale de Bertrand),

entraîne celle de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin^{2x-1}(t) dt$.

(c) La fonction $f : (x, t) \mapsto \sin^{2x-1}(t) = e^{(2x-1)\ln(\sin(t))}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*} \times]0, \frac{\pi}{2}[$ avec pour $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+,*}$ (avec $a < b$) et $x \in [a, b]$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = 2 |\ln(\sin(t))| \sin^{2x-1}(t) \leq g(t) = 2 |\ln(\sin(t))| \sin^{2a-1}(t)$$

$e^{(2x-1)\ln(\sin(t))} \leq e^{(2a-1)\ln(\sin(t))}$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) \right|$, la fonction g étant continue et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, donc la fonction φ est de classe

$\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et on peut dériver sous le signe d'intégration, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin^{2x-1}(t) dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(x + \frac{1}{2}) \Gamma'(x) - \Gamma'(x + \frac{1}{2}) \Gamma(x)}{4 \Gamma^2(x + \frac{1}{2})}\end{aligned}$$

avec :

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(t) dt = \frac{1}{2} B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(x) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(x + \frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \frac{1}{2})}$$

donc $\varphi'(x) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(x + \frac{1}{2}) \Gamma'(x) - \Gamma'(x + \frac{1}{2}) \Gamma(x)}{2 \Gamma^2(x + \frac{1}{2})}$ et :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin^{2x-1}(t) dt = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(x + \frac{1}{2}) \Gamma'(x) - \Gamma'(x + \frac{1}{2}) \Gamma(x)}{4 \Gamma^2(x + \frac{1}{2})}$$

(d) Pour $x = \frac{1}{2}$, cela donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1) \Gamma'(\frac{1}{2}) - \Gamma'(1) \Gamma(\frac{1}{2})}{4 \Gamma^2(1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\Gamma'(\frac{1}{2}) - \Gamma'(1) \sqrt{\pi} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} (-\sqrt{\pi}(\gamma + 2 \ln(2)) + \gamma \sqrt{\pi}) = -\frac{\pi \ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Pour $x = n + \frac{1}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$, cela donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) \sin^{2n}(t) dt &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1) \Gamma'(n + \frac{1}{2}) - \Gamma'(n+1) \Gamma(n + \frac{1}{2})}{4 \Gamma^2(n+1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{n! \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!} \left(2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \ln(2) \right) - \gamma \right) - n! \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma \right) \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}}{(n!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) \\ &= \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) \right) = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) \right)\end{aligned}$$

Chapitre 5

Intégration

Exercice 5.1. Calcul élémentaire de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$ pour $\Re(\alpha) > 0$

On se donne un nombre complexe α de partie réelle strictement positive et on se propose de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha}$. Pour ce faire, on note pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{\alpha k}$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $f_n(x) = \frac{1 + (-1)^n x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha}$ pour tout $x \in [0, 1]$, puis en déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha k + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha} dx$$

2. Conclure et préciser les résultats obtenus pour $\alpha = 1, 2, 3$.

Solution.

1. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-x^\alpha)^k = \frac{1 + (-1)^n x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha}$ (pour $\Re(\alpha) > 0$, on a $x^\alpha \neq -1$), ce qui nous donne en intégrant sur $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{\alpha k} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha k + 1} = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha} dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha} dx \end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto 1 + x^\alpha$ étant continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, on a en

$$\text{notant } M = \sup_{x \in [0, 1]} \frac{1}{|1 + x^\alpha|} :$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{x^{\alpha(n+1)}}{1 + x^\alpha} dx \right| &\leq \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\Re(\alpha)}}{|1 + x^\alpha|} dx \\ &\leq M \int_0^1 x^{(n+1)\Re(\alpha)} dx = \frac{M}{(n+1)\Re(\alpha) + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha k + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^\alpha} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^\alpha}.$$

Pour $\alpha = 1, 2, 3$ on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(1-x+x^2)} \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1} dx \right) = \frac{1}{3} \left(\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Exercice 5.2. Une condition nécessaire d'intégrabilité

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et que f est à valeurs positives.

2. Montrer que $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Sans l'hypothèse de décroissance pour f , est-ce que la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ entraîne que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

Solution. On rappelle qu'une fonction monotone sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ est Riemann-intégrable.

1. f étant décroissante, on a pour $x \geq 1$, $\int_x^{x+1} f(t) dt \leq f(x) \leq \int_{x-1}^x f(t) dt$ avec

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x-1}^x f(t) dt = 0 \text{ puisque } \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge,} \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0. \text{ Toujours avec la décroissance de } f, \text{ on en déduit que } f \\ &\text{est à valeurs positives. En effet, s'il existe } x_0 \geq 0 \text{ tel que } f(x_0) < 0, \text{ on a alors} \\ f(x) &\leq f(x_0) < 0, \text{ ce qui est en contradiction avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \end{aligned}$$

2. Pour tout $x > 0$, on a $0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt = 0$,

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$, ce qui signifie que $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$

3. Sans l'hypothèse de décroissance, le résultat de la première question n'est plus valable. On peut par exemple considérer la fonction affine par morceaux et continue définie sur $\mathbb{R}^+$ de la façon suivante :

- f est nulle sur $\left[0, 2 - \frac{1}{2^2}\right]$;
- pour tout entier $n \geq 2$:
 f est affine sur $\left[n - \frac{1}{n^2}, n\right]$ avec $f\left(n - \frac{1}{n^2}\right) = 0$, $f(n) = 1$;
 f est affine sur $\left[n, n + \frac{1}{n^2}\right]$ avec $f\left(n + \frac{1}{n^2}\right) = 0$;
 f est nulle sur $\left[n + \frac{1}{n^2}, n + 1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$ (figure 5.1).

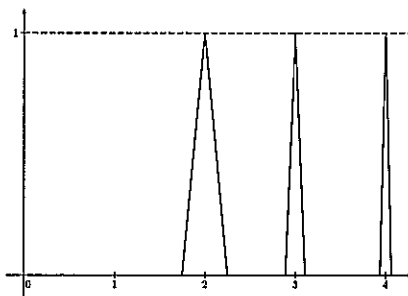


FIGURE 5.1 – Graphe de f

Cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} f(t) dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

et elle ne tend pas vers 0 à l'infini puisque $f(n) = 1$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 5.3. L'intégrale de Poisson

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on note $P(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt$.

1. En utilisant des sommes de Riemann, montrer que :

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 2\pi \ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

2. Exprimer, sans utiliser la question précédente, $P(-x)$, $P(x^2)$ et $P\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
3. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $P(x) = \frac{1}{2^n} P(x^{2^n})$.
4. Montrer que la fonction P est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, puis retrouver le résultat de la première question.

Solution. Pour $|x| \neq 1$ et $t \in [0, \pi]$, on a $\varphi(x, t) = \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) = \ln(|x - e^{it}|^2)$ avec $|x - e^{it}| > 0$, donc la fonction $t \mapsto \varphi(x, t)$ est bien définie et continue sur $[0, \pi]$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, ce qui nous assure la définition de $P(x)$.

1. En utilisant les sommes de Riemann :

$$S_n(x) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(x, \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(|x - e^{i\frac{k\pi}{n}}|^2\right) = \frac{\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} |x - e^{i\frac{k\pi}{n}}|^2\right)$$

où :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} |x - e^{i\frac{k\pi}{n}}|^2 &= (x-1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} (x - e^{i\frac{k\pi}{n}}) (x - e^{-i\frac{k\pi}{n}}) \\ &= (x-1) \prod_{k=-(n-1)}^{n-1} (x - e^{i\frac{2k\pi}{2n}}) = \frac{1-x}{1+x} (1-x^{2n}) \end{aligned}$$

(les racines $2n$ -èmes de l'unité sont 1, -1 et les $e^{\pm i\frac{2k\pi}{2n}}$ pour $1 \leq k \leq n-1$), on obtient $S_n(x) = \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{1-x}{1+x} (1-x^{2n})\right)$.

Pour $|x| < 1$, on a $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 0$ et pour $|x| > 1$, on a :

$$\begin{aligned} P(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2\pi \ln(|x|) + \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{1-x}{1+x} \left(\frac{1}{x^{2n}} - 1\right)\right) \right) \\ &= 2\pi \ln(|x|) \end{aligned}$$

2. Le changement de variable $t = \pi - \theta$ nous donne :

$$\begin{aligned} P(-x) &= \int_0^\pi \ln(1 + 2x \cos(t) + x^2) dt = \int_0^\pi \ln(1 + 2x \cos(\pi - \theta) + x^2) d\theta \\ &= \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(\theta) + x^2) d\theta = P(x) \end{aligned}$$

En écrivant que $|x^2 - e^{it}|^2 = |x - e^{i\frac{t}{2}}|^2 |x + e^{i\frac{t}{2}}|^2$, on a :

$$\begin{aligned} P(x^2) &= \int_0^\pi \ln(|x - e^{i\frac{t}{2}}|^2) dt + \int_0^\pi \ln(|x + e^{i\frac{t}{2}}|^2) dt \\ &= 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(|x - e^{i\theta}|^2) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(|x + e^{i\theta}|^2) d\theta \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(|x + e^{i\theta}|^2) d\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(|x + e^{i(\pi-t)}|^2) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(|x - e^{-it}|^2) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(|x - e^{it}|^2) dt \end{aligned}$$

ce qui donne $P(x^2) = 2 \int_0^\pi \ln(|x - e^{it}|^2) dt = 2P(x)$, ce qui est aussi valable

pour $x = 0$. Enfin avec $\left| \frac{1}{x} - e^{it} \right| = \frac{|x - e^{it}|}{|x|}$, on obtient :

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\pi \ln\left(\frac{|x - e^{it}|^2}{x^2}\right) dt = P(x) - 2\pi \ln(|x|)$$

- On procède par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$, c'est clair et pour $n = 1$, c'est vu à la question précédente. Supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a $P(x^{2^{n+1}}) = P((x^{2^n})^2) = 2P(x^{2^n}) = 2^{n+1}P(x)$, soit le résultat attendu au rang $n + 1$.
- Comme φ est continue sur $(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \times [0, \pi]$ et l'intégration se fait sur un segment, la fonction P est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Il en résulte que P est bornée sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Pour x fixé dans $] -1, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{2^n} = 0$, donc $x^{2^n} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ pour n assez grand et avec $|P(x)| = \frac{|P(x^{2^n})|}{2^n} \leq \frac{M}{2^n}$ où $M = \sup_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |P(x)|$, on déduit que $P(x) = 0$. Puis de l'égalité $P(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + 2\pi \ln(|x|)$, on déduit que $P(x) = 2\pi \ln(|x|)$ pour $|x| > 1$.

Exercice 5.4. Intégrales de Wallis

$(W_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des intégrales de Wallis.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel t , on a :

$$(\cos(t))^n = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \cos((2k-n)t)$$

puis en déduire que $W_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{\pi}{2}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, puis que $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \pi$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(t))^n dt = \frac{\pi}{2^{n-1}} \binom{2n}{n}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{n+1}}{(n+1)\pi}$.

Solution.

1. Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\theta) d\theta$$

2. On a :

$$(\cos(t))^n = \frac{(e^{it} + e^{-it})^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikt} e^{-i(n-k)t} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)t}$$

donc $(\cos(t))^n = \Re \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)t} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \cos((2k-n)t)$. Il en résulte que $W_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\binom{2n}{k}}{2^{2n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2(k-n))t) dt = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{\pi}{2}$.

3. Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) (1 - \cos^2(t)) dt = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos(t) \cos(t) dt \\ &= W_n - \left[\cos(t) \frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) dt = W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1} \end{aligned}$$

donc $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ et :

$$u_{n+1} = (n+2) W_{n+1} W_{n+2} = (n+2) W_{n+1} \frac{n+1}{n+2} W_n = u_n$$

Il en résulte que $u_n = u_0 = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$, $W_{n+1} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(n+1)W_n}$ et :

$$W_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n+1)W_{2n}} = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \binom{2n}{n}}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(t))^n dt &= 2^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{t}{2} \right) dt = 2^{n+1} \int_0^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{t}{2} \right) dt \\ &= 2^{n+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx = 2^{n+2} W_{2n} = \frac{\pi}{2^{n-1}} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(t))^n dt &= 2 \int_0^{\pi} (1 + \cos(t))^n dt \\ &\geq 2 \int_0^{\pi} (1 + \cos(t))^n \sin(t) dt = 2J_n \end{aligned}$$

et le changement de variable $x = \cos(t)$ nous donne :

$$J_n = \int_{-1}^1 (1+x)^n dx = \left[\frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{n+1}$$

$$\text{donc } \binom{2n}{n} = \frac{2^{n-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(t))^n dt \geq \frac{2^{n-1}}{\pi} \frac{4}{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\pi}.$$

Exercice 5.5. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^{\alpha x} - 1} dx$ pour $\Re(\alpha) > 0$

Montrer que, pour tout nombre complexe α tel que $\Re(\alpha) > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^{\alpha x} - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 \alpha^2}.$$

Solution. Pour $\Re(\alpha) > 0$, on a $e^{\alpha x} \neq 1$ pour tout réel $x > 0$.

Avec $f(x) = \frac{\sin(x)}{e^{\alpha x} - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\alpha x} = \frac{1}{\alpha}$, on déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et avec

$$|f(x)| \leq \frac{1}{e^{\Re(\alpha)x} |1 - e^{-\alpha x}|} \leq \frac{1}{e^{\Re(\alpha)x} (1 - e^{-\Re(\alpha)x})} = \underset{x \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{e^{\Re(\alpha)x}} \right)$$

on déduit que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est absolument convergente.

Comme $|e^{-\alpha x}| = e^{-\Re(\alpha)x} \in]0, 1[$ pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{e^{\alpha x}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\alpha x}} = \frac{\sin(x)}{e^{\alpha x}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\alpha x}$$

avec $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k\alpha x} = \frac{e^{-(n+1)\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 - e^{-\alpha x}}$ étant bornée sur $\mathbb{R}^+$ (elle est continue et $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{(1 - e^{-\Re(\alpha)x})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$), on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^{\alpha x}} R_n(x) dx \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1 - e^{-\alpha x}} e^{-(n+2)\alpha x} dx \right| \\ &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-(n+2)\Re(\alpha)x} dx = \frac{M}{(n+2)\Re(\alpha)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^{\alpha x} - 1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-(n+1)\alpha x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-n\alpha x} dx$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-n\alpha x} dx &= \frac{1}{2i} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(n\alpha - i)x} dx - \int_0^{+\infty} e^{-(n\alpha + i)x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{n\alpha - i} - \frac{1}{n\alpha + i} \right) = \frac{1}{1 + n^2 \alpha^2} \end{aligned}$$

Exercice 5.6. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-x}} dx$

On rappelle que la fonction Γ est définie par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ pour tout nombre complexe z tel que $\Re(z) > 0$.

1. Montrer que pour tout nombre complexe α tel que $\Re(\alpha) > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1} dx = \Gamma(\alpha + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

2. Montrer que pour tout nombre complexe α tel que $\Re(\alpha) > 0$ et tout réel $\beta > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-x}} dx = \Gamma(\alpha + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n + \beta)^{\alpha+1}}$$

Solution.

1. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{e^x - 1} = \frac{x^\alpha e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^\alpha e^{-(n+1)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

les fonctions f et f_n étant continues sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} x^{\Re(\alpha)} e^{-(n+1)x} dx < +\infty$$

Le changement de variable $t = (n+1)x$ nous donne :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \frac{1}{(n+1)^{\Re(\alpha)+1}} \int_0^{+\infty} t^{\Re(\alpha)} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\Re(\alpha)+1)}{(n+1)^{\Re(\alpha)+1}}$$

avec $\sum \frac{1}{(n+1)^{\Re(\alpha)+1}} < +\infty$ pour $\Re(\alpha) > 0$. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(n+1)x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{x^\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^\alpha e^{-(n+\beta)x}$. Les fonctions $x \mapsto$

$\frac{x^\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-x}}$ et $x \mapsto x^\alpha e^{-(n+\beta)x}$, pour $n \geq 0$, sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |x^\alpha e^{-(n+\beta)x}| dx &= \int_0^{+\infty} x^{\Re(\alpha)} e^{-(n+\beta)x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\Re(\alpha)}}{(n+\beta)^{\Re(\alpha)}} e^{-t} \frac{dt}{n+\beta} \\ &= \frac{1}{(n+\beta)^{\Re(\alpha)+1}} \Gamma(\Re(\alpha)+1) \end{aligned}$$

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\beta)^{\Re(\alpha)+1}} < +\infty$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-x}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(n+\beta)x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma(\alpha+1) \frac{1}{(n+\beta)^{\alpha+1}}$$

Pour $\alpha = \beta = 1$, on retrouve $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5.7. La méthode de Laplace

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite finie ℓ en 1^- et telle que l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ soit convergente. On se propose de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = \ell$, soit que $\int_0^1 x^n f(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$ pour ℓ non nul, ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ pour $\ell = 0$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$.
2. Montrer le résultat annoncé pour f de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$.
3. Montrer le résultat annoncé pour f continue sur $]0, 1[$.

Solution. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, 1[$, $f_n(x) = x^n f(x)$.

1. Les fonctions f_n sont continues sur $]0, 1[$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, 1[$, $|f_n(x)| \leq |f(x)|$, la fonction $|f|$ étant intégrable sur $]0, 1[$. Les intégrales $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ sont donc bien définies et avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n f(x) = 0$ pour tout $x \in]0, 1[$, on déduit du théorème de convergence dominée que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
2. Pour f de classe C^1 sur $[0, 1]$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} nI_n &= \left[\frac{n}{n+1} x^{n+1} f(x) \right]_0^1 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \\ &= \frac{n}{n+1} \left(f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \right) \end{aligned}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx = 0$ (en utilisant la question précédente avec la fonction f' qui est continue sur $[0, 1]$), ce qui nous donne bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 0$.

3. En écrivant que $nI_n = \int_0^1 nx^n (f(x) - \ell) dx + \ell \frac{n}{n+1}$, il s'agit de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nx^n (f(x) - \ell) dx = 0$ (on s'est en fait ramené au cas où $\ell = 0$). Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ell$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in [\alpha, 1[, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 nx^n (f(x) - \ell) dx \right| &\leq \left| \int_0^\alpha nx^n (f(x) - \ell) dx \right| + \left| \int_\alpha^1 nx^n (f(x) - \ell) dx \right| \\
 &\leq \left| \int_0^\alpha nx^n (f(x) - \ell) dx \right| + \varepsilon \int_\alpha^1 nx^n dx \\
 &\leq \left| \int_0^\alpha nx^n (f(x) - \ell) dx \right| + \varepsilon \frac{n}{n+1} (1 - \alpha^{n+1}) \\
 &\leq \left| \int_0^\alpha nx^n (f(x) - \ell) dx \right| + \varepsilon
 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0, \alpha[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^n (f(x) - \ell) = 0$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, nx^n |f(x) - \ell| \leq n\alpha^n |f(x) - \ell|$$

la suite $(n\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 étant majorée, ce qui nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, nx^n |f(x) - \ell| \leq M_\alpha |f(x) - \ell|$$

où $M_\alpha > 0$ est une constante réelle. Le théorème de convergence dominée nous dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha nx^n (f(x) - \ell) dx = 0$, donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left| \int_0^\alpha nx^n (f(x) - \ell) dx \right| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On a donc :

$$\forall n \geq n_0, \left| \int_0^1 nx^n (f(x) - \ell) dx \right| < 2\varepsilon$$

soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nx^n (f(x) - \ell) dx = 0$.

Exercice 5.8. Volume de la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

On note $V_0 = 1$, $V_1 = 2$ est la longueur du segment $[-1, 1]$ et $V_2 = \pi$ est l'aire du disque unité dans le plan. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $R \in \mathbb{R}^{+,*}$, le volume $V_n(R)$ de la boule $B_n(0, R)$ de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ est donné par $V_n(R) = R^n V_n$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$.
3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$, où Γ est la fonction gamma d'Euler, soit pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$V_{2p} = \frac{\pi^p}{p!} \text{ et } V_{2p+1} = \frac{2^{2p+1} p!}{(2p+1)!} \pi^p$$

4. En désignant par $(W_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des intégrales de Wallis (voir l'exercice 5.4), montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $V_n = 2V_{n-1}W_n$, puis en déduire une expression de W_n .
5. Montrer que $\frac{W_n}{W_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$ pour $n \geq 2$ et $V_n = \frac{2^{n-1}\pi^{n-2}}{n} \prod_{k=1}^{n-2} W_k$ pour $n \geq 3$.
6. Calculer le volume d'un ellipsoïde d'équation $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$ dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^n$ (voir aussi le problème 13.1).
7. Donner un équivalent de V_n à l'infini et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.
8. Que valent $\max_{n \geq 1} V_n$ et $\sum_{p \geq 0} V_{2p}$?

Solution.

1. Le changement de variable $x = R$ de jacobien $J = R^n$, nous donne :

$$V_n(R) = \int_{B_n(0,R)} dx = \int_{B_n(0,1)} R^n dy = R^n V_n$$

2. Pour $n \geq 3$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} (x \in B_n) &\Leftrightarrow \left(x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ et } \sum_{k=3}^n x_k^2 \leq 1 - (x_1^2 + x_2^2) \right) \\ &\Leftrightarrow \left((x_1, x_2) \in B_2 \text{ et } (x_3, \dots, x_n) \in B_{n-2} \left(0, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \right) \right) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{B_n} dx = \int_{B_2} \left(\int_{B_{n-2} \left(0, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \right)} dx_3 \cdots dx_n \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{B_2} V_n \left(\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \right) dx_1 dx_2 = V_n \int_{B_2} (1 - (x_1^2 + x_2^2))^{\frac{n-2}{2}} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

(théorème de Fubini), puis en utilisant un passage en coordonnées polaires, on a :

$$\begin{aligned} \int_{B_2} (1 - (x_1^2 + x_2^2))^{\frac{n-2}{2}} dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr d\theta \\ &= \pi \int_0^1 (1 - t)^{\frac{n-2}{2}} dt = \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

donc $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$, cette égalité étant encore valable pour $n = 2$.

3. On vérifie que les suites $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $U_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$ sont solutions de la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 avec les mêmes conditions initiales.

On a $U_0 = V_0 = 1$, $U_1 = V_1 = 2$ ($\Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$) et pour $n \geq 2$:

$$U_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\pi}{n} \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2} + 1)} = \frac{2\pi}{n} U_{n-2}$$

Il en résulte que $V_n = U_n$ pour tout $n \geq 0$.

Se rappelant que $\Gamma(p+1) = p!$ et $\Gamma(p + \frac{1}{2}) = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$, on obtient :

$$V_n = \begin{cases} \frac{\pi^p}{\Gamma(p+1)} = \frac{\pi^p}{p!} & \text{si } n = 2p \\ \frac{\pi^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma(p+1+\frac{1}{2})} = \frac{2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}\pi^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

4. En utilisant le théorème de Fubini, on a pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{-1}^1 \left(\int_{B_{n-1}(0, \sqrt{1-x_n^2})} dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n \\ &= 2 \int_0^1 \left(\int_{B_{n-1}(0, \sqrt{1-x_n^2})} dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n \\ &= 2 \int_0^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2}) dx_n = 2V_{n-1} \int_0^1 (1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n \end{aligned}$$

avec :

$$\int_0^1 (1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))^{\frac{n-1}{2}} \sin(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = W_n$$

ce qui nous donne $V_n = 2V_{n-1}W_n$, cette formule étant encore valable pour $n = 1$ ($V_1 = 2 = 2V_0W_1$). Il en résulte que pour $n \geq 1$, on a :

$$W_n = \frac{1}{2} \frac{V_n}{V_{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}}{\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)}{2 \Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{n \Gamma(\frac{n}{2})}$$

soit :

$$W_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{2p+1}} \binom{2p}{p} & \text{si } n = 2p \\ \frac{1}{2p+1} \frac{2^{2p}}{\binom{2p}{p}} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

5. Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{W_{n-2}} &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n} \frac{n-2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{n-2}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2} + 1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\ &= \frac{n-2}{n} \frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-2}{2}} = \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

Pour $n = 3$, on a $V_3 = \frac{4}{3}\pi = \frac{2^2\pi}{3}W_1$ et supposant le résultat acquis pour $n-1 \geq 3$, on a :

$$\begin{aligned} V_n &= 2V_{n-1}W_n = 2 \frac{2^{n-2}\pi}{n-1} \left(\prod_{k=1}^{n-3} W_k \right) W_n = \frac{2^{n-1}\pi}{n} \left(\prod_{k=1}^{n-2} W_k \right) \frac{n}{n-1} \frac{W_n}{W_{n-2}} \\ &= \frac{2^{n-1}\pi}{n} \left(\prod_{k=1}^{n-2} W_k \right) \end{aligned}$$

6. Le volume de l'ellipsoïde d'équation $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$ est :

$$V = \int_{\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1} dx_1 \cdots dx_n = \prod_{i=1}^n a_i \int_{\sum_{1 \leq i \leq n} t_i^2 \leq 1} dt_1 \cdots dt_n = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) V_n$$

(changement de variables $x_i = a_i t_i$ de jacobien $J = \prod_{i=1}^n a_i$).

7. Utilisant la formule de Stirling $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$ (problème 9.1), on obtient :

$$V_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2e\pi}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

8.

(a) En calculant $\frac{V_{2p}}{V_{2p+1}} = \frac{(2p+1)!}{p!2^{2p+1}p!}$ et $\frac{V_{2p-1}}{V_{2p}}$, on voit que V_n croît jusqu'à 5 puis décroît, donc $\max_{n \geq 1} V_n = V_5 = \frac{8\pi^2}{15}$.

(b) On a $\sum_{p \geq 0} V_{2p} = \sum_{p \geq 0} \frac{\pi^p}{p!} = e^\pi$. Avec la décroissance de $(V_n)_{n \geq 5}$, on retrouve le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$.

Exercice 5.9. Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$.

1. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$.
2. Vérifier que $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t)) dt$, puis en déduire la valeur de I .
3. Justifier la convergence et montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$.
4. Montrer que $I = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$.
5. Montrer que la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2 t^2)}{1+t^2} dt$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+,*}$, calculer sa dérivée, puis en déduire la valeur de $\varphi(x)$ pour tout réel $x > 0$, puis retrouver celle de I .

Voir aussi l'exercice 3.1 et le problème 4.1.

Solution. On note $f(t) = \ln(\sin(t))$ pour tout réel $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $f(t) = \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \ln(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = 0$, donc la fonction $t \mapsto \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$ se prolonge par continuité en 0 et de la convergence de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t) dt$, on déduit celle de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$.
2. Le changement de variable $t = \pi - u$ nous donne pour $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\varepsilon} \ln(\sin(t)) dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} I$$

ce qui signifie que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t)) dt = I$. On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt - \frac{\pi}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin(2t)) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) \frac{du}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) \frac{du}{2} = I\end{aligned}$$

ce qui nous donne $2I = I - \frac{\pi}{2} \ln(2)$ et $I = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$.

3. On a $\left| \frac{\ln(t)}{1+t^2} \right| \underset{t \rightarrow 0+}{\sim} |\ln(t)|$ et $\left| \frac{\ln(t)}{1+t^2} \right| = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{\sqrt{t}}{1+t^2} \right)$, ce qui assure la convergence de l'intégrale. Le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt &= \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{x^2}} \frac{dx}{x^2} \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = 0\end{aligned}$$

4. Le changement de variable $u = \tan(t)$ nous donne pour $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$,

$$du = (1+u^2) dt, \sin(t) = \tan(t) \cos(t) = \frac{\tan(t)}{\sqrt{1+\tan^2(t)}} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \text{ et :}$$

$$\begin{aligned}\int_x^y \ln(\sin(t)) dt &= \int_{\tan(x)}^{\tan(y)} \ln\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) \frac{du}{1+u^2} \\ &= \int_{\tan(x)}^{\tan(y)} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du - \frac{1}{2} \int_{\tan(x)}^{\tan(y)} \frac{\ln(1+u^2)}{1+u^2} du\end{aligned}$$

Faisant tendre (x, y) vers $(0, \frac{\pi}{2})$, on en déduit la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt \text{ et l'égalité } I = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt.$$

5. La fonction $\psi : (x, t) \mapsto \frac{\ln(1+x^2 t^2)}{1+t^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout réel

$x \geq 0$ on a, $|\psi(x, t)| = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{\sqrt{t}}{1+t^2} \right)$, donc $\varphi(x)$ est bien définie.

Pour $0 < a < b$ et $x \in [a, b]$, on a :

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \varphi(x, t) \right| = \frac{2xt^2}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} \leq \frac{2bt^2}{(1+a^2 t^2)(1+t^2)} \leq g(t) = \frac{2b}{1+a^2 t^2}$$

la fonction g étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de dérivation de Lebesgue nous dit alors que la fonction φ est de classe C^1 sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+,*}$,

donc sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} dt$. Utilisant la décomposition en éléments simples, pour $x \in \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\}$:

$$\frac{2xt^2}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} = \frac{at+b}{1+x^2 t^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

avec $a = c = 0$ (parité), $b + d = 0$ (évaluation en $t = 0$) et $\frac{2}{x} = \frac{b}{x^2} + d$ (multiplication par t^2 et limite en $+\infty$), ce qui nous donne $d = -b$ et $b = \frac{2x}{1-x^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= b \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^2 t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right) \\ &= b \left(\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right) = \frac{2x}{1-x^2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{\pi}{1+x}\end{aligned}$$

ce résultat étant encore valable en 1 par continuité de φ' . Il en résulte que, pour tout réel $x > 0$, on a $\varphi(x) = \pi \ln(1+x) + f(0) = \pi \ln(1+x)$. Pour $x = 1$, on obtient $I = -\frac{1}{2}\varphi(1) = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$.

Exercice 5.10. Comparaison série-intégrale.

À toute fonction $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ qui est Riemann intégrable sur tout segment contenu dans $\mathbb{R}^+$, on associe la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante à valeurs positives.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^n f(k) - F(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente vers un réel $\ell \in [0, f(0)]$.

(b) Montrer que la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

(c) Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t) dt = +\infty$, alors $\sum_{k=0}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} F(n)$.

(d) Dans le cas où $\int_0^{+\infty} f(t) dt < +\infty$ et la suite $\left(\int_n^{+\infty} f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} = 1$ (ce qui signifie qu'elle converge lentement vers 0), montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t) dt$.

(e) Donner un exemple où $\int_0^{+\infty} f(t) dt < +\infty$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ n'est pas équivalent à $\int_n^{+\infty} f(t) dt$.

- (f) Étudier les cas des fonctions définies sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ et $f(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$ où α, β sont des réels strictement positifs.
2. Montrer que, pour tout réel α strictement positif, la série $\sum e^{-n^\alpha}$ est convergente.
 3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ une fonction dérivable de dérivée positive et décroissante. Montrer que les séries $\sum f'(n)$ et $\sum \frac{f'(n)}{f(n)}$ sont de même nature.
 4. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.
 5. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$, la suite $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant minorée par un réel $m > 0$ et majorée par un réel $M > 0$. Montrer que, pour toute fonction $f : [\lambda_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante et à valeurs positives, la série $\sum f(\lambda_n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_{\lambda_0}^{+\infty} f(t) dt$.
 6. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f'(t)| dt$ soit convergente. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^n f(k) - F(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est convergente et la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.
 7. Étudier les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour α complexe, $\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ et $\sum \frac{\cos(\ln(n))}{n^\beta}$ pour réel β réel strictement positif.

Solution.

1. Pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante, la convergence de $\sum f(n)$ ou de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ entraîne que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et f est nécessairement à valeurs positives (exercice 5.2).
- (a) Comme f est décroissante, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t)) dt \leq 0$$

et :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^n f(k) - F(n) \geq \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} f(t) dt - F(n) \\ &\geq \int_0^{n+1} f(t) dt - F(n) = F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(t) dt \geq 0 \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante minorée par 0 et en conséquence convergente vers $\ell \in [0, f(0)]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq u_0 = f(0)$).

- (b) Comme la fonction f est à valeurs positives, on a deux possibilités : soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \ell + \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

soit $\int_0^{+\infty} f(t) dt = +\infty$ et dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = +\infty$$

En conclusion, $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

- (c) Dans le cas où $\int_0^{+\infty} f(t) dt = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = +\infty$ et il existe un entier n_0 tel que $F(n) \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$ et :

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^n f(k)}{F(n)} - 1 \right| = \frac{\left| \sum_{k=0}^n f(k) - F(n) \right|}{F(n)} = \frac{|u_n|}{F(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\sum_{k=0}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} F(n)$.

- (d) Dans le cas où $\int_0^{+\infty} f(t) dt < +\infty$, des inégalités :

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

on déduit que, pour $m > n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{n+1}^{m+1} f(t) dt &= \sum_{k=n+1}^m \int_k^{k+1} f(t) dt \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m f(k) \leq \sum_{k=n+1}^m \int_{k-1}^k f(t) dt = \int_n^m f(t) dt \end{aligned}$$

et faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

En supposant que $\int_n^{+\infty} f(t) dt > 0$ pour n assez grand, on peut écrire que

$$\frac{\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} \leq \frac{\sum_{k \geq n+1} f(k)}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} \leq 1 \text{ et dans le cas où la convergence vers 0 de}$$

la suite $\left(\int_n^{+\infty} f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est lente, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k \geq n+1} f(k)}{\int_n^{+\infty} f(t) dt} = 1$,

soit $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t) dt$.

- (e) Pour $\alpha \in]0, 1[$, la fonction $f : t \mapsto \alpha^t$ est décroissante positive avec $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{\ln(\alpha)t} dt = -\frac{1}{\ln(\alpha)}$ et on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) = \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, \quad \int_n^{+\infty} f(t) dt = -\frac{\alpha^n}{\ln(\alpha)}$$

ces deux quantités n'étant pas équivalentes.

- (f) En utilisant la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ où $\alpha > 0$, on a pour tout réel $x \geq 1$:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Ce qui nous donne les résultats suivant sur les séries de Riemann.

— Pour $\alpha = 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \gamma \in [0, 1]$ (la constante d'Euler), $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

— Pour $0 < \alpha < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \in \left[-\frac{1}{1-\alpha}, -\frac{\alpha}{1-\alpha} \right]$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

— Pour $\alpha > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \in \left[\frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1} \right]$,
 $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
 Pour $n = 2$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n} \right) \in [1, 2]$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Pour $\beta > 0$, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$ est continue et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$, donc $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ est de même nature que la suite $(F(n))_{n \geq 2}$, où :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_2^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta} = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^\beta} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} \left((\ln(x))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta} \right) & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) & \text{si } \beta = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

— Pour $\beta = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} - \ln(\ln(n)) \right) &\in \left[2 - \ln(\ln(2)), \frac{1}{2 \ln(2)} - \ln(\ln(2)) \right] \\ \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)} &= +\infty, \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)} = +\infty \text{ et } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)) \end{aligned}$$

— Pour $0 < \beta < 1$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} - \frac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta} \right) \\ \in \left[2 - \frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{1-\beta}, \frac{1}{2(\ln(2))^\beta} - \frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{1-\beta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta} &= +\infty, \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} = +\infty \\ \text{et } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(n))^{1-\beta}}{1-\beta}. \end{aligned}$$

— Pour $\beta > 1$, on a $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta} = \frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta-1}$, $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} < +\infty$
 et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^\beta} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\beta-1} \frac{1}{(\ln(n))^{\beta-1}}$.

2. La fonction $f : x \in \mathbb{R}^{+,*} \mapsto e^{-x^\alpha}$ est à valeurs strictement positives et décroissante ($f'(x) = -\alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha} < 0$), donc $\sum e^{-n^\alpha}$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$. Le changement de variable $x = t^\alpha$, $dx = \alpha t^{\alpha-1} dt = \alpha x^{1-\frac{1}{\alpha}} dt$ nous donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} dx = \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) < +\infty$, donc $\sum e^{-n^\alpha}$ converge. Pour $\alpha \geq 1$, la convergence peut se montrer avec l'encadrement $0 < e^{-n^\alpha} \leq e^{-n}$, mais pour $0 < \alpha < 1$, c'est moins élémentaire.

3. Ce qui précède nous dit que $\sum f'(n)$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ (f' est positive et décroissante). Comme $f' \geq 0$, la fonction f est croissante positive et la fonction $g = \frac{f'}{f}$ est décroissante à valeurs positives, donc $\sum \frac{f'(n)}{f(n)}$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} dt$. Avec $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$ et :

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int_0^x (\ln(f(t)))' dt = \ln(f(x)) - \ln(f(0))$$

on déduit que $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} dt$ sont de même nature (chacune de ces intégrales converge si, et seulement si, f admet une limite à l'infini, cette limite étant strictement positive puisque f est croissante strictement positive).

En conclusion $\sum f'(n)$ et $\sum \frac{f'(n)}{f(n)}$ sont de même nature.

4. Comme f est continue strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, elle réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f^{-1} étant aussi continue strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Pour $x \geq 1$, on a $f(x) > f(0) = 0$ et $f^{-1}(x) > f^{-1}(0) = 0$, donc les suites $\left(\frac{1}{f(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{f^{-1}(n)}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont bien définies. La fonction $\frac{1}{f}$ étant décroissante positive, la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$.

Une intégration par parties, faite en posant $u(t) = \frac{1}{f(t)}$, $u'(t) = -\frac{f'(t)}{f^2(t)}$, $v'(t) = 1$, $v(t) = t$, nous donne, pour tout réel $x > 1$:

$$\int_1^x \frac{dt}{f(t)} = \frac{x}{f(x)} - \frac{1}{f(1)} + \int_1^x t \frac{f'(t)}{f^2(t)} dt$$

puis le changement de variable $x = f(t)$ (f est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$) nous donne :

$$\int_1^x \frac{dt}{f(t)} = \frac{x}{f(x)} - \frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{f(x)} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx$$

Dans le cas où la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$ et $\frac{1}{f(x)} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ puisque $\frac{1}{f}$ est décroissante positive, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = 0$ et l'intégrale $\int_{f(1)}^{+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx$ est convergente.

Avec $0 < \frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2} < \int_n^{n+1} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que la série $\sum \frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2}$ est convergente et il en est de même de $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$. Réciproquement si la série $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum \frac{f^{-1}(n)}{(n-1)^2}$

et des inégalités $0 < \int_{n-1}^n \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx \leq \frac{f^{-1}(n)}{(n-1)^2}$ pour tout $n \geq 2$, on déduit que la série $\sum \int_{n-1}^n \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx$ converge, ce qui revient à dire que la suite $\left(\int_1^n \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Avec $0 < \int_1^x \frac{f^{-1}(t)}{t^2} dt \leq \int_1^{n+1} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx$, où n est la partie entière de x , on déduit que l'intégrale $\int_{f(1)}^{+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx$ est convergente.

Des inégalités $0 < \frac{f^{-1}(x)}{4x^2} x \leq \int_x^{2x} \frac{f^{-1}(t)}{t^2} dt$, on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = 0$, ce qui équivaut à $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{f(t)} = 0$. Il en résulte que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$ converge ainsi que $\sum \frac{1}{f(n)}$.

5. Comme f est décroissante, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$f(\lambda_{n+1})(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \leq \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(t) dt \leq f(k) \leq f(\lambda_n)(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

Avec les inégalités $0 < m \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq M$, on déduit que :

$$m \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n) \leq \int_{\lambda_0}^{+\infty} f(t) dt \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n)$$

et le résultat annoncé.

6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^n f(k) - F(n+1) = \sum_{k=0}^n f(k) - \sum_{k=0}^n (F(k+1) - F(k)) \\ &= - \sum_{k=0}^n (F(k+1) - F(k) - F'(k)) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} F(k+1) - F(k) - F'(k) &= \int_k^{k+1} (k+1-t) F''(t) dt \\ &= \int_k^{k+1} (k+1-t) f'(t) dt \end{aligned}$$

et $\left| \int_k^{k+1} (k+1-t) f'(t) dt \right| \leq \int_k^{k+1} |f'(t)| dt$, la série $\sum \int_k^{k+1} |f'(t)| dt$ étant convergente si $\int_0^{+\infty} |f'(t)| dt$ converge. Il en résulte que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n+1) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ et la série $\sum f(n)$ est convergente de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

Si la série $\sum f(n)$ est convergente, la suite $(F(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

Pour tout réel $x > 1$, en désignant par n_x la partie entière de x , on a :

$$\int_0^x f(t) dt = F(n_x) + \int_{n_x}^x f(t) dt$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{n_x}^x f(t) dt &= [(t-x)f(t)]_{n_x}^x - \int_{n_x}^x (t-x)f'(t) dt \\ &= (x-n_x)f(n_x) - \int_{n_x}^x (t-x)f'(t) dt \end{aligned}$$

et $\left| \int_{n_x}^x f(t) dt \right| \leq |f(n_x)| - \int_{n_x}^x |f'(t)| dt$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(n_x)| = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} n_x = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ (convergence de $\sum f(n)$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{n_x}^x |f'(t)| dt = 0$ car $\int_0^{+\infty} |f'(t)| dt$ converge. Il en résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n)$, ce qui signifie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

7.

(a) En utilisant la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha} = e^{-\alpha \ln(t)}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$, on a :

$$\int_1^{+\infty} |f'(t)| dt = \int_1^{+\infty} \left| \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \right| dt = |\alpha| \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\Re(\alpha)+1}} dt < +\infty$$

pour $\Re(\alpha) > 0$. On en déduit, dans ce cas, que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, soit convergente pour $\Re(\alpha) > 1$ (ce qui est facile à voir avec $\sum \left| \frac{1}{n^\alpha} \right| = \sum \frac{1}{n^{\Re(\alpha)}} < +\infty$) et divergente pour $0 < \Re(\alpha) \leq 1$. Pour $\alpha = 1$, c'est fait et pour $0 < \Re(\alpha) < 1$, on a $\int_1^x f(t) dt = \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - 1)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x^{1-\alpha}| = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-\Re(\alpha)} = +\infty$. Pour $\alpha = 1+ib$ avec $b \neq 0$, on a $x^{1-\alpha} = x^{-ib} = e^{-ib \ln(x)}$ qui n'a pas de limite à l'infini (pour $\ln(x_n) = \frac{n\pi}{b}$, on a $e^{-ib \ln(x_n)} = e^{-in\pi} = (-1)^n$). Pour $\Re(\alpha) \leq 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha} \right) = (n^{-\Re(\alpha)})$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

- (b) En désignant par f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{\cos(\sqrt{t})}{t}$, on a :

$$\forall t \geq 1, |f'(t)| = \left| -\frac{\sin(\sqrt{t})}{2t^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos(\sqrt{t})}{t^2} \right| \leq \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{t^2}$$

d'où la convergence absolue de $\int_1^{+\infty} f'(t) dt$. La série $\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ est donc de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{t})}{t} dt$.

Pour $x > 1$, le changement de variable $t = u^2$ nous donne :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\cos(\sqrt{t})}{t} dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(u)}{u} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2 \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$$

(l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ est semi-convergente), ce qui signifie que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge. Il en résulte que $\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ est convergente.

- (c) On vérifie facilement que, pour tout réel $\alpha > 1$, les séries $\sum \frac{\cos(\ln(n))}{n^\alpha}$, $\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n^\alpha}$ et les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ sont absolument convergentes ($\left| \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ et $\left| \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$). Pour tout réel α , on désigne par f_α et g_α les fonctions définies sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \geq 1, f_\alpha(t) = \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} \text{ et } g_\alpha(t) = \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec :

$$f'_{\alpha-1}(t) = -\frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} + (1-\alpha) \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} = -g_\alpha(t) + (1-\alpha) f_\alpha(t)$$

et :

$$g'_{\alpha-1}(t) = \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} + (1-\alpha) \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} = f_\alpha(t) + (1-\alpha)g_\alpha(t)$$

Il en résulte que :

$$(1-\alpha)f'_{\alpha-1}(t) + g'_{\alpha-1}(t) = (1 + (1-\alpha)^2)f_\alpha(t)$$

et $(1-\alpha)g'_{\alpha-1}(t) - f'_{\alpha-1}(t) = (1 + (1-\alpha)^2)g_\alpha(t)$. On obtient alors par intégration :

$$\begin{aligned} (1 + (1-\alpha)^2) \int_1^x f_\alpha(t) dt &= \int_1^x ((1-\alpha)f'_{\alpha-1}(t) + g'_{\alpha-1}(t)) dt \\ &= (1-\alpha)(f_{\alpha-1}(x) - f_{\alpha-1}(1)) + g_{\alpha-1}(x) - g_{\alpha-1}(1) \\ &= (1-\alpha)(f_{\alpha-1}(x) - 1) + g_{\alpha-1}(x) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (1 + (1-\alpha)^2) \int_1^x g_\alpha(t) dt &= \int_1^x ((1-\alpha)g'_{\alpha-1}(t) - f'_{\alpha-1}(t)) dt \\ &= (1-\alpha)(g_{\alpha-1}(x) - g_{\alpha-1}(1)) - (f_{\alpha-1}(x) - f_{\alpha-1}(1)) \\ &= (1-\alpha)g_{\alpha-1}(x) + 1 - f_{\alpha-1}(x) \end{aligned}$$

ce qui donne $\int_1^x f_\alpha(t) dt = \frac{(1-\alpha)f_{\alpha-1}(x) + g_{\alpha-1}(x)}{1 + (1-\alpha)^2} - \frac{(1-\alpha)}{1 + (1-\alpha)^2}$ et $\int_1^x g_\alpha(t) dt = \frac{(1-\alpha)g_{\alpha-1}(x) - f_{\alpha-1}(x)}{1 + (1-\alpha)^2} + \frac{1}{1 + (1-\alpha)^2}$. Avec $|f_\alpha(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}$ et $|g_\alpha(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_\alpha(x) = 0$ pour $\alpha > 0$. Donc, pour $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ sont absolument convergentes avec :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt &= \frac{\alpha-1}{1 + (\alpha-1)^2} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} \\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt &= \frac{1}{1 + (\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha + 2} \end{aligned}$$

Pour $\alpha \leq 1$, la fonction :

$$\varphi_\alpha(x) = (1-\alpha)f_{\alpha-1}(x) + g_{\alpha-1}(x) = \frac{(1-\alpha)\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x))}{x^{\alpha-1}}$$

n'a pas de limite quand x tend vers l'infini puisque la suite définie par $\varphi_\alpha(e^{\frac{\pi}{2} + n\pi}) = (-1)^n e^{(1-\alpha)(\frac{\pi}{2} + n\pi)}$ est divergente, d'où la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$. On vérifie de manière analogue que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$

est divergente. Avec $f'_\alpha = -g_{\alpha+1}(t) - \alpha f_{\alpha+1}(t)$ et, pour $\alpha > 0$, la convergence absolue des intégrales $\int_1^{+\infty} f_{\alpha+1}(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} g_{\alpha+1}(t) dt$, on déduit que $\int_1^{+\infty} f'_\alpha(t) dt$ converge absolument.

Pour $\alpha > 0$, les séries $\sum \frac{\cos(\ln(n))}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n^\alpha}$ sont de même nature que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$, c'est-à-dire divergentes pour $0 < \alpha \leq 1$ et convergentes pour $\alpha > 1$. On déduit alors du théorème des séries alternées que la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt$ sont convergentes.

Exercice 5.11. Aire du domaine délimité par une courbe simple

Soit γ un arc géométrique du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 paramétré par :

$$\begin{array}{ccc} \gamma : & [a, b] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto (x(t), y(t)) \end{array}$$

On dit que γ est une courbe de Jordan, si $\gamma(a) = \gamma(b)$ (γ est un arc fermé) et la restriction de γ à $]a, b[$ est injective, c'est-à-dire que $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ pour $a < t_1 < t_2 < b$ (γ est sans points doubles). Dans ce cas, on admet que l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a, b])$ a deux composantes connexes, l'une étant bornée et l'autre pas (théorème de Jordan qui n'est pas facile à démontrer). La composante connexe bornée $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a, b])$ est l'intérieur de γ .

Le théorème de Green-Riemann nous dit que pour toute forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

l'arc γ étant parcouru dans le sens direct.

1. Montrer que l'aire de $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{D}) &= \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt \\ &= \int_a^b x(t)y'(t) dt = - \int_a^b x'(t)y(t) dt \end{aligned}$$

2. On se donne une courbe de Jordan d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, où $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de classe C^1 (avec $f(\alpha)e^{i\alpha} = f(\beta)e^{i\beta}$).

Montrer que l'aire de $\mathcal{D}$ est donnée par $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(\theta) d\theta$.

3. Calculer l'aire de l'intérieur de la lemniscate d'équation $\rho^2 = a^2 \cos(2\theta)$ où $a > 0$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

4. Calculer l'aire de l'intérieur de la courbe d'équation $x^2 + y^5 - 5ax^2y^2 = 0$ où $a > 0$ et $x > 0, y > 0$.

Solution.

1. Le théorème de Green-Riemann pour $\omega = -ydx + xdy$ nous donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \int_{\gamma} P dx + Q dy \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (x(t) y'(t) - x'(t) y(t)) dt \end{aligned}$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\int_a^b x(t) y'(t) dt = [x(t) y(t)]_a^b - \int_a^b x'(t) y(t) dt = - \int_a^b x'(t) y(t) dt$$

puisque $\gamma(a) = \gamma(b)$, donc :

$$\int_a^b (x(t) y'(t) - x'(t) y(t)) dt = 2 \int_a^b x(t) y'(t) dt = -2 \int_a^b x'(t) y(t) dt$$

2. On a $\gamma(\theta) = f(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta))$, donc :

$$\begin{aligned} x(\theta) y'(\theta) - x'(\theta) y(\theta) &= f(\theta) \cos(\theta) (f(\theta) \cos(\theta) + f'(\theta) \sin(\theta)) \\ &\quad - f(\theta) \sin(\theta) (-f(\theta) \sin(\theta) + f'(\theta) \cos(\theta)) = f^2(\theta) \end{aligned}$$

$$\text{et } \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta.$$

3. Pour une lemniscate de Bernoulli (figure 5.2), on a par symétrie :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = a^2$$

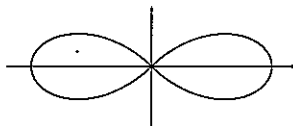


FIGURE 5.2 – Lemniscate de Bernoulli

4. En passant en coordonnées polaires, on a :

$$\rho \left(\cos(\theta)^5 + \sin(\theta)^5 \right) = 5a \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{D}) &= \frac{25a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4(\theta) \sin^4(\theta)}{(\cos(\theta)^5 + \sin(\theta)^5)^2} d\theta \\ &= \frac{25a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^4(\theta)}{(1 + \tan(\theta)^5)^2} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = \frac{25a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^5)^2} dx \\ &= \frac{5a^2}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{5a^2}{2} \end{aligned}$$

Problème 5.1. Produit de convolution et un théorème de Titchmarsh

Pour tout intervalle réel I [resp. toute partie $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$], où I, J sont des intervalles réels d'intérieur non vide, on désigne par $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{C}^0(I \times J, \mathbb{R})$] l'espace vectoriel des fonctions continues de I [resp. de $I \times J$] dans $\mathbb{R}$.

– I – Théorème de Fubini sur un rectangle et sur un triangle

1. Étant donnée une fonction $\psi \in \mathcal{C}^0([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$, où $a < b$ et $c < d$, on lui associe les fonctions α et β définies sur $[c, d]$ par :

$$\forall z \in [c, d], \quad \begin{cases} \alpha(z) = \int_c^z \left(\int_a^b \psi(t, x) dt \right) dx \\ \beta(z) = \int_a^b \left(\int_c^z \psi(t, x) dx \right) dt \end{cases}$$

- (a) Montrer que la fonction α est de classe C^1 sur $[c, d]$ et donner une expression de sa dérivée α' .
- (b) On désigne par χ la fonction définie sur le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ par $\chi(t, z) = \int_c^z \psi(t, x) dx$. Montrer que la fonction χ est continue sur R et qu'elle admet une dérivée partielle par rapport à z en tout point de R , cette dérivée $\frac{\partial \chi}{\partial z}$ étant continue sur R .
- (c) Montrer que la fonction β est de classe C^1 sur $[c, d]$ et donner une expression de sa dérivée β' .
- (d) Dédire de ce qui précède que :

$$\forall z \in [c, d], \quad \int_c^z \left(\int_a^b \psi(t, x) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^z \psi(t, x) dx \right) dt$$

2. Soient deux réels $a < b$ et φ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le triangle $T = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq x \leq b\}$.

(a) Montrer que la fonction ψ définie sur le carré $C = [a, b]^2$ par :

$$\forall (t, x) \in C, \psi(t, x) = \begin{cases} \varphi(t, x) - \varphi(t, t) & \text{si } (t, x) \in T \\ 0 & \text{si } (t, x) \notin T \end{cases}$$

est continue sur C .

(b) Soit $k \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall z \in [a, b], \int_a^z \left(\int_a^x k(t) dt \right) dx = \int_a^z \left(\int_t^z k(t) dx \right) dt$$

(c) Dédurre de ce qui précède que :

$$\forall z \in [a, b], \int_a^z \left(\int_a^x \varphi(t, x) dt \right) dx = \int_a^z \left(\int_t^z \varphi(t, x) dx \right) dt$$

- II - Produit de convolution

Pour cette partie, $I = \mathbb{R}^+$ ou $I = [0, X]$ pour un réel $X > 0$, E est l'espace vectoriel $C^0(I, \mathbb{R})$ et T est l'opérateur de Volterra défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \in I, T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Pour toutes fonctions f, g dans E , on définit le produit de convolution $f * g$ par :

$$\forall x \in I, f * g(x) = \int_0^x f(x-t) g(t) dt$$

- Montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne sur E qui est commutative, associative et qu'il n'existe pas d'élément neutre pour cette loi.
- Montrer que pour toutes fonctions f, g dans E et tout entier naturel n , on a $T^n(f * g) = T^n(f) * g = f * T^n(g)$.
- On suppose que f et g sont des fonctions de classe C^1 sur I . Montrer que $f * g$ est de classe C^1 sur I avec $(f * g)' = f(0)g + f' * g = g(0)f + f * g'$.
- On se propose de montrer le cas particulier suivant du théorème de Titchmarsh : si f, g sont deux fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R > 1$ telles que $f * g = 0$, on a alors $f = 0$ ou $g = 0$.
 - On suppose que f et g sont des fonctions de classe C^∞ sur $[0, 1]$ avec $f(0) \neq 0$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - On suppose que f et g sont des fonctions de classe C^∞ sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ et $f * g = 0$. Montrer qu'on a $f' * g = 0$ et $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Soient f, g deux fonctions de classe C^∞ sur $[0, 1]$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Soient f, g deux fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R > 1$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $f = 0$ ou $g = 0$.

– III – Résultats préparatoires au théorème de Titchmarsh

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels t, x dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(x-t)} = 1 - e^{-e^n(x-t)}$$

la convergence de cette série de fonctions étant uniforme en $t \in \mathbb{R}^+$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$ fixés.

2. Montrer que, pour tout réel $X \in \mathbb{R}^{+,*}$, toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([0, X], \mathbb{R})$, tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^X e^{kn(x-t)} g(t) dt = \int_0^X (1 - e^{-e^n(x-t)}) g(t) dt$$

3. Montrer que, pour tout réel $X \in \mathbb{R}^{+,*}$, toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([0, X], \mathbb{R})$ et tout réel $x \in [0, X]$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^X (1 - e^{-e^n(x-t)}) g(t) dt = \int_0^x g(t) dt$$

4. Montrer que, pour $X > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, X], \mathbb{R})$, la suite $\left(\int_0^X e^{nt} f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée si, et seulement si, la fonction f est identiquement nulle (on pourra utiliser les résultats des questions précédente avec la fonction g définie sur $[0, X]$ par $g(t) = f(X - t)$).

5. Soient $X > 1$ et $f \in \mathcal{C}^0([1, X], \mathbb{R})$. Montrer que la suite $\left(\int_1^X t^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée si, et seulement si, la fonction f est identiquement nulle.

6. Soient $X > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, X], \mathbb{R})$. Montrer que la fonction f est identiquement nulle si, et seulement si, $\int_0^X t^n f(t) dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Soient f, g dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathbb{R}^{+,*}$. Montrer que :

$$\int_0^{2X} e^{n(2X-x)} f * g(x) dx = \iint_{\Delta_X} e^{n(u+v)} f(X-v) g(X-u) dudv$$

$$\text{où } \Delta_X = \{(u, v) \in [-X, X]^2 \mid u + v \geq 0\}.$$

– IV – Théorème de Titchmarsh

On se propose de montrer que si f, g sont deux fonctions dans $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $f * g = 0$, on a alors $f = 0$ ou $g = 0$.

1. Soit $f \in E$ telle que $f * f = 0$.

- (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \int_{-X}^X e^{nt} f(X-t) dt \right|^2 \leq 2 \left(X \sup_{t \in [0, 2X]} |f(t)| \right)^2$$

- (b) En déduire que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0, X]$, puis que f est la fonction identiquement nulle.

2. À toute fonction $f \in E$, on associe la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions de E définie par $f_n(t) = t^n f(t)$. Soient f, g dans E telles que $f * g = 0$.

- (a) Montrer que $f_1 * g + f * g_1 = 0$.
 (b) En calculant $f * g_1 * (f_1 * g + f * g_1)$, en déduire que $f * g_1 = 0$, puis que $f * g_n = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
 (c) En déduire que $f = 0$ ou $g = 0$.

Solution.

— I — Théorème de Fubini sur un rectangle et sur un triangle

1.

- (a) La fonction ψ est continue des deux variables et l'intégration se fait sur un segment, donc la fonction $\gamma : x \mapsto \int_a^b \psi(t, x) dt$ est continue sur $[c, d]$. La fonction α qui est une primitive de γ est de classes C^1 sur $[c, d]$, avec :

$$\forall z \in [c, d], \alpha'(z) = \gamma(z) = \int_a^b \psi(t, z) dt$$

- (b) Pour $(t, z) \in [a, b] \times]c, d]$, le changement de variable $x = c + \theta(z - c)$ avec $0 \leq \theta \leq 1$ donne $\chi(t, z) = (z - c) \int_0^1 \psi(t, c + \theta(z - c)) d\theta$, ce résultat étant encore valable pour $z = c$. Comme la fonction $(\theta, t, z) \mapsto \psi(t, c + \theta(z - c))$ est continue sur $[0, 1] \times [a, b] \times [c, d]$ et l'intégration se fait sur un segment, on en déduit que la fonction χ est continue sur $R = [a, b] \times [c, d]$. La fonction χ est dérivable par rapport à z avec $\frac{\partial \chi}{\partial z}(t, z) = \psi(t, z)$ qui est continue sur R .

- (c) Les fonctions χ et $\frac{\partial \chi}{\partial z}$ sont continues sur R et l'intégration se fait sur un segment, donc la fonction β est de classe C^1 sur $[c, d]$ avec :

$$\beta'(z) = \int_a^b \frac{\partial \chi}{\partial z}(t, z) dt = \int_a^b \psi(t, z) dt$$

- (d) On a $\alpha' = \beta'$ sur $[c, d]$ avec $\alpha(c) = \beta(c) = 0$, ce qui équivaut à $\alpha = \beta$, soit à :

$$\forall z \in [c, d], \int_c^z \left(\int_a^b \psi(t, x) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^z \psi(t, x) dx \right) dt$$

2.

- (a) On désigne par $\Delta = \{(t, t) \mid a \leq t \leq b\}$ la diagonale du carré C . La continuité de la fonction ψ sur $C \setminus \Delta$ ne pose pas de problème.

On se donne un point $(t_0, t_0) \in \Delta$. La fonction φ étant continue en $(t_0, t_0) \in T$, pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(t, x) \in T, |t - t_0| \leq \eta, |x - t_0| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(t, x) - \varphi(t_0, t_0)| < \varepsilon$$

Pour $(t, x) \in C$ tel que $|t - t_0| \leq \eta$ et $|x - t_0| \leq \eta$, on a soit $(t, x) \notin T$ et dans ce cas $\psi(t, x) - \psi(t_0, t_0) = 0$, soit $(t, x) \in T$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned} |\psi(t, x) - \psi(t_0, t_0)| &= |\psi(t, x)| = |\varphi(t, x) - \varphi(t, t)| \\ &\leq |\varphi(t, x) - \varphi(t_0, t_0)| + |\varphi(t, t) - \varphi(t_0, t_0)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

On a donc ainsi prouvé la continuité de ψ en (t_0, t_0) .

- (b) On définit les fonctions α et β sur $[a, b]$ par :

$$\begin{cases} \alpha(z) = \int_a^z \left(\int_a^x k(t) dt \right) dx \\ \beta(z) = \int_a^z \left(\int_t^z k(t) dx \right) dt = \int_a^z (z - t) k(t) dt \end{cases}$$

Ces fonctions sont de classe C^1 sur $[0, X]$ avec :

$$\begin{cases} \alpha'(z) = \int_a^z k(t) dt \\ \beta'(z) = \int_a^z k(t) dt + zk(z) - zk(z) = \int_a^z k(t) dt \end{cases}$$

On a donc $\alpha' = \beta'$ avec $\alpha(a) = \beta(a) = 0$, soit $\alpha = \beta$ sur $[a, b]$.

- (c) Le théorème de Fubini appliqué à la fonction ψ sur le rectangle $[a, b] \times [a, z]$ donne :

$$\forall z \in [a, b], \int_a^z \left(\int_a^b \psi(t, x) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_a^z \psi(t, x) dx \right) dt$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_a^z \left(\int_a^b \psi(t, x) dt \right) dx &= \int_a^z \left(\int_a^x \psi(t, x) dt \right) dx \\ &= \int_a^z \left(\int_a^x \varphi(t, x) dt \right) dx - \int_a^z \left(\int_a^x \varphi(t, t) dt \right) dx \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_a^z \psi(t, x) dx \right) dt &= \int_a^z \left(\int_a^z \psi(t, x) dx \right) dt = \int_a^z \left(\int_t^z \psi(t, x) dx \right) dt \\ &= \int_a^z \left(\int_t^z \varphi(t, x) dx \right) dt - \int_a^z \left(\int_t^z \varphi(t, t) dx \right) dt \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité :

$$\int_a^z \left(\int_a^x \varphi(t, t) dt \right) dx = \int_a^z \left(\int_t^z \varphi(t, t) dx \right) dt$$

($k(t) = \varphi(t, t)$), on déduit que :

$$\int_a^z \left(\int_a^x \varphi(t, x) dt \right) dx = \int_a^z \left(\int_t^z \varphi(t, x) dx \right) dt$$

- II - Produit de convolution

1.

(a) Pour f, g dans E , la fonction :

$$x \in I \mapsto f * g(x) = \int_0^x f(x-t) g(t) dt = x \int_0^1 f((1-\theta)x) g(\theta x) d\theta$$

est continue ($(\theta, x) \mapsto f((1-\theta)x) g(\theta x)$ est continue sur $[0, 1] \times I$ et on intègre sur un segment), donc $*$ est une loi de composition interne.

(b) Le changement de variable $y = x - t$ donne pour tout $x \in I$:

$$f * g(x) = \int_0^x f(y) g(x-y) dy = g * f(x)$$

D'où la commutativité du produit de convolution.

(c) Soient f, g, h dans E . Pour tout réel $z \in I$, on a :

$$\begin{aligned} f * (g * h)(z) &= \int_0^z f(z-x) g * h(x) dx \\ &= \int_0^z \left(\int_0^x f(z-x) g(x-t) h(t) dt \right) dx \end{aligned}$$

et avec le théorème de Fubini sur un triangle :

$$f * (g * h)(z) = \int_0^z \left(\int_t^z f(z-x) g(x-t) dx \right) h(t) dt$$

Le changement de variable $y = x - t$, à t fixé dans I donne :

$$\begin{aligned} f * (g * h)(z) &= \int_0^z \left(\int_0^{z-t} f((z-t)-y) g(y) dy \right) h(t) dt \\ &= \int_0^z (f * g)(z-t) h(t) dt = (f * g) * h(z) \end{aligned}$$

Ce qui montre que le produit de convolution est associatif.

(d) Si $g \in E$ est un élément neutre pour la loi $*$, on a alors $f * g = f$ pour tout $f \in E$, donc $f(0) = f * g(0) = 0$, ce qui n'est pas vérifié par toutes les fonctions f de E .

2. On a :

$$\begin{aligned} T(f * g)(x) &= \int_0^x (f * g)(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(t-y) g(y) dy \right) dt \\ &= \int_0^x \left(\int_y^x f(t-y) dt \right) g(y) dy = \int_0^x \left(\int_0^{x-y} f(u) du \right) g(y) dy \\ &= \int_0^x T(f)(x-y) g(y) dy = (T(f) * g)(x) \end{aligned}$$

Et comme le produit de convolution est commutatif, on a aussi :

$$T(f * g) = T(g * f) = T(g) * f = f * T(g)$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T^n(f * g) = T^n(f) * g = f * T^n(g)$$

C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a $T^{n+1}(f * g) = T(T^n(f * g)) = T(T^n(f) * g) = T^{n+1}(f) * g$. Puis par commutativité du produit de convolution, on a la deuxième égalité.

3. On suppose d'abord que $f(0) = 0$. Dans cas, on a :

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = T(f')(x)$$

et $f * g = T(f') * g = T(f' * g)$, ce qui nous donne par dérivation :

$$(f * g)' = (T(f' * g))' = f' * g$$

Dans le cas général, en notant $h = f - f(0)$, on a :

$$\begin{aligned} (f * g)' &= ((h + f(0)) * g)' = (h * g)' + (f(0) * g)' \\ &= h' * g + (f(0) * g)' = f' * g + (f(0) * g)' \end{aligned}$$

avec $(f(0) * g)(x) = \int_0^x f(0) g(t) dt = f(0) T(g)(x)$ et $(f(0) * g)' = f(0) g$, ce qui nous donne $(f * g)' = f(0) g + f' * g$. Puis par commutativité du produit de convolution, on a la deuxième égalité.

4.

(a) Si $f * g = 0$, on a alors $0 = (f * g)' = f(0) g + f' * g = g(0) f + f * g'$, donc $g = -\frac{1}{f(0)} f' * g$, ce qui nous donne :

$$g(0) = -\frac{1}{f(0)} (f' * g)(0) = 0 \text{ et } f * g' = 0$$

On en déduit alors que $g^{(n)}(0) = 0$ et $f * g^{(n+1)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ et supposant le résultat acquis pour n , on a :

$$0 = (f * g^{(n+1)})' = f(0) g^{(n+1)} + f' * g^{(n+1)} = g^{(n+1)}(0) f + f * g^{(n+2)}$$

donc $g^{(n+1)} = -\frac{1}{f(0)} f' * g^{(n+1)}$, ce qui nous donne :

$$g^{(n+1)}(0) = -\frac{1}{f(0)} (f' * g^{(n+1)})(0) = 0 \text{ et } f * g^{(n+2)} = 0$$

(b) Si $f * g = 0$ et $f(0) = 0$, on a alors $f' * g = (f * g)' - f(0)g = 0$ et dans le cas où $f'(0) \neq 0$, on déduit de la question précédente que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Dans le cas où $f(0) \neq 0$ [resp. $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$] on a vu que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $f(0) = 0$ et qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^{(n)}(0) \neq 0$. On a alors nécessairement $f'(0) = 0$ (sinon $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $f' * g = (f * g)' - f(0)g = 0$. Vérifions que $f^{(k)}(0) = 0$ et $f^{(k)} * g = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposant le résultat acquis jusqu'au rang $k \geq 1$, on a $f^{(k+1)} * g = (f^{(k)} * g)' - f(0)g = 0$ et $f^{(k+1)}(0) = 0$ (puisque $f^{(k)} * g = 0$, $f^{(k)}(0) = 0$ et $f^{(k+1)}(0) \neq 0$ entraînent $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(d) Résulte du fait que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ (et même chose pour g) pour tout $x \in [0, 1]$.

– III – Résultats préparatoires au théorème de Titchmarsh

1. Pour tout réel z , on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z - 1$. Il en résulte que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels t, x dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(x-t)} = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-e^{n(x-t)})^k}{k!} = 1 - e^{-e^{n(x-t)}}$$

Avec $\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(x-t)} \right| = \frac{e^{knx}}{k!} \frac{1}{e^{knt}} \leq \frac{e^{knx}}{k!}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{knx}}{k!} = 1 - e^{-e^{nx}}$, on déduit que la convergence est uniforme en $t \in \mathbb{R}^+$.

2. On a, pour $g \in \mathcal{C}^0([0, X], \mathbb{R})$, k, n dans $\mathbb{N}^*$, X dans $\mathbb{R}^{+,*}$, $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [0, X]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(x-t)} g(t) = \left(1 - e^{-e^{n(x-t)}}\right) g(t)$$

avec $\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(x-t)} g(t) \right| \leq \frac{e^{knx}}{k!} \sup_{t \in [0, X]} |g(t)|$, donc la convergence de la série de fonctions considérée est uniforme en $t \in [0, X]$ et on peut écrire que :

$$\int_0^X \left(1 - e^{-e^{n(x-t)}}\right) g(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^X e^{kn(x-t)} g(t) dt$$

3. Pour $g \in C^0([0, X], \mathbb{R})$ et $x \in [0, X]$ fixés, on définit la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\varphi_n(t) = (1 - e^{-e^n(x-t)}) g(t)$. Ces fonctions φ_n sont continues sur $C^0([0, X], \mathbb{R})$ avec, pour tout $t \in [0, X]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pour } 0 \leq t < x \\ g(x)(1 - e^{-1}) & \text{pour } t = x \\ 0 & \text{pour } x < t \leq 1 \end{cases}$$

(pour $0 \leq t < x$, on a $x-t > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n(x-t)} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-e^n(x-t)} = 0$; pour $x < t \leq 1$, on a $x-t < 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n(x-t)} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-e^n(x-t)} = 1$; pour $t = x$, on a $e^{-e^n(x-t)} = \frac{1}{e}$), cette fonction φ étant continue par morceaux sur $[0, X]$. Enfin avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, X], |\varphi_n(t)| \leq (1 + e^{-e^n(x-t)}) |g(t)| \leq 2 \sup_{t \in [0, X]} |g(t)|$$

on déduit du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^X (1 - e^{-e^n(x-t)}) g(t) dt = \int_0^X \varphi(t) dt = \int_0^x g(t) dt = T(g)(x)$$

4. Il est évident que la condition est suffisante. Supposons qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\left| \int_0^X e^{nt} f(t) dt \right| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, en posant $g(t) = f(X-t)$, pour $0 \leq x < X$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^X (1 - e^{-e^n(x-t)}) g(t) dt \right| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^X e^{kn(x-t)} f(X-t) dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(x-X)} \int_0^X e^{kn(X-t)} f(X-t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{kn(x-X)}}{k!} \left| \int_0^X e^{kn(X-t)} f(X-t) dt \right| \\ &\leq M \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{kn(x-X)}}{k!} = M (e^{e^{-n(X-x)}} - 1) \end{aligned}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{e^{-n(X-x)}} = 1$, ce qui nous donne :

$$\int_0^x g(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^X (1 - e^{-e^n(x-t)}) g(t) dt = 0$$

et par dérivation $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, X[$. Par continuité, on a aussi $g(X) = 0$. En définitive, $f = 0$.

5. Il est évident que la condition est suffisante. Supposons qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\left| \int_1^X u^n f(u) du \right| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $u = e^t$ nous donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_1^X u^n f(u) du = \int_0^{\ln(X)} e^{nt} f(t) e^t dt$ et comme la fonction g définie sur $[0, \ln(X)]$ par $g(t) = e^t f(e^t)$ est continue telle que la suite $\left(\int_0^{\ln(X)} e^{nt} g(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, elle est identiquement nulle et il en est de même de f .

6. Si on a de plus, $\int_0^X f(t) dt = 0$, le résultat découle du théorème de Weierstrass. Pour tout réel $T \in]0, X[$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^T t^n f(t) dt = - \int_T^X t^n f(t) dt$$

et le changement de variable $t = Tu$ nous donne :

$$T^{n+1} \int_0^1 u^n f(Tu) du = -T^{n+1} \int_1^{\frac{X}{T}} u^n f(Tu) du$$

donc :

$$\left| \int_1^{\frac{X}{T}} u^n f(Tu) du \right| = \left| \int_0^1 u^n f(Tu) du \right| \leq \sup_{t \in [0, X]} |f(t)|$$

On déduit alors de la question précédente que $f(Tu) = 0$ pour tout $u \in \left[1, \frac{X}{T}\right]$, ce qui équivaut à $f(t) = 0$ pour tout $t \in [T, X]$. Comme T est quelconque dans $]0, X[$, on en déduit que f est nulle sur $]0, X]$ et sur $[0, X]$ par continuité.

7. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2X} e^{n(2X-x)} f * g(x) dx &= \int_0^{2X} e^{n(2X-x)} \left(\int_0^x f(x-t) g(t) dt \right) dx \\ &= \iint_{\Gamma_X} e^{n(2X-x)} f(x-t) g(t) dt dx \\ &= \iint_{\Gamma_X} e^{n(2X-(x-t)-t)} f(x-t) g(t) dt dx \\ &= \iint_{\Gamma_X} e^{n(X-(x-t))} f(x-t) e^{n(X-t)} g(t) dt dx \end{aligned}$$

où on a noté $\Gamma_X = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2X \text{ et } 0 \leq t \leq x\}$. En désignant par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\mapsto (X-t, X-(x-t)) \end{aligned}$$

on définit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ d'inverse :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (X-u, 2X-(u+v)) \end{aligned}$$

et on a :

$$\varphi(\Gamma_X) = \Delta_X = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -X \leq u, v \leq X \text{ et } u + v \geq 0\}$$

((u, v) = $\varphi(x, y)$ avec $0 \leq x \leq 2X$ et $0 \leq t \leq x$ entraînent $-X \leq u = X - t \leq X$, $-X \leq v = X - (x - t) \leq X$, $u + v = 2X - x \geq 0$, soit $(u, v) \in \Delta_X$ et $(t, x) = \varphi^{-1}(u, v)$ avec $-X \leq u, v \leq X$ et $u + v \geq 0$ entraînent $0 \leq x = 2X - (u + v) \leq 2X$, $t = X - u \geq 0$, $x - t = X - v \geq 0$, soit $(t, x) \in \Gamma_X$).

Le changement de variable $(u, v) = \varphi(x, y) = (X - t, X - (x - t))$ nous donne donc :

$$\int_0^{2X} e^{n(2X-x)} f * g(x) dx = \iint_{\Delta_X} e^{n(u+v)} f(X-u) g(X-v) dudv$$

- IV - Théorème de Titchmarsh

1.

(a) On a :

$$\left(\int_{-X}^X e^{nt} f(X-t) dt \right)^2 = \iint_{[-X, X]^2} e^{n(u+v)} f(X-u) f(X-v) dudv$$

et avec :

$$\iint_{\Delta_X} e^{n(u+v)} f(X-u) g(X-v) dudv = \int_0^{2X} e^{n(2X-x)} f * f(x) dx = 0$$

où $\Delta_X = \{(u, v) \in [-X, X]^2 \mid u + v \geq 0\}$, on déduit que :

$$\left(\int_{-X}^X e^{nt} f(X-t) dt \right)^2 = \iint_{\Delta'_X} e^{n(u+v)} f(X-u) f(X-v) dudv$$

où $\Delta'_X = \{(u, v) \in [-X, X]^2 \mid u + v \leq 0\}$. Pour tout $(u, v) \in \Delta'_X$, on a $e^{n(u+v)} \leq 1$ et :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-X}^X e^{nt} f(X-t) dt \right|^2 &\leq \iint_{\Delta'_X} |f(X-u)| |f(X-v)| dudv \\ &\leq \mathcal{A}(\Delta'_X) \left(\sup_{t \in [0, 2X]} |f(t)| \right)^2 = 2 \left(X \sup_{t \in [0, 2X]} |f(t)| \right)^2 \end{aligned}$$

(b) En notant $M_X = \sup_{t \in [0, 2X]} |f(t)|$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_{-X}^0 e^{nt} f(X-t) dt \right| \leq X M_X$$

et :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^X e^{nt} f(X-t) dt \right| &= \left| \int_{-X}^X e^{nt} f(X-t) dt - \int_{-X}^0 e^{nt} f(X-t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{-X}^X e^{nt} f(X-t) dt \right| + \left| \int_{-X}^0 e^{nt} f(X-t) dt \right| \\ &\leq (1 + \sqrt{2}) X M_X \end{aligned}$$

Il en résulte que $f(X-t) = 0$ pour tout $t \in [0, X]$, ce qui équivaut à $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0, X]$. Comme $X > 0$ est quelconque, on en déduit que $f = 0$.

2.

(a) Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} f_1 * g(x) + f * g_1(x) &= \int_0^x (x-t) f(x-t) g(t) dt + \int_0^x f(x-t) t \cdot g(t) dt \\ &= x \int_0^x f(x-t) g(t) dt = x \cdot (f * g)(x) = 0 \end{aligned}$$

(b) En utilisant la commutativité et l'associativité du produit de convolution, on déduit que :

$$\begin{aligned} 0 &= f * g_1 * (f_1 * g + f * g_1) \\ &= (f * g) * (f_1 * g_1) + (f * g_1) * (f * g_1) = (f * g_1) * (f * g_1) \end{aligned}$$

et en conséquence $f * g_1 = 0$. Par récurrence, on en déduit que $f * g_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\int_0^x f(x-t) t^n g(t) dt = 0$. En utilisant III6, on en déduit que $f(x-t) g(t) = 0$ pour tout $t \in [0, x]$. Si $g \neq 0$, il existe alors un réel $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(t_0) \neq 0$ et en conséquence $f(x-t_0) = 0$ pour tout $x \geq t_0$, ce qui équivaut à $f = 0$.

Chapitre 6

Transformées de Fourier et de Laplace

Exercice 6.1. Théorème de Riemann-Lebesgue

On désigne par C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{L}^\infty$ le sous-espace de C^0 constitué des fonctions continues et bornées, $\mathcal{L}^1$ le sous-espace de C^0 constitué des fonctions continues et intégrables. L'espace $\mathcal{L}^\infty$ est muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et l'espace $\mathcal{L}^1$ est muni

de la norme $f \mapsto \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et tout réel a , on désigne par $\tau_a f$ la fonction définie par $\tau_a f(t) = f(a+t)$ sur $\mathbb{R}$. Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note 1_A la fonction indicatrice de A .

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$, on peut définir la fonction $\hat{f}$ par $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$ pour tout réel x , puis que cette fonction $\hat{f}$ est dans $\mathcal{L}^\infty$ avec $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Cette fonction $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f et l'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire continue de $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

2. Soient R un réel strictement positif et g une fonction continue sur $[-R, R]$, nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$.

(a) Montrer que, pour tout réel $a \in [-1, 1]$, on a :

$$|\tau_a g - g| \leq 2 \|g\|_\infty 1_{[-(R+1), R+1]}$$

(b) Montrer que $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a g - g\|_1 = 0$.

3. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$, on a $\lim_{a \rightarrow 0} \|f - \tau_a f\|_1 = 0$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}^1$.

(a) Montrer que, pour tout réel non nul x , on a :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (f(t) - \tau_{\frac{x}{2}} f(t)) e^{-ixt} dt$$

(b) En déduire que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(x) = 0$ (théorème de Riemann-Lebesgue).

Solution.

1.

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t) e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto |f(t) e^{-ixt}| = |f(t)|$ étant intégrable, ce qui justifie la définition de $\widehat{f}(x)$.
- (b) Pour tout réel t , la fonction $x \mapsto f(t) e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ avec $|f(t) e^{-ixt}| = |f(t)|$, la fonction $|f|$ étant intégrable, on déduit du théorème de continuité de Lebesgue que la fonction $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x , on a $|\widehat{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_1$, donc $\widehat{f}$ est bornée et $\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

2. Pour tout réel a , la fonction g_a est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, bornée et absolument intégrable, ce qui nous autorise à définir les réels $\|g\|_{\infty}$ et $\|\tau_a g - g\|_1$.

- (a) On a $|g| \leq \|g\|_{\infty} \cdot 1_{[-R, R]}$. Pour $|a| \leq 1$, on a $|\tau_a g| \leq \|g\|_{\infty} 1_{[-(R+1), R+1]}$. En effet, pour $|t| > R+1$, on a $|t+a| \geq |t| - |a| > R$ et $\tau_a g(t) = g(t+a) = 0 = \|g\|_{\infty} 1_{[-(R+1), R+1]}(t)$, pour $|t| \leq R$, on a $|\tau_a g(t)| = |g(t+a)| \leq \|g\|_{\infty} = \|g\|_{\infty} 1_{[-(R+1), R+1]}(t)$. Donc :

$$|\tau_a g - g| \leq |\tau_a g| + |g| \leq 2\|g\|_{\infty} 1_{[-(R+1), R+1]}$$

- (b) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans $[-1, 1]$ de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $h_n = |\tau_{a_n} g - g|$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-R, R\}$. En effet, pour $t \in]-R, R[$, il existe un entier n_0 tel que $a_n + t \in]-R, R[$ pour tout $n \geq n_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |g(t+a_n) - g(t)| = 0$ puisque g est continue sur $] -R, R[$ et pour $t \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, il existe un entier n_1 tel que $a_n + t \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$ pour tout $n \geq n_1$ et $h_n(t) = 0$. Comme de plus on a la domination $0 \leq h_n \leq h = 2\|g\|_{\infty} 1_{[-(R+1), R+1]}$, la fonction h étant intégrable sur $\mathbb{R}$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous dit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tau_{a_n} g - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle étant quelconque, on a $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a g - g\|_1 = 0$.

3. Pour tout $R > 0$, on a $f = g + h$ avec $g = f \cdot 1_{[-R, R]}$ et $h = f \cdot 1_{\mathbb{R} \setminus [-R, R]}$, de sorte que $\tau_a f = \tau_a g + \tau_a h$ et :

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_1 &\leq \|\tau_a g - g\|_1 + \|\tau_a h - h\|_1 \leq \|\tau_a g - g\|_1 + \|\tau_a h\|_1 + \|h\|_1 \\ &\leq \|\tau_a g - g\|_1 + 2\|h\|_1 \end{aligned}$$

puisque $\|\tau_a h\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |h(a+t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |h(x)| dx = \|h\|_1$. La fonction f étant absolument intégrable, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $R > 0$ tel que $\|h\|_1 = \int_{\mathbb{R} \setminus [-R, R]} |f(t)| dt < \varepsilon$ et pour R ainsi choisi, on a $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a g - g\|_1 = 0$, donc il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\|\tau_a g - g\|_1 < \varepsilon$ pour $|a| < \eta$, ce qui nous donne $\|\tau_a f - f\|_1 < 2\varepsilon$ pour $|a| < \eta$. Ce qui prouve que $\lim_{a \rightarrow 0} \|f - \tau_a f\|_1 = 0$.

4.

(a) Pour tout réel a et tout réel x , on a :

$$\widehat{\tau_a f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(a+t) e^{-ixt} dt = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ix(y-a)} dy = e^{iax} \widehat{f}(x)$$

ce qui donne en particulier pour x non nul et $a = \frac{\pi}{x}$, $\widehat{\tau_{\frac{\pi}{x}} f}(x) = -\widehat{f}(x)$ et :

$$2\widehat{f}(x) = \widehat{f}(x) - \widehat{\tau_{\frac{\pi}{x}} f}(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(t) - \tau_{\frac{\pi}{x}} f(t)) e^{-ixt} dt$$

(b) On en déduit que $2|\widehat{f}(x)| \leq \|f - \tau_{\frac{\pi}{x}} f\|_1$ avec $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \|f - \tau_{\frac{\pi}{x}} f\|_1 = 0$, ce qui entraîne que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(x) = 0$.

Exercice 6.2. Transformation de Fourier et produit de convolution

On garde les notations de l'exercice précédent.

1. Soient f, g dans $\mathcal{L}^1$, l'une de ces deux fonctions étant dans $\mathcal{L}^\infty$.

(a) Montrer que l'on peut définir la fonction :

$$f * g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt$$

que cette fonction $f * g$ est dans $\mathcal{L}^1$ et que :

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt \times \int_{\mathbb{R}} g(t) dt$$

($f * g$ est le produit de convolution de f et de g).

(b) Montrer que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

(c) Calculer, pour tout réel $a > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $\varphi_a : t \mapsto e^{-a|t|}$.

(d) Montrer qu'il n'existe pas d'unité pour le produit de convolution, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de trouver une fonction $f \in \mathcal{L}^1$ [resp. $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$] telle que $f * g = g$ pour tout $g \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$ [resp. $g \in \mathcal{L}^1$].

2. Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{n} & \text{si } |t| \leq n \\ 0 & \text{si } |t| > n \end{cases}$$

- (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est dans $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$ et calculer sa transformée de Fourier.
- (b) En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \pi$ (exercice 6.3), calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi_n}(x) dx$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
- (c) Montrer que, pour tout réel $\eta > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| > \eta} \widehat{\varphi_n}(x) dx = 0$.
- (d) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t , on a $f * \widehat{\varphi_n}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) \widehat{f}(x) e^{ixt} dx$.
- (e) On suppose de plus que $f \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) e^{ixt} dx$, soit $f(t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f}}(-t)$ (formule d'inversion de Fourier). En fait l'hypothèse $f \in \mathcal{L}^\infty$ n'est pas indispensable et la transformation de Fourier est injective sur $\mathcal{L}^1$.
- (f) Résoudre l'équation $f * f = f$ dans $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$.

Solution.

1.

- (a) Pour $(f, g) \in \mathcal{L}^\infty \times \mathcal{L}^1$ [resp. $(f, g) \in \mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^\infty$] la fonction $(x, t) \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et pour x fixé dans $\mathbb{R}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|f(x-t)g(t)| \leq \|f\|_\infty |g(t)| \quad [\text{resp. } |f(x-t)g(t)| \leq \|g\|_\infty |f(x-t)|]$$

avec $|g| \in \mathcal{L}^1$ [resp. $t \mapsto |f(x-t)|$ dans $\mathcal{L}^1$, comme on le vérifie en effectuant le changement de variable $y = x-t$, $dy = -dt$]. Il en résulte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est dans $\mathcal{L}^1$ et $f * g(x)$ est bien défini.

En supposant que $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$, avec $|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt$, en utilisant les théorèmes de Fubini et de changement de variable (linéaire),

on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) g(t)| dt \right) dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) g(t)| dx \right) dt \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| dx \right) dt \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \right) dt \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1
 \end{aligned}$$

On a donc $f * g \in \mathcal{L}^1$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

À nouveau, les théorèmes de Fubini et de changement de variable nous donnent :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} f * g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dx \right) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g(t) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t) dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) dy \right) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g(t) dt \int_{\mathbb{R}} f(y) dy
 \end{aligned}$$

(b) Avec les mêmes arguments, on a pour tout réel ξ :

$$\begin{aligned}
 \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt \right) e^{-2i\pi x \xi} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t) e^{-2i\pi(x-t)\xi} dx \right) g(t) e^{-2i\pi t \xi} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi y \xi} dy \right) g(t) e^{-2i\pi t \xi} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi y \xi} dy \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2i\pi t \xi} dt = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi)
 \end{aligned}$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}^{+,*}$, la fonction paire $\varphi_a : t \mapsto e^{-a|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_a(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{2}{a}$$

donc $\varphi_a \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$ et sa transformée de Fourier est donnée, pour x réel, par :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\varphi_a}(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(a|t|+ixt)} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-ix)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(a+ix)t} dt \\
 &= \frac{1}{a-ix} + \frac{1}{a+ix} = \frac{2a}{a^2+x^2}
 \end{aligned}$$

(on a $|e^{(a-ix)t}| = e^{at} \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$ et $|e^{-(a+ix)t}| = e^{-at} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ pour $a > 0$).

3. Si $f \in \mathcal{L}^1$ est telle que $f * g = g$ pour toute fonction $g \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$, on a alors $\widehat{f \cdot g} = \widehat{f * g} = \widehat{g}$ et prenant $g \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$ telle que $\widehat{g}(x) \neq 0$ pour tout réel x (par exemple $t \mapsto e^{-|t|}$), on en déduit que $\widehat{f} = 1$, ce qui est contradictoire avec $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(x) = 0$.

4.

- (a) Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est dans $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty$ et pour tout réel non nul x , on a :

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi_n}(x) &= \int_{-n}^{+n} \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) e^{-ixt} dt = 2 \int_0^{+n} \left(1 - \frac{t}{n}\right) \cos(xt) dt \\ &= \frac{2}{n} \frac{1 - \cos(nx)}{x^2} = \frac{4}{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{x}\right)^2\end{aligned}$$

et $\widehat{\varphi_n}(0) = n$, cette fonction $\widehat{\varphi_n}$ étant continue sur $\mathbb{R}$.

- (b) On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi_n}(x) dx = \frac{4}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{x}\right)^2 dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = 2\pi$$

- (c) Comme $\widehat{\varphi_n}$ est paire, il nous suffit de montrer que $\int_{\eta}^{+\infty} \widehat{\varphi_n}(x) dx = 0$, ce qui résulte de :

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{\eta}^{+\infty} \widehat{\varphi_n}(x) dx = \frac{4}{n} \int_{\eta}^{+\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{x}\right)^2 dx = 2 \int_{\frac{n\eta}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt \\ &\leq 2 \int_{\frac{n\eta}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{4}{n\eta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

- (d) On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x) f(y) e^{-ix(y-t)}| dy dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx \\ &= \widehat{\varphi_n}(0) \|f\|_1 = n \|f\|_1 < +\infty\end{aligned}$$

On peut donc utiliser le théorème de Fubini pour écrire que :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) \widehat{f}(x) e^{ixt} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy \right) e^{ixt} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) e^{-ix(y-t)} dx \right) dy\end{aligned}$$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) e^{-ix(y-t)} dx = \widehat{\varphi_n}(y-t) = \widehat{\varphi_n}(t-y)$ ($\widehat{\varphi_n}$ est paire), ce qui donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) \widehat{f}(x) e^{ixt} dx = f * \widehat{\varphi_n}(t)$.

(e) Pour tout réel x , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n > |x|}} \left(1 - \frac{|x|}{n}\right) = 1$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) \widehat{f}(x) e^{ixt} = \widehat{f}(x) e^{ixt}$$

Chaque fonction $x \mapsto \varphi_n(x) \widehat{f}(x) e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left| \varphi_n(x) \widehat{f}(x) e^{ixt} \right| \leq \left| \widehat{f}(x) \right|$$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{f}(x) \right| dx < +\infty$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que, pour tout réel t , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) \widehat{f}(x) e^{ixt} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) e^{ixt} dx$$

D'autre part, pour tout réel t , on a :

$$\begin{aligned} f * \widehat{\varphi}_n(t) - 2\pi f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \widehat{\varphi}_n(t-y) dy - f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}_n(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-z) \widehat{\varphi}_n(z) dz - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \widehat{\varphi}_n(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t-z) - f(t)) \widehat{\varphi}_n(z) dz \end{aligned}$$

Comme f est continue en t , pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|f(t-z) - f(t)| < \varepsilon$ pour tout réel $z \in [-\eta, \eta]$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} |f * \widehat{\varphi}_n(t) - 2\pi f(t)| &\leq \varepsilon \int_{-\eta}^{+\eta} \widehat{\varphi}_n(z) dz + 2 \|f\|_{\infty} \int_{|z| > \eta} \widehat{\varphi}_n(z) dz \\ &\leq 2\pi\varepsilon + 2 \|f\|_{\infty} \int_{|z| > \eta} \widehat{\varphi}_n(z) dz \end{aligned}$$

et avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|z| > \eta} \widehat{\varphi}_n(x) dx = 0$, on en déduit que $|f * \widehat{\varphi}_n(t) - 2\pi f(t)| \leq (2\pi + 1)\varepsilon$ pour n assez grand, ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f * \widehat{\varphi}_n(t) = 2\pi f(t)$

et en conséquence, $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) e^{ixt} dx$.

5. Si $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^{\infty}$ est telle que $f * f = f$, on a alors $\widehat{f} \cdot \widehat{f} = \widehat{f * f} = \widehat{f}$, soit $\widehat{f}(x) (1 - \widehat{f}(x)) = 0$ pour tout réel x , donc $\widehat{f}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et comme elle est continue on a nécessairement $\widehat{f} = 0$ ou $\widehat{f} = 1$. Comme $\widehat{f} = 1$ est impossible, on a $\widehat{f} = 0$ et $f = 0$ par injectivité de la transformation de Fourier.

Exercice 6.3. Transformation de Laplace et intégrale de Dirichlet

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente. Montrer que l'on peut définir la fonction $\mathcal{L}(f)$ sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

et que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$. La fonction $\mathcal{L}(f)$ est la transformée de Laplace de f .

2. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ en justifiant la convergence de ces intégrales.
- (b) Montrer que $\mathcal{L}(f)(x)$ est définie pour tout nombre réel $x > 0$, calculer $\mathcal{L}(f)(x)$ pour tout $x > 0$ et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
3. En considérant la fonction $f = \cos$, vérifier que la fonction $\mathcal{L}(f)$ peut être définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec une limite finie quand x tend vers 0^+ , alors que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^{+,*}$ est divergente.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

- (a) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ sont les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, y(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

où α, β sont deux constantes réelles. Vérifier qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de limite nulle en $+\infty$.

- (b) Montrer que la transformée de Laplace de f est définie sur $\mathbb{R}^+$, puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Solution.

1. On vérifie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est uniformément convergente en $x \in \mathbb{R}^+$ en utilisant la seconde formule de la moyenne qui nous dit que si $g : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de classe C^1 décroissante et $f : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, il existe alors un réel $c \in [u, v]$ tel que :

$$\int_u^v f(t) g(t) dt = g(u) \int_u^c f(t) dt$$

Pour tous réels $x \geq 0$ et $v > u > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est de classe C^1 décroissante sur $[u, v]$ et f est continue sur $[u, v]$, donc il existe un réel $c_x \in [u, v]$ tel que $\int_u^v e^{-xt} f(t) dt = e^{-xu} \int_u^{c_x} f(t) dt$ et $\left| \int_u^v e^{-xt} f(t) dt \right| \leq \left| \int_u^{c_x} f(t) dt \right|$.

Comme $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente, pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un réel u_ε tel que $\left| \int_u^v f(t) dt \right| < \varepsilon$ pour tous $v > u > u_\varepsilon$, ce qui nous donne :

$$\forall x \geq 0, \forall v > u > u_\varepsilon, \left| \int_u^v e^{-xt} f(t) dt \right| < \varepsilon$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est donc uniformément convergente en $x \in \mathbb{R}^+$.

Pour tout réel $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto e^{-xt} f(t)$ étant continue, on en déduit que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2.

- (a) La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$, on déduit qu'elle est continue en 0, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^+$ et il en est de même de f^2 .

Avec $0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ pour tout $t > 0$, on déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ est

convergente et aussi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

Pour tous réel $T > \varepsilon > 0$, une intégration par parties faite en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t}, & u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) = \sin(t), & v(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

nous donne :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^T \frac{\sin(t)}{t} dt &= \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_\varepsilon^T + \int_\varepsilon^T \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt \\ &= \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_\varepsilon^T + 2 \int_\varepsilon^T \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2} dt \\ &= \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_\varepsilon^T + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du \end{aligned}$$

puis avec $\frac{1 - \cos(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ et $0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t} \leq \frac{2}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, on déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

- (b) Pour tout réel $t > 0$, on a $|tf(t)| = |\sin(t)| \leq 1$, donc $f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ et la fonction $x \mapsto \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est définie pour tout $x > 0$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)'(x) = -\mathcal{L}(tf)(x) = -\mathcal{L}(\sin(t))(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

ce qui nous donne $\mathcal{L}(f)(x) = -\arctan(x) + C$ pour tout $x > 0$. Puis avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$, on déduit que $C = \frac{\pi}{2}$, soit :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

et avec la continuité de $\mathcal{L}(f)$ sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2}$$

3. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(t) dt = \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = \Re \left(\frac{1}{x-i} \right) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ alors que $\int_0^{+\infty} \cos(t) dt$ diverge.

4.

- (a) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont les fonctions définies par $y(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ où α, β sont deux constantes réelles. En utilisant la méthode de variation des constantes, on cherche une solution particulière sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ de la forme :

$$y_0 : x \mapsto y_0(x) = \alpha(x) \cos(x) + \beta(x) \sin(x)$$

où α, β sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, \alpha'(x) \cos(x) + \beta'(x) \sin(x) = 0$$

Avec ces conditions, on a :

$$\begin{cases} y_0'(x) = -\alpha(x) \sin(x) + \beta(x) \cos(x) \\ y_0''(x) + y_0(x) = -\alpha'(x) \sin(x) + \beta'(x) \cos(x) \end{cases}$$

et les systèmes linéaires :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, \begin{cases} \alpha'(x) \cos(x) + \beta'(x) \sin(x) = 0 \\ -\alpha'(x) \sin(x) + \beta'(x) \cos(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

de solutions $\alpha'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$, $\beta'(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, ce qui nous donne :

$$\alpha(x) = -\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt + C_1, \quad \beta(x) = \int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt + C_2$$

Compte tenu de la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$, on a les solutions particulières :

$$\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad \beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\cos(x) \sin(t) - \sin(x) \cos(t)}{t} dt \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(z)}{x+z} dz \end{aligned}$$

et les solutions sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ sont les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, y(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

où α, β sont deux constantes réelles.

Une intégration par parties nous donne, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt &= \left[-\frac{\cos(t)}{x+t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt \\ &= \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt \end{aligned}$$

et :

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \right| \leq \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2} dt = \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ est l'unique solution de limite nulle à l'infini (pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, la fonction $x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ n'a pas de limite à l'infini).

- (b) Comme $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, la transformée de Laplace de f est définie sur $\mathbb{R}^+$. La fonction $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)''(x) &= \mathcal{L}(t^2 f)(x) = \mathcal{L}((t^2 + 1 - 1)f)(x) \\ &= \mathcal{L}(1)(x) - \mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{x} - \mathcal{L}(f)(x)\end{aligned}$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$. Donc $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

- (c) Avec la continuité de $\mathcal{L}(f)$ sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que :

$$\frac{\pi}{2} = \mathcal{L}(f)(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

Avec :

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| &= x \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(x+t)} dt \right| \\ &\leq x \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} \frac{1}{x+t} dt + x \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \\ &\leq x \int_0^1 \frac{dt}{x+t} + x = x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + x\end{aligned}$$

on déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6.4. Transformées de Laplace et de Fourier. Intégrales de Fresnel

1. Pour tout nombre complexe α et tout nombre réel $x > 0$ fixé, on définit la fonction $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $\varphi_\alpha(y) = |x + iy|^\alpha e^{i\alpha \arctan(\frac{y}{x})}$, ce que l'on note $\varphi_\alpha(y) = (x + iy)^\alpha$.

- (a) Montrer que φ_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'_\alpha(y) = i\alpha(x + iy)^{\alpha-1}$.

- (b) Résoudre l'équation différentielle $\varphi'(y) = \frac{i\alpha}{x + iy} \varphi(y)$, où la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Étant donné un complexe α tel que $0 < \Re(\alpha) < 1$, on se propose de calculer la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^*$ de $f_\alpha : t \in \mathbb{R}^{+,*} \mapsto t^{\alpha-1}$.

- (a) Montrer que, pour $y \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\widehat{f_\alpha}(y) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-iyt} dt$ est convergente.

(b) Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et tout réel y , l'intégrale impropre $\mathcal{L}(f_\alpha)(x+iy) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-(x+iy)t} dt$ est convergente et la calculer.

(c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f_\alpha)(x+iy) = \widehat{f_\alpha}(y)$ pour tout réel non nul y , puis en déduire la valeur de $\widehat{f_\alpha}(y)$.

3. Calculer les intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

Solution.

1.

(a) Pour $(\alpha, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{+,*}$, la fonction $\varphi_\alpha : y \mapsto (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}} e^{i\alpha \arctan(\frac{y}{x})}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\begin{aligned} \varphi'_\alpha(y) &= \alpha y (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{i\alpha \arctan(\frac{y}{x})} + (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{i\alpha}{x} \frac{e^{i\alpha \arctan(\frac{y}{x})}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \\ &= \alpha (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{i\alpha \arctan(\frac{y}{x})} (y + ix) \\ &= i\alpha (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} (x - iy) e^{i\alpha \arctan(\frac{y}{x})} \end{aligned}$$

et tenant compte de $x - iy = \sqrt{x^2 + y^2} e^{-i \arctan(\frac{y}{x})}$ pour $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $y \in \mathbb{R}$, on aboutit à :

$$\varphi'_\alpha(y) = i\alpha (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{i(\alpha-1) \arctan(\frac{y}{x})} = i\alpha (x + iy)^{\alpha-1}$$

(b) Si φ est une solution de l'équation différentielle $\varphi'(y) = \frac{i\alpha}{x+iy} \varphi(y)$, la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(y) = \varphi(y) (x+iy)^{-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$\begin{aligned} \psi'(y) &= \varphi'(y) (x+iy)^{-\alpha} - i\alpha \varphi(y) (x+iy)^{-\alpha-1} \\ &= i\alpha \varphi(y) \left(\frac{1}{x+iy} (x+iy)^{-\alpha} - (x+iy)^{-\alpha-1} \right) = 0 \end{aligned}$$

donc $\psi = K$, où $K \in \mathbb{C}$ et $\varphi(y) = K (x+iy)^\alpha$. Réciproquement, une telle fonction est solution de notre équation différentielle.

2.

(a) Pour $0 < \Re(\alpha) < 1$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^1 |t^{\alpha-1} e^{-iyt}| dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\Re(\alpha)}} < +\infty$,

ce qui assure la convergence de $\int_0^1 |t^{\alpha-1} e^{-iyt}| dt$. Pour y non nul, une intégration par parties nous donne :

$$\int_1^R t^{\alpha-1} e^{-iyt} dt = \frac{i}{y} \left([t^{\alpha-1} e^{-iyt}]_1^R - (\alpha-1) \int_1^R t^{\alpha-2} e^{-iyt} dt \right)$$

avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} |t^{\alpha-1} e^{-iyt}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{1-\Re(\alpha)}} = 0$ et $\int_1^{+\infty} |t^{\alpha-2} e^{-iyt}| dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\Re(\alpha)}} < +\infty$. Donc la transformée de Fourier $\widehat{f_\alpha}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ avec :

$$\widehat{f_\alpha}(y) = \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-iyt} dt - \frac{i}{y} \left(e^{-iy} + (\alpha-1) \int_1^{+\infty} t^{\alpha-2} e^{-iyt} dt \right)$$

(b) Pour $0 < \Re(\alpha) < 1$, $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^{+\infty} |t^{\alpha-1} e^{-(x+iy)t}| dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} dt}{t^{1-\Re(\alpha)}} < +\infty$, donc $\mathcal{L}(f_\alpha)(x+iy)$ est bien défini. En utilisant le théorème de convergence dominée, on vérifie facilement que, pour $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ fixé, la fonction $\varphi : y \mapsto \mathcal{L}(f_\alpha)(x+iy)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et une intégration par parties, nous donne :

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= -i \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-(x+iy)t} dt \\ &= -i \left(\left[t^\alpha \frac{e^{-(x+iy)t}}{-(x+iy)} \right]_0^{+\infty} + \frac{\alpha}{x+iy} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-(x+iy)t} dt \right) \\ &= -\frac{i\alpha}{x+iy} \varphi(y) \end{aligned}$$

donc $\varphi(y) = \frac{K}{(x+iy)^\alpha}$ avec $K = x^\alpha \varphi(0) = x^\alpha \mathcal{L}(f_\alpha)(x)$. Le changement de variable $z = xt$ nous donne :

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(x) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

donc $K = \Gamma(\alpha)$ et $\mathcal{L}(f_\alpha)(x+iy) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(x+iy)^\alpha}$.

(c) Comme pour le calcul de $\widehat{f_\alpha}(y)$, une intégration par parties nous donne pour $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $y \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-(x+iy)t} dt &= - \left[t^{\alpha-1} \frac{e^{-(x+iy)t}}{x+iy} \right]_1^{+\infty} + (\alpha-1) \int_1^{+\infty} t^{\alpha-2} \frac{e^{-(x+iy)t}}{x+iy} dt \\ &= \frac{1}{x+iy} \left(e^{-(x+iy)} + (\alpha-1) \int_1^{+\infty} t^{\alpha-2} e^{-(x+iy)t} dt \right) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_\alpha)(x+iy) &= \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-(x+iy)t} dt \\ &\quad + \frac{1}{x+iy} \left(e^{-(x+iy)} + (\alpha-1) \int_1^{+\infty} t^{\alpha-2} e^{-(x+iy)t} dt \right) \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+,*}$, on $\lim_{x \rightarrow 0^+} t^{\alpha-1} e^{-(x+iy)t} = t^{\alpha-1} e^{-iyt}$ avec :

$$|t^{\alpha-1} e^{-(x+iy)t}| \leq g(t) = \frac{1}{t^{1-\Re(\alpha)}}$$

la fonction g étant intégrable sur $]0, 1[$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} t^{\alpha-2} e^{-(x+iy)t} = t^{\alpha-2} e^{-iyt}$

avec $|t^{\alpha-2} e^{-(x+iy)t}| \leq h(t) = \frac{1}{t^{2-\Re(\alpha)}}$, la fonction h étant intégrable sur $]1, +\infty[$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous dit alors que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f_\alpha)(x+iy) &= \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-iyt} dt - \frac{i}{y} \left(e^{-iy} + (\alpha-1) \int_1^{+\infty} t^{\alpha-2} e^{-iyt} dt \right) \\ &= \widehat{f_\alpha}(y) \end{aligned}$$

soit $\widehat{f_\alpha}(y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(\alpha)}{(x+iy)^\alpha}$. Pour y non nul, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+iy)^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x+iy|^\alpha e^{i\alpha \arctan(\frac{y}{x})} = |y|^\alpha e^{i\alpha \operatorname{sgn}(y) \frac{\pi}{2}}$$

où $\operatorname{sgn}(y) = \frac{y}{|y|}$ est le signe de y , donc $\widehat{f_\alpha}(y) = \frac{\Gamma(\alpha)}{|y|^\alpha} e^{-i\alpha \operatorname{sgn}(y) \frac{\pi}{2}}$.

3. Le changement de variable $t = z^2$ donne :

$$\widehat{f_\alpha}(y) = 2 \int_0^{+\infty} z^{2\alpha-1} e^{-iyz^2} dz = \frac{\Gamma(\alpha)}{|y|^\alpha} e^{-i\alpha \operatorname{sgn}(y) \frac{\pi}{2}}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\widehat{f_{\frac{1}{2}}}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-iyt}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2|y|}} (1 - \operatorname{sgn}(y) i)$$

ou encore $\int_0^{+\infty} e^{-iyz^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2|y|}} (1 - \operatorname{sgn}(y) i)$, ce qui donne pour $y = 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \text{ ou encore :}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 6.5. Transformation de Laplace et équations différentielles linéaires à coefficients constants

On appelle fonction causale une fonction qui est nulle pour $t \leq 0$. Si une telle fonction causale f admet une transformée de Laplace F , on dit

alors que f est l'original de F . En utilisant, avec de bonnes hypothèses, les égalités admises :

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(x) = x^n \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) x^{n-1-k}$$

une équation différentielle $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = f$ est transformée en :

$$P(x) \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f) + Q(x)$$

où P et Q sont des fonctions polynomiales. On est alors ramené à trouver un original de $\frac{\mathcal{L}(f) + Q}{P}$, ces calculs se faisant formellement en admettant, avec de bonnes hypothèses, que l'opérateur $\mathcal{L}$ est injectif.

1. ^a En utilisant la transformation de Laplace, résoudre l'équation différentielle :

$$y'''(t) - 5y''(t) + 8y'(t) - 4y(t) = t \cos(t)$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, où y est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant la transformation de Laplace, résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} 2u''(t) + v''(t) + 2u(t) = 0 \\ u''(t) + v''(t) + v(t) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales $u(0) = 1$, $u'(0) = v(0) = v'(0) = 0$, où u et v sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

a. On peut se passer de la transformation de Laplace pour résoudre cette équation différentielle, il s'agit uniquement d'illustrer la méthode sur un exemple simple

Solution.

1. En notant $f(t) = t \cos(t)$ pour $t \geq 0$, on a pour tout $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(t) e^{-xt} dt = \Re \left(\int_0^{+\infty} t e^{(-x+i)t} dt \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t e^{(-x+i)t} dt &= \left[t \frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x-i} \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \\ &= \frac{1}{(x-i)^2} = \frac{(x+i)^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\mathcal{L}(f)(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire nous assure de l'existence et l'unicité d'une solution y de l'équation

différentielle sur $\mathbb{R}$. Précisément, le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée est $P(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2$, donc cette solution est de la forme :

$$y(t) = \alpha e^t + (\beta t + g) e^{2t} + (\delta t + \gamma) e^{it} + (\varepsilon t + \varphi) e^{-it}$$

La transformée de Laplace $Y = \mathcal{L}(y)$ est définie pour $x > 2$ et on a :

$$\mathcal{L}(y') = xY - y(0) = xY - 1$$

$$\mathcal{L}(y'') = x^2Y - y(0)x - y'(0) = x^2Y - x - 1$$

$$\mathcal{L}(y''') = x^3Y - y(0)x^2 - y'(0)x - y(0) = x^3Y - x^2 - x - 1$$

donc $P(x)Y(x) - (x^2 - 4x + 4) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$, soit :

$$(x-1)(x-2)^2 Y(x) - (x-2)^2 = \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

ou encore $Y(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2(x^2+1)^2} + \frac{1}{x-1}$ pour $x > 2$.

En utilisant le logiciel Xcas (instruction : partfrac), on obtient la décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y)(x) &= \frac{1}{x-1} - \frac{19}{125} \frac{1}{x-2} + \frac{3}{25} \frac{1}{(x-2)^2} \\ &+ \frac{1}{125} \left(\frac{23}{x^2+1} + \frac{19x}{x^2+1} \right) + \frac{1}{25} \left(\frac{7x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right) \end{aligned}$$

En utilisant les égalités suivantes :

$$\mathcal{L}(t^n)(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

et :

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t))(x) = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-xt} dt = \frac{x}{x^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t))(x) = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-xt} dt = \frac{\omega}{x^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t \cos(\omega t))(x) &= \int_0^{+\infty} t \cos(\omega t) e^{-xt} dt = \frac{x^2 - \omega^2}{(x^2 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2 + \omega^2} - \frac{2\omega^2}{(x^2 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{1}{\omega} \mathcal{L}(\sin(\omega t))(x) - \frac{2\omega^2}{(x^2 + \omega^2)^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(t \sin(\omega t))(x) = \int_0^{+\infty} t \sin(\omega t) e^{-xt} dt = \frac{2\omega x}{(x^2 + \omega^2)^2}$$

$$\mathcal{L}(f(t) e^{-at})(x) = \mathcal{L}(f)(x + a)$$

on aboutit à $\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(g)$ et $y = g$, où :

$$\begin{aligned} g(t) &= e^t - \frac{19}{125}e^{2t} + \frac{3}{25}te^{2t} + \frac{23}{125}\sin(t) + \frac{19}{125}\cos(t) + \frac{7}{25}\frac{1}{2}t\sin(t) \\ &\quad + \frac{1}{25}\frac{1}{2}(t\cos(t) - \sin(t)) \\ &= e^t - \frac{19}{125}e^{2t} + \frac{3}{25}te^{2t} + \frac{41}{250}\sin(t) + \frac{19}{125}\cos(t) + \frac{7}{50}t\sin(t) + \frac{1}{50}t\cos(t) \end{aligned}$$

qui est bien définie sur tout $\mathbb{R}$ (les constantes qui apparaissent dans l'expression de la solution sur $\mathbb{R}$ sont les mêmes que pour la solution sur $]2, +\infty[$ par unicité dans le théorème de Cauchy, donc $y = g$ sur $]2, +\infty[$ donne bien $y = g$ sur $\mathbb{R}$).

2. En notant $w = u'$, $z = v'$, on a le système différentiel :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est :

$$P(X) = X^4 + 4X^2 + 2 = (X^2 + 2 - \sqrt{2})(X^2 + 2 + \sqrt{2})$$

donc la solution (u, v) de notre système différentiel sur $\mathbb{R}$ (Cauchy-Lipschitz) est telle que u et v sont combinaisons linéaires des fonctions $\cos(\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}t)$ et $\sin(\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}t)$ et ces fonctions admettent des transformées de Laplace U et V définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$. On a alors :

$$\mathcal{L}(u'') = x^2U - u(0)x - u'(0) = x^2U - x$$

$$\mathcal{L}(v'') = x^2V - v(0)x - v'(0) = x^2V$$

et le système linéaire :

$$\begin{cases} 2(1+x^2)U + x^2V = 2x \\ x^2U + (1+x^2)V = x \end{cases}$$

de solutions $U(x) = \frac{x(x^2+2)}{P(x)}$, $V(x) = \frac{2x}{P(x)}$. En utilisant les décompositions en éléments simples (avec Xcas) on aboutit à :

$$U(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+2-\sqrt{2}} + \frac{x}{x^2+2+\sqrt{2}} \right)$$

$$V(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x}{x^2+2-\sqrt{2}} - \frac{x}{x^2+2+\sqrt{2}} \right)$$

et :

$$u(t) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}t} \right) + \cos \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}t} \right) \right)$$

$$v(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}t} \right) - \cos \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}t} \right) \right)$$

Problème 6.1. Quelques propriétés de la transformation de Laplace

Pour tout réel σ , on désigne par P_σ [resp. $\overline{P}_\sigma$] le demi-plan ouvert [resp. fermé] défini par $P_\sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \sigma\}$ [resp. $\overline{P}_\sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \sigma\}$].

On note également $P_{+\infty} = \emptyset$ et $P_{-\infty} = \mathbb{C}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$.

Soient $f \in \mathcal{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. On dit que $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ est convergente et dans ce cas, on note $\mathcal{L}(f)(z)$ la valeur de cette intégrale. L'application $\mathcal{L}(f)$, quand elle est définie, est la transformée de Laplace de f . On note $\mathcal{DL}(f)$ le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ pour $f \in \mathcal{C}$.

– I – Quelques exemples

Déterminer le domaine de définition $\mathcal{DL}(f)$ de $\mathcal{L}(f)$ et préciser les valeurs de $\mathcal{L}(f)(z)$ pour tout $z \in \mathcal{DL}(f)$ dans les cas suivants.

1. f est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^+$.
2. f est la fonction définie par $f(t) = e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, où λ est un nombre complexe donné.
3. f est la fonction définie par $f(t) = t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, où n est un entier naturel donné.
4. f est la fonction définie par $f(t) = e^{\lambda t} t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, où λ est un nombre complexe et n un entier naturel donné.
5. f est la fonction définie par $f(t) = t^n \cos(\omega t)$ [resp. $f(t) = t^n \sin(\omega t)$] pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, où ω un nombre réel, n un entier naturel donné. Préciser ces fonctions pour $n = 0$ et $n = 1$.

– II – Abscisse de convergence

Soit $f \in \mathcal{C}$.

1.

- (a) On suppose que $\mathcal{L}(f)$ est définie en un point $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ et on désigne par F_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F_0(t) = \int_0^t e^{-z_0 u} f(u) du$$

Montrer que pour tout $z \in P_{x_0}$, $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini et que :

$$\mathcal{L}(f)(z) = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F_0(t) dt$$

(b) On désigne par $E(f)$ la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$E(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \text{ est convergente} \right\}$$

- i. Montrer que si $E(f) = \emptyset$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ est divergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. On note, dans ce cas, $\sigma(f) = +\infty$. Donner un exemple de telle situation.
- ii. Montrer que si $E(f)$ est non vide et non minoré, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est alors définie sur tout $\mathbb{C}$. On note alors $\sigma(f) = -\infty$. Donner un exemple de telle situation.
- iii. Montrer que si $E(f)$ est non vide et minoré, il existe alors un réel $\sigma(f)$ tel que :

$$\begin{cases} \text{si } \Re(z) > \sigma(f) \text{ alors } \mathcal{L}(f)(z) \text{ est défini} \\ \text{si } \Re(z) < \sigma(f) \text{ alors } \mathcal{L}(f)(z) \text{ n'est pas défini} \end{cases}$$

Avec les notations de la question précédente, on dit que $\sigma(f)$ est l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et on a :

$$P_{\sigma(f)} \subset \mathcal{DL}(f) \subset \overline{P_{\sigma(f)}}$$

Pour la suite, on suppose que $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\sigma(f) < +\infty$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant. Si pour $\sigma_0 > \sigma(f)$, on désigne par F_0 la primitive nulle en 0 de la fonction $t \mapsto e^{-\sigma_0 t} f(t)$, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F_0(t) = \int_0^t e^{-\sigma_0 u} f(u) du$$

on a alors :

$$\forall z \in P_{\sigma_0}, \mathcal{L}(f)(z) = (z - \sigma_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z - \sigma_0)t} F_0(t) dt$$

2. Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et g la fonction définie sur le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ par :

$$\forall z \in D(0, R), g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

- (a) Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini et que pour tout réel $r \in]0, R[$, il existe un réel $M_r \geq 0$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \right| \leq M_r e^{\frac{|z|}{r}}$$

On note, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

- (b) Pour tout réel $r \in]0, R[$, on désigne par γ_r le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} g(u) \frac{e^{\frac{z}{u}}}{u} du$$

- (c) On note encore f la restriction de f à $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\sigma(f) \leq \frac{1}{R}$ et :

$$\forall z \in P_{\frac{1}{R}}, \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z} g\left(\frac{1}{z}\right)$$

3. Montrer que $\sigma(t^k f) \leq \sigma(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 4. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est holomorphe sur $P_{\sigma(f)}$ avec :

$$\forall z \in P_{\sigma(f)}, \mathcal{L}(f)'(z) = -\mathcal{L}(tf)(z)$$

5. Montrer que, si φ est une fonction continue sur un intervalle réel fermé borné $[a, b]$ à valeurs complexes telle que $\int_a^b \varphi(t) t^n dt = 0$ pour tout entier naturel n , elle est alors identiquement nulle (théorème des moments de Hausdorff).
 6. En utilisant les transformées de Laplace des fonctions $t \mapsto t^n$, vérifier que le résultat de la question précédente n'est pas valable sur $]0, +\infty[$.
 7. On suppose qu'il existe un réel $\sigma_0 > \sigma(f)$ tel que $\mathcal{L}(f)(\sigma_0 + n + 1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer que la fonction φ définie sur $]0, 1]$ par $\varphi(t) = F_0(-\ln(t))$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$.

- (b) Montrer que $\int_0^1 t^n \varphi(t) dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire que f est la fonction identiquement nulle.

8. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $n \geq 1$ et que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \sigma(f^{(k)}) < +\infty$$

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall z \in P_{\sigma(f^{(k)})}, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-zt} f^{(k)}(t) = 0$$

Montrer que :

$$\forall z \in \bigcap_{k=0}^n P_{\sigma(f^{(k)})}, \mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

– III – Étude de la restriction de $\mathcal{L}(f)$ à l'intervalle réel $]\sigma(f), +\infty[$

On s'intéresse ici à la restriction de la fonction $\mathcal{L}(f)$ à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$. On note encore $\mathcal{L}(f)$ cette restriction.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$. On a donc $\mathcal{L}(f)(x) \sim \frac{f(0)}{x}$ si $f(0) \neq 0$ et $\mathcal{L}(f)(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ si $f(0) = 0$.
3. On suppose, pour cette question, que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$. Montrer que $\sigma(f) \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
4. Montrer que si $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lambda$, alors $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \lambda$ (théorème de Cesàro).
5. On suppose, pour cette question, que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente. Montrer que :
- (a) $\sigma(f) \leq 0$;
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ (la limite est prise pour x réel positif);
 - (c) $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt = 0$.
6. Si $\sigma(f) \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, peut-on en déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente?
7. On suppose, pour cette question, que $f \in \mathcal{C}$ est à valeurs positives ou nulles. Montrer que si $\sigma(f) \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est alors convergente et sa valeur vaut ℓ .
8. Soient $f \in \mathcal{C}$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \ell$ et $g \in \mathcal{C}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, g(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{t} & \text{si } t > 0 \\ \ell & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ est convergente.

- (a) Montrer que $\sigma(f) \leq \sigma(g) \leq 0$.
- (b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt$ est convergente et que :

$$\forall x \geq 0, \mathcal{L}(g)(x) = \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt$$

En particulier, on a $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt$ et on retrouve les résultats de la question précédente.

- IV - Théorèmes taubériens

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}$ est telle que la fonction $t \mapsto t \cdot f(t)$ soit bornée (i.e. $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \right)$), on a alors $\sigma(f) \leq 0$.
2. On suppose, pour cette question, que $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t \cdot f(t)) = 0$ (i.e. $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \right)$).

(a) Montrer que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t |f(t)| dt = 0$.

(b) Montrer que :

$$\forall x > 0, \forall T > 0, \left| \int_T^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \right| \leq \frac{e^{-xT}}{xT} \sup_{t \geq T} (t |f(t)|)$$

(c) On suppose de plus que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \ell$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et vaut ℓ .

3. Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \right)$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$. Ce résultat est un théorème de Tauber (faible).

4. On s'intéresse ici à la réciproque du résultat montré en III.5.

Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $\sigma(f) \leq 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \ell$, $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt = 0$.

En désignant par g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $g(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t u f(u) du$ pour tout $t > 0$, montrer que :

(a) $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \frac{f(0)}{2}$, ce qui permet de prolonger la fonction g par continuité en 0 en posant $g(0) = \frac{f(0)}{2}$;

(b) $\sigma(g) \leq 0$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \mathcal{L}(t \cdot g)(x) = 0$;

(d) $\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(g)(x) + x \mathcal{L}(t \cdot g)(x)$ pour tout $x > 0$;

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \ell$;

(f) $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

En définitive, on a montré le résultat suivant : Soit $f \in \mathcal{C}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et vaut ℓ si, et seulement si : $\sigma(f) \leq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell, \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt = 0.$$

5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^{+,*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \gamma$ et la fonction $x \mapsto x^2 \varphi''(x)$ soit bornée sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \varphi'(x) = 0$ (lemme de Littlewood).

On admet le résultat suivant : (R) Si $\varphi \in \mathcal{C}$ est à valeurs réelles positives telle que $\sigma(\varphi) \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \mathcal{L}(\varphi)(x) = \ell$, on a alors $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt = \ell$.

6. Soit $f \in \mathcal{C}$ à valeurs réelles telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$ et $f(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $t|f(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$. On se propose de montrer que, dans ce cas, on a $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \ell$ (théorème de Tauber fort).

(a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \mathcal{L}(f)'(x) = 0$.

(b) En utilisant la fonction φ définie par $\varphi(t) = M - t \cdot f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, montrer que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot f(t) dt = 0$ et conclure.

Solution.

- I - Quelques exemples

1. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a :

$$\int_0^t e^{-zu} du = \begin{cases} t & \text{si } z = 0 \\ \frac{1 - e^{-zt}}{z} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

Pour $x > 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-zt}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-xt} = 0$, donc $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini avec :

$$\mathcal{L}(f)(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-zu} du = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} (1 - e^{-zt}) = \frac{1}{z}$$

Pour $x < 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-zt}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-xt} = +\infty$ et la fonction $t \mapsto e^{-zt}$, n'a pas de limite quand t tend vers $+\infty$, donc $\mathcal{L}(f)(z)$ n'est pas défini.

Pour $x = y = 0$, la fonction $t \mapsto t$ n'a pas de limite quand t tend vers $+\infty$, donc $\mathcal{L}(f)(z)$ n'est pas défini.

Pour $x = 0$ et $y \neq 0$, on vérifie que la fonction $t \mapsto e^{-iyt}$, n'a pas de limite quand t tend vers $+\infty$. En effet, en utilisant la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n = \frac{n\pi}{y}$, on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, alors que la suite $(e^{-iyt_n})_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente. Il en résulte que $\mathcal{L}(f)(z)$ n'est pas défini. En définitive, le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ est $P_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$ et $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in P_0$.

2. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ et tout nombre réel $t \geq 0$, on a :

$$e^{-zt} f(t) = e^{-(z-\lambda)t} \cdot 1$$

donc $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini si, et seulement si, $\mathcal{L}(1)(z - \lambda)$ est défini, ce qui équivaut à $\Re(z - \lambda) > 0$. Il en résulte que le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ est :

$$P_{\Re(\lambda)} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \Re(\lambda)\}$$

et $\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(1)(z - \lambda) = \frac{1}{z - \lambda}$ pour tout $z \in P_{\Re(\lambda)}$.

3. On note $f_n(t) = t^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$. Pour $n = 0$, on a vu en I.1 que $\mathcal{DL}(f_0) = P_0$ et $\mathcal{L}(f_0)(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in P_0$.

Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $x > 0$, avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 |e^{-zt} t^n| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-xt} t^{n+2} = 0$,

on déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt$ est absolument convergente et $\mathcal{L}(f_n)(z)$ est défini.

Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $x \leq 0$, on vérifie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt$ est divergente.

On rappelle que pour $-\infty < a < b \leq +\infty$ et f fonction continue par morceaux de $[a, b[$ dans $\mathbb{C}$, l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si, et seulement si, pour toute suite strictement croissante $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$ qui converge

vers b , la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt$ est convergente.

Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x \leq 0$ et $y > 0$, en utilisant la suite de réels positifs

$(t_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{k\pi}{y}\right)_{k \in \mathbb{N}}$, on a pour tout entier $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-zt} t^n dt = \int_{\frac{k\pi}{y}}^{\frac{(k+1)\pi}{y}} e^{-xt} e^{-iyt} t^n dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{x}{y}u} e^{-iu} \frac{u^n}{y^{n+1}} du \\ &= \frac{(-1)^k e^{-\frac{x}{y}k\pi}}{y^{n+1}} \int_0^\pi e^{-\frac{x}{y}t} e^{-it} (k\pi + t)^n dt \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} |u_k| &\geq |\Im(u_k)| = \frac{e^{-\frac{x}{y}k\pi}}{y^{n+1}} \int_0^\pi e^{-\frac{x}{y}t} \sin(t) (k\pi + t)^n dt \\ &\geq \frac{1}{y^{n+1}} \int_0^\pi e^{-\frac{x}{y}t} \sin(t) t^n dt = I_n \end{aligned}$$

où $I_n > 0$. Il en résulte que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et l'intégrale

$\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt$ est divergente. Par conjugaison complexe, on déduit que cela est encore vrai pour $x \leq 0$ et $y < 0$.

Enfin pour $x \leq 0$ et $y = 0$, on a :

$$u_k = \int_k^{k+1} e^{-xt} t^n dt = e^{-xk} \int_0^1 e^{-xu} (k+u)^n du \geq \int_0^1 e^{-xu} u^n du = I_n$$

avec $I_n > 0$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} t^n dt$ est divergente. En définitive, on a $\mathcal{DL}(f_n) = P_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le calcul de $\mathcal{L}(f_n)$ peut alors se faire par récurrence sur $n \geq 0$. On a déjà $\mathcal{L}(f_0)(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in P_0$. Supposons que l'on ait, pour $n \geq 1$, $\mathcal{L}(f_{n-1})(z) = \frac{(n-1)!}{z^n}$ pour tout $z \in P_0$. Une intégration par parties nous donne, pour tout $z \in P_0$ et tout réel $T > 0$:

$$\int_0^T e^{-zt} t^{n-1} dt = e^{-zT} \frac{T^n}{n} + \frac{z}{n} \int_0^T e^{-zt} t^n dt$$

avec $\lim_{T \rightarrow +\infty} \left| e^{-zT} \frac{T^n}{n} \right| = \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-xT} \frac{T^n}{n} = 0$ puisque $x > 0$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt$ est convergente avec :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt = \frac{n}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{n-1} dt = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

On a donc ainsi montré que, pour tout entier naturel n , le domaine de définition de $\mathcal{L}(f_n)$ est P_0 avec $\mathcal{L}(f_n)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$ pour tout $z \in P_0$.

4. Pour tout nombre complexe z et tout réel $t \geq 0$, on a $e^{-zt} f(t) = e^{-(z-\lambda)t} t^n$. Donc $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini si, et seulement si, $\mathcal{L}(f_n)(z-\lambda)$ est défini, ce qui équivaut à $\Re(z-\lambda) > 0$. Il en résulte que le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ est $P_{\Re(\lambda)} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \Re(\lambda)\}$ et :

$$\forall z \in P_{\Re(\lambda)}, \mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(f_n)(z-\lambda) = \frac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}$$

5. On note $f_n(t) = t^n \cos(\omega t)$ et $g_n(t) = t^n \sin(\omega t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Prenant $\lambda = \pm i\omega$ dans la question précédente, on déduit que chaque intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{\pm i\omega t} t^n dt$ est convergente si, et seulement si, $z \in P_0$. Il en résulte que $\mathcal{DL}(f_n) = \mathcal{DL}(g_n) = P_0$ avec, pour tout $z \in P_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_n)(z) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}(e^{i\omega t} t^n)(z) + \mathcal{L}(e^{-i\omega t} t^n)(z)) \\ &= \frac{n!}{2} \left(\frac{1}{(z-i\omega)^{n+1}} + \frac{1}{(z+i\omega)^{n+1}} \right) = \frac{n!}{2} \frac{(z+i\omega)^{n+1} + (z-i\omega)^{n+1}}{(z^2 + \omega^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g_n)(z) &= \frac{1}{2i} (\mathcal{L}(e^{i\omega t} t^n)(z) - \mathcal{L}(e^{-i\omega t} t^n)(z)) \\ &= \frac{n!}{2i} \left(\frac{1}{(z-i\omega)^{n+1}} - \frac{1}{(z+i\omega)^{n+1}} \right) = \frac{n!}{2i} \frac{(z+i\omega)^{n+1} - (z-i\omega)^{n+1}}{(z^2 + \omega^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_0)(z) &= \frac{z}{z^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}(f_1)(z) = \frac{z^2 - \omega^2}{(z^2 + \omega^2)^2} \\ \mathcal{L}(g_0)(z) &= \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}(g_1)(z) = \frac{2\omega z}{(z^2 + \omega^2)^2}\end{aligned}$$

- II - Abscisse de convergence

1.

- (a) La fonction F_0 est la primitive nulle en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$. Comme F_0 est continue avec :

$$F_0(T) = \int_0^T e^{-z_0 t} f(t) dt \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt = \mathcal{L}(f)(z_0)$$

elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |F_0(t)| < +\infty$. Pour tout nombre complexe z et tout réel $T > 0$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-zt} f(t) dt &= \int_0^T e^{-z_0 t} f(t) e^{-(z-z_0)t} dt = \int_0^T F_0'(t) e^{-(z-z_0)t} dt \\ &= [F_0(t) e^{-(z-z_0)t}]_0^T + (z-z_0) \int_0^T F_0(t) e^{-(z-z_0)t} dt \\ &= F_0(T) e^{-(z-z_0)T} + (z-z_0) \int_0^T F_0(t) e^{-(z-z_0)t} dt\end{aligned}$$

et pour $z \in P_{x_0}$, on a :

$$|F_0(t) e^{-(z-z_0)t}| = |F_0(t)| e^{-(x-x_0)t} \leq M_0 e^{-(x-x_0)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

De plus, comme $\int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} dt$ est convergente pour $x > x_0$, l'inégalité précédente nous dit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F_0(t) e^{-(z-z_0)t} dt$ est absolument convergente pour $z \in P_{x_0}$ avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z-z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F_0(t) dt \\ &= (z-z_0) \mathcal{L}(F_0)(z-z_0)\end{aligned}$$

Le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ contient donc le demi-plan P_{x_0} .

(b)

- i. Si, pour $z_0 \in \mathbb{C}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ est convergente, la question II.1a nous dit alors que $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ est convergente pour

tout $x > \Re(z_0)$ et $E(f) \neq \emptyset$.

Pour $f \in \mathcal{C}$ définie par $f(t) = e^{t^2}$ et tout réel x , tout entier naturel k , on a :

$$u_k = \int_k^{k+1} e^{-xt} e^{t^2} dt \geq \begin{cases} e^{-x(k+1)} e^{k^2} & \text{si } x \geq 0 \\ e^{-xk} e^{k^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

donc la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{t^2} dt$ est divergente.

On a donc $E(f) = \emptyset$, $\mathcal{DL}(f) = \emptyset$, dans ce cas et $\sigma(f) = +\infty$.

ii. Supposons $E(f)$ non vide et non minoré. Cela signifie que :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in E(f) \mid x_0 < m$$

Donc pour tout nombre complexe z , il existe donc un réel $x_0 \in E(f)$

tel que $x_0 < \Re(z)$ et la question II.1a nous dit que $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ est convergente. La fonction $\mathcal{L}(f)$ est donc définie sur tout $\mathbb{C}$.

La fonction identiquement nulle nous donne un exemple trivial.

Pour $f(t) = e^{-t^2}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-xt} e^{-t^2} = 0$, donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{-t^2} dt \text{ est convergente.}$$

On a donc $E(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{DL}(f) = \mathbb{C}$, dans ce cas et $\sigma(f) = -\infty$.

iii. Si $E(f)$ est non vide et minoré, il admet alors une borne inférieure :

$$\sigma(f) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \text{ est convergente} \right\}$$

Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\Re(z) > \sigma(f)$, par définition de la borne inférieure, il existe alors un réel $\sigma_0 \in E(f)$ tel que $\sigma(f) \leq \sigma_0 < \Re(z)$ et $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini.

Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\Re(z) < \sigma(f)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ est nécessairement divergente; sinon pour $\sigma_0 \in]\Re(z), \sigma(f)[$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma_0 t} f(t) dt$ est convergente, ce qui est en contradiction avec $\sigma(f) = \inf E(f)$ et $\sigma_0 < \sigma(f)$.

2. On rappelle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ défini par $R = \sup \{ r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$.

(a) Pour $0 < r < R$, la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et pour tout $z \in \mathbb{C}$, en notant $M_r = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n r^n|$, on a :

$$\left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| = |a_n r^n| \frac{1}{n!} \left(\frac{|z|}{r} \right)^n \leq M_r \frac{1}{n!} \left(\frac{|z|}{r} \right)^n$$

avec $\sum \frac{1}{n!} \left(\frac{|z|}{r} \right)^n < +\infty$. Il en résulte que la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est convergente. Le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est donc infini et avec la majoration précédente, on déduit que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| \leq M_r \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{|z|}{r} \right)^n = M_r e^{\frac{|z|}{r}}$$

- (b) La série entière $\sum \frac{t^n}{n!}$ ayant un rayon de convergence infini, on peut écrire que :

$$\int_{\gamma_r} g(u) \frac{e^{\frac{z}{u}}}{u} du = \int_{\gamma_r} g(u) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{z^n}{u^{n+1}} \right) du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_{\gamma_r} \frac{g(u)}{u^{n+1}} du \right) z^n$$

La fonction g étant holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$, le théorème de Cauchy nous dit que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{g(u)}{u^{n+1}} du$,

$$\text{donc } \int_{\gamma_r} g(u) \frac{e^{\frac{z}{u}}}{u} du = 2i\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = 2i\pi f(z).$$

- (c) Pour $x > \frac{1}{R}$, $r \in \left] \frac{1}{x}, R \right[$ et $t \geq 0$, on a :

$$|e^{-xt} f(t)| \leq M_r e^{-xt} e^{\frac{t}{r}} = M_r e^{-(x-\frac{1}{r})t}$$

avec $\int_0^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{r})t} dt < +\infty$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est absolument convergente. Il en résulte que $\left] \frac{1}{R}, +\infty \right[\subset E(f)$ et $\sigma(f) \leq \frac{1}{R}$.
Pour $z = x + iy \in P_{\frac{1}{R}}$, on a :

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \right) dt$$

On désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie, à z fixé dans $P_{\frac{1}{R}}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u_n(t) = \frac{a_n}{n!} e^{-xt} t^n$$

toutes ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$ avec $|u_n(t)| \leq \frac{|a_n|}{n!} e^{-xt} t^n$, elles sont donc intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt \leq \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \frac{1}{x^n} < +\infty$$

puisque $0 < \frac{1}{x} < R$. On déduit alors du théorème de convergence dominée

que $e^{-zt}f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-zt} \frac{a_n}{n!} t^n dt \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} g\left(\frac{1}{z}\right)\end{aligned}$$

Ce résultat peut aussi se montrer directement. Notant $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(z) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^k dt + \int_0^{+\infty} e^{-zt} R_n(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \mathcal{L}(t^k)(z) + \int_0^{+\infty} e^{-zt} R_n(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{k!}{z^{k+1}} + \int_0^{+\infty} e^{-zt} R_n(t) dt \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{1}{z}\right)^k + \int_0^{+\infty} e^{-zt} R_n(t) dt\end{aligned}$$

($x > \frac{1}{R} > 0$, donc $\mathcal{L}(t^k)(z)$ est bien défini).

Pour $z \in P_{\frac{1}{R}}$, on a $|z| \geq |\Re(z)| = x > \frac{1}{R}$, donc $g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\frac{1}{z}\right)^k$ est bien défini et il s'agit de montrer que :

$$\forall z \in P_{\frac{1}{R}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-zt} R_n(t) dt = 0$$

Pour ce faire, en se donnant $r \in \left] \frac{1}{x}, R \right]$, on écrit que :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{+\infty} e^{-zt} R_n(t) dt \right| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k r^k}{k!} \left(\frac{t}{r} \right)^k \right) dt \right| \\
 &\leq M_r \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{r} \right)^k \right) dt \\
 &\leq M_r \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(e^{\frac{t}{r}} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{r} \right)^k \right) dt \\
 &\leq M_r \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{r})t} dt - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{1}{r^k} \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^k dt \right) \\
 &\leq M_r \left(\frac{1}{x - \frac{1}{r}} - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(rx)^k} \right) \\
 &\leq \frac{M}{x} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{rx}} - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{rx} \right)^k \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

3. Pour $k=0$, il n'y a rien à faire. On suppose que $k=1$.

Pour $z = x + iy \in P_{\sigma}(f)$ et σ_0 tel que $\sigma(f) < \sigma_0 < x$, on a pour tout réel $T > 0$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T e^{-zt} t f(t) dt &= \int_0^T e^{-\sigma_0 t} f(t) t e^{-(z-\sigma_0)t} dt = \int_0^T F_0'(t) t e^{-(z-\sigma_0)t} dt \\
 &= F_0(T) T e^{-(z-\sigma_0)T} + (z - \sigma_0) \int_0^T F_0(t) t e^{-(z-\sigma_0)t} dt \\
 &\quad - \int_0^T F_0(t) e^{-(z-\sigma_0)t} dt
 \end{aligned}$$

avec :

$$|F_0(t) t^j e^{-(z-\sigma_0)t}| \leq M_0 t^j e^{-(x-\sigma_0)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

et $\int_0^{+\infty} t^j e^{-(x-\sigma_0)t} dt < +\infty$ pour $j=0$ et $j=1$. Il en résulte que toutes les intégrales considérées sont convergentes et :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(tf)(z) &= (z - \sigma_0) \int_0^{+\infty} F_0(t) t e^{-(z-\sigma_0)t} dt - \int_0^{+\infty} F_0(t) e^{-(z-\sigma_0)t} dt \\
 &= (z - \sigma_0) \mathcal{L}(t \cdot F_0)(z - \sigma_0) - \mathcal{L}(F_0)(z - \sigma_0)
 \end{aligned}$$

On a donc, $\sigma(tf) \leq \sigma(f)$. Puis, par récurrence, on en déduit que $\sigma(t^k f) \leq \sigma(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. On suppose tout d'abord que la fonction $f \in \mathcal{C}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et on note $M = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)|$. Pour tout $z \in P_0$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $|e^{-zt} f(t)| \leq M e^{-xt}$

avec $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt < +\infty$, donc la fonction $t \mapsto e^{-zt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $z \mapsto e^{-zt} f(t)$ est holomorphe sur P_0 .

Pour $\sigma_0 > 0$ donné, on a :

$$\forall (z, t) \in P_{\sigma_0} \times \mathbb{R}^+, |e^{-zt} f(t)| \leq M e^{-xt} \leq M e^{-\sigma_0 t}$$

avec $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma_0 t} dt < +\infty$.

On en déduit alors que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est holomorphe sur P_{σ_0} avec :

$$\forall z \in P_{\sigma_0}, \mathcal{L}(f)'(z) = - \int_0^{+\infty} e^{-zt} t \cdot f(t) dt = -\mathcal{L}(t \cdot f)(z)$$

(théorème de convergence dominée pour les fonctions holomorphes).

On notera que pour les questions d'holomorphie la condition de domination porte sur φ et non sur $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ comme pour les questions de $\mathbb{R}$ -dérivabilité. On remarquera aussi que la définition de $\mathcal{L}(f)(z)$ entraîne celle de $\mathcal{L}(t \cdot f)(z)$.

Comme $\sigma_0 > 0$ est quelconque, on en déduit que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est holomorphe sur P_0 avec $\mathcal{L}(f)'(z) = -\mathcal{L}(t \cdot f)(z)$ pour tout $z \in P_0$.

Pour $f \in \mathcal{C}$ et $\sigma_0 > \sigma(f)$ donné, on écrit que pour tout $z \in P_{\sigma_0}$, on a :

$$\mathcal{L}(f)(z) = (z - \sigma_0) \mathcal{L}(F_0)(z - \sigma_0)$$

la fonction F_0 étant bornée sur $\mathbb{R}^+$. La fonction $\mathcal{L}(F_0)$ est alors holomorphe sur P_0 et $z \mapsto \mathcal{L}(F_0)(z - \sigma_0)$ est holomorphe P_{σ_0} , donc $\mathcal{L}(f)$ est holomorphe P_{σ_0} avec :

$$\forall z \in P_{\sigma_0}, \mathcal{L}(f)'(z) = \mathcal{L}(F_0)(z - \sigma_0) - (z - \sigma_0) \mathcal{L}(t \cdot F_0)(z - \sigma_0)$$

À la question précédente, on a vu que :

$$\forall z \in P_{\sigma_0}, (z - \sigma_0) \mathcal{L}(t \cdot F_0)(z - \sigma_0) = \mathcal{L}(tf)(z) + \mathcal{L}(F_0)(z - \sigma_0)$$

donc $\mathcal{L}(f)'(z) = -\mathcal{L}(tf)(z)$ pour tout $z \in P_{\sigma_0}$. Comme $\sigma_0 > \sigma(f)$ est quelconque, on en déduit que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est holomorphe sur $P_{\sigma(f)}$ avec $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(tf)$.

5. Avec la linéarité de l'intégrale, on déduit que pour tout polynôme P on a

$\int_a^b \varphi(x) P(x) dx = 0$. Le théorème de Weierstrass nous dit que la fonction continue $\bar{\varphi}$ est limite uniforme sur le compact $[a, b]$ d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes. Comme φ est continue sur le compact $[a, b]$, elle y est bornée et avec $\|\varphi P_n - \varphi \bar{\varphi}\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_{\infty} \|P_n - \bar{\varphi}\|_{\infty}$, on déduit que la suite $(\varphi P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|\varphi|^2$. On peut donc écrire que :

$$\int_a^b |\varphi|^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(t) P_n(t) dt = 0$$

et avec la continuité et la positivité de $|\varphi|^2$, il en résulte que φ est identiquement nulle.

6. On a vu en I.3 que pour tout entier naturel n , on a :

$$\forall z = x + iy \in P_0, \mathcal{L}(t^n)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^n dt = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

$$\text{ce qui nous donne } \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(yt) t^n dt = -\Im \left(\frac{n!}{z^{n+1}} \right).$$

En prenant $z = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \in P_0$, $n+1 = 4k$, on a $z^{n+1} = e^{ik\pi} = (-1)^k$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) t^{4k-1} dt = 0$$

En effectuant le changement de variable $u = t^4$, $du = 4t^3 dt = 4u \frac{dt}{t}$ sur $]0, +\infty[$, cela nous donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}u^{\frac{1}{4}}} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u^{\frac{1}{4}}\right)}{u} u^k du = 0$$

On a donc une fonction $\varphi : u \mapsto e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}u^{\frac{1}{4}}} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u^{\frac{1}{4}}\right)}{u}$ continue non identiquement nulle sur $]0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} u^k \varphi(u) du = 0$ pour tout entier naturel k (avec $|\varphi(u)| \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{C}{u^{\frac{3}{4}}}$, on déduit que l'intégrale est convergente en 0).

7.

- (a) Avec $\lim_{t \rightarrow 0^+} F_0(-\ln(t)) = \lim_{T \rightarrow +\infty} F_0(T) = \mathcal{L}(f)(\sigma_0)$, on déduit que la fonction φ se prolonge par continuité en 0.
- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \varepsilon < T$, le changement de variable $u = e^{-t}$ nous donne :

$$\int_{\varepsilon}^T F_0(t) e^{-(n+1)t} dt = \int_{e^{-T}}^{e^{-\varepsilon}} u^{n+1} F_0(-\ln(u)) \frac{du}{u}$$

et faisant tendre (ε, T) vers $(0, +\infty)$, on obtient :

$$\int_0^1 u^n F_0(-\ln(u)) du = \int_0^{+\infty} F_0(t) e^{-(n+1)t} dt = \frac{\mathcal{L}(f)(\sigma_0 + n + 1)}{n + 1} = 0$$

ce qui équivaut à $F_0(-\ln(u)) = 0$ pour tout $u \in]0, 1]$ d'après le théorème des moments. Il en résulte que $F_0(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et comme $F'_0(t) = e^{-\sigma_0 t} f(t)$, on en déduit que $f = 0$. On en déduit immédiatement que si $\mathcal{L}(f)(z) = 0$ pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$, f est alors la fonction identiquement nulle.

8. On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$ et $z \in P_{\sigma(f)} \cap P_{\sigma(f')}$, une intégration par parties nous donne pour tout réel $T > 0$:

$$\int_0^T e^{-zt} f'(t) dt = [e^{-zt} f(t)]_0^T + z \int_0^T e^{-zt} f(t) dt$$

et tenant compte de $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-zT} f(T) = 0$, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t) dt = -f(0) + z \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

soit $\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$.

Supposant le résultat acquis au rang $n-1$, une intégration par parties nous

donne, de manière analogue, pour $z \in \bigcap_{k=0}^n P_{\sigma}(f^{(k)})$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f^{(n)}(t) dt = -f^{(n-1)}(0) + z \int_0^{+\infty} e^{-zt} f^{(n-1)}(t) dt$$

soit $\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z\mathcal{L}(f^{(n-1)})(z) - f^{(n-1)}(0)$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(z) &= z \left(z^{n-1} \mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-2} z^{n-2-k} f^{(k)}(0) \right) - f^{(n-1)}(0) \\ &= z^n \mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

- III - Étude de la restriction de $\mathcal{L}(f)$ à l'intervalle réel $]\sigma(f), +\infty[$

1. Pour $x > \sigma_0 > \sigma(f)$, on a $\mathcal{L}(f)(x) = (x - \sigma_0) \int_0^{+\infty} e^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t) dt$. Comme F_0 est continue en 0 avec $F_0(0) = 0$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|F_0(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0, \eta]$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} e^{-(x-\sigma_0)t} F_0(t) dt \right| &\leq \varepsilon \int_0^{\eta} e^{-(x-\sigma_0)t} dt + M_0 \int_{\eta}^{+\infty} e^{-(x-\sigma_0)t} dt \\ &\leq \varepsilon \frac{1 - e^{-(x-\sigma_0)\eta}}{x - \sigma_0} + M_0 \frac{e^{-(x-\sigma_0)\eta}}{x - \sigma_0} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{x - \sigma_0} + M_0 \frac{e^{-(x-\sigma_0)\eta}}{x - \sigma_0} \end{aligned}$$

et $|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \varepsilon + M_0 e^{-(x-\sigma_0)\eta} < 2\varepsilon$ pour x grand puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(x-\sigma_0)\eta} = 0$.

0. On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

2. Pour $x > 0$ et $x > \sigma(f)$, on a $x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) = x \int_0^{+\infty} e^{-xt} (f(t) - f(0)) dt$. Comme f est continue en 0, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta > 0$

tel que $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0, \eta]$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} |x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)| &\leq x \int_0^\eta e^{-xt} |f(t) - f(0)| dt + x \left| \int_\eta^{+\infty} e^{-xt} (f(t) - f(0)) dt \right| \\ &\leq x\varepsilon \int_0^\eta e^{-xt} dt + x \left| \int_\eta^{+\infty} e^{-xt} (f(t) - f(0)) dt \right| \\ &\leq x\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt + \left| x \int_\eta^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt - xf(0) \int_\eta^{+\infty} e^{-xt} dt \right| \\ &\leq \varepsilon + \left| x \int_\eta^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt - f(0) e^{-x\eta} \right| \\ &\leq \varepsilon + |f(0)| e^{-x\eta} + \left| x \int_\eta^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \right| \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\eta} = 0$, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un réel $\sigma_0 > 0$ tel que $\sigma_0 > \sigma(f)$ et $0 \leq |f(0)| e^{-x\eta} \leq \varepsilon$ pour tout $x > \sigma_0$. Ensuite pour $x > \sigma_0$, on écrit que :

$$\begin{aligned} \int_\eta^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt &= \int_\eta^{+\infty} e^{-\sigma_0 t} f(t) e^{-(x-\sigma_0)t} dt = \int_\eta^{+\infty} F_0'(t) e^{-(x-\sigma_0)t} dt \\ &= \left[F_0(t) e^{-(x-\sigma_0)t} \right]_\eta^{+\infty} + (x - \sigma_0) \int_\eta^{+\infty} F_0(t) e^{-(x-\sigma_0)t} dt \\ &= -F_0(\eta) e^{-(x-\sigma_0)\eta} + (x - \sigma_0) \int_\eta^{+\infty} F_0(t) e^{-(x-\sigma_0)t} dt \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \left| x \int_\eta^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \right| &\leq x M_0 \left(e^{-(x-\sigma_0)\eta} + (x - \sigma_0) \int_\eta^{+\infty} e^{-(x-\sigma_0)t} dt \right) \\ &\leq 2x M_0 e^{-(x-\sigma_0)\eta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

On peut donc trouver $\sigma_1 > \sigma_0$ tel que $\left| x \int_\eta^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \right| \leq \varepsilon$ pour tout $x > \sigma_1$.

En définitive, on a $|x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)| \leq 3\varepsilon$ pour tout $x > \sigma_1$. On a donc montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

Avec $\mathcal{L}(f)(x) = (x - \sigma_0) \mathcal{L}(F_0)(x - \sigma_0)$ pour $x > \sigma_0 > \sigma(f)$, on retrouve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sigma_0) \mathcal{L}(F_0)(x - \sigma_0) = F_0(0) = 0$$

3.

- (a) Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$, la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, on déduit qu'elle est bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. On a alors, pour tout $x > 0$, $|e^{-xt} f(t)| \leq M e^{-xt}$ avec $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt < +\infty$, d'où la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$. On a donc $\sigma(f) \leq 0$.

- (b) Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un réel $T_\varepsilon > 0$ tel que $|f(t) - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $t > T_\varepsilon$, ce qui nous donne, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} |x\mathcal{L}(f)(x) - \ell| &= \left| x \int_0^{+\infty} e^{-xt} (f(t) - \ell) dt \right| \\ &\leq x \int_0^{T_\varepsilon} e^{-xt} |f(t) - \ell| dt + x \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} e^{-xt} |f(t) - \ell| dt \\ &\leq x(M + |\ell|) \int_0^{T_\varepsilon} e^{-xt} dt + x\varepsilon \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} e^{-xt} dt \\ &\leq x(M + |\ell|)T_\varepsilon + x\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = x(M + |\ell|)T_\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

et pour $0 < x < \frac{\varepsilon}{(M + |\ell|)T_\varepsilon}$, on a $|x\mathcal{L}(f)(x) - \ell| < 2\varepsilon$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

4. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lambda$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $T_\varepsilon > 0$ tel que $|f(t) - \lambda| \leq \varepsilon$ pour tout $t > T_\varepsilon$ et pour tout $T \geq T_\varepsilon$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt - \lambda \right| &= \left| \frac{1}{T} \int_0^T (f(t) - \lambda) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^{T_\varepsilon} |f(t) - \lambda| dt + \frac{1}{T} \int_{T_\varepsilon}^T |f(t) - \lambda| dt \\ &\leq \frac{I_\varepsilon}{T} + \frac{T - T_\varepsilon}{T} \varepsilon \leq \frac{I_\varepsilon}{T} + \varepsilon \end{aligned}$$

et pour $T > \max\left(T_\varepsilon, \frac{I_\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, on a $\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt - \lambda \right| \leq 2\varepsilon$.

On a donc $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \lambda$.

5.

- (a) Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, on a alors $0 \in E(f)$ et $\sigma(f) \leq 0$ par définition de $\sigma(f)$ comme borne inférieure.
- (b) Comme $0 \in E(f)$, on peut écrire que :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = x \int_0^{+\infty} e^{-xt} F_0(t) dt$$

$F_0 : t \mapsto \int_0^t f(u) du$ étant continue, bornée sur $\mathbb{R}^+$ avec $F_0(0) = 0$.

On a donc $\mathcal{L}(f)(x) = x\mathcal{L}(F_0)(x)$ pour tout $x > 0$. Comme $F_0 \in \mathcal{C}$ et

$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_0(t) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$, on déduit de III.3 que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \mathcal{L}(F_0)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

soit $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \mathcal{L}(f)(0)$, c'est-à-dire que $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0. Comme on sait déjà qu'elle est continue sur $]0, +\infty[$ (qui est contenu dans $]\sigma(f), +\infty[$), on en déduit que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Une intégration par parties nous donne pour tout $T > 0$:

$$\int_0^T t f(t) dt = \int_0^T t F_0'(t) dt = [t F_0(t)]_0^T - \int_0^T F_0(t) dt$$

et $\frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt = F_0(T) - \frac{1}{T} \int_0^T F_0(t) dt$ avec :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_0(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} F_0(T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

(théorème de Cesàro) et en conséquence, $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt = 0$.

6. Si $\sigma(f) < 0$, $\mathcal{L}(f)(0)$ est alors défini et vaut ℓ puisque $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]\sigma(f), +\infty[$. Mais pour $\sigma(f) = 0$, la condition $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$ n'entraîne

pas nécessairement la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$. Par exemple, pour $f \in \mathcal{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la question I.2 nous dit que $\sigma(f) = 0$ et $\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z-i}$ pour tout $z \in P_0$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = i$, ce qui permet de prolonger $\mathcal{L}(f)$ par continuité en 0, alors que $\int_0^{+\infty} e^{it} dt$ est divergente (en I.1 on a vu que $t \mapsto e^{it}$ n'a pas de limite à l'infini).

7. Comme $\sigma(f) \leq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est convergente pour tout réel $x > 0$ et comme f est à valeurs positives, on a pour tout réel $T > 0$:

$$0 \leq \int_0^T e^{-xt} f(t) dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = \mathcal{L}(f)(x)$$

Pour chaque $T > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \int_0^T e^{-xt} f(t) dt$ est continue sur $\mathbb{R}$ (la fonction $(x, t) \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et l'intégration se fait sur un segment), ce qui nous donne :

$$\forall T > 0, 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^T e^{-xt} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$$

Il en résulte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et la question III.5

nous dit que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

8.

- (a) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et l'hypothèse $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \ell$ nous dit qu'elle se prolonge par continuité en 0. Comme $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ est convergente, on a $\sigma(g) \leq 0$. De $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \ell$, on déduit que $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$, on a donc $f = t \cdot g$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\sigma(f) = \sigma(tg) \leq \sigma(g) \leq 0$.
- (b) Comme $\sigma(g) \leq 0$, la fonction $\mathcal{L}(g)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(g)'(x) = -\mathcal{L}(tg)(x) = -\mathcal{L}(f)(x)$$

il existe donc une constante complexe C telle que :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(g)(x) = -\int_0^x \mathcal{L}(f)(t) dt + C$$

Avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(g)(x) = 0$, on déduit que $\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt$ converge et $C = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt$, ce qui nous donne :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(g)(x) = -\int_0^x \mathcal{L}(f)(t) dt + \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt = \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt$$

Comme $\mathcal{L}(g)(0)$ est définie, la fonction $\mathcal{L}(g)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\mathcal{L}(g)(0) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt$$

Pour $f(t) = \sin(t)$, on retrouve :

$$\forall x \geq 0, \mathcal{L}(g)(x) = \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t) dt = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

$$\text{et } \mathcal{L}(g)(0) = \frac{\pi}{2}.$$

- IV - Théorèmes taubériens

1. Si $f(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$, il existe alors un réel $M > 0$ tel que $|t \cdot f(t)| \leq M$

pour tout $t \geq 0$. Pour $x > 0$ et $t > 0$, on a alors $|e^{-xt} f(t)| \leq M \frac{e^{-xt}}{t}$ avec

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt < +\infty$ puisque $x > 0$ (on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^2 \frac{e^{-xt}}{t}\right) = 0$), donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est absolument convergente et aussi $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $\sigma(f) \leq 0$.

2. Si $f(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$, on a alors $f(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ et $\sigma(f) \leq 0$ d'après la question précédente.

(a) Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t \cdot f(t)) = 0$, on a alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t \cdot |f(t)|) = 0$ et le théorème de

Cesàro nous dit que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t |f(t)| dt = 0$.

(b) Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t \cdot f(t)) = 0$ et f est continue sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $t \cdot f$ est bornée et on peut poser $M_T = \sup_{t \geq T} (t |f(t)|)$. Pour $x > 0$ et $T > 0$, on a :

$$\left| \int_T^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \right| \leq \int_T^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} t |f(t)| dt \leq \frac{M_T}{T} \int_T^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{M_T}{T} \frac{e^{-xT}}{x}$$

(c) Pour $x > 0$ et $T > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}(f)(x) - \int_0^T f(t) dt \right| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt - \int_0^T f(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^T (1 - e^{-xt}) |f(t)| dt + \left| \int_T^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^T (1 - e^{-xt}) |f(t)| dt + \frac{e^{-xT}}{xT} \sup_{t \geq T} (t |f(t)|) \end{aligned}$$

Prenons $x = \frac{1}{T}$ avec $T > 0$ destiné à tendre vers l'infini. Cela nous donne :

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}(f)\left(\frac{1}{T}\right) - \int_0^T f(t) dt \right| &\leq \int_0^T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) |f(t)| dt + \frac{1}{e} \sup_{t \geq T} (t |f(t)|) \\ &\leq \int_0^T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) |f(t)| dt + \sup_{t \geq T} (t |f(t)|) \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $T_\varepsilon > 0$ tel que $t |f(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \geq T_\varepsilon$ et pour $T > T_\varepsilon$, on a :

$$\left| \mathcal{L}(f)\left(\frac{1}{T}\right) - \int_0^T f(t) dt \right| \leq \int_0^T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) |f(t)| dt + \varepsilon$$

En utilisant le fait que $1 - e^{-u} = \int_0^u e^{-t} dt \leq u$ pour tout $u \geq 0$, on en déduit que :

$$\left| \mathcal{L}(f)\left(\frac{1}{T}\right) - \int_0^T f(t) dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T t |f(t)| dt + \varepsilon$$

Comme $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t |f(t)| dt = 0$, il existe un réel $T'_\varepsilon \geq T_\varepsilon$ tel que

$$\frac{1}{T} \int_0^T t |f(t)| dt < \varepsilon \text{ pour } T > T'_\varepsilon, \text{ donc } \left| \mathcal{L}(f)\left(\frac{1}{T}\right) - \int_0^T f(t) dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

On a donc ainsi montré que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente avec :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f) \left(\frac{1}{T} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x)$$

et $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, on a vu qu'on a alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.
Réciproquement si $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, on vient de voir que l'hypothèse $f(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ nous dit que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \ell$.
- 4.

- (a) Pour $t > 0$, on a $g(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t u(f(u) - f(0)) du + \frac{f(0)}{2}$ et comme f est continue en 0, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|f(u) - f(0)| < \varepsilon$ pour tout $u \in [0, \eta]$. Il en résulte que pour $t \in]0, \eta]$, on a :

$$\left| \frac{1}{t^2} \int_0^t u(f(u) - f(0)) du \right| \leq \frac{\varepsilon}{t^2} \int_0^t u du = \frac{\varepsilon}{2}$$

On a donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \int_0^t u(f(u) - f(0)) du = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \frac{f(0)}{2}$. La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}^+$, c'est donc un élément de $\mathcal{C}$.

- (b) On a $g \in \mathcal{C}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t \cdot g(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t u f(u) du = 0$ (troisième hypothèse faite sur f), soit $g(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ et $\sigma(g) \leq 0$.
- (c) Comme $\sigma(tg) \leq \sigma(g) \leq 0$, $\mathcal{L}(t \cdot g)(x)$ est bien défini pour $x > 0$. Avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t \cdot g(t)) = 0$, on déduit que pour $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que $|t \cdot g(t)| < \varepsilon$ pour $t \geq T_\varepsilon$ et en conséquence :

$$\begin{aligned} |\dot{\mathcal{L}}(t \cdot g)(x)| &= \left| \int_0^{T_\varepsilon} e^{-xt} t \cdot g(t) dt + \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} e^{-xt} t \cdot g(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^{T_\varepsilon} t \cdot |g(t)| dt + \varepsilon \int_{T_\varepsilon}^{+\infty} e^{-xt} dt = I_\varepsilon + \varepsilon \frac{e^{-xT_\varepsilon}}{x} = I_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{x} \end{aligned}$$

ce qui nous donne $|x \mathcal{L}(t \cdot g)(x)| \leq x I_\varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ pour $0 < x < \frac{\varepsilon}{I_\varepsilon}$ (si $I_\varepsilon > 0$, sinon l'inégalité est automatiquement vérifiée).

- (d) Pour $x > 0$ et $0 < \varepsilon < T$, une intégration par parties nous donne, en tenant compte de $(t^2 g(t))' = t \cdot f(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^T e^{-xt} f(t) dt &= \int_{\varepsilon}^T \frac{e^{-xt}}{t} t \cdot f(t) dt = \int_{\varepsilon}^T \frac{e^{-xt}}{t} (t^2 g(t))' dt \\ &= \left[\frac{e^{-xt}}{t} t^2 g(t) \right]_{\varepsilon}^T - \int_{\varepsilon}^T \left(-x \frac{e^{-xt}}{t} - \frac{e^{-xt}}{t^2} \right) t^2 g(t) dt \\ &= [e^{-xt} \cdot t \cdot g(t)]_{\varepsilon}^T + x \int_{\varepsilon}^T e^{-xt} \cdot t \cdot g(t) dt + \int_{\varepsilon}^T e^{-xt} g(t) dt \end{aligned}$$

et faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$\int_0^T e^{-xt} f(t) dt = e^{-xT} \cdot T \cdot g(T) + x \int_0^T e^{-xt} \cdot t \cdot g(t) dt + \int_0^T e^{-xt} g(t) dt$$

avec $\lim_{T \rightarrow +\infty} (T \cdot g(T)) = 0 = \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-xT}$, $\sigma(f) \leq 0$ et $\sigma(tg) \leq \sigma(g) \leq 0$.

Il en résulte que $\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(g)(x) + x\mathcal{L}(t \cdot g)(x)$.

- (e) Avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\mathcal{L}(t \cdot g)(x) = 0$, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell.$$

- (f) Comme $g \in \mathcal{C}$ est telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t \cdot g(t)) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \ell$, le théorème de Tauber faible (question IV.2) nous dit que :

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \ell$$

L'intégration par parties faite précédemment est valable pour $x = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^T f(t) dt &= \int_{\varepsilon}^T \frac{1}{t} t \cdot f(t) dt = \int_{\varepsilon}^T \frac{1}{t} (t^2 g(t))' dt \\ &= \left[\frac{1}{t} t^2 g(t) \right]_{\varepsilon}^T + \int_{\varepsilon}^T \frac{1}{t^2} t^2 g(t) dt = [t \cdot g(t)]_{\varepsilon}^T + \int_{\varepsilon}^T g(t) dt \end{aligned}$$

et faisant tendre (ε, T) vers $(0, +\infty)$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est

convergente avec $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt = \ell$.

5. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \gamma$, la fonction φ se prolonge par continuité en 0, donc $\varphi \in \mathcal{C}$. La formule de Taylor à l'ordre 2 nous donne pour $0 < \alpha < x$:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(x) + (\alpha - x) \varphi'(x) + \frac{(\alpha - x)^2}{2} \varphi''(c_{\alpha, x})$$

avec $\alpha < c_{\alpha, x} < x$, donc :

$$(x - \alpha) \varphi'(x) = \varphi(x) - \varphi(\alpha) + \frac{(\alpha - x)^2}{2} \varphi''(c_{\alpha, x})$$

(la fonction φ n'étant pas supposée de classe C^1 sur $[0, x]$, on ne peut utiliser la formule de Taylor à l'ordre 2 sur cet intervalle) et :

$$\begin{aligned} |(x - \alpha) \varphi'(x)| &\leq |\varphi(x) - \varphi(\alpha)| + \frac{(\alpha - x)^2}{2} \frac{M}{c_{\alpha, x}^2} \\ &\leq |\varphi(x) - \varphi(\alpha)| + \frac{(\alpha - x)^2}{2} \frac{M}{\alpha^2} = |\varphi(x) - \varphi(\alpha)| + \frac{M}{2} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^2 \end{aligned}$$

Prenant $\alpha = \lambda x$ avec $0 < \lambda < 1$, on obtient :

$$(1 - \lambda) |x \cdot \varphi'(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(\lambda x)| + \frac{M}{2} (1 - \lambda)^2$$

soit $|x \cdot \varphi'(x)| \leq \frac{|\varphi(x) - \varphi(\lambda x)|}{1 - \lambda} + \frac{M}{2} (1 - \lambda)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on choisit $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\frac{M}{2} (1 - \lambda) < \varepsilon$ et pour λ ainsi fixé, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\lambda x)|}{1 - \lambda} = 0$, on peut donc trouver un réel $\eta > 0$ tel que $\frac{|\varphi(x) - \varphi(\lambda x)|}{1 - \lambda} < \varepsilon$ pour tout $t \in [0, \eta]$, ce qui nous donne $|x \cdot \varphi'(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [0, \eta]$. On a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \varphi'(x) = 0$.

6.

(a) Comme $\sigma(f) \leq 0$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)''(x) = \mathcal{L}(t^2 f)(x)$$

Comme $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t}\right)$, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} x^2 |\mathcal{L}(f)''(x)| &= x^2 \left| \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^2 f(t) dt \right| \\ &\leq M x^2 \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-xt} dt = M x^2 \mathcal{L}(t)(x) = M \end{aligned}$$

Enfin avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, on déduit du lemme de Littlewood que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \mathcal{L}(f)'(x) = 0.$$

(b) La fonction φ est dans $\mathcal{C}$ et à valeurs positives avec :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(\varphi)(x) = \mathcal{L}(M)(x) - \mathcal{L}(t \cdot f)(x) = \frac{M}{x} + \mathcal{L}(f)'(x)$$

soit :

$$\forall x > 0, x \cdot \mathcal{L}(\varphi)(x) = M + x \cdot \mathcal{L}(f)'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} M$$

On déduit alors de IV.(R) que :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt = M - \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot f(t) dt = M$$

et $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot f(t) dt = 0$. On déduit de IV.4 que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \ell$.

Chapitre 7

Équations fonctionnelles

Exercice 7.1. Exemples d'équations fonctionnelles

On s'intéresse ici à des équations fonctionnelles portant sur des fonctions f continues. En introduisant une primitive judicieusement choisie, on vérifie que f est de classe C^1 , puis par dérivation par rapport à une variable de l'équation fonctionnelle on se ramène à une équation différentielle.

Utiliser le procédé suggéré en introduction pour résoudre les équations fonctionnelles qui suivent où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2, f(xy) = f(x) + f(y)$;
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$;
4. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2, f(xy) = f(x)f(y)$;
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Solution. On désigne par F la primitive de f nulle en 0.

1. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel x :

$$\int_y^{x+y} f(z) dz = \int_0^x f(t+y) dt = \int_0^x f(t) dt + xf(y)$$

soit $F(x+y) - F(y) = F(x) + xf(y)$, ce qui nous donne pour $x = 1$:

$$F(y+1) - F(y) = F(1) + f(y)$$

Il en résulte que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y = 0$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$f'(x+y) = f'(y) \text{ et } f'(x) = f'(0) = \alpha$$

donc $f(x) = \alpha x + \beta$ avec $\beta = f(0) = 0$ (dédit de $f(0) = 2f(0)$).

2. Pour $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ fixé, on a par intégration, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$\int_y^{xy} f(z) dz = \int_1^x f(ty) dt = \int_1^x f(t) dt + (x-1)f(y)$$

soit $F(xy) - F(y) = F(x) + (x-1)f(y)$, ce qui nous donne pour $x=2$:

$$F(2y) - F(y) = F(2) + f(y)$$

Il en résulte que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+,*}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y=1$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$xf'(xy) = f'(y) \text{ et } xf'(x) = f'(1) = \alpha$$

donc $f(x) = \alpha \ln(x) + \beta$ avec $\beta = f(1) = 0$ (déduit de $f(1) = 2f(1)$).

3. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel x :

$$\int_y^{x+y} f(z) dz = \int_0^x f(t+y) dt = f(y) \int_0^x f(t) dt$$

soit $F(x+y) - F(y) = f(y)F(x)$. Si $F=0$, on a alors $f=F'=0$.

Si $F \neq 0$, il existe alors x_0 tel que $F(x_0) \neq 0$ et de $f(y) = \frac{F(x_0+y) - F(y)}{F(x_0)}$,

on déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y=0$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$f'(x+y) = f(x)f'(y) \text{ et } f'(x) = f'(0)f(x) = \alpha f(x)$$

donc $f(x) = e^{\alpha x}$.

4. Pour cette question, F est la primitive de f nulle en 1. Pour $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$\int_y^{xy} f(z) dz = \int_1^x f(ty) dt = f(y) \int_1^x f(t) dt$$

soit $F(xy) - F(y) = f(y)F(x)$. Si $F=0$, on a alors $f=F'=0$.

Si $F \neq 0$, il existe alors x_0 tel que $F(x_0) \neq 0$ et de $f(y) = \frac{F(x_0y) - F(y)}{F(x_0)}$, on

déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à y puis faisant $y=1$, on déduit de l'équation fonctionnelle que :

$$xf'(xy) = f(x)f'(y) \text{ et } xf'(x) = f'(1)f(x) = \alpha f(x)$$

donc $f(x) = \beta x^\alpha$ avec $\beta = f(1) = 1$ (déduit de $f(1) = (f(1))^2$ avec $f(1) \neq 0$ pour f solution non nulle).

5. On cherche une solution $f \neq 0$ et F est à nouveau la primitive de f nulle en 0. L'équation fonctionnelle appliquée au couple $(x,0)$ pour $x \in \mathbb{R}$ donne $f(x) = f(x)f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à $f(0) = 1$ puisque f n'est pas identiquement nulle. Cette équation appliquée au couple $(0,y)$ pour $y \in \mathbb{R}$ donne $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, soit $f(-y) = f(y)$, la fonction f est donc paire. Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on a par intégration, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \int_y^{x+y} f(z) dz + \int_{-y}^{x-y} f(z) dz &= \int_0^x f(t+y) dt + \int_0^x f(t-y) dt \\ &= 2f(y) \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

soit $F(x+y) - F(y) + F(x-y) - F(-y) = 2f(y)F(x)$. Si $F = 0$, on a alors $f = F' = 0$. Si $F \neq 0$, il existe alors x_0 tel que $F(x_0) \neq 0$ et on en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Puis avec :

$$\begin{aligned} 2f'(y)F(x_0) &= F'(x+y) - F'(y) - F'(x-y) + F'(-y) \\ &= f(x+y) - f(y) - f(x-y) + f(-y) = f(x+y) - f(x-y) \end{aligned}$$

on en déduit que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. En dérivant deux fois l'équation l'équation fonctionnelle par rapport à x , pour y réel fixé, on obtient $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$ et pour $x = 0$, en tenant compte de la parité de f , on a $f''(y) = f''(0)f(y)$ avec $f(0) = 1$. D'autre part, en dérivant par rapport à y et en faisant $y = 0$, on obtient $2f(x)f'(0) = 0$ pour tout réel x , ce qui entraîne $f'(0) = 0$ puisque f n'est pas la fonction nulle. En définitive, f est solution de $f'' = f''(0)f$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, ce qui équivaut à $f(x) = \cos(\lambda x)$ pour $f''(0) = -\lambda^2 \leq 0$ ou $f(x) = \cosh(\lambda x)$ pour $f''(0) = \lambda^2 \geq 0$.

Exercice 7.2. Équation fonctionnelle de Cauchy

Il s'agit d'étudier l'équation fonctionnelle de Cauchy qui consiste à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

1. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
2. Déterminer tous les morphismes de groupes monotones de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
3. Quelques applications de la question précédente.

(a) Montrer que l'identité est le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

(b) Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

(équation de Jensen), elle est alors affine.

(c) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(1) = 1$ et $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

4. Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même qui est borné sur un intervalle $[a, b]$ où $a < b$.

(a) Montrer que f est bornée sur $[0, b-a]$.

(b) Montrer que f est continue à droite en 0.

(c) Montrer que f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

(d) Conclusion.

Solution.

1. Un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ est une application $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{Q}^2, \quad f(r+s) = f(r) + f(s) \quad (7.1)$$

Prenant $(r, s) = (0, 0)$, on obtient $f(0) = 2f(0)$, ce qui équivaut à $f(0) = 0$ (un morphisme de groupes transforme le neutre en neutre). Prenant $(r, s) = (r, -r)$, on obtient $f(r) + f(-r) = 0$. On a donc $f(-r) = -f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ (un morphisme de groupes transforme l'opposé en opposé).

De (7.1) on déduit que pour tout $s \in \mathbb{Q}$, on a $f(ns) = nf(s)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, le résultat est vrai pour $n = 0$ et le supposant vrai pour $n \geq 0$, on a :

$$f((n+1)s) = f(ns) + f(s) = nf(s) + f(s) = (n+1)f(s)$$

il est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que $f(s) = f\left(n \frac{s}{n}\right) = nf\left(\frac{s}{n}\right)$, on déduit que $f\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{1}{n}f(s)$ pour tout $s \in \mathbb{Q}$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il en résulte que pour tout rationnel s et tout rationnel positif $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$f(rs) = f\left(p \frac{s}{q}\right) = pf\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{p}{q}f(s) = rf(s)$$

Enfin avec l'impairité de f , on déduit que ce dernier résultat est encore vrai pour les rationnels négatifs. On a donc $f(rs) = rf(s)$ pour tout $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$.

En prenant $s = 1$ et en notant $\lambda = f(1)$, on a $f(r) = \lambda r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement de telles applications sont morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

En considérant $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, nous avons montré que tout morphisme du groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ est une application $\mathbb{Q}$ -linéaire.

2. Si f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$, c'est aussi un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ et on a $f(r) = \lambda r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, où $\lambda = f(1)$. Si de plus f est croissante, on a alors $\lambda = f(1) \geq f(0) = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on désigne par $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites d'approximations décimales de x par défaut et par excès. De telles suites peuvent être définies par $r_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$ et $s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a :

$$\lambda r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(s_n) = \lambda s_n$$

puis faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $f(x) = \lambda x$. On procède de manière analogue pour f décroissante.

3.

- (a) Si f est morphisme du corps $\mathbb{R}$ dans lui-même, on a alors $f(1) = 1$ et $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}$.

Avec $f(x^2) = (f(x))^2 \geq 0$, on déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et pour $x \geq y$ dans $\mathbb{R}$, on a $f(x) - f(y) = f(x-y) \geq 0$, ce qui signifie que f est croissante. On déduit alors de la question précédente que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\lambda = f(1) = 1$).

- (b) La relation $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ appliquée au couple $(2x, 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$ donne $f(x) = \frac{f(2x)+f(0)}{2}$, ou encore $f(2x) = 2f(x) - f(0)$. En notant g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - f(0)$, on a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f\left(\frac{2x+2y}{2}\right) - f(0) = \frac{f(2x)+f(2y)}{2} - f(0) \\ &= \frac{g(2x)+g(2y)}{2} \end{aligned}$$

et pour $x \in \mathbb{R}$ on a $g(2x) = f(2x) - f(0) = 2(f(x) - f(0)) = 2g(x)$. On a donc $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Si f est monotone, il en est alors de même de g , donc $g(x) = ax$ et $f(x) = ax + b$ avec $b = f(0)$.

- (c) Avec $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on déduit que f est impaire (donc $f(0) = 0$) et avec $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right) = f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{1}{f(x(1-x))} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(1-x)} = \frac{f(x) + f(1-x)}{f(x)f(1-x)} = \frac{1}{f(x)f(1-x)}$$

ou encore :

$$f(x) - f(x^2) = f(x - x^2) = f(x)f(1-x) = f(x)(1 - f(x))$$

soit $f(x^2) = (f(x))^2$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Ce résultat étant encore vrai pour $x = 0$ et $x = 1$, on en déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et pour $x \geq y$ on a alors $f(x) - f(y) = f(x-y) \geq 0$, ce qui signifie que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que $f(x) = f(1)x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4.

- (a) Soient $m \leq M$ deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Pour tout $x \in [0, b-a]$, on a $x+a \in [a, b]$, donc :

$$m \leq f(x+a) = f(x) + f(a) \leq M$$

soit $m - f(a) \leq f(x) \leq M - f(a)$ pour tout $x \in [0, b-a]$.

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left[0, \frac{b-a}{n}\right]$, on a $nx \in [0, b-a]$, de sorte que :

$$m' = m - f(a) \leq f(nx) = nf(x) \leq M' = M - f(a)$$

$$\text{et } \frac{m'}{n} \leq f(x) \leq \frac{M'}{n}.$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\left[\frac{m'}{n}, \frac{M'}{n}\right]$ soit contenu dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$, donc pour tout $x \in \left[0, \frac{b-a}{n}\right]$, on a $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$. La fonction f est donc continue à droite en 0.

- (c) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a $f(x+h) = f(x) + f(h)$ et avec la continuité à droite en 0 de f , on déduit que $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h) = f(x)$, ce qui signifie que f est continue à droite en x .
- (d) En notant $\lambda = f(1)$, on sait déjà que $f(r) = \lambda r$ pour tout nombre rationnel r . Comme f est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$, en désignant par $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'approximations décimales par excès de x , on a :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(s_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda s_n = \lambda x$$

Exercice 7.3. Caractérisation des fonctions cos et ch par l'équation fonctionnelle $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

On se donne une fonction continue non identiquement nulle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation fonctionnelle $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

1. Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.
2. Justifier l'existence d'un réel strictement positif $\alpha > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$.
3. On suppose que $f(\alpha) \in]0, 1[$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est défini par $f(\alpha) = \cos(\theta)$.

(a) Montrer que $f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que, pour tout n fixé dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, f\left(p \frac{\alpha}{2^n}\right) = \cos\left(p \frac{\theta}{2^n}\right)$$

(c) En déduire qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $f(x) = \cos(\lambda x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Dans le cas où $|f(\alpha)| > 1$, montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $f(x) = \cosh(\lambda x)$.

Solution.

1. L'équation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ appliquée au couple $(x, 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$ donne $f(x) = f(x)f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à $f(0) = 1$ puisque f n'est pas identiquement nulle. Cette équation appliquée au couple $(0, y)$ pour $y \in \mathbb{R}$ donne $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, soit $f(-y) = f(y)$, la fonction f est donc paire.

2. Avec la continuité en 0 et $f(0) = 1$ on déduit qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$.

3.

(a) Le résultat est vrai pour $n = 0$ par définition de θ et le supposant vrai pour $n \geq 0$, en appliquant l'équation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ au couple $\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}, \frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$, on obtient :

$$f^2\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \frac{f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) + 1}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) + 1}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

ce qui entraîne $f\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ du fait de la positivité de f sur $[0, \alpha]$ et de $\cos$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Le résultat est vrai pour $p = 0$, $p = 1$ et le supposant vrai pour $p \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} f\left((p+1)\frac{\alpha}{2^n}\right) &= 2f\left(p\frac{\alpha}{2^n}\right)f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - f\left((p-1)\frac{\alpha}{2^n}\right) \\ &= 2\cos\left(p\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \cos\left((p-1)\frac{\theta}{2^n}\right) \\ &= \cos\left((p+1)\frac{\theta}{2^n}\right) \end{aligned}$$

(c) Avec $f(0) = \cos(0) = 1$ et la parité des fonctions f et $\cos$ il nous suffit de montrer le résultat pour $x > 0$. Pour $x > 0$, on définit les suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $r_n = \frac{[2^n x]}{2^n} = \frac{p_n}{2^n}$ et $s_n = r_n + \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $0 \leq x - r_n < \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne la convergence de ces suites vers x (développement dyadique par défaut et par excès). Avec la continuité des fonctions f et $\cos$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(p_n \frac{\alpha}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(p_n \frac{\theta}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(r_n \theta) = \cos(\theta x) \end{aligned}$$

Il en résulte que $f(x) = \cos\left(\frac{\theta}{\alpha}x\right) = \cos(\lambda x)$.

(d) Si $|f(\alpha)| > 1$ en écrivant que $f(\alpha) = \operatorname{ch}(\theta)$ avec $\theta > 0$, on aboutit à $f(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$.

Exercice 7.4. L'équation fonctionnelle $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

On montre que les rotations de $\mathbb{R}^3$ sont les seules solutions non identiquement nulles de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \quad (7.2)$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et de sa structure euclidienne usuelle. On note $\det(x, y, z)$ le déterminant du système de vecteurs (x, y, z) dans la base B . Pour x, y dans $\mathbb{R}^3$, $x \wedge y$ désigne le produit vectoriel de x et y .

1. Quelques propriétés du produit vectoriel.

(a) Montrer que pour tous vecteurs x, y, z, t dans $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\langle x \wedge y \mid z \wedge t \rangle = \begin{vmatrix} \langle x \mid z \rangle & \langle y \mid z \rangle \\ \langle x \mid t \rangle & \langle y \mid t \rangle \end{vmatrix}$$

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x \mid y \rangle^2$$

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x \mid z \rangle y - \langle x \mid y \rangle z \text{ (formule de Grassmann)}$$

(b) Montrer que si x est un vecteur non nul dans $\mathbb{R}^3$, pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^3$ orthogonal à x il existe alors un vecteur $z \in \mathbb{R}^3$ tel $x \wedge z = y$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une rotation. Montrer que $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^3$.

Pour la suite, on se donne une application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ solution de l'équation fonctionnelle (7.2).

3. Montrer que $f(0) = 0$.

4. Montrer que si f s'annule en un vecteur non nul x_0 , elle est alors identiquement nulle.

5. Dans ce qui suit on suppose que f est non identiquement nulle.

(a) Montrer que les vecteurs $f(x)$ et $f(y)$ sont liés si, et seulement si, les vecteurs x et y le sont.

(b) Montrer que f est linéaire.

(c) Montrer que f conserve l'orthogonalité.

(d) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3$ est tel que $\|x\| = 1$ alors $\|f(x)\| = 1$.

(e) Conclure.

Solution.

1.

(a) Par 4-linéarité il suffit de vérifier la première formule sur les vecteurs de base canonique, ce qui ne pose pas de problème. De cette formule on déduit

que :

$$\|x \wedge y\|^2 = \left| \begin{array}{cc} \|x\|^2 & \langle y | x \rangle \\ \langle x | y \rangle & \|y\|^2 \end{array} \right| = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x | y \rangle^2$$

Par 3-linéarité il suffit de vérifier la formule de Grassmann sur les vecteurs de base canonique, ce qui ne pose pas de problème.

- (b) Si $\langle x | y \rangle = 0$, on a alors $x \wedge (y \wedge x) = \|x\|^2 y$ et en posant $z = \frac{1}{\|x\|^2} y \wedge x$, on a $x \wedge z = y$.

2. Soit f une rotation de $\mathbb{R}^3$. Pour tous vecteurs x, y, z dans $\mathbb{R}^3$ on a :

$$\begin{aligned} \det(f(x), f(y), f(z)) &= \det(f) \det(x, y, z) = \det(x, y, z) \\ &= \langle x \wedge y | z \rangle = \langle f(x \wedge y) | f(z) \rangle \end{aligned}$$

f étant un isomorphisme, cela s'écrit $\det(f(x), f(y), w) = \langle f(x \wedge y) | w \rangle$ pour tout $w \in \mathbb{R}^3$, ce qui revient à dire que $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ par définition du produit vectoriel.

3. Avec $f(0) = f(0) \wedge f(0)$, on déduit que $f(0)$ est orthogonal à lui même, donc que $f(0) = 0$.
4. En notant $D = \mathbb{R}x_0$ la droite vectorielle engendrée par x_0 et $H = D^\perp$ le plan orthogonal à D , on a $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$ et tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique $x = \lambda x_0 + h$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. Si $\lambda = 0$, on a alors $x = h$ et x est orthogonal à x_0 , il existe donc un vecteur $z \in \mathbb{R}^3$ tel $x_0 \wedge z = x$ et $f(x) = f(x_0) \wedge f(z) = 0$. On a donc $f(h) = 0$ pour tout $h \in H$. En désignant par h_0 un vecteur non nul dans H , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on peut trouver $z \in \mathbb{R}^3$ tel $h_0 \wedge z = \lambda x_0$ et $f(\lambda x_0) = f(h_0) \wedge f(z) = 0$. On a donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$. Enfin si $x = \lambda x_0 + h$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $h \in H - \{0\}$, le vecteur $z_0 = x_0 \wedge h$ est non nul (x_0 et h sont linéairement indépendants), $f(z_0) = 0$ et en écrivant $x = z_0 \wedge t$, on déduit que $f(x) = 0$. En définitive on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que f est identiquement nulle.

5.

(a) On a :

$$\begin{aligned} (f(x), f(y) \text{ liés}) &\Leftrightarrow (f(x) \wedge f(y) = 0) \Leftrightarrow (f(x \wedge y) = 0) \\ &\Leftrightarrow (x \wedge y = 0) \Leftrightarrow (x, y \text{ liés}) \end{aligned}$$

(b) Soient x, y dans $\mathbb{R}^3$ et λ dans $\mathbb{R}$.

- i. Pour $x = 0$ ou $y = 0$, il est clair que $f(x + y) = f(x) + f(y)$. On suppose donc que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Avec :

$$\begin{aligned} f(x + y) \wedge f(x) &= f((x + y) \wedge x) = f(y \wedge x) = f(y) \wedge f(x) \\ &= (f(x) + f(y)) \wedge f(x) \end{aligned}$$

on déduit que $(f(x + y) - f(x) - f(y)) \wedge f(x) = 0$, ce qui équivaut à dire que les vecteurs $f(x + y) - f(x) - f(y)$ et $f(x)$ sont liés. Pour $x \neq 0$ on a $f(x) \neq 0$ et il existe alors un réel α tel que $f(x + y) -$

$f(x) - f(y) = \alpha f(x)$. Les vecteurs x et y jouant des rôles symétriques on obtient de même l'existence d'un réel β tel que $f(x + y) - f(x) - f(y) = \beta f(y)$.

Si x et y sont linéairement indépendants il en est de même de $f(x)$ et $f(y)$ et l'égalité $\alpha f(x) - \beta f(y) = 0$ se traduit par $\alpha = \beta = 0$ et $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Si les vecteurs x, y sont liés on a $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et pour $z \in \mathbb{R}^3$ linéairement indépendant de x (et de y), le système $(x + y, z)$ est soit libre soit égal à $(0, z)$, ce qui donne dans tous les cas :

$$f(x + y + z) = f(x + y) + f(z)$$

D'autre part avec $(x + z, y)$ et (x, z) libres on a aussi :

$$f(x + y + z) = f(x + z) + f(y) = f(x) + f(z) + f(y)$$

ce qui permet de conclure à $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

- ii. Pour $x = 0$ ou $\lambda = 0$, il est clair que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Pour $x \neq 0$ fixé les vecteurs x et λx étant liés il en est de même des vecteurs $f(x)$ et $f(\lambda x)$ avec $f(x) \neq 0$, il existe donc un réel $\mu_x(\lambda)$ tel que $f(\lambda x) = \mu_x(\lambda) f(x)$. Il est clair que $\mu_x(0) = 0$ et $\mu_x(1) = 1$. Pour λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f((\lambda_1 + \lambda_2)x) &= \mu_x(\lambda_1 + \lambda_2) f(x) \\ &= f(\lambda_1 x + \lambda_2 x) = f(\lambda_1 x) + f(\lambda_2 x) \\ &= (\mu_x(\lambda_1) + \mu_x(\lambda_2)) f(x) \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\mu_x(\lambda_1 + \lambda_2) = \mu_x(\lambda_1) + \mu_x(\lambda_2)$.

Si y est un vecteur linéairement indépendant de x , avec :

$$\begin{aligned} f(\lambda x \wedge y) &= f(\lambda x) \wedge f(y) = \mu_x(\lambda) f(x) \wedge f(y) \\ &= f(x \wedge \lambda y) = f(x) \wedge f(\lambda y) = \mu_y(\lambda) f(x) \wedge f(y) \end{aligned}$$

et avec $f(x) \wedge f(y) \neq 0$ (puisque $f(x)$ et $f(y)$ sont libres comme x et y), on déduit que $\mu_x(\lambda) = \mu_y(\lambda)$ pour tout réel λ . En posant $z = x \wedge y$, le système (x, y, z) est libre, donc $\mu_x = \mu_y = \mu_z$ et pour λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \lambda_2 z) &= \mu_z(\lambda_1 \lambda_2) f(z) = \mu_x(\lambda_1 \lambda_2) f(z) \\ &= f(\lambda_1 x \wedge \lambda_2 y) = f(\lambda_1 x) \wedge f(\lambda_2 y) \\ &= \mu_x(\lambda_1) \mu_x(\lambda_2) f(x) \wedge f(y) = \mu_x(\lambda_1) \mu_x(\lambda_2) f(z) \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\mu_x(\lambda_1 \lambda_2) = \mu_x(\lambda_1) \mu_x(\lambda_2)$. En définitive μ_x est un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ sur lui-même, c'est donc l'identité (exercice 7.2). On a donc $f(\lambda x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. L'application f est donc linéaire.

- (c) Soient x, y orthogonaux. Si $x = 0$, on a alors $f(x) = 0$ qui est orthogonal à $f(y)$. Si $x \neq 0$, comme y est orthogonal à x , on peut trouver $z \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = x \wedge z$ et $f(y) = f(x \wedge z) = f(x) \wedge f(z)$ est orthogonal à $f(x)$.

- (d) On complète x en une base orthonormée directe (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ et avec $x = y \wedge z$, on a :

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \|f(y) \wedge f(z)\|^2 = \|f(y)\|^2 \|f(z)\|^2 - \langle f(y) | f(z) \rangle^2 \\ &= \|f(y)\|^2 \|f(z)\|^2\end{aligned}$$

soit $\|f(x)\| = \|f(y)\| \|f(z)\|$. De même, on a $\|f(y)\| = \|f(x)\| \|f(z)\|$ et $\|f(z)\| = \|f(x)\| \|f(y)\|$, ce qui donne $\|f(y)\| = \|f(x)\|^2 \|f(y)\|$ avec $f(y) \neq 0$, ce qui entraîne $\|f(x)\| = 1$.

- (e) La fonction f est linéaire et transforme la base canonique en une base orthonormée (les questions qui précèdent), donc c'est un endomorphisme orthogonal. Avec :

$$\begin{aligned}\det(f) &= \det(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \det(f(e_1), f(e_2), f(e_1 \wedge e_2)) \\ &= \det(f(e_1), f(e_2), f(e_1) \wedge f(e_2)) = \|f(e_1) \wedge f(e_2)\|^2 > 0\end{aligned}$$

on déduit que c'est une rotation.

Exercice 7.5. Fonction Γ et équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$

On donne une caractérisation de la fonction Γ par l'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$. On utilise des résultats sur la convexité et quelques propriétés de la fonction Γ (voir aussi le problème 4.1).

On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^{+,*} \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ telle que :

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, f(x+1) = xf(x)$;
- (ii) $f(1) = 1$;
- (iii) f est logarithmiquement convexe (problème 4.1).

On note $g = \ln(f)$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
2. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(n+1) = n! \text{ et } g(n+1+x) - g(n+1) = \ln \left(\frac{f(x)}{n!} \prod_{k=0}^n (x+k) \right)$$

3. Montrer que pour tout réel $x \in]0, 1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

4. Montrer que pour tout réel $x \in]0, 1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n^x \leq \frac{f(x)}{n!} \prod_{k=0}^n (x+k) \leq (n+1)^x$$

5. Montrer que la fonction Γ d'Euler est l'unique fonction qui vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) (théorème de Bohr-Mollerup). On admettra que, pour tout réel $x > 0$, on a $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$ (problème 4.1).

Solution.

1. g étant convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$, elle est continue et il en est de même de $f = e^g$.
2. De (i), on déduit par récurrence que $f(n+1+x) = f(x) \prod_{k=0}^n (x+k)$ ($x > 0$ étant fixé). En effet, pour $n=0$, c'est la condition (i) et supposant le résultat acquis pour $n-1 \geq 0$, on a :

$$f(n+1+x) = (n+x)f(n+x) = (n+x)f(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) = f(x) \prod_{k=0}^n (x+k)$$

Prenant $x=1$, on obtient $f(n+1) = f(1)n! = n!$ (condition (ii)), donc :

$$g(n+1+x) - g(n+1) = \ln \left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \right) = \ln \left(\frac{f(x)}{n!} \prod_{k=0}^n (x+k) \right)$$

3. On note, pour tous réels $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$, $p(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$. On remarque que $p(x, y) = p(y, x)$ pour tous réels $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$. Dire que g est convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$ équivaut à dire que, pour tout $y \in \mathbb{R}^{+,*}$, la fonction $x \mapsto p(x, y) = p(y, x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+,*} - \{y\}$. Il en résulte que, pour tout réel $x \in]0, 1]$, on a :

$$p(n, n+1) \leq p(n+1, n+1+x) \leq p(n+1, n+2)$$

soit :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{f(n+1)}{f(n)} \right) &= \ln(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \\ &\leq \ln \left(\frac{f(n+2)}{f(n+1)} \right) = \ln(n+1) \end{aligned}$$

4. On déduit que $\ln(n) \leq \frac{1}{x} \ln \left(\frac{f(x)}{n!} \prod_{k=0}^n (x+k) \right) \leq \ln(n+1)$, soit :

$$\ln(n^x) \leq \ln \left(\frac{f(x)}{n!} \prod_{k=0}^n (x+k) \right) \leq \ln(n+1)^x$$

$$\text{ou encore } n^x \leq \frac{f(x)}{n!} \prod_{k=0}^n (x+k) \leq (n+1)^x.$$

5. Des questions précédentes, on déduit que si $f : \mathbb{R}^{+,*} \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii), on a alors pour tout $x \in]0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq f(x) \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{n^x n!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$$

ce qui donne $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \Gamma(x)$ (relation d'Euler). En utilisant l'équation fonctionnelle (i) vérifiée par les deux fonctions f et Γ , on déduit que $f(x) = \Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 7.6. Fonction thêta de Jacobi

1. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et 1-périodique et $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier où $c_k(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)| < +\infty$, on a alors $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{2i\pi kx}$.

2. Soient $\alpha > 1$ un réel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

(a) On suppose qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $|f(x)| \leq \frac{\lambda}{(1+|x|)^\alpha}$ pour tout réel x . Montrer qu'en posant $F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$ pour tout réel x , on définit une fonction continue et 1-périodique.

(b) On suppose que $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt$ est absolument convergente et qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $|f(x)| + |\widehat{f}(x)| \leq \frac{\lambda}{(1+|x|)^\alpha}$ pour tout réel x , où la transformée de Fourier de f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi xt} dt$. Justifier la définition de la fonction $\widehat{f}$, puis montrer la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx}$$

(voir aussi le problème 3.1).

3. Pour tout réel $t > 0$, on désigne par g_t la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $g_t(x) = e^{-\pi x^2 t}$.

(a) Calculer $\int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx$, puis montrer que la fonction $\widehat{g}_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout réel x , on a $\widehat{g}_1'(x) = -2\pi x \widehat{g}_1(x)$.

(b) En déduire que $\widehat{g}_1 = g_1$ et calculer $\widehat{g}_t$ pour tout réel $t > 0$.

4. On définit la fonction thêta de Jacobi par $\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+,*}$. Montrer que θ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*}, \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Solution.

1. Avec $|c_k(f) e^{2i\pi kx}| = |c_k(f)|$ pour tout entier relatif k et tout réel x , on déduit que la série de fonctions $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{2i\pi kx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et

sa somme g est une fonction continue. Pour tout réel x , on a :

$$f(x+1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{2i\pi k(x+1)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{2i\pi kx} = f(x)$$

donc f est 1-périodique. De la convergence uniforme de la série de fonctions définissant g , on déduit que ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$c_n(g) = \int_0^1 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{2i\pi kt} \right) e^{-2i\pi nt} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_0^1 e^{2i\pi(k-n)t} dt = c_n(f)$$

Il en résulte que $g = f$ (deux fonctions continues et 1-périodiques sont égales si, et seulement si, elles ont les mêmes coefficients de Fourier).

2.

- (a) Pour tout réel $R > 0$ et tout $x \in [-R, R]$, on a pour tout entier relatif k , $|x+k| \geq |k| - |x| \geq |k| - R$, donc pour $|k| > R$, on a :

$$|f(x+k)| \leq \frac{\lambda}{(1+|x+k|)^\alpha} \leq \frac{\lambda}{(1+|k|-R)^\alpha}$$

avec $\sum_{k \in \mathbb{Z}, |k| > R} \frac{1}{(1+|k|-R)^\alpha} < +\infty$ pour $\alpha > 1$. La série de fonctions $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$ converge donc normalement sur tout segment et en conséquence, elle définit une fonction F continue sur $\mathbb{R}$ comme f . Le changement d'indice $n = k+1$ nous donne :

$$F(x+1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k+1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = F(x)$$

ce qui signifie que F est 1-périodique.

- (b) Pour tout réel x , la fonction $t \mapsto f(t) e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ avec $\int_{\mathbb{R}} |f(t) e^{-2i\pi xt}| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty$, ce qui justifie la définition de $\hat{f}(x)$. La fonction f vérifiant aussi l'hypothèse de la question précédente, la fonction F est continue, 1-périodique et ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi nt} dt = \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+k) e^{-2i\pi nt} dt$$

avec :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |f(t+k) e^{-2i\pi nt}| dt &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \frac{\lambda}{(1+|t+k|)^\alpha} dt \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^1 \frac{\lambda}{(k+1+t)^\alpha} dt + \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^1 \frac{\lambda}{(k+1-t)^\alpha} dt \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda}{(1+k)^\alpha} + \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda}{k^\alpha} < +\infty \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+k) e^{-2i\pi n t} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2i\pi n(x-k)} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2i\pi n x} dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=-p}^p \int_k^{k+1} f(x) e^{-2i\pi n x} dx \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_p^{p+1} f(x) e^{-2i\pi n x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi n x} dx = \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(F)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\lambda}{(1+|n|)^\alpha} < +\infty$, on a l'égalité :

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e^{2i\pi n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n x}$$

pour tout réel x , la convergence de la première série étant uniforme sur tout compact et celle de la seconde uniforme sur $\mathbb{R}$.

L'évaluation en $x = 0$ nous donne $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)$.

3. Pour $t \in \mathbb{R}^{+,*}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$, on a $g_t(x) = e^{-\pi x^2 t} > 0$ avec $g_t(x) = o_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2}$, la fonction g_t étant continue. Il en résulte que g_t est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{g}_t$.

(a) En notant $I = \int_0^{+\infty} g_1(x) dx$, on a :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy = \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^+ \times]0, \frac{\pi}{2}[} e^{-\pi r^2} r dr d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(théorème de Fubini-Tonelli et changement de variables), donc $g_1 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx = 2I = 1$.

La fonction $\varphi : (x, y) \mapsto e^{-\pi y^2} e^{-2i\pi x y}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) \right| = 2\pi |y| e^{-\pi y^2}$$

la fonction $y \mapsto |y| e^{-\pi y^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation de Lebesgue nous dit alors que $\widehat{g}_1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\widehat{g}_1'(x) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} y e^{-\pi y^2} e^{-2i\pi x y} dy$$

et une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}\widehat{g}_1'(x) &= -2i\pi \int_{\mathbb{R}} ye^{-\pi y^2} e^{-2i\pi xy} dy \\ &= i \left\{ \left[e^{-\pi y^2} e^{-2i\pi xy} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi x \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} e^{-2i\pi xy} dy \right\} = -2\pi x \widehat{g}_1(x)\end{aligned}$$

- (b) Résolvant cette équation différentielle, on obtient $\widehat{g}_1(x) = \widehat{g}_1(0) e^{-\pi x^2}$ avec $\widehat{g}_1(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy = 1$, ce qui nous donne $\widehat{g}_1 = g_1$. Pour $t > 0$, le changement de variable $z = \sqrt{t}y$ nous donne, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\widehat{g}_t(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2 t} e^{-2i\pi xy} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z^2} e^{-2i\pi \frac{x}{\sqrt{t}} z} \frac{dz}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} g_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} g_{\frac{1}{t}}(x)\end{aligned}$$

4. Pour tout réel $t > 0$, on a $\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_t(n)$, g_t vérifiant les hypothèses de 2b.

En effet, g_t est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ ainsi que $\widehat{g}_t = \frac{1}{\sqrt{t}} g_{\frac{1}{t}}$ et avec :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (1 + |x|)^2 \left(|g_t(x)| + \left| g_{\frac{1}{t}}(x) \right| \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (1 + |x|)^2 \left(e^{-\pi x^2 t} + e^{-\frac{\pi x^2}{t}} \right) = 0$$

on déduit qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $|g_t(x)| + \left| g_{\frac{1}{t}}(x) \right| \leq \frac{\lambda}{(1 + |x|)^2}$ pour tout réel x . On peut donc définir la fonction θ et la formule sommatoire de Poisson nous donne :

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_t(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_t(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{\frac{1}{t}}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Problème 7.1. Équation fonctionnelle de Guichard

L'objectif de ce problème est l'étude de l'équation fonctionnelle de Guichard :

$$f(z+1) - f(z) = g(z) \quad (7.3)$$

dans un certain espace $\mathcal{E}$ de fonctions définies sur $\mathbb{C}$, qui contient l'espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynomiales à coefficients complexes. Dans cette équation $g \in \mathcal{E}$ est la donnée et $f \in \mathcal{E}$ est l'inconnue.

— I — L'équation (7.3) sur $\mathcal{P}$ et les opérateurs nilpotents

Soit $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ l'opérateur de différence première défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (\Delta P)(z) = P(z+1) - P(z) \quad (7.4)$$

1.

- (a) Montrer que Δ est une application linéaire localement nilpotente, c'est-à-dire (en notant $\Delta^n = \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (n fois) et $\Delta^0 = Id$) que :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \Delta^n P = 0$$

- (b) Existe-t-il un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^n = 0$?

2. Montrer que $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ n'est pas injective et décrire son noyau.

3. On définit la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes de Hilbert sur $\mathbb{C}$ par :

$$H_0(z), \forall n \in \mathbb{N}^*, H_n(z) = \frac{z(z-1) \cdots (z-n+1)}{n!}$$

- (a) Calculer ΔH_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta^k H_n(0)$ pour tous n, k dans $\mathbb{N}$.

- (b) Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{P}$ et que, plus précisément :

$$\forall P \in \mathcal{P}, P = \sum_{n=0}^{+\infty} (\Delta^n P)(0) H_n \quad (7.5)$$

Expliciter les coefficients du polynôme $z \mapsto z^3$ sur la base $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (c) Montrer que $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est surjective. Comment conciliez vous cela avec la question I.2. ?

4.

- (a) Soit p un entier fixé ; on écrit $z^p = f(z+1) - f(z)$ avec $f \in \mathcal{P}$ et $f(0) = 0$. Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N n^p = f(N+1) \quad (7.6)$$

- (b) Donner une formule simple pour calculer $\sum_{n=0}^N n^3$ en fonction de N .

5.

- (a) Pour $P \in \mathcal{P}$, on pose $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{P}$.

- (b) L'application linéaire $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est-elle continue pour la norme précédente ?

- (c) Montrer qu'il existe une norme sur $\mathcal{P}$ pour laquelle Δ est continue.

6. On se donne un espace de Banach X sur $\mathbb{C}$.

- (a) Soit Y un sous-espace vectoriel de X ; montrer que $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset \Rightarrow Y = X$ ($\overset{\circ}{Y}$ est l'intérieur de Y).

- (b) Soit $T : X \rightarrow X$ une application linéaire continue localement nilpotente, c'est-à-dire telle que :

$$\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N} : T^n(x) = 0$$

Montrer que T est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = 0$.

7.

- (a) L'espace vectoriel $\mathcal{P}$ est-il complet pour la norme construite en I.5c ?
 (b) L'espace vectoriel $\mathcal{P}$ est-il complet pour au moins une norme ?

– II – L'espace $\mathcal{E}$ des fonctions entières

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions entières, c'est-à-dire l'espace des fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui s'écrivent $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où la série figurant au second membre a un rayon de convergence infini.

1.

- (a) Montrer que les a_n sont déterminés de façon unique par f .
 (b) On pose $M(f, r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n} \quad (7.7)$$

- (c) Montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas égal à $\mathcal{E}$.
 (d) Montrer que les seules fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont bornées sont les constantes.
 (e) Montrer que $f \in \mathcal{P}$ si, et seulement si, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur $\mathbb{C}$ tout entier.

2. Cette question a pour but de mettre en place quelques propriétés importantes de l'espace $\mathcal{E}$.

- (a) Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{E}$, $f_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n$. On suppose que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$. Montrer que f appartient à $\mathcal{E}$.
 (b) Montrer qu'une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$.
 (c) Montrer que $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ est une algèbre.
 (d) Soient $f \in \mathcal{E}$, $z \in \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f(z + a)$. Montrer que $g \in \mathcal{E}$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est stable par translation.

3. Une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes est dite un multiplicateur de $\mathcal{E}$ si, pour toute fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \in \mathcal{E}$ la série entière $\sum \lambda_n a_n z^n$ définit un élément de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire a un rayon de convergence infini. On se propose de montrer qu'on a équivalence entre :

- (i) $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un multiplicateur de $\mathcal{E}$;
 - (ii) il existe des constantes $A, B > 0$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_n| \leq AB^n$.
- (a) Montrer que (ii) implique (i).
- (b) On suppose que (ii) n'est pas réalisée. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_j)_{j \geq 1}$ d'entiers ≥ 1 avec $\forall j \geq 1, |\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$. Puis montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{E}$ de la forme $f(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{n_j} z^{n_j}$ telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{n_j} \lambda_{n_j} z^{n_j}$ ne soit pas infini. En déduire que (i) implique (ii).

4.

- (a) Montrer que Δ défini par $(\Delta f)(z) = f(z+1) - f(z)$ envoie $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.
- (b) Décrire le noyau $\ker(\Delta)$ de $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ et montrer que ce noyau est de dimension infinie.

5. Pour $\rho > 0$ et f définie et continue sur le cercle de centre 0 et de rayon ρ à valeurs complexes, on note I l'intégrale curviligne $I = \int_{|w|=\rho} f(w) dw$.

- (a) Montrer que $|I| \leq 2\pi\rho M(f, \rho)$
- (b) Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ alors $I = 0$.
- (c) Soient un élément h de $\mathcal{E}$ et un entier $k \in \mathbb{Z}$. On pose :

$$J_k(h, \rho) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} w^k h(w) dw$$

Montrer que $J_{-1}(h, \rho) = h(0)$ et $J_k(h, \rho) = 0$ pour tout $k \geq 0$.

6.

- (a) Montrer qu'il existe une fonction g de $\mathcal{E}$ telle que :

$$w \in \mathbb{C} \Rightarrow e^w = 1 + w + w^2 g(w)$$

avec de plus $|g(w)| \leq e - 2$ si $|w| = 1$.

- (b) Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $I_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{w^k}{e^w - 1} dw$.

- i. Montrer que I_k est bien définie.
- ii. Montrer que $I_0 = 1$ et $I_k = 0$ pour $k \geq 1$.

- III - L'équation de Guichard dans $\mathcal{E}$

A. Les polynômes de Bernoulli et une application

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on note $B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=1} \left(\frac{e^{zw}}{e^w - 1} \right) \frac{dw}{w^n}$.

1. Montrer que $B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{I_{k-n}}{k!} z^k$, puis que B_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Calculer B_0 .

2. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n(z) = n B_{n-1}(z) \quad (7.8)$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(z+1) - B_n(z) = n z^{n-1} \quad (7.9)$$

$$\forall n \geq 2, B_n(1) = B_n(0)$$

$$\forall n \geq 1, \int_0^1 B_n(t) dt = 0 \quad (7.10)$$

3. Calculer B_1, B_2, B_3 .

4. Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que :

$$\int_0^1 h(t) dt = \frac{h(0) + h(1)}{2} + \frac{h'(0) - h'(1)}{12} + \frac{1}{2} \int_0^1 h''(t) B_2(t) dt$$

5. Soient $\varphi : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et N un entier non nul.

On pose $S_N = \sum_{n=1}^N \varphi(n)$ et $I_N = \int_1^N \varphi(t) dt$. On désigne par π_2 la fonction 1-périodique valant $\frac{1}{2} B_2$ sur $[0, 1]$.

- (a) Montrer que :

$$S_N = I_N + \frac{1}{2} (\varphi(1) + \varphi(N)) + \frac{1}{12} (\varphi'(N) - \varphi'(1)) - \int_1^N \varphi''(t) \pi_2(t) dt$$

- (b) On suppose que $|\varphi''|$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que $\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Montrer que la série $\sum \varphi(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ sont de même nature.

- (c) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$?

B. Solution de l'équation de Guichard

1. Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, $g \in \mathcal{E}$. On veut résoudre l'équation $\Delta f = g$, avec $f \in \mathcal{E}$.

Pourquoi est-il plausible de prendre $f = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{B_{n+1}}{n+1}$? Qu'est-ce qui pourrait empêcher ce choix ?

La suite de cette partie est consacrée à une modification des polynômes de Bernoulli destinée à contourner cet obstacle.

2. On se propose d'abord de montrer par l'absurde le fait suivant :

$$\text{Il existe } c > 0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, |w| = (2n+1)\pi \Rightarrow |e^w - 1| \geq c \quad (7.11)$$

On suppose donc qu'une telle constante c n'existe pas.

- (a) Montrer qu'on peut trouver des suites $(n_j)_{j \geq 1}$ d'entiers positifs et $(w_j)_{j \geq 1}$ de complexes telles que $|w_j| = (2n_j + 1)\pi$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} e^{w_j} = 1$.
- (b) Montrer que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \Re(w_j) = 0$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} (|\Im(w_j)| - (2n_j + 1)\pi) = 0$.
- (c) Montrer qu'il existe une suite (ε_j) à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telle que la quantité $\delta_j = w_j - i\varepsilon_j(2n_j + 1)\pi$ tende vers 0 quand j tend vers $+\infty$.
- (d) Conclure que (7.11) est vrai.

Dans ce qui suit, on pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$:

$$\rho_n = (2n+1)\pi ; A_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=\rho_n} \left(\frac{e^{zw}}{e^w - 1} \right) \frac{dw}{w^n} \quad (7.12)$$

3. Montrer que A_n est dans $\mathcal{E}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, (\Delta A_n)(z) = z^{n-1}$$

4. Montrer qu'il existe des constantes a et b strictement positives telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, |A_n(z)| \leq a e^{nb|z|}$$

5. Soit $g \in \mathcal{E}$. Montrer que l'équation de Guichard $f(z+1) - f(z) = g(z)$ possède au moins une solution dans $\mathcal{E}$. Décrire toutes les solutions de cette équation fonctionnelle.

Solution.

- I - L'équation (7.3) sur $\mathcal{P}$ et les opérateurs nilpotents

1. On note $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathcal{P}$, où $e_k : z \mapsto z^k$. On a $\Delta e_0 = 0$ et pour

$$k \geq 1, \Delta e_k(z) = (z+1)^k - z^k = \sum_{j=1}^k (z+1)^{k-j} z^{j-1} \text{ avec } \deg(\Delta e_k) = k-1. \text{ Il}$$

en résulte que $(\Delta e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une base de $\mathcal{P}$ (famille de polynômes échelonnée en degrés). Pour $k \geq 1$, le coefficient dominant de Δe_k est k et pour j compris entre 1 et k , celui de $\Delta^j e_k$ vaut $k(k-1) \cdots (k-j+1) = \frac{k!}{(k-j)!}$.

- (a) Il est clair que Δ est linéaire ($\Delta = \Delta_1 - Id$, où $\Delta_1 : P(z) \mapsto P(z+1)$). Si P est un polynôme constant, on a $\Delta P = 0$ et si P est non constant de degré p , on a $\deg(\Delta P) = \deg(P) - 1$. Le polynôme $\Delta^p P$ est alors constant égal à $\alpha_p p!$, en notant α_p le coefficient dominant de P et on a $\Delta^{p+1} P = 0$. L'application Δ est donc localement nilpotente.

- (b) On a $\Delta^0 = Id \neq 0$ et pour tout entier $p \geq 1$, $\Delta^p e_p = p!$ est un polynôme constant non nul. L'application Δ ne peut donc être nilpotente.

2. Pour $P \in \mathcal{P}$ constant on a $\Delta P = 0$, donc Δ est non injective. Si $P = \sum_{k=0}^p \alpha_k e_k$

un polynôme non constant dans $\ker(\Delta)$, on a alors $\Delta P = \sum_{k=1}^p \alpha_k \Delta e_k = 0$ et

$\alpha_k = 0$ pour $k = 1, \dots, p$ puisque le système $(\Delta e_k)_{1 \leq k \leq p}$ est libre. Le polynôme P est donc constant. On a donc $\ker(P) = \mathbb{C}$.

3.

- (a) Comme H_0 est constant, on a $\Delta H_0 = 0$. Pour $n = 1$, on a $\Delta H_1(z) = 1 = H_0(z)$ et pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \Delta H_n(z) &= H_n(z+1) - H_n(z) = \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (z+1-k) - \prod_{k=0}^{n-1} (z-k) \right) \\ &= \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=1}^{n-1} (z+1-k) \right) (z+1 - (z+1-n)) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} (z+1-k) = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{j=0}^{n-2} (z-j) = H_{n-1}(z) \end{aligned}$$

On a donc $\Delta H_n = H_{n-1}$ et par récurrence, on vérifie que $\Delta^k H_n = H_{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$ et en conséquence $\Delta^k H_n = 0$ pour $k \geq n+1$. Ce qui donne $\Delta^k H_n(0) = \delta_{n,k}$ puisque $H_{n-k}(0) = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$ et $H_0 = 1$.

- (b) La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant échelonnée en degré avec $\deg(H_n) = n$ pour tout $n \geq 0$, on en déduit que c'est une base de $\mathcal{P}$. Si P est un polynôme non nul de degré $p \geq 1$, il s'écrit $P = \sum_{k=0}^p \alpha_k H_k$ et pour $0 \leq j \leq p$,

$$\text{on a } \Delta^j P(0) = \sum_{k=0}^p \alpha_k \Delta^j H_k(0) = \sum_{k=0}^p \alpha_k \delta_{k,j} = \alpha_j, \text{ ce qui nous donne}$$

$$P = \sum_{j=0}^p \Delta^j P(0) H_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n P(0) H_n \text{ puisque } \Delta^n P(0) = 0 \text{ pour } n \geq p+1.$$

Pour $P = 0$, cette relation est encore vérifiée. Pour $P = e_3$, on a :

$$\Delta^0 e_3(z) = z^3, \Delta e_3(z) = (z+1)^2 + (z+1)z + z^2 = 3z^2 + 3z + 1$$

$$\Delta^2 e_3(z) = 6z + 6, \Delta^3 e_3(z) = 6$$

et $z^3 = H_1(z) + 6H_2(z) + 6H_3(z) = z + 3z(z-1) + z(z-1)(z-2)$, ce qui peut se vérifier directement.

- (c) Comme Δ transforme la base canonique de $\mathcal{P}$ en une base de $\mathcal{P}$, elle est surjective et passant au quotient, on en déduit un isomorphisme de $\mathcal{P}/\ker(\Delta) = \mathcal{P}/\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$, cet isomorphisme étant défini par :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \overline{\Delta(P)} = \Delta(P) = P(z+1) - P(z)$$

On en déduit que pour tout polynôme P , il existe un polynôme Q , unique à une constante additive près, tel que $P = \Delta Q$. Si Q est un tel polynôme, le polynôme $f = Q - Q(0)$ vérifie aussi $\Delta(f) = P$ avec $f(0) = 0$ et c'est le seul (si $\Delta(g) = P$ avec $g(0)$, on a alors $g - f = \lambda \in \mathbb{C}$ puisque $g - f \in \ker(\Delta)$ et l'évaluation en 0 donne $\lambda = 0$).

La surjectivité de Δ peut aussi se montrer en disant que tout polynôme P s'écrit :

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n P(0) H_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n P(0) \Delta H_{n+1} = \Delta \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n P(0) H_{n+1} \right)$$

ce qui nous donne l'antécédent de P nul en 0.

4.

- (a) Pour $p \geq 0$, il existe un unique polynôme f tel que $z^p = f(z+1) - f(z)$ et $f(0) = 0$. On en déduit que pour tout entier N , on a :

$$\sum_{n=0}^N n^p = \sum_{n=0}^N (f(n+1) - f(n)) = \sum_{n=1}^{N+1} f(n) - \sum_{n=0}^N f(n) = f(N+1)$$

$$\text{avec } f = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n e_p(0) H_{n+1} = \sum_{n=0}^p \Delta^n e_p(0) H_{n+1}.$$

- (b) On a $\Delta e_3(0) = 1$, $\Delta^2 e_3(0) = 6$, $\Delta^3 e_3(0) = 6$, donc $f = H_2 + 6H_3 + 6H_4$ avec :

$$H_2(z) = \frac{z(z-1)}{2}, \quad H_3(z) = \frac{z-2}{3} H_2(z), \quad H_4(z) = \frac{(z-3)(z-2)}{12} H_2(z)$$

$$\text{ce qui donne } f(z) = \left(\frac{z(z-1)}{2} \right)^2 \text{ et } \sum_{n=0}^N n^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2} \right)^2.$$

5.

- (a) Avec les propriétés du module d'un nombre complexe, on déduit que pour P, Q dans $\mathcal{P}$ et λ dans $\mathbb{C}$, on a $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| \geq 0$, $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$, $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$. L'égalité $\|P\| = 0$ signifie que P est nul sur tout $[0, 1]$, il a donc une infinité de racines et c'est le polynôme nul. L'application $P \mapsto \|P\|$ est donc une norme sur $\mathcal{P}$.

- (b) On rappelle qu'un endomorphisme d'espace vectoriel normé est continu si, et seulement si, il est borné sur la boule unité.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|e_n\| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 1$ et pour tout réel

$x \in [0, 1]$, on a :

$$0 \leq \Delta e_n(x) = (x+1)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k = 2^n - 1 = \Delta e_n(1)$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Delta e_n\| = +\infty$ et l'application linéaire Δ n'est pas continue pour la norme utilisée.

- (c) Pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n P(0) H_n \in \mathcal{P}$, on note $N(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\Delta^n P(0)|$, cette somme étant en réalité finie puisque $\Delta^n P = 0$ pour n assez grand. On a $N(P) \geq 0$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ et avec la linéarité de Δ et de l'évaluation en 0, on déduit facilement que $N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$ pour tous polynômes P, Q . Enfin l'égalité $N(P) = 0$ équivaut à $\Delta^n P(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit à $P = 0$ d'après I.3.b. L'application N est donc une norme sur $\mathcal{P}$.

Pour tout $P \in \mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned} N(\Delta(P)) &= N\left(\Delta\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n P(0) H_n\right)\right) = N\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \Delta^n P(0) H_{n-1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta^n P(0)| \leq N(P) \end{aligned}$$

(les sommes considérées étant finies), ce qui signifie que Δ est continue pour N avec $N(\Delta) = \sup_{P \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \frac{N(\Delta(P))}{N(P)} \leq 1$.

6.

- (a) Si l'intérieur de Y est non vide il existe alors un élément a de Y et un réel $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) = \{x \in X \mid \|x - a\| \leq r\} \subset Y$. La boule fermée de centre 0 et de rayon r est alors aussi contenue dans l'espace vectoriel Y comme translatée de $\mathcal{B}(a, r)$ (pour tout $y \in \mathcal{B}(0, r)$, on a $x = a + y \in \mathcal{B}(a, r) \subset Y$ et $y = x - a \in F$, puisque Y est un espace vectoriel) et tout $x \in X \setminus \{0\}$ s'écrivant $x = \frac{2\|x\|}{r} \frac{r}{2\|x\|} x$ avec $\frac{r}{2\|x\|} x \in \mathcal{B}(0, r)$, on déduit que $x \in Y$ et $Y = X$.

- (b) L'application T étant localement nilpotente, on a $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(T^n)$, chacun des sous-espaces $\text{Ker}(T^n)$ étant fermé dans X , dans le cas où T est continue. Dans le cas où X est un espace de Banach, le théorème de Baire nous dit qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(T^n)$ soit d'intérieur non vide. On déduit alors de la question précédente que $X = \text{Ker}(T^n)$, ce qui signifie que T est nilpotente.

7.

- (a) Comme Δ est localement nilpotente, non nilpotente, on déduit de la question précédente que si N est une norme sur $\mathcal{P}$ pour laquelle Δ est continue, l'espace normé $(\mathcal{P}, N)$ ne peut être complet.
- (b) On rappelle qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie F d'un espace vectoriel normé E est fermé. Ce résultat peut se montrer comme suit. On désigne par $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de F . Soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de points de F qui converge vers $x \in E$ avec $x_p = \sum_{i=1}^n \lambda_{p,i} e_i$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En

utilisant l'équivalence des normes sur l'espace F de dimension finie, on a pour tous p, q dans $\mathbb{N}$, $\sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda_{p,i} - \lambda_{q,i}| = \|x_p - x_q\|_\infty \leq \alpha \|x_p - x_q\|$, ce qui entraîne que chacune des suites réelles $(\lambda_{p,i})_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, elle est donc convergente vers un scalaire λ_i . La suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge alors vers $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in F$ et avec l'unicité de la limite on a $x = y \in F$. Ce qui prouve que F est fermé dans E .

En désignant, pour tout entier naturel n , par $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ formé des polynômes de degré au plus égal à n , on a $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$, chaque espace $\mathcal{P}_n$ étant fermé dans $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{P}$. Si $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ est complet, le théorème de Baire nous dit alors qu'il existe un entier n tel que $\mathring{\mathcal{P}}_n$ soit non vide et nécessairement $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}$, ce qui est absurde. Il est donc impossible de définir une norme sur $\mathcal{P}$ qui rende ce espace complet.

- II - L'espace $\mathcal{E}$ des fonctions entières

1.

- (a) Soit $r > 0$ fixé. Avec la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum a_n r^n e^{int}$, on peut écrire pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \\ &= 2\pi a_n r^n \end{aligned}$$

puisque :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n \end{cases}$$

ce qui détermine les coefficients a_n de manière unique.

- (b) Pour $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés, on a :

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt \\ &\leq \frac{1}{r^n} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(re^{it})| = \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)| = \frac{M(f, r)}{r^n} \end{aligned}$$

- (c) La fonction $f : z \mapsto e^z - 1$ est dans $\mathcal{E}$ non polynomiale puisqu'elle est non identiquement nulle avec une infinité de racines (les $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).

- (d) Soit $f \in \mathcal{E}$ bornée. On a alors $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et il existe

un réel $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Pour tout réel $r > 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$|a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

donc $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $f = a_0$, ce qui signifie que f est constante. C'est le théorème de Liouville.

- (e) Si $f \in \mathcal{P} \subset \mathcal{E}$, on a alors, pour tout nombre complexe z , $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, les a_n étant tous nuls à partir d'un certain rang et la convergence de cette série est uniforme sur $\mathbb{C}$. Réciproquement soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ dans $\mathcal{E}$ telle que la convergence de cette série entière soit uniforme sur $\mathbb{C}$. En désignant par $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes de cette série entière, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $|R_n(z)| \leq 1$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier, la fonction R_{n_0} est un élément borné de $\mathcal{E}$, c'est donc une fonction constante et $f(z) = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n z^n + R_{n_0}(z) = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n z^n + \lambda$ est un polynôme.

2.

- (a) Pour $R > 0$ et $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ fixés, on a :

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f_k(Re^{it}) e^{-int} dt$$

Comme la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le compact $S(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$, la suite de fonctions $(f_k(Re^{it}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers la fonction continue $t \mapsto f(Re^{it})$ (limite uniforme d'une suite de fonctions continues) et on a :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} a_n^{(k)} &= \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(Re^{it}) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) e^{-int} dt \end{aligned}$$

On notant $a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_n^{(k)}$, pour tout entier naturel n , on a :

$$|a_n| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |a_n^{(k)}| = \frac{1}{2\pi R^n} \left| \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) e^{-int} dt \right| \leq \frac{M(f, R)}{R^n}$$

c'est-à-dire que pour tout $R > 0$, la suite $(|a_n| R^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, ce qui signifie que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini (ce rayon de convergence est $\sup \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$). On désigne par $g \in \mathcal{E}$ la somme de cette série.

Pour $R > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe un entier k_0 (qui dépend de R et de ε) tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq R$, on ait $|f(z) - f_k(z)| \leq \varepsilon$.

Il en résulte que pour $|z| \leq \frac{R}{2}$ et $k \geq k_0$, on a :

$$|f(z) - g(z)| \leq |f(z) - f_k(z)| + |f_k(z) - g(z)| \leq \varepsilon + \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n^{(k)} - a_n) z^n \right|$$

avec $\left| a_n^{(k)} - a_n \right| = \frac{1}{2\pi R^n} \left| \int_0^{2\pi} (f_k(Re^{it}) - f(Re^{it})) e^{-int} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{R^n}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &\leq \varepsilon + \sum_{n=0}^{+\infty} \left| a_n^{(k)} - a_n \right| |z|^n \leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{|z|}{R} \right)^n \\ &\leq \varepsilon \left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) = 3\varepsilon \end{aligned}$$

et faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $f(z) = g(z)$. On a donc $f = g \in \mathcal{E}$.

- (b) Si f est limite uniforme sur tout compact d'une suite de polynômes, la question précédente nous dit que c'est un élément de $\mathcal{E}$. Réciproquement, si $f \in \mathcal{E}$ avec $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de cette série entière converge uniformément vers f sur tout disque fermé (puisque le rayon de convergence est infini), donc sur tout compact.
- (c) Soient f, g dans $\mathcal{E}$. Il existe deux suites $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui convergent uniformément sur tout compact vers f et g respectivement. La suite $(P_n Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de fonctions polynomiales qui convergent uniformément sur tout compact vers fg . En effet, pour $R > 0$ et $|z| \leq R$, on a :

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - P_n(z)Q_n(z)| &\leq |f(z) - P_n(z)| |g(z)| \\ &\quad + |P_n(z)| |g(z) - Q_n(z)| \end{aligned}$$

et en notant $\|\varphi\|_{R,\infty} = \sup_{|z| \leq R} |\varphi(z)|$ pour tout fonction continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - P_n(z)Q_n(z)| &\leq \|f - P_n\|_{R,\infty} \|g\|_{R,\infty} \\ &\quad + \|P_n\|_{R,\infty} \|g - Q_n\|_{R,\infty} \\ &\leq \|f - P_n\|_{R,\infty} \|g\|_{R,\infty} + \left(\|f - P_n\|_{R,\infty} + \|f\|_{R,\infty} \right) \|g - Q_n\|_{R,\infty} \\ &\leq \|f - P_n\|_{R,\infty} \left(\|g\|_{R,\infty} + \|g - Q_n\|_{R,\infty} \right) + \|f\|_{R,\infty} \|g - Q_n\|_{R,\infty} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|fg - P_n Q_n\|_{R,\infty} &\leq \|f - P_n\|_{R,\infty} \left(\|g\|_{R,\infty} + \|g - Q_n\|_{R,\infty} \right) \\ &\quad + \|f\|_{R,\infty} \|g - Q_n\|_{R,\infty} \end{aligned}$$

le terme de droite tendant vers 0 quand n tend vers l'infini. Il en résulte que $fg \in \mathcal{E}$. Sachant que $(\mathcal{E}, +)$ est un espace vectoriel, on en déduit que $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ est une algèbre.

- (d) Soit $f \in \mathcal{E}$ limite uniforme sur tout compact d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $Q_n(z) = P_n(z+a)$ est une suite de fonctions polynomiales qui convergent uniformément sur tout compact vers $g : z \mapsto f(z+a)$, ce qui prouve que $g \in \mathcal{E}$.

3.

- (a) Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $|\lambda_n| \leq AB^n$ pour tout $n \geq 0$, où A et B sont deux constantes réelles strictement positives.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ avec $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\forall n \geq 0, \forall R > 0, |\lambda_n a_n| R^n \leq A |a_n| (BR)^n$$

avec $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (BR)^n < +\infty$, ce qui signifie que la série entière

$\sum a_n \lambda_n z^n$ a un rayon de convergence infini et sa somme est dans $\mathcal{E}$.

- (b) Dire que la condition (ii) n'est pas vérifiée signifie que pour tous réels A, B strictement positifs, il existe un entier $n_{A,B}$ tel que $|\lambda_{n_{A,B}}| > AB^{n_{A,B}}$. Prenant $(A, B) = (1, 1)$, on a un entier $n_0 \geq 0$ tel que $|\lambda_{n_0}| > 1$. Si $n_0 \geq 1$, on pose $n'_1 = n_0$, sinon prenant $(A, B) = (|\lambda_{n_0}|, 1)$, on a un entier $n'_1 \geq 1$ tel que $|\lambda_{n'_1}| > |\lambda_{n_0}| > 1$ (la condition $|\lambda_{n'_1}| > |\lambda_{n_0}|$ nous assure que $n'_1 \neq n_0 = 0$). Dans tous les cas, on a des entiers $n'_1 \geq 1$ tels que $|\lambda_{n'_1}| > 1$. On désigne par n_1 le plus petit de ces entiers. Supposons construits $1 \leq n_1 < \dots < n_p$ tels que $|\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$ pour $1 \leq j \leq p$, n_j étant minimal. Prenant $(A, B) = (|\lambda_{n_p}|, p+1)$, on a des entiers n'_{p+1} tels que $|\lambda_{n'_{p+1}}| > |\lambda_{n_p}| (p+1)^{n'_{p+1}}$. On désigne par n_{p+1} le plus petit de ces entiers. Comme $|\lambda_{n_{p+1}}| > |\lambda_{n_p}| > p^{n_p}$, on a forcément $n_{p+1} > n_p$ puisque n_p est minimal. La suite d'entiers naturels non nuls $(n_j)_{j \geq 1}$ ainsi construite est donc strictement croissante. On pose alors $a_{n_j} = \frac{1}{\lambda_{n_j}}$ pour tout $j \geq 1$ et la série entière $\sum a_{n_j} z^{n_j}$ a un rayon de convergence infini (pour $|z| \leq R$ et $j > R$ on a $\left| \frac{z^{n_j}}{\lambda_{n_j}} \right| \leq \left(\frac{R}{j} \right)^{n_j} = \alpha_j$ avec $\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} = \left(\frac{R}{j} \right)^{n_{j+1}-n_j} \leq \frac{R}{j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ puisque $n_{j+1} - n_j \geq 1$), sa somme f est donc dans $\mathcal{E}$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n z^n = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{n_j} \lambda_{n_j} z^{n_j} = \sum_{j=1}^{+\infty} z^{n_j}$ a un rayon de convergence égal à 1, la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas un multiplicateur de $\mathcal{E}$. En définitive, les points (i) et (ii) sont équivalents.

4.

- (a) Pour $f \in \mathcal{E}$, la fonction Δf est dans $\mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel stable par translation.

- (b) Le noyau de Δ est formé des fonctions entières qui sont périodiques de période 1. Pour tout entier $n \geq 1$, les fonctions $f_n : z \mapsto e^{2in\pi z}$ sont dans ce noyau et linéairement indépendantes, donc $\ker(\Delta)$ est de dimension infinie. Le fait que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{E}$ peut se montrer comme suit. Si $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$, on a en particulier $\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(t) = 0$ pour tout réel t et :

$$0 = \int_0^1 \varphi(t) e^{-2ik\pi t} dt = \sum_{j=0}^n \lambda_j \int_0^1 e^{2i(j-k)\pi t} dt = \lambda_k$$

pour tout entier k compris entre 0 et n .

5.

- (a) On a $|I| = \left| \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) i \rho e^{it} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})| \rho dt \leq 2\pi \rho M(f, \rho)$.
- (b) Soit $f \in \mathcal{E}$ avec $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. La convergence de cette série entière étant uniforme sur tout compact, on a :

$$I = i \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^{n+1} e^{i(n+1)t} dt = i \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = 0$$

- (c) Pour $k \geq 0$, la fonction $z \mapsto z^k h(z)$ est dans $\mathcal{E}$, donc $\int_{|w|=\rho} w^k h(w) dw = 0$. Pour $k = -1$, du fait de la convergence uniforme sur tout compact, on a :

$$\begin{aligned} \int_{|w|=\rho} \frac{h(w)}{w} dw &= \int_0^{2\pi} \frac{h(\rho e^{it})}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} h(\rho e^{it}) i dt \\ &= i \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n \int_0^{2\pi} e^{int} dt = i a_0 \int_0^{2\pi} dt = 2i\pi a_0 \end{aligned}$$

avec $a_0 = h(0)$.

6.

- (a) Pour tout $w \in \mathbb{C}$, on a $e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = 1 + w + w^2 g(w)$ avec :

$$g(w) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{w^{n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{(n+2)!}$$

donc $g \in \mathcal{E}$. Pour $|w| = 1$, on a :

$$|g(w)| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|w|^{n-2}}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 2$$

(b).

- i. Pour $w = x + iy \in \mathbb{C}$, l'égalité $e^w = e^x e^{iy} = 1$ impose $|e^w| = e^x = 1$, soit $x = 0$ et $e^{iy} = 1$ qui donne $y = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $|w| = 2|k|\pi \neq 1$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $w \mapsto \frac{w^k}{e^w - 1}$ est continue sur le disque unité, ce qui assure la définition de l'intégrale I_k .
- ii. Pour $k \geq 1$, on a $2i\pi I_k = \int_{|w|=1} \frac{w^{k-1}}{1 + wg(w)} dw$ avec $|wg(w)| = |g(w)| \leq e - 2 < 1$ pour $|w| = 1$, donc :

$$\frac{w^{k-1}}{1 + wg(w)} = w^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (wg(w))^n$$

la convergence étant normale ($|wg(w)|^n \leq (e - 2)^n$) donc uniforme, sur le disque unité. On peut donc écrire que :

$$2i\pi I_k = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{|w|=1} w^{n+k-1} g^n(w) dw$$

chaque intégrale étant nulle puisque les fonctions g^n sont dans $\mathcal{E}$ (stabilité par le produit) et $n + k - 1 \geq 0$ pour $n \geq 0$ et $k \geq 1$.

Pour $k = 0$, on a :

$$\begin{aligned} 2i\pi I_0 &= \int_{|w|=1} \frac{dw}{w} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{|w|=1} w^{n-1} g^n(w) dw \\ &= \int_{|w|=1} \frac{dw}{w} = 2i\pi \end{aligned}$$

et $I_0 = 1$.

- III - L'équation de Guichard dans $\mathcal{E}$

A. Les polynômes de Bernoulli et une application

1. Avec la convergence normale sur tout compact de $\mathbb{C}$ de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} B_n(z) &= \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{w^k z^k}{e^w - 1} \frac{dw}{w^n} = \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{|w|=1} \frac{w^{k-n}}{e^w - 1} dw \right) \frac{z^k}{k!} \\ &= n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{I_{k-n}}{k!} z^k = n! \sum_{k=0}^n \frac{I_{k-n}}{k!} z^k \end{aligned}$$

(on a $I_{k-n} = 0$ si $k - n \geq 1$). Donc B_n est polynomiale et avec $I_0 = 1$, on déduit que B_n est unitaire de degré n .

Pour $n = 0$, on a $B_0 = 1$.

2.

(a) Pour $n \geq 1$, on a :

$$B'_n(z) = n! \sum_{k=1}^n \frac{I_{k-n}}{(k-1)!} z^{k-1} = n(n-1)! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{I_{j-(n-1)}}{j!} z^j = n B_{n-1}(z)$$

(b) Pour $n \geq 1$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$B_n(z+1) - B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{e^{zw}(e^w-1)}{e^w-1} \frac{dw}{w^n} = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=1} e^{zw} \frac{dw}{w^n}$$

et en exploitant la convergence normale sur tout compact de $\mathbb{C}$ de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} B_n(z+1) - B_n(z) &= \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{|w|=1} w^{k-n} dw \right) z^k \\ &= \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_0^{2\pi} i e^{i(k-n+1)t} dt \right) z^k \\ &= \frac{n!}{2i\pi} \frac{1}{(n-1)!} 2i\pi z^{n-1} = n z^{n-1} \end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$ et $z = 0$, on obtient $B_n(1) - B_n(0) = 0$.

(c) Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^1 B_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 B'_{n+1}(t) dt = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$$

puisque $B_m(0) = B_m(1)$ pour $m \geq 2$. En notant $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} x^k$ et $\varphi_{n+1}(x)$ la primitive de B_n nulle en 0, l'égalité $B'_{n+1} = (n+1) B_n$ pour $n \geq 0$, nous dit que $B_{n+1} = (n+1) \varphi_{n+1} + \alpha_{n+1,0}$ avec

$$\alpha_{n+1,0} = \int_0^1 B_{n+1}(t) dt - (n+1) \int_0^1 \varphi_{n+1}(t) dt = -(n+1) \int_0^1 \varphi_{n+1}(t) dt$$

ce qui donne un algorithme de construction des B_n .

3. En utilisant les notations précédentes, on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x, \\ \alpha_{1,0} = - \int_0^1 \varphi_1(t) dt = - \int_0^1 t dt = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

et $B_1(z) = \varphi_1(z) + \alpha_{1,0} = z - \frac{1}{2}$. De même, on a :

$$\begin{cases} \varphi_2(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x, \\ \alpha_{2,0} = -2 \int_0^1 \varphi_2(t) dt = -2 \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} \right) dt = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{et } B_2(z) = 2\varphi_2(z) + \alpha_{2,0} = z^2 - z + \frac{1}{6}.$$

$$\begin{cases} \varphi_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x, \\ \alpha_{3,0} = -3 \int_0^1 \varphi_3(t) dt = -3 \int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{6} \right) dt = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } B_3(z) = 3\varphi_3(z) + \alpha_{3,0} = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{6}z.$$

4. Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Une intégration par parties nous donne en prenant B_1 comme primitive de la fonction 1 :

$$\int_0^1 h(t) dt = [h(t) B_1(t)]_0^1 - \int_0^1 B_1(t) h'(t) dt = \frac{h(0) + h(1)}{2} - \int_0^1 h'(t) B_1(t) dt$$

Une seconde intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 h'(t) B_1(t) dt &= \left[\frac{h'(t)}{2} (B_2(t) - B_2(0)) \right]_0^1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 (B_2(x) - B_2(0)) h''(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(B_2(x) - \frac{1}{6} \right) h''(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 h''(t) B_2(t) dt + \frac{h'(1) - h'(0)}{12} \end{aligned}$$

et $\int_0^1 h(t) dt = \frac{h(0) + h(1)}{2} + \frac{h'(0) - h'(1)}{12} + \frac{1}{2} \int_0^1 h''(t) B_2(t) dt$. La fonction $B_2(x) - \frac{1}{6} = x(x-1)$ étant négative sur $[0, 1]$, on peut utiliser la formule de la moyenne qui nous dit qu'il existe un réel $\xi \in [0, 1]$ tel que :

$$\int_0^1 \left(B_2(x) - \frac{1}{6} \right) h''(t) dt = h''(\xi) \int_0^1 \left(B_2(x) - \frac{1}{6} \right) dx = -\frac{1}{6} h''(\xi)$$

donc $\int_0^1 h(t) dt = \frac{h(0) + h(1)}{2} - \frac{h''(\xi)}{12}$ (expression de l'erreur dans la méthode du trapèze sur $[0, 1]$).

5.

- (a) Notant $h(x) = \varphi(n+x)$, le changement de variable $t = n+x$, nous donne :

$$\int_n^{n+1} \varphi(t) dt = \int_0^1 \varphi(n+x) dx = \int_0^1 h(x) dx$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 h(x) dx &= \frac{h(0) + h(1)}{2} + \frac{h'(0) - h'(1)}{12} + \frac{1}{2} \int_0^1 h''(x) B_2(x) dx \\
 &= \frac{h(0) + h(1)}{2} + \frac{h'(0) - h'(1)}{12} + \int_0^1 \varphi''(n+x) \pi_2(x) dx \\
 &= \frac{\varphi(n) + \varphi(n+1)}{2} + \frac{\varphi'(n) - \varphi'(n+1)}{12} + \int_0^1 \varphi''(n+x) \pi_2(n+x) dx \\
 &= \frac{\varphi(n) + \varphi(n+1)}{2} + \frac{\varphi'(n) - \varphi'(n+1)}{12} + \int_n^{n+1} \varphi''(t) \pi_2(t) dt
 \end{aligned}$$

En sommant, on a pour $N \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 I_N &= \int_1^N \varphi(t) dt = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \\
 &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varphi(n) + \varphi(n+1)}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varphi'(n) - \varphi'(n+1)}{12} + \int_n^{n+1} \varphi''(t) \pi_2(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \varphi(n) + \sum_{n=2}^N \varphi(n) \right) + \frac{1}{12} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \varphi'(n) - \sum_{n=2}^N \varphi'(n) \right) \\
 &\quad + \int_1^N \varphi''(t) \pi_2(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} (2S_N - \varphi(1) - \varphi(N)) + \frac{1}{12} (\varphi'(1) - \varphi'(N)) + \int_1^N \varphi''(t) \pi_2(t) dt
 \end{aligned}$$

et :

$$S_N = I_N + \frac{1}{2} (\varphi(1) + \varphi(N)) + \frac{1}{12} (\varphi'(N) - \varphi'(1)) - \int_1^N \varphi''(t) \pi_2(t) dt$$

(Euler et Mac-Laurin).

(b) Avec la convergence de $\int_1^{+\infty} \varphi''(t) dt$, on déduit que :

$$\varphi'(N) - \varphi'(1) = \int_1^N \varphi''(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \varphi''(t) dt$$

Avec $|\varphi''(t) \pi_2(t)| \leq \left(\sup_{t \in [0,1]} |B_2(t)| \right) |\varphi''(t)| = \frac{1}{3} |\varphi''(t)|$ et la convergence absolue de $\int_1^{+\infty} \varphi''(t) dt$, on déduit que $\int_1^{+\infty} \varphi''(t) \pi_2(t) dt$ est aussi absolument convergente. Enfin tenant compte du fait que φ a une limite finie en $+\infty$, on déduit que la série $\sum \varphi(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ sont de même nature.

- (c) Ici φ est la fonction définie par $\varphi(t) = \frac{e^{i\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ pour tout réel $t \geq 1$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et avec $|\varphi(t)| = \frac{1}{\sqrt{t}}$, on déduit qu'elle tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Sa dérivée seconde est donnée par :

$$\varphi''(t) = \left(\frac{e^{i\sqrt{t}}}{2} \left(\frac{i}{t} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \right) \right)' = \frac{e^{i\sqrt{t}}}{2} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{t} - 2i \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} \right) = O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

donc $\int_1^{+\infty} \varphi''(t) dt$ est absolument convergente. La série $\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ est donc de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$. Le changement de variable $x = \sqrt{t}$ nous donne :

$$\int_1^T \frac{e^{i\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = \int_1^{\sqrt{T}} \frac{e^{ix}}{x} 2x dx = 2i (e^i - e^{i\sqrt{T}})$$

qui n'a pas de limite quand T tend vers l'infini. Donc la série $\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ est divergente.

B. Solution de l'équation de Guichard

- En III.A.2.b. on a vu que $\Delta B_{n+1} = (n+1)z^n$ et en travaillant formellement, on a $\Delta f = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{\Delta B_{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = g(z)$, ce qui conduit à envisager cette fonction f comme solution du problème (G). Mais pour ce faire, on doit se poser la question de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$ de la série $\sum b_n \frac{\Delta B_{n+1}}{n+1}$ et de la possibilité de permuter Δ et $\sum$.
- La négation de (1.11) est :

$$\forall c > 0, \exists n \in \mathbb{N}, |w| = (2n+1)\pi \text{ et } |e^w - 1| < c$$

Prenant $c = \frac{1}{j}$, où j est un entier naturel non nul, il existe un entier $n_j \geq 0$ et un nombre complexe w_j tel que $|w_j| = (2n_j+1)\pi$ et $|e^{w_j} - 1| < \frac{1}{j}$, ce qui entraîne $\lim_{j \rightarrow +\infty} e^{w_j} = 1$.
 - Notant $a_j = \Re(w_j)$, $b_j = \Im(w_j)$, on a $\lim_{j \rightarrow +\infty} |e^{w_j}| = \lim_{j \rightarrow +\infty} e^{a_j} = 1$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j = \lim_{j \rightarrow +\infty} \ln(e^{a_j}) = 0$. Puis avec $|w_j| = (2n_j+1)\pi > 0$, on déduit que :

$$0 \leq (2n_j+1)\pi - |b_j| = |w_j| - |b_j| \leq |a_j| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$$

(pour tout nombre complexe $z = a + ib$, on a $|z| \leq |a| + |b|$).

- (c) En désignant, pour tout $j \geq 1$, par ε_j le signe de b_j ($\varepsilon_j = 1$ si $b_j \geq 0$, $\varepsilon_j = -1$ si $b_j < 0$), on a $|b_j| = \varepsilon_j b_j$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} (\varepsilon_j b_j - (2n_j + 1)\pi) = 0$, puis avec :

$$\begin{aligned}\delta_j &= w_j - i\varepsilon_j (2n_j + 1)\pi = a_j + i(b_j - \varepsilon_j (2n_j + 1)\pi) \\ &= a_j + i\varepsilon_j (\varepsilon_j b_j - (2n_j + 1)\pi)\end{aligned}$$

on déduit que :

$$|\delta_j| \leq |a_j| + |\varepsilon_j b_j - (2n_j + 1)\pi| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$$

et $\lim_{j \rightarrow +\infty} \delta_j = 0$.

- (d) Enfin avec :

$$e^{w_j} = e^{\delta_j + i\varepsilon_j (2n_j + 1)\pi} = -e^{\delta_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} -1$$

on est en contradiction avec $\lim_{j \rightarrow +\infty} e^{w_j} = 1$. L'assertion (1.11) est donc vraie.

3. L'égalité $e^w = 1$ équivaut à $w = 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $e^w - 1 \neq 0$ pour tout nombre complexe w tel que $|w| = \rho_n = (2n+1)\pi$. La fonction A_n est donc bien définie. Avec la convergence normale sur tout compact de $\mathbb{C}$ de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$, on a pour tout nombre complexe z :

$$\begin{aligned}A_n(z) &= \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=\rho_n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{w^k z^k}{e^w - 1} \frac{dw}{w^n} = \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{|w|=\rho_n} \frac{w^{k-n}}{e^w - 1} dw \right) \frac{z^k}{k!} \\ &= n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{I_{k-n, \rho_n}}{k!} z^k\end{aligned}$$

en notant, pour tout réel $\rho \in]0, +\infty[\setminus 2\pi\mathbb{N}$, $I_{k, \rho} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} \frac{w^k}{e^w - 1} dw$. On a donc $A_n \in \mathcal{E}$.

L'égalité $(\Delta A_n)(z) = z^{n-1}$ peut se montrer comme pour B_n . Pour $n \geq 1$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$A_n(z+1) - A_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=\rho_n} \frac{e^{zw}(e^w - 1)}{e^w - 1} \frac{dw}{w^n} = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=\rho_n} e^{zw} \frac{dw}{w^n}$$

et en exploitant la convergence normale sur tout compact de $\mathbb{C}$ de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}A_n(z+1) - A_n(z) &= \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{|w|=\rho_n} w^{k-n} dw \right) z^k \\ &= \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \rho_n^{k-(n-1)} \left(\int_0^{2\pi} i e^{i(k-n+1)t} dt \right) z^k \\ &= \frac{n!}{2i\pi} \frac{1}{(n-1)!} 2i\pi z^{n-1} = n z^{n-1}\end{aligned}$$

4. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$:

$$|w| = \rho_n = (2n+1)\pi \Rightarrow |e^w - 1| \geq c \text{ et } |e^{zw}| = e^{\Re(zw)} \leq e^{|zw|} = e^{\rho_n|z|}$$

donc :

$$\begin{aligned} |A_n(z)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{z\rho_n e^{it}}}{e^{\rho_n e^{it}} - 1} \frac{i\rho_n e^{it} dt}{\rho_n^n e^{int}} \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\rho_n|z|}}{c} \frac{dt}{\rho_n^{n-1}} = \frac{1}{c\pi^{n-1}} \frac{n! e^{(2n+1)\pi|z|}}{(2n+1)^{n-1}} \\ &\leq \frac{1}{c} e^{3n\pi|z|} \frac{n!}{(2n\pi)^{n-1}} = \frac{1}{c} e^{3n\pi|z|} u_n \end{aligned}$$

et avec :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2(n+1)\pi} \left(\frac{2n\pi}{2(n+1)\pi} \right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} < 1$$

on déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente vers 0, donc majorée. Il en résulte qu'il existe des constantes réelles $a > 0$ et $b > 0$ telles que $|A_n(z)| \leq ae^{nb|z|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$.

5. On vérifie tout d'abord que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{A_{n+1}}{n+1}$, où $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ avec $g \in \mathcal{E}$, est normalement convergente sur tout disque compact de $\mathbb{C}$. Pour $\rho > 0$ et $|z| \leq \rho$, on a :

$$\left| b_n \frac{A_{n+1}(z)}{n+1} \right| \leq \frac{|b_n|}{n+1} a e^{(n+1)b|z|} \leq |b_n| a e^{(n+1)b\rho} = a e^{b\rho} |b_n| r^n$$

où $r = e^{b\rho}$ et comme la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence infini, on a $\sum |b_n| r^n < +\infty$ et $\sum \left| b_n \frac{A_{n+1}(z)}{n+1} \right| < +\infty$. Comme les fonctions A_n sont dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ et une limite uniforme de fonctions de $\mathcal{E}$ est encore dans $\mathcal{E}$ (question II.2.), on en déduit que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{A_{n+1}}{n+1}$ est dans $\mathcal{E}$. Enfin, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= f(z+1) - f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{A_{n+1}(z+1) - A_{n+1}(z)}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{\Delta A_{n+1}(z)}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = g(z) \end{aligned}$$

Si h est une autre solution de (G) , on a alors $h - f \in \ker(\Delta)$, ce qui revient à dire que $h - f$ est une fonction entière périodique de période 1 (question II.4.b.).

Chapitre 8

Fonctions de plusieurs variables réelles

Exercice 8.1. Fonctions implicites et développements limités

1. Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^7 - 2x^3 + xy^4 + y$ et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation implicite $f(x, y) = 0$.
 - (a) Montrer que l'équation $f(x, y) = 0$ définit y comme fonction φ continûment dérivable de x au voisinage de $(0, 0)$.
 - (b) Donner un développement limité à l'ordre 20 de φ en 0.
2. Soient f définie par $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x + y) - 2x + y - 2z + 1$ sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{S}$ la surface d'équation implicite $f(x, y, z) = 0$.
 - (a) Montrer que l'équation $f(x, y, z) = 0$ définit z comme fonction φ continûment dérivable de (x, y) au voisinage de $(0, 0, 1)$.
 - (b) Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ en $(0, 0)$.

Solution.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 7x^6 - 6x^2 + y^4 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4xy^3 + 1$$

- (a) Comme $f(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$, il existe deux réels $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ et une fonction $\varphi : I =]-\delta_1, \delta_1[\rightarrow J =]-\delta_2, \delta_2[$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que :

$$((x, y) \in I \times J \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in I \text{ et } y = \varphi(x))$$

$$\text{Pour tout } x \in I, \text{ on a } \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} = -\frac{7x^6 - 6x^2 + \varphi^4(x)}{4x\varphi^3(x) + 1}.$$

- (b) La fonction φ qui est de classe C^∞ admet un développement limité à tout ordre en 0. Comme $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, on a $\varphi(x) = o(x)$ et :

$$\varphi''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^5 - 6x + \varphi^3(x) \frac{\varphi(x)}{x}}{4x\varphi^3(x) + 1} = 0$$

$$\text{donc } \varphi(x) = \sum_{k=3}^{20} a_k x^k + o(x^{20}) = O(x^3) \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= - \frac{7x^6 - 6x^2 + \varphi^4(x)}{4x\varphi^3(x) + 1} = - \frac{7x^6 - 6x^2 + O(x^{12})}{1 + O(x^{10})} \\ &= 6x^2 - 7x^6 + O(x^{12}) \end{aligned}$$

En identifiant avec les coefficients du développement limité :

$$\varphi(x) = \sum_{k=2}^{19} (k+1) a_{k+1} x^k + o(x^{19})$$

on en déduit que $a_{k+1} = 0$ pour $k \in \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$ et $3a_3 = 6$, $7a_7 = -7$ soit $a_3 = 2$, $a_7 = -1$ et $a_k = 0$ pour $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$,

donc $\varphi(x) = 2x^3 - x^7 + \sum_{k=13}^{20} a_k x^k + o(x^{20})$. En écrivant que :

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, \varphi(x)) = x^7 - 2x^3 + x\varphi^4(4) + \varphi(x) \\ &= (x^7 - 2x^3) + (16x^{13} - 32x^{17}) + \left(2x^3 - x^7 + \sum_{k=13}^{20} a_k x^k \right) + o(x^{20}) \\ &= 16x^{13} - 32x^{17} + \sum_{k=13}^{20} a_k x^k + o(x^{20}) \end{aligned}$$

on en déduit que $a_{13} = -16$ et $a_{17} = 32$, les coefficients restants étant nuls. En conclusion, on a $\varphi(x) = 2x^3 - x^7 - 16x^{16} + 32x^{17} + o(x^{20})$.

2. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 - 2(z+1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2 - 2z + 1$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 - 2(x+y) - 2.$$

- (a) Comme $f(0, 0, 1) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 1 \neq 0$, il existe deux réels $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ et une fonction $\varphi : D = D((0, 0), \delta_1) \rightarrow J =]1 - \delta_2, 1 + \delta_2[$ de classe C^∞ tels que :

$$((x, y, z) \in D \times J \text{ et } f(x, y, z) = 0) \Leftrightarrow ((x, y) \in D \text{ et } z = \varphi(x, y))$$

Pour tout $(x, y) \in D$, on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} = -\frac{3x^2 - 2(\varphi(x, y) + 1)}{3\varphi^2(x, y) - 2(x + y) - 2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} = -\frac{3y^2 - 2\varphi(x, y) + 1}{3\varphi^2(x, y) - 2(x + y) - 2}$$

- (b) La fonction φ qui est de classe C^∞ admet un développement limité à tout ordre en $(0, 0)$. Comme $\varphi(0, 0) = 1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = 4$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 1$, on a :

$$\varphi(x, y) = 1 + 4x + y + ax^2 + 2bxy + cy^2 + o(x^2 + y^2)$$

L'équation $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ donne :

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + y^3 + (1 + 4x + y + ax^2 + 2bxy + cy^2)^3 \\ &\quad - 2(1 + 4x + y + ax^2 + 2bxy + cy^2)(x + y) - 2x + y \\ &\quad - 2(1 + 4x + y + ax^2 + 2bxy + cy^2) + 1 + o(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

donne par identification pour les termes d'ordre 2, $a = -40$, $b = -7$ et $c = -1$, soit $\varphi(x, y) = 1 + 4x + y - 40x^2 - 14xy - y^2 + o(x^2 + y^2)$.

Exercice 8.2. Points fixes et fonctions implicites

1. Montrer que, pour tout $t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, l'équation $\sin(tx) + \cos(tx) = x$ a une unique solution $x = \varphi(t)$.
2. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et donner un développement limité à l'ordre 3 de φ en 0.

Solution. On remarque que, pour tous réels t, x , on a :

$$\begin{aligned} g(t, x) &= \sin(tx) + \cos(tx) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(tx) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(tx) \right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(tx - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

1. Pour tout $t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on a $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) \right| = t\sqrt{2} \left| \sin\left(tx - \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq t\sqrt{2} < 1$, donc la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto g(t, x)$ est strictement contractante et le théorème du point fixe nous dit que l'équation $g(t, x) = x$ a une unique solution $x = \varphi(t)$.
2. La fonction $f : (t, x) \mapsto g(t, x) - x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -\left(t\sqrt{2} \sin\left(tx - \frac{\pi}{4}\right) + 1\right) \neq 0$$

pour $t \in \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$. Le théorème des fonctions implicites nous permet de retrouver les solutions $\varphi(t)$ (mais seulement localement et c'est pourquoi le théorème du point fixe a été utile) et nous dit de plus que φ est de classe C^∞ sur $\left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$. On a donc le développement limité au voisinage de 0 :

$$\varphi(t) = a + bt + ct^2 + o(t^2)$$

avec $a = \varphi(0) = 1$ et $b = \varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}(0, \varphi(0))}{\frac{\partial f}{\partial x}(0, \varphi(0))} = 1$. L'équation $f(t, \varphi(t)) = 0$ nous donne $\varphi(t) = \sin(t\varphi(t)) + \cos(t\varphi(t))$, soit :

$$\begin{aligned} 1 + t + ct^2 + o(t^2) &= \sin(t + t^2 + o(t^2)) + \cos(t + t^2 + o(t^2)) \\ &= t + t^2 + 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \end{aligned}$$

et $c = \frac{1}{2}$.

Exercice 8.3. Un résultat de continuité des valeurs propres

On se donne deux matrices réelles d'ordre $n \geq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}^{+,*}$ et :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On associe à ces matrices la fonction $F : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall t \in [0, 1], F(t) = (1-t)D + tA$$

1. Calculer les valeurs propres de D .
2. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $F(t)$ admet n valeurs propres réelles simples.

3. Montrer qu'il existe une fonction continûment dérivable $f = (f_j)_{1 \leq j \leq n} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que le polynôme caractéristique de $F(t)$ s'écrive :

$$\forall t \in [0, 1], P(\lambda, t) = \prod_{j=1}^n (\lambda - f_j(t))$$

4. Montrer que pour tout j compris entre 1 et n , la fonction f_j est solution sur $[0, 1]$ d'une équation différentielle avec condition initiale.

Solution.

1. La matrice D est symétrique réelle, donc toutes ses valeurs propres sont réelles. Le théorème de Gerschgorin-Hadamard nous dit que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $|\lambda| \leq 2$. Une telle valeur propre peut donc s'écrire $\lambda = 2 \cos(\alpha)$ avec $\alpha \in [0, \pi]$. Si x est un vecteur propre non nul associé ses composantes sont alors solutions de la récurrence :

$$x_{k-1} - \lambda x_k + x_{k+1} = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

avec les conditions aux limites $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$. Le polynôme caractéristique de cette récurrence est $P(r) = r^2 - 2 \cos(\alpha)r + 1 = (r - e^{i\alpha})(r - e^{-i\alpha})$, ce qui nous donne :

$$x_k = c_1 e^{ik\alpha} + c_2 e^{-ik\alpha} \quad (0 \leq k \leq n+1)$$

Avec $x_0 = 0$, on déduit que $c_2 = -c_1$, puis avec $x_{n+1} = 0$ et $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, on déduit que $\sin((n+1)\alpha) = 0$ et $\alpha = \frac{j\pi}{n+1}$ avec $1 \leq j \leq n$. Les valeurs propres de D sont donc les $\lambda_k = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ ($1 \leq k \leq n$). L'espace propre associé à λ_k est la droite engendrée par le vecteur $v^{(k)}$ de composantes :

$$v_j^{(k)} = \sin\left(j \frac{k\pi}{n+1}\right) \quad (1 \leq k, j \leq n)$$

2. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$F(t) = \begin{pmatrix} ta_1 & 1-t+tb_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & ta_2 & 1-t+tb_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & ta_{n-1} & 1-t+tb_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & ta_n \end{pmatrix}$$

et cette matrice admet n valeurs propres réelles simples puisqu'elle est tridagonale irréductible avec $1-t+tb_i > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout i compris entre 1 et n (exercice 12.4).

3. Soient $t_0 \in [0, 1]$ et λ_0 une valeur propre de $A(t_0)$. On a $P(\lambda_0, t_0) = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda_0, t_0) \neq 0$ puisque λ_0 est racine simple de $P(\cdot, t_0)$. Le théorème des fonctions implicites nous dit alors qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_0$ de t_0 dans $[0, 1]$ et une fonction continûment dérivable $f = (f_j)_{1 \leq j \leq n} : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall t \in \mathcal{V}_0, P(\lambda, t) = \prod_{k=1}^n (\lambda - f_k(t))$$

Les valeurs propres de $A(t)$ étant toutes simples, on peut supposer que $f_1(t) < f_2(t) < \dots < f_n(t)$. Avec cette condition la fonction f est unique. L'intervalle $[0, 1]$ étant compact, on peut trouver une partition du type :

$$[0, 1] = [a_0, b_0[\cup [a_1, b_1[\cup \dots \cup [a_p, b_p]$$

avec $0 = a_0 < b_0 = a_1 < b_1 = a_2 < \dots < b_{p-1} = a_p < b_p = 1$, telle que pour tout k compris entre 0 et p , il existe une unique fonction continûment dérivable :

$$f_k = (f_{1,k}, \dots, f_{n,k}) : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

avec :

$$\forall t \in [a_k, b_k], \begin{cases} P(\lambda, t) = \prod_{j=1}^n (\lambda - f_{j,k}(t)) \\ f_{1,k}(t) < f_{2,k}(t) < \dots < f_{n,k}(t) \end{cases}$$

La fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = (f_{1,k}(t), \dots, f_{n,k}(t))$ si $t \in [a_k, b_k]$ est alors continûment dérivable et $P(\lambda, t) = \prod_{j=1}^n (\lambda - f_j(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$.

4. En dérivant la relation $P(f_j(t), t) = 0$ par rapport à t , pour tout j compris entre 1 et n , on déduit que f_j est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} f_j(0) = a_j, \\ f'_j(t) = -\frac{\frac{\partial P}{\partial t}(f_j(t), t)}{\frac{\partial P}{\partial \lambda}(f_j(t), t)} \quad (t \in [0, 1]) \end{cases}$$

La simplicité des valeurs propres de $A(t)$ nous garantit que $\frac{\partial P}{\partial \lambda}(f_j(t), t) \neq 0$ sur $[0, 1]$.

Exercice 8.4. Théorème des extrema liés

1. On se donne un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$), une fonction $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 de $\mathcal{O}$ et une partie K de $\mathcal{O}$ définie par des équations implicites :

$$K = \{x \in \mathcal{O}, \varphi_j(x) = 0, 1 \leq j \leq p\}$$

où les $p \leq n$ fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont de classe C^1 de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que si la restriction de f à K admet un extremum local en $a \in K$ tel que les différentielles $d\varphi_1(a), \dots, d\varphi_p(a)$ soient linéairement indépendantes dans le dual de $\mathbb{R}^n$, les formes linéaires $df(a), d\varphi_1(a), \dots, d\varphi_p(a)$ sont alors liées, c'est-à-dire qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ uniquement déterminés tels que :

$$df(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j d\varphi_j(a)$$

(les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les multiplicateurs de Lagrange).

2. Soient f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2$ et K le cercle défini par :

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1\}$$

Déterminer les extrema de la restriction de f à K .

3. Soient f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ et K l'ellipsoïde défini par $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, où a, b, c sont des réels strictement positifs tels que $a \neq b$, $a \neq c$ et $b \neq c$. Déterminer les extrema de la restriction de f à K .

Solution.

1. Pour $1 \leq p \leq n$, on note $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ et les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $x = (y, z)$ avec $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ et $z \in \mathbb{R}^p$.

Pour $p = n$, la famille $(d\varphi_k(a))_{1 \leq k \leq n}$ est une base du dual de $\mathbb{R}^n$ et $df(a)$ est une combinaison linéaire des $d\varphi_k(a)$.

La famille $(d\varphi_k(a))_{1 \leq k \leq p}$ étant libre, la matrice jacobienne :

$$J_\varphi(a) = \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

est de rang p et quitte à modifier la numérotation, on peut supposer que :

$$\det \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ (n-p)+1 \leq j \leq n}} = \det \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}(a) \right) \right)_{1 \leq i, j \leq p} \neq 0$$

Le théorème des fonctions implicites nous dit alors, en notant $a = (b, c)$ dans $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$, qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de b dans $\mathbb{R}^{n-p}$, un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de c dans $\mathbb{R}^p$ et une fonction $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ caractérisée par la condition :

$$\forall y \in \mathcal{U}, \forall z \in \mathcal{V}, (\varphi(y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(y))$$

Il existe donc un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de a et un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de $b = g(a)$ tels que $K \cap \mathcal{O} = \{(y, g(y)) \mid y \in \mathcal{U}\}$. Comme la restriction de f à K admet un extremum local en a , la fonction $h : y \mapsto f(y, g(y))$ admet un extremum local

en b . Cette fonction étant de classe C^1 , on a $\frac{\partial h}{\partial y_j}(b) = 0$ pour $1 \leq j \leq n-p$, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(a) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial z_k}(a) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) = 0 \quad (1 \leq j \leq n-p)$$

Avec $\varphi(y, g(y)) = 0$ pour tout $y \in \mathcal{O}$, on a aussi :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(a) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_k}(a) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a) = 0 \quad (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n-p)$$

Ces résultats se traduisent sur la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_{n-p}}(a) & \frac{\partial f}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_p}(a) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{n-p}}(a) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_{n-p}}(a) & \frac{\partial \varphi_p}{\partial z_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial z_p}(a) \end{pmatrix}$$

en disant que les colonnes 1 à $n-p$ sont des combinaisons linéaires des p dernières colonnes, donc le rang de cette matrice est inférieur ou égal à p et comme $\det \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq p} \right) \neq 0$, ce rang est égal à p . Les $p+1$ lignes de cette matrice sont donc liées, ce qui signifie qu'il existe des réels non tous nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que $\alpha_1 df(a) + \sum_{j=1}^p \alpha_j d\varphi_j(a) = 0$. Comme la famille $(d\varphi_k(a))_{1 \leq k \leq p}$ est libre,

on a nécessairement $\alpha_1 \neq 0$ et $df(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j d\varphi_j(a)$, les λ_j étant uniquement déterminés.

2. En notant $\varphi(x, y) = (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$, on a $K = \varphi^{-1}\{0\}$. La condition $df(a, b)$ et $d\varphi(a, b)$ liées, avec $(a, b) \in K$, signifie qu'il existe un réel λ tel que :

$$a = \lambda(a-2) \text{ et } b = \lambda(b+1) \text{ avec } (a-2)^2 + (b+1)^2 = 1$$

Nécessairement $\lambda \neq 0$ (sinon $a = b = 0$ et $5 = 1$), donc $b \neq 0$, $b \neq -1$ et $\frac{a}{b} = \frac{a-2}{b+1}$, soit $a = -2b$ et $5b^2 + 10b + 4 = 0$, ce qui donne deux solutions :

$$(a_1, b_1) = \left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad (a_2, b_2) = \left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

avec $f(a_1, b_1) = 2(\sqrt{5}+3)$ et $f(a_2, b_2) = 2(3-\sqrt{5})$. En écrivant tout point (x, y) de K sous la forme $(x, y) = (2 + \cos(t), -1 + \sin(t))$ avec $t \in [-\pi, \pi]$, on a $f(x, y) = x^2 + y^2 = 2(2x - y - 2) = 2(3 + 2\cos(t) - \sin(t))$ et :

$$f(x, y) - f(a_1, b_1) = 2(2\cos(t) - \sin(t) - \sqrt{5})$$

$$f(x, y) - f(a_2, b_2) = 2(2\cos(t) - \sin(t) + \sqrt{5})$$

L'étude de la fonction $\varphi : t \mapsto 2 \cos(t) - \sin(t)$ nous montre que la restriction de f à K admet un maximum en (a_1, b_1) et un minimum en (a_2, b_2) . En effet, si $\varphi'(t) = -2 \sin(t) - \cos(t) = 0$, on a alors $\tan(t) = -\frac{1}{2}$ et $\varphi(t) = \frac{5}{2} \cos(t) = \pm \frac{5}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(t)}} = \pm \sqrt{5}$.

3. La fonction f étant continue sur le compact K est bornée et atteint ses bornes. La condition nécessaire d'extremum lié nous donne les conditions :

$$\begin{cases} g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ df(x, y, z) = \lambda dg(x, y, z) \end{cases}$$

où λ est une constante réelle, soit :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right)x = 0, \left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right)y = 0, \left(1 - \frac{\lambda}{c^2}\right)z = 0 \end{cases}$$

Si $a = b = c$ (i.e. K est une sphère), on a alors $f = a^2$ sur K et tous les points de K conviennent. On suppose donc que $(a, b, c) \notin \mathbb{R}(1, 1, 1)$.

Supposons que $a \neq b$, $a \neq c$ et $b \neq c$. Comme $(0, 0, 0) \notin K$, on a $\lambda = a^2$, ou $\lambda = b^2$, ou $\lambda = c^2$. Si $\lambda = a^2$, on a alors $\lambda \neq b^2$, $\lambda \neq c^2$, donc $y = z = 0$ et $x^2 = a^2$, soit $(x, y, z) = (a, 0, 0)$ ou $(x, y, z) = (-a, 0, 0)$. Dans ce cas, on a, pour tout $(x, y, z) \in K$:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - f(\pm a, 0, 0) &= x^2 - a^2 + y^2 + z^2 = a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) + y^2 + z^2 \\ &= \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y^2 + \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)z^2 \end{aligned}$$

Il en résulte que :

- si $b^2 > a^2$ et $c^2 > a^2$, on a alors un minimum en $(\pm a, 0, 0)$;
- si $b^2 < a^2$ et $c^2 < a^2$, on a alors un maximum en $(\pm a, 0, 0)$;
- si $b^2 > a^2$ et $c^2 < a^2$, on a alors pas d'extremum en $(\pm a, 0, 0)$ puisque :

$$h(x, y, z) = f(x, y, z) - f(\pm a, 0, 0) = a^2 y^2 - b^2 z^2$$

et $h(0, y, 0) > 0$ pour $y > 0$, $h(0, 0, z) < 0$ pour $y > 0$;

- si $b^2 < a^2$ et $c^2 > a^2$, on vérifie de manière analogue qu'il n'y pas d'extremum en $(\pm a, 0, 0)$.

Pour $\lambda = b^2$ ou $\lambda = c^2$, on a des résultats analogues.

Exercice 8.5. Extrema liés et inégalité arithmético-géométrique

Soient $n \geq 2$ un entier, et f, φ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x) = \prod_{i=1}^n x_i, \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i$$

Pour tout réel $\alpha > 0$, on note :

$$K_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \text{ et } \varphi(x) = \alpha\}$$

1. Montrer que la restriction de f à K_α admet un maximum.

2. Montrer que $a_i > 0$ pour tout i compris entre 1 et n .

3. Montrer que $a = \left(\frac{\alpha}{n}, \dots, \frac{\alpha}{n}\right)$.

4. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
pour tous réels $x_i \geq 0$.

Solution.

1. L'ensemble K_α est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$, donc compact et en conséquence la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes sur K_α .

2. On a $x = \left(\frac{\alpha}{n}, \dots, \frac{\alpha}{n}\right) \in K_\alpha$ et $f(a) = \prod_{i=1}^n a_i \geq f(x) = \frac{\alpha^n}{n^n} > 0$, donc $a_i > 0$ pour tout i compris entre 1 et n .

3. En notant $\mathcal{O}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \text{ et } \varphi(x) = \alpha\}$, on a $f(a) = \sup_{x \in \mathcal{O}_\alpha} f(x)$. Le théorème des extrema liés nous dit alors qu'il existe un

réel λ tel que $df(a) = \lambda d\varphi(a)$, soit $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{f(a)}{a_i} = \lambda$. Les a_i sont donc tous égaux à $\frac{f(a)}{\lambda}$ et tenant compte de $\varphi(a) = \sum_{i=1}^n a_i = n \frac{f(a)}{\lambda} = \alpha$, on déduit que $a_i = \frac{f(a)}{\lambda} = \frac{\alpha}{n}$.

4. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i$. On a

$$x \in K_\alpha, \text{ donc } f(x) = \prod_{i=1}^n x_i \leq f(a) = \frac{\alpha^n}{n^n} \text{ ou encore } \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Cette dernière inégalité étant encore valable pour $x_i \geq 0$ puisque dans ce cas $f(x) = 0$ et $\sum_{i=1}^n x_i \geq 0$.

Problème 8.1. Différentiabilité d'une distance et d'une norme

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et tout point x de $\mathbb{R}^n$, on note $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la différentielle de f en x . On rappelle que $df(x)$ est la forme linéaire définie par :

$$\forall h = (h_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n, df(x)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i$$

— I — Différentiabilité de $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$

On note, pour tout entier naturel non nul n , $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un point $\mathbb{R}^n$. Pour $j \in \{\infty, 1, 2\}$, on note $f_j : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_j$ et $\mathcal{P}_j$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ où f_j est différentiable.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $\|\cdot\|$ n'est pas différentiable en 0.

2. Déterminer $\mathcal{P}_j$ pour $n = 1$ et $j \in \{\infty, 1, 2\}$.

On suppose, pour la suite de cette partie que $n \geq 2$.

3. On s'intéresse à la différentiabilité de $f_\infty : x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Précisément, on se propose de montrer que $\mathcal{P}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists ! k \in \{1, \dots, n\}; \|x\|_\infty = |x_k|\}$.

(a) Dessiner $\mathcal{P}_\infty$ pour $n = 2$.

(b) Montrer que $\mathcal{P}_\infty$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On pourra utiliser la partition

$$\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{C}_k, \text{ où } \mathcal{C}_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}, |x_j| < |x_k|\}.$$

(c) Soient k entier compris entre 1 et n et $x \in \mathcal{C}_k$. Montrer que f_∞ est différentiable en x de différentielle $df_\infty(x) : h \mapsto \frac{x_k}{|x_k|} h_k$.

(d) Montrer que f_∞ n'est pas différentiable en $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}_\infty$ et conclure.

4. On s'intéresse à la différentiabilité de $f_1 : x \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Précisément, on se propose de montrer que $\mathcal{P}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k \neq 0\}$ (l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont toutes non nulles).

(a) Dessiner $\mathcal{P}_1$ pour $n = 2$.

(b) Montrer que $\mathcal{P}_1$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(c) Montrer que f_1 est différentiable en tout point x de $\mathcal{P}_1$ de différentielle

$$df_1(x) : h \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x_k|} h_k.$$

(d) Montrer que f_1 n'est pas différentiable en $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}_1$ et conclure.

5. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}_2$ des points de $\mathbb{R}^n$ où $f_2 : x \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ est différentiable.

- II - Différentiabilité de la distance à une partie de $\mathbb{R}^n$

Pour cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 2$, est muni de sa structure euclidienne usuelle.

Si a, b sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, on note $[a, b]$ le segment d'extrémités a, b , à savoir la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par $[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$ non vide fixé, on note δ_A la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \delta_A(x) = d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|_2$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{P}_A(x) = \{y \in A \mid \delta_A(x) = \|x - y\|_2\}$.

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : pour tout fermé non vide A de $\mathbb{R}^n$, la fonction δ_A est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus A$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble $\mathcal{P}_A(x)$ est réduit à un point.

1. Justifier la définition du réel $\delta_A(x)$ pour tout point x de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $\mathcal{P}_A(x)$ est-il nécessairement non vide ?
2. En désignant par $\bar{A}$ l'adhérence de A dans $\mathbb{R}^n$, montrer que $\delta_A = \delta_{\bar{A}}$.
Pour la suite de cette partie, on suppose que A est un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_A(x)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$.
4. Montrer que la fonction δ_A est lipschitzienne.
5. On suppose pour cette question que le fermé A est convexe. Montrer que :
 - (a) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\mathcal{P}_A(x)$ est réduit à un point y_x ;
 - (b) ce point y_x est également caractérisé par $y_x \in A$ et $\langle x - y_x \mid y - y_x \rangle \leq 0$ pour tout $y \in A$;
 - (c) l'application $x \mapsto y_x$ est lipschitzienne.
6. On suppose que $A = \{a\}$ est réduit à un point. Montrer que l'application δ_A est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$. Préciser sa différentielle. La fonction δ_A est-elle différentiable en a ?
7. On suppose que $A = [a, b]$, où a, b sont deux points distincts de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\mathcal{D}(a, b)$ la droite passant par les points a, b et on se donne un point x dans $\mathbb{R}^n \setminus [a, b]$. Montrer que :

$$(a) \quad (d(x, \mathcal{D}(a, b)))^2 = \|x - a\|_2^2 - \frac{\langle x - a \mid b - a \rangle^2}{\|b - a\|_2^2} ;$$

(b)

$$(\delta_A(x))^2 = \begin{cases} \|x - a\|_2^2 & \text{si } \langle x - a \mid b - a \rangle < 0 \\ \|x - a\|_2^2 - \frac{\langle x - a \mid b - a \rangle^2}{\|b - a\|_2^2} & \text{si } 0 \leq \langle x - a \mid b - a \rangle \leq \|b - a\|^2 \\ \|x - b\|_2^2 & \text{si } \langle x - a \mid b - a \rangle > \|b - a\|^2 \end{cases}$$

(c) il existe une fonction φ_A de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$(\delta_A(x))^2 = \|x - a\|_2^2 - \varphi_A \left(\frac{\langle x - a \mid b - a \rangle}{\|b - a\|_2} \right)$$

et en déduire que δ_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus [a, b]$.

8. Pour cette question et les suivantes, A est à nouveau un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tout $y \in \mathcal{P}_A(x)$ et tout $z \in \mathcal{P}_A(x+h)$, on a :

$$\|h\|_2 - 2\|y - z\|_2 \leq \frac{\delta_A^2(x+h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x - y | h \rangle}{\|h\|_2} \leq \|h\|_2$$

- (b) Dans le cas où A est convexe, déduire de l'encadrement précédent que la fonction δ_A^2 est différentiable en tout point x de $\mathbb{R}^n$ et préciser sa différentielle.

9. Pour tous x, h dans $\mathbb{R}^n$, on note $\delta(x, h) = \inf_{(y,z) \in \mathcal{P}_A(x) \times \mathcal{P}_A(x+h)} \|y - z\|_2$.

- (a) Justifier l'existence du réel $\delta(x, h)$ pour tous x, h dans $\mathbb{R}^n$.

- (b) On se propose de montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(x, h) = 0$ en raisonnant par l'absurde.

- i. En supposant que la fonction $h \mapsto \delta(x, h)$ ne soit pas de limite nulle en 0, justifier l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ et d'une suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = 0$ et $\delta(x, h_k) \geq \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- ii. En déduire une contradiction et conclure.

- (c) Montrer que si $\mathcal{P}_A(x)$ est réduit à un point, alors la fonction δ_A^2 est différentiable en x et préciser sa différentielle en x .

- (d) Montrer que pour tous x, h dans $\mathbb{R}^n$ on peut trouver un point $y_{x,h} \in \mathcal{P}_A(x)$ tel que $\langle x - y_{x,h} | h \rangle = \inf_{y \in \mathcal{P}_A(x)} \langle x - y | h \rangle$, puis que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_A^2(x+h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x - y_{x,h} | h \rangle}{\|h\|_2} = 0$$

- (e) Montrer que si la fonction δ_A^2 est différentiable en x , alors $\mathcal{P}_A(x)$ est réduit à un point.

10. Déduire de ce qui précède que la fonction δ_A est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus A$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble $\mathcal{P}_A(x)$ est réduit à un point.

Solution.

— I — Différentiabilité de $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$

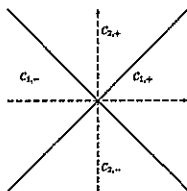
1. Si $\|\cdot\|$ est différentiable en 0 de différentielle $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$ (dual de $\mathbb{R}^n$), on a alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\|h\| = \|0 + h\| = \|0\| + \ell(h) + o(\|h\|) = \ell(h) + o(\|h\|)$$

donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ell(h)}{\|h\|} = 1$ avec ℓ linéaire, ce qui n'est pas possible (sinon, pour $h \neq 0$,

$$\text{on aurait } 1 = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\ell(th)}{\|th\|} = \frac{\ell(h)}{\|h\|} \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t}{|t|} = \pm \frac{\ell(h)}{\|h\|}.$$

2. Pour $n = 1$, on a $f_j(x) = |x|$ pour $j = \infty, 1, 2$ et cette application est différentiable sur $\mathcal{P}_j = \mathbb{R}^*$ de dérivée $f'(x) = \frac{x}{|x|}$.
- 3.
- (a) Voir la figure 8.1, où $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_{k,-} \cup \mathcal{C}_{k,+}$ pour $k = 1, 2$.

FIGURE 8.1 – $\mathcal{P}_\infty$ pour $n = 2$

- (b) Pour $n \geq 2$, 0 n'est pas dans $\mathcal{P}_\infty$, donc $\mathcal{P}_\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On a la partition $\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{C}_k$, où :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}, |x_j| < |x_k|\} \\ &= \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j| < |x_k|\} = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \mathcal{C}_{k,j} \end{aligned}$$

chaque ensemble $\mathcal{C}_{k,j}$ étant ouvert comme image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $x \mapsto |x_k| - |x_j|$.

- (c) Comme $\mathcal{C}_k$ est ouvert, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$B_\infty(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_\infty < \varepsilon\} \subset \mathcal{C}_k$$

donc pour $h \in B_\infty(0, \varepsilon)$, on a $x + h \in \mathcal{C}_k$ et $\|x + h\|_\infty = |x_k + h_k|$. Comme x_k est non nul (on a $\|x\|_\infty = |x_k|$), en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit, le réel $x_k + h_k$ sera de même signe que x_k , ce qui peut se traduire par $|x_k + h_k| = \frac{x_k}{|x_k|} (x_k + h_k) = |x_k| + \frac{x_k}{|x_k|} h_k$ pour $h \in B(0, \varepsilon)$, donc :

$$\|x + h\|_\infty = |x_k + h_k| = |x_k| + \frac{x_k}{|x_k|} h_k = \|x\|_\infty + \ell(h)$$

où ℓ est la forme linéaire définie par $\ell(h) = \frac{x_k}{|x_k|} h_k$. L'application f_∞ est donc différentiable en x de différentielle $df_\infty(x) : h \mapsto \frac{x_k}{|x_k|} h_k$.

- (d) Soient $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}_\infty$ et $j < k$ deux indices compris entre 1 et n tels que $\|x\|_\infty = |x_k| = |x_j| > 0$. Si f_∞ est différentiable en x , il existe alors une forme linéaire ℓ telle $\|x + h\|_\infty = \|x\|_\infty + \ell(h) + o(\|h\|_\infty)$ pour tout

$h \in \mathbb{R}^n$ et on a pour tout réel $t > 0$, $\|x \pm te_k\|_\infty = \|x\|_\infty \pm t\ell(e_k) + o(t)$ avec $|x_k + t| = |x_k| \left(1 + \frac{t}{|x_k|}\right) > |x_k| \geq |x_i|$ pour tout i compris entre 1 et n et $|x_k - t| = |x_k| \left(1 - \frac{t}{|x_k|}\right) < |x_k| = |x_j|$ pour $0 < t < \eta$ avec $\eta > 0$ assez petit, donc :

$$|x_k + t| = \|x + te_k\|_\infty = \|x\|_\infty + t\ell(e_k) + o(t) = |x_k| + t\ell(e_k) + o(t)$$

et :

$$|x_k| = |x_j| = \|x - te_k\|_\infty = \|x\|_\infty - t\ell(e_k) + o(t) = |x_k| - t\ell(e_k) + o(t)$$

De cette dernière égalité on déduit que $\ell(e_k) + o(1) = 0$, donc $\ell(e_k) = 0$ et l'égalité précédente donne $|x_k + t| = |x_k| + o(t)$. En prenant η assez petit, $x_k + t$ sera de même signe que x_k , donc $|x_k + t| = \frac{x_k}{|x_k|} (x_k + t) = \frac{x_k}{|x_k|} x_k + o(t)$, soit $t = o(t)$, ce qui n'est pas. La fonction f_∞ n'est donc pas différentiable en x et comme elle n'est pas différentiable en 0, P_∞ est bien l'ensemble cherché.

4.

(a) Voir la figure 8.2.

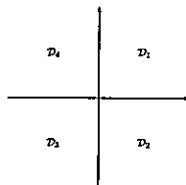


FIGURE 8.2 - $\mathcal{P}_1$ pour $n = 2$

- (b) Pour $n \geq 2$, 0 n'est pas dans $\mathcal{P}_1$, donc $\mathcal{P}_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a $\mathcal{P}_1 = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{D}_k$, où chaque $\mathcal{D}_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k \neq 0\}$ est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue $x \mapsto x_k$.
- (c) Comme $\mathcal{P}_1$ est ouvert, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout h dans $B_1(0, \varepsilon) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\|_1 < \varepsilon\}$ et tout k compris entre 1 et n , $x_k + h_k$ soit du même signe que x_k . On a alors, pour tout $h \in B_1(0, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \|x + h\|_1 &= \sum_{k=1}^n |x_k + h_k| = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x_k|} (x_k + h_k) = \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x_k|} h_k \\ &= \|x\|_1 + \ell(h) \end{aligned}$$

où ℓ est la forme linéaire définie par $\ell(h) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x_k|} h_k$. L'application f_1

est donc différentiable en x de différentielle $df_1(x) : h \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x_k|} h_k$.

- (d) Soient $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}_1$ et $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_k = 0$. Si f_1 est différentiable en x , il existe alors une forme linéaire ℓ telle pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on ait $\|x + h\|_1 = \|x\|_1 + \ell(h) + o(\|h\|_1)$, ce qui nous donne pour tout réel

$$t > 0, \|x \pm te_k\|_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |x_j| + t = \|x\|_1 + t = \|x\|_1 \pm t\ell(e_k) + o(t), \text{ donc}$$

$\pm \ell(e_k) + o(1) = 1$ et faisant tendre t vers 0 on aboutit à $\pm \ell(e_k) = 1$, ce qui n'est pas possible. La fonction f_1 n'est donc pas différentiable en x et comme elle n'est pas différentiable en 0, $\mathcal{P}_1$ est bien l'ensemble cherché.

5. La fonction f_2 est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ comme composée de la fonction polynomiale $P : x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$ qui est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Le théorème de composition des applications différentiables nous dit que sa différentielle en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est la forme linéaire :

$$df_2(x) : h \mapsto \frac{1}{2\sqrt{P(x)}} dP(x)(h) = \frac{\langle x | h \rangle}{\|x\|_2}$$

Comme f_2 n'est pas différentiable en 0, on a $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- II - Différentiabilité de la distance à une partie de $\mathbb{R}^n$

1. Comme A est non vide, l'ensemble $\{\|x - y\|_2 \mid y \in A\}$ est non vide dans $\mathbb{R}$ minorée par 0, donc il admet une borne inférieure $\delta_A(x) \in \mathbb{R}^+$. L'ensemble $\mathcal{P}_A(x)$ peut être vide comme le montre l'exemple de $A =]a, b[$ et $x = a + \lambda(b - a)$ sur la droite passant par $a \neq b$ avec $\lambda < 0$ ($\delta_A(x) = \inf_{t \in]0, 1[} \|(\lambda - t)(b - a)\|_2 = -\lambda \|b - a\|_2$ est atteint pour $t = 0$).
2. De l'inclusion $A \subset \overline{A}$, on déduit que $\delta_{\overline{A}} \leq \delta_A$. Tout point y de $\overline{A}$ s'écrivant $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k$ où $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de A , on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x - y\|_2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x - y_k\|_2 \geq \delta_A(x)$$

(continuité de la norme) et en conséquence $\delta_A(x) \leq \delta_{\overline{A}}(x)$. D'où l'égalité $\delta_A = \delta_{\overline{A}}$.

3. L'ensemble $\mathcal{P}_A(x) = \{y \in A \mid \delta_A(x) = \|x - y\|_2\}$ qui est contenu dans la sphère de centre x et de rayon $\delta_A(x)$ est borné. Pour A fermé, cet ensemble est non vide. En effet, par définition de la borne inférieure, il existe pour tout entier $k \geq 1$ un élément y_k de A tel que $\delta_A(x) \leq \|x - y_k\|_2 < \delta_A(x) + \frac{1}{k}$ et de la suite bornée $(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite $(y_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers un élément $y \in A$ (A est fermé), donc en

faisant tendre k vers l'infini dans l'encadrement $\delta_A(x) \leq \|x - y_k\|_2 < \delta_A(x) + \frac{1}{k}$ on aboutit à $\|x - y\|_2 = \delta_A(x)$, soit à $y \in \mathcal{P}_A(x)$. Enfin cet ensemble est fermé dans A , donc dans $\mathbb{R}^n$, comme image réciproque du fermé $\{\varphi_A(x)\} \subset \mathbb{R}^+$ par l'application continue $y \mapsto \|x - y\|$.

4. Pour x, x' dans $\mathbb{R}^n$, on a pour tout y dans A :

$$d(x, A) - \|x - x'\|_2 \leq \|x - y\|_2 - \|x - x'\|_2 \leq \|x' - y\|_2 \leq d(x', A)$$

soit $\delta_A(x) - \delta_A(x') \leq \|x - x'\|$ et x et x' jouant des rôles symétriques, on a aussi $\delta_A(x') - \delta_A(x) \leq \|x' - x\|_2$, donc $|\delta_A(x) - \delta_A(x')| \leq \|x - x'\|_2$, ce qui signifie que la fonction δ_A est 1-lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$.

5.

(a) On sait déjà que, pour A fermé non vide, $\mathcal{P}_A(x)$ est non vide. Pour y, z dans $\mathcal{P}_A(x) \subset A$, l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} 2 \left(\|y - x\|_2^2 + \|x - z\|_2^2 \right) &= \|(y - x) + (x - z)\|_2^2 + \|(y - x) - (x - z)\|_2^2 \\ &= \|y - z\|_2^2 + 4 \left\| x - \frac{1}{2}(y + z) \right\|_2^2 \end{aligned}$$

nous donne puisque $\frac{1}{2}(y + z) \in A$ (qui est convexe) :

$$4(\delta_A(x))^2 = \|y - z\|_2^2 + 4 \left\| x - \frac{1}{2}(y + z) \right\|_2^2 \geq \|y - z\|_2^2 + 4(\delta_A(x))^2$$

soit $\|y - z\|_2^2 \leq 0$ et en conséquence $\|y - z\|_2 = 0$, soit $y = z$. L'ensemble $\mathcal{P}_A(x)$ est donc réduit à un point y_x .

(b) Comme A convexe, pour tout y dans A et tout t dans $[0, 1]$, le point $z = y_x + t(y - y_x)$ est dans A et on a :

$$\begin{aligned} (\delta_A(x))^2 &= \|x - y_x\|_2^2 \\ &\leq \|x - z\|_2^2 = \|x - y_x\|_2^2 - 2 \langle x - y_x | y - y_x \rangle t + \|y - y_x\|_2^2 t^2 \end{aligned}$$

donc $2 \langle x - y_x | y - y_x \rangle \leq \|y - y_x\|_2^2 t$. En faisant tendre t vers 0, on aboutit à $\langle x - y_x | y - y_x \rangle \leq 0$. Réciproquement supposons que $y' \in A$ soit tel que $\langle x - y' | y - y' \rangle \leq 0$ pour tout $y \in A$. Pour tout $y \in A$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|x - y\|_2^2 &= \|(x - y') + (y' - y)\|_2^2 \\ &= \|x - y'\|_2^2 - 2 \langle x - y' | y - y' \rangle + \|y' - y\|_2^2 \geq \|x - y'\|_2^2 \end{aligned}$$

donc $\|x - y'\|_2 = \inf_{y \in A} \|x - y\|_2$ et $y' = y_x$.

(c) Pour x_1, x_2 dans $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\langle x_1 - y_{x_1} | y_{x_2} - y_{x_1} \rangle \leq 0 \text{ et } \langle x_2 - y_{x_2} | y_{x_1} - y_{x_2} \rangle \leq 0$$

donc par addition $\langle x_1 - y_{x_1} + y_{x_2} - x_2 \mid y_{x_2} - y_{x_1} \rangle \leq 0$ et en conséquence :

$$\begin{aligned}\|y_{x_2} - y_{x_1}\|_2^2 &= \langle y_{x_2} - y_{x_1} \mid y_{x_2} - y_{x_1} \rangle \leq \langle x_2 - x_1 \mid y_{x_2} - y_{x_1} \rangle \\ &\leq \|y_{x_2} - y_{x_1}\|_2 \|x_2 - x_1\|_2\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\|y_{x_2} - y_{x_1}\|_2 \leq \|x_2 - x_1\|_2$. L'application $x \mapsto y_x$ est donc 1-lipschitzienne et en conséquence uniformément continue.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\mathcal{P}_A(x) = \{a\}$ et $\delta_A(x) = \|x - a\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,

cette application étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ comme composée de la fonction polynomiale $P_A : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \mapsto \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \in \mathbb{R}^{+,*}$ et de la fonction

$\varphi : t \in \mathbb{R}^{+,*} \mapsto \sqrt{t}$, ces deux fonctions étant de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Le théorème de composition des applications différentiables nous dit que δ_A est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ (ce que l'on sait déjà car δ_A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$) de différentielle :

$$d\delta_A(x) = \varphi'(P_A(x)) dP_A(x) : h \mapsto \frac{1}{2\sqrt{P_A(x)}} 2 \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) h_i = \frac{\langle x - a \mid h \rangle}{\|x - a\|_2}$$

Si δ_A est différentiable en a de différentielle $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$ (dual de $\mathbb{R}^n$), on a alors :

$$\|h\|_2 = \delta_A(a + h) = \delta_a(a) + \ell(h) + o(\|h\|_2) = \ell(h) + o(\|h\|_2)$$

donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ell(h)}{\|h\|_2} = 1$ avec ℓ linéaire, ce qui n'est pas possible (sinon, pour $h \neq 0$,

on aurait $1 = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\ell(th)}{\|th\|_2} = \frac{\ell(h)}{\|h\|_2} \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t}{|t|} = \pm \frac{\ell(h)}{\|h\|_2}$).

7.

(a) Pour x fixé dans $\mathbb{R}^n \setminus [a, b]$, on a :

$$\begin{aligned}(d(x, \mathcal{D}(a, b)))^2 &= \inf_{t \in \mathbb{R}} \|x - a - t(b - a)\|_2^2 \\ &= \inf_{t \in \mathbb{R}} \left(\|x - a\|_2^2 - 2 \langle x - a \mid b - a \rangle t + \|b - a\|_2^2 t^2 \right)\end{aligned}$$

En notant $\alpha = \|b - a\|_2^2 > 0$, $\beta = \langle x - a \mid b - a \rangle$ et $\gamma = \|x - a\|_2^2$, la fonction polynomiale $P_A : t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha t^2 - 2\beta t + \gamma$ atteint son minimum en :

$$t_x = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\langle x - a \mid b - a \rangle}{\|b - a\|_2^2}$$

donc :

$$\begin{aligned}(d(x, \mathcal{D}(a, b)))^2 &= P_A(t_x) = \|x - a\|_2^2 - 2 \frac{\langle x - a \mid b - a \rangle^2}{\|b - a\|_2^2} + \frac{\langle x - a \mid b - a \rangle^2}{\|b - a\|_2^2} \\ &= \|x - a\|_2^2 - \frac{\langle x - a \mid b - a \rangle^2}{\|b - a\|_2^2}\end{aligned}$$

On peut aussi dire que le vecteur $z_x = \frac{\langle x-a | b-a \rangle}{\|b-a\|_2^2} (b-a)$ est la projection orthogonale du vecteur $x-a$ sur la droite $\mathcal{D}(a, b)$, ce qui nous donne $(d(x, \mathcal{D}(a, b)))^2 = \|(x-a) - z_x\|_2^2 = \|x-a\|_2^2 - \|z_x\|_2^2$.

(b)

- i. Pour $\langle x-a | b-a \rangle < 0$, on a $t_x < 0$ et P_A est strictement croissante sur $[0, 1]$, donc $(\delta_A(x))^2 = \inf_{t \in [0, 1]} P_A(t) = P_A(0) = \|x-a\|_2^2$.
- ii. Pour $\langle x-a | b-a \rangle > \|b-a\|^2$, on a $t_x > 1$ et P_A est strictement décroissante sur $[0, 1]$, donc $(\delta_A(x))^2 = P_A(1) = \|x-b\|_2^2$.
- iii. Pour $0 \leq \langle x-a | b-a \rangle \leq \|b-a\|^2$, on a $t_x \in [0, 1]$, donc :

$$(\delta_A(x))^2 = P_A(t_x) = \|x-a\|_2^2 - \frac{\langle x-a | b-a \rangle^2}{\|b-a\|_2^2}$$

Ce qui nous donne en résumé :

$$(\delta_A(x))^2 = \begin{cases} \|x-a\|_2^2 & \text{si } \langle x-a | b-a \rangle < 0 \\ \|x-a\|_2^2 - \frac{\langle x-a | b-a \rangle^2}{\|b-a\|_2^2} & \text{si } 0 \leq \langle x-a | b-a \rangle \leq \|b-a\|_2^2 \\ \|x-b\|_2^2 & \text{si } \langle x-a | b-a \rangle > \|b-a\|_2^2 \end{cases}$$

(c) En écrivant que :

$$\begin{aligned} \|x-b\|_2^2 &= \|(x-a) - (b-a)\|_2^2 = \|x-a\|_2^2 - 2\langle x-a | b-a \rangle + \|b-a\|_2^2 \\ &= \|x-a\|_2^2 - 2\|b-a\|_2 \frac{\langle x-a | b-a \rangle}{\|b-a\|_2} + \|b-a\|_2^2 \end{aligned}$$

il vient :

$$(\delta_A(x))^2 = \begin{cases} \|x-a\|_2^2 & \text{si } \langle x-a | b-a \rangle < 0 \\ \|x-a\|_2^2 - \frac{\langle x-a | b-a \rangle^2}{\|b-a\|_2^2} & \text{si } 0 \leq \langle x-a | b-a \rangle \leq \|b-a\|_2^2 \\ \|x-a\|_2^2 - 2\|b-a\|_2 \frac{\langle x-a | b-a \rangle}{\|b-a\|_2} + \|b-a\|_2^2 & \text{si } \langle x-a | b-a \rangle > \|b-a\|_2^2 \end{cases}$$

soit $(\delta_A(x))^2 = \|x-a\|_2^2 - \varphi_A\left(\frac{\langle x-a | b-a \rangle}{\|b-a\|_2}\right)$, où :

$$\varphi_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2 & \text{si } t \in [0, \|b-a\|] \\ 2\|b-a\|_2 t - \|b-a\|_2^2 & \text{si } t > \|b-a\| \end{cases}$$

la fonction φ_A étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que δ_A^2 est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et comme $\delta_A(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus [a, b]$ (le segment $[a, b]$ étant convexe, on a $\delta_A(x) = \|x - y_x\|_2$ avec $y_x \in [a, b]$), on en déduit que δ_A est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus [a, b]$.

8.

(a) Pour $y \in \mathcal{P}_A(x) \subset A$, $h \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathcal{P}_A(x+h) \subset A$, on a :

$$\begin{aligned}\delta_A^2(x+h) - \delta_A^2(x) &= \|x+h-z\|_2^2 - \|x-y\|_2^2 \\ &\leq \|x+h-y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2 = 2\langle x-y | h \rangle + \|h\|_2^2\end{aligned}$$

soit $\delta_A^2(x+h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x-y | h \rangle \leq \|h\|_2^2$. On a aussi :

$$\begin{aligned}\delta_A^2(x+h) - \delta_A^2(x) &= \|x+h-z\|_2^2 - \|x-y\|_2^2 \\ &\geq \|x+h-z\|_2^2 - \|x-z\|_2^2 = 2\langle x-z | h \rangle + \|h\|_2^2\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\delta_A^2(x+h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x-y | h \rangle &\geq 2\langle x-z | h \rangle + \|h\|_2^2 - 2\langle x-y | h \rangle \\ &\geq 2\langle y-z | h \rangle + \|h\|_2^2 \\ &\geq \|h\|_2^2 - 2\|y-z\| \|h\|_2\end{aligned}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz). Il en résulte l'encadrement, pour $h \neq 0$:

$$\|h\|_2 - 2\|y-z\|_2 \leq \frac{\delta_A^2(x+h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x-y | h \rangle}{\|h\|_2} \leq \|h\|_2$$

(b) Dans le cas où A est convexe, on a $\mathcal{P}_A(x) = \{y_x\}$, $\mathcal{P}_A(x+h) = \{y_{x+h}\}$ avec $\|y_{x+h} - y_x\|_2 \leq \|h\|_2$ (l'application $x \mapsto y_x$ est 1-lipschitzienne) et en conséquence on déduit de l'encadrement précédent que :

$$-\|h\|_2 \leq \frac{\delta_A^2(x+h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x-y_x | h \rangle}{\|h\|_2} \leq \|h\|_2$$

ce qui nous donne $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_A^2(x+h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x-y_x | h \rangle}{\|h\|_2} = 0$, soit :

$$\delta_A^2(x+h) = \delta_A^2(x) + 2\langle x-y | h \rangle + o(\|h\|_2)$$

ce qui signifie que la fonction δ_A^2 est différentiable en x de différentielle $h \mapsto 2\langle x-y_x | h \rangle$.

9.

(a) Pour x, h fixés dans $\mathbb{R}^n$, l'application $(y, z) \mapsto \|y-z\|_2$ qui est continue sur le compact $\mathcal{P}_A(x) \times \mathcal{P}_A(x+h)$ est bornée et atteint ses bornes, donc le réel $\delta(x, h)$ est bien défini.

(b)

i. Dire que la fonction $h \mapsto \delta(x, h)$ ne tend pas vers 0 quand h tend vers 0 revient à dire qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout réel $\eta > 0$ on peut trouver un élément h de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\|h\|_2 < \eta$ et $\delta(x, h) \geq \varepsilon$.Prenant pour $k \in \mathbb{N}$, $\eta = \frac{1}{k+1}$ on dispose de $h_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\|h_k\|_2 < \frac{1}{k+1} \quad (\text{donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = 0) \quad \text{et } \delta(x, h_k) \geq \varepsilon.$$

- ii. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe $(y'_k, z'_k) \in \mathcal{P}_A(x) \times \mathcal{P}_A(x + h_k)$ telle que $\|y'_k - z'_k\|_2 = \delta(x, h_k)$. La fonction δ_A étant continue, on a :

$$\|x + h_k - z'_k\|_2 = \delta_A(x + h_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \delta_A(x)$$

donc la suite $(x + h_k - z'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et il en est de même de la suite $(z'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ puisque $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. On peut donc extraire de cette suite une sous-suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} = (z'_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point z de A . On a alors :

$$\begin{aligned} \|x - z\|_2 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x - z'_k\|_2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x + h_{\varphi(k)} - z'_{\varphi(k)}\|_2 \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_A(x + h_{\varphi(k)}) = \delta_A(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $z \in \mathcal{P}_A(x)$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $(z, z_k) = (z, z'_{\varphi(k)}) \in \mathcal{P}_A(x) \times \mathcal{P}_A(x + h_{\varphi(k)})$, donc $\|z - z_k\|_2 \geq \delta(h_{\varphi(k)}) \geq \varepsilon$, ce qui contredit le fait que $z = \lim_{k \rightarrow +\infty} z_k$.

- (c) Supposons que $\mathcal{P}_A(x)$ soit réduit à un point y_x . Pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ il existe (y, z) dans $\mathcal{P}_A(x) \times \mathcal{P}_A(x + h)$ tel que $\|y - z\|_2 = \delta(x, h)$ et nécessairement $y = y_x$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \|h\|_2 - 2\delta(x, h) &= \|h\|_2 - 2\|y_x - z\|_2 \\ &\leq \frac{\delta_A^2(x + h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x - y_x | h \rangle}{\|h\|_2} \leq \|h\|_2 \end{aligned}$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(x, h) = 0$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_A^2(x + h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x - y_x | h \rangle}{\|h\|_2} = 0$,

l'application $h \mapsto \langle x - y_x | h \rangle$ étant linéaire, ce qui signifie que δ_A^2 est différentiable en x de différentielle $h \mapsto 2\langle x - y_x | h \rangle$.

(d)

- i. Pour x, h fixés dans $\mathbb{R}^n$, l'application linéaire $y \mapsto \langle x - y | h \rangle$ est continue sur le compact $\mathcal{P}_A(x)$, donc elle est minorée et atteint sa borne inférieure en un point $y_{x,h} \in \mathcal{P}_A(x)$.
- ii. Pour h dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et (y, z) dans $\mathcal{P}_A(x) \times \mathcal{P}_A(x + h)$ tel que $\|y - z\|_2 = \delta(h)$, on a :

$$\begin{aligned} \|h\|_2 - 2\delta(x, h) &= \|h\|_2 - 2\|y - z\|_2 \\ &\leq \frac{\delta_A^2(x + h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x - y | h \rangle}{\|h\|_2} \\ &\leq \frac{\delta_A^2(x + h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x - y_{x,h} | h \rangle}{\|h\|_2} \leq \|h\|_2 \end{aligned}$$

(en I.8a on a vu que la dernière inégalité est valable pour tout y dans $\mathcal{P}_A(x)$) ce qui nous donne :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_A^2(x + h) - \delta_A^2(x) - 2\langle x - y_{x,h} | h \rangle}{\|h\|_2} = 0 \quad (8.1)$$

(e) Si δ_A^2 est différentiable en x , il existe alors une forme linéaire ℓ telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_A^2(x+h) - \delta_A^2(x) - \ell(h)}{\|h\|_2} = 0$$

donc, en tenant compte de (8.1), on en déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \langle x - y_{x,h} | h \rangle - \ell(h)}{\|h\|_2} = 0$$

Il en résulte que pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \langle x - y_{x,t \cdot h} | t \cdot h \rangle - \ell(t \cdot h)}{\|t \cdot h\|_2} = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} \langle x - y_{x,t \cdot h} | t \cdot h \rangle &= \inf_{y \in \mathcal{P}_A(x)} \langle x - y | t \cdot h \rangle \\ &= t \inf_{y \in \mathcal{P}_A(x)} \langle x - y | h \rangle = t \langle x - y_{x,h} | h \rangle \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\frac{2 \langle x - y_{x,h} | h \rangle - \ell(h)}{\|h\|_2} = 0$, soit :

$$\ell(h) = 2 \langle x - y_{x,h} | h \rangle = \inf_{y \in \mathcal{P}_A(x)} \langle x - y | h \rangle$$

Du fait de la linéarité de ℓ , on a :

$$\inf_{y \in \mathcal{P}_A(x)} \langle x - y | -h \rangle = \ell(-h) = -\ell(h) = - \inf_{y \in \mathcal{P}_A(x)} \langle x - y | h \rangle$$

avec $\inf(-E) = -\sup E$, pour toute partie bornée non vide E de $\mathbb{R}$, en notant $-E = \{-x \mid x \in E\}$. En effet, pour tout $x \in E$, on a $m = \inf(E) \leq x \leq M = \sup E$, donc $-M \leq -x \leq -m$ et $-M \leq \inf(-E)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $M - \varepsilon < x \leq M$, donc $-M \leq -x < -M + \varepsilon$ et $-M$ est le plus grand des minorants de $-E$, soit $-M = \inf(-E)$.

On a donc $\sup_{y \in \mathcal{P}_A(x)} \langle x - y | h \rangle = \inf_{y \in \mathcal{P}_A(x)} \langle x - y | h \rangle$, ce qui signifie que la fonction $y \in \mathcal{P}_A(x) \mapsto \langle x - y | h \rangle$ est constante pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ce qui est encore valable pour $h = 0$. Il en résulte que pour $y, y' \in \mathcal{P}_A(x)$, on a $\langle x - y | h \rangle = \langle x - y' | h \rangle$, soit $\langle y' - y | h \rangle = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, ce qui équivaut à $y = y'$. En conclusion $\mathcal{P}_A(x)$ est réduit à un point.

10. Si $\mathcal{P}_A(x)$ est réduit à un point pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f_A = \delta_A^2$ est alors différentiable sur $\mathbb{R}^n$, donc sa restriction à $\mathbb{R}^n \setminus A$ est différentiable et étant à valeurs strictement positive, la fonction $\delta_A = \sqrt{f_A}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus A$. Réciproquement si δ_A est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus A$, $\mathcal{P}_A(x)$ est alors réduit à un point pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ et comme $\mathcal{P}_A(x) = \{x\}$ pour $x \in A$, on en déduit que $\mathcal{P}_A(x)$ est réduit à un point pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Dans le cas où δ_A est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus A$, on a $\mathcal{P}_A(x) = \{y_x\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ et la différentielle en x de f_A est définie par $df_A(x) : h \mapsto 2 \langle x - y_x | h \rangle$, donc celle de $\delta_A = \sqrt{f_A}$ est donnée par $d\delta_A(x) : h \mapsto \frac{\langle x - y_x | h \rangle}{\delta_A(x)} = \frac{\langle x - y_x | h \rangle}{\|x - y_x\|_2}$.

Chapitre 9

Dénombrements et probabilités

Exercice 9.1. Dérangements d'un ensemble fini

Pour tout entier naturel non nul n et tout entier k compris entre 0 et n , on note $S_{n,k}$ le sous-ensemble du groupe symétrique S_n formé des permutations de $I_n = \{1, \dots, n\}$ qui ont exactement k points fixes. Pour $k = 0$, les éléments de $S_{n,0}$ sont appelés dérangements et on note δ_n le nombre de ces dérangements. On a $\delta_1 = 0$ et on note $\delta_0 = 1$ par convention.

1.

(a) Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et $n \geq 1$, on a $\text{card}(S_{n,k}) = \binom{n}{k} \delta_{n-k}$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta_k$,

puis que $\delta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ (on peut utiliser le calcul de l'inverse d'une matrice de Pascal vu avec l'exercice 12.1).

2. Retrouver l'expression de δ_n obtenu à la question précédente en utilisant la formule de Poincaré sur les cardinaux.

3. On se propose de retrouver l'expression de δ_n obtenu à la question 1b en utilisant une relation de récurrence.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\delta_{n+1} = n(\delta_n + \delta_{n-1})$.

(b) En déduire que $\delta_n = n\delta_{n-1} + (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$ et conclure.

4. On se propose de retrouver l'expression de δ_n obtenu à la question 1b en utilisant la série génératrice $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\delta_n}{n!} x^n$ de la suite $\left(\frac{\delta_n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

(a) Montrer que, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta_n}{n!} x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

(b) En déduire que $\delta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

(c) Montrer que $\delta_n = E \left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right)$ pour tout $n \geq 1$, où E est la fonction partie entière.

5. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels non nuls et tout couple d'entiers (k, ℓ) tels que $0 \leq k \leq i$ et $0 \leq \ell \leq j$, on note $S_{i+j, k, \ell}$ le sous-ensemble du groupe symétrique S_{i+j} formé des permutations de I_{i+j} qui ont exactement k points fixes dans $\{1, \dots, i\}$ et ℓ points fixes dans $\{i+1, \dots, i+j\}$.

(a) Avec ces notations, montrer que pour $0 \leq k \leq i$ et $0 \leq \ell \leq j$, on a $\text{card}(S_{i+j, k, \ell}) = \binom{i}{k} \binom{j}{\ell} \delta_{i+j-(k+\ell)}$.

(b) En déduire que, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, on a $(i+j)! = \sum_{k=0}^i \sum_{\ell=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{\ell} \delta_{k+\ell}$.

(c) En désignant par $D_{n+1} = ((\delta_{i+j}))_{0 \leq i, j \leq n}$ la matrice de Hankel associée à la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (voir l'exercice 12.1), montrer que $\det(D_{n+1}) = \left(\prod_{k=0}^n k! \right)^2$.

Solution.

1.

(a) Pour $k = 0$, $S_{n,0}$ est l'ensemble des dérangements et $\text{card}(S_{n,0}) = \delta_n$. Pour $k = n$, $S_{n,n}$ est réduit à $\{Id\}$ et on a convenu que $\delta_0 = 1$. Pour $k = n-1$, $S_{n,n-1}$ est vide puisqu'une permutation qui a $n-1$ points fixes en a obligatoirement n et $\delta_1 = 0$. Pour $n \geq 3$ et k compris entre 1 et $n-2$, en choisissant un ensemble de k points fixes dans I_n , il y a δ_{n-k} dérangements possibles pour les $n-k$ points restants et comme il y a $\binom{n}{k}$

façons de choisir ces k points fixes, on a $\text{card}(S_{n,k}) = \binom{n}{k} \delta_{n-k}$.

(b) Pour $n = 0$ c'est clair vu les conventions $0! = \delta_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, de la partition $S_n = \bigcup_{k=0}^n S_{n,k}$ on déduit que :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \delta_k = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \delta_j$$

En notant $F_{n+1} = (k!)_{0 \leq k \leq n}$, $G_{n+1} = (\delta_k)_{0 \leq k \leq n}$, on a $F_{n+1} = P_{n+1} G_{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ où P_{n+1} est la matrice de Pascal et l'égalité $G_{n+1} = P_{n+1}^{-1} F_{n+1}$ se traduit par $\delta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ (voir l'exercice 12.1).

2. Pour $n \geq 1$ on a $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}_{n,0} = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{E}_{n,k}$, où $\mathcal{E}_{n,k}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{D}_n$ formé des permutations de I_n qui laissent fixe k . Il en résulte que :

$$\begin{aligned} n! - \delta_n &= \text{card}(\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}_{n,0}) = \text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n \mathcal{E}_{n,k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(\mathcal{E}_{n,i_1} \cap \dots \cap \mathcal{E}_{n,i_k}) \end{aligned}$$

avec $\text{card}(\mathcal{E}_{n,i_1} \cap \dots \cap \mathcal{E}_{n,i_k}) = (n-k)!$ ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} n! - \delta_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n-k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! \\ &= -n! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\text{soit, } \delta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3.

(a) Pour $n = 1$, on a $\delta_2 = 1 = \delta_1 + \delta_0$. Pour $n \geq 2$ et toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1,0}$, on a $\sigma(n+1) \neq n+1$, donc $\sigma(n+1) \in I_n$, ce qui nous conduit à la partition $\mathcal{S}_{n+1,0} = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{T}_{n+1,k}$ où $\mathcal{T}_{n+1,k} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1,0} \mid \sigma(n+1) = k\}$ peut être partitionné en $\mathcal{T}_{n+1,k} = \mathcal{T}'_{n+1,k} \cup \mathcal{T}''_{n+1,k}$ où :

$$\mathcal{T}'_{n+1,k} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1,0} \mid \sigma(n+1) = k, \sigma(k) = n+1\}$$

$$\mathcal{T}''_{n+1,k} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1,0} \mid \sigma(n+1) = k, \sigma(k) \neq n+1\}$$

Un élément de $\mathcal{T}'_{n+1,k}$ est donc un dérangement de $I_{n+1} \setminus \{k, n+1\}$, ce qui donne δ_{n-1} possibilités. Pour $\sigma \in \mathcal{T}''_{n+1,k}$, l'application :

$$\begin{aligned} \tau : I_n &\rightarrow I_n \\ i &\mapsto \begin{cases} k & \text{si } \sigma(i) = n+1 \\ \sigma(i) & \text{si } \sigma(i) \neq n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

est un dérangement de I_n et la correspondance $\sigma \mapsto \tau$ réalise une bijection de $\mathcal{T}''_{n+1,k}$ sur $\mathcal{S}_{n,0}$, donc $\text{card}(\mathcal{T}''_{n+1,k}) = \delta_n$. En conclusion, on a :

$$\delta_{n+1} = \sum_{k=1}^n (\text{card}(\mathcal{T}'_{n+1,k}) + \text{card}(\mathcal{T}''_{n+1,k})) = n(\delta_n + \delta_{n-1})$$

- (b) En notant $\gamma_n = \delta_n - n\delta_{n-1}$, on a $\gamma_{n+1} = \delta_{n+1} - (n+1)\delta_n = -\gamma_n$ avec $\gamma_1 = -1$, donc $\gamma_n = (-1)^n$ et $\delta_n = n\delta_{n-1} + (-1)^n$ pour $n \geq 1$, ce qui nous donne $\frac{\delta_n}{n!} = \frac{\delta_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}$ et $\frac{\delta_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

4.

- (a) Comme $0 \leq \frac{\delta_n}{n!} \leq 1$ pour tout $n \geq 0$, la série entière $\sum \frac{\delta_n}{n!} x^n$ est convergente pour $|x| < 1$ et, en notant $f(x)$ la somme de cette série entière, on a :

$$\begin{aligned} f(x)e^x &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\delta_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

- (b) Utilisant à nouveau le produit de Cauchy des séries entières, on en déduit que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta_n}{n!} x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$$

$$\text{et on retrouve } \delta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

- (c) Pour tout entier naturel n , on a $e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{\delta_n}{n!} + R_n$ avec :

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

(majoration du reste d'une série alternée). Il en résulte que, pour $n \geq 2$, on a $\left| \frac{n!}{e} - \delta_n \right| = n! |R_n| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$, donc $-\frac{1}{2} < \frac{n!}{e} - \delta_n < \frac{1}{2}$ et $\delta_n < \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} < \delta_n + 1$, ce qui entraîne que $\delta_n = E\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right)$.

5.

- (a) En choisissant, pour k fixé entre 0 et i et ℓ fixé entre 0 et j , un ensemble de k points fixes dans $\{1, \dots, i\}$ et un ensemble de ℓ points fixes dans $\{i+1, \dots, i+j\}$ il y a $\delta_{i+j-(k+\ell)}$ dérangements possibles pour les $i+j-(k+\ell)$ points restants et comme il y a $\binom{i}{k} \binom{j}{\ell}$ façons de choisir ces points fixes, on a $\text{card}(\mathcal{S}_{i+j,k,\ell}) = \binom{i}{k} \binom{j}{\ell} \delta_{i+j-(k+\ell)}$.

(b) Pour $i = 0$ ou $j = 0$, c'est le résultat de la question 1b. Pour i, j sont non

nuls, de la partition $\mathcal{S}_{i+j} = \bigcup_{k=0}^i \bigcup_{\ell=0}^j \mathcal{S}_{i+j,k,\ell}$ on déduit que :

$$\begin{aligned}(i+j)! &= \sum_{k=0}^i \sum_{\ell=0}^j \text{card}(\mathcal{S}_{i+j,k,\ell}) = \sum_{k=0}^i \sum_{\ell=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{\ell} \delta_{(i-k)+(j-\ell)} \\ &= \sum_{k'=0}^i \sum_{\ell'=0}^j \binom{i}{i-k'} \binom{j}{j-\ell'} \delta_{k'+\ell'} = \sum_{k'=0}^i \sum_{\ell'=0}^j \binom{i}{k'} \binom{j}{\ell'} \delta_{k'+\ell'}\end{aligned}$$

(c) Avec l'exercice 12.1, on vu que les relations précédentes se traduisent par l'égalité matricielle $H_{n+1} = P_{n+1} D_{n+1} {}^t P_{n+1}$, où H_{n+1} est la matrice de Hankel associée à la suite $(k!)_{k \in \mathbb{N}}$, ce qui nous donne $\det(D_{n+1}) = \det(H_{n+1})$. En écrivant que $h_{ij} = (i+j)! = i!j! \binom{i+j}{i}$, on obtient :

$$\det(H_{n+1}) = \left(\prod_{i=0}^n i! \right) \left(\prod_{j=0}^n j! \right) \det(Q_{n+1}) = \left(\prod_{k=0}^n k! \right)^2 \det(Q_{n+1})$$

(la ligne i est multiple de $i!$ et la colonne j est multiple de $j!$), où Q_{n+1} est la matrice de coefficients $q_{ij} = \binom{i+j}{i}$. Toujours avec l'exercice 12.1, on vu

que $Q_{n+1} = P_{n+1} {}^t P_{n+1}$, donc $\det(Q_{n+1}) = 1$ et $\det(D_{n+1}) = \left(\prod_{k=0}^n k! \right)^2$.

Exercice 9.2. Dénombrement des surjections d'un ensemble fini sur un autre

Pour tout couple (p, n) d'entiers naturels non nuls, on désigne par $u_{p,n}$ le nombre d'applications surjectives de l'ensemble $I_p = \{1, \dots, p\}$ sur l'ensemble $I_n = \{1, \dots, n\}$ en convenant que $u_{p,0} = 0$.

1. Montrer que pour $p \geq n \geq 1$, on a $n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_{p,k}$.

2. En utilisant la formule d'inversion de Pascal (exercice 12.1), en déduire que :

$$\forall p \geq n \geq 1, u_{p,n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p \quad (9.1)$$

3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $S_p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_{p,n}}{n!} X^n$ la série génératrice de la suite

$$\left(\frac{u_{p,n}}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}. \text{ Montrer que } S_p(X) e^X = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^p}{n!} X^n \text{ et retrouver (9.1).}$$

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n = n!$
5. Montrer que pour $p \geq n \geq 2$, on a $u_{p,n} = n(u_{p-1,n-1} + u_{p-1,n})$. En déduire les valeurs de $u_{n+1,n}$ et de $u_{n+2,n}$.

Solution.

1. Si φ est une surjection de I_p sur I_n , on a nécessairement $p \geq n$, donc $u_{p,n} = 0$ pour $n > p$. Le nombre d'applications de I_p dans I_n est égal à n^p . Toute application φ de I_p dans I_n est surjective de I_p sur $\text{Im}(\varphi)$ qui est une partie de I_n à k éléments, où k est un entier compris entre 1 et n . Pour k fixé entre 1 et n , il y a $u_{p,k}$ surjections possibles de I_p sur une partie A de I_n à k éléments et comme il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir une telle partie A , cela nous donne $\binom{n}{k} u_{p,k}$ surjections possibles de I_p sur une partie de I_n à k éléments, donc un total de $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u_{p,k}$ applications possibles de I_p dans I_n . Avec la convention $u_{p,0} = 0$, on déduit que $n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_{p,k}$.

2. La formule d'inversion de Pascal nous donne $u_{p,n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p$.

3. On a $\frac{n^p}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{u_{p,k}}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$, ce qui traduit les égalités :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^p}{n!} X^n = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_{p,n}}{n!} X^n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} X^n \right) = S_p(X) e^X$$

et nous donne :

$$\begin{aligned} S_p(X) &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^p}{n!} X^n \right) e^{-X} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^p}{n!} X^n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!} X^n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k^p}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right) \end{aligned}$$

$$\text{soit } u_{p,n} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (-1)^{n-k} k^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p.$$

4. C'est $u_{n,n} = n!$

5. En notant $v_{p,n} = n(u_{p-1,n-1} + u_{p-1,n})$, on a :

$$\begin{aligned} v_{p,n} &= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} k^{p-1} + \sum_{k=0}^n n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^{p-1} \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^{p-1} + \sum_{k=0}^n n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^{p-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p = u_{p,n} \end{aligned}$$

On peut aussi montrer ce résultat en considérant, pour toute surjection de I_p sur I_n , sa restriction à I_{p-1} . On en déduit que :

$$u_{n+1,n} = n(u_{n,n-1} + u_{n,n}) = n(u_{n,n-1} + n!)$$

et par récurrence $u_{n+1,n} = \frac{n}{2}(n+1)!$ De manière analogue, on obtient par récurrence, $u_{n+2,n} = \frac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$

Exercice 9.3. Nombres de Bell

On note, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et on désigne par β_n le nombre de partitions de I_n (nombres de Bell). On convient que $\beta_0 = 1$.

1. Calculer $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k$.

3. Montrer que $\beta_n \leq n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrer que la série entière $\sum \frac{\beta_n}{n!} z^n$ est convergente pour $|z| < 1$. On note $f(z)$ sa somme.

5. Montrer que, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on a $f'(x) = e^x f(x)$, puis que $f(x) = e^{e^x - 1}$.

6. En déduire que $\beta_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$ pour tout entier naturel n .

Solution.

1. On a $I_1 = \{1\}$ et $\beta_1 = 1$, $I_2 = \{1, 2\} = \{1\} \cup \{2\}$ et $\beta_2 = 2$:

$$I_3 = \{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2, 3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 3\} \cup \{2\}$$

et $\beta_3 = 5$.

2. On désigne par E_{n+1} l'ensemble de toutes les partitions de I_{n+1} . On partitionne

E_{n+1} en $E_{n+1} = \bigcup_{k=0}^n E_{n+1,k}$ où $E_{n+1,k}$ est l'ensemble de toutes les partitions

$I_{n+1} = J_1 \cup \dots \cup J_p$ où le sous-ensemble J_p de I_{n+1} contient $n+1$ et est de cardinal $k+1$. Choisir J_p revient à choisir une partie à k éléments dans I_n , ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités et pour J_p choisi, il y a β_{n-k} partitions possibles de $I_{n+1} \setminus J_p$. On a donc $\text{card}(E_{n+1,k}) = \binom{n}{k} \beta_{n-k}$ et :

$$\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_{n-k} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \beta_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \beta_j$$

3. On a $\beta_0 = \beta_1 = 1$, donc le résultat est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n \geq 1$. On a alors :

$$\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k \leq \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} k! = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \leq (n+1) n! = (n+1)!$$

4. Comme $0 \leq \frac{\beta_n}{n!} \leq 1$ pour tout $n \geq 0$, la série entière $\sum \frac{\beta_n}{n!} z^n$ est convergente pour $|z| < 1$, donc son rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1.
5. Pour $|x| < 1$, on a le produit de Cauchy des séries entières :

$$\begin{aligned} f(x) e^x &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\beta_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_n}{(n-1)!} x^{n-1} = f'(x) \end{aligned}$$

6. Il en résulte que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $f(x) = \lambda e^{\int e^x dx} = \lambda e^{e^x}$ avec $f(0) = \beta_0 = 1 = \lambda e$, ce qui nous donne $\lambda = \frac{1}{e}$ et $f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x} = e^{e^x-1}$.
7. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $e^{e^x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!}$. Comme :

$$\sum_{(k,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{(k|x|)^n}{k!n!} = e^{e^{|x|}} < +\infty$$

la série double $\sum_{(k,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{(kx)^n}{k!n!}$ est absolument sommable, donc on peut écrire que

$$e^{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!} \text{ et :}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}$$

$$\text{ce qui nous donne } \beta_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Exercice 9.4. Fonction indicatrice d'Euler et probabilités

Pour tout réel x , on note $[x]$ la partie entière de x et on désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\varphi(n) = \text{card} \{k \in \{1, \dots, n\} \mid k \wedge n = 1\}$$

Soient $n \geq 2$ un entier naturel et $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbb{P})$ l'espace probabilisé où $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$ et $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in \Omega_n$, ce qui revient à considérer l'expérience aléatoire qui consiste à choisir de manière équiprobable un entier compris entre 1 et n . Pour tout diviseur positif d de n , on note A_d l'événement : « le nombre choisi est divisible par d ».

1. Soient $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie de $n \geq 2$ événements. Montrer que $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si, et seulement si, pour tout entier k compris entre 1 et n , les événements $\Omega \setminus A_1, \dots, \Omega \setminus A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

2. Montrer que, pour d entier compris entre 1 et n , on a $\mathbb{P}(A_d) = \frac{1}{n} \left[\frac{n}{d} \right]$.

3. Montrer que si $2 \leq q_1 < \dots < q_r$ sont tous les diviseurs premiers de n , les événements $A_{q_1}, \dots, A_{q_r}$ sont mutuellement indépendants.

4. On désigne par B_1 l'événement : « l'entier k choisi dans Ω_n est premier avec n ». En calculant $\mathbb{P}(B_1)$ de deux manières différentes, montrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{q_k}\right).$$

5. Pour tout diviseur positif d de n , on désigne par B_d l'événement : « l'entier k choisi dans Ω_n est tel que $a \wedge n = d$ ». En calculant $\mathbb{P}(B_d)$, pour tout diviseur positif d de n , montrer que $n = \sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d/n} \varphi(d)$

(la notation d/n signifie que d est un diviseur positif de n).

Solution. On rappelle que des événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits mutuellement indépendants dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si, pour toute partie J non vide

$$\text{de } \{1, 2, \dots, n\}, \text{ on a } \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

1. Il suffit de montrer que si $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants, alors les événements $\Omega \setminus A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants (récurrence finie). Pour ce faire, on note $A'_1 = \Omega \setminus A_1$, $A'_k = A_k$ pour k compris entre 2 et n et on se donne une partie J non vide de $\{1, 2, \dots, n\}$. Si

$$1 \notin J, \text{ on a alors } \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A'_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A'_j). \text{ Si } J \text{ a}$$

plus de 2 éléments et $1 \in J$ (pour $J = \{a\}$, il n'y a rien à montrer), on a alors :

$$\bigcap_{j \in J} A'_j = (\Omega \setminus A_1) \cap \left(\bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j \right) = \bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j \setminus \bigcap_{j \in J} A_j$$

avec $\bigcap_{j \in J} A_j \subset \bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j$, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in J} A'_j \right) &= \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j \right) - \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \\ &= \prod_{j \in J \setminus \{1\}} \mathbb{P}(A_j) - \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A_1)) \prod_{j \in J \setminus \{1\}} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A'_j) \end{aligned}$$

2. Pour d compris entre 1 et n , on a :

$$A_d = \left\{ a \in \Omega_n \mid \exists q \in \left\{ 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil \right\} ; a = qd \right\}$$

donc $\mathbb{P}(A_d) = \frac{\text{card}(A_d)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n} \left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil$. Dans le cas où d est un diviseur de n , on a $\left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil = \frac{n}{d}$ et $\mathbb{P}(A_d) = \frac{1}{d}$.

3. La décomposition en facteurs premiers de n s'écrit $n = \prod_{k=1}^r q_k^{\alpha_k}$, les exposants α_k étant tous non nuls. Soit J une partie non vide de $\{1, 2, \dots, r\}$. Les entiers q_j pour $j \in J$ sont premiers et distincts, donc premiers entre eux et un entier a compris entre 1 et n , est divisible par tous les q_j si, et seulement si, il est divisible par leur produit. On a donc $\bigcap_{j \in J} A_{q_j} = A_{\prod_{j \in J} q_j}$ et :

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in J} A_{q_j} \right) = \mathbb{P}(A_{\prod_{j \in J} q_j}) = \frac{1}{\prod_{j \in J} q_j} = \prod_{j \in J} \frac{1}{q_j} = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_{q_j})$$

(l'entier $\prod_{j \in J} q_j$ est un diviseur de n). Les événements $A_{q_1}, \dots, A_{q_r}$ sont donc mutuellement indépendants.

4. On a $\mathbb{P}(B_1) = \frac{\text{card}(B_1)}{\text{card}(\Omega_n)} = \frac{\varphi(n)}{n}$. D'autre part, un entier est dans B_1 si, et seulement si, il n'est divisible par aucun des q_k , donc $B_1 = \bigcap_{k=1}^r (\Omega_n \setminus A_{q_k})$. Les événements $A_{q_1}, \dots, A_{q_r}$ étant mutuellement indépendants, il en est de même des événements $\Omega_n \setminus A_{q_1}, \dots, \Omega_n \setminus A_{q_r}$, donc :

$$\mathbb{P}(B_1) = \prod_{k=1}^r \mathbb{P}(\Omega_n \setminus A_{q_k}) = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{q_k} \right)$$

$$\text{et } \varphi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{q_k}\right) = \prod_{k=1}^r q_k^{\alpha_k-1} (q_k - 1).$$

5. On a la partition $\Omega_n = \bigcup_{d|n} B_d$ (les B_d forment un système complet d'événements), donc $1 = \mathbb{P}(\Omega_n) = \sum_{d|n} \mathbb{P}(B_d)$. Si d est un diviseur d de n , il existe alors un entier $q \geq 1$ tel que $n = qd$ et :

$$(k \in B_d) \Leftrightarrow \left(k = q_1 d \text{ où } 1 \leq q_1 = \frac{k}{d} \leq \frac{n}{d} = q \text{ et } q_1 \wedge q = 1\right)$$

donc $\text{card}(B_d) = \text{card}\{q_1 \in \{1, \dots, q\} \mid q_1 \wedge q = 1\} = \varphi(q) = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$, ce qui nous donne $\mathbb{P}(B_d) = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ et les égalités $n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d)$ (l'application $d \mapsto \frac{n}{d}$ est une permutation de l'ensemble des diviseurs positifs de n).

Exercice 9.5: Un théorème de Cesàro

Pour tout entier $n \geq 2$, on se place sur l'espace probabilisé $(\Omega_n^2, \mathcal{P}(\Omega_n^2), \mathbb{P})$ où $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$, avec la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie par $\mathbb{P}(\{(a, b)\}) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $(a, b) \in \Omega_n^2$, et on s'intéresse à l'événement :

$$C_n = \{(a, b) \in \Omega_n^2 \mid a \wedge b = 1\}$$

Précisément, on se propose de calculer $\mathbb{P}(C_n)$ de deux manières différentes, puis de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \frac{6}{\pi^2}$.

En notant $m = \prod_{i=1}^r q_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers d'un entier $m \geq 2$ où $r \geq 1$, les q_i étant premiers deux à deux distincts et les α_i entiers naturels non nuls, on définit la fonction μ de Möbius par :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \mu(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ (-1)^r & \text{si } m = \prod_{i=1}^r q_i \text{ (} m \text{ est sans facteur carré)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout réel x , on note $[x]$ la partie réelle de x .

1. En notant φ la fonction indicatrice d'Euler, montrer que :

$$\forall n \geq 2, \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{n^2} \left(2 \sum_{k=1}^n \varphi(k) - 1 \right)$$

2. Pour $n \geq 2$, on note $q_1 < q_2 < \dots < q_r$ tous les nombres premiers compris entre 1 et n et pour tout entier k compris entre 1 et r , on note :

$$D_k = \{(a, b) \in \Omega_n^2 \mid q_k \text{ divise } a \text{ et } b\}$$

(a) Montrer que $\mathbb{P}(C_n) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^r D_k\right)$.

- (b) Montrer que pour $1 \leq k \leq r$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$, on a :

$$\mathbb{P}(D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_k}) = \frac{1}{n^2} \left[\frac{n}{q_{i_1} \dots q_{i_k}} \right]^2$$

(c) En déduire que $\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right]^2$.

3. Montrer que pour tout $\forall n \geq 2$, on a $\sum_{d/n} \mu(d) = 0$.

4. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \varphi(k) = \frac{1}{2} \left(\sum_{d=1}^n \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right]^2 + 1 \right)$$

$$\text{et } \varphi(n) = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

5. Justifier la convergence de la série numérique $\sum \frac{\mu(n)}{n^2}$, puis montrer

$$\text{que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}.$$

6. Le produit de convolution (ou le produit de Dirichlet) de deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{d/n} u_d v_{\frac{n}{d}}$$

- (a) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites à valeurs réelles positives et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ leur produit de convolution. Montrer si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, il en est alors de même de la série $\sum w_n$

$$\text{et on a } \sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \right).$$

- (b) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites à valeurs réelles et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ leur produit de convolution. Montrer si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, il en est alors de même de

$$\text{la série } \sum w_n \text{ et on a } \sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \right).$$

7. Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$, on a $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^\alpha}\right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1$, puis

en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \frac{6}{\pi^2}$.

De manière analogue, en désignant par $\mathbb{P}(C_{n,r})$ la probabilité que $r \geq 2$ entiers compris entre 1 et n soient premiers entre eux, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{n,r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^r} = \frac{1}{\zeta(r)}$$

Solution.

1. En notant $C_n^+ = \{(a, b) \in A_n \mid a < b\}$ et $C_n^- = \{(a, b) \in A_n \mid a > b\}$, on a la partition $C_n = \{(1, 1)\} \cup C_n^+ \cup C_n^-$ et :

$$\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) + \mathbb{P}(C_n^+) + \mathbb{P}(C_n^-) = \frac{1}{n^2} (1 + 2 \text{card}(C_n^+))$$

(par symétrie, on a $\text{card}(C_n^-) = \text{card}(C_n^+)$). Avec la partition $C_n^+ = \bigcup_{b=2}^n C_n^+(b)$

où $C_n^+(b) = \{(a, b) \in \Omega_n^2 \mid 1 \leq a \leq b-1 \text{ et } a \wedge b = 1\}$, on a :

$$\text{card}(C_n^+(b)) = \text{card}\{a \in \{1, \dots, b-1\} \mid a \wedge b = 1\} = \varphi(b)$$

et $\text{card}(C_n^+) = \sum_{b=2}^n \varphi(b)$, ce qui nous donne :

$$\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{n^2} \left(1 + 2 \sum_{b=2}^n \varphi(b)\right) = \frac{1}{n^2} \left(2 \sum_{k=1}^n \varphi(k) - 1\right)$$

2.

(a) On a :

$$((a, b) \in \Omega_n^2 \setminus C_n) \Leftrightarrow (a \wedge b \geq 2) \Leftrightarrow (\exists k \in \{1, \dots, r\} \mid q_k \text{ divise } a \text{ et } b)$$

$$\text{donc } \Omega_n^2 \setminus C_n = \bigcup_{k=1}^r D_k \text{ et } 1 - \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^r D_k\right).$$

(b) Pour $1 \leq k \leq r$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$, on a :

$$\begin{aligned} ((a, b) \in D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_k}) &\Leftrightarrow (a \text{ et } b \text{ sont multiples communs de } q_{i_1}, \dots, q_{i_k}) \\ &\Leftrightarrow (a \text{ et } b \text{ sont multiples communs de } q_{i_1} \cdots q_{i_k}) \end{aligned}$$

(les q_k sont premiers) et on a vu avec l'exercice 9.4 qu'il y a $\left\lfloor \frac{n}{q_{i_1} \cdots q_{i_r}} \right\rfloor$ entiers compris entre 1 et n multiples de $q_{i_1} \cdots q_{i_r}$, donc :

$$\text{card}(D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_k}) = \left\lfloor \frac{n}{q_{i_1} \cdots q_{i_r}} \right\rfloor^2$$

$$\text{et } \mathbb{P}(D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_k}) = \frac{1}{n^2} \left[\frac{n}{q_{i_1} \dots q_{i_r}} \right]^2.$$

(c) En utilisant la formule de Poincaré (ou du crible), on a :

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(C_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^r D_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_k}) \\ &= -\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left[\frac{n}{q_{i_1} \dots q_{i_r}} \right]^2 \\ &= -\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mu(q_{i_1} \dots q_{i_r}) \left[\frac{n}{q_{i_1} \dots q_{i_r}} \right]^2 \end{aligned}$$

Tout entier d compris entre 2 et n s'écrit $d = q_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots q_{i_r}^{\alpha_{i_r}}$ où $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, les exposants α_{i_j} étant positifs non nuls et on a $\mu(d) = 0$ si l'un des α_{i_j} est supérieur ou égal à 2 (i.e. si d a un facteur carré), donc la somme précédente s'écrit aussi :

$$1 - \mathbb{P}(C_n) = -\frac{1}{n^2} \sum_{d=2}^n \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right]^2$$

$$\text{ce qui nous donne } \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right]^2.$$

3. Si $n = \prod_{i=1}^r q_i^{\alpha_i}$ est la décomposition en facteurs premiers de l'entier $n \geq 2$, tous

les diviseurs de n sont alors de la forme $d = \prod_{i=1}^r q_i^{\beta_i}$ avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $\mu(d) = 0$ si l'un des β_i est supérieur ou égal à 2. Ce qui nous donne

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_r) \in \{0,1\}^r} \mu\left(\prod_{i=1}^r q_i^{\beta_i}\right).$$

Pour k compris entre 0 et r , il y a $\binom{r}{k}$ façons de choisir un r -uplet $(\beta_1, \dots, \beta_r)$ formé de k termes égaux à 1 et $r-k$ termes égaux à 0 et pour chacun de ces choix, on a $\mu\left(\prod_{i=1}^r q_i^{\beta_i}\right) = (-1)^k$, donc :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k = (1-1)^r = 0$$

4. Pour $n = 1$, on a par conventions $\varphi(1) = \mu(1) = 1$ et il n'y a rien à prouver. Pour $n \geq 2$, des égalités :

$$\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{n^2} \left(2 \sum_{k=1}^n \varphi(k) - 1 \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right]^2$$

on déduit que $\sum_{k=1}^n \varphi(k) = \frac{1}{2} \left(\sum_{d=1}^n \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right]^2 + 1 \right)$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \sum_{k=1}^n \varphi(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(k) = \frac{1}{2} \left(\sum_{d=1}^n \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right]^2 - \sum_{d=1}^{n-1} \mu(d) \left[\frac{n-1}{d} \right]^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{d=1}^{n-1} \mu(d) \left(\left[\frac{n}{d} \right]^2 - \left[\frac{n-1}{d} \right]^2 \right) + \mu(n) \right) \end{aligned}$$

Pour $d \in \{1, \dots, n-1\}$ divisant n , on a $n = qd$ avec $q = \frac{n}{d} \in \{2, \dots, n\}$, donc $\left[\frac{n}{d} \right] = q$, $\left[\frac{n-1}{d} \right] = \left[q - \frac{1}{d} \right] = q-1$ et :

$$\left[\frac{n}{d} \right]^2 - \left[\frac{n-1}{d} \right]^2 = q^2 - (q-1)^2 = 2q-1 = 2\frac{n}{d} - 1$$

Pour $d \in \{2, \dots, n-1\}$ ne divisant pas n , on a $n = qd + r$ avec $q = \left[\frac{n}{d} \right] \in \{1, \dots, n-1\}$ et $r \in \{1, \dots, d-1\}$, donc $\left[\frac{n-1}{d} \right] = \left[q + \frac{r-1}{d} \right] = q$ (on a $0 \leq \frac{r-1}{d} \leq \frac{d-2}{d} < 1$) et $\left[\frac{n}{d} \right]^2 - \left[\frac{n-1}{d} \right]^2 = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{1 \leq d \leq n-1 \\ d/n}} \mu(d) \left(2\frac{n}{d} - 1 \right) + \mu(n) \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d/n}} \mu(d) \left(2\frac{n}{d} - 1 \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d/n}} \mu(d) \frac{n}{d} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d/n}} \mu(d) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d/n}} \mu(d) \frac{n}{d} \end{aligned}$$

Ce résultat peut aussi se montrer en utilisant un théorème d'inversion de Möbius qui nous dit que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u(n) = \sum_{d/n} v(d)$$

on a alors $v(n) = \sum_{d/n} \mu(d) u\left(\frac{n}{d}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Des relations $n = \sum_{d/n} \varphi(d)$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $\varphi(n) = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{n}{d}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\mu(n) \in \{-1, 0, 1\}$, donc $\left| \frac{\mu(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et en

conséquence la série $\sum \frac{\mu(n)}{n^2}$ est absolument convergente. Pour tout entier

$n \geq 1$, on a $\varepsilon_n = \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k^2} - \mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mu(k) \left(\left(\frac{n}{k} \right)^2 - \left[\frac{n}{k} \right]^2 \right)$ avec, pour

tout k compris entre 1 et n , $\left[\frac{n}{k}\right] \leq \frac{n}{k} < \left[\frac{n}{k}\right] + 1$, soit $0 \leq \frac{n}{k} - 1 < \left[\frac{n}{k}\right] \leq \frac{n}{k}$, donc $\left(\frac{n}{k} - 1\right)^2 < \left[\frac{n}{k}\right]^2 \leq \left(\frac{n}{k}\right)^2$ et :

$$0 \leq \left(\frac{n}{k}\right)^2 - \left[\frac{n}{k}\right]^2 < \left(\frac{n}{k}\right)^2 - \left(\frac{n}{k} - 1\right)^2 = 2\frac{n}{k} - 1$$

Ce qui nous donne $|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{n}{k}\right)^2 - \left[\frac{n}{k}\right]^2 \right) < \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$ sachant que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$, donc la

suite $(\mathbb{P}(C_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}$.

6. En notant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, U_n, V_n, W_n les sommes partielles des séries $\sum u_n, \sum v_n$ et $\sum w_n$, on a $U_n V_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i v_j = \sum_{(i, j) \in \Omega_n^2} u_i v_j$ et :

$$W_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i/k}} u_i v_{\frac{k}{i}} = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ ij \leq n}} u_i v_j = \sum_{(i, j) \in \Delta_n} u_i v_j$$

en notant $\Delta_n = \{(i, j) \in \Omega_n^2 \mid ij \leq n\}$.

- (a) Comme $\Delta_n \subset \Omega_n^2 \subset \Delta_{n^2}$ et les séries considérées sont à termes positifs, on a $W_n \leq U_n V_n \leq W_{n^2}$. De la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on déduit que la suite croissante $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, donc convergente. Faisant tendre n vers l'infini dans l'encadrement précédent, on aboutit à $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \right)$.

- (b) Dans le cas général, des inégalités $|w_n| \leq \sum_{d|n} |u_d| |v_{\frac{n}{d}}| = t_n$, la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant le produit de convolution des suites positives convergentes $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(|v_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on déduit que la série $\sum w_n$ est absolument convergente. Puis avec :

$$\begin{aligned} |U_n V_n - W_n| &= \left| \sum_{(i, j) \in \Omega_n^2} u_i v_j - \sum_{(i, j) \in \Delta_n} u_i v_j \right| = \left| \sum_{(i, j) \in \Omega_n^2 \setminus \Delta_n} u_i v_j \right| \\ &\leq \sum_{(i, j) \in \Omega_n^2 \setminus \Delta_n} |u_i| |v_j| = U'_n V'_n - T_n \end{aligned}$$

où U'_n, V'_n, T_n sont les sommes partielles des séries $\sum |u_n|, \sum |v_n|, \sum t_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U'_n V'_n - T_n) = 0$ puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} t_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |v_n| \right)$, on

déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n V_n - W_n) = 0$, ce qui signifie que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \right)$$

(c) Les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\mu(n)}{n^\alpha}$ étant absolument convergentes, on a :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$$

où $w_1 = \mu(1) = 1$ et $w_n = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d^\alpha} \left(\frac{d}{n} \right)^\alpha = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{d/n} \mu(d) = 0$ pour $n \geq 2$,

ce qui nous donne $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \right) = 1$, soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$. En

particulier, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$.

Exercice 9.6. Fonction ζ de Riemann et probabilités

On se fixe un réel $s > 1$ et on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}_s)$, où $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$ pour tout $n \in \Omega$, en

désignant par ζ la fonction de Riemann définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ ($\mathbb{P}_s$ est la loi dzéta de paramètre s). Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'ensemble de tous les multiples strictement positifs de n .

1. Calculer $\mathbb{P}_s(A_n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, montrer que la famille $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est indépendante, c'est-à-dire que pour toute suite finie $(p_k)_{1 \leq k \leq r}$ de nombres premiers distincts, les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3. En déduire que $\mathbb{P}_s(\{1\}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$, puis l'identité d'Euler :

$$\forall s > 1, \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Solution.

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}_s(A_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}_s(\{k \cdot n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^s}$.

2. Pour $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ dans $\mathcal{P}$, comme les p_k sont premiers entre eux, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_s \left(\bigcap_{k=1}^r A_{p_k} \right) &= \mathbb{P}_s \{ \text{multiples de } p_1, p_2, \dots, p_r \} \\ &= \mathbb{P}_s \left\{ \text{multiples de } \prod_{k=1}^r p_k \right\} = \mathbb{P} \left(A_{\prod_{k=1}^r p_k} \right) \\ &= \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^r p_k \right)^s} = \prod_{k=1}^r \frac{1}{p_k^s} = \prod_{k=1}^r \mathbb{P}_s (A_{p_k})\end{aligned}$$

et les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3. Comme 1 n'est divisible par aucun nombre premier, on a $\{1\} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} (\Omega \setminus A_p)$ et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_s (\{1\}) &= \mathbb{P}_s \left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} (\Omega \setminus A_p) \right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{P}_s (\Omega \setminus A_p) \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \mathbb{P}_s (A_p)) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}_s (\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$, il en résulte que $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$.

Exercice 9.7. L'aiguille de Buffon

On s'intéresse au problème de l'aiguille de Buffon : sur un plan, on trace des droites parallèles distantes de $h > 0$ et on lance une aiguille de longueur $\ell > 0$; quelle est la probabilité pour que cette aiguille rencontre l'une des droites du réseau ?

Pour l'étude de ce problème, on désigne par X la variable aléatoire égale à la distance du milieu O de l'aiguille à la droite $\mathcal{D}$ la plus proche du réseau et θ la variable aléatoire égale à l'angle géométrique que fait l'aiguille avec la droite passant par O et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ (figure 9.1).

On suppose que X suit une loi uniforme sur $\left[0, \frac{h}{2}\right]$, que θ suit une loi uniforme sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et que X et θ sont indépendantes.

On note A l'événement : « l'aiguille coupe une des droites du réseau » et N la variable aléatoire égale au nombre de points d'intersection de l'aiguille avec le réseau de droites.

1. Dans le cas où $\ell \in]0, h[$, montrer que $\mathbb{P}(A) = \frac{2\ell}{\pi h}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(A)$ dans le cas où $\ell \in [h, 2h[$.
3. Calculer l'espérance de N dans les deux cas précédents.

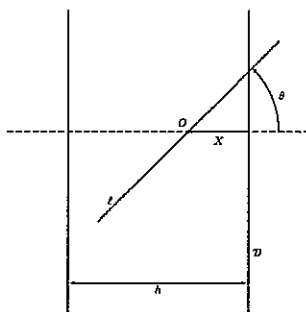


FIGURE 9.1 –

Solution.

1. Pour $0 < \ell < h$ le nombre N de points d'intersection de l'aiguille avec le réseau de droites est 0 ou 1. Dire que l'aiguille coupe une droite revient à dire que $X \leq \frac{\ell}{2} \cos(\theta)$, donc $\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(E)}{\mu(R)}$, où R est le rectangle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{h}{2}]$ et $E = \left\{ (x, t) \in R, x \leq \frac{\ell}{2} \cos(t) \right\}$ (comme les variables aléatoires X et θ sont indépendantes, le couple (X, θ) suit une loi uniforme sur R).

On a $\mu(R) = \pi \frac{h}{2}$ et $\mu(E) = \frac{\ell}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \ell$ (figure 9.2), ce qui nous donne

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2\ell}{\pi h}.$$

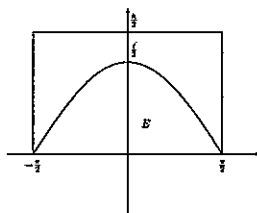


FIGURE 9.2 –

2. Pour $h \leq \ell < 2h$ le nombre N de points d'intersection de l'aiguille avec le réseau de droites est 0, 1 ou 2. Dire que l'aiguille coupe une droite revient à dire que $X \leq \frac{\ell}{2} \cos(\theta)$ et $X + \frac{\ell}{2} \cos(\theta) \geq h$ (pour 2 points d'intersection) ou $X \leq \frac{\ell}{2} \cos(\theta)$ et $X + \frac{\ell}{2} \cos(\theta) < h$ (pour 1 point d'intersection) donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(E_1) + \mu(E_2)}{\mu(R)} \text{ où :}$$

$$E_1 = \left\{ (x, t) \in R, h - \frac{\ell}{2} \cos(t) \leq x \leq \frac{\ell}{2} \cos(t) \right\}$$

$$E_2 = \left\{ (x, t) \in R, x \leq \frac{\ell}{2} \cos(t) \text{ et } x < h - \frac{\ell}{2} \cos(t) \right\}$$

Par symétrie (figure 9.3), on a :

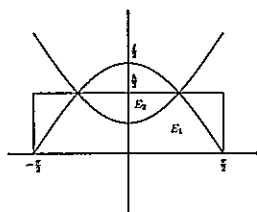


FIGURE 9.3 -

$$\begin{aligned} \mu(E_1) + \mu(E_2) &= 2 \left(\frac{h}{2} \theta_0 + \frac{\ell}{2} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt \right) = 2 \left(\frac{h}{2} \theta_0 + \frac{\ell}{2} (1 - \sin(\theta_0)) \right) \\ &= h\theta_0 + \ell(1 - \sin(\theta_0)) \end{aligned}$$

où $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ est défini par $h - \frac{\ell}{2} \cos(\theta_0) = \frac{\ell}{2} \cos(\theta_0)$, donc $\cos(\theta_0) = \frac{h}{\ell}$ et $\sin(\theta_0) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta_0)} = \frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{\ell}$, ce qui nous donne :

$$\mathbb{P}(A) = 2 \frac{h\theta_0 + \ell(1 - \sin(\theta_0))}{\pi h} = 2 \frac{h\theta_0 + \ell - \sqrt{\ell^2 - h^2}}{\pi h}$$

Pour $h = \ell$, on a $\theta_0 = 0$ et on retrouve $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{\pi}$.

3. Pour $0 < \ell < h$, on a $\mathbb{E}(N) = \mathbb{P}(A) = \frac{2\ell}{\pi h}$ et pour $h \leq \ell < 2h$, on a :

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{P}(N=1) + 2\mathbb{P}(N=2) = \frac{\mu(E_2) + 2\mu(E_1)}{\mu(R)}$$

avec $\mu(E_2) + 2\mu(E_1) = \mu(E)$ par symétrie, donc on a encore $\mathbb{E}(N) = \frac{2\ell}{\pi h}$.

Exercice 9.8: Marché aléatoire sur une droite

On considère une particule qui se déplace sur un axe gradué $(O, \vec{e})$. À l'instant $k = 0$ elle est au point d'abscisse $j = 0$ et si à un instant donné $k \in \mathbb{N}$, elle est au point d'abscisse $j \in \mathbb{Z}$, elle sera alors à l'instant $k + 1$ sur le point d'abscisse $j + 1$ avec la probabilité p ou sur le point d'abscisse $j - 1$ avec la probabilité $1 - p$, chaque déplacement étant indépendant du précédent.

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire X_n égale à l'abscisse de la position de la particule à l'instant n .
2. Calculer, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la probabilité que la particule soit à l'origine à l'instant m .
3. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(X_{2n} = 0)$ pour n tendant vers $+\infty$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par Z_n la variable aléatoire égale au nombre de passages par l'origine de la particule entre les instants 1 et $2n$.

(a) Calculer l'espérance $E_n = \mathbb{E}(Z_n)$ de la variable aléatoire Z_n .

(b) Montrer que, pour tout $p \in]0, 1[\setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p(1-p)}}$.

(c) On suppose que $p = \frac{1}{2}$ (marche aléatoire symétrique). Montrer que $\mathbb{E}(Z_n) + 1 = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donner un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ pour n tendant vers $+\infty$.

5. On suppose maintenant que, si à un instant donné $k \in \mathbb{N}$, la particule est au point d'abscisse $j \in \mathbb{N}$, elle sera alors à l'instant $k + 1$ sur le point d'abscisse $j + 1$ avec la probabilité $\frac{j+1}{j+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{j+2}$.

(a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ avec :

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{j}{j+1} \mathbb{P}(X_{n-1} = j-1) \quad (1 \leq j \leq n)$$

(b) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et j compris entre 0 et n , on a $\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{j+1} \mathbb{P}(X_{n-j} = 0)$.

(c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{i=0}^n \frac{\mathbb{P}(X_i = 0)}{n-i+1} = 1$.

(d) Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ pour $n = 0, 1, 2, 3$.

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = 0)$, puis en déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j = 0)$.

(f) Montrer que $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X_j = 0)}{n-j} = 1$ puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X_j = 0)}{(n-j)(n-j+1)}$.

(g) En déduire que $\mathbb{P}(X_n = 0) \geq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$.

Solution. On désigne, pour tout entier relatif j , par D_j la variable aléatoire égale à 1 si le déplacement de la particule qui est au point d'abscisse j se fait en $j+1$ et à -1 s'il se fait en $j-1$.

1. Les variables aléatoires D_j , pour $j \in \mathbb{Z}$, sont indépendantes et suivent toutes la même loi à valeurs dans $\{-1, 1\}$ définie par :

$$\mathbb{P}(D_j = 1) = p, \mathbb{P}(D_j = -1) = 1 - p$$

Les variables aléatoires $B_j = \frac{D_j + 1}{2}$ suivent alors une même loi de Bernoulli de paramètre p :

$$\mathbb{P}(B_j = 1) = \mathbb{P}(D_j = 1) = p, \mathbb{P}(B_j = 0) = \mathbb{P}(D_j = -1) = 1 - p$$

Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n est à valeurs dans $\{-n, \dots, 0, \dots, n\}$ et elle peut s'écrire $X_n = \sum_{j=1}^n D_j = 2 \sum_{j=1}^n B_j - n = 2Y_n - n$, la variable aléatoire Y_n suivant une loi binomiale de paramètres n et p , ce qui nous donne pour j compris entre $-n$ et n :

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{n+j}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n+j = 2m+1 \\ \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} & \text{si } n+j = 2m \end{cases}$$

2. La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X_m = 0)$, soit :

$$\mathbb{P}(X_m = 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 2n+1 \\ \binom{2n}{n} (p(1-p))^n & \text{si } m = 2n \end{cases}$$

3. En utilisant la formule de Stirling $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ (exercice 2.3), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{2n} = 0) &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} (p(1-p))^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{2\pi n \cdot n^{2n} e^{-2n}} (p(1-p))^n \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

4.

- (a) En désignant, pour tout entier $k \geq 1$ par O_{2k} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2k$ et 0 sinon, on a $Z_n = \sum_{k=1}^n O_{2k}$, chaque variable aléatoire O_{2k} suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p_k = \binom{2k}{k} (p(1-p))^k$, ce qui nous donne :

$$E_n = \mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(O_{2k}) = \sum_{k=1}^n \binom{2k}{k} (p(1-p))^k$$

(linéarité de l'espérance).

- (b) On rappelle que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a le développement en série entière, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n$.

Pour tout $p \in]0, 1[\setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, on a $p(1-p) \in \left] 0, \frac{1}{4} \right[$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} (4p(1-p))^k = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$$

(c)

- i. Pour $p = \frac{1}{2}$, on a $F_n = 1 + \mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}$.

$$\text{Pour } n = 1, \text{ on a } F_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{2^2} \binom{2}{1}.$$

Supposant que $F_n = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} = F_n + \frac{1}{2(n+1)} \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \left(1 + \frac{1}{2(n+1)} \right) = \frac{2n+1}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \frac{2n+3}{n+1} \\ &= \frac{2n+3}{2^{2(n+1)}} \binom{2(n+1)}{n+1} \end{aligned}$$

- ii. Utilisant la formule de Stirling (exercice 2.3), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) + 1 &= \frac{2n+1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n+1}{2^{2n}} \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{2\pi n \cdot n^{2n} e^{-2n}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$$\text{et } \mathbb{E}(Z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

5.

(a) Pour $n = 1$, X_1 est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et on a :

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

donc X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.Supposons que, pour $n \geq 2$, X_{n-1} soit à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Comme la particule se déplace en 0 ou $j+1$ avec j compris entre 0 et $n-1$, X_n est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$ et on a pour j compris entre 1 et n :

$$(X_n = j) = \bigcup_{i=0}^{n-1} ((X_{n-1} = i) \cap (X_n = j))$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}((X_{n-1} = i) \cap (X_n = j)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = i) \mathbb{P}((X_n = j) \mid (X_{n-1} = i)) \end{aligned}$$

avec :

$$\mathbb{P}((X_n = j) \mid (X_{n-1} = i)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i \neq j-1 \leq n-1 \\ \frac{j}{j+1} & \text{si } i = j-1 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_{n-1} = j-1) \frac{j}{j+1} \quad (1 \leq j \leq n)$$

(b) Par récurrence descendante sur j , on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = j) &= \mathbb{P}(X_{n-1} = j-1) \frac{j}{j+1} = \mathbb{P}(X_{n-j} = 0) \frac{1}{2} \frac{2}{3} \dots \frac{j-1}{j} \frac{j}{j+1} \\ &= \mathbb{P}(X_{n-j} = 0) \frac{1}{j+1} \quad (1 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

ce qui est aussi valable pour $j = 0$.

$$\text{Pour } j = n, \text{ cela donne } \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n+1} \mathbb{P}(X_0 = 0) = \frac{1}{n+1}.$$

$$(c) \text{ On a } 1 = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X_{n-j} = 0) \frac{1}{j+1} = \sum_{i=0}^n \frac{\mathbb{P}(X_i = 0)}{n-i+1}.$$

$$(d) \text{ On a } \mathbb{P}(X_0 = 0) = 1, \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Pour $n = 2$, de $\sum_{i=0}^2 \frac{\mathbb{P}(X_i = 0)}{3-i} = 1$, on déduit que $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{5}{12}$. Pour

$$n = 3, \text{ de } \sum_{i=0}^3 \frac{\mathbb{P}(X_i = 0)}{4-i} = 1, \text{ on déduit que } \mathbb{P}(X_3 = 0) = \frac{3}{8}.$$

- (e) L'égalité $\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{j}{j+1} \mathbb{P}(X_{n-1} = j-1)$ pour j compris entre 1 et n peut s'écrire :

$$\begin{aligned} j\mathbb{P}(X_n = j) &= j\mathbb{P}(X_{n-1} = j-1) - \mathbb{P}(X_n = j) \\ &= (j-1)\mathbb{P}(X_{n-1} = j-1) + \mathbb{P}(X_{n-1} = j-1) - \mathbb{P}(X_n = j) \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \sum_{j=1}^n j\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{j=1}^n (j-1)\mathbb{P}(X_{n-1} = j-1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_{n-1} = j-1) - \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_n = j) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} i\mathbb{P}(X_{n-1} = i) + 1 - (1 - \mathbb{P}(X_n = 0)) \\ &= \mathbb{E}(X_{n-1}) + \mathbb{P}(X_n = 0) \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_0) = \sum_{j=1}^n (\mathbb{E}(X_j) - \mathbb{E}(X_{j-1})) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j = 0)$$

- (f) L'égalité $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X_j = 0)}{(n-1)-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X_j = 0)}{n-j} = 1$ nous donne :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X_j = 0)}{(n-j)(n-j+1)} &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n-j} - \frac{1}{n-j+1} \right) \mathbb{P}(X_j = 0) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X_j = 0)}{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X_j = 0)}{n-j+1} \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_n = 0)) = \mathbb{P}(X_n = 0) \end{aligned}$$

- (g) Il en résulte que :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X_j = 0)}{(n-j)(n-j+1)} \geq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(X_j = 0)}{n-j} = \frac{1}{n+1}$$

donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_{n-1})) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = +\infty$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$ puisque la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de même nature que la série $\sum (\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_{n-1}))$.

Exercice 9.9. Preuve probabiliste du théorème de Weierstrass

On se donne deux réels $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose de plus que, pour tout réel $x \in [a, b]$, on dispose d'une suite $(X_{n,x})_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, toutes de carrées intégrables telles que $\mathbb{E}(X_{n,x}) = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on associe à ces suites de variables aléatoires les suites de fonctions $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], E_n(x) = \mathbb{E}(f(X_{n,x})), V_n(x) = \mathbb{V}(X_{n,x})$$

1. Montrer que si la suite de fonctions $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[a, b]$, alors la suite de fonctions $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
2. Pour cette question, $[a, b] = [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in [0, 1]$, $X_{n,x} = \frac{B_{n,x}}{n}$ où $B_{n,x}$ est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, x) . Donner une expression de $E_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in [0, 1]$ et en déduire que la fonction f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[0, 1]$ (théorème de Weierstrass).
3. On se donne un réel $a > 0$ et une fonction continue $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x) = f(a)$ pour tout $x > a$. On lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, a], u_n(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in [0, a]$, on pose $X_{n,x} = \frac{B_{n,x}}{n}$ où $B_{n,x}$ est une variable aléatoire suivant une de Poisson de paramètre nx .

- (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est bien définie et continue sur $[0, a]$.
- (b) Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

Solution. On note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

1. Comme f est continue sur le compact $[a, b]$, elle y est uniformément continue, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta \in]0, 1[$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour x, y dans $[a, b]$ tels que $|x - y| < \eta$. En notant, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, b]$ fixés, $X_{n,x}(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ et $p_i = \mathbb{P}(X_{n,x} = x_i)$ pour tout $i \in I$, on a $\sum_{i \in I} p_i = 1$ et le théorème de transfert nous dit que :

$$E_n(x) - f(x) = \mathbb{E}(f(X_{n,x})) - f(x) = \sum_{i \in I} (f(x_i) - f(x)) p_i$$

donc :

$$\begin{aligned}
 |E_n(x) - f(x)| &\leq \sum_{\substack{i \in I \\ |x_i - x| < \eta}} |f(x_i) - f(x)| p_i + \sum_{\substack{i \in I \\ |x_i - x| \geq \eta}} |f(x_i) - f(x)| p_i \\
 &\leq \varepsilon \sum_{\substack{i \in I \\ |x_i - x| < \eta}} p_i + 2 \|f\|_\infty \sum_{\substack{i \in I \\ |x_i - x| \geq \eta}} p_i \\
 &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \mathbb{P}(|X_{n,x} - x| \geq \eta) \\
 &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \mathbb{P}(|X_{n,x} - \mathbb{E}(X_{n,x})| \geq \eta) \\
 &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \frac{\mathbb{V}(X_{n,x})}{\eta^2} = \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \frac{V_n(x)}{\eta^2}
 \end{aligned}$$

(inégalité de Bienaymé-Tchebychev) et avec la convergence uniforme vers 0 de $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on déduit qu'il existe un entier n_0 tel que $|E_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_0$ et tout réel $x \in [a, b]$, ce qui prouve la convergence uniforme de $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur $[a, b]$.

2. Le théorème de transfert nous dit que l'espérance de $f(X_{n,x})$ est :

$$\begin{aligned}
 E_n(x) &= \mathbb{E}(f(X_{n,x})) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(B_{n,x} = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
 \end{aligned}$$

(polynôme de Bernstein d'indice n associé à f). Avec $\mathbb{E}(X_{n,x}) = \frac{\mathbb{E}(B_{n,x})}{n} = x$, $V_n(x) = \frac{\mathbb{V}(B_{n,x})}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}$ et $\|V_n\|_\infty = \frac{1}{4n}$, on déduit de la question précédente que la suite de fonctions polynomiales $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

3.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, a]$, on a $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k \right| \leq \|f\|_\infty \frac{(na)^k}{k!}$ avec $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(na)^k}{k!} = e^{na}$, donc la série de terme général $f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k$ est uniformément convergente et la fonction u_n est bien définie et continue sur $[0, a]$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{E}(X_{n,x}) = \frac{\mathbb{E}(B_{n,x})}{n} = x$, $V_n(x) = \frac{\mathbb{V}(B_{n,x})}{n^2} = \frac{x}{n}$ et $\|V_n\|_\infty = \frac{a}{n}$, donc la suite de fonctions $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$, le théorème de transfert nous disant que :

$$\begin{aligned}
 E_n(x) &= \mathbb{E}(f(X_{n,x})) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(B_{n,x} = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nx} \frac{n^k}{k!} x^k = u_n(x)
 \end{aligned}$$

Problème 9.1. Une approche stochastique de la fonction gamma

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on désigne par $\mathbb{R} \setminus A$ son complémentaire et pour toute fonction bornée $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, on note $\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

Partie I

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.

2. Pour tout réel $s \in \mathbb{R}^{+,*}$ on note $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$.

(a) Rappeler pourquoi $\Gamma(s)$ est bien défini et démontrer que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pour tout $s > 0$. Que vaut $\Gamma(n+1)$ pour n entier naturel ?

(b) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

(c) Montrer que la fonction Γ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et calculer la dérivée $\Gamma'(s)$ pour tout réel $s > 0$.

(d) Soit n un entier strictement positif. Montrer que pour $x \in [0, n]$, on a $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$.

(e) Montrer que :

$$\forall s \in \mathbb{R}^{+,*}, \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx = \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)}$$

(f) Montrer que :

$$\forall s \in \mathbb{R}^{+,*}, \Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)}$$

(g) Montrer que :

$$\forall s \in \mathbb{R}^{+,*}, \ln(\Gamma(s)) = -\ln(s) - \gamma s + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{s}{n} - \ln \left(1 + \frac{s}{n} \right) \right)$$

(h) Montrer que :

$$\forall s \in \mathbb{R}^{+,*}, \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n-1} \right)$$

Partie II

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs qui converge vers $+\infty$ et telle que la suite $(a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On considère une application $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$ et qu'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(a_n) = \ell$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$.

2. On se propose de montrer qu'on a l'équivalent $\Gamma(s+1) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi s^{s+\frac{1}{2}}} e^{-s}$.

Pour ce faire, on pose $F(s) = \ln \left(\frac{\Gamma(s+1)e^s}{s^{s+\frac{1}{2}}} \right)$ pour tout $s > 0$.

(a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et que :

$$F'(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{n}{s} \right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{s+k+1} \right) - \frac{1}{2s}$$

(b) Montrer que $-\frac{1}{2s} \leq F'(s) \leq \ln \left(\frac{s+1}{s} \right) - \frac{1}{2s}$.

(c) Conclure.

Partie III

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que le produit infini $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge si

la suite des produits partiels $P_N = \prod_{n=0}^N a_n$ converge vers une limite non nulle.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tous positifs, ou bien tous dans l'intervalle $] -1, 0]$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Le produit infini $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ converge.

(b) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + u_n)$ converge.

(c) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

2. Pour $k, N \in \mathbb{N}$ on considère des réels $u_{k,N}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(u_{k,N})_{N \in \mathbb{N}}$ est convergente, de limite $v_k \in \mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ et $|u_{k,N}| \leq a_k$ pour tous $k, N \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ converge et que la suite de terme général $w_N =$

$\sum_{k=0}^N u_{k,N}$ converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. On pourra considérer la suite de fonctions $f_N : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x \in [k, k+1[, f_N(x) = \begin{cases} u_{k,N} & \text{si } k \leq N \\ 0 & \text{si } k \geq N+1 \end{cases}$$

et exprimer w_N à partir de f_N .

- (b) On suppose de plus que les $u_{k,N}$ sont dans $] -1, 0]$ pour tous $k, N \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^N (1 + u_{k,N}) \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\prod_{k=0}^{+\infty} (1 + v_k)$ quand N tend vers $+\infty$.

Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On dit que le produit infini des fonctions f_n converge si pour tout $x \in I$ il existe un entier n_0 tel que le produit infini de la suite numérique $(f_n(x))_{n \geq n_0}$ existe. On pose alors $p(n_0, x) = \prod_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$. Pour tout $x \in I$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$p_N(x) = \prod_{n=0}^N f_n(x) \text{ et } p(x) = f_0(x) \cdots f_{n_0-1}(x) p(n_0, x)$$

On dit que le produit infini des fonctions f_n converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(p_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction p .

3. Soient $a_0, \dots, a_N$ des nombres réels, $p_N = \prod_{k=0}^N (1 + a_k)$ et $q_N = \prod_{k=0}^N (1 + |a_k|)$.

Montrer que $q_N \leq \exp \left(\sum_{k=0}^N |a_k| \right)$ et $|p_N - 1| \leq q_N - 1$.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur I telle que $u_n(x) \neq -1$ pour tout $x \in I$ et la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge uniformément sur I . On pose $p_N(x) = \prod_{n=0}^N (1 + u_n(x))$ et $q_N(x) = \prod_{n=0}^N (1 + |u_n(x)|)$.

(a) Montrer que la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est bornée sur I .

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall M > N \geq n_0, \forall x \in I, |p_M(x) - p_N(x)| \leq |p_N(x)| (e^\varepsilon - 1)$$

(c) On suppose de plus que $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall M \geq N \geq n_0, \forall x \in I, |p_M(x) - p_N(x)| \leq 2C\varepsilon$$

(d) Montrer que le produit infini des fonctions $(1 + u_n)$ converge uniformément sur I .

5. Dans cette question on se propose de donner une expression de la fonction $\frac{\sin(t)}{t}$ prolongée par continuité en 0, comme produit infini.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sin(t) = 2^n \sin(2^{-n}t) \prod_{j=1}^n \cos(2^{-j}t)$$

- (b) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un polynôme Q_k appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et de degré 2^{k-1} , tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2^k x) = Q_k(\sin^2(x))$$

- (c) Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2^{n-1} - 1$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}, \frac{2^{-n} \sin(t)}{\sin(2^{-n}t) \cos(2^{-n}t)} = Q(\sin^2(2^{-n}t))$$

- (d) Déterminer les racines de Q et en déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}, \frac{2^{-n} \sin(t)}{\sin(2^{-n}t) \cos(2^{-n}t)} = \prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(1 - \frac{\sin^2(2^{-n}t)}{\sin^2(k\pi 2^{-n})}\right)$$

- (e) Montrer que le produit $\prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(1 - \frac{\sin^2(2^{-n}t)}{\sin^2(k\pi 2^{-n})}\right)$ converge quand n tend vers $+\infty$ vers $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2}\right)$ et en déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{\sin(t)}{t} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2}\right)$$

6. Montrer que $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ pour tout $s \in]0, 1[$.

7. Dans cette question, on se propose de donner une expression de $\Gamma(s)$ comme produit infini.

- (a) Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}}$. Montrer que le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que la convergence est uniforme sur tout intervalle compact contenu dans $\mathbb{R}^{+,*}$.

- (b) Montrer que $\Gamma(s) = \frac{1}{s} e^{-\gamma s} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}$.

Partie IV

On rappelle qu'une variable aléatoire réelle est dite de loi exponentielle si sa loi admet pour densité la fonction $h(t) = e^{-t}$ si $t > 0$ et $h(t) = 0$ si $t \leq 0$.

Dans cette partie, pour tout réel $t > 0$, on considère une variable aléatoire X_t à valeurs réelles strictement positives de loi ayant pour densité la fonction f_t donnée par :

$$\forall x > 0, f_t(x) = \frac{x^{t-1} e^{-x}}{\Gamma(t)} \text{ et } \forall x \leq 0, f_t(x) = 0$$

Nous utiliserons à plusieurs reprises le théorème de transfert qui nous dit que : si X est une variable aléatoire réelle de densité f et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\varphi \cdot f$ soit absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet alors une espérance qui est donnée par $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t) dt$.

1. Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(\ln(X_t))$ et la variance $\mathbb{V}(\ln(X_t))$ en fonction de $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$.

En déduire que la fonction $t \mapsto \ln(\Gamma(t))$ est convexe.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\Gamma'(1) = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \in]n, n+1[$ tel que $\ln(n) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$.

(c) Montrer que $\ln(n) \leq \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leq \ln(n+1)$.

(d) En déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

- 3.

- (a) Montrer que pour $x > 0$, on a :

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1, \text{ et } \ln^2(x) \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2$$

- (b) Montrer que pour $t > 0$, on a $\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leq 0$ et que pour $t > 1$, on a $\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \geq \frac{-1}{t-1}$.

(c) Montrer que pour $t > 2$, on a $\mathbb{E}\left(\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$.

4. Quelques résultats généraux.

- (a) Soient I et J deux intervalles ouverts, Z une variable aléatoire réelle de densité continue g nulle en dehors de I et $f : I \rightarrow J$ un difféomorphisme de classe C^1 , de bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$. Montrer que la loi de la variable aléatoire $f(Z)$ a pour densité la fonction qui est nulle en dehors de J et qui vaut $g \circ f^{-1} \cdot |(f^{-1})'|$ sur J .

- (b) Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $(X_1, \dots, X_n)$ un n -uplet de variables aléatoires réelles, de loi admettant une densité continue f nulle en dehors de U , et $\varphi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1 . On désigne par $d\varphi^{-1}$ la différentielle de la bijection réciproque φ^{-1} . Montrer que la loi de la variable aléatoire $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ a pour densité la fonction qui est nulle en dehors de V et qui vaut $f \circ \varphi^{-1} \cdot |\det(d\varphi^{-1})|$ sur V .

5. Soit $t > 0$. On considère des variables aléatoires indépendantes X_t et Y_j , lorsque $j \in \mathbb{N}$, où X_t , à valeurs strictement positives, a une loi de densité f_t , et où les Y_j , pour $j \in \mathbb{N}$, ont chacune une loi exponentielle. On pose $S_0 = 0$ et pour $j \geq 1$, $S_j = \sum_{i=1}^j Y_i$.

- (a) Soit $n \geq 1$. Déterminer la loi du $(n+1)$ -uplet :

$$\left(\frac{X_t}{X_t + S_1}, \frac{X_t + S_1}{X_t + S_2}, \dots, \frac{X_t + S_{n-1}}{X_t + S_n}, X_t + S_n \right)$$

- (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_t + S_n$ et pour $1 \leq j \leq n$, les lois des variables aléatoires $\frac{X_t + S_{j-1}}{X_t + S_j}$.

- (c) Montrer que les variables aléatoires :

$$\frac{X_t}{X_t + S_1}, \frac{X_t + S_1}{X_t + S_2}, \dots, \frac{X_t + S_{n-1}}{X_t + S_n}, X_t + S_n$$

sont indépendantes.

- (d) Pour $j \in \{0, \dots, n-1\}$, quelle est la loi de la variable aléatoire $-\frac{Y_j}{j+t}$?

Comparer avec la loi de la variable aléatoire $\frac{X_t + S_j}{X_t + S_{j+1}}$.

- (e) Pour $n \geq 1$ on pose $d_{n,t} = \gamma + \ln(t+n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $|d_{n,t}| \leq \frac{t+1}{n}$.

On pourra pour cela commencer par établir que $|d_{n+1,t} - d_{n,t}| < \frac{t+1}{n(n+1)}$.

- (f) Montrer que pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire $\ln(X_t)$ a même loi que la variable aléatoire $-\gamma + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{j+t} \right) + \ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) + d_{n,t}$ avec X_{t+n} indépendante des variables aléatoires Y_j , pour $j \geq 0$. On observera que :

$$\forall n \geq 1, \ln(X_t) = \ln \left(\prod_{j=1}^n \frac{X_t + S_{j-1}}{X_t + S_j} \right) + \ln(X_t + S_n)$$

- (g) Montrer que $\ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right)$ tend vers 0 en moyenne quadratique.

- (h) Montrer que $\ln(X_t)$ a même loi que $-\gamma + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{j+t} \right)$.

6. Soient, pour $t > 0$, des variables aléatoires indépendantes X_t , où X_t , à valeurs strictement positives, suit une loi de densité f_t .

- (a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge vers $2 \ln(2)$ quand n tend vers $+\infty$, telle que la variable aléatoire $2 \ln(X_{2t})$ a même loi que la variable aléatoire :

$$\ln(X_t) + \ln(X_{t+\frac{1}{2}}) + 2 \ln\left(\frac{X_{2t+n}}{2t+n}\right) - \ln\left(\frac{X_{t+m}}{t+m}\right) - \ln\left(\frac{X_{t+p+\frac{1}{2}}}{t+p+\frac{1}{2}}\right) + r_n$$

où m et p sont des entiers dépendants de n que l'on précisera. On pourra utiliser IV.5f pour comparer les lois de $2 \ln(X_{2t})$ et $\ln(X_t) + \ln(X_{t+\frac{1}{2}})$.

- (b) En déduire que $2^{2s-1} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2s) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. On pourra considérer les espérances mathématiques de puissances des variables aléatoires ci-dessus, pour une valeur convenable de t .

Solution.

Partie I

- Voir l'exercice 5.10.
- (a) Pour tout réel $s \in \mathbb{R}^{+,*}$, la fonction $x \mapsto e^{-x} x^{s-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Avec $|e^{-x} x^{s-1}| = o_{t \rightarrow +\infty}(e^{-\frac{x}{2}})$, on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ converge pour tout réel $s > 0$, puis avec $|e^{-x} x^{s-1}| \sim_{x \rightarrow 0^+} x^{s-1}$, on déduit que l'intégrale $\int_0^1 t^{s-1} e^{-t} dt$ converge si, et seulement si, $s > 0$. Une intégration par parties donne pour $s > 0$ et $0 < \varepsilon < R$:

$$\int_{\varepsilon}^R e^{-x} x^{s-1} dx = [-e^{-x} x^s]_{\varepsilon}^R + s \int_{\varepsilon}^R e^{-x} x^{s-1} dx$$

et le passage à la limite quand (ε, R) tend vers $(0, +\infty)$ donne $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. De cette équation fonctionnelle, on déduit facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$

- (b) En effectuant le changement de variable $x = t^2$, le calcul de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ se ramène au calcul de l'intégrale de Gauss :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Le calcul de l'intégrale de Gauss peut se faire comme suit. La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $y \mapsto e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} e^{-y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} |f(x, y)| dy = e^{-x^2} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-y^2} dy$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème

de Fubini nous dit alors que f est intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$ avec :

$$\begin{aligned} \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 \end{aligned}$$

L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{+,*} \times]0, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow (\mathbb{R}^{+,*})^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

étant bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$J_\varphi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r > 0$$

elle réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+,*} \times]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ (passage en coordonnées polaires) et le théorème de changement de variables nous permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_{(\mathbb{R}^{+,*})^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{+,*} \times]0, \frac{\pi}{2}[} e^{-r^2} r dr d\theta \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^{+,*} \times]0, \frac{\pi}{2}[} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

donc $\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On peut aussi procéder comme suit. On considère les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2, \quad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$F'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } G'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$$

(la fonction $(x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et on intègre sur un segment). Le changement de variable $y = xt$, pour $x > 0$, dans $G'(x)$ donne $G'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-y^2} dy = -F'(x)$, ce résultat étant encore

valable pour $x = 0$. On a donc $F'(x) + G'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, ce qui entraîne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\pi}{4}$$

Puis avec :

$$0 \leq G(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\pi}{4} e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{\pi}{4}$, soit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- (c) La fonction $(s, x) \mapsto e^{-x} x^{s-1}$ est continue sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ et pour tous réels $0 < a < b$, tout nombre réel $s > 0$ tel que $a \leq s \leq b$, tout réel $x > 0$, on a :

$$|e^{-x} x^{s-1}| \leq \varphi(x) = \begin{cases} x^{a-1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^{b-1} e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

la fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (pour $a > 0$, la fonction x^{a-1} est intégrable sur $]0, 1[$ et avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{b-1} e^{-x} = 0$, on déduit que $\varphi(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$ pour x assez grand, la fonction $e^{-\frac{x}{2}}$ étant intégrable sur $]1, +\infty[$). Il en résulte que la fonction Γ est continue sur tout segment $[a, b]$, donc sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

La fonction $f : (s, x) \mapsto e^{-x} x^{s-1}$ est indéfiniment dérivable sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ avec pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+,*}$ (avec $a < b$) et $x \in [a, b]$:

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial s^n}(s, x) \right| = |\ln(x)|^n x^{s-1} e^{-x} \leq g_n(x) = \begin{cases} |\ln(x)|^n x^{a-1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ |\ln(x)|^n x^{b-1} e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

g_n étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln(x)|^n x^{\frac{a}{2}} = 0$, donc pour $x > 0$ assez petit on a $|g_n(x)| \leq x^{\frac{a}{2}-1}$, la fonction $x^{\frac{a}{2}-1}$ étant intégrable sur $]0, 1[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\ln(x)|^n x^{b-1} e^{-x} = 0$, donc $|g_n(x)| \leq e^{-\frac{x}{2}}$ pour x assez grand, la fonction $e^{-\frac{x}{2}}$ étant intégrable sur $]1, +\infty[$). On en déduit alors que la fonction Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif s :

$$\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} (\ln(x))^n x^{s-1} e^{-x} dx$$

- (d) Pour $x = 0$ ou $x = n$, l'inégalité est trivialement vérifiée.

Comme la fonction $g : t \mapsto \ln(1+t)$ est concave sur $] -1, +\infty[$, son graphe est sous sa tangente en 0, soit $\ln(1+t) \leq t$ pour tout $t \in] -1, +\infty[$, ce qui nous donne :

$$\forall x \in]0, n[, \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n} \text{ et } \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$$

soit $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq x$ et $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq -x$ pour tout $x \in]0, n[$, ou encore :

$$\forall x \in]0, n[, \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \text{ et } \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$$

soit $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$ pour tout $x \in]0, n[$.

Pour $x > 0$, on a $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -x$ et en conséquence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = -x$. Par continuité de $\exp$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$.

(e) Pour $n \geq 1$ et $s > 0$, le changement de variable $x = nt$ nous donne :

$$I_n(s) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx = \int_0^1 (1-t)^n t^{s-1} n^s dt = n^s J_n(s)$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} J_{n+1}(s) &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} t^{s-1} dt = \frac{n+1}{s} \int_0^1 (1-t)^n t^s dt \\ &= \frac{n+1}{s} J_n(s+1) \end{aligned}$$

et par récurrence, on déduit que :

$$\begin{aligned} J_n(s) &= \frac{n!}{s(s+1) \cdots (s+n-1)} J_0(s+n) \\ &= \frac{n!}{s(s+1) \cdots (s+n-1)} \int_0^1 t^{s+n-1} dt \\ &= \frac{n!}{s(s+1) \cdots (s+n-1)(s+n)} \end{aligned}$$

(f) Pour $s > 0$, on désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} & \text{si } x \in]0, n[\\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-x} x^{s-1} \\ \forall n \geq 1, |f_n(x)| \leq e^{-x} x^{s-1} = f(x) \end{cases}$$

la fonction f étant continue et intégrable sur $]0, +\infty[$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \Gamma(s)$$

$$\text{soit } \Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)}.$$

(g) Pour tout réel $s > 0$, on a

$$I_n(s) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx = \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)} > 0$$

et :

$$\begin{aligned} \ln(I_n(s)) &= \sum_{k=1}^n \ln(k) + s \ln(n) - \sum_{k=0}^n \ln(s+k) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(k) + s \ln(n) - \sum_{k=1}^n \ln(s+k) - \ln(s) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{s}{k} - \ln\left(1 + \frac{s}{k}\right) \right) - s \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) - \ln(s) \end{aligned}$$

la série $\sum \left(\frac{s}{n} - \ln\left(1 + \frac{s}{n}\right) \right)$ étant convergente $\left(\frac{s}{n} - \ln\left(1 + \frac{s}{n}\right) \sim \frac{s^2}{2n^2} \right)$. Il en résulte que :

$$\ln(\Gamma(s)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(I_n(s)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{s}{n} - \ln\left(1 + \frac{s}{n}\right) \right) - \gamma s - \ln(s)$$

(h) Notons $f_n(s) = \frac{s}{n} - \ln\left(1 + \frac{s}{n}\right)$ pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $s \geq 0$. Ces fonctions f_n sont de classes C^1 sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et pour tout réel $a > 0$ et tout $x \in [0, a]$, on a $|f'_n(s)| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right| = \left| \frac{s}{n(s+n)} \right| \leq \frac{a}{n^2}$. Donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment $[0, a] \subset \mathbb{R}^+$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que la somme $f = \sum f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec $f' = \sum f'_n$. De la question précédente, on déduit que pour tout réel $s > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} &= (\ln(\Gamma(s)))' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(s) - \gamma s - \ln(s) \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n} \right) - \gamma - \frac{1}{s} = -\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n-1} \right) \end{aligned}$$

Partie II

1. La suite $(a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement croissante et bornée, il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_{n+1} - a_n \leq M$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(a_n) = \ell$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\alpha > 0$ et un entier n_0 tel que :

$$\forall x \geq \alpha, |F'(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0, a_n > \alpha \text{ et } |F(a_n) - \ell| < \varepsilon$$

Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs est strictement croissante et converge vers $+\infty$, pour tout réel $x > a_{n_0}$, il existe un entier $n_x \geq n_0$ tel que $a_{n_x} < x \leq a_{n_x+1}$ et en utilisant le théorème des accroissements finis, on peut trouver un réel c_x compris entre x et a_{n_x} , donc dans l'intervalle $[a_{n_x}, a_{n_x+1}]$ tel que $F(x) - F(a_{n_x}) = (x - a_{n_x}) F'(c_x, n)$. On a alors, pour tout réel $x > a_{n_0}$:

$$\begin{aligned} |F(x) - \ell| &\leq |F(x) - F(a_{n_x})| + |F(a_{n_x}) - \ell| \\ &\leq (a_{n_x+1} - a_{n_x}) |F'(c_x, n)| + |F(a_{n_x}) - \ell| \leq (M+1)\varepsilon \end{aligned}$$

On a donc ainsi prouvé que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$.

2.

(a) La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} + 1 - \ln(s) - \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{s} = \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} - \ln(s) - \frac{1}{2s} \\ &= -\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n}\right) - \ln(s) - \frac{1}{2s} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{s+k}\right) - \ln(s) - \frac{1}{2s} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{s+k}\right) - \ln(s) - \frac{1}{2s} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{n}{s}\right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{s+k+1}\right) - \frac{1}{2s} \end{aligned}$$

(b) Pour tout réel $s > 0$, la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{s+t}$ étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{s+k+1} &\leq \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{s+t} \\ &\leq \int_0^{n+1} \frac{dt}{s+t} = \ln\left(\frac{s+n+1}{s}\right) = \ln\left(\frac{n}{s}\right) + \ln\left(\frac{s+n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

donc $\ln\left(\frac{n}{s}\right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{s+k+1} \geq -\ln\left(\frac{s+n+1}{n}\right)$ et :

$$\begin{aligned} F'(s) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{n}{s}\right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{s+k+1}\right) - \frac{1}{2s} \\ &\geq -\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{s+n+1}{n}\right) - \frac{1}{2s} = -\frac{1}{2s} \end{aligned}$$

De la même façon, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{s+n+2}{s+1}\right) &= \int_1^{n+2} \frac{dt}{s+t} = \sum_{k=1}^{n+1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{s+t} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{s+k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{s+k+1}\end{aligned}$$

donc :

$$\ln\left(\frac{n}{s}\right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{s+k+1} \leq \ln\left(\frac{n}{s}\right) - \ln\left(\frac{s+n+2}{s+1}\right) = -\ln\left(\frac{s}{s+1} \frac{s+n+2}{n}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}F'(s) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{n}{s}\right) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{s+k+1} \right) - \frac{1}{2s} \\ &\leq -\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{s}{s+1} \frac{s+n+2}{n}\right) - \frac{1}{2s} = \ln\left(\frac{s+1}{s}\right) - \frac{1}{2s}\end{aligned}$$

- (c) De $-\frac{1}{2s} \leq F'(s) \leq \ln\left(\frac{s+1}{s}\right) - \frac{1}{2s}$, on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les hypothèses de la question II.1 avec :

$$F(a_n) = \ln\left(\frac{\Gamma(n+1)e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right) = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)$$

En utilisant la formule de Stirling (exercice 2.3), on a :

$$\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n} e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

et en conséquence $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(a_n) = \ln(\sqrt{2\pi})$. On déduit alors de II.1

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\Gamma(s+1)e^s}{s^{s+\frac{1}{2}}}\right) = \ln(\sqrt{2\pi})$, soit par continuité de exp, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(s+1)e^s}{s^{s+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$, soit $\Gamma(s+1) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s}$.

Partie III

- On note $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des produits partiels de $\prod (1+u_n)$. Dire que le produit infini $\prod (1+u_n)$ converge équivaut à dire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell > 0$, soit que la suite $(\ln(P_n))_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n \ln(1+u_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $\mu = \ln(\ell)$, ce qui revient encore à dire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(1+u_n)$ converge. D'où l'équivalence entre (a) et (b). La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant de signe constant, en utilisant l'équivalent $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on aboutit à l'équivalence entre (b) et (c).

2.

- (a) Des inégalités $|u_{k,N}| \leq a_k$, on déduit que $|v_k| = \lim_{N \rightarrow +\infty} |u_{k,N}| \leq a_k$ pour tout entier k . La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ étant convergente, on en déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est absolument convergente.

Chaque fonction $f_N = \sum_{k=0}^N u_{k,N} \mathbf{1}_{[k, k+1[}$ est en escaliers, donc intégrale sur $\mathbb{R}^+$ avec $\int_0^\infty f_N(x) dx = \sum_{k=0}^N u_{k,N} = w_N$.

Pour tout réel x , il existe un unique entier k_x tel que $x \in [k_x, k_x + 1[$ (k_x est la partie entière $E(x)$ de x) et pour tout entier $N \geq k_x$, on a :

$$f_N(x) = u_{k_x, N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} v_{k_x}$$

Donc la suite de fonctions $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto v_{E(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \mathbf{1}_{[k, k+1[}$. Cette fonction f est intégrale sur $\mathbb{R}^+$ avec $\int_0^\infty f(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. En utilisant la domination :

$$|f_N| \leq \sum_{k=0}^N |u_{k,N}| \mathbf{1}_{[k, k+1[} \leq \sum_{k=0}^N a_k \mathbf{1}_{[k, k+1[} \leq g = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbf{1}_{[k, k+1[}$$

g étant continue par morceaux et intégrale sur $\mathbb{R}^+$ (on a $\int_0^\infty g(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ qui est fini), on déduit du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f_N(x) dx = \int_0^\infty \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(x) dx = \int_0^\infty f(x) dx$$

soit $\lim_{N \rightarrow +\infty} w_N = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$, ou encore $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N u_{k,N} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} u_{k,N}$.

- (b) Notons $v_{k,N} = |\ln(1 + u_{k,N})|$. Les $u_{k,N}$ étant dans $]-1, 0]$, les v_k sont a priori dans $[-1, 0]$ et pour $v_k = -1$, on aura $\lim_{N \rightarrow +\infty} v_{k,N} = +\infty$. Mais comme la série $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ converge, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0$, d'où l'existence d'un entier k_0 tel que $v_k \in [-1, 0]$ pour tout $k \geq k_0$.
Pour que l'énoncé de cette question soit correct, on fait l'hypothèse que

$k_0 = 0$, soit que tous les v_k sont dans $]-1, 0]$.

De manière analogue, la convergence de la série à termes positifs $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ nous dit $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$ et $a_k \in [0, 1[$ pour k assez grand. Là encore, on fait l'hypothèse que tous les a_k sont dans $[0, 1[$.

De $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_{k,N} = v_k$ avec tous les $u_{k,N}$ et v_k dans $]-1, 0]$, on déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} v_{k,N} = w_k = |\ln(1 + v_k)|$$

De $|u_{k,N}| \leq a_k$, on déduit que $-a_k \leq u_{k,N} \leq a_k$ et :

$$\ln(1 - a_k) \leq \ln(1 + u_{k,N}) \leq \ln(1 + a_k)$$

donc $|\ln(1 + u_{k,N})| = -\ln(1 + u_{k,N}) \leq -\ln(1 - a_k) = |\ln(1 - a_k)|$, la série $\sum |\ln(1 - a_k)|$ étant convergente puisque $|\ln(1 - a_k)| \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} a_k$.

On déduit alors de la question précédente que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |\ln(1 + v_k)|$

converge et que la suite de terme général $\sum_{k=0}^N |\ln(1 + u_{k,N})|$ converge vers

$\sum_{k=0}^{+\infty} |\ln(1 + v_k)|$, ce qui équivaut à dire que la suite de terme général $\sum_{k=0}^N \ln(1 + u_{k,N})$ converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 + v_k)$ (ces séries sont à termes négatifs).

Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \exp \left(\sum_{k=0}^N \ln(1 + u_{k,N}) \right) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^N (1 + u_{k,N}) \\ &= \exp \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 + v_k) \right) = \exp \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln(1 + v_k) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\exp \left(\sum_{k=0}^n \ln(1 + v_k) \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=0}^n (1 + v_k) \right) \\ &= \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + v_k) \end{aligned}$$

3.

- (a) En utilisant l'inégalité $\ln(1 + x) \leq x$ valable pour tout réel $x \geq 0$ (il suffit d'étudier la fonction $x \mapsto x - \ln(1 + x)$ sur $\mathbb{R}^+$), on obtient :

$$\ln(q_N) = \ln \left(\prod_{k=0}^N (1 + |a_k|) \right) = \sum_{k=0}^N \ln(1 + |a_k|) \leq \sum_{k=0}^N |a_k|$$

et en conséquence $q_N \leq \exp \left(\sum_{k=0}^N |a_k| \right)$ (croissance de l'exponentielle).

- (b) Pour $N = 0$, on a $|p_0 - 1| = |a_0| = q_0 - 1$. En supposant le résultat acquis jusqu'au rang $N \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} |p_{N+1} - 1| &= |p_N(1 + a_{N+1}) - 1| = |(p_N - 1)(1 + a_{N+1}) + a_{N+1}| \\ &\leq |p_N - 1| |1 + a_{N+1}| + |a_{N+1}| \\ &\leq (q_N - 1) |1 + a_{N+1}| + |a_{N+1}| \\ &\leq \left(\frac{q_{N+1}}{1 + |a_{N+1}|} - 1 \right) |1 + a_{N+1}| + |a_{N+1}| \\ &\leq (q_{N+1} - 1 - |a_{N+1}|) \frac{|1 + a_{N+1}|}{1 + |a_{N+1}|} + |a_{N+1}| \leq q_{N+1} - 1 \end{aligned}$$

4.

- (a) Comme la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge uniformément sur I , la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses restes converge uniformément vers 0, donc il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in I, 0 \leq R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leq 1$$

et en conséquence :

$$\forall x \in I, 0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)| = \sum_{k=0}^{n_0} |u_k(x)| + R_{n_0}(x) \leq M = \sum_{k=0}^{n_0} \|u_k\|_{\infty} + 1$$

(toutes les fonctions u_k sont bornés).

- (b) Comme la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge uniformément sur I , elle est uniformément de Cauchy, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall M > N \geq n_0, \forall x \in I, \sum_{k=N+1}^M |u_k(x)| \leq \varepsilon$$

En utilisant III.3b et III.3a, on en déduit que, pour tous entiers $M > N \geq n_0$ et tout réel $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} |p_M(x) - p_N(x)| &= |p_N(x)| \left| \prod_{k=N+1}^M (1 + u_k(x)) - 1 \right| \\ &\leq |p_N(x)| \left(\prod_{k=N+1}^M (1 + |u_k(x)|) - 1 \right) \\ &\leq |p_N(x)| \left(\exp \left(\sum_{k=N+1}^M |a_k| \right) - 1 \right) \leq |p_N(x)| (\exp(\varepsilon) - 1) \end{aligned}$$

- (c) En désignant par M un majorant de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$, avec les hypothèses et notations de la question précédente, on a :

$$|p_N(x)| = \prod_{k=0}^N |1 + u_k(x)| \leq \prod_{k=0}^N (1 + |u_k(x)|) \leq \exp\left(\sum_{k=0}^N |u_k(x)|\right) \leq e^M$$

donc :

$$\forall M > N \geq n_0, \forall x \in I, |p_M(x) - p_N(x)| \leq e^M (e^\varepsilon - 1)$$

Pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on a $e^\varepsilon - 1 \leq 2\varepsilon$ (étudier la fonction $\varepsilon \mapsto 2\varepsilon - e^\varepsilon + 1$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$), ce qui nous donne :

$$\forall M \geq N \geq n_0, \forall x \in I, |p_M(x) - p_N(x)| \leq 2C\varepsilon$$

où $C = e^M$.

- (d) La question précédente nous dit que pour tout réel $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall M \geq N \geq n_0, \|p_M - p_N\|_\infty \leq 2C\varepsilon$$

On déduit alors du critère de Cauchy uniforme que la suite de fonctions $(p_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I , ce qui revient à dire que le produit infini de fonctions $\prod (1 + u_n)$ converge uniformément sur I .

5.

- (a) On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, on a :

$$\sin(t) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

En supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n \geq 1$ et en écrivant que :

$$\sin(2^{-n}t) = 2 \sin(2^{-(n+1)}t) \cos(2^{-(n+1)}t)$$

on a :

$$\begin{aligned} \sin(t) &= 2^n \sin(2^{-n}t) \prod_{j=1}^n \cos(2^{-j}t) \\ &= 2^n \cdot 2 \sin(2^{-(n+1)}t) \cos(2^{-(n+1)}t) \prod_{j=1}^n \cos(2^{-j}t) \\ &= 2^{n+1} \sin(2^{-(n+1)}t) \prod_{j=1}^{n+1} \cos(2^{-j}t) \end{aligned}$$

soit la formule au rang $n + 1$.

- (b) Là encore, on procède par récurrence sur $k \geq 1$. Pour $k = 1$, on a :

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = Q_1(\sin^2(x))$$

avec $Q_1(X) = 1 - 2X$. En supposant le résultat acquis jusqu'au rang $k \geq 1$, on a :

$$\cos(2^{k+1}x) = 2\cos^2(2^k x) - 1 = 2(Q_k(\sin^2(x)))^2 - 1 = Q_{k+1}(\sin^2(x))$$

avec $Q_{k+1}(X) = 2(Q_k(X))^2 - 1$ qui est un polynôme de degré $2 \deg(Q_k) = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$. En notant α_k le coefficient dominant de Q_k , on a $\alpha_1 = -2$ et $\alpha_{k+1} = 2\alpha_k^2$ pour tout entier $k \geq 1$, ce qui nous donne $\alpha_k = 2^{2^k-1}$ pour $k \geq 2$.

- (c) Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}$, on a $\sin(2^{-n}t) \cos(2^{-n}t) = \frac{\sin(2^{-(n-1)}t)}{2} \neq 0$ et :

$$\frac{2^{-n} \sin(t)}{\sin(2^{-n}t) \cos(2^{-n}t)} = \frac{\sin(2^{-n}t) \prod_{j=1}^n \cos(2^{-j}t)}{\sin(2^{-n}t) \cos(2^{-n}t)} = \prod_{j=1}^{n-1} \cos(2^{-j}t)$$

avec $\cos(2^{-j}t) = \cos(2^{n-j}(2^{-n}t)) = Q_{n-j}(\sin^2(2^{-n}t))$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{2^{-n} \sin(t)}{\sin(2^{-n}t) \cos(2^{-n}t)} &= \prod_{j=1}^{n-1} Q_{n-j}(\sin^2(2^{-n}t)) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} Q_k(\sin^2(2^{-n}t)) = Q(\sin^2(2^{-n}t)) \end{aligned}$$

le polynôme $Q = \prod_{k=1}^{n-1} Q_k$ étant de degré $\sum_{k=1}^{n-1} \deg(Q_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2^{n-1} - 1$.

- (d) En notant $\varphi_n(t) = \frac{2^{-n} \sin(t)}{\sin(2^{-n}t) \cos(2^{-n}t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\varphi_n(t) = Q\left(\sin^2\left(\frac{t}{2^n}\right)\right).$$

Avec $\varphi_n(k\pi) = 0$ pour k entier compris entre 1 et $\deg(Q) = 2^{n-1} - 1$, on déduit que les réels $x_{n,k} = \sin^2\left(k\frac{\pi}{2^n}\right)$ sont racines du polynôme Q .

Comme les $k\frac{\pi}{2^n}$ sont dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ pour k compris entre 1 et $2^{n-1} - 1$, ces racines sont deux à deux distinctes, donc :

$$Q(X) = \lambda_n \prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(X - \sin^2\left(k\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$$

et pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\varphi_n(t) = Q\left(\sin^2\left(\frac{t}{2^n}\right)\right) = \lambda_n \prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(\sin^2\left(\frac{t}{2^n}\right) - \sin^2\left(k\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$$

Avec $\varphi_n(t) = \frac{2^{-n} \sin(t)}{\sin(2^{-n}t) \cos(2^{-n}t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{2^{-n}t}{2^{-n}t \cdot 1} = 1$ et :

$$\prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(\sin^2\left(\frac{t}{2^n}\right) - \sin^2\left(k \frac{\pi}{2^n}\right) \right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(\sin^2\left(k \frac{\pi}{2^n}\right) \right)$$

on déduit que $\lambda_n = - \left(\prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(\sin^2\left(k \frac{\pi}{2^n}\right) \right) \right)^{-1}$. Il en résulte que, pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \lambda_n \prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \sin^2\left(k \frac{\pi}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\sin^2\left(k \frac{\pi}{2^n}\right)} - 1 \right) \\ &= \prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\sin^2\left(k \frac{\pi}{2^n}\right)} \right) \end{aligned}$$

(e) Vérifions tout d'abord, que pour tout réel t , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(1 - \frac{\sin^2(2^{-n}t)}{\sin^2(k\pi 2^{-n})} \right) \right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2} \right) \quad (9.2)$$

D'après III.1 le produit infini $\prod \left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2} \right)$ est convergent puisque

la série $\sum \left(-\frac{t^2}{(k\pi)^2} \right)$ est convergente (il existe un entier k_t tel que les $-\frac{t^2}{(k\pi)^2}$ sont tous dans $] -1, 0]$ pour $k \geq k_t$ et il est équivalent de considérer

le produit infini $\prod_{k \geq k_t} \left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2} \right)$.

Pour $t = 0$, l'égalité (9.2) est clairement vérifiée avec une limite égale à 1.

Par parité, il nous suffit de considérer le cas d'un réel $t > 0$.

Pour tout entier $N \geq 1$ et tout entier naturel k , on note :

$$u_{k,N} = \begin{cases} -\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2^N}\right)}{\sin^2\left(k \frac{\pi}{2^N}\right)} & \text{si } 1 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \text{ ou } k \geq N \end{cases}$$

$$\text{et } P_N = \prod_{k=0}^N (1 + u_{k,N}) = \prod_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2^N}\right)}{\sin^2\left(k \frac{\pi}{2^N}\right)} \right).$$

La suite extraite $(P_{2^{n-1}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite qui nous intéresse et notre but est d'utiliser le résultat de III.2b.

Vérifions que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(u_{k,N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour $k = 0$, tous les $u_{0,N}$ sont nuls et $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_{0,N} = u_0 = 0$. Pour $k \geq 1$

et $N \geq k + 1$, on a :

$$u_{k,N} = -\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2N}\right)}{\sin^2\left(k\frac{\pi}{2N}\right)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} v_k = -\frac{t^2}{\pi^2 k^2}$$

En utilisant les inégalités $0 \leq |\sin(x)| \leq |x|$ pour tout réel x (pour $x \geq 1$, c'est clair, pour $0 \leq x < 1$, il suffit d'étudier la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$, puis on conclut par imparité) et $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient pour $k \geq 1$ et $N \geq k + 1$:

$$|u_{k,N}| = \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2N}\right)}{\sin^2\left(k\frac{\pi}{2N}\right)} \leq a_k = \frac{\left(\frac{t}{2N}\right)^2}{\frac{4}{\pi^2}\left(k\frac{\pi}{2N}\right)^2} = \frac{t^2}{4k^2}$$

Pour $k = 0$, on a $|u_{0,N}| = 0 = a_0$ et pour $k \geq N$, on a $|u_{k,N}| = 0 \leq a_k = \frac{t^2}{4k^2}$. On dispose donc d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ et $|u_{k,N}| \leq a_k$ pour tout $N \geq 1$ et tout $k \geq 0$.

Pour utiliser III.2b il nous faudrait vérifier que les $u_{k,N}$ sont tous dans $]-1, 0]$. Mais hélas cela n'est pas vrai. On a bien $u_{k,N} \leq 0$, mais l'inégalité $u_{k,N} > -1$ n'est pas toujours assurée. Pour cette raison on utilise la suite $(v_{k,N})$ définie par :

$$v_{k,N} = \begin{cases} u_{k,N} & \text{si } k\pi \geq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} v_{k,N} = w_k = \begin{cases} \lim_{N \rightarrow +\infty} u_{k,N} = v_k & \text{si } k\pi \geq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et :

$$|v_{k,N}| = |u_{k,N}| \leq b_k = \begin{cases} a_k & \text{si } k\pi \geq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $|v_{k,N}| = \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2N}\right)}{\sin^2\left(k\frac{\pi}{2N}\right)} < 1$ pour $k\pi \geq t$ et $1 \leq k \leq N - 1$ (on a $0 < \frac{t}{2N} \leq \frac{k\pi}{2N} < \frac{\pi}{2}$, donc $0 < \sin\left(\frac{t}{2N}\right) < \sin\left(k\frac{\pi}{2N}\right)$) et $|v_{k,N}| = 0 < 1$ sinon. De III.2b on déduit alors que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N (1 + v_{k,N}) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + w_k) = \prod_{k\pi \geq t} (1 + v_k)$$

et avec, pour $N\pi \geq t$:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^N (1 + u_{k,N}) &= \prod_{k\pi < t} (1 + u_{k,N}) \prod_{t \leq k\pi \leq N} (1 + u_{k,N}) \\ &= \prod_{k\pi < t} (1 + u_{k,N}) \prod_{k=1}^N (1 + v_{k,N}) \end{aligned}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N (1 + u_{k,N}) &= \prod_{k\pi < t} \lim_{N \rightarrow +\infty} (1 + u_{k,N}) \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N (1 + v_{k,N}) \\ &= \prod_{k\pi < t} (1 + v_k) \prod_{k\pi \geq t} (1 + v_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + v_k) \end{aligned}$$

$$\text{soit } \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2N}\right)}{\sin^2\left(k\frac{\pi}{2N}\right)} \right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2} \right).$$

Avec l'extraction $N = 2^{n-1}$, on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(1 - \frac{\sin^2(2^{-n}t)}{\sin^2(k\pi 2^{-n})} \right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2} \right)$$

Pour n tel que $2^{n-1}\pi > t > 0$, on a $t \in \mathbb{R} \setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}$ et :

$$\prod_{k=1}^{2^{n-1}-1} \left(1 - \frac{\sin^2(2^{-n}t)}{\sin^2(k\pi 2^{-n})} \right) = \frac{2^{-n} \sin(t)}{\sin(2^{-n}t) \cos(2^{-n}t)}$$

(question III.5d) donc :

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{-n} \sin(t)}{\sin(2^{-n}t) \cos(2^{-n}t)} = \frac{\sin(t)}{t}$$

(puisque $\sin(2^{-n}t) \sim 2^{-n}t$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2^{-n}t) = 1$), ce résultat étant encore valable pour $t = 0$ (prolongement par continuité en 0 par 1 de $\frac{\sin(t)}{t}$) et pour $t < 0$ (par parité).

6. En utilisant le résultat de la question II.2f, on a pour tout $s \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \Gamma(1-s) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)} \frac{n! n^{1-s}}{(1-s)(2-s) \cdots (n+1-s)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n (n!)^2}{\prod_{k=0}^n (k+s) \prod_{k=1}^{n+1} (k-s)} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n (k+s) \times \prod_{k=1}^{n+1} (k-s) &= s(n+1-s) \prod_{k=1}^n (k^2 - s^2) \\ &= s(n+1-s) (n!)^2 \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{s^2}{k^2} \right) \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{s(n+1-s) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{s} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)}$$

En utilisant le résultat de III.5e, on a :

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{(\pi s)^2}{(k\pi)^2}\right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)$$

ce qui nous donne $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

7.

(a) Pour tout réel $x > 0$ et tout entier $N \geq 1$, on a en notant $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N f_n(x) &= \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}} = \frac{N!}{\prod_{n=1}^N (x+n)} \exp\left(x \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{N!}{\prod_{n=1}^N (x+n)} \exp(x(u_N + \ln(N))) = \frac{N^x N!}{\prod_{n=1}^N (x+n)} e^{xu_N} \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N f_n(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N^x N!}{\prod_{n=1}^N (x+n)} \lim_{N \rightarrow +\infty} e^{xu_N} = \Gamma(x) x e^{\gamma x}$$

Donc le produit infini $\prod f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $x \mapsto x e^{\gamma x} \Gamma(x)$. Chaque fonction $g_n = f_n - 1$ étant à valeurs strictement positives et croissante sur $]0, +\infty[$ (de $e^t > (1+t)^n$ pour tout $t > 0$, on déduit que $f_n > 1$ et on a pour tout réel $t > 0$, $\left(\frac{e^t}{1+t} - 1\right)' = \frac{te^t}{(1+t)^2} > 0$), on a pour $0 < a < b$ et $x \in [a, b]$, $|f_n(x) - 1| = f_n(x) - 1 \leq f_n(b) - 1$, la série $\sum (f_n(b) - 1)$ étant convergente (ce qui équivaut à la convergence du produit infini $\prod f_n(b)$). Il en résulte que la série de fonctions $\sum (f_n - 1)$ converge uniformément sur $[a, b]$, ce qui équivaut à la convergence uniforme sur $[a, b]$ du produit infini de fonctions $\prod f_n$.

(b) Avec $\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N f_n(s) = \Gamma(s) s e^{\gamma s}$ pour tout réel $s > 0$, on déduit que :

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}$$

la convergence étant uniforme sur tout segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$.

Partie IV

1. En utilisant le théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E}(\ln(X_t)) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} \ln(x) x^{t-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$$

$$\text{et } \mathbb{E}((\ln(X_t))^2) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} (\ln(x))^2 x^{t-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}, \text{ ce qui nous donne :}$$

$$\mathbb{V}(\ln(X_t)) = \mathbb{E}((\ln(X_t))^2) - (\mathbb{E}(\ln(X_t)))^2 = \frac{\Gamma''(t)\Gamma(t) - (\Gamma'(t))^2}{(\Gamma(t))^2} = (\ln(\Gamma(t)))''$$

Comme la variance $\mathbb{V}(\ln(X_t))$ est positive, on en déduit que la fonction $\ln(\Gamma)$ est convexe sur $]0, \infty[$.

2.

(a) En utilisant la relation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ et en dérivant, on obtient l'égalité $\Gamma'(s+1) = \Gamma(s) + s\Gamma'(s)$ et :

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \frac{\Gamma(s) + s\Gamma'(s)}{s\Gamma(s)} = \frac{1}{s} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$$

ce qui nous donne en particulier, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} + \frac{1}{n}$$

et par récurrence, on en déduit que $\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(b) Le théorème de Rolle entre n et $n+1$ pour la fonction $\ln(\Gamma)$, nous dit qu'il existe un réel $\alpha \in]n, n+1[$ tel que :

$$\ln(n) = \ln\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)}\right) = \ln(\Gamma(n+1)) - \ln(\Gamma(n)) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

(c) La fonction $\ln(\Gamma)$ étant convexe, sa dérivée $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ est croissante, donc :

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} \leq \ln(n) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \leq \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}$$

ce qui revient à dire que $\ln(n) \leq \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leq \ln(n+1)$.

(d) On en déduit que :

$$\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \Gamma'(1) = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

et faisant tendre n vers l'infini, il en résulte que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

3.

- (a) De la concavité de la fonction $\ln$, on déduit que $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ (la courbe est sous sa tangente en 1). En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$, on obtient l'inégalité $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x)$ pour tout $x > 0$. On a donc $\ln(x) \in \left[1 - \frac{1}{x}, x - 1\right]$ pour tout $x > 0$, ce qui nous permet d'écrire $\ln(x) = (1 - \lambda_x) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \lambda_x (x - 1)$ avec $\lambda_x \in [0, 1]$ et en utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$, on en déduit que :

$$\ln^2 x \leq (1 - \lambda_x) \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \lambda_x (x - 1)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + (x - 1)^2$$

- (b) En utilisant le théorème de transfert, on a pour tout réel $t > 0$:

$$\mathbb{E} \left(\ln \left(\frac{X_t}{t} \right) \right) = \int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{x}{t} \right) f_t(x) dx$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{x}\right) f_t(x) dx &\leq \int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{x}{t} \right) f_t(x) dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{t} - 1 \right) f_t(x) dx \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{x}\right) e^{-x} x^{t-1} dx &\leq \mathbb{E} \left(\ln \left(\frac{X_t}{t} \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{t} - 1 \right) e^{-x} x^{t-1} dx \end{aligned}$$

Pour $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{t} - 1 \right) e^{-x} x^{t-1} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{t} e^{-x} x^{t-1} dx - \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(t+1)}{t} - \Gamma(t) = 0 \end{aligned}$$

donc $\mathbb{E} \left(\ln \left(\frac{X_t}{t} \right) \right) \leq 0$.Pour $t > 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{x}\right) e^{-x} x^{t-1} dx &= \Gamma(t) - t\Gamma(t-1) = (t-1)\Gamma(t-1) - t\Gamma(t-1) \\ &= -\Gamma(t-1) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mathbb{E} \left(\ln \left(\frac{X_t}{t} \right) \right) \geq -\frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(t)} = -\frac{1}{t-1}.$$

- (c) Pour $t > 2$, on a $\Gamma(t) = (t-1)(t-2)\Gamma(t-2)$ et le théorème de transfert nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) &= \int_0^{+\infty} \ln^2\left(\frac{x}{t}\right) f_t(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} \left(\left(1 - \frac{t}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{t} - 1\right)^2\right) x^{t-1} e^{-x} dx\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \left(\left(1 - \frac{t}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{t} - 1\right)^2\right) x^{t-1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{t^2}{x^2} - 2\frac{t}{x} + \frac{x^2}{t^2} - 2\frac{x}{t}\right) x^{t-1} e^{-x} dx \\ &= 2\Gamma(t) + t^2\Gamma(t-2) - 2t\Gamma(t-1) + \frac{\Gamma(t+2)}{t^2} - \frac{2\Gamma(t+1)}{t} \\ &= \Gamma(t) \left(2 + \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} - 2\frac{t}{t-1} + \frac{t+1}{t} - 2\right) \\ &= \Gamma(t) \frac{2t^2 - t + 2}{t(t-1)(t-2)}\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\mathbb{E}\left(\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leq \frac{2t^2 - t + 2}{t(t-1)(t-2)} \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$ (la dernière inégalité équivaut à $(2t^2 - t + 2)(t-2) \leq 2t^2(t-1)$ qui revient à $3t^2 - 4t + 4 \geq 0$, ce qui est vrai pour cause de discriminant strictement négatif).

4.

- (a) Comme f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de I sur J , elle strictement monotone sur I . En supposant que f est strictement croissante, il en est de même pour f^{-1} et on a pour tout $t \in J$, en désignant par $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ les extrémités de l'intervalle I :

$$\mathbb{P}(f(Z) \leq t) = \mathbb{P}(Z \leq f^{-1}(t)) = \int_a^{f^{-1}(t)} g(x) dx$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_a^{f^{-1}(t)} g(x) dx &= \int_{f(a)}^t g(f^{-1}(u)) (f^{-1})'(u) du \\ &= \int_{f(a)}^t (g \circ f^{-1} \cdot (f^{-1})')(u) du\end{aligned}$$

(b) Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\varphi(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{O}) &= \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in \varphi^{-1}(\mathcal{O})) \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{O})} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathcal{O}} f \circ \varphi^{-1}(u_1, \dots, u_n) |\det(d\varphi^{-1}(u_1, \dots, u_n))| du_1 \cdots du_n\end{aligned}$$

5.

(a) Comme les variables aléatoires X_t et Y_j sont indépendantes, la loi de la variable aléatoire $(X_t, Y_1, \dots, Y_n)$ est donnée par :

$$\frac{x^{t-1}e^{-x}}{\Gamma(t)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(x) \prod_{k=1}^n e^{-y_k} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(y_k)$$

et on s'intéresse à la loi de la variable aléatoire $\varphi(X_t, Y_1, \dots, Y_n)$ où $\varphi : (\mathbb{R}^{+,*})^{n+1} \rightarrow]0, 1]^n \times \mathbb{R}^{+,*}$ est le $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme défini par :

$$\varphi((x, y_1, \dots, y_n)) = \left(\frac{x}{x+s_1}, \frac{x+s_1}{x+s_2}, \dots, \frac{x+s_{n-1}}{x+s_n}, x+s_n \right)$$

en notant $s_j = \sum_{k=1}^j y_k$ pour tout j compris entre 1 et n .

En notant $z = (z_0, \dots, z_n)$, on vérifie facilement que l'inverse de φ est défini par :

$$\varphi^{-1}(z) = (z_0 \cdots z_n, z_1 \cdots z_n (1 - z_0), z_2 \cdots z_n (1 - z_1), \dots, z_n (1 - z_{n-1}))$$

Pour calculer la différentielle et le déterminant jacobien de φ^{-1} , on remarque que $\varphi^{-1} = u \circ \psi$ où u est l'application linéaire définie par :

$$u(z) = (z_0, z_1 - z_0, z_2 - z_1, \dots, z_n - z_{n-1})$$

et ψ est le $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme défini par :

$$\psi(z) \mapsto (z_0 \cdots z_n, z_1 \cdots z_n, z_2 \cdots z_n, \dots, z_n)$$

On a $du = u$ et $\det(u) = 1$. La matrice jacobienne de ψ est triangulaire et de déterminant $z_1 z_2^2 \dots z_n^n$. En utilisant le résultat de la question IV.4b on obtient que la variable aléatoire $\varphi(X_t, Y_1, \dots, Y_n)$ a pour densité la fonction définie par :

$$\begin{aligned}g(z) &= f(\varphi^{-1}(z)) \cdot |\det(d\varphi^{-1}(z))| \\ &= \frac{x^{t-1}e^{-x}}{\Gamma(t)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(x) \cdot e^{-y_1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(y_1) \cdots e^{-y_n} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(y_n) \cdot z_1 z_2^2 \cdots z_n^n \\ &= \frac{e^{-z_n} z_n^{t+n-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(z_n)}{\Gamma(t)} \prod_{k=0}^{n-1} z_k^{t-1+k} \mathbf{1}_{]0,1[}(z_k)\end{aligned}$$

En utilisant la relation $\Gamma(t+n) = (t+n-1)(t+n-2) \cdots t\Gamma(t)$, cela s'écrit aussi :

$$g(z) = tz_0^{t-1}(t+1)z_1^t(t+2)z_2^{t+1} \cdots (t+n-1)z_{n-1}^{t+n-2} \frac{z_n^{t+n-1}e^{-z_n}}{\Gamma(t+n)} \\ = \frac{e^{-z_n} z_n^{t+n-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(z_n)}{\Gamma(t+n)} \prod_{k=0}^{n-1} (t+k) z_k^{t-1+k} \mathbf{1}_{]0,1[}(z_k)$$

- (b) Dans l'expression de la densité g , le premier terme $\frac{e^{-z_n} z_n^{t+n-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(z_n)}{\Gamma(t+n)}$ est la densité $f_{t+n}(z_n)$ de X_{t+n} , donc la variable aléatoire $X_t + S_n$ a la même loi que X_{t+n} et, pour k compris entre 0 et $n-1$, le terme $(t+k) z_k^{t-1+k} \mathbf{1}_{]0,1[}(z_k)$ est la densité de la variable aléatoire $\frac{X_t + S_k}{X_t + S_{k+1}}$.
- (c) La densité de $\left(\frac{X_t}{X_t + S_1}, \frac{X_t + S_1}{X_t + S_2}, \dots, \frac{X_t + S_{n-1}}{X_t + S_n}, X_t + S_n\right)$ étant le produit des densités marginales, les variables aléatoires $\frac{X_t}{X_t + S_1}, \frac{X_t + S_1}{X_t + S_2}, \dots, \frac{X_t + S_{n-1}}{X_t + S_n}$ et $X_t + S_n$ sont indépendantes.
- (d) Pour j compris entre 0 et $n-1$, l'application $\varphi_j : \mathbb{R}^{+,*} \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$ définie par $\varphi_j(y) = -\frac{y}{j+t}$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme d'inverse défini par $\varphi_j^{-1}(z) = -(j+t)z$ et Y_j a pour densité $e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(x)$, donc $-\frac{Y_j}{t+j} = \varphi_j(Y_j)$ a pour densité $e^{(j+t)z}(j+t) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(z)$.
La variable $\frac{X_t + S_j}{X_t + S_{j+1}}$ a pour densité $(t+j)z_j^{t-1+j} \mathbf{1}_{]0,1[}(z_j)$, donc la variable aléatoire $\ln\left(\frac{X_t + S_j}{X_t + S_{j+1}}\right)$ a pour densité $e^{(j+t)z}(j+t) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}(z)$.
La variable aléatoire $-\frac{Y_j}{t+j}$ ayant même densité que la variable aléatoire $\ln\left(\frac{X_t + S_j}{X_t + S_{j+1}}\right)$, ces variables ont la même loi.
- (e) Pour tout réel $t > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n,t} = 0$.
En écrivant que $d_{n+1,t} - d_{n,t} = \ln\left(1 + \frac{1}{t+n}\right) - \frac{1}{n+1}$ et en utilisant l'encadrement $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$ pour $x = 1 + \frac{1}{t+n}$, on obtient :

$$\frac{1}{t+n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{t+n}\right) \leq \frac{1}{t+n}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{-t}{(n+1)(t+n+1)} \leq d_{n+1,t} - d_{n,t} \leq \frac{1-t}{(n+1)(t+n)}$$

Il en résulte que :

$$\forall t \geq 1, |d_{n+1,t} - d_{n,t}| \leq \frac{t}{(n+1)(t+n+1)} \leq \frac{t+1}{n(n+1)}$$

et :

$$\forall t \in]0, 1[, |d_{n+1,t} - d_{n,t}| \leq \frac{1-t}{(n+1)(t+n)} \leq \frac{t+1}{n(n+1)}$$

Donc, dans tous les cas, on a $|d_{n+1,t} - d_{n,t}| \leq \frac{t+1}{n(n+1)}$. On en déduit que :

$$|d_{n,t}| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (d_{k+1,t} - d_{k,t}) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |d_{k+1,t} - d_{k,t}| \leq (t+1) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

avec $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n}$, ce qui nous donne $|d_{n,t}| \leq \frac{t+1}{n}$.

(f) En écrivant que $X_t = (X_t + S_n) \prod_{j=0}^{n-1} \frac{X_t + S_j}{X_t + S_{j+1}}$, on a :

$$\ln(X_t) = \ln(X_t + S_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \ln \left(\frac{X_t + S_j}{X_t + S_{j+1}} \right)$$

Comme $\ln(X_t + S_n)$ a même loi que $\ln(X_{t+n})$, chaque $\ln \left(\frac{X_t + S_j}{X_t + S_{j+1}} \right)$ a même loi que $-\frac{Y_j}{t+j}$ et toutes ces variables aléatoires sont indépendantes, $\ln(X_t)$ a même loi que :

$$\ln(X_{t+n}) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Y_j}{t+j} = \ln(n+t) + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{n+t}\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Y_j}{t+j}$$

et en écrivant que $\ln(n+t) = d_{n,t} - \gamma + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1}$, on déduit que $\ln(X_t)$

a même loi que $d_{n,t} - \gamma + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{j+t} \right)$.

(g) Pour tout réel $t > 2$, on a, $\mathbb{E}(\ln^2(\frac{X_t}{t})) \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$ (question IV.3c), donc :

$$\mathbb{E} \left(\ln^2 \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) \right) \leq \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui signifie que $\ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right)$ tend vers 0 en moyenne quadratique.

- (h) La série de variables aléatoires $\sum \left(\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{j+t} \right)$ converge en moyenne quadratique (la norme L^2 du terme général est dominée par $\frac{1}{j^2}$), la suite de variables aléatoires $\left(\ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 en moyenne quadratique et la suite $(d_{n,t})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, donc la suite de variables aléatoires de terme général :

$$S_n = -\gamma + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{j+t} \right) + \ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) + d_{n,t}$$

(qui a même loi que $\ln(X_t)$) converge en moyenne quadratique vers la variable aléatoire $S = -\gamma + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{j+t} \right)$. Comme la convergence en moyenne quadratique entraîne la convergence en loi, cette suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers S et en conséquence, $\ln(X_t)$ a même loi que S .

6.

- (a) Pour tout entier $n \geq 2$, la variable aléatoire $2 \ln(X_{2t})$ a même loi que :

$$T_n = -2\gamma + 2 \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{j+2t} \right) + 2 \ln \left(\frac{X_{2t+n}}{2t+n} \right) + 2d_{n,2t}$$

En notant $U_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{j+2t} \right)$ et $p_n = \left[\frac{n-1}{2} \right]$ (partie entière de $\frac{n-1}{2}$), on a :

$$\begin{aligned} 2U_n &= 2 \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{Y_{2k}}{2k+2t} \right) + 2 \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{Y_{2k+1}}{2k+1+2t} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{Y_{2k}}{k+t} \right) + \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{2k+1}}{k+\frac{1}{2}+t} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{2k}}{k+t} \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{2k+1}}{k+\frac{1}{2}+t} \right) \end{aligned}$$

On a vu que $\ln(X_t)$ a même loi que :

$$d_{p_n+1,t} - \gamma + \ln \left(\frac{X_{t+p_n+1}}{t+p_n+1} \right) + \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{2k}}{k+t} \right)$$

(les Y_j suivent la même loi, donc Y_k peut être remplacé par Y_{2k}), donc $2 \ln(X_{2t})$ a même loi que :

$$\ln(X_t) + \ln(X_{t+\frac{1}{2}}) + 2 \ln\left(\frac{X_{2t+n}}{2t+n}\right) - \ln\left(\frac{X_{t+m}}{t+m}\right) - \ln\left(\frac{X_{t+\frac{1}{2}+p}}{t+\frac{1}{2}+p}\right) + r_n$$

où on a noté :

$$\begin{aligned} r_n &= 2d_{n,2t} - d_{m,t} - d_{[\frac{n}{2}],t+\frac{1}{2}} + \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2d_{n,2t} - d_{m,t} - d_{[\frac{n}{2}],t+\frac{1}{2}} + 2 \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} \right) \end{aligned}$$

Comme la suite $(d_{n,t})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} \right) &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \ln(2n+1) \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \ln(n) \right) + \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) - \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

tend vers $\ln(2)$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 2 \ln(2)$.

(b) De la question précédente, on déduit que X_{2t}^2 a même loi que :

$$X_t X_{t+\frac{1}{2}} \left(\frac{X_{2t+n}}{2t+n} \right)^2 \left(\frac{X_{t+m}}{t+m} \right)^{-1} \left(\frac{X_{t+p+\frac{1}{2}}}{t+p+\frac{1}{2}} \right)^{-1} e^{r_n}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{r_n} = 4$. Pour $t = \frac{1}{2}$, on aboutit à :

$$X_{\frac{1}{2}}^s X_1^s \left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \right)^{2s} \left(\frac{X_{m+1/2}}{m+\frac{1}{2}} \right)^{-s} \left(\frac{X_{p+1}}{p+1} \right)^{-s} e^{sr_n}$$

Toutes ces variables aléatoires étant indépendantes, on en déduit que :

$$\frac{\mathbb{E}(X_1^{2s})}{e^{sr_n}} = \mathbb{E}(X_{\frac{1}{2}}^s) \mathbb{E}(X_1^s) \mathbb{E} \left(\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \right)^{2s} \right) \mathbb{E} \left(\left(\frac{X_{m+1/2}}{m+\frac{1}{2}} \right)^{-s} \right) \mathbb{E} \left(\left(\frac{X_{p+1}}{p+1} \right)^{-s} \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \right)^{2s} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\left(\frac{X_{m+1/2}}{m+\frac{1}{2}} \right)^{-s} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\left(\frac{X_{p+1}}{p+1} \right)^{-s} \right) = 1 \end{aligned}$$

(théorème de transfert et $\Gamma(s+1) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s}$), ce qui donne :

$$\mathbb{E}(X_1^{2s}) = 4^s \mathbb{E}(X_{\frac{1}{2}}^s) \mathbb{E}(X_1^s)$$

avec :

$$\mathbb{E}(X_1^{2s}) = \int_0^{+\infty} x^{2s} e^{-x} dx = \Gamma(2s+1)$$

$$\mathbb{E}(X_{\frac{1}{2}}^s) = \int_0^{+\infty} x^s \frac{x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}}{\Gamma(\frac{1}{2})} dx = \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$\mathbb{E}(X_1^s) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = \Gamma(s+1)$$

On aboutit donc à $\Gamma(2s+1) = 4^s \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})\Gamma(s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}$, soit :

$$4^s \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) \Gamma(s+1) = \Gamma(2s+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

ou encore $2^{2s-1} \Gamma(s) \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \Gamma(2s) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Deuxième partie

Exercices et problèmes d'algèbre et de géométrie

Chapitre 10

Groupes, anneaux, corps

Exercice 10.1. Involutions dans S_n

Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par u_n le nombre de permutations de l'ensemble $I_n = \{1, \dots, n\}$ d'ordre au plus égal à 2 (les involutions de S_n). On note $u_0 = u_1 = 1$.

1. Montrer que, pour tout entier r compris entre 2 et n , il y a $\frac{n!}{r(n-r)!}$ cycles d'ordre r dans S_n .
2. Calculer u_2, u_3 et u_4 .
3. Montrer que $u_n = u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.
4. En notant $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{n!} X^n$ la série génératrice (formelle) de la suite $\left(\frac{u_n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ($\frac{u_n}{n!}$ est la proportion d'involutions dans S_n), montrer que $S' = (1+X)S$, en déduire que $S = e^X e^{\frac{X^2}{2}}$, puis que $u_n = \sum_{p+2q=n} \frac{n!}{2^q p! q!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer le nombre v_n d'involutions de I_n sans point fixe, en convenant que $v_0 = 1$ et en remarquant que $v_1 = 0$.
6. Déterminer le nombre w_n d'involutions de I_n ayant un unique point fixe, en convenant que $w_0 = 0$ et en remarquant que $w_1 = 1$.

Solution. Pour $i \neq j$ dans I_n , on note $\tau_{i,j}$ la transposition (i, j) .

1. Pour définir un r -cycle, on choisit d'abord une liste $(k_1, \dots, k_r)$ dans I_n , ce qui nous donne $A_n^r = r! \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$ possibilités. Pour un tel choix de la partie $\{k_1, \dots, k_r\}$ de I_n , les r permutations circulaires :

$$(k_1, \dots, k_r), (k_2, k_3, \dots, k_r, k_1), \dots, (k_r, k_1, \dots, k_{r-1})$$

donnent le même cycle, les autres permutations donnant des cycles différents, il y a donc $\frac{A_n^r}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!} = (r-1)! \binom{n}{r}$ possibilités. Par exemple, il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ transpositions.

2. On a :

- (a) $S_2 = \{Id, \tau_{1,2}\}$ et ses éléments sont d'ordre 1 ou 2, donc $u_2 = 2$;
- (b) $S_3 = \{Id, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}, \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} = (1, 2, 3), \tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} = (1, 3, 2)\}$, donc $u_3 = 4$;
- (c) $S_4 = \{Id, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{1,4}, \tau_{2,3}, \tau_{2,4}, \tau_{3,4}, \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4}, \tau_{1,3} \circ \tau_{2,4}, \tau_{1,4} \circ \tau_{2,3}, \dots\}$, donc $u_4 = 10$.

3. On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des involutions dans S_n partitionné en $\mathcal{H}_n = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{H}_{n,k}$

où on a noté, pour tout k compris entre 1 et n , $\mathcal{H}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{H}_n \mid \sigma(n) = k\}$. Se donner une involution dans $\mathcal{H}_{n,n}$ revient à se donner une involution dans S_{n-1} , donc $\mathcal{H}_{n,n}$ est en bijection avec $\mathcal{H}_{n-1}$ et $\text{card}(\mathcal{H}_{n,n}) = u_{n-1}$. Pour tout k compris entre 1 et $n-1$ et toute permutation σ dans $\mathcal{H}_{n,k}$, on a $\sigma(n) = k$, $\sigma(k) = \sigma^{-1}(k) = n$ et la restriction de σ à $I_n \setminus \{k, n\}$ est une involution, donc se donner une involution dans $\mathcal{H}_{n,k}$ revient à se donner une involution dans S_{n-2} . Il en résulte que $\text{card}(\mathcal{H}_{n,k}) = u_{n-2}$. On en déduit donc que :

$$u_n = u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}$$

4. Dans l'anneau $\mathbb{R}[[X]]$ des séries formelles, on a :

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} X^n = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n + nu_{n-1}}{n!} X^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{n!} X^n + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} X^n = (1+X)S \end{aligned}$$

En notant $T = e^X e^{\frac{X^2}{2}}$, on a $T' = (1+X)T$, donc $\frac{S'}{S} = 1+X = \frac{T'}{T}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $S = \lambda T$. L'identification des coefficients de X^0 nous donne $u_0 = \lambda$, soit $\lambda = 1$. On a donc $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{n!} X^n = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} X^n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \frac{X^{2n}}{2^n} \right)$, ce qui revient à dire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} b_{n-k} = \sum_{k+j=n} \frac{1}{k!} b_j$$

où on a noté $b_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$ et $b_{2n+1} = 0$. On a donc :

$$u_n = n! \sum_{p+2q=n} \frac{1}{2^q p! q!} = \sum_{0 \leq q \leq \frac{n}{2}} \frac{(2q)!}{2^q q!} \frac{n!}{(n-2q)! (2q)!} = \sum_{0 \leq q \leq \frac{n}{2}} \frac{(2q)!}{2^q q!} \binom{n}{2q}$$

Soit $u_{2n} = \sum_{q=0}^n \frac{(2q)!}{2^q q!} \binom{2n}{2q}$ et $u_{2n+1} = \sum_{q=0}^n \frac{(2q)!}{2^q q!} \binom{2n+1}{2q}$.

5. Pour $n \geq 2$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des involutions sans point fixe dans $\mathcal{S}_n$ que l'on partitionne en $\mathcal{P}_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{P}_{n,k}$ en notant pour k compris entre 1 et n , $\mathcal{P}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{P}_n \mid \sigma(n) = k\}$. Pour $1 \leq k \leq n-1$ et $\sigma \in \mathcal{P}_{n,k}$, on a $\sigma(n) = k$, $\sigma(k) = \sigma^{-1}(k) = n$ et la restriction de σ à $I_n \setminus \{k, n\}$ est une involution sans point fixe, donc se donner une involution dans $\mathcal{P}_{n,k}$ revient à se donner une involution sans point fixe dans $\mathcal{S}_{n-2}$. Il en résulte que $\text{card}(\mathcal{P}_{n,k}) = v_{n-2}$. On en déduit alors que $v_n = (n-1)u_{n-2}$. Pour $n = 2$, la transposition $\tau_{1,2}$ est la seule involution sans point fixe, donc $v_2 = 1 = v_0$. Par récurrence, on en déduit que $v_{2n+1} = 0$ et $v_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.
6. Pour $n \geq 2$, on note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des involutions ayant un unique point fixe dans $\mathcal{S}_n$ que l'on partitionne en $\mathcal{U}_n = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{U}_{n,k}$ où on a noté pour tout k compris entre 1 et n , $\mathcal{U}_{n,k} = \{\sigma \in \mathcal{U}_n \mid \sigma(k) = k\}$. Pour tout k compris entre 1 et n et toute permutation σ dans $\mathcal{U}_{n,k}$, la restriction de σ à $I_n \setminus \{k\}$ est une involution sans point fixe, donc se donner une involution dans $\mathcal{U}_{n,k}$ revient à se donner une involution sans point fixe dans $\mathcal{S}_{n-1}$. Il en résulte que $\text{card}(\mathcal{U}_{n,k}) = v_{n-1}$. On en déduit donc que $w_n = \text{card}(\mathcal{U}_n) = nv_{n-1}$, soit $w_{2n} = 0$ et $w_{2n+1} = (2n+1) \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \binom{2n+1}{2n}$.

Exercice 10.2. Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par translation

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif. Pour n, m dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices à n lignes, m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n . E, F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $\mathcal{L}(E, F)$ est l'espace des applications linéaires de E dans F .

1. Soit u une application linéaire de E dans F . Montrer que pour tout supplémentaire V de $\ker(u)$ dans E , la restriction $u|_V$ de u à V est un isomorphisme de V sur $\text{Im}(u)$.
2. Soient u, v deux applications linéaires de E dans F .
 - (a) Montrer que l'inclusion $\ker(u) \subset \ker(v)$ est réalisée si, et seulement si, il existe une unique application linéaire $w : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(v)$ telle que $v(x) = w(u(x))$ pour tout $x \in E$.
 - (b) En désignant par V un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E et par W un supplémentaire de $\ker(v)$ dans E , montrer que l'inclusion $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(u)$ est réalisée si, et seulement si, il existe une application linéaire $w : W \rightarrow V$ telle que $v(x) = u(w(x))$ pour tout $x \in W$.

(c) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \mapsto & P \cdot A = PA \end{array}$$

définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (action de translation à gauche) et deux matrices sont dans la même orbite si, et seulement si, elles ont même noyau (en identifiant une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ à l'application linéaire $u : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ qu'elle définit dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$). Le noyau est un invariant total pour cette action par translation à gauche.

(d) On considère, pour $n \geq 1$, l'action de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par $A \cdot X = AX$ pour $(A, X) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. Montrer que les orbites sont les sphères de centre 0 ($\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire euclidien usuel).

(e) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} GL_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \mapsto & P \cdot A = AP^{-1} \end{array}$$

définit une action de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (action de translation à droite) et deux matrices sont dans la même orbite si, et seulement si, elles ont même image. L'image est un invariant total pour cette action par translation à droite.

3. $\mathbb{F}_q$ étant un corps fini à q éléments, on fait agir $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{F}_q)$ par translation à gauche et on note $u_n = \text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q))$.

(a) Calculer le cardinal de l'orbite de $E_1 = (\delta_{i,1})_{1 \leq i \leq n}$ pour cette action ($\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker).

(b) Calculer en fonction de u_{n-1} , pour $n \geq 2$, le cardinal du stabilisateur de E_1 pour cette action.

(c) En déduire une expression de u_n .

Solution.

1. V étant un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E , on a $\ker(u|_V) = V \cap \ker(u) = \{0\}$ ce qui signifie que $u|_V$ est injective. Pour tout $y = u(x) = u(x_1 + x_2) \in \text{Im}(u)$ avec $(x_1, x_2) \in \ker(u) \times V$, on a $y = u(x_1) + u(x_2) = u(x_2) = u|_V(x_2)$, donc $u|_V$ est surjective de V sur $\text{Im}(u)$ et c'est un isomorphisme.

2.

(a) La condition suffisante est évidente (si $v = w \circ u$, on a alors pour tout $x \in \ker(u)$, $v(x) = w(u(x)) = w(0) = 0$). Réciproquement, supposons que $\ker(u) \subset \ker(v)$. On peut alors définir $w : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(v)$ par :

$$\forall y = u(x) \in \text{Im}(u), w(y) = v(x)$$

En effet, si $y = u(x) = u(x')$, on a alors $x' - x \in \ker(u)$, donc $x' - x \in \ker(v)$ et $v(x') = v(x)$, ce qui nous dit que w est bien définie. On vérifie facilement que cette application est linéaire. En effet, pour $y = u(x)$, $y' = u(x')$ dans $\text{Im}(u)$ et λ dans $\mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} (w(y + \lambda y')) &= w(u(x) + \lambda u(x')) = w(u(x + \lambda x')) \\ &= v(x + \lambda x') = v(x) + \lambda v(x') = w(y) + \lambda w(y') \end{aligned}$$

Par construction, on a $v(x) = w(u(x))$ pour tout $x \in E$. Une telle application w est unique. En effet, si w' est une autre solution, on a alors pour tout $y = u(x) \in \text{Im}(u)$, $w'(y) = w'(u(x)) = v(x) = w(u(x)) = w(y)$.

- (b) On a $E = \ker(u) \oplus V = \ker(v) \oplus W$. S'il existe une application linéaire $w : W \rightarrow V$ telle que $v(x) = u(w(x))$ pour tout $x \in W$, on a alors pour tout $y = v(x) = v(x_1 + x_2) \in \text{Im}(v)$ avec $(x_1, x_2) \in \ker(v) \times W$, $y = v(x_2) = u(w(x_2)) \in \text{Im}(u)$, donc $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(u)$. Réciproquement, supposons que $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(u)$. Comme $u|_V$ est un isomorphisme de V sur $\text{Im}(u)$, on a pour tout $x \in W$, $v(x) = u|_V \left((u|_V)^{-1}(v(x)) \right) = u(w(x))$ avec $w = (u|_V)^{-1} \circ v : W \rightarrow V$ qui est linéaire.

3. On vérifie facilement que cette application définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. En effet, pour A dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ on a $I_n \cdot A = A$ et pour P, Q dans $GL_n(\mathbb{K})$, $Q \cdot (P \cdot A) = Q(PA) = (QP)A = (QP) \cdot A$. Soient A, B dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et u, v les applications linéaires qu'elles définissent dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$. Ces matrices sont dans la même orbite si, et seulement si, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PA$, donc $A = P^{-1}B$ et $\ker(u) = \ker(v)$ ($AX = 0$ équivaut à $BX = 0$). Réciproquement si $\ker(u) = \ker(v)$, on vérifie alors avec les notations de la question précédente que l'application linéaire $w : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(v)$ est un isomorphisme. En effet si $y = u(x) \in \ker(w)$, on a alors $v(x) = w(y) = 0$, donc $x \in \ker(v) = \ker(u)$ et $y = u(x) = 0$. On a donc $\ker(w) = \{0\}$ et w est un isomorphisme puisque $\ker(u) = \ker(v)$ est de dimension finie. En désignant respectivement par F et G un supplémentaire de $\text{Im}(u)$ et $\text{Im}(v)$ dans $\mathbb{K}^n$, on a alors $\dim(F) = n - \dim(\ker(u)) = n - \dim(\ker(v)) = \dim(G)$, donc il existe un isomorphisme w' de F sur G . L'application linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^n = \text{Im}(u) \oplus F &\rightarrow \mathbb{K}^n = \text{Im}(v) \oplus G \\ x = u(x_1) + x_2 &\mapsto w(u(x_1)) + w'(x_2) \end{aligned}$$

est alors un isomorphisme et pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $\varphi(u(x)) = w(u(x)) = v(x)$, donc $v = \varphi \circ u$ et $B = PA$, où $P \in GL_n(\mathbb{K})$ est la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Les matrices A et B sont donc dans la même orbite.

4. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot X = \{AX \mid A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$. Pour tout $Y \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot X$, il existe $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $Y = AX$ et $\|Y\| = \|AX\| = \|X\|$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot X \subset S(0, \|X\|)$. Réciproquement si $Y \in S(0, \|X\|)$ avec $X \neq 0$, on a $Y \neq 0$ et on peut construire deux bases orthonormées $\mathcal{B} = (E_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{B}' = (E'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $E_1 = \frac{1}{\|X\|}X$ et $E'_1 = \frac{1}{\|Y\|}Y$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est alors orthogonale et $Y = \|Y\| E'_1 = \|X\| A E_1 = AX$, donc

$Y \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot X$. On a donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot X = S(0, \|X\|)$ pour $X \neq 0$. Pour $X = 0$, on a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cdot X = \{0\} = S(0, \|X\|)$.

5. On a une action de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. En effet, pour A dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et P, Q dans $GL_m(\mathbb{K})$, on a $I_m \cdot A = A$ et :

$$Q \cdot (P \cdot A) = Q(A P^{-1}) = (A P^{-1}) Q^{-1} = A (Q P)^{-1} = (Q P) \cdot A$$

Soient A, B dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et u, v les applications linéaires qu'elles définissent dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$. Ces matrices sont dans la même orbite si, et seulement si, il existe $P \in GL_m(\mathbb{K})$ telle que $B = A P^{-1}$, donc $A = B P$ et $\text{Im}(u) = \text{Im}(v)$ ($A X = B(P X)$ et $B X = A(P^{-1} X)$). Réciproquement si $\text{Im}(u) = \text{Im}(v)$, on vérifie alors avec les notations de la question précédente que l'application linéaire $w : W \rightarrow V$ est un isomorphisme. En effet si $x \in \ker(w)$, on a alors $v(x) = u(w(x)) = 0$, donc $x \in \ker(v) \cap W = \{0\}$ et $x = 0$. On a donc $\ker(w) = \{0\}$ et w est un isomorphisme puisque V et W sont de même dimension finie. Comme $\ker(u)$ et $\ker(v)$ sont de même dimension finie, il existe un isomorphisme w' de $\ker(v)$ sur $\ker(u)$. L'application linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^m = \ker(v) \oplus W &\rightarrow \mathbb{K}^m = \ker(u) \oplus V \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto w'(x_1) + w(x_2) \end{aligned}$$

est alors un isomorphisme et pour tout $x = x_1 + x_2 \in \mathbb{K}^m = \ker(v) \oplus W$, on a $u(\varphi(x)) = u(w(x_2)) = v(x_2) = v(x)$, donc $v = u \circ \varphi$ et $B = A P^{-1}$, où $P \in GL_m(\mathbb{K})$ est la matrice de φ^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{K}^m$. Les matrices A et B sont donc dans la même orbite.

6.

- (a) Cette orbite est :

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{F}_q) \cdot E_1 &= \{B = (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{F}_q) \mid \ker(B) = \ker(E_1) = \{0\}\} \\ &= \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q) \cdot E_1) = q^n - 1.$$

- (b) Ce stabilisateur est :

$$\text{Stab}(E_1) = \{P \in GL_n(\mathbb{F}_q) \mid P E_1 = E_1\} = \left\{P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & P' \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{F}_q)\right\}$$

$$\text{donc } \text{card}(\text{Stab}(E_1)) = \text{card}(\mathbb{F}_q^{n-1}) \text{card}(GL_{n-1}(\mathbb{F}_q)) = q^{n-1} u_{n-1}.$$

- (c) On a donc :

$$q^n - 1 = \text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q) \cdot E_1) = \frac{\text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q))}{\text{card}(\text{Stab}(E_1))} = \frac{u_n}{q^{n-1} u_{n-1}}$$

soit $u_n = q^{n-1} (q^n - 1) u_{n-1}$. Par récurrence, on en déduit que, pour tout

$$\text{entier } n \geq 2, \text{ on a } u_n = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^n (q^k - 1).$$

Exercice 10.3. Action de $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par équivalence

En utilisant les notations de l'exercice précédent, on note $E = \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $G = GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$.

1.

(a) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} G \times E &\rightarrow E \\ ((P, Q), A) &\mapsto (P, Q) \cdot A = PAQ^{-1} \end{aligned}$$

définit une action à gauche de G sur E . Cette action de groupes est l'action de Steinitz. Deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes et cela revient aussi à dire qu'elles représentent la même application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ dans des bases différentes.

(b) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à $A_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,m-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{pmatrix}$, l'entier r étant compris entre 0 et $\min(n, m)$ (pour $r = 0$, A_0 est la matrice nulle).

(c) Montrer que les orbites pour l'action par équivalence sont les ensembles $\mathcal{O}_r = \{A \in E \mid \text{rg}(A) = r\}$, où r est compris entre 0 et $\min(n, m)$. Le rang est un invariant total pour cette action.

2. Montrer la densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en utilisant le résultat de la question 1b.
3. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ (corps à deux éléments) et $n = m = 2$, déterminer toutes les orbites pour l'action par équivalence sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2)$.
4. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les orbites pour l'action par équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont-elles connexes ?
5. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est équivalente à sa transposée.
6. Montrer que, pour $\mathbb{K}$ ayant au moins 3 éléments, toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est somme de deux matrices inversibles.
7. $\mathbb{F}_q$ étant un corps fini à q éléments, montrer que le cardinal d'une orbite pour l'action par équivalence sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F}_q)$ vaut :

$$\text{card}(\mathcal{O}_r) = \frac{q^{\frac{r(r-1)}{2}}}{\prod_{k=1}^r (q^k - 1)} \prod_{k=n-r+1}^n (q^k - 1) \prod_{k=m-r+1}^m (q^k - 1)$$

8. En utilisant un théorème de trigonalisation, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

9. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que les orbites pour l'action par équivalence sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ sont toutes connexes et l'adhérence d'une orbite $\mathcal{O}_r$ est l'ensemble $\bigcup_{s=0}^r \mathcal{O}_s$ des matrices de rang au plus égal à r .
10. Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ qui se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sont dans la même orbite.
11. On considère l'action de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$] sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [resp. sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$] définie par $(\Omega_1, \Omega_2) \cdot A = \Omega_1 A {}^t\Omega_2$. En utilisant le théorème de décomposition polaire, montrer que deux matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [resp. dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$] sont orthogonalement [resp. unitairement] équivalentes si, et seulement si, les matrices ${}^tAA$ et ${}^tBB$ [resp. ${}^t\overline{A}A$ et ${}^t\overline{B}B$] ont les mêmes valeurs propres (i.e. A et B ont les mêmes valeurs singulières).

Solution.

1.

- (a) On vérifie facilement que cette application définit bien une action à gauche de G sur E . En effet, pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ on a $(I_n, I_m) \cdot A = A$ et pour (R, S) et (P, Q) dans G :

$$(R, S) \cdot ((P, Q) \cdot A) = R(PAQ^{-1})S^{-1} = (RP)A(SQ)^{-1} = (RP, SQ) \cdot A$$

- (b) Pour $r = 0$, on a $A = 0 = A_0$. Pour $r \geq 1$, en désignant par $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire de matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$, H un supplémentaire de $\ker(u)$ dans $\mathbb{K}^m$, $\mathcal{B}_1 = (e_i)_{1 \leq i \leq r}$ une base de H et $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(u)$, le système $u(\mathcal{B}_1) = (u(e_i))_{1 \leq i \leq r}$ qui est libre dans

$\mathbb{K}^n$ (si $\sum_{k=1}^r \lambda_k u(e_k) = 0$, alors $\sum_{k=1}^r \lambda_k e_k \in H \cap \ker(u) = \{0\}$ et tous les λ_k

sont nuls) se complète en une base $\mathcal{B} = (u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_n)$ de $\mathbb{K}^n$ et la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de $\mathbb{K}^m$ et $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ a alors la forme indiquée, ce qui signifie que A est équivalente à A_r . La réciproque est évidente.

- (c) Pour tout entier r compris entre 0 et $\min(n, m)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_r &= \{A \in E \mid \text{rg}(A) = r\} = \{A \in E \mid \exists (P, Q) \in G \mid A = PA_r Q^{-1}\} \\ &= G \cdot A_r \end{aligned}$$

et on a la partition $E = \bigcup_{r=0}^{\min(n,m)} \mathcal{O}_r = \bigcup_{r=0}^{\min(n,m)} G \cdot A_r$, ce qui nous donne toutes les orbites.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r . Si $r = 0$, on a alors $A = 0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} I_n$. Si $r > 0$, il existe alors deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PA_r Q$, où

$A_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$. On a alors $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} P M_k Q$, où $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est la suite de matrices inversibles définies par $M_k = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \frac{1}{k} I_{n-r} \end{pmatrix}$. Il en résulte que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. On a $\text{card}(\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2)) = 16$, $\text{card}(GL_2(\mathbb{F}_2)) = 6$ et les orbites sont $\mathcal{O}_0 = \{0\}$ et :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2 &= \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2) \mid \text{rg}(A) = 2\} = GL_2(\mathbb{F}_2) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2) \mid \text{rg}(A) = 1\} = \mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2) \setminus (\{0\} \cup GL_2(\mathbb{F}_2)) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &\cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

4. Pour $r = n$, $\mathcal{O}_n = GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$. Pour $n \geq 2$ et $r \leq n-1$, une matrice $A \in \mathcal{O}_r$ s'écrit $A = P A_r R$ avec P, R dans $GL_n(\mathbb{R})$ et on peut toujours se ramener à P, R dans $GL_n^+(\mathbb{R})$. En effet si $P \in GL_n^-(\mathbb{R})$, la matrice $P' = P D_n(-1)$ où $D_n(-1) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est dans $GL_n^+(\mathbb{R})$ (la multiplication à droite par cette matrice de dilatation a pour effet de multiplier la colonne n de P par -1) et $D_n(-1) A_r = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_r$ puisque $r \leq n-1$. De même si $R \in GL_n^-(\mathbb{R})$, la matrice $R' = D_n(-1) R$ est dans $GL_n^+(\mathbb{R})$ (multiplication la ligne n de R par -1) et $A_r D_n(-1) = A_r$. La connexité de $\mathcal{O}_r$ résulte alors de celle de $GL_n^+(\mathbb{R})$.
5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r , il existe alors $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P A_r Q^{-1}$, donc ${}^t A = ({}^t Q)^{-1} A_r {}^t P$ est équivalente à A_r et en conséquence à la matrice A .
6. Pour $\mathbb{K}$ infini, il suffit d'écrire que $A = (A - \lambda I_n) + \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^* \setminus \text{Sp}(A)$, où $\text{Sp}(A)$ est l'ensemble (fini) des valeurs propres de A . Pour $\mathbb{K}$ fini différent de $\mathbb{F}_2$ et A de rang r , il existe P, Q inversibles telles que $A = P A_r Q^{-1}$ et on écrit que $A = P (A_r - \lambda I_n) Q^{-1} + \lambda P Q^{-1}$ avec $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.
7. On a $\text{card}(\mathcal{O}_0) = 1$ et pour r compris entre 1 et $\min(n, m)$, on a

$$\text{card}(\mathcal{O}_r) = \text{card}(G.A_r) = \frac{\text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q) \times GL_m(\mathbb{F}_q))}{\text{card}(\text{Stab}(A_r))}$$

où $\text{Stab}(A_r) = \{(P, Q) \in GL_n(\mathbb{F}_q) \times GL_m(\mathbb{F}_q) \mid PA_r = A_r Q\}$. En écrivant $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$, l'égalité $PA_r = A_r Q$ équivaut à :

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soit à $P_1 = Q_1$, $P_3 = 0$ et $Q_2 = 0$, donc $\text{Stab}(A_r)$ est l'ensemble des couples $\left(\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} \right)$ tels que $P_1 \in GL_r(\mathbb{F}_q)$, $P_4 \in GL_{n-r}(\mathbb{F}_q)$, $Q_4 \in GL_{m-r}(\mathbb{F}_q)$, $P_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{F}_q)$ et $Q_3 \in \mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{F}_q)$, ce qui nous donne en notant $u_n = \text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q))$ pour tout entier naturel non nul n :

$$\text{card}(\mathcal{O}_r) = \frac{u_n u_m}{u_r u_{n-r} u_{m-r} \text{card}(\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{F}_q)) \text{card}(\mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{F}_q))}$$

où $u_n = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^n (q^k - 1)$ et $\text{card}(\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{F}_q)) = \text{card}(\mathbb{F}_q^{r(n-r)}) = q^{r(n-r)}$, donc :

$$\text{card}(\mathcal{O}_r) = \frac{q^{\frac{r(r-1)}{2}}}{\prod_{k=1}^r (q^k - 1)} \prod_{k=n-r+1}^n (q^k - 1) \prod_{k=m-r+1}^m (q^k - 1) \\ = \frac{q^{r(r-1)}}{\text{card}(GL_r(\mathbb{F}_q))} \prod_{k=n-r+1}^n (q^k - 1) \prod_{k=m-r+1}^m (q^k - 1)$$

Cette formule est symétrique en (n, m) , ce qui est normal car une matrice et sa transposée ont le même rang. Pour $n \leq m$ et $r = n$, cela donne :

$$\text{card}(\mathcal{O}_n) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=m-n+1}^m (q^k - 1)$$

et $\text{card}(\mathcal{O}_n) = \text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q))$ pour $m = n$. Pour $r = 1$, cela donne $\text{card}(\mathcal{O}_1) = \frac{(q^n - 1)(q^m - 1)}{q - 1}$.

8. Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T = ((m_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$ telles que $A = PTP^{-1}$. On note, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $m_{jj} = \rho_j e^{i\theta_j}$ avec $\rho_j > 0$ (on a $\det(T) = \det(A) \neq 0$, donc les m_{ij} sont tous non nuls) et on définit un chemin continu $\varphi : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall t \in [0, 1], \varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ 0 & \varphi_{22}(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \varphi_{n-1,n-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

où :

$$\varphi_{ij}(t) = \begin{cases} t m_{ij} & \text{si } 1 \leq i < j \leq n \\ (1-t)e^{it\theta_j} + t m_{jj} & \text{si } i = j \end{cases}$$

On a alors $\varphi(0) = I_n$, $\varphi(1) = T$ et $\gamma : t \mapsto P\varphi(t)P^{-1}$ est un chemin continu qui relie la matrice identité à la matrice A dans $GL_n(\mathbb{C})$.

9.

- (a) Pour $r = 0$, il n'y a rien à montrer ($\mathcal{O}_0 = \{0\}$). On suppose donc que $r \geq 1$. Pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{O}_r$ il existe (P, R) dans $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_m(\mathbb{C})$ telles que $B = PAR$. En désignant par γ_1 et γ_2 deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_m(\mathbb{C})$ respectivement telles que $\gamma_1(0) = I_n$, $\gamma_2(0) = I_m$, $\gamma_1(1) = P$, $\gamma_2(1) = R$ ($GL_r(\mathbb{C})$ est connexe par arcs), l'application $\gamma : t \mapsto \gamma_1(t)A\gamma_2(t)$ est un chemin continu qui relie A et B dans $\mathcal{O}_r$. L'orbite $\mathcal{O}_r$ est donc connexe par arcs et en conséquence connexe.

On peut aussi dire que $\mathcal{O}_r$ est connexe comme image du connexe $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_m(\mathbb{C})$ par l'application continue $\varphi : (P, R) \mapsto PAR$.

- (b) Pour $r = 0$, on a $\mathcal{O}_0 = \overline{\mathcal{O}_0} = \{0\}$. Pour $1 \leq r \leq \min(n, m)$, en écrivant

$$\text{pour } 0 \leq s \leq r \text{ que } A_s = \lim_{k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k}I_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_{s,k} \text{ (tou-}$$

jours avec la convention $I_0 = 0$), on voit que A_s est dans $\overline{\mathcal{O}_r}$ et il en est de même de toute matrice A de rang r (elle s'écrit $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} PA_{s,k}Q^{-1}$),

donc l'ensemble $\bigcup_{s=0}^r \mathcal{O}_s$ des matrices de rang au plus égal à r est contenu

dans $\overline{\mathcal{O}_r}$. Cet ensemble étant fermé (c'est l'ensemble des matrices dont tous les déterminants extraits d'ordre $p+1$ sont nuls) et contenant $\mathcal{O}_r$, c'est l'adhérence de $\mathcal{O}_r$.

- (c) $\mathcal{O}_0 = \{0\}$ est l'unique orbite fermée et $\mathcal{O}_{\min(n,m)}$ est l'unique orbite ouverte

$$(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{O}_{\min(n,m)}) = \overline{\mathcal{O}_{\min(n,m)-1}} \text{ et pour } r \leq n-1, \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \frac{1}{k}I_{n-r} \end{pmatrix}$$

n'est pas dans $\mathcal{O}_r$ pour $k \geq 1$ assez grand).

10. Supposons que A' se déduise de A par opérations élémentaires sur les lignes et notons L_i les lignes de A , L'_i celles de A' , où i varie entre 1 et n . Chaque ligne de A' étant combinaison linéaire de celles de A , le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(L_1, \dots, L_n)$ de $\mathbb{K}^m$ est contenu dans le sous-espace $F' = \text{Vect}(L'_1, \dots, L'_n)$ et comme A se déduit aussi de A' par opérations élémentaires, on a également $F' \subset F$ et en définitive $F = F'$, ce qui implique A et A' sont de même rang, donc dans la même orbite $\mathcal{O}_r$.
11. Si A, B sont orthogonalement équivalentes, il existe alors deux matrices orthogonales Ω_1, Ω_2 telles que $B = \Omega_1 A \Omega_2$, donc ${}^t B = \Omega_2 {}^t A \Omega_1$ et ${}^t B B = \Omega_2 {}^t A \Omega_1 \Omega_1 A \Omega_2 = \Omega_2 ({}^t A A) \Omega_2$ est semblable à ${}^t A A$ et en conséquence, ces matrices (symétriques réelles) ont le même spectre. Réciproquement, supposons que A et B ont les mêmes valeurs singulières. Le

théorème de décomposition polaire nous dit qu'il existe des matrices orthogonales Ω_1, Ω_2 et des matrices symétriques positives telles que $A = \Omega_1 S_1$ et $B = \Omega_2 S_2$. La matrice ${}^t A A = {}^t S_1 {}^t \Omega_1 \Omega_1 S_1 = S_1^2$ a les mêmes valeurs propres que ${}^t B B = S_2^2$, donc S_1 et S_2 qui sont diagonalisables ont les mêmes valeurs propres (réelles positives) et on a $S_1 = \Omega_3 D {}^t \Omega_3$, $S_2 = \Omega_4 D {}^t \Omega_4$ avec Ω_3, Ω_4 orthogonales et D symétrique réelle positive, donc :

$$\begin{aligned} B &= \Omega_2 S_2 = \Omega_2 \Omega_4 D {}^t \Omega_4 = \Omega_2 \Omega_4 {}^t \Omega_3 S_1 \Omega_3 {}^t \Omega_4 \\ &= (\Omega_2 \Omega_4 {}^t \Omega_3 {}^t \Omega_4) A (\Omega_3 {}^t \Omega_4) = \Omega_5 A {}^t \Omega_6 \end{aligned}$$

On procède de manière analogue dans le cas complexe.

Exercice 10.4. Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison

On garde les notations des deux exercices précédents.

1. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) &\mapsto P \cdot A = P A P^{-1} \end{aligned}$$

définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Deux matrices qui sont dans la même orbite pour cette action sont dites semblables ou conjuguées.

2. On suppose que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et on se donne deux matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Montrer que si A et B sont semblables, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ les matrices $(A - \lambda I_n)^k$ et $(B - \lambda I_n)^k$ sont équivalentes (voir l'exercice précédent).
 - On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, les matrices $(A - \lambda I_n)^k$ et $(B - \lambda I_n)^k$ sont équivalentes.
 - Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres.
 - Montrer que A et B ont même polynôme caractéristique.
 - Montrer que A et B ont même polynôme minimal.
3. Montrer que pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.
4. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que les orbites pour l'action par similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont connexes d'intérieur vide (donc non ouvertes). Montrer qu'une telle orbite est bornée si, et seulement si, elle réduite à une matrice scalaire λI_n , ce qui revient à dire que A est dans le centre de $GL_n(\mathbb{C})$.
5. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que l'orbite d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour l'action par similitude est fermée si, et seulement si, A est diagonalisable.
6. Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si, et seulement si, 0 est dans l'adhérence de la classe de similitude de A .

Solution.

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $I_n \cdot A = A$ et pour P, Q dans $GL_n(\mathbb{K})$:

$$P \cdot (Q \cdot A) = P(QAQ^{-1})P^{-1} = (PQ)A(PQ)^{-1} = (PQ) \cdot A$$

On a donc bien une action du groupe $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.

- (a) Si A, B sont semblables, il en est alors de même de $Q(A)$ et $Q(B)$ pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ (de $B = PAP^{-1}$, on déduit que $B^k = PA^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que $Q(B) = PQ(A)P^{-1}$) et en particulier $(A - \lambda I_n)^k$ et $(B - \lambda I_n)^k$ sont semblables, donc équivalentes, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$.

- (b) On rappelle que si $P_A(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ est le polynôme caractéristique de A et $\pi_A(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\beta_k}$ son polynôme minimal, les sous-espaces caractéristiques de A sont les $N_k = \ker(A - \lambda_k I_n)^{\beta_k}$ et on a $\dim(N_k) = \alpha_k$, $N_k = \ker(A - \lambda_k I_n)^j$ pour tout $j \geq \beta_k$.

- i. Dire que $(A - \lambda I_n)^k$ et $(B - \lambda I_n)^k$ sont équivalentes revient à dire qu'elles ont même rang, donc $\ker(A - \lambda I_n)^k$ et $\ker(B - \lambda I_n)^k$ sont de même dimension. En particulier, pour toute valeur propre λ de A , on a $\dim(\ker(B - \lambda I_n)) = \dim(\ker(A - \lambda I_n)) \geq 1$ et λ est aussi valeur propre de B . Comme A et B jouent des rôles symétriques, on en déduit que A et B ont les mêmes valeurs propres.

- ii. Les polynômes caractéristiques de A et B s'écrivent respectivement :

$$P_A(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \text{ et } P_B(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha'_k}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A et B . En supposant que $\alpha_k \leq \alpha'_k$, on a $\ker(A - \lambda_k I_n)^{\alpha'_k} = \ker(A - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}$ et :

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \dim(\ker(A - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}) = \dim(\ker(B - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}) \\ &\leq \alpha'_k = \dim(\ker(B - \lambda_k I_n)^{\alpha'_k}) = \dim(\ker(A - \lambda_k I_n)^{\alpha'_k}) = \alpha_k \end{aligned}$$

(les matrices $(A - \lambda_k I_n)^j$ et $(B - \lambda_k I_n)^j$ sont équivalentes, donc de même rang), ce qui nous donne $\alpha_k = \alpha'_k$ pour tout k et $P_A = P_B$.

- iii. Les polynômes minimaux de A et B s'écrivent respectivement :

$$\pi_A(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\beta_k} \text{ et } \pi_B(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\beta'_k}$$

avec $1 \leq \beta_k, \beta'_k \leq \alpha_k$. S'il existe k tel que $\beta_k < \beta'_k$, on a alors $\ker(B - \lambda_k I_n)^{\beta_k} \subsetneq \ker(B - \lambda_k I_n)^{\beta'_k}$ et :

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \dim(\ker(A - \lambda_k I_n)^{\beta_k}) = \dim(\ker(B - \lambda_k I_n)^{\beta_k}) \\ &< \dim(\ker(B - \lambda_k I_n)^{\beta'_k}) = \dim(\ker(A - \lambda_k I_n)^{\beta'_k}) = \alpha_k \end{aligned}$$

ce qui est impossible. On a donc $\beta_k = \beta'_k$ pour tout k et $\pi_A = \pi_B$.

3. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant semblable à une matrice diagonale par blocs de

$$\text{Jordan, il suffit de montrer qu'une matrice de Jordan } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée. En désignant par $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ associé à J dans cette base est défini par $u(e_k) = e_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $u(e_n) = 0$. Dans la base $(e'_k)_{1 \leq k \leq n} = (e_{n-(k-1)})_{1 \leq k \leq n}$, on a $u(e'_1) = u(e_n) = 0$ et $u(e'_k) = u(e_{n-(k-1)}) = e_{n-(k-2)} = e'_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq n$, donc la matrice de u dans la base $(e'_k)_{1 \leq k \leq n}$ est ${}^t J$ et cette matrice est semblable à J .

4. L'orbite $GL_n(\mathbb{C}) \cdot A$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe comme image du connexe $GL_n(\mathbb{C})$ par l'application continue $P \mapsto PAP^{-1}$. Deux matrices semblables ayant même trace, l'orbite $GL_n(\mathbb{C}) \cdot A$ est contenue dans l'hyperplan affine $\text{Tr}^{-1}(\text{Tr}(A))$ qui est d'intérieur vide comme tout hyperplan d'un espace de dimension finie.

On peut aussi montrer directement ce résultat. Si B est dans l'intérieur de $GL_n(\mathbb{C}) \cdot A$, pour tout entier $k \geq 1$ assez grand la matrice $B + \frac{1}{k}I_n$ est dans $GL_n(\mathbb{C}) \cdot A$, donc $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) + \frac{1}{k} \text{Tr}(I_n) = \text{Tr}(A) + \frac{1}{k} \text{Tr}(I_n)$ et $\text{Tr}(I_n) = 0$, ce qui n'est pas.

Si $A = \lambda I_n$ est une matrice scalaire, son orbite $GL_n(\mathbb{C}) \cdot A = \{\lambda I_n\}$ est réduite à un point, donc bornée.

Réciproquement, supposons que l'orbite $GL_n(\mathbb{C}) \cdot A$ soit bornée. Pour toute matrice de transvection $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$, avec $1 \leq i \neq j \leq n$ ($(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} T_{ij}(\lambda) A T_{ij}(\lambda)^{-1} &= T_{ij}(\lambda) A T_{ij}(-\lambda) = (I_n + \lambda E_{ij}) A (I_n - \lambda E_{ij}) \\ &= A + \lambda(E_{ij}A - AE_{ij}) - \lambda^2 E_{ij}A E_{ij} \end{aligned}$$

donc $E_{ij}A = AE_{ij}$ et $E_{ij}A E_{ij} = 0$, c'est-à-dire que A commute à toutes les matrices E_{ij} pour $i \neq j$ et en conséquence A est dans le centre de $GL_n(\mathbb{C})$, ce qui revient à dire que c'est une matrice scalaire (comme $E_{ij}A E_{ij} = a_{ij}E_{ij}$, la condition $E_{ij}A E_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ est bien réalisée).

5. La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples et il en est alors de même pour toute

matrice B dans l'orbite $\mathcal{O}_A = GL_n(\mathbb{C}) \cdot A$ puisque $\pi_B = \pi_A$. Si $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{O}_A$ qui converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en notant P_M le polynôme caractéristique d'une matrice, on a $P_B = \lim_{k \rightarrow +\infty} P_{B_k}$ par continuité de $M \mapsto P_M$ (c'est une fonction polynomiale des coefficients de M), donc $P_B = P_A$ puisque $P_{B_k} = P_A$ pour tout entier k . Les matrices A et B sont donc diagonalisables avec le même polynôme caractéristique, ce qui entraîne qu'elles sont semblables puisque de même forme réduite diagonale et $B \in \mathcal{O}_A$. Cette orbite est donc fermée. Réciproquement, supposons que $\mathcal{O}_A$ soit fermée. A est semblable à une matrice triangulaire $T = ((t_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$ où $t_{ij} = 0$ pour $1 \leq j < i \leq n$. En désignant, pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, par D_λ la matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n$, on a $D_\lambda T D_\lambda^{-1} = T_\lambda \in \mathcal{O}_A$ où T_λ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux t_{ii} et de coefficients hors de la diagonale λt_{ij} . Prenant $\lambda = \frac{1}{k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{O}_A$ qui converge vers la matrice diagonale $D \in \mathcal{O}_A$ de termes diagonaux t_{ii} , ce qui signifie que A est diagonalisable.

6. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, elle est alors semblable à une matrice de la forme

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{les } \varepsilon_k \text{ valant } 0 \text{ ou } 1, \text{ une telle matrice}$$

$$\text{étant semblable à } J_\lambda = \lambda J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda \varepsilon_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \varepsilon_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout}$$

$\lambda \in \mathbb{C}^*$. En effet, en désignant par D_λ la matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n$, on a $D_\lambda J D_\lambda^{-1} = D_\lambda J D_{\lambda^{-1}} = J_\lambda$, ce qui résulte de :

$$\begin{aligned} D_\lambda J &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda^{n-1} \varepsilon_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^n \varepsilon_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et :

$$JD_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda^{n-2} \varepsilon_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^{n-1} \varepsilon_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Prenant $\lambda = \frac{1}{k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'une suite $(J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans l'orbite de A qui converge vers 0, donc 0 est adhérent à cette orbite.

Réciproquement si 0 est adhérent à l'orbite de A , il existe alors une suite $(J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans l'orbite de A qui converge vers 0, toutes les matrices J_k ont le même polynôme caractéristique que A et avec la continuité du polynôme caractéristique, on déduit que $P_A(X) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P_{J_k}(X) = P_0(X) = X^n$ et A est nilpotente (théorème de Cayley-Hamilton).

Exercice 10.5. Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$ par congruence

$\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2 et $S_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées d'ordre n qui sont symétriques.

1. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) \times S_n(\mathbb{K}) &\rightarrow S_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) &\mapsto P \cdot A = P A {}^t P \end{aligned}$$

définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$. Deux matrices qui sont dans la même orbite pour cette action sont dites congruentes.

2. Montrer que toute matrice $A \in S_n(\mathbb{K})$ est congruente à une matrice diagonale.

3. Montrer que :

- pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos deux matrices symétriques A, B sont congruentes si, et seulement si, elles ont même rang, donc les orbites sont les ensembles $\mathcal{O}_r = \{A \in S_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(A) = r\}$, où r est compris entre 0 et n ;
- pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ deux matrices symétriques A, B sont congruentes si, et seulement si, elles ont même signature, donc les orbites sont les ensembles $\mathcal{O}_{(s,t)} = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid \text{sign}(\varphi) = (s, t)\}$, où φ est la forme

quadratique associée à la matrice A , $s = \max_{F \text{ t. q. } \varphi|_F \in S^{++}(F)} \dim(F)$
 et $t = r - s$ où r est le rang de A .

Solution.

1. Pour tout $A \in S_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, la matrice $PA {}^tP$ est dans $S_n(\mathbb{K})$. On a $I_n \cdot A = A$ et pour P, Q dans $GL_n(\mathbb{K})$:

$$P \cdot (Q \cdot A) = P(QA {}^tQ) {}^tP = (PQ)A {}^t(PQ) = (PQ) \cdot A$$

2. En désignant par φ la forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$ de matrice $A \in S_n(\mathbb{K})$ dans la base canonique, le théorème de réduction de Gauss nous dit qu'il existe une base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale de la forme

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\text{si } r \text{ est le rang de } \varphi, \text{ alors les } r \text{ premiers } \lambda_i$$

sont non nuls et les suivants sont nuls) et en conséquence, A est congruente à la matrice diagonale $D(\lambda)$.

3.

- (a) Pour $\mathbb{K}$ quelconque, deux matrices symétriques congruentes sont équivalentes, donc de même rang. Si $A \in S_n(\mathbb{K})$ est de rang $r \geq 1$, elle est alors

congruente à une matrice diagonale $D(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_r & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$,

les λ_i étant tous non nuls. Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, il existe des nombres complexes $\mu_1, \dots, \mu_r$ tous non nuls tels que $\lambda_i = \mu_i^2$ et en notant $A_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}$, on a $D(\lambda) = D(\mu)^2 = D(\mu)A_r {}^tD(\mu)$, ce qui signifie que $D(\lambda)$ et A sont congruentes à la matrice A_r . Donc deux matrices symétriques de rang r sont congruentes.

- (b) Soit φ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique. Le théorème de Sylvester nous dit qu'il existe une base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale de la forme $D(s, t) =$

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } (s, t) \text{ est la signature de } q \text{ (les blocs diagonaux } I_s,$$

$-I_t$ ou 0 n'existent pas si $s = 0$, $s = n$ ou $s + t = n$) et en conséquence, A est congruente à la matrice diagonale $D(s, t)$. Donc deux matrices symétriques de signature (s, t) sont congruentes.

Exercice 10.6. Théorème de Lamé

On se propose de montrer que le nombre de divisions euclidiennes que nécessite l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de a et b , où $1 \leq b < a$, est inférieur ou égal à 5 fois le nombre de chiffres de b dans son écriture décimale.

1. On désigne par $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

et par $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. Montrer que $F_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soient $1 \leq b < a$ deux entiers naturels. On rappelle que l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de a et b consiste à construire la suite d'entiers $(r_n)_{-1 \leq n \leq p}$ comme suit :

- $r_{-1} = a, r_0 = b, 0 \leq r_1 < r_0$ est le reste dans la division euclidienne de $r_{-1} = a$ par $r_0 = b$;
- si $r_1 = 0$, on a alors $p = 1$ et $a \wedge b = b$, sinon, pour $1 \leq n \leq p - 1$, $0 \leq r_n < r_{n-1}$ est le reste dans la division euclidienne de r_{n-2} par r_{n-1} ;
- $r_p = 0$.

On a donc $r_p = 0 < r_{p-1} < \dots < r_1 < r_0$ et $a \wedge b = r_0 \wedge r_1 = \dots = r_{p-1} \wedge r_p = r_{p-1}$, c'est à dire que $a \wedge b$ est le dernier reste non nul r_{p-1} dans cette suite de divisions euclidiennes. L'algorithme d'Euclide a donc nécessité $p - 1$ divisions euclidiennes. La dernière division, qui donne un reste nul, n'est pas comptée.

(a) Montrer qu'il existe deux suites d'entiers $(u_n)_{0 \leq n \leq p}$ et $(v_n)_{0 \leq n \leq p}$ telles que $r_n = au_n + bv_n$ pour tout n compris entre 0 et $p - 1$.

(b) Montrer que $r_{p-k} \geq F_k$ pour tout k compris entre 0 et p .

(c) En désignant par m le nombre de chiffres dans l'écriture de b en base 10, montrer que $p \leq \frac{m + \log_{10}(\sqrt{5})}{\log_{10}(\varphi)}$.

(d) Montrer que $p - 1 \leq 5m$.

Solution.

1. Le polynôme caractéristique de la relation de récurrence définissant la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $P(X) = X^2 - X - 1$ et ce polynôme a pour racines $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (somme et produit des racines). Il en résulte l'existence de deux constantes réelles α, β telles que $F_n = \alpha\varphi^n + \beta(1 - \varphi)^n$ pour tout

$n \in \mathbb{N}$. Les conditions initiales nous donnent $F_0 = \alpha + \beta = 0$ et $F_1 = \alpha\varphi + \beta(1 - \varphi) = 1$, donc $\beta = -\alpha$ et $(2\varphi - 1)\alpha = 1$, soit $\alpha = \frac{1}{2\varphi - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $F_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.

- (a) Pour $n = 0$, $n = 1$ on a $r_0 = b = a \cdot 0 + b \cdot 1$, $r_1 = a \cdot 1 + b(-q_1)$. En supposant le résultat acquis jusqu'à l'ordre $n - 1 < p - 1$, on a :

$$\begin{aligned} r_n &= -q_n r_{n-1} + r_{n-2} = -q_n (au_{n-1} + bv_{n-1}) + au_{n-2} + bv_{n-2} \\ &= a(u_{n-2} - q_n u_{n-1}) + b(v_{n-2} - q_n v_{n-1}) = au_n + bv_n \end{aligned}$$

En particulier pour $n = p - 1$ on a $a \wedge b = r_{p-1} = au_{p-1} + bv_{p-1} = au + bv$, soit l'identité de Bézout.

- (b) Pour $k = 0$, on a $r_p = 0 = F_0$. Pour $k = 1$, on a $r_{p-1} \geq 1 = F_1$ (r_{p-1} est le dernier reste non nul). Supposant le résultat acquis jusqu'au rang $k - 1$ avec $2 \leq k \leq p$. Par construction, on a :

$$r_{p-k} = q_{p-(k-2)} r_{p-(k-1)} + r_{p-(k-2)} \quad (0 < r_{p-(k-2)} < r_{p-(k-1)})$$

donc $q_{p-(k-2)} \geq 1$ puisque $0 < r_{p-(k-1)} < r_{p-k}$ et :

$$r_{p-k} \geq r_{p-(k-1)} + r_{p-(k-2)} \geq F_{k-1} + F_{k-2} = F_k$$

En particulier, on a pour $k = p$, $r_0 = b \geq F_p$.

- (c) L'écriture en base 10 de b est $b = \sum_{k=0}^{m-1} b_k 10^k$ et on a $10^{m-1} \leq b < 10^m$,

donc $10^m \geq b + 1$ et $m \geq \frac{\ln(b+1)}{\ln(10)} = \log_{10}(b+1)$. D'autre part, on a

$$b \geq F_p = \frac{\varphi^p - (1 - \varphi)^p}{\sqrt{5}} \text{ avec } |1 - \varphi| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1, \text{ donc } \frac{|1 - \varphi|^p}{\sqrt{5}} < 1 \text{ et}$$

$$b + 1 \geq \frac{\varphi^p}{\sqrt{5}} + \left(1 - \frac{(1 - \varphi)^p}{\sqrt{5}}\right) \geq \frac{\varphi^p}{\sqrt{5}}, \text{ ce qui nous donne :}$$

$$m \geq \log_{10}(b + 1) \geq \log_{10}\left(\frac{\varphi^p}{\sqrt{5}}\right) = p \log_{10}(\varphi) - \log_{10}(\sqrt{5})$$

$$\text{et } p \leq \frac{m + \log_{10}(\sqrt{5})}{\log_{10}(\varphi)}.$$

- (d) On a $p - 1 \leq \alpha m + \beta$ avec $\alpha = \frac{1}{\log_{10}(\varphi)} \simeq 4.78$, $\beta = \frac{\log_{10}(\sqrt{5})}{\log_{10}(\varphi)} - 1 \simeq 0.67$.

Comme $p - 1$ est un entier, on a en fait $p - 1 \leq [\alpha m + \beta]$. Il nous suffit donc de montrer que $f(m) = [\alpha m + \beta] \leq 5m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $m = 1, 2, 3$, on a :

$$f(1) = [\alpha + \beta] = 5, \quad f(2) = [2\alpha + \beta] = 10, \quad f(3) = [3\alpha + \beta] = 15$$

et pour $m \geq 4$, $\alpha m + \beta \simeq 4.785 \cdot m + 0.672 = 5m + (0.672 - 0.215 \cdot m)$ avec $0.215 \cdot m - 0.672 \geq 0.215 \cdot 4 - 0.672 \simeq 0.188 > 0$, donc $\alpha m + \beta \leq 5m$ et $p - 1 \leq 5m$.

Problème 10.1. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}^n$ **— I — Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$**

On dit qu'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ est discret si son intersection avec toute partie bornée de $\mathbb{R}$ est finie (éventuellement vide), ce qui revient à dire que pour tout réel $R > 0$, l'ensemble $X \cap [-R, R]$ est fini.

1. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Montrer que H est discret si, et seulement si, il existe un réel α tel que $H = \mathbb{Z}\alpha = \{p\alpha \mid p \in \mathbb{Z}\}$ (H est monogène).
2. Montrer qu'un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$ est fermé.
3. Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont denses ou discrets.
4. Montrer la densité de l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux et de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels dans $\mathbb{R}$ en utilisant la question précédente.
5. Soient a, b deux réels non nuls.

(a) Montrer que le groupe additif engendré par a et b :

$$\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \{pa + qb \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$$

est discret [resp. dense] dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\frac{a}{b}$ est rationnel [resp. irrationnel]. Pour $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on a $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}\frac{b}{q} = \mathbb{Z}\frac{a}{p}$.

(b) Montrer que le groupe $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ est fermé si, et seulement si, $\frac{a}{b}$ est rationnel (pour $\frac{a}{b}$ irrationnel, cela nous donne un exemple de situation où la somme de deux fermés n'est pas un fermé).

(c) Montrer que $\frac{a}{b}$ est rationnel [resp. irrationnel] si, et seulement si, on a $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b \neq \{0\}$ [resp. $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b = \{0\}$]. Pour $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ rationnel avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on a $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}qa = \mathbb{Z}pb$.

6. Soient $a_1, \dots, a_n$ une suite de $n \geq 2$ réels non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe engendré par les a_k :

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{Z}a_k = \left\{ \sum_{k=1}^n p_k a_k \mid (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

soit dense dans $\mathbb{R}$.

7. Soient a, b deux réels non nuls tels que $\frac{a}{b}$ soit irrationnel. On se propose de montrer que l'ensemble $\mathbb{N}a + \mathbb{Z}b = \{pa + qb \mid (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On se donne deux réels $x < y$.

(a) Justifier l'existence de $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $0 < pa + qb < y - x$.

(b) Dans le cas où $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $k(pa + qb) + nb \in]x, y[$.

- (c) Dans le cas où $p \in \mathbb{Z}^{-,*}$, justifier l'existence de $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $nb - k(pa + qb) \in]x, y[$.
- (d) Conclure.
8. Soit θ un réel non nul tel que $\frac{\pi}{\theta}$ soit irrationnel.
- (a) Montrer que les ensembles $\{\cos(n\theta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin(n\theta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$, ce qui signifie que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ [resp. $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$] est $[-1, 1]$.
- (b) Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\tan(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.
9. On se donne une fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ et on s'intéresse aux valeurs d'adhérences de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \cos(f(n))$ pour tout $n \geq 1$.
- (a) Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $[1, +\infty[$ sur $[f(1), +\infty[$ et qu'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^{-1})'(x) = +\infty$.
Soient $x \in [-1, 1]$ et $t = \arccos(x) \in [0, \pi]$.
- (b) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, il existe un entier naturel $\varphi(n)$ tel que :
- $$f(\varphi(n)) \leq t + 2n\pi < f(\varphi(n) + 1) \quad (10.1)$$
- (c) Montrer qu'il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq n_1}$ soit strictement croissante.
- (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t + 2n\pi - f(\varphi(n))) = 0$.
- (e) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{\varphi(n)}) = x$.
- (f) En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $[-1, 1]$. Prenant successivement $f(x) = x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ et $f(x) = \ln(x)$, on en déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $(\cos(n^\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\cos(\ln(n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $[-1, 1]$.
10. Soient a, b deux réels non nuls. Montrer que $\frac{a}{b}$ est irrationnel si, et seulement si, il existe deux suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $p_na + q_nb \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_na + q_nb) = 0$. En particulier, un réel θ est irrationnel si, et seulement si, il existe deux suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $p_n\theta - q_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n\theta - q_n) = 0$.
11. On utilise le résultat précédent pour montrer l'irrationalité de certains réels.
- (a) Montrer que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ est irrationnel.
- (b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls telle que :
- pour tous $n \in \mathbb{N}$, u_n divise u_{n+1} ;

ii. la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est convergente ;

iii. le reste d'ordre n , $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$, est négligeable devant $\frac{1}{u_n}$.

Montrer que, dans ces conditions, le réel $\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ est irrationnel.

(c) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{2^{2^n} - 1}$ est convergente et que sa somme est irrationnelle.

(d) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{2^{2^n} + 1}$ est convergente et que sa somme est irrationnelle.

- II - Fonctions périodiques

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $T \in \mathbb{R}$ est une période de f si $f(x+T) = f(x)$ pour tout réel x . L'ensemble $\mathcal{P}(f)$ de toutes les périodes de f est un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$. Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite périodique si $\mathcal{P}(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si, et seulement si, $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$.
2. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et f la fonction caractéristique de G . Montrer que $\mathcal{P}(f) = G$.
3. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, le groupe $\mathcal{P}(f)$ des périodes de f est alors fermé dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que si f est une fonction continue, périodique, non constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe alors un unique réel $T > 0$ tel que $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$ ($\mathcal{P}(f)$ est discret et T est la plus petite période strictement positive de f).
5. Soient T_1, T_2 deux réels non nuls et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x+T_1) = f(x+T_2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\frac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, la fonction f est alors constante.
6. Montrer que si f, g sont deux fonctions continues périodiques non constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de plus petites périodes respectives $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$ avec $\frac{T_1}{T_2}$ irrationnel, la fonction $f+g$ n'est alors pas périodique.
7. Soit H une partie dense de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel x , il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante [resp. strictement décroissante] d'éléments de H qui converge vers x .
8. Soient T_1, T_2 deux réels non nuls et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite à gauche [resp. à droite] en un point a et telle que $f(x+T_1) = f(x+T_2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\frac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, la fonction f est alors constante.

9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique non constante admettant une limite à gauche [resp. à droite] en un point a . Montrer que $\mathcal{P}(f)$ est discret (soit $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$ avec $T > 0$).
10. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(g) \neq \{0\}$. Montrer que la fonction $f + g$ est périodique.
11. Montrer que si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de plus petite période strictement positive T , une primitive F de f est T -périodique si, et seulement si, $\int_0^T f(t) dt = 0$.
12. Montrer que si f est une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a alors $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(f')$.
13. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction pour laquelle il existe une fonction polynomiale P de degré au plus égal à $n \in \mathbb{N}$ et un réel $T > 0$ tels que $f(x+T) = f(x) + P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction g périodique de période T et une fonction polynomiale Q de degré au plus égal à $n \in \mathbb{N}$ telles que $f(x) = g(x) + xQ(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

– III – Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}^n$

On désigne par n un entier naturel non nul, E l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. La norme associée est notée $\|\cdot\|$.

Pour tout a dans E et tout réel $R > 0$ on note $B(a, R)$ [resp. $\overline{B}(a, R)$] la boule ouverte [resp. fermée] de centre a et de rayon R dans E .

Une partie X de E est dite discrète si son intersection avec toute partie bornée de E est finie (éventuellement vide), ce qui revient à dire que pour tout réel $R > 0$, l'ensemble $X \cap \overline{B}(0, R)$ est fini. On dit qu'un élément x d'une partie non vide X de E est isolé dans X , s'il existe un ouvert $\mathcal{V}$ de E tel que $X \cap \mathcal{V} = \{x\}$.

1. Montrer qu'un compact discret dans E est nécessairement fini.
2. Montrer qu'un sous-groupe discret de E est fermé dans E .
3. Soit G un sous-groupe additif de E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (a) G est discret ;
 - (b) 0 est isolé dans G ;
 - (c) tous les éléments de G sont isolés dans G .
4. Soit $G \neq \{0\}$ un sous-groupe discret de E . Montrer que $\inf_{x \in G \setminus \{0\}} \|x\| > 0$.
5. Soit $G = \{(p + q\sqrt{2}, q\sqrt{2}) \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$.
 - (a) Montrer que G est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$.
 - (b) On désigne par π_1 la projection $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$. Que dire du groupe $\pi_1(G)$?
6. Soit G un sous-groupe discret de E . Montrer que son adhérence $\overline{G}$ est un sous-groupe fermé de E .

7. On se propose ici de montrer que si G est un sous-groupe discret de E non réduit à $\{0\}$, il existe alors un entier r compris entre 1 et n et une famille libre $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ dans G telle que $G = \left\{ \sum_{i=1}^r k_i e_i \mid (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r \right\}$, ce que l'on note $G = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}e_i$. On se donne un sous-groupe discret G de E non réduit à $\{0\}$ et $m \in \{1, \dots, n\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(G)$ de E engendré par G .
- Justifier l'existence d'une famille $(g_i)_{1 \leq i \leq m}$ d'éléments G formant une base de F .
 - Montrer que l'ensemble $K = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i g_i \mid (x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m \right\}$ est un compact de E et que $K \cap G$ est fini non vide. Notons $K \cap G = \{f_1, \dots, f_p\}$ et $H = \langle K \cap G \rangle$ le sous-groupe de G engendré par $K \cap G$.
 - Montrer que $H = G$.
 - Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe une suite $(r_i)_{1 \leq i \leq m}$ de nombres rationnels telle que $g = \sum_{i=1}^m r_i g_i$.
 - Montrer qu'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit un sous-groupe de $\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} \left(\frac{1}{q} g_i \right)$.
 - En déduire le résultat annoncé, à savoir que $G = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}e_i$, où $r \in \{1, \dots, n\}$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille libre dans G .
8. Soit G un sous-groupe fermé de E non discret.
- Montrer que G contient une droite vectorielle.
 - Montrer que l'ensemble E_1 formé de la réunion de toutes les droites vectorielles contenues dans G est un sous-espace vectoriel de E .
 - On désigne par E_2 un supplémentaire de E_1 dans E et par H le sous-groupe de E , $H = G \cap E_2$. Montrer que $G = E_1 + H$ et $E_1 \cap H = \{0\}$. On notera $G = E_1 \oplus H$.
 - Montrer que H est un sous-groupe discret de E .
 - En déduire deux entiers $1 \leq r < s \leq n$ et une famille libre $(e_i)_{1 \leq i \leq s}$ dans G telle que $G = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}e_i \oplus \bigoplus_{i=r+1}^s \mathbb{R}e_i$.
9. Décrire les sous-groupes de $\mathbb{R}^2$.
10. Soit $\theta = (\theta_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$. En notant $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $G = \langle e_1, \dots, e_n, \theta \rangle$ le sous-groupe de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\{e_1, \dots, e_n, \theta\}$. Montrer que :

- (a) G n'est pas discret ;
 (b) il existe des suites $(q_{k,i})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs, où i est compris entre 1 et n , telles que $(q_{k,1} - p_k \theta_1, \dots, q_{k,n} - p_k \theta_n) \neq 0$ et :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} q_{k,i} - p_k \theta_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

- (c) pour tout réel $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et des entiers relatifs $q_1, \dots, q_n$ tels que $\left| \theta_i - \frac{q_i}{p} \right| \leq \frac{\varepsilon}{p}$ (approximations simultanées de Kronecker).

Solution.

– I – Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

- Vérifions que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ de la forme $\mathbb{Z}\alpha$ est discret. Pour $\alpha = 0$ c'est clair et pour $\alpha \neq 0$ tout partie bornée K de $\mathbb{R}$ est contenue dans un intervalle $[-R, R]$ avec $R > 0$ et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers k vérifiant $-R \leq k\alpha \leq R$. Réciproquement si H est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$, il existe alors un réel a dans $H \cap \mathbb{R}^{+,*}$ ($0 \neq a \in H$, donc $-a \in H$) et $]0, a[\cap H$ est fini non vide, il admet donc un plus petit élément $\alpha > 0$. Comme H est un groupe additif et $\alpha \in H$, on a $\mathbb{Z}\alpha \subset H$. De plus, pour tout $x \in H$ il existe un entier relatif k tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha \leq a$ ($k = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$) et avec $x - k\alpha \in H \cap [0, a[$, on déduit du caractère minimal de α que $x - k\alpha = 0$, soit $x = k\alpha \in \mathbb{Z}\alpha$. On a donc en définitive, $H = \mathbb{Z}\alpha$.
- Cela résulte du fait qu'une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$, il existe alors un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_{n_0}| < \frac{1}{2}$$

ce qui implique que $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$, puisque les u_n sont entiers. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc stationnaire et $\ell \in \mathbb{Z}$. La réciproque est évidente. Il en résulte que $\mathbb{Z}$ est fermé.

Pour $\alpha \neq 0$, du fait que l'application $x \mapsto \alpha x$ réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même, on déduit que $\mathbb{Z}\alpha$ est aussi fermé (le résultat étant évident pour $\alpha = 0$).

Plus simplement, pour $\alpha \neq 0$, on peut dire que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\alpha = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\alpha, (k+1)\alpha[$ est ouvert comme réunion d'ouverts.

- Si $H \neq \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, on a alors $K = H \cap \mathbb{R}^{+,*} \neq \emptyset$ et cet ensemble est minoré par 0, il admet donc une borne inférieure α .

On distingue alors deux cas.

Si $\alpha > 0$, on a alors $\alpha \in K$. En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, on peut trouver $x \in K$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$ (on a supposé que $\alpha \notin H$). Pour la même raison, on peut trouver $y \in K$ tel que $\alpha < y < x$. Mais

alors, on a $0 < x - y < \alpha$ avec $x - y \in H \cap \mathbb{R}^{+,*}$, ce qui est contradictoire avec la définition de la borne inférieure α .

On a donc $\alpha \in K$ et avec la structure de groupe additif de H , on déduit que $H = \mathbb{Z}\alpha$, c'est-à-dire que H est discret. En effet, on a $\mathbb{Z}\alpha \subset H$ du fait que α appartient au groupe additif H et pour tout x dans H , il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha$, donc $x - k\alpha = 0$ et $x \in \mathbb{Z}\alpha$, c'est-à-dire que $H \subset \mathbb{Z}\alpha$.

Si $\alpha = 0$, H est alors dense dans $\mathbb{R}$. En effet pour $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il existe z dans $H \cap \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $0 < z < y - x$ soit $1 < \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$, donc l'intervalle $\left] \frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right[$ contient au moins un entier et pour $n \in \left] \frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right[\cap \mathbb{Z}$, on a $x < nz < y$ avec $nz \in H$.

4. Les deux ensembles $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ (ce sont même des sous-anneaux). Si $\mathbb{D}$ est discret il existe alors un réel strictement positif $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $\mathbb{D} = \alpha\mathbb{Z}$ et avec $\frac{\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{10} \in \mathbb{D}$, on déduit qu'il existe un entier relatif k tel que $\frac{\alpha}{2} = k\alpha$, ce qui est impossible ($2k \neq 1$ dans $\mathbb{Z}$). Il en résulte que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et comme $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{D}$, il est également dense dans $\mathbb{R}$. On peut aussi remarquer que $\inf(\mathbb{D} \cap \mathbb{R}^{+,*}) = 0$ (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $0 < \frac{1}{10^n} < \varepsilon$).

5.

- (a) Si $H = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ est discret, il existe alors un réel non nul α tel que $H = \mathbb{Z}\alpha$, donc $a = p\alpha$, $b = q\alpha$ avec p et q non nuls dans $\mathbb{Z}$ et en conséquence $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Réciproquement, en supposant $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ rationnel avec p et q entiers premiers entre eux dans $\mathbb{Z}^*$, on a :

$$H = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left(\mathbb{Z}\frac{p}{q} + \mathbb{Z} \right) b = (\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q) \frac{b}{q}$$

Le théorème de Bézout nous dit que $\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q = \mathbb{Z}$, donc $H = \mathbb{Z}\frac{b}{q} = \mathbb{Z}\frac{a}{p}$ est discret.

Pour a, b dans $\mathbb{Z}^*$, on a $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}(a \wedge b)$, où $a \wedge b$ est le pgcd de a et b .

- (b) Si le groupe $H = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ est fermé, il ne peut alors être dense car il est dénombrable et $\mathbb{R}$ (qui serait égal à $\overline{H} = H$) ne l'est pas, il est donc discret et $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement pour $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, le groupe $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ est discret, donc fermé.

- (c) Si $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ est rationnel avec p, q entiers non nuls premiers entre eux, on a alors $0 \neq pb = qa \in \mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b$ et $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b \neq \{0\}$. Dans ce cas, on a $\mathbb{Z}qa \subset \mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b$ et si $x = ja = kb \in \mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b \setminus \{0\}$, on a alors $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} = \frac{k}{j}$, donc $pj = kq$ et q va diviser j (q est premier avec p et divise pj), soit $j = j_1q$ et $x = j_1qa \in \mathbb{Z}qa$. D'où l'égalité $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}qa = \mathbb{Z}pb$. Réciproquement, si $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b \neq \{0\}$, il existe alors deux entiers j, k tels que $ja = kb \in \mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b$ et $\frac{a}{b} = \frac{k}{j} \in \mathbb{Q}$.

6. S'il existe deux indices $j \neq k$ compris entre 1 et n tels que $\frac{a_j}{a_k}$ soit irrationnel, le groupe $H_{j,k} = \mathbb{Z}a_j + \mathbb{Z}a_k$ est alors dense dans $\mathbb{R}$ et il en est de même de $H = \sum_{k=1}^n \mathbb{Z}a_k$ puisque $H_{j,k} \subset H$. Si tous les $\frac{a_j}{a_k}$, pour $j \neq k$ compris entre 1 et n sont rationnels, on vérifie alors par récurrence sur $n \geq 2$ que H est discret. En effet c'est vrai pour $n = 2$ et supposant le résultat acquis pour $n - 1 \geq 2$, on a $\sum_{k=1}^n \mathbb{Z}a_k = \mathbb{Z}\alpha_{n-1} + \mathbb{Z}a_n$ où $\alpha_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k a_k$, les p_k étant entiers et comme $\frac{\alpha_{n-1}}{a_n} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{a_k}{a_n}$ est rationnel, le groupe H est discret.
- En conclusion, $\sum_{k=1}^n \mathbb{Z}a_k$ est fermé si, et seulement si, il est discret, ce qui équivaut encore à dire que $\frac{a_j}{a_k} \in \mathbb{Q}$ pour tous $j \neq k$ compris entre 1 et n .
7. Soient $x < y$ dans $\mathbb{R}$.

- (a) Comme $\frac{a}{b}$ est irrationnel, le groupe $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ est dense dans $\mathbb{R}$ et il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $0 < pa + qb < y - x$.
- (b) Pour $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$(x < k(pa + qb) + nb < y) \Leftrightarrow \left(\frac{x - nb}{pa + qb} < k < \frac{y - nb}{pa + qb} \right)$$

ce qui est réalisé si l'intervalle $\left] \frac{x - nb}{pa + qb}, \frac{y - nb}{pa + qb} \right[$ est de longueur > 1 et dans ce cas il contient au moins un entier k .

De $0 < pa + qb < y - x$, on déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\frac{y - nb}{pa + qb} - \frac{x - nb}{pa + qb} = \frac{y - x}{pa + qb} > 1$$

donc on peut trouver un entier k dans l'intervalle $\left] \frac{x - nb}{pa + qb}, \frac{y - nb}{pa + qb} \right[$ et cet entier sera positif si on choisit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - nb > 0$. On a donc trouvé $g = k(pa + qb) + nb \in \mathbb{N}a + \mathbb{Z}b$ dans l'intervalle $]x, y[$.

- (c) De même, on aura $nb - k(pa + qb) \in]x, y[$ si, et seulement si :

$$\frac{nb - y}{pa + qb} < k < \frac{nb - x}{pa + qb}$$

De $0 < pa + qb < y - x$, on déduit que :

$$\frac{nb - x}{pa + qb} - \frac{nb - y}{pa + qb} = \frac{y - x}{pa + qb} > 1$$

et on peut trouver un entier k dans l'intervalle $\left] \frac{nb - y}{pa + qb}, \frac{nb - x}{pa + qb} \right[$, cet entier sera positif en choisissant $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nb - y > 0$. On a donc trouvé $g = nb - k(pa + qb) \in \mathbb{N}a + \mathbb{Z}b$ dans l'intervalle $]x, y[$.

- (d) Finalement, pour $x < y$, on a trouvé $g \in (\mathbb{N}a + \mathbb{Z}b) \cap]x, y[$, ce qui signifie que $\mathbb{N}a + \mathbb{Z}b$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Réciproquement, si $K = \mathbb{N}a + \mathbb{Z}b$ est dense dans $\mathbb{R}$, il en est alors de même de $H = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ puisque H contient K .

8.

- (a) Les fonctions $\cos$ et $\sin$ étant à valeurs dans $[-1, 1]$, leurs valeurs d'adhérence sont dans cet intervalle.

Soient $x \in [-1, 1]$ et $t = \arccos(x) \in [0, \pi]$ [resp. $t = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$].

Comme $\frac{\pi}{\theta}$ est irrationnel, il en est de même de $\frac{\theta}{2\pi}$ et l'ensemble $\mathbb{N}\theta + \mathbb{Z}2\pi$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels et une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n\theta + 2\pi q_n) = t$. Avec la 2π -périodicité et la continuité de la fonction $\cos$ [resp. $\sin$], on en déduit que $x = \cos(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(p_n\theta + 2\pi q_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(p_n\theta)$ [resp. $x = \sin(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(p_n\theta)$], c'est-à-dire que x est une valeur d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ [resp. $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$].

- (b) Comme $\frac{\pi}{\theta}$ est irrationnel, la suite $(\tan(n\theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie (l'égalité

$$n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \text{ donne } \theta = \frac{2k+1}{2n}\pi \in \mathbb{Q}.$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\mathbb{N}\theta + \mathbb{Z}2\pi$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels et une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n\theta + 2\pi q_n) = t$. On aura alors $p_n\theta + 2\pi q_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ à partir d'un certain rang et avec la 2π -périodicité et la continuité de la fonction $\tan$, on en déduit que :

$$x = \tan(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(p_n\theta + 2\pi q_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(p_n\theta)$$

c'est-à-dire que x est une valeur d'adhérence de la suite $(\tan(n\theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
L'ensemble de ces valeurs d'adhérences est donc $\mathbb{R}$.

9.

- (a) f étant de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur $[1, +\infty[$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, elle réalise un homéomorphisme de $[1, +\infty[$ sur $[f(1), +\infty[$, sa réciproque f^{-1} étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[f(1), +\infty[$ avec :

$$\forall x \in [f(1), +\infty[, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} > 0$$

On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^{-1})'(x) = +\infty$.

- (b) Comme f et f^{-1} sont strictement croissantes, la condition (10.1) est équivalente à $\varphi(n) \leq f^{-1}(t + 2n\pi) < \varphi(n) + 1$. En désignant par n_0 un entier naturel tel que $t + 2n_0\pi \geq f(1)$, il nous suffit de poser pour $n \geq n_0$, $\varphi(n) = E(f^{-1}(t + 2n\pi))$ où E est la fonction partie entière.

- (c) Cela résulte de la croissance de la fonction partie entière (précisément si $x - y > 1$ alors $E(x) > E(y)$) et de la stricte croissance de f^{-1} . En effet, en posant $v_n = f^{-1}(t + 2n\pi)$ et en utilisant le théorème des accroissements finis, on a pour tout entier $n \geq n_0$, $v_{n+1} - v_n = 2\pi (f^{-1})'(\xi_n)$ où ξ_n est un réel compris entre $t + 2n\pi$ et $t + 2(n+1)\pi$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f^{-1})'(\xi_n) = +\infty$, il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que $v_{n+1} - v_n > 1$, de sorte que $\varphi(n+1) = E(v_{n+1}) > E(v_n) = \varphi(n)$.
- (d) Pour $n \geq n_1$, on a $0 \leq t + 2n\pi - f(\varphi(n)) < f(\varphi(n) + 1) - f(\varphi(n))$ et le théorème des accroissements finis nous dit que, pour tout entier $p \geq 1$, on a $f(p+1) - f(p) = f'(\xi_p)$ où $\xi_p \in]p, p+1[$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, on en déduit que $\lim_{p \rightarrow +\infty} (f(p+1) - f(p)) = 0$. Comme $(\varphi(n))_{n \geq n_1}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$ et en conséquence, $\lim_{p \rightarrow +\infty} (f(\varphi(n) + 1) - f(\varphi(n))) = 0$. Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t + 2n\pi - f(\varphi(n))) = 0$.
- (e) Pour $n \geq n_1$, on a en utilisant l'inégalité des accroissements finis pour la fonction cos :

$$\begin{aligned} |u_{\varphi(n)} - x| &= |\cos(f(\varphi(n))) - \cos(t)| = |f(\varphi(n)) - \cos(t + 2n\pi)| \\ &\leq |t + 2n\pi - f(\varphi(n))| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

- (f) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant à valeurs dans $[-1, 1]$, ses valeurs d'adhérence sont dans $[-1, 1]$ et ce qui précède nous donne l'inclusion réciproque puisqu'on a montré que tout $x \in [-1, 1]$ est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

10. Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, le groupe $H_{a,b} = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ est alors dense dans $\mathbb{R}$, donc pour

tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $0 < p_n a + q_n b < \frac{1}{n+1}$. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n a + q_n b) = 0$ avec $p_n a + q_n b \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement, supposons qu'il existe deux suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n a + q_n b) = 0$ avec $p_n a + q_n b \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ avec p et q entiers relatifs, on a alors $p_n a + q_n b = \frac{b}{q} (p_n p + q_n q)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne que $(p_n p + q_n q)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers relatifs non nuls qui tend vers 0, ce qui est impossible (puisque $|p_n p + q_n q| \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). En conclusion $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

11.

- (a) On a $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, donc $e \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \left(n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$, soit $n! e \sim_{n \rightarrow +\infty} n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. En notant $p_n = n! \in \mathbb{N}^*$ et $q_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}^*$, on

a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 < p_n e - q_n &= n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots (n+k)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

et l'irrationalité de e s'en déduit.

- (b) La condition (i) revient à dire que, pour tout entier $n \geq 0$, l'entier u_n est multiple de chaque u_k pour k compris entre 0 et n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = u_n$, $q_n = u_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$ dans $\mathbb{N}^*$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < p_n \theta - q_n = u_n R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(R_n est négligeable devant $\frac{1}{u_n}$), ce qui implique que θ est irrationnel.

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^{2^n} - 1 \in \mathbb{N}^*$, $F_n = 2^{2^n} + 1 \in \mathbb{N}^*$ et :

$$u_{n+1} = \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 = u_n F_n$$

donc u_n divise u_{n+1} . Avec :

$$0 < \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{F_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

on déduit que la série $\sum \frac{1}{u_n}$ est convergente (critère de d'Alembert).

De même, on voit que que la série $\sum \frac{1}{F_n}$ converge. Avec :

$$u_n R_n = u_n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{u_{k+1}} = u_n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{u_k F_k} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{F_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

on déduit l'irrationalité de $\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2^n} - 1}$.

- (d) Avec $\theta - \varphi = 2(\theta - 1)$, on déduit que $\varphi = 2 - \theta$ est irrationnel.

- II - Fonctions périodiques

1. Si f est constante égale à λ , on a alors pour tout réel T et tout réel x :

$$f(x+T) = \lambda = f(x)$$

et $T \in \mathcal{P}(f)$, donc $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$. Réciproquement si $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$, tout réel x est une période et $f(x) = f(0+x) = f(0)$, donc f est constante.

2. Soit $T \in G$. Pour tout $x \in G$, on a $x + T \in G$ et $f(x + T) = 1 = f(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus G$, on a $x + T \in \mathbb{R} \setminus G$ (sinon $x = (x + T) - T \in G$) et $f(x + T) = 0 = f(x)$. Donc $T \in \mathcal{P}(f)$. Réciproquement si $T \in \mathcal{P}(f)$, on a alors $1 = f(0) = f(T)$ et $T \in G$. D'où l'égalité $\mathcal{P}(f) = G$.
3. Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{P}(f)$ convergente vers un réel T , avec la continuité de f on peut écrire pour tout réel x , $f(x + T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + T_n) = f(x)$, c'est-à-dire que $T \in \mathcal{P}(f)$. L'ensemble $\mathcal{P}(f)$ est donc fermé dans $\mathbb{R}$. On peut aussi procéder comme suit. En notant $f_a(t) = f(a + t) - f(t)$ pour tout réel a , on a $\mathcal{P}(f) = \bigcap_{a \in \mathbb{R}} f_a^{-1}\{0\}$ et pour f continue, cet ensemble est fermé comme intersection de fermés.
4. $\mathcal{P}(f)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$ (la fonction f est continue non constante), il ne peut être dense dans $\mathbb{R}$ et en conséquence il est discret de la forme $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$ avec $T > 0$ (f est périodique, donc $\mathcal{P}(f) \neq \{0\}$).
5. Comme T_1 et T_2 sont dans le groupe $\mathcal{P}(f)$, on a $\mathbb{Z}T_1 + \mathbb{Z}T_2 \subset \mathcal{P}(f)$. Si $\frac{T_1}{T_2}$ irrationnel, le groupe $\mathbb{Z}T_1 + \mathbb{Z}T_2$ est alors dense dans $\mathbb{R}$ et il en est de même de $\mathcal{P}(f)$ et comme ce groupe est fermé pour f continue, on a $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$, ce qui revient à dire que f est constante.
6. Soit $T \in \mathcal{P}(f + g)$. Pour tout réel x , on a $f(x + T) - f(x) = g(x) - g(x + T)$ et la fonction $h : x \mapsto f(x + T) - f(x)$ admet T_1 et T_2 comme périodes. Donc pour $\frac{T_1}{T_2}$ irrationnel, la fonction continue h est constante, soit $h(x) = \lambda$ pour tout réel x . Comme f est T_1 -périodique, on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T_1} f(t) dt = \int_0^{T_1} f(t) dt$$

donc :

$$\begin{aligned} \lambda T_1 &= \int_0^{T_1} (f(t + T) - f(t)) dt = \int_0^{T_1} f(t + T) dt - \int_0^{T_1} f(t) dt \\ &= \int_T^{T+T_1} f(t) dt - \int_0^{T_1} f(t) dt = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\lambda = 0$ et $f(x + T) = f(x)$, $g(x + T) = g(x)$ pour tout réel x . Donc $T \in \mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(g) = \mathbb{Z}T_1 \cap \mathbb{Z}T_2 = \{0\}$ ($\frac{T_1}{T_2}$ irrationnel), soit $T = 0$. En définitive, $\mathcal{P}(f + g) = \{0\}$ et $f + g$ n'est pas périodique.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme H est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $x_0 \in]x - 1, x[\cap H$ et par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n < x_{n+1} < x \text{ et } 0 < x - x_n < \frac{1}{2^n}$$

Pour $n = 0$, on a x_0 tel que $0 < x - x_n < 1$. En désignant par $y_0 = \frac{x_0 + x}{2}$ le milieu de l'intervalle $[x_0, x]$, par densité de H , on peut trouver $x_1 \in]y_0, x[\cap H$

et on a $x_0 < y_0 < x_1 < x$ et $0 < x - x_1 < x - y_0 = \frac{x - x_0}{2} < \frac{1}{2}$ (faire un dessin).

Supposant construits $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x$ dans H tels que $0 < x - x_k < \frac{1}{2^k}$ pour tout k compris entre 0 et n , on désigne par $y_n = \frac{x_n + x}{2}$ le milieu de l'intervalle $[x_n, x]$ et par densité de H , on peut trouver $x_{n+1} \in]y_n, x[\cap H$ avec :

$$x_n < y_n < x_{n+1} < x \text{ et } 0 < x - x_{n+1} < x - y_n = \frac{x - x_n}{2} < \frac{1}{2^{n+1}}$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite strictement croissante d'éléments de H qui converge vers x . En partant de l'intervalle $]x, x + 1[$, on construit de manière analogue une suite strictement décroissante d'éléments de H qui converge vers x .

8. Les réels T_1 et T_2 sont dans le groupe $\mathcal{P}(f)$, donc $\mathbb{Z}T_1 + \mathbb{Z}T_2 \subset \mathcal{P}(f)$. Si $\frac{T_1}{T_2}$ irrationnel, le groupe $\mathbb{Z}T_1 + \mathbb{Z}T_2$ est alors dense dans $\mathbb{R}$ et il en est de même de $\mathcal{P}(f)$. Pour tout réel x , on peut trouver une suite strictement croissante $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(f)$ qui converge vers $a - x$, donc la suite $(x + T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers a et on a $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + T_n) = f(x)$.

La fonction f est donc constante.

9. Comme f est périodique, on a $\mathcal{P}(f) \neq \{0\}$. Si $\mathcal{P}(f)$ est dense, pour tout réel x , on peut alors trouver une suite strictement croissante $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(f)$ qui converge vers $a - x$, donc la suite $(x + T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers a et on a $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + T_n) = f(x)$. La fonction f est donc constante. Pour f non constante, le groupe $\mathcal{P}(f)$ est donc discret, c'est-à-dire qu'il existe un réel $T > 0$ tel que $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$.
10. Si $\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(g) \neq \{0\}$, on a alors $\mathcal{P}(f + g) \neq \{0\}$ puisque ce groupe contient le précédent, ce qui signifie que $f + g$ est périodique. En général l'égalité $\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(g) = \mathcal{P}(f + g)$ n'est pas réalisée. Par exemple, pour $g = -f$, on a $\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(g) = \mathcal{P}(f)$ et $\mathcal{P}(f + g) = \mathbb{R}$.

11. Pour tout réel x , on a $F(x + T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$ et T est une période de F si, et seulement si, $\int_0^T f(t) dt = 0$. La question qui suit nous dit que T est aussi la plus petite période strictement positive de F .

12. Si f' est constante, soit $f'(x) = a$ pour tout réel x , on a alors $f(x) = ax + b$ pour tout x et a est nécessairement nul pour f périodique, c'est-à-dire que f est constante. On a donc, dans ce cas, $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(f') = \mathbb{R}$. Si f' est non constante, il en est alors de même de f et comme ces fonctions sont continues, on a $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$ et $\mathcal{P}(f') = \mathbb{Z}T'$ avec $T > 0$ et $T' > 0$. Pour tout réel x , on a $f(x + T) = f(x)$, donc par dérivation $f'(x + T) = f'(x)$ et $T \in \mathcal{P}(f')$. On a donc $\mathcal{P}(f) \subset \mathcal{P}(f')$, soit $T = nT'$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\int_0^{T'} f'(t) dt = \frac{1}{n} \int_0^{nT'} f'(t) dt = \frac{1}{n} \int_0^T f'(t) dt = \frac{f(T) - f(0)}{n} = 0$$

donc $T' \in \mathcal{P}(f)$ (question précédente) et $\mathcal{P}(f') \subset \mathcal{P}(f)$, d'où l'égalité.

13. On procède, pour l'existence de g et Q , par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$, on a $f(x+T) = f(x) + a_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où a_0 est un réel. Si $a_0 = 0$, le couple $(g, Q) = (f, 0)$ convient. Si $a_0 \neq 0$, on définit alors la fonction g par $g(x) = f(x) - \frac{a_0}{T}x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$g(x+T) = f(x+T) - \frac{a_0}{T}(x+T) = f(x) + a_0 - \frac{a_0}{T}(x+T) = g(x)$$

c'est-à-dire que g est T -périodique. Posant $Q(x) = \frac{a_0}{T}$, on a $f(x) = g(x) + xQ(x)$. Supposons le résultat acquis au rang $n-1 \geq 0$ et soit f telle que $f(x+T) = f(x) + P(x)$ pour tout réel x , où $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $\deg(P) \leq n-1$, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Sinon, on a $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$ et en définissant la fonction h par $h(x) = f(x) - \frac{a_n}{(n+1)T}x^{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h(x+T) &= f(x+T) - \frac{a_n}{(n+1)T}(x+T)^{n+1} \\ &= f(x) + \sum_{k=0}^n a_k x^k - \frac{a_n}{(n+1)T} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} T^{n+1-k} x^k \\ &= h(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k - \frac{a_n}{(n+1)T} \binom{n+1}{k} T^{n+1-k} \right) x^k = h(x) + R(x) \end{aligned}$$

où $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il existe donc une fonction g périodique de période T et une fonction polynomiale $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ telles que $h(x) = g(x) + xS(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui nous donne :

$$f(x) = g(x) + xS(x) + \frac{a_n}{(n+1)T}x^{n+1} = g(x) + xQ(x)$$

où Q est polynomiale de degré n .

Supposons que l'on ait deux décompositions $f = g_1 + xQ_1 = g_2 + xQ_2$, où g_1, g_2 sont T -périodiques et Q_1, Q_2 dans $\mathbb{R}_n[X]$. La fonction $\varphi = x(Q_2 - Q_1)$ est alors polynomiale, nulle en 0 et T -périodique. On a alors $0 = \varphi(0) = \varphi(kT)$ pour tout entier k et φ a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. On a donc $Q_1 = Q_2$ et $g_1 = g_2$.

- III - Sous-groupes de $\mathbb{R}^n$

1. Si K est un compact discret de E , il est alors borné et $K = K \cap K$ est fini.
2. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de G qui converge vers $x \in E$. Si $x \notin G$, l'ensemble $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est alors infini (sans quoi la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire sur x et $x \in G$), on peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts et $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du groupe G tous non nuls qui converge vers 0, donc $\overline{B}(0, 1) \cap G$ contient une infinité d'éléments, ce qui contredit le fait que G est discret. On a

donc $x \in G$ et G est fermé.

On peut aussi dire que $\overline{B}(x, 1) \cap G$ est fini non vide, c'est donc un fermé de E et $G = \bigcap_{x \in G} \overline{B}(x, 1) \cap G$ est fermé comme intersection de fermés.

3.

- (a) $\Rightarrow$ (b) Supposons que G soit discret. Pour toute partie bornée K de E , l'intersection $G \cap K$ est vide ou finie, ce qui nous donne en particulier,

$$\overline{B}(0, 1) \cap G = \{0\} \text{ ou } \overline{B}(0, 1) \cap G = \{0, x_1, \dots, x_p\}$$

les x_k étant tous non nuls. Dans le deuxième cas, en notant $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq p} \|x_k\|$, on a $0 < \varepsilon \leq 1$ et $B(0, \varepsilon) \cap G = \{0\}$, ce qui signifie que 0 est isolé dans G .

- (b) $\Rightarrow$ (c) Si 0 est isolé dans G , il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \cap G = \{0\}$. Pour tout x dans G , on a alors $B(x, \varepsilon) \cap G = \{x\}$. En effet, si $y \in B(x, \varepsilon) \cap G$, on a $y - x \in G$ puisque G est un groupe et $y - x \in B(0, \varepsilon)$, ce qui implique $y - x = 0$ et $y = x$. Donc tous les éléments de G sont isolés.

- (c) $\Rightarrow$ (a) Supposons que tous les éléments de G soient isolés dans G . Soit K un compact de E . Si $K \cap G$ est infini, il contient alors une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts et de cette suite dans le compact K on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément x de $K \cap G$ (cet ensemble est fermé), mais alors $x \in G$ n'est pas isolé dans G .

4. Si $G \neq \{0\}$ est discret, 0 étant isolé dans G , il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \cap G = \{0\}$ et $\delta = \inf_{x \in G \setminus \{0\}} \|x\| \geq \varepsilon > 0$.

5.

- (a) On vérifie facilement que $G = \mathbb{Z}(1, 0) + \mathbb{Z}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $u \in G \setminus \{(0, 0)\}$, on a $\|u\|^2 = (p + q\sqrt{2})^2 + 2q^2 \geq 1$ (en effet, pour $q = 0$, on a $\|u\|^2 = p^2 \geq 1$ et pour $q \neq 0$, on a $\|u\|^2 \geq 2q^2 \geq 2$), ce qui implique que $(0, 0)$ est isolé et G est discret.

- (b) La première projection de G sur $\mathbb{R}$ est $\pi_1(G) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$ qui est non discrète puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel.

6. Il est clair que $\overline{G}$ est un fermé de E et $G \subset \overline{G}$, donc $\overline{G} \neq \emptyset$. Si x, y sont dans $\overline{G}$, il existe alors deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G qui convergent respectivement vers x et y . La suite $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite d'éléments du groupe G qui converge vers $x - y$, donc $x - y \in \overline{G}$. En conclusion $\overline{G}$ est un sous-groupe de E .

7.

- (a) Comme G est un système générateur de l'espace F de dimension m , on peut en extraire une base $(g_i)_{1 \leq i \leq m}$.

- (b) Pour tout $x = \sum_{i=1}^m x_i g_i \in K$, on a $\|x\| \leq \sum_{i=1}^m \|g_i\|$, donc K est borné. Si

$$(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{i=1}^m x_i^{(k)} g_i \right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est une suite d'éléments de } K \text{ qui converge,}$$

chaque suite $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente vers un réel $x_i \in [0, 1]$ (puisque $|x_i^{(k)} - x_i^{(\ell)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(\ell)}\|$) et $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = \sum_{i=1}^m x_i g_i \in K$. Donc K est fermé.

Pour prouver que K est fermé, on peut aussi compléter $(g_i)_{1 \leq i \leq m}$ en une base $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E et désignant par $(g_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale, on a :

$$K = \bigcap_{i=1}^m (g_i^*)^{-1}([0, 1]) \cap \bigcap_{i=m+1}^n (g_i^*)^{-1}\{0\}$$

et c'est un fermé comme intersection de fermés (les formes linéaires g_i^* sont continues de E dans $\mathbb{R}$). En définitive, K est compact et comme G est discret, $K \cap G$ est fini non vide (il contient les g_i).

- (c) On a déjà $H = \langle K \cap G \rangle \subset G$. Comme $(g_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une base de F qui contient G , tout élément g de G s'écrit $g = \sum_{i=1}^m x_i g_i$ où les x_i sont des réels. En désignant, pour tout i compris entre 1 et m , par $[x_i]$ la partie entière de x_i , on a $h_1 = \sum_{i=1}^m [x_i] g_i \in H \subset G$ (tous les g_i sont dans $K \cap G \subset H$) et comme $x_i - k_i \in [0, 1[$ pour tout i , on a :

$$h_2 = \sum_{i=1}^m (x_i - [x_i]) g_i = g - h_1 \in K \cap G \subset H$$

(c'est donc l'un des f_k). Il en résulte que $g = h_1 + h_2 \in H$.

- (d) Soit $g = \sum_{i=1}^m x_i g_i \in G$. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a $pg \in G$ et :

$$x_p = \sum_{i=1}^m (px_i - [px_i]) g_i \in K \cap G$$

Comme $K \cap G$ est fini, l'application $p \mapsto x_p$ ne peut être injective, il existe donc deux indices $p \neq q$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que $x_p = x_q$, ce qui nous donne :

$$px_i - [px_i] = qx_i - [qx_i] \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$\text{et } x_i = \frac{[px_i] - [qx_i]}{p - q} \in \mathbb{Q} \text{ pour } 1 \leq i \leq m.$$

- (e) On a $G = H = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ et chaque f_j s'écrit $f_j = \sum_{i=1}^m r_{i,j} g_i$ ($1 \leq j \leq p$) où les $r_{i,j} \in \mathbb{Q}$. En désignant par $q \in \mathbb{N}^*$ le ppcm des dénominateurs des $r_{i,j}$ non nuls, on a $qr_{i,j} \in \mathbb{Z}$ pour tous i, j et $qf_j = \sum_{i=1}^m p_{i,j} g_i$ ($1 \leq j \leq p$) où les $p_{i,j} \in \mathbb{Z}$. Comme $G = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$, tout élément g de G s'écrit :

$$g = \sum_{j=1}^p k_j f_j = \sum_{j=1}^p k_j \sum_{i=1}^m p_{i,j} \left(\frac{1}{q} g_i\right) \in \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} \left(\frac{1}{q} g_i\right)$$

(la famille $\left(\frac{1}{q}g_i\right)_{1 \leq i \leq m}$ est une base de F). On a donc $G \subset \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} \left(\frac{1}{q}g_i\right)$.

(f) Montrons par récurrence sur $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, que pour toute famille libre $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ d'éléments de E , les sous-groupes non réduits à $\{0\}$ de $\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}f_i$

sont de la forme $G = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}e_i$, où $r \in \{1, \dots, m\}$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille libre dans E . Pour $m = 1$, G est un sous-groupe non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{Z}f_1$ où $f_1 \in E \setminus \{0\}$. Comme G est un groupe non réduit à $\{0\}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid kf_1 \in G\}$ est non vide, donc admet un plus petit élément $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $e_1 = pf_1 \in G$. Pour $g = kf_1 \in G$, par division euclidienne, on a $k = jp + r$ avec $0 \leq r < p$ et $rf_1 = g - je_1 \in G$, donc $r = 0$ (caractère minimal de p) et $g = je_1 \in \mathbb{Z}e_1$. On a donc $G \subset \mathbb{Z}e_1$ et l'égalité puisque $e_1 \in G$ (c'est en fait la caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{Z}$).

Supposons le résultat acquis pour $m-1 \in \{1, \dots, n-1\}$. Soient $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille libre dans E et G un sous-groupe non réduit à $\{0\}$ de $\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}f_i$. Si

$G \subset \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}f_i$ c'est alors terminé, vu l'hypothèse de récurrence. Supposons

que G contienne des éléments de la forme $\sum_{i=1}^m k_i f_i$, où les k_i sont des entiers avec $k_m \neq 0$. Dans ces conditions, le morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \varphi_m : \quad G &\rightarrow \mathbb{Z} \\ g = \sum_{i=1}^m k_i f_i &\mapsto k_m \end{aligned}$$

est non nul et $\text{Im}(\varphi_m)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$. Il existe donc un entier $p_m \geq 1$ tel que $\text{Im}(\varphi_m) = p_m \mathbb{Z}$. Soit $e_m \in G$ tel que

$\varphi_m(e_m) = p_m$. Comme $\ker(\varphi_m)$ est un sous-groupe de $\bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}f_i$, il existe un entier $r \in \{1, \dots, m-1\}$ et une famille libre $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ dans $\ker(\varphi_m) \subset G$

telle que $\ker(\varphi_m) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}e_i$. Pour tout $g \in G$, il existe un entier k tel que

$\varphi_m(g) = kp_m = \varphi_m(ke_m)$, donc $g - ke_m \in \ker(\varphi_m)$ et $g \in \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}e_i + \mathbb{Z}e_m$.

On a donc $G \subset \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}e_i + \mathbb{Z}e_m$ et l'égalité puisque tous les e_i , pour i compris entre 1 et r et e_m sont dans G . Si la famille $(e_1, \dots, e_r, e_m)$ est liée, on a alors $e_m = \sum_{i=1}^r x_i e_i$ où les x_i sont des réels (puisque $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre),

donc $e_m = \sum_{i=1}^m k_i f_i = \sum_{i=1}^r x_i \sum_{j=1}^{m-1} k_{i,j} f_j$ où les k_i et $k_{i,j}$ sont des entiers, ce qui

nous donne $k_m = \varphi_m(e_m) = 0$ et contredit la définition de e_m . La famille $(e_1, \dots, e_r, e_m)$ est donc libre et notant e_{r+1} pour e_m , on a $G = \bigoplus_{i=1}^{r+1} \mathbb{Z}e_i$.

8.

- (a) Comme G n'est pas discret, 0 n'est pas isolé dans G et pour tout entier naturel k , il existe un élément non nul x_k dans $B\left(0, \frac{1}{k+1}\right) \cap G$, ce qui nous donne une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs non nuls dans G qui converge vers 0. De la suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\|x_k\|} x_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ dans la boule unité de E , on peut extraire une sous-suite $(y_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers un vecteur unitaire y (en dimension finie la boule unité est compacte). Pour tout réel λ et tout entier k , on a :

$$\begin{aligned} \left\| \lambda y - \left[\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|} \right] x_{\varphi(k)} \right\| &\leq \left\| \lambda y - \frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|} x_{\varphi(k)} \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|} x_{\varphi(k)} - \left[\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|} \right] x_{\varphi(k)} \right\| \\ &\leq |\lambda| \left\| y - \frac{1}{\|x_{\varphi(k)}\|} x_{\varphi(k)} \right\| \\ &\quad + \left(\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|} - \left[\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|} \right] \right) \|x_{\varphi(k)}\| \\ &\leq |\lambda| \|y - y_{\varphi(k)}\| + \|x_{\varphi(k)}\| \end{aligned}$$

avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|y - y_{\varphi(k)}\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{\varphi(k)}\| = 0$, ce qui nous donne $\lambda y = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|} \right] x_{\varphi(k)} \in \overline{G} = G$ (G est fermé). La droite $D = \mathbb{R}y$ est donc contenue dans G .

- (b) Comme G contient des droites vectorielles, on a $E_1 \neq \emptyset$. Soient x, y dans E_1 et λ dans $\mathbb{R}$. Pour montrer que $\lambda x + y$ est dans E_1 , il s'agit de montrer que $\mathbb{R}(\lambda x + y)$ est contenu dans G . Comme les droites $\mathbb{R}x$ et $\mathbb{R}y$ sont contenues dans G , on a :

$$\mathbb{R}(\lambda x + y) = \mathbb{R}(\lambda x) + \mathbb{R}y \subset \mathbb{R}x + \mathbb{R}y \subset G$$

donc $\lambda x + y \in E_1$.

- (c) On a $E = E_1 \oplus E_2$, donc $E_1 \cap H \subset E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $E_1 \cap H = \{0\}$. Tout $g \in G \subset E$ s'écrit $g = g_1 + g_2$ avec $g_1 \in E_1 \subset G$ et $g_2 \in E_2$, donc $g_2 = g - g_1 \in H = G \cap E_2$ et $g \in E_1 + H$. On a donc $G \subset E_1 + H$ et l'égalité puisque E_1 et E_2 sont contenus dans G .
- (d) $H = G \cap E_2$ est fermé comme intersection de deux fermés. Comme il ne contient aucune droite vectorielle (si $\mathbb{R}x \subset H$, on a alors $\mathbb{R}x \subset G$ et $x \in E_1$, donc $x = 0$), il est nécessairement discret (d'après III.8a).

- (e) Comme H est discret, il s'écrit $\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}e_i$ et désignant par $(e_i)_{r+1 \leq i \leq s}$ une base de E_1 , on a le résultat annoncé.

9. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$. S'il est discret, il est alors fermé et on a les possibilités suivantes :

- $G = \{0\}$;
- $G = \mathbb{Z}e_1$ avec $e_1 \neq 0$;
- $G = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ avec (e_1, e_2) libre.

S'il est non discret, son adhérence $\overline{G}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^2$ et on a les possibilités suivantes :

- $\overline{G} = \mathbb{R}^2$ et G est dense dans $\mathbb{R}^2$;
- $\overline{G} = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ est une réunion dénombrable de droites affines de direction $\mathbb{R}e_2$ et G est dense dans cette réunion ;
- $\overline{G} = \mathbb{R}e_1$ est une droite et G est dense dans cette droite.

10. Comme G contient la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\text{Vect}(G) = \mathbb{R}^n$.

- (a) Si G est discret, en notant $K = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n \right\}$, on a

vu que $K \cap G$ est fini non vide et tout $g \in G$ s'écrit $g = \sum_{i=1}^m r_i g_i$ où les r_i sont rationnels, ce qui nous donne en particulier $\theta \in \mathbb{Q}^n$, ce qui n'est pas. Donc G n'est pas discret.

- (b) Comme 0 n'est pas isolé dans G , on peut trouver une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments non nuls de G qui converge vers 0. En notant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \sum_{i=1}^n q_{k,i} e_i - p_k \theta$, où les $p_{i,k}$ et q_k sont des entiers, on a :

$$(q_{k,1} - p_k \theta_1, \dots, q_{k,n} - p_k \theta_n) \neq 0$$

$$\text{et } \lim_{k \rightarrow +\infty} q_{k,i} - p_k \theta_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

- (c) Donc, pour tout réel $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe un entier k tel que :

$$|q_{k,i} - p_k \theta_i| < \varepsilon \quad (1 \leq i \leq n)$$

Si $p_k = 0$, on a alors $|q_{k,i}| < 1$ dans $\mathbb{N}$ pour tout i et tous les $q_{k,i}$ sont nuls, ce qui n'est pas. On a donc $p_k \neq 0$ et quitte à changer x_k en $-x_k$, on peut supposer que $p_k \in \mathbb{N}^*$.

Chapitre 11

Polynômes

Exercice 11.1. pgcd de $P_n = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$ et P'_n

Pour $n \geq 2$, on note $P_n(X) = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine multiple de P_n , on a alors $\alpha = j$ ou $\alpha = j^2$ et $\alpha + 1 = -\alpha^2$.
2. Montrer que P_n admet des racines multiples si, et seulement si, n est multiples de 6 et dans ces cas, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j}$ sont ces racines, leur multiplicité étant égale à 2.
3. En déduire le pgcd de P_n et P'_n .

Solution. Le polynôme P_n est de degré n .

1. Pour $n \geq 2$, le polynôme P_n admet une racine d'ordre supérieur ou égal à 2 si, et seulement si, il existe un nombre complexe α tel que $P_n(\alpha) = P'_n(\alpha) = 0$, ce qui revient à dire que $(\alpha+1)^{n+1} - \alpha^{n+1} = 1$ et $(\alpha+1)^n = \alpha^n$. On a alors $\alpha^n = (\alpha+1)\alpha^n - \alpha^{n+1} = 1$ et $(\alpha+1)^n = 1$, donc $|\alpha| = |\alpha+1| = 1$, soit $\alpha = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$ (1 n'est pas racine de P_n pour $n \geq 1$) et :

$$1 = |\alpha+1|^2 = (\cos(\theta) + 1)^2 + \sin^2(\theta) = 2(\cos(\theta) + 1) = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

ce qui nous donne $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \frac{1}{2}$ avec $\frac{\theta}{2} \in]0, \pi[$, soit $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\theta}{2} = 2\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire $\theta = 2\frac{\pi}{3}$ ou $\theta = 4\frac{\pi}{3}$ et en conséquence $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ ou $\alpha = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$, donc $\alpha + 1 = j + 1 = -j^2$ ou $\alpha + 1 = j^2 + 1 = -j$, soit $\alpha + 1 = -\alpha^2$ dans les deux cas. En résumé, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine multiple de P_n , on a alors $\alpha = j$ ou $\alpha = j^2$ et $\alpha + 1 = -\alpha^2$.

2. Pour $\alpha \in \{j, j^2\}$, on a :

$$\begin{aligned} P_n(\alpha) &= (\alpha+1)^{n+1} - \alpha^{n+1} - 1 = (-1)^{n+1} \alpha^{2(n+1)} - \alpha^{n+1} - 1 \\ &= \alpha^{n+1} \left((-1)^{n+1} \alpha^{n+1} - 1 \right) - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{P'_n(\alpha)}{n+1} = (\alpha+1)^n - \alpha^n = (-1)^n \alpha^{2n} - \alpha^n = \alpha^n ((-1)^n \alpha^n - 1)$$

Pour $n = 3q + 1$, on a $\frac{P'_n(\alpha)}{n+1} = -\alpha((-1)^q \alpha + 1) \neq 0$ et pour $n = 3q + 2$, on a $\frac{P'_n(\alpha)}{n+1} = \alpha^2((-1)^q \alpha^2 - 1) \neq 0$ (α et α^2 ne sont pas réels), donc P_n n'a que des racines simples.

Pour $n = 3q$, on a $\frac{P'_n(\alpha)}{n+1} = ((-1)^q - 1) \neq 0$ pour q impair, donc P_n n'a que des racines simples dans ce cas.

Enfin pour $n = 6q$, on a $P'_n(\alpha) = 0$ et $P_n(\alpha) = \alpha(-\alpha - 1) - 1 = 0$, donc j et $j^2 = \bar{j}$ sont les uniques racines multiples de P_n . De plus avec :

$$\begin{aligned} \frac{P''_n(\alpha)}{n(n+1)} &= (\alpha+1)^{n-1} - \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}((-1)^{n-1} \alpha^{n-1} - 1) \\ &= -\alpha^{-1}(\alpha^{-1} + 1) \neq 0 \end{aligned}$$

on déduit que $j^2 = \bar{j}$ sont racines doubles de P_n .

3. Pour n non multiple de 6, P_n n'a que des racines simples et $P_n \wedge p'_n = 1$.
Pour n multiple de 6, $j, \bar{j}$ sont racines doubles de P_n et les autres racines sont toutes simples, donc $P_n \wedge p'_n = (X - j)(X - \bar{j}) = X^2 + X + 1$. Par exemple, pour $n = 6$, on a :

$$\begin{aligned} P_6(X) &= (X+1)^7 - X^7 - 1 = 7X(X+1)(X^2 + X + 1)^2 \\ P'_6(X) &= 7(2X+1)(3X^2 + 3X + 1)(X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

Exercice 11.2. Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on considère la matrice $A - XI_n$ comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$ où $\mathbb{K}(X)$ est le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Justifier le fait que la transposée $C(X)$ de la matrice des cofacteurs de $A - XI_n$ s'écrit $C(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k X^k$ où les C_k sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. En notant $P_u(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, montrer que :

$$\begin{cases} AC_0 = a_0 I_n \\ AC_k - C_{k-1} = a_k I_n \quad (1 \leq k \leq n-1) \\ -C_{n-1} = a_n I_n \end{cases}$$

3. En déduire que $P_A(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k = 0$ et $P_u(u) = 0$.

Solution.

- On a $C(X) = {}^t \left(\left((-1)^{i+j} \det(C_{i,j}(X)) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right)$, où on a noté $C_{i,j}(x)$ la matrice d'ordre $n-1$ extraite de $A - XI_n$ en supprimant la ligne numéro i et la colonne numéro j . Les coefficients de $C_{i,j}(X)$ étant des polynômes de degré au plus égal à 1, $\det(C_{i,j}(X))$ est un polynôme de degré au plus égal à $n-1$ et $C(X)$ s'écrit $C(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k X^k$ où les C_k sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On a dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$, $(A - XI_n)C(X) = \det(A - XI_n)I_n$, soit :

$$(A - XI_n) \sum_{k=0}^{n-1} C_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k X^k I_n$$

dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})[X]$, ce qui s'écrit :

$$AC_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (AC_k - C_{k-1})X^k - C_{n-1}X^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k I_n$$

et en identifiant les coefficients dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on obtient :

$$\begin{cases} AC_0 = a_0 I_n \\ AC_k - C_{k-1} = a_k I_n \quad (1 \leq k \leq n-1) \\ -C_{n-1} = a_n I_n \end{cases}$$

- Des identifications précédentes, on déduit que :

$$\begin{cases} AC_0 = a_0 I_n \\ A^{k+1}C_k - A^k C_{k-1} = a_k A^k \quad (1 \leq k \leq n-1) \\ -A^n C_{n-1} = a_n A^n \end{cases}$$

et en additionnant :

$$AC_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (A^{k+1}C_k - A^k C_{k-1}) - A^n C_{n-1} = \sum_{k=0}^n a_k A^k$$

soit $\sum_{k=0}^n a_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1}C_k - \sum_{k=1}^n A^k C_{k-1} = 0$. On a donc $P_A(A) = 0$ et $P_u(u) = 0$ puisque sa matrice dans la base choisie est $P_A(A)$.

Exercice 11.3. Polynômes d'interpolation de Lagrange

- On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale si $A^*A = AA^*$. Une telle matrice est diagonalisable. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale si, et seulement si, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$A^* = P(A)$ (on pourra utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $P(\lambda_k) = \overline{\lambda_k}$ où les λ_k sont les valeurs propres de A).

2. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, il existe alors un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ (qui dépend de A) tel que $e^A = Q(A)$.
3. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Montrer que si $e^A = e^B$, alors $A = B$.
4. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $Q(A)$ soit diagonalisable et $e^{Q(A)} = A$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne positive. Montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne positive B telle que $A = B^2$.

Solution.

1. On sait qu'il existe une matrice unitaire U et une matrice diagonale D telles que $D = U^*AU$. En notant $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les éléments diagonaux deux à deux distincts de D (ce sont les valeurs propres de A) avec $1 \leq p \leq n$, on désigne par P le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par :

$$P \in \mathbb{C}_{p-1}[X], \quad P(\lambda_k) = \overline{\lambda_k} \quad (1 \leq k \leq p)$$

on a $D^* = P(D) = U^*P(A)U$ et $P(A) = UD^*U^* = (UDU^*)^* = A^*$. La réciproque est évidente.

2. Comme A est diagonalisable, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$. Le théorème d'interpolation de Lagrange nous dit qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $Q(\lambda_k) = e^{\lambda_k}$ pour tout k compris entre 1 et n (en fait $Q \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ si on a p valeurs propres distinctes) et on a :

$$\begin{aligned} e^A &= e^{P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}} = P e^{\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} P^{-1} \\ &= P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1} = P \operatorname{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) P^{-1} \\ &= Q(P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}) = Q(A) \end{aligned}$$

3. Notons $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres deux à deux distinctes de A et B et $L \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $L(e^{\lambda_k}) = \lambda_k$ pour k compris entre 1 et p (les e^{λ_k} sont deux à deux distincts puisque la fonction exponentielle est injective sur $\mathbb{R}$).

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

où les μ_k sont dans $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. On a donc $\mu_k = L(e^{\mu_k})$ pour tout k compris entre 1 et n et $D = \operatorname{diag}(L(e^{\mu_1}), \dots, L(e^{\mu_n})) = L(e^D)$:

$$A = PDP^{-1} = PL(e^D)P^{-1} = L(Pe^D P^{-1}) = L(e^A)$$

De manière analogue, on voit que $B = L(e^B)$ et $e^A = e^B$ entraînent $A = B$.

4. Comme A est inversible, ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont toutes non nulles et si de plus elle est diagonalisable, il existe alors une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$.

Du fait de la surjectivité de l'exponentielle de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$, il existe des nombres complexes $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $\lambda_k = e^{\mu_k}$ pour tout k compris entre 1 et n .

Le théorème d'interpolation de Lagrange nous dit qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $\mu_k = Q(\lambda_k)$ pour tout k compris entre 1 et n (en fait $Q \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ si on a p valeurs propres distinctes).

La matrice diagonalisable $\Delta = P \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P^{-1}$ est alors telle que :

$$e^\Delta = P e^{\operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)} P^{-1} = P \operatorname{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n}) P^{-1} = A$$

et :

$$\Delta = P \operatorname{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) P^{-1} = Q(P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}) = Q(A)$$

5. L'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En désignant par v l'endomorphisme hermitien positif de matrice :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}$, on a $v^2 = u$.

Si P est le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (le degré de P est $p-1$ où p est le nombre de valeurs propres distinctes de A), on a alors $P(D) = \Delta$, c'est-à-dire que $\Delta \in \mathbb{C}[D]$ et $v \in \mathbb{C}[u]$. Si w est une autre racine carrée de u hermitien positif, on a alors $w^2 = u$ et w commute avec u , donc avec v . En définitive les endomorphismes v et w commutent et sont diagonalisables, on sait alors qu'ils sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle les matrices Δ_1 et Δ_2 de v et w sont diagonales à coefficients réels positifs. De $w^2 = u = v^2$, on déduit que $\Delta_1^2 = \Delta_2^2$ et $\Delta_1 = \Delta_2$ du fait que ces matrices sont diagonales à coefficients réels positifs. En définitive $v = w$.

Exercice 11.4. Nombres réels algébriques

On dit qu'un nombre réel α est algébrique s'il existe un polynôme non nul P dans $\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. On note $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres réels algébriques.

1. Soient α, β deux réels algébriques et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ deux polynômes non nuls dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $P(\alpha) = 0$ et $Q(\beta) = 0$, avec $a_n = b_m = 1$. On note :

$$\{\alpha^i \beta^j \mid 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\} = \{\gamma_k \mid 1 \leq k \leq p\}$$

où $p = nm$ et $\gamma_1 = \alpha^0 \beta^0 = 1$ et on désigne par V le vecteur de $\mathbb{R}^p$ de composantes $\gamma_1, \dots, \gamma_p$.

- (a) Montrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre p à coefficients rationnels A et B telles que $\alpha V = AV$ et $\beta V = BV$.
 (b) En déduire que $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif unitaire.

2. Montrer que le réel $\beta = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ est algébrique.

3. Montrer que $\mathbb{A}$ est un corps.

Solution.

1.

- (a) Pour tout entier k compris entre 1 et p il existe deux indices i, j tels que $\gamma_k = \alpha^i \beta^j$ et $\alpha \gamma_k = \alpha^{i+1} \beta^j$. Pour i compris entre 0 et $n-2$, $\alpha \gamma_k$ est l'un des γ_r et pour $i = n-1$, on a $\alpha \gamma_k = \alpha^n \beta^j = -\sum_{r=0}^{n-1} a_r \alpha^r \beta^j$ qui est une combinaison linéaire à coefficients rationnels des $\gamma_1, \dots, \gamma_p$. Il existe donc une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Q})$ telle que $\alpha V = AV$. De manière analogue, on voit qu'il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Q})$ telle que $\beta V = BV$.
 (b) On a $1 \in \mathbb{A}$, de manière évidente. Pour α, β dans $\mathbb{A}$, on a avec les notations précédentes, $(A - B)V = (\alpha - \beta)V$ avec V non nul dans $\mathbb{R}^p$, ce qui signifie que $\alpha - \beta$ est une valeur propre de la matrice $A - B$, donc une racine du polynôme caractéristique χ_{A-B} qui est dans $\mathbb{Q}[X]$ puisque $A - B$ est une matrice à coefficients rationnels. Il en résulte que $\alpha - \beta$ est algébrique. De même avec $(AB)V = (\alpha\beta)V$ on déduit que $\alpha\beta$ est algébrique. En conclusion $\mathbb{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

2. $\beta = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5} = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$ annulé par $P_1(X) = X^3 - 2$ et $\alpha_2 = \sqrt[3]{5}$ annulé par $P_2(X) = X^3 - 5$. Avec les notations précédentes, on a :

$$V = {}^t(1, \alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2^2, \alpha_1^2, \alpha_1^2\alpha_2, \alpha_1^2\alpha_2^2) = {}^t(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 9}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 V &= {}^t(\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2^2, \alpha_1^2, \alpha_1^2\alpha_2, \alpha_1^2\alpha_2^2, 2, 2\alpha_2, 2\alpha_2^2) \\ &= {}^t(\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, 2\gamma_1, 2\gamma_2, 2\gamma_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 V &= {}^t(\alpha_2, \alpha_2^2, 5, \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2^2, 5\alpha_1, \alpha_1^2 \alpha_2, \alpha_1^2 \alpha_2^2, 5\alpha_1^2) \\ &= {}^t(\gamma_2, \gamma_3, 5\gamma_1, \gamma_5, \gamma_6, 5\gamma_4, \gamma_8, \gamma_9, 5\gamma_7)\end{aligned}$$

donc $\beta V = {}^t(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 9}$ avec :

$$\delta_1 = \gamma_2 + \gamma_4, \delta_2 = \gamma_3 + \gamma_5, \delta_3 = 5\gamma_1 + \gamma_6, \delta_4 = \gamma_5 + \gamma_7$$

$$\delta_5 = \gamma_6 + \gamma_8, \delta_6 = 5\gamma_4 + \gamma_9, \delta_7 = \gamma_8 + 2\gamma_1, \delta_8 = \gamma_9 + 2\gamma_2, \delta_9 = 5\gamma_7 + 2\gamma_3$$

soit $\beta V = AV$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P(X) = X^9 - 21X^6 - 123X^3 - 343 = X^3(X^3(X^3 - 21) - 123) - 343$$

et il annule β , ce que l'on peut vérifier avec Xcas.

3. Il s'agit de montrer que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est algébrique, alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi algébrique.

Si $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est un polynôme non nul dans $\mathbb{Q}[X]$ qui annule α , le

polynôme $Q(X) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k$ est alors non nul dans $\mathbb{Q}[X]$ et on a :

$$Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \alpha^{-k} = \frac{1}{\alpha^n} \sum_{k=0}^n a_{n-k} \alpha^{n-k} = \frac{1}{\alpha^n} P(\alpha) = 0$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{\alpha}$ est algébrique.

Problème 11.1. Constructions à la règle et au compas

Si $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont deux corps commutatifs tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, on dit alors que $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$. Une extension $\mathbb{L}$ du corps commutatif $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Sa dimension est appelée degré de l'extension et est notée $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

Étant donnée une extension $\mathbb{L}$ d'un corps commutatif $\mathbb{K}$, on dit qu'un élément α de $\mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il existe un polynôme non nul P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Un élément α de $\mathbb{L}$ qui n'est pas algébrique sur $\mathbb{K}$ est dit transcendant.

Pour tout α dans $\mathbb{L}$, on note $\mathbb{K}[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ et on désigne par $\mathbb{K}(\alpha)$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{L}$ qui contient $\mathbb{K}$ et α .

- I - Nombres algébriques

Pour cette partie, $\mathbb{L}$ est une extension d'un corps commutatif $\mathbb{K}$.

1. Montrer $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ est infini.
2. Montrer que l'ensemble des nombres réels algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable, puis en déduire qu'il existe une infinité de nombres réels transcendants.
3. Soit α un élément de $\mathbb{L}$ qui est algébrique sur $\mathbb{K}$.

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P_α dans $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\} = \mathbb{K}[X] \cdot P_\alpha$$

On dit que P_α est le polynôme minimal de α et son degré est le degré de α sur $\mathbb{K}$. Il est noté $d(\alpha, \mathbb{K})$.

(b) Montrer que le polynôme minimal de α est l'unique polynôme unitaire irréductible de $\mathbb{K}[X]$ qui annule α .

4.

(a) Soit α un nombre complexe algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré d . Montrer qu'il existe une constante réelle $C_\alpha > 0$ telle que pour tout nombre rationnel

$$r = \frac{p}{q} \text{ distinct de } \alpha, \text{ on ait } \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_\alpha}{q^d}.$$

(b) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers compris entre 0 et 9 telle que a_n soit non nul à partir d'un certain rang. Montrer que le réel $\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^{n!}}$ est transcendant.

5. Soit α un élément de $\mathbb{L}$. Montrer que :

$$(\alpha \in \mathbb{K}) \Leftrightarrow (\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}) \Leftrightarrow (d(\alpha, \mathbb{K}) = 1)$$

6. Soit α un élément de $\mathbb{L}$. Montrer que :

$$(\alpha \text{ est algébrique sur } \mathbb{K}) \Leftrightarrow (\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)) \Leftrightarrow ([\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] \text{ est fini})$$

7. Montrer que si $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ est fini, alors tout élément de $\mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$.

8. On suppose pour cette question que $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{L}$ est une extension de degré 2 de $\mathbb{K}$ (on dit que c'est une extension quadratique de $\mathbb{K}$). Montrer qu'il existe un élément λ de $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$ tel que λ^2 soit dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\lambda]$.

9. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi algébrique sur $\mathbb{K}$ et $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{K}[\alpha]$.

10. Soit $\mathbb{M}$ un corps commutatif tel que $\mathbb{K} \subset \mathbb{M} \subset \mathbb{L}$. Dans le cas où les degrés sont finis, montrer que $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} : \mathbb{M}][\mathbb{M} : \mathbb{K}]$.

11. Montrer que l'ensemble A des éléments de $\mathbb{L}$ qui sont algébriques sur $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$.

Pour les questions qui suivent, $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

12. Montrer que les réels $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt[3]{7}$ sont algébrique sur $\mathbb{Q}$ et calculer leur polynôme minimal.
13. Soit p un nombre premier.
- (a) Soit ξ une racine p -ème de l'unité distincte de 1. Montrer que ξ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et déterminer son polynôme minimal.
 - (b) Soit ξ une racine primitive p^2 -ème de l'unité. Montrer que ξ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et déterminer son polynôme minimal.
14. On admettra que pour tout entier $n \geq 2$ le polynôme cyclotomique :

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n-1 \\ k \wedge n = 1}} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On rappelle que ce polynôme est de degré $\varphi(n)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , le réel $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et préciser son degré.

- II - Nombres constructibles

Pour cette partie le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure affine euclidienne usuelle.

Si A, B sont deux points distincts de $\mathbb{R}^2$ et R un réel strictement positif, on note AB la distance entre ces deux points, (AB) la droite passant par ces points et $\mathcal{C}(A, R)$ le cercle de centre A et de rayon R .

On note $O = (0, 0)$, $I = (1, 0)$ et on désigne par Σ une partie de $\mathbb{R}^2$ contenant les points O et I . On associe à un tel ensemble les ensembles suivants :

- $\mathcal{D}(\Sigma) = \{(AB) \mid (A, B) \in \Sigma^2, A \neq B\}$, c'est l'ensemble de toutes les droites passant par deux points distincts de Σ ;
- $\delta(\Sigma) = \{AB \mid (A, B) \in \Sigma^2, A \neq B\}$, c'est l'ensemble de toutes les distances possibles entre deux points distincts de Σ ;
- $\mathcal{C}(\Sigma) = \{\mathcal{C}(A, R) \mid A \in \Sigma, R \in \delta(\Sigma)\}$, c'est l'ensemble de tous les cercles centrés en un point de Σ et de rayon la distance entre deux points distincts de Σ ;
- $\Delta(\Sigma)$ la réunion de Σ et de l'ensemble de tous les points obtenus par l'intersection de deux droites distinctes de $\mathcal{D}(\Sigma)$, ou d'une droite de $\mathcal{D}(\Sigma)$ et d'un cercle de $\mathcal{C}(\Sigma)$ ou de deux cercles distincts de $\mathcal{C}(\Sigma)$.

On définit la suite croissante $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} \Sigma_0 = \{O, I\} \\ \Sigma_{n+1} = \Delta(\Sigma_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et on définit l'ensemble Γ des points constructibles à la règle et au compas à partir de $\{O, I\}$ (on dira simplement constructibles) par $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$.

Une droite est dite constructible si elle passe par deux points constructibles.

Un cercle est dit constructible si son centre est constructible et s'il passe par un point constructible.

Un réel x est dit constructible (on dit aussi que x est un nombre constructible) si le point $(x, 0)$ est constructible.

1. Soit $\mathbb{K}$ un sous corps de $\mathbb{R}$ et $\Sigma = \mathbb{K}^2$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ ayant leurs coordonnées dans $\mathbb{K}$. Montrer que :
 - (a) le point d'intersection de deux droites sécantes de $\mathcal{D}(\Sigma)$ est dans Σ ;
 - (b) un point d'intersection d'une droite de $\mathcal{D}(\Sigma)$ et d'un cercle de $\mathcal{C}(\Sigma)$ est soit dans Σ soit un point dont les deux coordonnées sont dans une extension quadratique de $\mathbb{K}$;
 - (c) un point d'intersection de deux cercles non concentriques de $\mathcal{C}(\Sigma)$ est soit dans Σ soit un point dont les deux coordonnées sont dans une extension quadratique de $\mathbb{K}$.
2. Montrer que si x est un nombre constructible, alors $(0, x)$ est un point constructible.
3. Soit D une droite constructible et A un point constructible. Montrer que la perpendiculaire et la parallèle à D passant par A sont constructibles.
4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{K}$ des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Justifier le fait que $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$.
5. Montrer que le corps $\mathbb{K}$ des nombres constructibles est stable par racine carrée.
6. Montrer qu'un réel x est constructible si, et seulement si, il existe une suite finie $(\mathbb{K}_i)_{0 \leq i \leq n}$ de sous corps de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, pour tout i compris entre 1 et n , $\mathbb{K}_i$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}_{i-1}$ (on dira que $(\mathbb{K}_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une chaîne d'extensions quadratiques) et $x \in \mathbb{K}_n$ (théorème de Wantzel).
7. Montrer que si x est un nombre constructible, alors il est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré une puissance de 2.
8. Montrer que l'ensemble $\mathbb{K}$ des nombres constructibles est dénombrable et que c'est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ (contenant $\mathbb{Q}$) et stable par racine carrée.
9. Soient n un entier naturel non nul et p un nombre premier. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur n pour que $\sqrt[n]{p}$ soit constructible.
10. Soit θ un réel. Montrer que si θ est constructible, alors pour tout entier relatif n , $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ sont constructibles.
11. On dit qu'un angle $\bar{\theta} \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ est constructible (à la règle et au compas à partir de $\{0, I\}$) si $\cos(\theta)$ est constructible.
 Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}_n = \{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ le polygone régulier à n coté où $M_k = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right)$ pour k compris entre 0 et $n-1$.
 On dit que $\mathcal{P}_n$ est constructible (à la règle et au compas à partir de $\{0, I\}$) si l'angle $\frac{2\pi}{n}$ est constructible (ce qui revient à dire que M_1 est constructible).
 - (a) Montrer que pour tout entier $m \geq 0$, le polygone $\mathcal{P}_{2^m}$ est constructible.
 - (b) Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et m un diviseur de n . Montrer que si $\mathcal{P}_n$ est constructible alors $\mathcal{P}_m$ est constructible.
 - (c) Soient n, m deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que $\mathcal{P}_{nm}$ est constructible si, et seulement si, $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_m$ sont constructibles.

- (d) Soit p un nombre premier impair et m un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $\mathcal{P}_{p^m}$ n'est pas constructible.
- (e) Soit p un nombre premier impair. Montrer que si $\mathcal{P}_p$ est constructible alors p est un nombre de Fermat, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k tel que $p = 2^{2^k} + 1$.
- (f) Soit $n \geq 3$ un entier. Montrer que si $\mathcal{P}_n$ est constructible alors $n = 2^m$ avec $m \geq 2$ ou $n = 2^m p_1 \cdots p_k$ avec $m \geq 0$, $k \geq 1$ et $p_1, \dots, p_k$ nombres premiers de Fermat distincts.

Solution.

– I – Nombres algébriques

1. Si $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ est fini égal à n , le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$ est alors isomorphe à $\mathbb{Q}^n$, donc dénombrable, ce qui n'est pas. En conséquence $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ est infini.
2. En écrivant que $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$, on déduit que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable, soit $\mathbb{Q}[X] = \{P_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, les P_k étant des polynômes à coefficients rationnels. Il en résulte que l'ensemble des nombres réels algébriques $\mathcal{A} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k^{-1}\{0\}$ est dénombrable et l'ensemble des réels transcendants $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ est infini non dénombrable.
3.
 - (a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{L}$, l'ensemble $\mathcal{I}_\alpha = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$. Pour α algébrique sur $\mathbb{K}$, cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$ et en conséquence il existe un unique polynôme unitaire non nul P_α dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $\mathcal{I}_\alpha = \mathbb{K}[X] \cdot P_\alpha$.
On rappelle que P_α est le polynôme unitaire de $\mathcal{I}_\alpha$ de degré minimum, ce qui implique qu'un polynôme non nul de degré strictement inférieur à celui de P_α ne peut annuler α .
 - (b) Par définition P_α est unitaire et annule α . Si $P_\alpha = QR$ avec Q, R dans $\mathbb{K}[X]$, on a $Q(\alpha)R(\alpha) = 0$ et $Q(\alpha) = 0$ ou $R(\alpha) = 0$, ce qui équivaut à dire que Q ou R est dans l'idéal $\mathcal{I}_\alpha$. Ces polynômes étant de degré inférieur ou égal à celui de P_α , l'un des deux est nécessairement constant. On a donc ainsi prouvé que P_α est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Réciproquement si Q est un polynôme unitaire irréductible de $\mathbb{K}[X]$ qui annule α , il est dans $\mathcal{I}_\alpha$, donc proportionnel à P_α et nécessairement égal à P_α puisque irréductible et unitaire. D'où l'unicité.
4.
 - (a) Pour $d = 1$, α est rationnel, soit $\alpha = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Pour $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ distinct de α on a $0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{aq - bp}{qb} \right|$, donc $|aq - bp| \neq 0$ dans $\mathbb{N}$, ce qui équivaut à $|aq - bp| \geq 1$. On a donc $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{aq - bp}{qb} \right| \geq \frac{1}{bq}$.
Supposons maintenant que $d \geq 2$. Le nombre α est alors irrationnel. En

notant P_α le polynôme minimal de α , il existe un entier naturel non nul n tel que $Q_\alpha = nP_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ et pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$, on a $q^d Q_\alpha(r) \in \mathbb{Z}$. De plus cet entier est non nul. En effet si $q^d Q_\alpha(r) = 0$ alors r est racine de Q_α et $Q_\alpha(X) = (X - r)R(X)$ avec $X - r$ et R dans $\mathbb{Q}[X]$ non constants ($d \geq 1$), en contradiction avec P_α irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On a donc :

$$|q^d(Q_\alpha(\alpha) - Q_\alpha(r))| = |q^d Q_\alpha(r)| \geq 1$$

D'autre part, le théorème des accroissements finis permet d'écrire :

$$Q_\alpha(\alpha) - Q_\alpha(r) = (\alpha - r) Q'_\alpha(s)$$

avec s compris entre α et r . On distingue alors deux cas :
soit $|\alpha - r| \leq 1$ et dans ce cas $s \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ de sorte que :

$$1 \leq |q^d Q_\alpha(r)| = q^d |\alpha - r| |Q'_\alpha(s)| \leq \left(\sup_{s \in [\alpha - 1, \alpha + 1]} |Q'_\alpha(s)| \right) q^d |\alpha - r|$$

donc $C_1 = \sup_{s \in [\alpha - 1, \alpha + 1]} |Q'_\alpha(s)| > 0$ et $|\alpha - r| \geq \frac{1}{C_1} \frac{1}{q^d}$;

soit $|\alpha - r| > 1$ et dans ce cas $|\alpha - r| > \frac{1}{q^d}$.

En posant $C_\alpha = \min\left(1, \frac{1}{C_1}\right)$, on a alors $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C_\alpha}{q^d}$.

(b) Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. En notant, pour $k \geq n_0$:

$$p = 10^{k!} \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{10^{n!}}, \quad q = 10^{k!}$$

on a :

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^{n!}} \leq \frac{9}{10^{(k+1)!}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^{(k+1)!}} \frac{10}{9} \leq \frac{1}{q^k}$$

Si ξ est algébrique de degré $d \geq 1$, il existe un réel $C_\xi > 0$ tel que :

$$\frac{C_\xi}{q^d} \leq \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^k}$$

pour tout $k \geq n_0$ et faisant tendre k vers l'infini on aboutit à une absurdité. En conclusion ξ est transcendant.

On peut utiliser ce résultat pour montrer qu'il y a autant de nombres transcendants que de réels. Pour ce faire on utilise l'application qui associe

à $\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^{n!}}$ le réel $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \in]0, 1[$ et on vérifie que c'est une bijection (si $x \in]0, 1[$ est décimal on utilise son écriture décimale impropre comportant une infinité de 9).

5. Il est clair que pour tout α dans $\mathbb{L}$ on a $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[\alpha]$.

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ on a alors $P(\alpha) \in \mathbb{K}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ puisque $\mathbb{K}$ est un corps et $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}$.

Si $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}$ on a alors $\alpha \in \mathbb{K}$ et il est annulé par $X - \alpha$ qui est unitaire irréductible de $\mathbb{K}[X]$, ce qui entraîne que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ de polynôme minimal $X - \alpha$ et $d(\alpha, \mathbb{K}) = 1$.

Dire que $d(\alpha, \mathbb{K}) = 1$ signifie que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ de polynôme minimal $P_\alpha(X) = X + c \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha = -c \in \mathbb{K}$.

6. Pour tout α dans $\mathbb{L}$, $\mathbb{K}(\alpha)$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ qui contient α et $\mathbb{K}$, il contient donc $\mathbb{K}[\alpha]$.

Supposons que α soit algébrique sur $\mathbb{K}$ de polynôme minimal P_α . Pour montrer que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$, il nous suffit de montrer que l'anneau unitaire $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps (par définition de $\mathbb{K}(\alpha)$), ce qui revient à montrer que tout élément non nul de $\mathbb{K}[\alpha]$ est inversible dans $\mathbb{K}[\alpha]$. Tout x de $\mathbb{K}[\alpha]$ s'écrit $x = P(\alpha)$ avec P dans $\mathbb{K}[X]$. Par division euclidienne on peut écrire que $P = P_\alpha Q + R$ avec $R = 0$ ou $R \neq 0$ et R de degré strictement inférieur à celui de P_α et on a $x = R(\alpha)$. Si x n'est pas nul, il en est de même de R qui est premier avec le polynôme irréductible P_α , le théorème de Bézout nous dit alors qu'il existe deux polynômes U, V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $UP_\alpha + VR = 1$ et $V(\alpha)R(\alpha) = 1$, ce qui signifie que $R(\alpha)$ est inversible dans $\mathbb{K}[\alpha]$ d'inverse $V(\alpha)$.

On peut aussi utiliser le morphisme d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_\alpha : \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{L} \\ P & \mapsto & P(\alpha) \end{array}$$

qui a pour noyau $\mathcal{I}_\alpha = \mathbb{K}[X] \cdot P_\alpha$ et pour image $\mathbb{K}[\alpha]$. Par passage au quotient, on déduit un isomorphisme d'anneaux de $\frac{\mathbb{K}[X]}{\mathcal{I}_\alpha}$ sur $\mathbb{K}[\alpha]$ et pour α algébrique le polynôme P_α est irréductible, donc $\frac{\mathbb{K}[X]}{\mathcal{I}_\alpha}$ est un corps ainsi que $\mathbb{K}[\alpha]$.

Supposons que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$, c'est-à-dire que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps. Si $\alpha = 0$, il est algébrique, sinon il est inversible dans $\mathbb{K}[\alpha]$ et il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\alpha P(\alpha) = 1$ et le polynôme $XP(X) - 1 \in \mathbb{K}[X]$ annule α , ce qui signifie que α est algébrique sur $\mathbb{K}$. Par division euclidienne tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = P_\alpha Q + R$ et $P(\alpha) = R(\alpha)$ est combinaison linéaire de $1, \alpha, \dots, \alpha^{d(\alpha, \mathbb{K})-1}$, une telle écriture étant unique. Le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}[\alpha]$ est donc de dimension finie égale à $d(\alpha, \mathbb{K})$.

Si $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}]$ est fini égale à d , le système $\{1, \alpha, \dots, \alpha^d\}$ est lié, ce qui se traduit en disant qu'il existe un polynôme non nul P de degré au plus égal à d dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$ et donc α est algébrique sur $\mathbb{K}$.

7. Si $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ est fini, alors pour tout α dans $\mathbb{L}$ le sous $\mathbb{K}$ espace vectoriel de $\mathbb{L}$ $\mathbb{K}[\alpha]$ est également de dimension finie, ce qui signifie que α est algébrique sur $\mathbb{K}$.

Par exemple de $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ on déduit que tout nombre complexe est algébrique sur $\mathbb{R}$, ce qui peut aussi se voir directement en écrivant que pour tout $z = x + iy$ dans $\mathbb{C}$ on a $(z - x)^2 + y^2 = 0$.

8. Comme $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2$, on a $\mathbb{K} \subsetneq \mathbb{L}$ et pour tout $x \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$, $(1, x)$ est une base du $\mathbb{K}$ espace vectoriel de $\mathbb{L}$. Le système $(1, x, x^2)$ est alors lié et il existe a, b, c

non tous nuls dans $\mathbb{K}$ tels que $ax^2 + bx + c = 0$. Comme $(1, x)$ est libre, on a nécessairement $a \neq 0$ et l'équation précédente s'écrit :

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = 0$$

On posant $\lambda = x + \frac{b}{2a}$, on a $\lambda \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$, $\lambda^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \in \mathbb{K}$ et $(1, \lambda)$ est une base du $\mathbb{K}$ espace vectoriel de $\mathbb{L}$, ce qui entraîne que $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\lambda]$. En particulier si α est un réel algébrique de degré 2 sur $\mathbb{K}$, l'extension $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha]$ est de degré 2 sur $\mathbb{K}$ et il existe un réel $\mu > 0$ dans $\mathbb{K}$ tel $\lambda = \sqrt{\mu} \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\sqrt{\mu}]$.

9. Si α est algébrique sur $\mathbb{K}$ et si $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est un polynôme non nul dans $\mathbb{K}[X]$ qui annule α , alors le polynôme $Q(X) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k$ est non nul dans $\mathbb{K}[X]$ et pour α non nul, on a :

$$Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \alpha^{-k} = \frac{1}{\alpha^n} \sum_{k=0}^n a_{n-k} \alpha^{n-k} = \frac{1}{\alpha^n} P(\alpha) = 0$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{\alpha}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$.

On a vu en I.6 que si α est algébrique sur $\mathbb{K}$ alors pour tout polynôme P premier avec P_α , $P(\alpha)$ est inversible dans $\mathbb{K}[\alpha]$. Pour α non nul le polynôme X est premier avec P_α , donc α est inversible dans $\mathbb{K}[\alpha]$, ce qui signifie que $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{K}[\alpha]$.

10. Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{M}$ et $(f_j)_{1 \leq j \leq q}$ une base du $\mathbb{M}$ -espace vectoriel $\mathbb{L}$. Tout élément x de $\mathbb{L}$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^q x_j f_j$, chaque x_j dans

$\mathbb{M}$ s'écrivant $x_j = \sum_{i=1}^p x_{ij} e_i$, ce qui implique que $x = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} x_{ij} e_i f_j$ et montre que

$(e_i f_j)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ est un système générateur du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{L}$.

Si $\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} x_{ij} e_i f_j = 0$, les x_{ij} étant dans $\mathbb{K}$, on a $\sum_{j=1}^q \left(\sum_{i=1}^p x_{ij} e_i \right) f_j = 0$ avec les

$\sum_{i=1}^p x_{ij} e_i$ dans $\mathbb{M}$, ce qui implique que $\sum_{i=1}^p x_{ij} e_i = 0$ pour tout j compris entre 1 et q et entraîne la nullité de tous les x_{ij} . En définitive le système $(e_i f_j)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ est libre et c'est une base du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{L}$. On a donc :

$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = pq = [\mathbb{L} : \mathbb{M}] [\mathbb{M} : \mathbb{K}]$$

11. Il s'agit de montrer que si α, β sont dans $\mathbb{A}$ avec $\beta \neq 0$, alors $-\alpha, \frac{1}{\beta}, \alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont aussi dans $\mathbb{A}$. Pour $\frac{1}{\beta}$ c'est déjà fait en I.9. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est un polynôme non nul dans $\mathbb{K}[X]$ qui annule α , alors le polynôme $Q(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k X^k$ est non nul dans $\mathbb{K}[X]$ et $Q(-\alpha) = P(\alpha) = 0$, c'est-à-dire que $-\alpha$ est dans $\mathbb{A}$. Pour ce qui est de $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$, il s'agit de montrer que les $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels $\mathbb{K}[\alpha + \beta]$ et $\mathbb{K}[\alpha\beta]$ sont de dimensions finies. Ces espaces étant contenus dans $\mathbb{K}[\alpha][\beta]$, il nous suffit de montrer que ce dernier est de dimension finie. Comme α est algébrique sur $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. De plus si β est algébrique sur $\mathbb{K}$, il l'est également sur $\mathbb{K}[\alpha]$ et $\mathbb{K}[\alpha][\beta]$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}[\alpha]$. Avec la propriété de multiplicativité des degrés, on a alors :

$$[\mathbb{K}[\alpha][\beta] : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}[\alpha][\beta] : \mathbb{K}[\alpha]] [\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] < +\infty$$

$\mathbb{A}$ étant un corps qui contient α et $\mathbb{K}$, on en déduit que :

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[\alpha] \subset \mathbb{K}(\alpha) \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{L}$$

12.

- (a) En notant $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, on a $(\alpha - \sqrt{3})^2 = 2$, soit $\alpha^2 + 1 = 2\sqrt{3}\alpha$ et $(\alpha^2 + 1)^2 = 12\alpha^2$, donc α est annulé par $P = X^4 - 10X^2 + 1$ et en conséquence, il est donc algébrique sur $\mathbb{Q}$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\begin{aligned} P &= (X^2 - 5 - 2\sqrt{3}\sqrt{2})(X^2 - 5 + 2\sqrt{3}\sqrt{2}) \\ &= (X - \sqrt{3} - \sqrt{2})(X + \sqrt{3} + \sqrt{2})(X - \sqrt{3} + \sqrt{2})(X + \sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

et seul le produit des 4 facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ donne un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$, il en résulte que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que c'est le polynôme minimal de α .

On peut aussi procéder en utilisant la multiplicativité des degrés. On sait déjà que $2 \leq [\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] \leq 4$ ($[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] \geq 2$ provient de $\alpha \notin \mathbb{Q}$ qui résulte de $\alpha^2 + 1 = 2\sqrt{3}\alpha$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$). Avec $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, on déduit que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}[\alpha]$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{6}] \subset \mathbb{Q}[\alpha]$, $\sqrt{6}$ étant algébrique de degré 2 sur $\mathbb{Q}$, ce qui donne :

$$[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}[\sqrt{6}]] [\mathbb{Q}[\sqrt{6}] : \mathbb{Q}] = 2 [\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}[\sqrt{6}]]$$

et $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}[\sqrt{6}]] \leq 2$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{6}]$, on a $\alpha = r + s\sqrt{6}$ avec r, s dans $\mathbb{Q}$, ce qui entraîne $\alpha^2 = r^2 + 6s^2 + 2\sqrt{6}rs$, $r^2 + 6s^2 = 5$ et $((1, \sqrt{6})$ est une base du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$). On a alors $r^2 + 6s^2 = 5$ et $r^2 6s^2 = 6$, c'est-à-dire que r^2 et $6s^2$ sont solutions de l'équation $T^2 - 5T + 6 = (T - 2)(T - 3) = 0$ et $r^2 = 2$ ou $r^2 = 3$ avec r irrationnel, ce qui est impossible. On a donc $\alpha \notin \mathbb{Q}[\sqrt{6}]$ et $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}[\sqrt{6}]] = 2$, ce qui donne $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 4$ et P est le polynôme minimal de α .

- (b) En notant $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{7}$, $\beta = \sqrt[3]{7} - \sqrt{2}$, on a $\alpha + \beta = 2\sqrt[3]{7}$, $\alpha\beta = \sqrt[3]{49} - 2$, donc α, β sont les solutions de l'équation :

$$P(X) = X^2 - 2\sqrt[3]{7}X + \sqrt[3]{49} - 2 = 0$$

et ils sont donc algébriques sur le corps $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]$ (il est facile de vérifier que $\sqrt[3]{7}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré 3). Comme α n'est pas dans $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]$, on en déduit qu'il est de degré 2 sur $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]$ et :

$$[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]] [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}] : \mathbb{Q}] = 6$$

Avec $(\alpha - \sqrt{2})^3 = 7$, on déduit que $\alpha^3 - 3\alpha^2\sqrt{2} + 6\alpha - 2\sqrt{2} = 7$, ce qui entraîne $(\alpha^3 + 6\alpha - 7)^2 = 2(3\alpha^2 + 2)^2$, soit que α est annulé par :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X^3 + 6X - 7)^2 - 2(3X^2 + 2)^2 \\ &= X^6 - 6X^4 - 14X^3 + 12X^2 - 84X + 41 \end{aligned}$$

et ce polynôme est le polynôme minimal de α .

13. Pour tout entier $n \geq 1$, une racine n -ème de l'unité est algébrique sur $\mathbb{Q}$ puisque racine de $X^n - 1 = 0$.

- (a) Avec $X^p - 1 = (X - 1) \sum_{k=0}^{p-1} X^k$, on déduit qu'une racine primitive p -ème de l'unité (i.e. une racine distincte de 1, dans le cas où p est premier) est annulée par le $\Phi_p(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$ (polynôme cyclotomique). On a :

$$\Phi_p(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k+1} X^k$$

avec p premier qui divise les $\binom{p}{k+1}$ pour tout k compris entre 0 et $p-2$, p qui ne divise pas le coefficient dominant $a_{p-1} = 1$ et p^2 qui ne divise pas le coefficient constant $a_0 = p$. On déduit alors du critère d'Eisenstein que le polynôme $\Phi_p(X+1)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et il en est de même de $\Phi_p(X)$. Le polynôme Φ_p est donc le polynôme minimal de toute racine primitive p -ème de l'unité.

- (b) Si ξ est une racine primitive p^2 -ème de l'unité, alors ξ^p est une racine p -ème de l'unité différente de 1 (ξ est d'ordre p^2 dans $(\mathbb{C}^*, \times)$), c'est-à-dire que ξ est annulé par $\Phi_{p^2}(X) = \Phi_p(X^p)$ (polynôme cyclotomique). On a :

$$\Phi_{p^2}(X+1) = \sum_{k=0}^{p-1} ((X+1)^p)^k$$

avec $\overline{(X+1)^p} = X^p + \overline{1}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}[X]$, de sorte que :

$$\overline{\Phi_{p^2}(X+1)} = \sum_{k=0}^{p-1} (X^p + \overline{1})^k = \overline{\Phi_p(X^p + 1)}$$

avec $\overline{\Phi_p(X^p + 1)} = X^{p(p-1)}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}[X]$ (vu en I.13a). Ce dernier résultat se traduit en disant que tous les coefficients du polynôme $\Phi_{p^2}(X+1)$ sauf le coefficient dominant sont divisibles par p . Le coefficient constant $\Phi_{p^2}(1) = p$ n'étant pas divisible par p^2 , le critère d'Eisenstein nous dit que $\Phi_{p^2}(X+1)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et il en est de même de $\Phi_{p^2}(X)$. Le polynôme Φ_{p^2} est donc le polynôme minimal de toute racine primitive p^2 -ème de l'unité.

14. Pour $n=1$, $\alpha=1$ est algébrique de degré 1. Pour $n \geq 2$, Le nombre complexe $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de polynôme minimal Φ_n , il en est donc de même de $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$ et de $\alpha = \frac{\omega + \overline{\omega}}{2}$. Avec $\alpha = \frac{1}{2} \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right)$, on déduit que ω est racine de $\omega^2 - 2\alpha\omega + 1 = 0$, c'est-à-dire que ω est algébrique sur $\mathbb{Q}[\alpha]$ de degré 2 (pour $n \geq 2$, ω n'est pas réel et en conséquence n'est pas dans $\mathbb{Q}[\alpha]$). Avec la propriété de multiplicativité des degrés on déduit alors que :

$$\varphi(n) = [\mathbb{Q}[\omega] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\omega] : \mathbb{Q}[\alpha]] [\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 2 [\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$$

et $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = \frac{\varphi(n)}{2}$. Si la décomposition en facteurs premiers de n est $n = \prod_{j=1}^k p_j^{m_j}$, on a alors $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^k p_j^{m_j-1} (p_j - 1)$.

- II - Nombres constructibles

1. Une droite $\mathcal{D} = (AB)$ dans $\mathcal{D}(\Sigma)$ avec $A = (a, b)$ et $B = (c, d)$ distincts dans $\Sigma = \mathbb{K}^2$ a pour équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x-a & c-a \\ y-b & d-b \end{vmatrix} = (d-b)x + (a-c)y - (ad-bc) = 0$$

et une telle équation est à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Un cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A, R)$ dans $\mathcal{C}(\Sigma)$ avec $A = (a, b)$ dans Σ et $R^2 = BC^2$ dans $\mathbb{K}$ (B et C sont distincts dans Σ) a pour équation cartésienne :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

et une telle équation est à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- (a) Si $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ sont deux droites sécantes et distinctes dans $\mathcal{D}(\Sigma)$, leur point d'intersection est solution d'un système linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ du type :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

avec $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, il est donc donné par :

$$(x, y) = \left(\frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right) \in \mathbb{K}^2$$

- (b) Les points d'intersection d'une droite de $\mathcal{D}(\Sigma)$ et d'un cercle de $\mathcal{C}(\Sigma)$ (en supposant que la droite coupe le cercle) sont obtenus en résolvant un système d'équations à coefficients dans $\mathbb{K}$ du type :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y - \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha'x - 2\beta'y - \gamma' = 0 \end{cases}$$

avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. En supposant $\beta \neq 0$, la première équation donne y comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ de 1 et x qui reporté dans la deuxième équation donne x comme solution d'une équation de degré 2 à discriminant $\Delta \geq 0$ dans $\mathbb{K}$ (l'équation a des solutions réelles puisque la droite coupe le cercle). Pour $\Delta = 0$, on (x, y) dans $\mathbb{K}^2$ et pour $\Delta > 0$, on a $(x, y) \in \left(\mathbb{K} \left[\sqrt{\Delta} \right] \right)^2$ avec $\mathbb{K} \left[\sqrt{\Delta} \right] = \mathbb{K}$ si $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{K} \left[\sqrt{\Delta} \right]$ extension de degré 2 de $\mathbb{K}$ sinon.

- (c) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques et sécants dans $\mathcal{C}(\Sigma)$. Les points d'intersection de ces cercles sont obtenus en résolvant un système d'équations à coefficients dans $\mathbb{K}$ du type :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha'x - 2\beta'y - \gamma' = 0 \end{cases}$$

avec $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta')$ (les cercles ne sont pas concentriques). En faisant la différence de ces deux équations, on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \gamma = 0 \\ 2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y + \gamma - \gamma' = 0 \end{cases}$$

la deuxième équation étant celle d'une droite de $\mathcal{D}(\Sigma)$ (si $\alpha \neq \alpha'$, elle passe par les points $\left(\frac{\gamma' - \gamma}{2(\alpha - \alpha')}, 0 \right)$ et $\left(\frac{\gamma' - \gamma - 2(\beta' - \beta)}{2(\alpha - \alpha')}, 1 \right)$ qui sont dans Σ), ce qui nous ramène au cas précédent. Cette droite est l'axe radical des deux cercles, c'est la droite passant par les points d'intersection (figure 11.1).

2. Pour $x = 0$, le résultat est évident. Soit x un réel constructible différent de 0 et $M = (x, 0)$. L'intersection de la droite (OM) et du cercle $\mathcal{C}(O, OM)$ est égale à $\{M, M'\}$ où $M'(-x, 0)$. Le point M' est donc constructible. Les cercles $\mathcal{C}(M, MM')$ et $\mathcal{C}(M', MM')$ se coupent en $N(0, \sqrt{3}|x|)$ et $N'(0, -\sqrt{3}|x|)$, ces deux points sont donc constructibles et le point $P(0, x)$ qui est à l'intersection de la droite (NN') et du cercle $\mathcal{C}(O, OM)$ est constructible (figure 11.2).
3. Soient A un point constructible et $\mathcal{D} = (BC)$ une droite constructible.
 - (a) Si A est sur $\mathcal{D}$, la construction précédente nous montre que la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A est constructible. Sinon, on a $\mathcal{C}(A, AB) \cap \mathcal{D} = \{B, D\}$ et $\mathcal{C}(B, BD) \cap \mathcal{C}(D, BD) = \{E, F\}$, la droite (AE) est alors perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passe par A (figure 11.3).

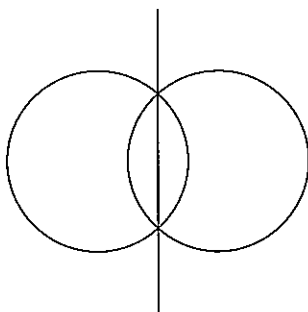
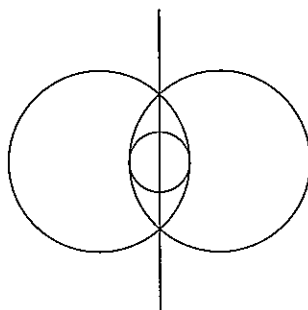


FIGURE 11.1 – Axe radical de deux cercles

FIGURE 11.2 – Construction de $P = (0, x)$

- (b) On construit d'abord la perpendiculaire $\mathcal{D}'$ à $\mathcal{D}$ passant par A , puis la perpendiculaire à $\mathcal{D}'$ passant par A qui est parallèle à $\mathcal{D}$.

4.

- (a) Il s'agit de montrer que si α et β sont constructibles, avec $\beta \neq 0$, alors $-\alpha$, $\frac{1}{\beta}$, $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont aussi constructibles. Pour $-\alpha$ c'est fait en II.2.

On suppose d'abord que $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$. En notant $A(\alpha, 0)$ et $B(\beta, 0)$, le cercle de centre B et de rayon α coupe la droite (OI) en $(\alpha + \beta, 0)$ et $(\beta - \alpha, 0)$ (l'équation de cercle est $(x - \beta)^2 + y^2 = \alpha^2$ et $y = 0$ donne $x = \beta \pm \alpha$). Il en résulte que $\alpha + \beta$ est constructible (figure 11.4). Pour $\alpha < 0$, il suffit de remarquer que $-\beta$ est constructible, donc aussi $-\alpha - \beta$ et $\alpha + \beta$.

Pour le produit il nous suffit aussi de considérer le cas où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. En posant $J(0, 1)$ et $B'(0, \beta)$ (ces deux points sont constructibles), la parallèle à (AJ) passant par B' (qui est constructible) coupe (OI) en C et le théorème de Thalès nous dit que $\frac{OC}{OA} = \frac{OB'}{OJ}$, ce qui donne $OC = \alpha\beta$ et prouve que $\alpha\beta$ est constructible (figure 11.5).

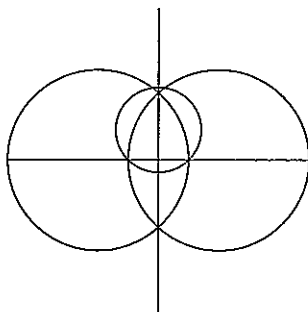
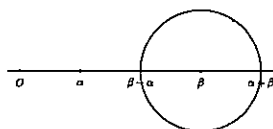
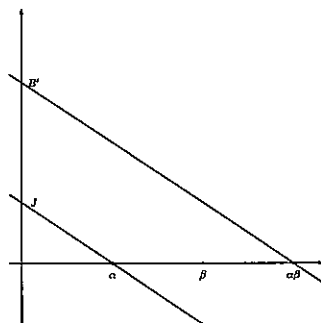
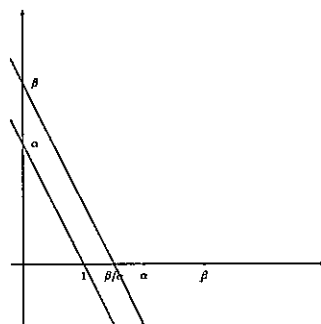


FIGURE 11.3 -- Perpendiculaire à une droite passant par un point

FIGURE 11.4 -- Construction de $\alpha + \beta$ et $\beta - \alpha$

En utilisant les points $I(1, 0)$, $A'(0, \alpha)$ et la parallèle à $(A'I)$ passant par B' qui coupe (OI) en D , le théorème de Thalès nous dit que $\frac{OD}{OI} = \frac{OB'}{OA'}$, ce qui donne $OD = \frac{\beta}{\alpha}$ et prouve que $\frac{\beta}{\alpha}$ est constructible (figure 11.6).

- (b) Comme $\mathbb{Q}$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$, il est contenu dans le corps $\mathbb{K}$ des nombres constructibles, c'est-à-dire que tout nombre rationnel est constructible.
5. Soient $A = (\alpha, 0)$ constructible avec $\alpha > 0$, $J = (0, 1)$, $A' = (0, \alpha)$ et $J' = (0, -1)$. Le milieu de $[A'J']$, $B = \left(0, \frac{\alpha - 1}{2}\right)$ est constructible ($\mathbb{K}$ est un corps) et le cercle $\mathcal{C}(B, BA')$ coupe (OI) en $C = (\sqrt{\alpha}, 0)$ et $C' = (-\sqrt{\alpha}, 0)$ (l'équation de ce cercle est $x^2 + \left(y - \frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2$ et $y = 0$ donne $x = \pm\sqrt{\alpha}$). En conclusion, $\sqrt{\alpha}$ est constructible (figure 11.7).
- 6.
- (a) Soit x un réel constructible et $M(x, 0)$. Comme M est constructible, il existe une suite $(M_i)_{1 \leq i \leq p}$ de points constructibles telle que $M_p = M$, M_1 est construit à partir de O et I et pour tout k compris entre 2 et

FIGURE 11.5 – Construction de $\alpha\beta$ FIGURE 11.6 – Construction de β/α

p , M_k est construit à partir de $O, I, M_1, \dots, M_{k-1}$. Nous allons montrer par récurrence finie qu'il existe une suite $(\mathbb{K}_i)_{0 \leq i \leq n}$ de sous corps de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, pour tout i compris entre 1 et n , $\mathbb{K}_i$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}_{i-1}$ et $M_i \in \mathbb{K}_n^2$.

Le point M_1 est construit à partir de O et I qui sont dans $\mathbb{Q}^2$, il est donc dans $\mathbb{Q}_1^2$ où $\mathbb{Q}_1$ est soit égal à $\mathbb{Q}$ soit à une extension quadratique de $\mathbb{Q}$ (question II.1). Dans le premier cas on a $\{O, I, M_1\} \subset \mathbb{K}_0^2$ avec $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ et dans le second cas on a $\{O, I, M_1\} \subset \mathbb{K}_1^2$ où $\mathbb{K}_1$ est une extension quadratique de $\mathbb{Q}$.

Supposons que $\{O, I, M_1, \dots, M_{i-1}\} \subset \mathbb{K}_j^2$ avec $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q} \subset \dots \subset \mathbb{K}_j$, où, pour tout k compris entre 1 et j , $\mathbb{K}_k$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}_{k-1}$. Le point M_i qui est construit à partir des points $O, I, M_1, \dots, M_{i-1}$ a donc ses coordonnées dans $\mathbb{K}_j^2$ ou dans $\mathbb{K}_{j+1}^2$, le corps $\mathbb{K}_{j+1}$ étant une extension quadratique de $\mathbb{K}_j$.

Pour $i = p$, on a construit la chaîne d'extensions quadratiques $(\mathbb{K}_i)_{0 \leq i \leq n}$ et le point $M_p = (x, 0)$ est donc dans $\mathbb{K}_n^2$ et $x \in \mathbb{K}_n$.

$n - 1$ et soit $(\mathbb{K}_i)_{0 \leq i \leq n}$ une chaîne d'extensions quadratiques associé à $x \in \mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence tous les $\mathbb{K}_i$, pour i compris entre 0 et $n - 1$ dans inclus dans $\mathbb{L}$. Comme $\mathbb{K}_n$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}_{n-1}$, il s'écrit $\mathbb{K}_n = \mathbb{K}_{n-1}[\sqrt{\mu}]$ avec $\mu \in \mathbb{K}_{n-1} \subset \mathbb{L}$. Le corps $\mathbb{L}$ étant stable par racine carrée, on a $\sqrt{\mu} \in \mathbb{L}$ et $\mathbb{K}_n = \mathbb{K}_{n-1}[\sqrt{\mu}] \subset \mathbb{L}$.

9. Si $n = 2^m$, le réel $\sqrt[n]{p} = \sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{p}}}$ est constructible puisque p l'est (qu'il soit premier ou non). Pour p premier, le polynôme $X^n - p$ annule $\sqrt[n]{p}$ et est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, c'est donc le polynôme minimal de $\sqrt[n]{p}$. Le degré de $\sqrt[n]{p}$ est donc égal à n et ce nombre n'est pas constructible si n n'est pas une puissance de 2. En définitive, pour p premier, $\sqrt[n]{p}$ est constructible si, et seulement si, n est une puissance de 2. Par exemple $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible, ce qui prouve qu'il n'est pas possible de construire à la règle et au compas un cube de volume égal à deux fois le volume du cube unité (duplication du cube).
10. Avec $\sin(\theta) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$ et le fait que l'ensemble des nombres constructibles est un corps stable par racine carrée on déduit que $\sin(\theta)$ est constructible. Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \Re((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n) \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(\theta) \cos^{n-2k}(\theta) \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - \cos^2(\theta))^k \cos^{n-2k}(\theta) \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire que $\cos(n\theta)$ est constructible. Pour $n = 0$, le résultat est évident et pour $n < 0$ on utilise la parité de la fonction $\cos$.

11.

- (a) Pour $m = 0$, $\mathcal{P}_1 = \{I\}$ est constructible et pour $m = 1$, $\mathcal{P}_2 = \{O, I\}$ est également constructible. Supposons le résultat acquis pour $m \geq 1$. Avec :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{2^m}\right) = \cos\left(2\frac{2\pi}{2^{m+1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{2^{m+1}}\right) - 1$$

et $\cos\left(\frac{2\pi}{2^{m+1}}\right) > 0$, on déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{2^{m+1}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{2^m}\right)\right)}$ est constructible.

- (b) Supposons que $n = qm$. Avec $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \cos\left(q\frac{2\pi}{m}\right)$ et le résultat de la question II.10, on déduit que $\mathcal{P}_m$ est constructible si $\mathcal{P}_n$ l'est.
- (c) Si $\mathcal{P}_{nm}$ est constructible il en est alors de même de $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_m$ d'après la question précédente (que n et m soient premiers entre eux ou pas). Si $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_m$ sont constructibles avec n et m premiers entre eux, en utilisant

la relation de Bézout, $1 = un + vm$, on déduit que :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{nm}\right) &= \cos\left(u\frac{2\pi}{m} + v\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \cos\left(u\frac{2\pi}{m}\right)\cos\left(v\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(u\frac{2\pi}{m}\right)\sin\left(v\frac{2\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

et il en résulte que $\cos\left(\frac{2\pi}{nm}\right)$ est constructible, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{nm}$ est constructible.

- (d) Si $\mathcal{P}_{p^m}$ est constructible il en est de même de $\mathcal{P}_{p^2}$ (on a $m \geq 2$) et le réel $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{p^2}\right)$ est alors constructible, il est donc algébrique de degré 2^r avec $r \geq 0$. Mais on a vu que $d(\alpha, \mathbb{Q}) = \frac{\varphi(p^2)}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$, ce qui entraîne que $p(p-1) = 2^{r+1}$ avec p impair, ce qui est impossible.
- (e) Si $\mathcal{P}_p$ est constructible le réel $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$ est alors constructible et $d(\alpha, \mathbb{Q}) = \frac{\varphi(p)}{2} = \frac{p-1}{2} = 2^r$, ce qui entraîne $p = 2^s + 1$ avec $s \geq 1$. Supposons que $s = ab$ avec $a \geq 3$ impair. On a alors :

$$p = (2^b)^a + 1 = (2^b + 1) \sum_{k=0}^{a-1} (-1)^k (2^b)^k$$

c'est-à-dire que p est divisible par $2^b + 1 \geq 2$. Mais p est premier, donc $p = 2^b + 1$, soit $2^{ab} = 2^b$ et $b = 0$, ce qui donne $p = 2$ incompatible avec $p \geq 3$. On a donc ainsi montré que 2 est le seul facteur premier de s , c'est-à-dire que $s = 2^k$ et $p = 2^{2^k} + 1$ est un nombre de Fermat.

- (f) Si $n = 2^m$ avec $m \geq 2$, on a vu que $\mathcal{P}_n$ est constructible. Sinon la décomposition en facteurs premiers de n est de la forme $n = 2^m p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ avec $m \geq 0$, les $m_j \geq 1$ et les p_j premiers impairs distincts. Chaque $\mathcal{P}_{p_j^{m_j}}$ étant nécessairement constructibles, on a $m_j = 1$ pour tout j et chaque $\mathcal{P}_{p_j}$ étant constructible, le nombre premier p_j est un nombre de Fermat.

La réciproque de ce résultat est vraie (théorème de Gauss) et peut être montrée en utilisant la théorie de Galois. Par exemple pour $p = 5$, $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est constructible de degré 4. Le polynôme minimal de $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est $\Phi_5(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$. En posant $Y = X + \frac{1}{X}$, on a :

$$\Phi_5(X) = X^2 \left(X^2 + X + 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} \right) = X^2 (Y^2 + Y + 1)$$

et de $\Phi_5(\omega) = 0$, on déduit que α est racine du polynôme $X^2 + \frac{X}{2} - \frac{1}{4}$. Ce polynôme est donc le polynôme minimal de α et $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (c'est la racine positive).

Chapitre 12

Algèbre linéaire et bilinéaire

Exercice 12.1. Matrices de Pascal et de Hankel

Pour tout entier naturel non nul n , la matrice :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$$

est appelée matrice de Pascal (pour $0 \leq i, j \leq n$, le coefficient d'indice (i, j) de P_{n+1} est $p_{ij} = \binom{i}{j}$ si $0 \leq j \leq i \leq n$, $p_{ij} = 0$ si $0 \leq i < j \leq n$). À toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes on associe la matrice de Hankel :

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$$

(pour $0 \leq i, j \leq n$, le coefficient d'indice (i, j) de H_{n+1} est $h_{ij} = u_{i+j}$).

1. Montrer P_{n+1} est inversible dans l'anneau $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$.
2. Montrer que la transposée ${}^t P_{n+1}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (X^k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $\mathcal{B}_1 = ((1+X)^k)_{0 \leq k \leq n}$.
3. En déduire une expression de l'inverse P_{n+1}^{-1} de P_{n+1} .
4. Montrer que pour $0 \leq i, j \leq n$, on a $\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \binom{j}{k} = \binom{i+j}{i}$, puis en déduire que $Q_{n+1} = P_{n+1} {}^t P_{n+1} = ((q_{ij}))_{0 \leq i, j \leq n}$ où $q_{ij} = \binom{i+j}{i}$ pour $0 \leq i, j \leq n$ et que $\det(Q_{n+1}) = 1$.

5. Soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, v_{i+j} = \sum_{k=0}^i \sum_{\ell=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{\ell} u_{k+\ell}$$

En désignant par H_{n+1} et H'_{n+1} les matrices de Hankel respectivement associées à $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que $H'_{n+1} = P_{n+1} H_{n+1} {}^t P_{n+1}$ et que $\det(H'_{n+1}) = \det(H_{n+1})$ (voir l'exercice 9.1 pour un exemple de telle situation).

Solution.

1. On a $P_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ avec $\det(P_{n+1}) = 1$, donc $P_{n+1} \in GL_{n+1}(\mathbb{Z})$.

2. Les égalités $(1+X)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^j$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour k compris entre 0 et n nous disent que la transposée de P_{n+1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$.

3. On en déduit que l'inverse de ${}^t P_{n+1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$ qui s'obtient avec les égalités $X^k = (1+X-1)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (1+X)^j$ pour k compris entre 0 et n . On a donc :

$${}^t P_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & (-1)^n \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (-1) \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

et :

$$P_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^n \binom{n}{0} & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} & \cdots & (-1) \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

4.

(a) Les entiers i, j jouant des rôles symétriques (on $\binom{i+j}{i} = \binom{i+j}{j}$), on peut supposer que $0 \leq i \leq j \leq n$. Le coefficient de X^i dans $(1+X)^{i+j}$ est $\binom{i+j}{i}$ et en écrivant que $(1+X)^{i+j} = (1+X)^i (1+X)^j$, ce coefficient est aussi :

$$\sum_{\ell=0}^i \binom{i}{\ell} \binom{j}{i-\ell} = \sum_{\ell=0}^i \binom{i}{i-\ell} \binom{j}{i-\ell} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{j}{k}$$

$$\text{donc } \binom{i+j}{i} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{j}{k}.$$

(b) On a $P_{n+1} {}^t P_{n+1} = ((q_{ij}))_{0 \leq i, j \leq n}$ avec :

$$q_{ij} = \sum_{k=0}^n p_{ik} p_{jk} = \sum_{k=0}^{\min(i, j)} \binom{i}{k} \binom{j}{k} = \binom{i+j}{i}$$

pour $0 \leq i, j \leq n$, donc :

$$Q_{n+1} = P_{n+1} {}^t P_{n+1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n+1}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \ddots & \binom{n+2}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} & \cdots & \binom{2n-1}{n} & \binom{2n}{n} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \det(Q_{n+1}) = (\det(P_{n+1}))^2 = 1.$$

5. Le coefficient d'indice (i, j) du produit $R_{n+1} = P_{n+1} H_{n+1} {}^t P_{n+1}$ est :

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \sum_{k=0}^n p_{ik} (H_{n+1} {}^t P_{n+1})_{kj} = \sum_{k=0}^n p_{ik} \left(\sum_{\ell=0}^n h_{k\ell} p_{j\ell} \right) \\ &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \left(\sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} u_{k+\ell} \right) = v_{i+j} = h'_{ij} \end{aligned}$$

$$\text{donc } R_{n+1} = H'_{n+1} \text{ et } \det(H'_{n+1}) = (\det(P_{n+1}))^2 \det(H_{n+1}) = \det(H_{n+1}).$$

Exercice 12.2. Matrices compagnons

$\mathbb{K}$ étant un corps commutatif, on associe à tout polynôme unitaire $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ de degré $n \geq 1$ dans $\mathbb{K}[X]$, sa matrice compa-

$$\text{gnon } C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ définie par } C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ Pour } n=1,$$

on a $P(X) = X - a_0$ et $C_P = (a_0)$.

On se fixe un polynôme unitaire P de degré $n \geq 1$, $C = C_P$ est sa matrice compagne et u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice C dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$.

1. Montrer que :

- (a) pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $Q(u) = 0$ si, et seulement si, $Q(u)(e_1) = 0$;
- (b) P est le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de G ;
- (c) C est inversible si, et seulement si, $P(0) \neq 0$ et, dans ce cas, donner une expression de C^{-1} ainsi que de son polynôme minimal.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u (s'il en existe). Montrer que l'espace propre associé est de dimension 1 et donner un générateur de cet espace propre en fonction des coefficients de P .
3. Montrer que G est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme P est scindé à racines simples. Dans ce cas, en notant $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ où les scalaires λ_k sont deux à deux distincts, en diagonalisant d'abord la matrice ${}^tC$, montrer que $W^{-1}CW = D$, où :

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ et } W^{-1} = \left(\left(\lambda_i^{j-1} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Étudier le cas particulier de $P(X) = X^n - 1$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4. Pour cette question, E est l'espace vectoriel quotient $\frac{\mathbb{K}[X]}{(P)}$, u est l'endomorphisme de E défini par $u(\overline{Q}) = \overline{XQ}$ pour tout $\overline{Q} \in E$ en notant $\overline{Q}$ la classe d'équivalence d'un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ dans l'espace quotient E et $(P_k)_{1 \leq k \leq n}$ est la famille de polynômes définie par $P_n(X) = 1$ et

$$P_k(X) = X^{n-k} - a_{n-1}X^{n-k-1} - \dots - a_{k+1}X - a_k \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

- (a) Vérifier que $B_0 = (\overline{X^{k-1}})_{1 \leq k \leq n}$ et $B_1 = (\overline{P_k})_{1 \leq k \leq n}$ sont deux bases de E . Préciser la matrice de passage de B_0 à B_1 .
- (b) Vérifier que C est la matrice de u dans la base B_0 et que sa transposée ${}^tC$ est la matrice de u dans la base B_1 . Il en résulte que C est semblable à sa transposée. Précisément, on vérifiera qu'il existe une matrice symétrique inversible U telle que ${}^tC = U^{-1}CU$.
- (c) On suppose que P a n racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que u est diagonalisable et qu'une base de vecteurs propres est

$$(\overline{L_k})_{1 \leq k \leq n}, \text{ où } L_k(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (X - \lambda_j) \text{ (base de Lagrange).}$$

Solution.

1.

- (a) Si $Q(u) = 0$, on a en particulier $Q(u)(e_1) = 0$. Réciproquement, si $Q(u)(e_1) = 0$, on a alors pour tout k compris entre 2 et n :

$$Q(u)(e_k) = Q(u)(u^{k-1}(e_1)) = u^{k-1}(Q(u)(e_1)) = 0$$

(de $u(e_{k-1}) = e_k$, on déduit que $e_k = u^{k-1}(e_1)$ pour tout k compris entre 1 et n), donc $Q(u) = 0$.

(b) La famille $(u^{k-1}(e_1))_{1 \leq k \leq n} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ étant libre, le polynôme minimal

π_u est de degré n (sinon $\pi_u(X) = X^r - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k X^k$ avec $1 \leq r \leq n-1$ et

de $\pi_u(u)(e_1) = 0$ on déduit que $e_{r+1} - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k e_{k+1} = 0$, ce qui n'est pas

possible). De $u(e_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1}$, on déduit que $u^n(e_1) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e_1)$,

soit $P(u)(e_1) = 0$, donc $P(u) = 0$ et π_u divise P . Ces polynômes étant de même degré et unitaires, on en déduit que $\pi_u = P$.

Le polynôme π_u est unitaire de degré n divisant le polynôme caractéristique P_u (théorème de Cayley-Hamilton) lui aussi unitaire de degré n , donc ces polynômes sont égaux.

On peut se passer du théorème de Cayley-Hamilton en calculant directement le polynôme caractéristique. En effectuant l'opération élémentaire :

$$L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \cdots + X^{n-1}L_n$$

on obtient :

$$P_u(X) = \begin{vmatrix} X & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} \\ = (-1)^{n+1} P(X) (-1)^{n-1} = P(X)$$

On peut aussi procéder comme suit. En notant $P_{(a_0, \dots, a_{n-1})}(X)$ le polynôme caractéristique de u et en le développant par rapport à la première ligne, on a :

$$P_{(a_0, \dots, a_{n-1})}(X) = \begin{vmatrix} X & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} \\ = X \cdot P_{(a_1, \dots, a_{n-1})}(X) - a_0$$

puis par récurrence, on obtient $P_{(a_0, \dots, a_{n-1})}(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Un polynôme unitaire est donc polynôme minimal et polynôme caractéristique de sa matrice compagnon.

2. Pour toute valeur propre λ de u , la matrice :

$$\lambda I_n - C = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang $n-1$ puisque $\det(\lambda I_n - C) = 0$ et le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ extraite en supprimant la première ligne et la dernière colonne vaut $(-1)^{n-1} \neq 0$, donc l'espace propre $\ker(\lambda Id - u)$ est de dimension 1. Cet espace propre s'obtient en résolvant le système $u(x) = \lambda x$, soit :

$$\begin{cases} \lambda x_1 - a_0 x_n = 0 \\ -x_{k-1} + \lambda x_k - a_{k-1} x_n = 0 \quad (2 \leq k \leq n) \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1}) x_n \\ x_{n-2} = \lambda x_{n-1} - a_{n-2} x_n = (\lambda^2 - a_{n-1} \lambda - a_{n-2}) x_n \\ x_{n-3} = \lambda x_{n-2} - a_{n-3} x_n = (\lambda^3 - a_{n-1} \lambda^2 - a_{n-2} \lambda - a_{n-3}) x_n \\ \vdots \\ x_1 = \lambda x_2 - a_1 x_n = (\lambda^{n-1} - a_{n-1} \lambda^{n-2} - \cdots - a_2 \lambda - a_1) x_n \end{cases}$$

l'équation $\lambda x_1 - a_0 x_n = 0$ se traduisant par $P(\lambda) x_n = 0$. Prenant $x_n = 1$, un générateur de $\ker(\lambda Id - u)$ est le vecteur $e_\lambda = (P_k(\lambda))_{1 \leq k \leq n}$ en notant $P_k(\lambda) = \lambda^{n-k} - a_{n-1} \lambda^{n-k-1} - \cdots - a_{k+1} \lambda - a_k$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $P_n(\lambda) = 1$. On retrouve ainsi le fait que $\dim(\ker(\lambda Id - u)) = 1$.

Ces polynômes P_k sont définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_n(X) = 1 \\ P_k(X) = X P_{k+1}(X) - a_k \quad (k = n-1, \dots, 1) \end{cases}$$

De plus, on a $P(X) = X P_1(X) - a_0$ et on peut vérifier que :

$$\begin{aligned} u(e_\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(\lambda) \\ P_2(\lambda) \\ \vdots \\ P_n(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 P_n(\lambda) \\ P_1(\lambda) + a_1 P_n(\lambda) \\ \vdots \\ P_{n-1}(\lambda) + a_{n-1} P_n(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 \\ P_1(\lambda) + a_1 \\ \vdots \\ P_{n-1}(\lambda) + a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda P_1(\lambda) \\ \lambda P_2(\lambda) \\ \vdots \\ \lambda P_n(\lambda) \end{pmatrix} = \lambda e_\lambda \end{aligned}$$

3. u est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal $\pi_u = P$ est scindé à racines simples. Dans ce cas, en notant $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ et $X_k =$

$(\lambda_k^{j-1})_{1 \leq j \leq n}$, les scalaires λ_k étant deux à deux distincts, on a pour tout entier k compris entre 1 et n :

$${}^t C X_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \lambda_k^3 \\ \vdots \\ \lambda_k^n \end{pmatrix} = \lambda_k X_k$$

et $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de ${}^t C$. On a donc $V^{-1} {}^t C V = D$, soit ${}^t V C {}^t V^{-1} = W^{-1} C W = D$, où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $W = {}^t V^{-1}$ est l'inverse de la matrice de Vandermonde :

$${}^t V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice compagnon de $P(X) = X^n - 1$ est la matrice de permutation P_γ associée au n -cycle $\gamma = (1, 2, \dots, n)$ (voir l'exercice 12.3).

4.

(a) En utilisant le théorème de division euclidienne, on voit que l'espace quotient $E = \frac{\mathbb{K}[X]}{(P)}$ est isomorphe à l'espace $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. En effet, l'application

$\varphi : R \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \mapsto \overline{R}$ est linéaire; par division euclidienne, tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit $A = PQ + R$ avec $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\overline{A} = \overline{R} = \varphi(R)$, donc φ est surjective; dire que $R \in \ker(\varphi)$ signifie que $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ est divisible par P , ce qui équivaut à $R = 0$, donc φ est injective.

Par cet isomorphisme, la base canonique $(X^{k-1})_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est transformée en une base $\mathcal{B}_0 = (\overline{X^{k-1}})_{1 \leq k \leq n}$ de E .

La famille $(P_k)_{1 \leq k \leq n}$ qui est échelonnée en degrés dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ en est une base et son image $\mathcal{B}_1$ par φ est une base de E . Cette base est la base de Horner définie par $P_n = 1$:

$$X P_k(X) = X^{n-k+1} - a_{n-1} X^{n-k} - \cdots - a_{k+1} X^2 - a_k X = P_{k-1} + a_{k-1}$$

pour k compris entre 2 et n et :

$$X P_1(X) = X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \cdots - a_2 X^2 - a_1 X = P(X) + a_0$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$ est :

$$U = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_{n-1} & 1 & 0 \\ -a_3 & -a_4 & -a_5 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que cette matrice est symétrique.

(b) Avec $u(\overline{X^k}) = \overline{X^{k+1}}$ pour $0 \leq k \leq n-2$ et $u(\overline{X^{n-1}}) = \overline{X^n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \overline{X^k}$

(qui résulte de $\overline{P} = \overline{0}$), on voit que C est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_0$. Puis avec :

$$\begin{aligned} u(\overline{P_k}) &= \overline{X^{n-k+1}} - a_{n-1} \overline{X^{n-k}} - \cdots - a_{k+1} \overline{X^2} - a_k \overline{X} \\ &= \overline{P_{k-1}} + a_{k-1} \overline{P_n} \quad (2 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

et $u(\overline{P_1}) = \overline{X^n} - a_{n-1} \overline{X^{n-1}} - \cdots - a_2 \overline{X^2} - a_1 \overline{X} = a_0 = a_0 \overline{P_n}$, on voit que

la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} = {}^t C$. On a

donc ${}^t C = U^{-1} C U$, la matrice inversible U étant symétrique.

(c) $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$ est la base de Lagrange de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, donc $(\overline{L_k})_{1 \leq k \leq n}$ est une base de $\overline{E}$. Comme $P = P_u$ est scindé à racines simples, u est diagonalisable. De $(X - \lambda_k) L_k(X) = P(X)$, on déduit que $u(\overline{L_k}) = \overline{X L_k} = \lambda_k \overline{L_k}$ pour tout k compris entre 1 et n .

Exercice 12.3. Matrices de permutation et matrices circulantes

À tout entier $n \geq 2$ et toute permutation $\sigma \in S_n$, on associe la matrice de permutation P_σ définie comme la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}_\sigma = (e_{\sigma(k)})_{1 \leq k \leq n}$.

1. Montrer que la trace d'une matrice de permutation P_σ est égale au nombre de points fixes de la permutation σ .
2. Montrer que l'ensemble des matrices de permutation est un sous-groupe du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ isomorphe au groupe symétrique S_n . En déduire que, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, la matrice P_σ est inversible d'inverse $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = {}^t P_\sigma$ et $\det(P_\sigma) = (-1)^p = \varepsilon(\sigma)$, où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ .
3. Pour cette question et les suivantes, $\gamma \in S_n$ est le cycle $(1, 2, \dots, n)$.

- (a) Montrer que la matrice P_γ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- (b) Déterminer les polynômes minimal et caractéristique de P_γ .
- (c) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de P_γ .
4. Montrer que, pour tout cycle σ d'ordre n dans S_n , la matrice de permutation P_σ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser ses valeurs propres.
5. On se donne des nombres complexes $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et on leur associe la matrice circulante :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & a_3 & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = ((a_{i-j \bmod n}))_{1 \leq i, j \leq n}$$

- (a) Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $A = R(P_\gamma)$.
- (b) En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser ses valeurs propres.

(c) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et cal-

culer son rayon spectral.

Solution. Pour $\sigma \in S_n$, la matrice P_σ est définie par $P_\sigma e_k = e_{\sigma(k)}$ pour tout k compris entre 1 et n , ce qui revient à dire que $P_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$.

- La trace de P_σ est $\text{Tr}(P_\sigma) = \text{card} \{k \in \{1, \dots, n\} \mid \sigma(k) = k\}$, soit nombre de points fixes de la permutation σ .
- La matrice de permutation P_σ est orthogonale comme matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{B}$ à la base orthonormée $\mathcal{B}_\sigma$. Elle est donc inversible d'inverse ${}^t P_\sigma$. Pour σ, σ' dans S_n et k compris entre 1 et n , on a :

$$P_\sigma (P_{\sigma'} e_k) = P_\sigma e_{\sigma'(k)} = e_{\sigma(\sigma'(k))} = e_{\sigma \circ \sigma'(k)} = P_{\sigma \circ \sigma'} e_k$$

donc $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$, ce qui signifie que l'application $P : \sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes de S_n dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Si $\sigma \in \ker(P)$, on a alors $P_\sigma = I_n$, soit $e_k = e_{\sigma(k)}$ pour tout k compris entre 1 et n , ce qui revient à dire que $k = \sigma(k)$ pour tout k , soit que $\sigma = \text{Id}$. Le morphisme P est donc injectif et l'ensemble des matrices de permutation est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ isomorphe au groupe symétrique S_n . De plus, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on a $P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1}$.

Dans le cas où τ est une transposition, la matrice P_τ est déduite de I_n en

permutant deux colonnes, donc $\det(P_\tau) = -\det(I_n) = -1$. En écrivant $\sigma \in \mathcal{S}_n$ comme produit de p transpositions, on en déduit que $\det(P_\sigma) = (-1)^p = \varepsilon(\sigma)$.

$$3. \text{ Pour } \gamma = (1, 2, \dots, n), \text{ on a } P_\gamma = (e_2, \dots, e_n, e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice compagnon de $X^n - 1$ (voir l'exercice 12.2).

(a) Pour un cycle γ d'ordre n , on a $P_\gamma^n = P_{\gamma^n} = P_{Id} = I_n$, donc P_γ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car annihilée par $Q(X) = X^n - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) En notant $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on a $Q(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_n^k)$. Le polynôme minimal π_γ de P_γ est un diviseur non constant de Q . Si $\deg(\pi_\gamma) < n$, il existe alors k compris entre 0 et $n-1$ tel que P_γ soit annihilée par :

$$\begin{aligned} Q_k(X) &= \frac{X^n - 1}{X - \omega_n^k} = \frac{X^n - (\omega_n^k)^n}{X - \omega_n^k} \\ &= X^{n-1} + \omega_n^k X^{n-2} + \cdots + \omega_n^{(n-2)k} X + \omega_n^{(n-1)k} \end{aligned}$$

Mais avec $P_\gamma^j e_1 = e_{\gamma^j(1)} = e_{j+1}$ pour $0 \leq j \leq n-1$, on déduit que $Q_k(P_\gamma) e_1 = e_n + \omega_n^k e_{n-1} + \cdots + \omega_n^{(n-2)k} e_2 + \omega_n^{(n-1)k} e_1 = 0$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}^n$. On a donc $\pi_\gamma = Q$ et Q est aussi le polynôme caractéristique de P_γ à cause des degrés.

(c) L'ensemble des valeurs propres de P_γ est donc $\Gamma_n = \{\omega_n^k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ (racines n -èmes de l'unité). Comme ces valeurs propres sont deux à deux distinctes, les espaces propres associés sont tous de dimension 1.

Pour $0 \leq k \leq n-1$, l'égalité $P_\gamma x = \omega_n^k x$ avec $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ équivaut à :

$$\begin{cases} x_n = \omega_n^k x_1 \\ x_j = \omega_n^k x_{j+1} \quad (1 \leq j \leq n-1) \end{cases}$$

ce qui impose $x_n \neq 0$. Choissant $x_n = 1$, on a $x_j = \omega_n^{-jk}$ pour $1 \leq j \leq n$.

4. Les n -cycles étant tous conjugués dans $\mathcal{S}_n$, il existe $\tau \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma = \tau \circ \gamma \circ \tau^{-1}$, donc $P_\sigma = P_{\tau \circ \gamma \circ \tau^{-1}} = P_\tau P_\gamma (P_\tau)^{-1}$ et P_σ est diagonalisable, les ω_n^k étant ses valeurs propres.

5.

(a) Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $P_\gamma^k = P_{\gamma^k} = (e_{k+1}, \dots, e_n, e_1, \dots, e_k)$, donc

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_\gamma^k = R(P_\gamma), \text{ où } R(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

(b) Comme la matrice P_γ est diagonalisable, il en est de même de A et les valeurs propres de A sont les $R(\omega_n^k)$ pour k compris entre 0 et $n-1$.

Précisément, on a $U^{-1}AU = \text{diag}(R(1), R(\omega_n), \dots, R(\omega_n^{n-1}))$ où :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \dots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \dots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-n} & \omega_n^{-2n} & \dots & \omega_n^{-n(n-1)} \end{pmatrix}$$

- (c) On est dans la situation précédente avec $R(X) = 2 - X - X^{n-1}$, donc les valeurs propres de A sont les :

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 2 - \omega^k - \omega^{k(n-1)} = 2 - \omega^k - \omega^{-k} \\ &= 2(1 - \Re(\omega^k)) = 2\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

où k est compris entre 0 et $n-1$, avec $\lambda_{n-k} = 4\sin^2\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right) = \lambda_k > 0$.

Pour $n = 2p$, on a $\lambda_0 = 0$, $\lambda_p = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ qui sont simples et :

$$\lambda_k = \lambda_{2p-k} = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p}\right) \quad (1 \leq k \leq p-1)$$

qui sont doubles. Le rayon spectral est alors $\rho(A) = 4$.

Pour $n = 2p+1$, on a $\lambda_0 = 0$ qui est simple et :

$$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \quad (1 \leq k \leq p)$$

qui sont doubles. Le rayon spectral est alors $\rho(A) = \lambda_p = 4\sin^2\left(\frac{p\pi}{2p+1}\right)$.

Exercice 12.4. Matrice de Hessenberg

On appelle matrice de Hessenberg une matrice A à coefficients complexes telle que $a_{ij} = 0$ pour $j < i-1$. Une telle matrice est dite irréductible si $a_{i,i-1} \neq 0$ pour tout $i = 2, \dots, n$.

1. Montrer que si A est une matrice de Hessenberg irréductible, alors pour toute valeur propre de A , l'espace propre associé est de dimension 1.
2. En déduire que les valeurs propres d'une matrice de Hessenberg irréductible sont simples si, et seulement si, la matrice est diagonalisable.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients

réels, tridiagonale (donc de Hessenberg) symétrique et irréductible.

(a) Montrer que les valeurs propres de A sont simples.

(b) Décrire un algorithme de calcul de l'espace propre associé à une valeur propre de A .

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$ une matrice tridiagonale à

coefficients complexes.

(a) Donner un algorithme de calcul du polynôme caractéristique de A .

(b) Montrer que A admet les mêmes valeurs propres que la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & c_3 b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{n-1} & c_n b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

(c) Montrer que si $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ et $c_{i+1} b_i \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n-1$, alors A admet n valeurs propres réelles simples et est diagonalisable.

Solution.

1. Pour tout nombre complexe λ , on note :

$$A_\lambda = A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n} \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} - \lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix}$$

En désignant par B_λ la matrice extraite de A_λ en supprimant la première ligne et la dernière colonne, soit :

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2,n} \\ \vdots & \ddots & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} - \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

on a $\det(B_\lambda) = \prod_{i=2}^n a_{i,i-1} \neq 0$, donc A_λ est de rang égal à $n-1$ ou n , ce qui revient à dire que $\dim(\ker(A - \lambda I_n)) \leq 1$. Dans le cas où λ est une valeur propre de A , on a alors $\dim(\ker(A - \lambda I_n)) = 1$.

2. La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, pour toute valeur propre λ de A , la dimension de $\ker(A - \lambda I_n)$ est égale à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de A . De la question précédente, on déduit alors que la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont simples.

3.

- (a) Une matrice symétrique réelle a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable. Si de plus elle tridiagonale et irréductible, elle est alors de Hessenberg irréductible et toutes ses valeurs propres sont simples.
- (b) Si λ est une valeur propre de A et $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ est un vecteur propre associé, on a alors :

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 = \lambda x_1 \\ b_{k-1} x_{k-1} + a_k x_k + b_k x_{k+1} = \lambda x_k \quad (2 \leq k \leq n-1) \\ b_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Si $x_n = 0$, avec l'hypothèse $b_i \neq 0$ pour tout i compris entre 1 et $n-1$, on déduit alors que tous les x_i sont nuls. On peut donc prendre $x_n = 1$ et $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ est solution du système triangulaire supérieur :

$$\begin{cases} b_{k-1} x_{k-1} + (a_k - \lambda) x_k + b_k x_{k+1} = 0 \quad (2 \leq k \leq n-2) \\ b_{n-2} x_{n-2} + (a_{n-1} - \lambda) x_{n-1} = -b_{n-1} \\ b_{n-1} x_{n-1} = \lambda - a_n \end{cases}$$

La solution de ce système peut se calculer avec l'algorithme :

$$\begin{cases} x_{n-1} = \frac{\lambda - a_n}{b_{n-1}} \\ x_{k-1} = -\frac{b_k x_{k+1} + (a_k - \lambda) x_k}{b_{k-1}} \quad (k = n-1, \dots, 2) \end{cases}$$

4. Pour $1 \leq k \leq n$, on note A_k la matrice principale d'ordre k de A .

- (a) La suite $(P_k)_{1 \leq k \leq n}$ des polynômes caractéristiques des A_k vérifie la récurrence :

$$\begin{cases} P_0(\lambda) = 1, & P_1(\lambda) = a_1 - \lambda \\ P_k(\lambda) = (a_k - \lambda)P_{k-1}(\lambda) - b_{k-1}c_k P_{k-2}(\lambda) & (2 \leq k \leq n) \end{cases}$$

- (b) Le polynôme caractéristique de la matrice B s'obtient avec la même relation de récurrence que celui de A en utilisant les mêmes conditions initiales, ces deux polynômes sont donc identiques.
- (c) En utilisant deux fois le résultat précédent, on voit que A admet les mêmes valeurs propres que la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & \sqrt{c_2 b_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{c_2 b_1} & a_2 & \sqrt{c_3 b_2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \sqrt{c_{n-1} b_{n-2}} & a_{n-1} & \sqrt{c_n b_{n-1}} \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{c_n b_{n-1}} & a_n \end{pmatrix}$$

Cette matrice C symétrique tridiagonale et irréductible, donc diagonalisable avec n valeurs propres réelles simples. Il en résulte que A admet donc n valeurs propres réelles simples et est diagonalisable.

Exercice 12.5. Diagonalisation et puissances d'une matrice

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle, α, β deux éléments de $\mathbb{K}$ et $A_{\alpha, \beta} = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice d'ordre $n \geq 3$ définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} \beta & \text{si } i = j \\ \alpha & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

1. Calculer les valeurs propres avec leur multiplicité de la matrice $A_{\alpha, \beta}$.
2. Calculer le polynôme minimal $\pi_{\alpha, \beta}$ de la matrice $A_{\alpha, \beta}$ et montrer que $A_{\alpha, \beta}$ est diagonalisable.
3. Dans le cas où la matrice $A_{\alpha, \beta}$ est inversible, calculer son inverse.
4. Calculer $A_{\alpha, \beta}^k$ pour tout entier naturel k .

Solution. On désigne par $P_{\alpha, \beta}$ le polynôme caractéristique de $A_{\alpha, \beta}$.

$$1. \text{ On a } A_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix} = \alpha A_{1,0} + \beta I_n.$$

Pour $\alpha = 0$, on a $P_{\alpha, \beta}(X) = (X - \beta)^n$ et β est valeur propre d'ordre n .

Pour $\alpha \neq 0$, on a $P_{\alpha, \beta}(X) = \det((X - \beta)I_n - \alpha A_{1,0}) = \alpha^n P_{1,0}\left(\frac{X - \beta}{\alpha}\right)$.

avec $P_{1,0}(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & X & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & X & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & X \end{vmatrix}$. En ajoutant les lignes 2 à n à la première ligne on a :

$$P_{1,0}(X) = (X - (n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & X & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & X & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & X \end{vmatrix}$$

Puis en retranchant la première colonne aux colonnes 2 à n , on obtient :

$$P_{1,0}(X) = (X - (n-1))(X+1)^{n-1}$$

et :

$$\begin{aligned} P_{\alpha,\beta}(X) &= \alpha^n P_{1,0}\left(\frac{X-\beta}{\alpha}\right) = \alpha^n \left(\frac{X-\beta}{\alpha} - (n-1)\right) \left(\frac{X-\beta}{\alpha} + 1\right)^{n-1} \\ &= (X - (\beta + (n-1)\alpha))(X - (\beta - \alpha))^{n-1} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $A_{\alpha,\beta}$ sont donc $\lambda_1 = \beta + (n-1)\alpha$ et $\lambda_2 = \beta - \alpha$. Pour $\alpha \neq 0$, λ_1 est valeur propre simple et λ_2 est valeur propre d'ordre $n-1$.

On peut aussi remarquer que $A_{\alpha,\beta} + (\alpha - \beta)I_n = \alpha A_{1,1}$ avec $A_{1,1}$ de rang 1, donc 0 est valeur propre d'ordre $n-1$ de $A_{1,1}$ et $\text{Tr}(A_{1,1}) = n-1$ est valeur propre simple. On retrouve alors facilement les valeurs propres de $A_{\alpha,\beta}$.

2. Pour $\alpha = 0$, on a $A_{\alpha,\beta} = \beta I_n$ et $\pi_{\alpha,\beta}(X) = X - \beta$. Pour $\alpha \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} A_{\alpha,\beta} - (\beta - \alpha)I_n &= \alpha A_{1,1} \\ A_{\alpha,\beta} - (\beta + (n-1)\alpha)I_n &= \alpha A_{1,1-n} \end{aligned}$$

avec $A_{1,1}A_{1,1-n} = 0$. La matrice $A_{\alpha,\beta}$ n'étant pas celle d'une homothétie, on déduit que son polynôme minimal est :

$$\pi_{\alpha,\beta}(X) = (X - (\beta - \alpha))(X - (\beta + (n-1)\alpha))$$

Ce polynôme minimal étant scindé à racines simple, la matrice $A_{\alpha,\beta}$ est diagonalisable semblable à $\text{diag}(\beta + (n-1)\alpha, \beta - \alpha, \dots, \beta - \alpha)$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la matrice $A_{\alpha,\beta}$ est symétrique, donc diagonalisable, ce qui équivaut à dire que $\pi_{\alpha,\beta}$ est scindé à racines simples, donc égal à $(X - (\beta - \alpha))(X - (\beta + (n-1)\alpha))$.

3. Pour $\alpha = 0$, on $A_{\alpha,\beta} = \beta I_n$, donc cette matrice est inversible si et seulement si $\beta \neq 0$ et dans ce cas, on a $A_{\alpha,\beta}^{-1} = \beta^{-1}I_n$.

Pour $\alpha \neq 0$, la matrice $A_{\alpha,\beta}$ est inversible si et seulement si $\beta \neq \alpha$ et $\beta \neq -(n-1)\alpha$ et son polynôme minimal est $\pi_{\alpha,\beta}(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. L'égalité $\pi_{\alpha,\beta}(A_{\alpha,\beta}) = 0$ nous donne alors :

$$\begin{aligned} A_{\alpha,\beta}^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} ((\lambda_1 + \lambda_2)I_n - A(\alpha, \beta)) \\ &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} A(-\alpha, \lambda_1 + \lambda_2 - \beta) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} A(-\alpha, \beta + (n-1)\alpha) \end{aligned}$$

4. Pour $\alpha = 0$, on $A_{\alpha,\beta} = \beta I_n$ et pour tout entier naturel k , on a $A_{\alpha,\beta}^k = \beta^k I_n$.
 On suppose que $\alpha \neq 0$. Pour $k \in \{0, 1\}$, on a $A_{\alpha,\beta}^k = a_k A(\alpha, \beta) + b_k I_n$ avec $(a_0, b_0) = (0, 1)$ et $(a_1, b_1) = (1, 0)$. Pour $k \geq 2$, la division euclidienne de X^k par $\pi_{\alpha,\beta}(X)$ s'écrit $X^k = Q(X) \pi_{\alpha,\beta}(X) + a_k X + b_k$ avec :

$$\begin{cases} a_k = \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{n\alpha} \\ b_k = \frac{\lambda_1 \lambda_2^k - \lambda_2 \lambda_1^k}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{n\alpha} (\lambda_2^{k-1} - \lambda_1^{k-1}) \end{cases}$$

Et on a $A_{\alpha,\beta}^k = a_k A(\alpha, \beta) + b_k I_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On peut aussi écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A_{\alpha,\beta}^k = \frac{1}{n\alpha} (\lambda_1^k (A_{\alpha,\beta} - \lambda_2 I_n) + \lambda_2^k (\lambda_1 I_n - A_{\alpha,\beta}))$$

$(\frac{1}{nb} (A_{\alpha,\beta} - \lambda_2 I_n)$ et $\frac{1}{nb} (\lambda_1 I_n - A_{\alpha,\beta})$ sont les projecteurs spectraux), ou encore $A_{\alpha,\beta}^k = \frac{1}{n} (\lambda_2^k A_{1,1} - \lambda_1^k A_{1,1-n})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 12.6. Décomposition polaire

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{O}(E)$ est le groupe orthogonal et $S^+(E)$ [resp. $S^{++}(E)$] est l'ensemble des endomorphismes de E symétriques positifs [resp. définis positifs].

1. Soit $u \in S^+(E)$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme v dans $S^+(E)$ tel que $u = v^2$.
2. Montrer que tout automorphisme $u \in GL(E)$ peut s'écrire de manière unique $u = \rho \circ \sigma$, où $\rho \in \mathcal{O}(E)$ et $\sigma \in S^{++}(E)$.
3. Montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe compact maximal de $GL(E)$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$ et si G est sous-groupe compact de $GL(E)$ qui contient $\mathcal{O}(E)$, alors $G = \mathcal{O}(E)$.
4. Montrer que tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ peut s'écrire $u = \rho \circ \sigma$, où $\rho \in \mathcal{O}(E)$ et $\sigma \in S^+(E)$.
5. On munit l'espace $\mathcal{L}(E)$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), \langle u | v \rangle = \text{Tr}(u^* \circ v)$$

Montrer que $d(0, SL(E)) = \sqrt{n}$, où $SL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$ et $d(0, SL(E)) = \inf_{u \in SL(E)} \|u\|$.

Solution.

1. Comme u est symétrique positif, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i compris entre 1 et n , les réels λ_i étant positifs. L'endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ défini par $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout i compris entre 1 et n est alors symétrique positif tel que $u = v^2$.

En désignant par $\varphi \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $\varphi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (le degré de φ est $p-1$ où p est le nombre de valeurs propres distinctes de A), on a pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$:

$$\varphi(u)(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(u)(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(\lambda_i) e_i = \sum_{i=1}^n x_i \sqrt{\lambda_i} e_i = v(x)$$

ce qui signifie que $v = \varphi(u)$ est polynomial en u . Si $w \in S^+(E)$ est une autre racine carrée de u , on a alors $w^2 = u$ et w commute avec u , donc avec v . En définitive les endomorphismes v et w commutent et sont symétriques, on sait alors qu'ils sont diagonalisables dans une même base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a donc $v(e'_i) = \mu_i e'_i$ et $w(e'_i) = \nu_i e'_i$ pour tout i compris entre 1 et n , où les réels μ_i et ν_i sont positifs. De $v^2(e'_i) = w^2(e'_i) = u(e'_i) = v^2(e'_i) = \mu_i^2 e'_i$, on déduit alors que $\mu_i = \nu_i$ pour tout i compris entre 1 et n et $v = w$.

2. Si $u = \rho \circ \sigma$, où $\rho \in \mathcal{O}(E)$, $\sigma \in S^{++}(E)$, alors $u^* \circ u = \sigma \circ \rho^* \circ \rho \circ \sigma = \sigma^2$, ce qui signifie que $\sigma \in S^{++}(E)$ est la racine carrée positive de $u^* \circ u \in S^{++}(E)$. ($\langle u^* \circ u(x) | x \rangle = \|u(x)\|^2 > 0$ pour x non nul). L'endomorphisme ρ est alors donné par $\rho = u \circ \sigma^{-1}$. On a donc, en cas d'existence, l'unicité des endomorphismes ρ et σ .

Pour $u \in GL(E)$, $u^* \circ u$ est symétrique défini positif et admet une unique racine carrée $\sigma \in S^{++}(E)$. En posant $\rho = u \circ \sigma^{-1}$, on a $u = \rho \circ \sigma$ et :

$$\rho^* \circ \rho = \sigma^{-1} \circ u^* \circ u \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma^2 \circ \sigma^{-1} = Id$$

c'est-à-dire que $\rho \in \mathcal{O}(E)$.

3. L'espace $\mathcal{L}(E)$ est normé par $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

(a) On sait déjà que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. Du fait qu'un automorphisme orthogonal conserve la norme, on déduit que $\|u\| = 1$ pour tout $u \in \mathcal{O}(E)$, donc $\mathcal{O}(E)$ est borné dans $\mathcal{L}(E)$. Cet ensemble étant fermé comme image réciproque du fermé $\{Id\}$ de $\mathcal{L}(E)$ par l'application continue $u \mapsto u^* \circ u$, il est compact.

(b) Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ qui contient $\mathcal{O}(E)$. Tout $u \in G$ s'écrit $u = \rho \circ \sigma$, où $\rho \in \mathcal{O}(E)$ et $\sigma \in S^{++}(E)$. Comme u et ρ sont dans le groupe G , il en est de même de $\sigma = \rho^{-1} \circ u$. Par ailleurs, on sait qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que $\sigma(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i compris entre 1 et n , les réels λ_i étant strictement positifs. Pour tout entier i compris entre 1 et n et tout entier relatif p , on a $\|\sigma^p(e_i)\| = \|\lambda_i^p e_i\| = \lambda_i^p \leq \|\sigma^p\|$, les automorphismes σ^p étant dans le groupe G . Comme G est compact, il est en particulier borné, donc toutes les suites $(\lambda_i^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ sont bornées dans $\mathbb{R}^{+,*}$, ce qui impose que tous les λ_i valent 1, donc $\sigma = Id$ et $u = \rho \in \mathcal{O}(E)$. En définitive, $G = \mathcal{O}(E)$.

4. Tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ peut s'écrire $u = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k$ où $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'automorphismes (densité de $GL(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$).

Pour tout entier k , on peut écrire $u_k = \rho_k \circ \sigma_k$ où $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'automorphismes orthogonaux et $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'automorphismes symétriques définis positifs. De la suite $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans le compact $\mathcal{O}(E)$ on peut extraire une sous-suite $(\rho_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\rho \in \mathcal{O}(E)$. De $\sigma_k = \rho_k^{-1} \circ u_k = \rho_k^* \circ u_k$ et de la continuité de la composition des endomorphismes, on déduit que la suite $(\sigma_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente, sa limite σ étant un endomorphisme symétrique positif. On a donc $u = \rho \circ \sigma$.

5. Tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ s'écrit $u = \rho \circ \sigma$, où $\rho \in \mathcal{O}(E)$ et $\sigma \in S^+(E)$ et on a $\|u\|^2 = \text{Tr}(u^* \circ u) = \text{Tr}(\sigma^* \circ \sigma^* \circ \rho \circ \sigma) = \text{Tr}(\sigma^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$, où

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres (réelles positives) de σ . En utilisant l'inégalité $\left(\prod_{k=1}^n \lambda_k^2\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$ entre moyennes géométrique et arithmétique,

on en déduit que $\|u\|^2 \geq n \left(\prod_{k=1}^n \lambda_k^2\right)^{\frac{1}{n}} = n (\det(\sigma^2))^{\frac{1}{n}} = n (\det(u^2))^{\frac{1}{n}}$ (on

a $\det(u) = \det(\rho) \det(\sigma)$ avec $\det(\rho) = \pm 1$ et $\det(u^2) = |\det(u)|^2$), soit $\|u\| \geq \sqrt{n} |\det(u)|^{\frac{1}{n}}$. Ce qui nous donne pour $u \in SL(E)$, $\|u\| \geq \sqrt{n}$. Il en résulte que $d(0, SL(E)) = \sqrt{n}$.

Pour $u \in \mathcal{O}^+(E) \subset SL(E)$, on a $\|u\|^2 = \text{Tr}(u^* \circ u) = \text{Tr}(Id) = n$, donc $d(0, u^* \circ u) \leq \sqrt{n}$ et on a l'égalité.

Exercice 12.7. Séries matricielles

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ comme valeurs propres complexes deux à deux distinctes telles que $|\lambda_k| < R$ pour $1 \leq k \leq p$.

(a) Justifier la définition de la matrice $f(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$.

(b) En utilisant un polynôme d'interpolation de Lagrange, montrer qu'il existe un polynôme $L \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que $f(A) = L(A)$.

2. En utilisant la question précédente, calculer pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, l'exponentielle de la matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Calculer, pour tous nombres réels a, b avec b non nul, l'exponentielle de la matrice $A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Solution.

1.

- (a) Comme A est diagonalisable, il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale, donc pour tout entier naturel k ,

on a $\sum_{j=0}^k a_j A^j = P \left(\sum_{j=0}^k a_j D^j \right) P^{-1}$, la matrice $\sum_{j=0}^k a_j D^j$ étant diagonale de termes diagonaux $\sum_{j=0}^k a_j \lambda_k^j$. Il en résulte que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^k a_j D^j = f(D)$, où $f(D)$ est une matrice diagonale de termes diagonaux $f(\lambda_k)$. Puis de la continuité du produit matriciel, on en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^k a_j A^j = P f(D) P^{-1}$, soit $f(A) = P f(D) P^{-1}$.

- (b) En désignant par $L \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $L(\lambda_k) = f(\lambda_k)$ pour tout k compris entre 1 et p , on a :

$$\begin{aligned} f(A) &= P f(D) P^{-1} = P L(D) P^{-1} = L(A) \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{f(\lambda_k)}{\prod_{1 \leq j \neq k \leq p} (\lambda_k - \lambda_j)} \prod_{1 \leq j \neq k \leq p} (A - \lambda_j I_n) \end{aligned}$$

2. Les valeurs propres complexes de A_θ sont $-i\theta$ et $i\theta$. Comme elles sont distinctes pour $\theta \neq 0$, la matrice A_θ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En utilisant le polynôme de Lagrange de degré 1 défini par $L(\pm i\theta) = e^{\pm i\theta}$, soit :

$$L(X) = \frac{X + i\theta}{2i\theta} e^{i\theta} - \frac{X - i\theta}{2i\theta} e^{-i\theta} = \cos(\theta) + \frac{\sin(\theta)}{\theta} X$$

$$\text{on obtient } e^{A_\theta} = \cos(\theta) I_2 + \frac{\sin(\theta)}{\theta} A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Pour f développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence $R > 1$, on a :

$$\begin{aligned} L(X) &= \frac{X + i\theta}{2i\theta} f(i\theta) - \frac{X - i\theta}{2i\theta} f(-i\theta) \\ &= \frac{1}{2} (f(i\theta) + f(-i\theta)) - \frac{i}{2\theta} (f(i\theta) - f(-i\theta)) X \end{aligned}$$

$$\text{et } f(A) = \frac{1}{2} (f(i\theta) + f(-i\theta)) I_2 - \frac{i}{2\theta} (f(i\theta) - f(-i\theta)) A.$$

3. Les valeurs propres complexes de $A_{a,b}$ sont $a - ib$ et $a + ib$. Comme elles sont distinctes pour $b \neq 0$, la matrice $A_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En utilisant le polynôme de Lagrange de degré 1 défini par $Q(a \pm ib) = e^{-a \pm ib}$, soit :

$$Q(X) = \frac{X - a + ib}{2ib} e^{a+ib} - \frac{X - a - ib}{2ib} e^{a-ib} = e^a \left(\cos(b) + \frac{\sin(b)}{b} (X - a) \right)$$

on a :

$$e^{A_{a,b}} = e^a \left(\cos(b) I_2 + \frac{\sin(b)}{b} (A_{a,b} - a I_2) \right) = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$

Ce résultat n'est pas étonnant puisque $A_{a,b}$ est la représentation matricielle réelle du nombre complexe $a + ib$ et $e^{A_{a,b}}$ est la représentation de e^{a+ib} .

Exercice 12.8. Exponentielle de matrice et système différentiel

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

1. Calculer e^{tA} pour tout réel $t \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$.
3. Proposer une autre méthode pour résoudre ce système différentiel.

Solution.

1. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = X(X-1)^3$. L'espace propre associé à la valeur propre 0 est $E_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et l'espace propre associé à la valeur propre 1 est $E_1 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice A n'est pas diagonalisable et comme $\mathbb{C}^4 = \ker(A) \oplus \ker(A - I_4)^3$, on déduit que :

$$2 < \dim(\ker(A - I_4)^2) \leq \dim(\ker(A - I_4)^3) = 3$$

Donc $\ker(A - I_4)^2 = \dim(\ker(A - I_4)^3)$ est de dimension 3 et $\mathbb{C}^4 = \ker A \oplus \ker(A - I_4)^2$ (le polynôme minimal de A est $\pi_A(X) = X(X-1)^2$).
 Pour tout $x \in \ker A$ et pour tout $y \in \ker(A - I_4)^2$, on a :

$$\begin{cases} e^{tA}x = x \\ e^{tA}y = e^t e^{t(A-I_4)}y = e^t(y + t(A - I_4)y) \end{cases}$$

Tout vecteur $z \in \mathbb{C}^4$ s'écrit $z = x + y$ où :

$$\begin{cases} x = (A - I_4)^2 z \in \ker A \\ y = A(2I_4 - A)z \in \ker(A - I_4)^2 \end{cases}$$

(l'identité de Bézout $(-X + 2)X + (X - 1)^2 = 1$ permet d'obtenir les projections sur les sous espaces caractéristiques) et :

$$\begin{aligned} e^{tA}z &= x + e^t(y + t(A - I_4)y) \\ &= (A - I_4)^2 z + e^t(A(2I_4 - A)z + t(A - I_4)A(2I_4 - A)z) \end{aligned}$$

En écrivant que :

$$\begin{cases} A(2I_4 - A) = A - A(I_4 - A) \\ (A - I_4)A(2I_4 - A) = -A(A - I_4)^2 + A(A - I_4) = A(A - I_4) \end{cases}$$

on déduit que $e^{tA}z = (A - I_4)^2 z + e^t (Az + (t-1)A(A - I_4)z)$. Enfin de :

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - I_4)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{on déduit que } e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 1 - e^t & e^t - 1 \\ 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Les solutions de $Y' = AY$ sont alors données par :

$$Y(t) = e^{tA}Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha e^t + (\gamma - \delta)(1 - e^t) \\ (\beta + \gamma t)e^t \\ \gamma e^t \\ \gamma(e^t - 1) + \delta \end{pmatrix}$$

3. On peut trigonaliser la matrice A , soit $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{calculs ennuyeux que}$$

l'on peut faire avec Xcas, le calcul de P^{-1} n'étant pas utile). Posant $Y = PZ$, on a $Z' = TZ$, soit $z'_1 = 0$, $z'_2 = z_2$, $z'_3 = z_3 + z_4$, $z'_4 = z_4$, donc $z_1 = \lambda_1$, $z_2 = \lambda_2 e^t$, $z_4 = \lambda_4 e^t$, $z_3 = (\lambda_3 + \lambda_4 t)e^t$ et :

$$Y(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 e^t \\ (\lambda_3 + \lambda_4 t)e^t \\ \lambda_4 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + e^t \lambda_2 \\ e^t (\lambda_3 + t \lambda_4) \\ e^t \lambda_4 \\ -\lambda_1 + e^t \lambda_4 \end{pmatrix}$$

Problème 12.1. $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 0$ pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- I - Résultats préliminaires

1. On désigne par $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \overline{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application de conjugaison. Montrer que φ est un automorphisme involutif de $\mathbb{R}$ -algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\det(A\overline{A}) \in \mathbb{R}^{+,*}$ pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $A - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout nombre complexe λ tel que $0 < |\lambda| < \eta$. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{pmatrix}$, puis en déduire qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{pmatrix} = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C})$$

4. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{pmatrix} \geq 0$ pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;
 (b) $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 0$ pour toute matrice C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- II - Un cas particulier

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que le polynôme caractéristique de $C\overline{C}$ soit scindé à racines simples.

- Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.
- Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $C\overline{C}$ est à coefficients réels et que $C\overline{C}$ est diagonalisable en précisant la dimension de ses espaces propres.
- Soient λ une valeur propre réelle de $C\overline{C}$ et v un vecteur propre (non nul) associé.
 - Montrer que $\overline{C}C\overline{v} = \lambda\overline{v}$, puis qu'il existe un nombre complexe μ tel que $C\overline{v} = \mu v$.
 - En calculant $C(\overline{\mu v})$ de deux manières différentes, en déduire que λ est un réel positif.
- Montrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}^{+,*}$.

- III - Résultant de deux polynômes

Étant donnés deux polynômes $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, $Q(X) = \sum_{k=0}^q b_k X^k$ à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ et de degrés respectifs $p \geq 1$, $q \geq 1$, on leur associe la matrice de Sylvester :

$$S(P, Q) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \cdots & \vdots & \vdots & b_1 & \cdots & 0 \\ a_p & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & a_p & & \vdots & \vdots & \vdots & & b_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_q & \vdots & & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & b_q & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_1 & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_p & 0 & 0 & \cdots & b_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$$

et leur résultant $\text{Res}(P, Q) = \det(S(P, Q))$.

Dans le cas où le polynôme P [resp. Q] est constant égal à a_0 non nul [resp. b_0 non nul], la matrice de Sylvester est la matrice du système de vecteurs :

$$(a_0, a_0X, \dots, a_0X^{q-1}) \text{ [resp. } (b_0, b_0X, \dots, b_0X^{p-1})]$$

dans la base canonique de $\mathbb{K}_{q-1}[X]$ [resp. $\mathbb{K}_{p-1}[X]$] et $\text{Res}(a_0, Q) = a_0^q$ [resp. $\text{Res}(P, b_0) = b_0^p$].

Le discriminant de P est $\text{Discr}(P) = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{a_p} \text{Res}(P, P')$ où P' est le polynôme dérivé de P .

On note $\mathcal{B}_0 = (X^k)_{0 \leq k \leq p+q-1}$ la base canonique de $\mathbb{K}_{p+q-1}[X]$:

$$\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{q-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{p-1}))$$

et :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{P,Q} : \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}_{p+q-1}[X] \\ (U, V) & \mapsto & PU + QV \end{array}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X]$, que l'application $\varphi_{P,Q}$ est linéaire et donner sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$.
2. Montrer que les polynômes P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, $\text{Res}(P, Q) \neq 0$.
3. Calculer le discriminant d'un polynôme de degré 2, $P(X) = aX^2 + bX + c$.
4. Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, montrer que P est scindé à racines simples si, et seulement si, $\text{Discr}(P) \neq 0$.

– IV – Fonctions polynomiales à plusieurs variables

Pour tout entier naturel non nul d , on dit qu'une fonction $P : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est polynomiale si P est la fonction nulle ou s'il existe une partie finie S de $\mathbb{N}^d$ et une famille $(a_k)_{k \in S}$ de nombres complexes telles que :

$$\forall x = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{C}^d, P(x) = \sum_{k=(k_1, \dots, k_d) \in S} a_k x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$$

Étant donnée une telle fonction polynomiale P , on lui associe l'ensemble :

$$Z_P = \{x = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{C}^d \mid P(x) = 0\}$$

1.

- (a) Montrer que s'il existe des parties infinies $I_1, \dots, I_d$ de $\mathbb{C}$ telles que $\prod_{k=1}^d I_k$ soit contenu dans Z_P , alors P est la fonction polynomiale nulle (i.e. tous ses coefficients a_k sont nuls).
- (b) En déduire que si $P \neq 0$, alors Z_P est un fermé d'intérieur vide et $\mathbb{C}^d \setminus Z_P$ est un ouvert dense de $\mathbb{C}^d$.

2. En utilisant le discriminant, montrer que l'ensemble Ω des matrices $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que le polynôme caractéristique de $C\overline{C}$ soit scindé à racines simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 0$ pour toute matrice C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. (a) Montrer que $\det(\lambda I_n + C\overline{C}) \geq 0$ pour toute matrice C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout réel positif λ .
 (b) En déduire que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $M = A^2$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont nécessairement de multiplicité paire.
 (c) En déduire que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'image d'une matrice réelle par l'application exponentielle, alors ses valeurs propres réelles strictement négatives sont nécessairement de multiplicité paire.

– V – Une autre preuve de $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{pmatrix} \geq 0$ pour A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Soient A, B, C, D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :
 (a) les matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$ sont semblables ;
 (b) les matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}$ sont semblables.
2. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{pmatrix}$ est à coefficients réels.
3. En notant tout vecteur de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où X, Y sont des éléments de $\mathbb{C}^n$, on désigne par θ l'application définie sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ par :

$$\theta : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \begin{pmatrix} X \\ \overline{Y} \end{pmatrix}$$
 (a) Montrer que θ est une application $\mathbb{R}$ -linéaire qui commute à tous les endomorphismes de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ de matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.
 (b) Que vaut $\theta \circ \theta$?
 (c) Soit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Montrer que Z et $\theta(Z)$ sont $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants et que le plan $\text{Vect}(Z, \theta(Z))$ est stable par θ .
 (d) Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ stable par θ et Z dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus E$. Montrer que $E \cap \text{Vect}(Z, \theta(Z)) = \{0\}$.
4. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute valeur propre λ de $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{pmatrix}$, on note E_λ le sous-espace propre associé et F_λ le sous-espace caractéristique associé.

- (a) Montrer que $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de M et que $\theta(F_\lambda) = F_{\bar{\lambda}}$.
- (b) Montrer que si la valeur propre λ est réelle, le sous-espace caractéristique F_λ est alors de dimension paire.
5. Dédurre de ce qui précède que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \geq 0$ pour tous A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution.

- I - Résultats préliminaires

1.

- (a) La conjugaison définissant un automorphisme involutif de $\mathbb{R}$ -algèbre sur $\mathbb{C}$, on a pour toutes matrices $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = ((b_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout réel λ :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda A + B) &= ((\overline{\lambda a_{ij} + b_{ij}}))_{1 \leq i, j \leq n} = ((\lambda \overline{a_{ij}} + \overline{b_{ij}}))_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \lambda \varphi(A) + \varphi(B) \end{aligned}$$

ce qui signifie que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$\begin{aligned} \varphi(AB) &= \left(\overline{\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{ik}} \overline{b_{kj}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \varphi(A) \varphi(B) \end{aligned}$$

donc φ est un morphisme de $\mathbb{R}$ -algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Enfin l'égalité :

$$\varphi \circ \varphi(A) = ((\overline{\overline{a_{ij}}}))_{1 \leq i, j \leq n} = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} = \varphi(A)$$

nous dit que φ est involutif, donc inversible d'inverse $\varphi^{-1} = \varphi$.

- (b) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a en notant $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation σ :

$$\det(\bar{A}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod \overline{a_{j, \sigma(j)}} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod a_{j, \sigma(j)}} = \overline{\det(A)}$$

et $\det(A\bar{A}) = \det(A) \det(\bar{A}) = |\det(A)|^2 \geq 0$, cette quantité étant non nulle pour $GL_n(\mathbb{C})$ puisque $\det(A) \neq 0$ dans ce cas.

2.

- (a) En notant $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de A , on a $\det(\lambda I_n - A) = \prod_{k=1}^p (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ en notant, pour tout k compris entre 1 et p , $m_k \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité algébrique de la valeur propre λ_k

(trigonalisation de A). Si toutes les valeurs propres de A sont nulles, on a alors $\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n \neq 0$ et $A - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout nombre complexe non nul λ , donc n'importe quel réel $\eta > 0$ répond à la question. Dans le cas contraire en notant $\eta = \min_{\substack{1 \leq k \leq p \\ \lambda_k \neq 0}} |\lambda_k|$, on aura $\det(\lambda I_n - A) \neq 0$

pour $0 < |\lambda| < \eta$ et $A - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{C})$.

- (b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $A - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\lambda| < \eta$. En désignant par k_0 un entier non nul tel que $\frac{1}{k_0} < \eta$, on a $0 < \frac{1}{k} < \eta$ pour tout entier $k \geq k_0$, donc $A_k = A - \frac{1}{k} I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ et avec $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$, on déduit que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. On a $T = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \overline{BA}^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \overline{BA}^{-1}B + \overline{A} \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{aligned} \det(T) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \overline{BA}^{-1}B + \overline{A} \end{pmatrix} \\ &= \det(A) \det(\overline{BA}^{-1}B + \overline{A}) = \det(A) \det\left(\left(\overline{BA}^{-1}B\overline{A}^{-1} + I_n\right) \overline{A}\right) \\ &= \det(A) \det(\overline{A}) \det(I_n + C\overline{C}) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) \end{aligned}$$

en notant $C = \overline{BA}^{-1}$.

4.

- (a) $\Rightarrow$ (b) Supposons que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \geq 0$ pour tous A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $A = I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B = \overline{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$0 \leq \det \begin{pmatrix} I_n & B \\ -\overline{B} & I_n \end{pmatrix} = |\det(I_n)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) = \det(I_n + C\overline{C})$$

- (b) $\Rightarrow$ (a) Supposons que $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 0$ pour toute matrice C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En désignant par $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices inversibles qui converge vers A et en notant $C_k = \overline{BA}_k^{-1}$ on a :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \det \begin{pmatrix} A_k & B \\ -\overline{B} & \overline{A}_k \end{pmatrix} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} |\det(A_k)|^2 \det(I_n + C_k \overline{C}_k) \geq 0 \end{aligned}$$

(continuité du déterminant).

- II - Un cas particulier

1. Pour A inversible, en écrivant que $BA = A^{-1}(AB)A$, on voit que les matrices AB et BA sont semblables et en conséquence, elles ont même polynôme caractéristique.

2. Comme $\overline{\chi A} = \chi_{\overline{A}}$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \overline{\chi_{C\overline{C}}} = \chi_{\overline{C\overline{C}}} = \chi_{\overline{C}\overline{C}} = \chi_{C\overline{C}}$$

De plus comme $\chi_{C\overline{C}}$ est scindé à racines simples, la matrice $C\overline{C}$ est diagonalisable, ses espaces propres étant tous de dimension 1.

3.

- (a) On a $C\overline{C} \cdot v = \lambda v$, donc $\overline{C\overline{C}} \cdot \overline{v} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda} \overline{v}$ puisque λ est réel, donc $(C\overline{C})(C\overline{v}) = \lambda(C\overline{v})$, ce qui signifie que $C\overline{v} \in \ker(C\overline{C} - \lambda I_n) = \mathbb{C}v$ (les espaces propres de $C\overline{C}$ sont de dimension 1), soit $C\overline{v} = \mu v$ avec $\mu \in \mathbb{C}$.
- (b) On a $C(\overline{\mu v}) = C\overline{C} \cdot v = \lambda v$ et $C(\overline{\mu v}) = \overline{\mu} C\overline{v} = \overline{\mu} \mu v = |\mu|^2 v$, donc $\lambda v = |\mu|^2 v$ et $\lambda = |\mu|^2 \in \mathbb{R}^+$ puisque le vecteur v est non nul.

4. La matrice $C\overline{C}$ étant diagonalisable avec toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ simples et dans $\mathbb{R}^+$, on a $\det(I_n + C\overline{C}) = \prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k) \in \mathbb{R}^{+,*}$.

- III - Résultant de deux polynômes

1. On a $\mathcal{B} = (E_k)_{1 \leq k \leq m+n}$, où on a noté :

$$E_k = \begin{cases} (X^{k-1}, 0) & \text{si } 1 \leq k \leq q \\ (0, X^{k-q-1}) & \text{si } q+1 \leq k \leq p+q \end{cases}$$

(a) Tout élément (U, V) de $\mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X]$ s'écrit :

$$\begin{aligned} (U, V) &= \left(\sum_{k=0}^{q-1} u_k X^k, \sum_{k=0}^{p-1} v_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{q-1} u_k (X^k, 0) + \sum_{k=0}^{p-1} v_k (0, X^k) \\ &= \sum_{k=1}^q u_{k-1} (X^{k-1}, 0) + \sum_{k=q+1}^{p+q} v_{k-q-1} (0, X^{k-q-1}) \\ &= \sum_{k=1}^q u_{k-1} E_k + \sum_{k=q+1}^{p+q} v_{k-q-1} E_k \end{aligned}$$

donc $\mathcal{B}$ est une partie génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X]$ formée de $p+q = \dim(\mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X])$ éléments, en conséquence c'est une base.

- (b) La multiplication par un polynôme fixé étant un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, l'application $\varphi_{P,Q}$ est linéaire et comme $\deg(PU) = \deg(P) + \deg(U) \leq p+q-1$ et $\deg(QV) = \deg(Q) + \deg(V) \leq q+p-1$, elle définit bien une application linéaire de $\mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X]$ dans $\mathbb{K}_{p+q-1}[X]$.
- (c) Avec :

$$\varphi_{P,Q}(E_k) = \begin{cases} X^{k-1}P = \sum_{j=0}^p a_j X^{j+k-1} & \text{si } 1 \leq k \leq q \\ X^{k-q-1}Q = \sum_{j=0}^m b_j X^{j+k-q-1} & \text{si } q+1 \leq k \leq p+q \end{cases}$$

on déduit que la matrice de $\varphi_{P,Q}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$ est la matrice de Sylvester $S(P, Q)$.

2.

- (a) Supposons P, Q premiers entre eux. Si $(U, V) \in \ker(\varphi_{P,Q})$, on a alors $PU = -QV$ et P divise QV en étant premier avec B , il divise donc V qui est de degré strictement inférieur à celui de P , ce qui impose $V = 0$ et en conséquence $U = 0$. On a donc $\ker(\varphi_{P,Q}) = \{(0, 0)\}$ et $\varphi_{P,Q}$ est un isomorphisme puisque les espaces $\mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X]$ et $\mathbb{K}_{p+q-1}[X]$ sont de même dimension égale à $p + q$. Il en résulte que $\text{Res}(P, Q) = \det(\varphi_{P,Q}) \neq 0$.
- (b) Réciproquement, si $\text{Res}(P, Q) \neq 0$, l'application $\varphi_{P,Q}$ est alors un isomorphisme, donc 1 a un unique antécédent, ce qui traduit le fait que P et Q sont premiers entre eux.

3. Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec a non nul, on a :

$$\text{Discr}(P) = -\frac{1}{a} \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ b & 2a & b \\ a & 0 & 2a \end{vmatrix} = b^2 - 4ac$$

4. Pour $p = \deg(P) = 1$, il n'y a rien à montrer (P est scindé à racines simples et $\text{Discr}(P) = 1$). On suppose donc que $p \geq 2$. Comme $\mathbb{K}$ algébriquement clos, le polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$. Si $\text{Discr}(P) \neq 0$, les polynômes P et P' sont alors premiers entre eux (question III.2), donc il existe des polynômes U, V tels que $PU + QV = 1$ (théorème de Bézout) et P est scindé à racines simples. Réciproquement si P est scindé à racines simples, les polynômes P et P' sont alors premiers entre eux (sinon leur pgcd est de degré au moins égal à 1 et il a au moins une racine dans $\mathbb{K}$ qui est aussi racine commune de P et P' , donc racine d'ordre au moins égal à 2 de P) et $\text{Discr}(P) = 0$.

– IV – Fonctions polynomiales à plusieurs variables

1.

- (a) On raisonne par récurrence sur $d \geq 1$. Pour $d = 1$, P est une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$ qui s'annule en une infinité de points, c'est donc la fonction nulle, ce qui équivaut à dire que tous ses coefficients a_k sont nuls. Supposant le résultat acquis pour les fonctions polynomiales à $d - 1 \geq 1$ variables, soit $P : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ polynomiale telle que Z_P contienne un ensemble

$\prod_{k=1}^d I_k$ où les I_k sont des parties infinies de $\mathbb{C}$. Pour $(x_i)_{1 \leq i \leq d-1}$ fixé dans $\prod_{k=1}^{d-1} I_k$, la fonction polynomiale d'une variable Q définie par :

$$\begin{aligned} Q(z) &= P(x_1, \dots, x_{d-1}, z) = \sum_{k \in S} a_k x_1^{k_1} \dots x_{d-1}^{k_{d-1}} z^{k_d} \\ &= \sum_{k_d \in S_d} \left(\sum_{k'=(k_1, \dots, k_{d-1}) \in S'} a_{(k', k_d)} x_1^{k_1} \dots x_{d-1}^{k_{d-1}} \right) z^{k_d} \end{aligned}$$

en notant $S = S' \times S_d$ où S' est une partie finie de $\mathbb{N}^{d-1}$ et S_d est une partie finie de $\mathbb{N}$, s'annule en tout $z \in I_d$, l'ensemble I_d étant infini dans $\mathbb{C}$. Il en résulte que, pour tout $k_d \in S_d$ la fonction polynomiale

$\sum_{k'=(k_1, \dots, k_{d-1}) \in S'} a_{(k', k_d)} x_1^{k_1} \dots x_{d-1}^{k_{d-1}}$ est nulle sur $\prod_{k=1}^{d-1} I_k$, les I_k étant infini,

ce qui équivaut à la nullité des $a_{(k', k_d)}$ pour tout $k_d \in S_d$, donc à la nullité des a_k pour tout $k \in S$.

- (b) Toutes les normes sur l'espace $\mathbb{C}^d$ de dimension finie étant équivalentes, il est commode pour cette question d'utiliser la norme $\|\cdot\|_\infty$. L'ensemble $Z_P = P^{-1}\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{C}^d$ comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue P . Si l'intérieur $\overset{\circ}{Z}_P$ de Z_P est non vide, il existe alors un point $\omega = (\omega_i)_{1 \leq i \leq d}$ dans Z_P et un réel $\eta > 0$ tel que

la boule ouverte $B(\omega, \eta) = \prod_{k=1}^d]\omega_k - \eta, \omega_k + \eta[$ de centre ω et de rayon

η dans $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$ soit contenue dans Z_P , ce qui est incompatible avec l'hypothèse P non nulle d'après la question précédente. On a donc $\overset{\circ}{Z}_P = \emptyset$ et $\overline{\mathbb{C}^d \setminus Z_P} = \mathbb{C}^d \setminus \overset{\circ}{Z}_P = \mathbb{C}^d$, ce qui signifie $\mathbb{C}^d \setminus Z_P$ est dense de $\mathbb{C}^d$, cet ensemble étant ouvert comme complémentaire du fermé Z_P .

On rappelle que si E est un espace métrique (ou topologique) et A une partie de E , alors $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$. En effet, $E \setminus \overset{\circ}{A}$ est un fermé qui contient $E \setminus A$, donc $\overline{E \setminus A} \subset E \setminus \overset{\circ}{A}$. Si F est un fermé de E qui contient $E \setminus A$, l'ouvert $E \setminus F$ est contenu dans A , donc dans $\overset{\circ}{A}$ et $E \setminus \overset{\circ}{A} \subset F$, il en résulte que $E \setminus \overset{\circ}{A} \subset \overline{E \setminus A}$.

2. D'après III.4 on a $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \Delta(C) = \text{Discr}(\chi_{C\overline{C}}) \neq 0\}$ et en identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^{n^2}$, l'application $\Delta : C \in \mathbb{C}^{n^2} \mapsto \text{Discr}(\chi_{C\overline{C}})$ est polynomiale des n^2 variables c_{ij} , donc $\Omega = \{C \in \mathbb{C}^{n^2} \mid \Delta(C) \neq 0\} = \mathbb{C}^{n^2} \setminus Z_\Delta$ est dense dans $\mathbb{C}^{n^2}$, ce qui traduit la densité de Ω dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. En II on a montré que $\det(I_n + C\overline{C}) \geq 0$ pour toute matrice C dans Ω . Une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrivant $C = \lim_{k \rightarrow +\infty} C_k$ où $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices dans Ω (densité de Ω dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on déduit de la continuité de l'application $C \mapsto \det(I_n + C\overline{C})$ (c'est une fonction polynomiale à n^2 variables) que $\det(I_n + C\overline{C}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \det(I_n + C_k\overline{C_k}) \geq 0$.

4.

- (a) Pour $\lambda = 0$, on a $\det(C\overline{C}) = |\det(C)|^2 \geq 0$ (question I.1) et pour $\lambda > 0$, on a $\det(\lambda I_n + C\overline{C}) = \lambda^n \det\left(I_n + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}C\right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\overline{C}\right) \geq 0$.

- (b) Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(\lambda I_n + M) = \det(\lambda I_n + A\overline{A}) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$. D'autre part, par trigonalisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a en notant $\text{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M , $\det(\lambda I_n + M) =$

$$P_1 P_2 P_3 \text{ avec } P_1 = \prod_{\mu \in \text{Sp}(M) \cap \mathbb{R}^{+,*}} (\lambda + \mu)^{\alpha_\mu} \text{ et :}$$

$$P_2 = \prod_{\mu \in \text{Sp}(M) \cap \mathbb{R}^+} (\lambda + \mu)^{\alpha_\mu}, \quad P_3 = \prod_{\mu \in \text{Sp}(M) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})} |\lambda + \mu|^{2\alpha_\mu}$$

(si $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de M , son conjugué $\bar{\mu}$ est aussi valeur propre avec la même multiplicité α_μ), les deux derniers produits étant strictement positifs pour λ strictement positif. En notant $\mu_1 < \dots < \mu_p < 0$ les valeurs propres strictement négatives de multiplicités $2m_k + 1$ (s'il en existe) et $\nu_1 < \dots < \nu_q < 0$ celles de multiplicités $2n_k$ (s'il en existe), on a :

$$P_1 = \prod_{k=1}^p (\lambda + \mu_k)^{2m_k+1} \prod_{k=1}^q (\lambda + \nu_k)^{2n_k}$$

le dernier produit étant strictement positif pour λ strictement positif. Si l'ensemble des valeurs propres strictement négatives de multiplicités impaires est non vide, en prenant λ dans $]-\mu_2, -\mu_1[$ (dans $]0, -\mu_1[$ pour $p = 1$), on a $\lambda + \mu_1 < 0$ et $\lambda + \mu_k > 0$ pour k compris entre 2 et p , ce qui donne $\det(\lambda I_n + M) < 0$ qui est impossible. Les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont donc toutes de multiplicité paire.

- (c) S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = e^B$, on a alors $M = A^2$ avec $A = e^{\frac{1}{2}B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont toutes de multiplicité paire.

– V – Une autre preuve de $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$ pour A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. On rappelle que la matrice de permutation associée à une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est la matrice de passage P_σ de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $\mathcal{B}_\sigma = (e_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$. Pour toute matrice $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $P_\sigma^{-1}A = ((a_{\sigma(i),j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ se déduit de A en faisant agir la permutation σ sur les lignes de A et $AP_\sigma = ((a_{i,\sigma(j)}))_{1 \leq i,j \leq n}$ se déduit de A en faisant agir la permutation σ sur les colonnes de A , donc $P_\sigma^{-1}AP_\sigma = ((a_{\sigma(i),\sigma(j)}))_{1 \leq i,j \leq n}$ se déduit de A en faisant agir la permutation σ sur les lignes et les colonnes de A .

- (a) Le choix de la permutation $\sigma = \prod_{k=1}^n \tau_{k,n+k} \in \mathfrak{S}_{2n}$, où $\tau_{i,j}$ désigne la permutation

$$(i, j) \text{ nous donne } P_\sigma^{-1} = P_\sigma \text{ et } P_\sigma \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} P_\sigma = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}, \text{ ce}$$

qui signifie que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$ sont semblables.

- (b) Les égalités :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nous disent que les matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}$ sont semblables.

2. De V.1b on déduit que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ et V.1a nous dit que $\begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ -B & A \end{pmatrix} = \bar{M}$, donc $\chi_M(X) = \chi_{\bar{M}}(X)$ et $\overline{\chi_M(X)} = \overline{\chi_{\bar{M}}(X)} = \chi_{\overline{\bar{M}}}(X) = \chi_M(X)$, ce qui signifie que $\chi_M(X) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

3.

- (a) L'application $\gamma : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix}$ est un $\mathbb{C}$ -automorphisme de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique et l'application $\gamma : Z \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \bar{Z}$ est un $\mathbb{R}$ -automorphisme, donc $\theta = \gamma \circ \varphi$ est un $\mathbb{R}$ -automorphisme. Pour A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X, Y dans $\mathbb{C}^n$, on a :

$$\theta \left(\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \theta \begin{pmatrix} AX + BY \\ -\bar{B}X + \bar{A}Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\bar{X} - A\bar{Y} \\ \bar{A}X + \bar{B}Y \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \left(\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\bar{X} - A\bar{Y} \\ \bar{A}X + \bar{B}Y \end{pmatrix}$$

donc θ commute à $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$.

- (b) Pour tout $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, on a $\theta \circ \theta(Z) = -Z$.
- (c) Pour $Z \neq 0$, on a $\theta(Z) \neq 0$, donc si ces vecteurs sont $\mathbb{C}$ -liés il existe alors un nombre complexe λ tel que $\theta(Z) = \lambda Z$ et en appliquant θ , on a $-Z = \bar{\lambda} \theta(Z) = |\lambda|^2 Z$, soit $(1 + |\lambda|^2)Z = 0$ avec $1 + |\lambda|^2 \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $Z \neq 0$, ce qui est impossible. Donc Z et $\theta(Z)$ sont $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants. Pour tout $U = \lambda Z + \mu \theta(Z) \in \text{Vect}(Z, \theta(Z))$, on a $\theta(U) = \bar{\lambda} \theta(Z) - \bar{\mu} Z \in \text{Vect}(Z, \theta(Z))$, donc $\text{Vect}(Z, \theta(Z))$ est stable par θ .
- (d) Pour tout $U = \lambda Z + \mu \theta(Z) \in E \cap \text{Vect}(Z, \theta(Z))$, on a $\theta(U) = \bar{\lambda} \theta(Z) - \bar{\mu} Z \in E \cap \text{Vect}(Z, \theta(Z))$ (stabilité de E et $\text{Vect}(Z, \theta(Z))$), donc $\bar{\lambda} U - \mu \theta(U) = (|\lambda|^2 + |\mu|^2)Z$ est dans $E \cap \text{Vect}(Z, \theta(Z))$, ce qui pose $\lambda = \mu = 0$ car $Z \notin E$, soit $U = 0$. Les espaces E et $\text{Vect}(Z, \theta(Z))$ sont donc supplémentaires.

4.

- (a) Le polynôme caractéristique de M étant à coefficients réels (question V.2), l'ensemble de ses racines est stable par conjugaison complexe, ce qui signifie que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M , alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de

M avec la même multiplicité. Pour tout $Z \in F_\lambda = \ker(\lambda I_n - M)^{\alpha_\lambda}$, où α_λ est la multiplicité algébrique de $\lambda \in \text{Sp}(M)$, on a $(\lambda I_n - M)(\theta(Z)) = \theta((\bar{\lambda} I_n - M)(Z))$ ($\theta(\lambda Z) = \bar{\lambda} \theta(Z)$ et θ commute à M), donc :

$$0 = (\lambda I_n - M)^{\alpha_\lambda}(\theta(Z)) = \theta((\bar{\lambda} I_n - M)^{\alpha_i}(Z))$$

et $(\bar{\lambda} I_n - M)^{\alpha_i}(Z) = 0$ puisque θ est un $\mathbb{R}$ -automorphisme, ce qui signifie que $Z \in F_{\bar{\lambda}}$. On a donc $\theta(F_\lambda) \subset F_{\bar{\lambda}}$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(M)$. Comme $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de M , on a $\theta(F_{\bar{\lambda}}) \subset F_\lambda = F_{\bar{\bar{\lambda}}}$ et en appliquant θ on en déduit que $F_{\bar{\lambda}} = \theta^2(F_{\bar{\lambda}}) \subset \theta(F_\lambda)$. On a donc l'égalité $\theta(F_\lambda) = F_{\bar{\lambda}}$.

- (b) Pour λ réelle, l'espace F_λ est stable par θ . Supposons que F_λ soit de dimension impaire. Dans ce cas $F_\lambda \neq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ et en prenant un vecteur X_1 dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus F_\lambda$ les espaces F_λ et $P_1 = \text{Vect}(Z_1, \theta(Z_1))$ sont en somme directe et l'espace $F_1 = F_\lambda \oplus P_1$ est stable par θ et distinct de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ puisque de dimension impaire, on peut alors prendre X_2 dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus F_1$ pour aboutir à $F_2 = F_\lambda \oplus P_1 \oplus P_2$ avec P_2 de dimension 2, ce processus peut alors continuer indéfiniment, ce qui est impossible. L'espace F_λ est donc de dimension paire.

5. Le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{pmatrix}$ étant à coefficients réels, il est de la forme :

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \det(XI_{2n} - M) \\ &= \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M) \cap \mathbb{R}} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} (X - \bar{\lambda})^{\alpha_\lambda} \end{aligned}$$

où $\alpha_\lambda = \dim(F_\lambda)$ avec $\alpha_\lambda = 2\beta_\lambda$ pour $\lambda \in \text{Sp}(M) \cap \mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)^{2n} \chi_M(0) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M) \cap \mathbb{R}} (-\lambda)^{\alpha_\lambda} \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})} (-\lambda)^{\alpha_\lambda} (-\bar{\lambda})^{\alpha_\lambda} \\ &= \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M) \cap \mathbb{R}} \lambda^{2\beta_\lambda} \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})} |\lambda|^{2\alpha_\lambda} \geq 0 \end{aligned}$$

Chapitre 13

Géométrie

Exercice 13.1. Coniques et quadriques

Préciser la nature et les éléments caractéristiques des conique C_1, C_2 [resp. quadrique C_3] de $\mathbb{R}^2$ [resp. de $\mathbb{R}^3$] d'équations implicites suivantes :

1. $f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2 - 10x - 4y + 16 = 0$;
2. $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0$;
3. $f_\alpha(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 6yz - 8x + 4y + 8z + \alpha = 0$,
où $\alpha \in \{3, 4, 5\}$.

Solution.

1. On a $f = q + \ell + 16$ où ℓ est la forme linéaire de matrice $(-10, -4)$ et q la forme quadratique de matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ de droite propre dirigée par $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_2 = 6$ de droite propre dirigée par $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc q est non dégénérée et la conique C_1 est à centre. Son centre est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10x + 4y - 10 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $\Omega = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'équation de C_1 dans le repère (Ω, e_1, e_2) est $g(X, Y) = X^2 + 6Y^2 + \lambda = 0$ où $\lambda = f(\Omega) = 11$. En conclusion, C_1 est l'ellipse de centre $\Omega = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'axe focal $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. La courbe C_2 est contenue dans le carré $[0, 1]^2$ et pour $(x, y) \in [0, 1]^2$, on a :

$$\begin{aligned} ((x, y) \in C_2) &\Leftrightarrow (y = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x) \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{x} = 1 + x - y) \Leftrightarrow (4x = (1 + x - y)^2) \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0) \end{aligned}$$

ce qui signifie que C_2 est l'intersection du carré $[0, 1]^2$ avec la conique Γ d'équation $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ de la forme quadratique associée à cette conique a pour valeurs propres $\lambda_1 = 0$ de droite propre dirigée par $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda_2 = 2$ de droite propre dirigée par $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une équation de Γ dans le repère (O, e_1, e_2) est $g(X, Y) = -2\sqrt{2}X + 2Y^2 + 1 = 0$. En conclusion Γ est la parabole de sommet $\Omega = \frac{1}{2\sqrt{2}}e_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'axe focal $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. On a $f = q + \ell + 16$ où ℓ est la forme linéaire de matrice $(-8, 4, 8)$ et q la forme quadratique de matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$ de droite propre dirigée par $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$ de droite propre dirigée par $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda_3 = 6$ de droite propre dirigée par $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc q est non dégénérée et la quadrique C_3 est à centre. Son centre est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 10x - 2y + 2z - 8 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2x + 2y - 6z + 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2x - 6y + 2z + 8 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'équation de C_3 dans le repère (Ω, e_1, e_2, e_3) est $g(X, Y, Z) = -2X^2 + 3Y^2 + 6Z^2 + \lambda = 0$ où $\lambda = f(\Omega) = 4 - \alpha$. En conclusion, C_3 est un hyperboloïde à deux nappes pour $\alpha = 3$, un cône pour $\alpha = 4$ ou un hyperboloïde à une nappe pour $\alpha = 5$.

Exercice 13.2. Nombres complexes et géométrie du triangle

$\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et $T = ABC$ un vrai triangle. $A, B, C, M, \dots$ sont des points de $\mathcal{P}$ et a, b, c, z les affixes respectives dans le plan complexe.

1.

- (a) Montrer qu'un point M de $\mathcal{P}$ est sur la médiane issue de A si, et seulement si, son affixe z est telle que :

$$\det \begin{pmatrix} b+c-2a & \bar{b}+\bar{c}-2\bar{a} \\ z-a & \bar{z}-\bar{a} \end{pmatrix} = 0$$

- (b) Montrer que les médianes de T concourent en G d'affixe $\frac{a+b+c}{3}$.

2.

- (a) Montrer qu'un point M de $\mathcal{P}$ est sur la hauteur issue de A de T si, et seulement si, son affixe z est telle que $(z-a)(\bar{c}-\bar{b})$ (ou de manière équivalente $\frac{z-a}{c-b}$) soit imaginaire pur.

- (b) Montrer que les trois hauteurs de T sont concourantes en H d'affixe

$$h = a + i \frac{\Re \left(\frac{a-b}{c-a} \right)}{\Im \left(\frac{c-b}{c-a} \right)} (c-b).$$

3. Montrer que si ABC est un triangle inscrit dans le cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$, alors l'affixe de son orthocentre est $h = a + b + c$, (Ω étant pris comme origine).

4.

- (a) Montrer que l'aire du triangle T est $m(T) = \pm \frac{1}{2} \Im((b-a)(\bar{c}-\bar{a}))$.

- (b) Montrer que $|m(T)| \leq \frac{1}{2} |b-a| |c-a|$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, le triangle T est rectangle en A .

5. Soient A, B, C trois points deux à deux distincts de $\mathcal{P}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a) le triangle ABC est équilatéral;

- (b) $|b-a| = |c-b| = |c-a|$;

- (c) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$;

- (d) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$;

- (e) j ou $\bar{j}$ est racine de $az^2 + bz + c = 0$ (j et $\bar{j}$ sont les racines cubiques de l'unité);

- (f) j ou $\bar{j}$ est racine de $\det \begin{pmatrix} a & z^2 & 1 \\ b & z & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

Solution.

1.

- (a) La médiane $\mathcal{M}_A$ issue de A est la droite qui joint les points A et le milieu I_A du segment $[BC]$. L'affixe de I_A étant $\frac{b+c}{2}$, une équation de $\mathcal{M}_A$ est :

$$\det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ soit } \det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ \frac{b+c-2a}{2} & \frac{\bar{b}+\bar{c}-2\bar{a}}{2} & 0 \\ z-a & \bar{z}-\bar{a} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{ou encore } \det \begin{pmatrix} b+c-2a & \bar{b}+\bar{c}-2\bar{a} \\ z-a & \bar{z}-\bar{a} \end{pmatrix} = 0.$$

- (b) On constate que $z = \frac{a+b+c}{3}$ est solution de cette équation ($z-a = \frac{1}{3}(b+c-2a)$). Définissant de manière analogue les médianes en B et C , on constate encore que le point M d'affixe $\frac{a+b+c}{3}$ est sur ces médianes.

2.

- (a) Si $M = A$, on a $z = a$ et $(z-a)(\bar{c}-\bar{b}) = 0$ est bien imaginaire pur. Sinon M est sur la hauteur issue de A si, et seulement si les droites (AM) et (BC) sont orthogonales, ce qui équivaut à $(z-a)(\bar{c}-\bar{b})$ imaginaire pur, qui est encore équivalent à dire que $\frac{z-a}{c-b}$ est imaginaire pur.
- (b) Notons respectivement $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_B$ et $\mathcal{T}_C$ les hauteurs issues de A , B et C . Un point M est sur $\mathcal{T}_A \cap \mathcal{T}_B$ si, et seulement si, les quantités $(z-a)(\bar{c}-\bar{b})$ et $(z-b)(\bar{a}-\bar{c})$ sont imaginaires pures, ce qui entraîne que $(z-c)(\bar{b}-\bar{a})$ est aussi imaginaire pur et M est sur $\mathcal{T}_C$. Les trois hauteurs sont donc concourantes. Comme $H \in \mathcal{T}_A \cap \mathcal{T}_B$, il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que :

$$h = a + i\lambda_1(c-b) = b + i\lambda_2(c-a)$$

ce qui entraîne $i\lambda_2 = \frac{a-b}{c-a} + i\lambda_1 \frac{c-b}{c-a}$ et en prenant les parties réelles :

$$0 = \Re\left(\frac{a-b}{c-a}\right) + \lambda_1 \Re\left(i \frac{c-b}{c-a}\right) = \Re\left(\frac{a-b}{c-a}\right) - \lambda_1 \Im\left(\frac{c-b}{c-a}\right)$$

Comme les points C, A, B ne sont pas alignés, $\frac{c-a}{c-b} = \frac{a-c}{b-c}$ n'est pas réel et λ_1 est uniquement déterminé. On a donc :

$$\lambda_1 = \frac{\Re\left(\frac{a-b}{c-a}\right)}{\Im\left(\frac{c-b}{c-a}\right)} = \frac{\Re((a-b)(\overline{c-a}))}{\Im((c-b)(\overline{c-a}))}.$$

$$\text{et } h = a + i \frac{\Re((a-b)(\overline{c-a}))}{\Im((c-b)(\overline{c-a}))} (c-b) = a + i \frac{\Re\left(\frac{a-b}{c-a}\right)}{\Im\left(\frac{c-b}{c-a}\right)} (c-b).$$

3. On désigne par M le point d'affixe $h = a + b + c$. Comme $h - a = b + c$ avec $|b| = |c| = R$, on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$ et ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega C}$, $((\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}) \cdot (\overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega C}) = \Omega B^2 - \Omega C^2 = R^2 - R^2 = 0)$, ce qui équivaut à dire que $(h - a)(\overline{b - c})$ est imaginaire pur, soit que $M \in \mathcal{T}_A$. On montre de manière analogue que M est sur $\mathcal{T}_B$ et $\mathcal{T}_C$, donc c'est l'orthocentre de T .

4.

- (a) On rappelle que l'aire d'un triangle $T = ABC$ est :

$$\begin{aligned} m(T) &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right| \end{aligned}$$

En écrivant que :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on déduit que :

$$m(T) = \left| \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Ce qui s'écrit en utilisant les affixes, $m(T) = \pm \frac{1}{4i} \det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{pmatrix}$. En

effet, en tenant compte de $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ pour tout point $M(x, y)$ d'affixe z , on a :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a + \bar{a}) & \frac{1}{2i}(a - \bar{a}) & 1 \\ \frac{1}{2}(b + \bar{b}) & \frac{1}{2i}(b - \bar{b}) & 1 \\ \frac{1}{2}(c + \bar{c}) & \frac{1}{2i}(c - \bar{c}) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4i} \det \begin{pmatrix} a + \bar{a} & a - \bar{a} & 1 \\ b + \bar{b} & b - \bar{b} & 1 \\ c + \bar{c} & c - \bar{c} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4i} \det \begin{pmatrix} 2a & a - \bar{a} & 1 \\ 2b & b - \bar{b} & 1 \\ 2c & c - \bar{c} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \det \begin{pmatrix} a & a - \bar{a} & 1 \\ b & b - \bar{b} & 1 \\ c & c - \bar{c} & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2i} \det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b-a & \bar{b}-\bar{a} & 0 \\ c-a & \bar{c}-\bar{a} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} b-a & \bar{b}-\bar{a} \\ c-a & \bar{c}-\bar{a} \end{pmatrix} \\ &= (b-a)(\bar{c}-\bar{a}) - (\bar{b}-\bar{a})(c-a) = 2i\Im((b-a)(\bar{c}-\bar{a}))\end{aligned}$$

$$\text{on obtient } m(T) = \pm \frac{1}{2} \Im((b-a)(\bar{c}-\bar{a})).$$

(b) On a $m(T) = |m(T)| = \left| \pm \frac{1}{2} \Im((b-a)(\bar{c}-\bar{a})) \right| \leq \frac{1}{2} |b-a| |c-a|$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $(b-a)(\bar{c}-\bar{a})$ est imaginaire pur, ce qui équivaut à dire que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

5. L'équivalence entre (a) et (b) résulte de la définition d'un triangle équilatéral. Supposant que $|a-b| = |b-c| = |c-a|$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b} &= \frac{\bar{a}-\bar{b}}{|a-b|^2} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{|b-c|^2} = \frac{1}{b-c} \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{b}-\bar{c}} \\ &= \frac{1}{b-c} \frac{\bar{a}-\bar{c}+\bar{c}-\bar{b}}{\bar{b}-\bar{c}} = \frac{1}{b-c} \left(\frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} - 1 \right)\end{aligned}$$

avec $\frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} = \frac{b-c}{a-c}$ puisque $\left| \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} \right| = \left| \frac{a-c}{b-c} \right| = 1$, donc :

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{b-c} \left(\frac{b-c}{a-c} - 1 \right) = \frac{1}{b-c} \frac{b-c}{a-c} - \frac{1}{b-c} = \frac{1}{a-c} - \frac{1}{b-c}$$

et $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$. Supposant cette dernière identité réalisée, on a en multipliant par $(a-b)(b-c)(c-a)$:

$$(b-c)(c-a) + (a-b)(c-a) + (a-b)(b-c) = 0$$

et en développant, cela est équivalent à $ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2 = 0$. En supposant cette identité vérifiée, on a :

$$(aj^2 + bj + c)(\bar{a}\bar{j}^2 + \bar{b}\bar{j} + c) = a^2 + b^2 + c^2 + (j + \bar{j})ab + (j^2 + \bar{j}^2)ac + (j + \bar{j})bc$$

avec $j^2 + \bar{j}^2 = \bar{j} + j = -1$, ce qui donne $(aj^2 + bj + c)(\bar{a}\bar{j}^2 + \bar{b}\bar{j} + c) = 0$ et j ou $\bar{j}$ est racine de $az^2 + bz + c = 0$. Supposons que j soit racine de $az^2 + bz + c = 0$. Tenant compte de $1 + j + j^2 = 0$, on a alors :

$$0 = aj^2 + bj + c = aj^2 + bj - c(j + j^2) = (b-c)j + (a-c)j^2$$

et $(b-c)j = -(a-c)j^2$ qui entraîne $|b-c| = |c-a|$. On peut aussi écrire :

$$0 = aj^2 + bj + c = aj^2 - b(1 + j^2) + c = (c-b) + (a-b)j^2$$

et on a $(c-b) = -(a-b)j^2$ qui entraîne $|a-b| = |c-b|$. L'équivalence entre (e) et (f) se déduit du calcul suivant. Pour $z = j$ ou $z = \bar{j} = j^2$, on a :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & z^2 & 1 \\ b & z & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a-b & z^2-z & 0 \\ b-c & z-1 & 0 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a-b & z^2-z & 0 \\ b-c & z-1 & 0 \\ 0 & 1-z & 1 \end{pmatrix} \\ &= az + b + cz^2 - (a + bz^2 + cz) \\ &= \bar{z}(az^2 + bz + c) - z(az^2 + bz + c) \\ &= (z - \bar{z})(az^2 + bz + c) = 2i\Im(z)(az^2 + bz + c). \end{aligned}$$

Exercice 13.3. Un théorème de Ptolémée

L'étude des lignes de niveau de la fonction :

$$f : z \mapsto \arg \left(\frac{a-z}{b-z} \right) \pmod{\pi}$$

nous donne un critère de cocyclicité de 4 points du plan.

1. *En utilisant les nombres complexes, montrer que si A, B sont deux points distincts dans le plan $\mathcal{P}$ et λ un réel, alors l'ensemble :*

$$\mathcal{E}_\lambda = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \mid (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \lambda \pmod{\pi} \right\}$$

est :

- *la droite (AB) privée des points A et B si $\lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$;*
- *le cercle de centre Ω d'affixe $\frac{a+b}{2} - i \cotan(\lambda) \frac{b-a}{2}$ et de rayon $\frac{1}{|\sin(\lambda)|} \left| \frac{b-a}{2} \right|$ privé des points A et B si $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.*

2. *En déduire que des points deux à deux distincts A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si, et seulement si, $\frac{c-b}{c-a} \frac{d-a}{d-b}$ est réel.*
3. *Soient A, B, C, D des points deux à deux distincts. Montrer que le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si, et seulement si, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ (le produit des diagonales est égal à la somme des produits des cotés opposés).*

Solution.

1. On désigne par $\mathcal{E}_\lambda$ l'ensemble de nombres complexes défini par :

$$\mathcal{E}_\lambda = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \mid \arg \left(\frac{a-z}{b-z} \right) \equiv \lambda \pmod{\pi} \right\}$$

Les points M, A, B sont alignés si, et seulement si, $\arg \left(\frac{a-z}{b-z} \right) \equiv 0 \pmod{\pi}$, donc pour $\lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$, $\mathcal{E}_\lambda$ est la droite (AB) privée des points A et B .

En désignant par θ un argument de $\frac{a-z}{b-z}$, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\arg \left(\frac{a-z}{b-z} \right) \equiv \lambda \pmod{\pi} \right) &\Leftrightarrow (\theta - \lambda \equiv 0 \pmod{\pi}) \Leftrightarrow (\sin(\theta - \lambda) = 0) \\ &\Leftrightarrow \sin(\theta) \cos(\lambda) - \cos(\theta) \sin(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

et pour λ non congru à 0 modulo π , on a :

$$(z \in E_\lambda) \Leftrightarrow (\sin(\theta) \cotan(\lambda) - \cos(\theta) = 0)$$

ou encore en utilisant l'écriture polaire :

$$\frac{a-z}{b-z} = \rho e^{i\theta} = \rho (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

$$(z \in E_\lambda) \Leftrightarrow \left(\cotan(\lambda) \Im \left(\frac{a-z}{b-z} \right) - \Re \left(\frac{a-z}{b-z} \right) = 0 \right)$$

ce qui peut encore s'écrire, compte tenu de :

$$\Im \left(\frac{a-z}{b-z} \right) = \frac{\Im((a-z)(\bar{b}-\bar{z}))}{|b-z|^2} \text{ et } \Re \left(\frac{a-z}{b-z} \right) = \frac{\Re((a-z)(\bar{b}-\bar{z}))}{|b-z|^2}$$

$$(z \in E_\lambda) \Leftrightarrow (\cotan(\lambda) \Im((a-z)(\bar{b}-\bar{z})) - \Re((a-z)(\bar{b}-\bar{z})) = 0)$$

Il est alors judicieux de placer l'origine au milieu de $[AB]$, ce qui revient à effectuer le changement de variable $z = \frac{a+b}{2} + t$ avec $t \notin \{-c, c\}$, où $c = \frac{b-a}{2}$, puisque $z \notin \{a, b\}$, ce qui donne :

$$(a-z)(\bar{b}-\bar{z}) = (c+t)(\bar{t}-\bar{c}) = c\bar{t} - \bar{c}t + |t|^2 - |c|^2 = 2i\Im(c\bar{t}) + |t|^2 - |c|^2$$

et $\Im((a-z)(\bar{b}-\bar{z})) = 2\Im(c\bar{t}) = 2\Re\{-ict\} = \Re(\beta\bar{t})$ avec $\beta = -2ic\bar{t}$ et $\Re((a-z)(\bar{b}-\bar{z})) = |t|^2 - |c|^2$. En définitive, notant $\mu = \cotan(\lambda)$, une équation de E_λ est $\mu 2\Im(c\bar{t}) - |t|^2 + |c|^2 = 0$, ou encore $t\bar{t} + 2\Re(i\mu c\bar{t}) - |c|^2 = 0$, soit en posant $\beta = i\mu c$, $t\bar{t} + \beta\bar{t} + \bar{\beta}t - |c|^2 = 0$ avec $|\beta|^2 - (-|c|^2) = (1 + \mu^2)|c|^2 > 0$. On reconnaît là l'équation complexe d'un cercle de centre $\omega' = -\beta$ et de rayon $R = \sqrt{|\beta|^2 + |c|^2} = \sqrt{1 + \mu^2}|c|$. L'ensemble E_λ est donc le cercle de centre Ω d'affixe :

$$\omega = \frac{a+b}{2} + \omega' = \frac{a+b}{2} - i \cotan(\lambda) \frac{b-a}{2}$$

$$(|t - \omega'| = R \Leftrightarrow \left| z - \frac{a+b}{2} - \omega' \right| = R) \text{ et de rayon :}$$

$$R = \sqrt{1 + \cotan^2(\lambda)} \left| \frac{b-a}{2} \right| = \frac{1}{|\sin(\lambda)|} \left| \frac{b-a}{2} \right|.$$

privé des points A et B . Les points A et B sont bien sur le cercle puisque :

$$|a - \omega| = |b - \omega| = \left| \frac{b-a}{2} \right| |1 + i \cotan(\lambda)| = R$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{c-b}{c-a} \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \right) &\Leftrightarrow \left(\arg \left(\frac{c-b}{c-a} \frac{d-a}{d-b} \right) \equiv 0 \pmod{\pi} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\arg \left(\frac{d-b}{d-a} \right) \equiv \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \pmod{\pi} \right) \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas de figure. Soit A, B, C sont alignés et dans ce cas $\arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv 0 \pmod{\pi}$, de sorte que :

$$\left(\frac{c-b}{c-a} \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \right) \Leftrightarrow \left(\arg \left(\frac{d-b}{d-a} \right) \equiv 0 \pmod{\pi} \right) \Leftrightarrow (A, B, C, D \text{ alignés})$$

Soit A, B, C ne sont pas alignés et dans ce cas $\arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv \lambda \pmod{\pi}$ avec λ non congru à 0 modulo π , de sorte que :

$$\left(\frac{c-b}{c-a} \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \right) \Leftrightarrow \left(\arg \left(\frac{d-b}{d-a} \right) \equiv \lambda \pmod{\pi} \right) \Leftrightarrow (A, B, C, D \text{ cocycliques})$$

3. Dans tous les cas, on a :

$$\begin{aligned} AC \cdot BD &= |(c-a)(d-b)| \\ &= |(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)| \\ &\leq |(b-a)(d-c)| + |(d-a)(c-b)| = AB \cdot CD + AD \cdot BC \end{aligned}$$

(inégalité de Ptolémée) avec égalité si, et seulement si, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b)$, ce qui équivaut à $\frac{b-a}{d-a} \frac{d-c}{b-c} = -\lambda < 0$ qui est encore équivalent à $\arg \left(\frac{b-a}{d-a} \frac{d-c}{b-c} \right) \equiv \pi \pmod{2\pi}$ ou à :

$$\arg \left(\frac{b-a}{d-a} \right) - \arg \left(\frac{b-c}{d-c} \right) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

et entraîne $\arg \left(\frac{b-a}{d-a} \right) \equiv \arg \left(\frac{b-c}{d-c} \right) \pmod{\pi}$, soit $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \pmod{\pi}$ et A, B, C, D sont cocycliques. Réciproquement si ces points sont cocycliques, on a alors $\arg \left(\frac{b-a}{d-a} \right) \equiv \arg \left(\frac{b-c}{d-c} \right) \pmod{\pi}$, donc $\mu = \frac{b-a}{d-a} \frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$. Si $\mu > 0$, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \pmod{2\pi}$ et les points A, C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (BD) , ce qui contredit le fait que $ABCD$ est convexe. On a donc $\mu < 0$ et $(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b)$ avec $\lambda > 0$, ce qui entraîne l'égalité dans l'inégalité de Ptolémée.

Exercice 13.4. Puissance d'un point par rapport à une sphère

$\mathcal{E}_n$ est un espace affine euclidien de dimension $n \geq 2$. Pour $\Omega \in \mathcal{E}_n$ et $R > 0$, on note $S(\Omega, R)$ la sphère de centre Ω et de rayon R . On dit qu'un point $M \in \mathcal{E}_n$ est intérieur [resp. extérieur] à $S(\Omega, R)$ si $\Omega M < R$ [resp. $\Omega M > R$]. On dit que deux points A, A' d'une sphère $S(\Omega, R)$ sont diamétralement opposés si $\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega A'} = \vec{0}$, dans ce cas, on dit que $[A, A']$ est un diamètre de $S(\Omega, R)$.

1. Soient A, A' deux points diamétralement opposés d'une sphère $S(\Omega, R)$.

Montrer que $S(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{E}_n \mid \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0\}$.

2. Montrer que, pour toute droite $\mathcal{D}$ de l'espace $\mathcal{E}_n$, on a :

$$S(\Omega, R) \cap \mathcal{D} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } d(\Omega, \mathcal{D}) > R \\ \{H\} & \text{si } d(\Omega, \mathcal{D}) = R \\ \{A, B\} & \text{avec } A \neq B, \text{ si } d(\Omega, \mathcal{D}) < R \end{cases}$$

où $d(\Omega, \mathcal{D})$ est la distance du point Ω à la droite $\mathcal{D}$ et H la projection orthogonale de Ω sur $\mathcal{D}$.

3. Soit $\mathcal{D}$ une droite coupant $S(\Omega, R)$ en un unique point H , montrer que la droite (Ω, H) est orthogonale à $\mathcal{D}$.

4. Soient M un point de $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}_n$ passant par M et coupant la sphère $S = S(\Omega, R)$ en deux points A, B (distincts ou confondus). Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = M\Omega^2 - R^2$. Cette quantité étant indépendante de la droite $\mathcal{D}$ passant par M et coupant S , on la note $p_S(M)$ et on dit que c'est la puissance du point M par rapport à la sphère S .

5. Donner une expression analytique de $p_S(M)$ dans un repère orthonormé.

6. On suppose que $n = 2$.

(a) Retrouver le résultat de 4 en utilisant les nombres complexes.

(b) Soient $A \neq B, C \neq D$ dans $\mathcal{E}_2$ tels que les droites (A, B) et (C, D) se coupent en un unique point M . Montrer que ces quatre points sont cocycliques si, et seulement si, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.

7. Soient $S = S(\Omega, R)$ et $S' = S(\Omega', R')$ deux sphères non concentriques. Montrer que $\mathcal{H}_{S, S'} = \{M \in \mathcal{E}_n \mid p_S(M) = p_{S'}(M)\}$ est un hyperplan orthogonal à la droite (Ω, Ω') ($\mathcal{H}_{S, S'}$ est l'hyperplan radical de S et S').

Solution.

1. Pour tout point $M \in \mathcal{E}_n$, on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \frac{1}{4} \left(\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}\|^2 - \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA'}\|^2 \right)$$

avec $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{M\Omega}$ et $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{A'A} = 2\overrightarrow{\Omega A}$, ce qui nous donne $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = M\Omega^2 - R^2$ et :

$$(M \in S(\Omega, R)) \Leftrightarrow (\Omega M = R) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0)$$

(figure 13.1). En notant $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ les coordonnées d'un point de $\mathcal{E}_n$ dans un

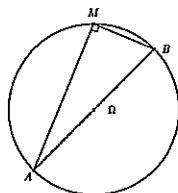


FIGURE 13.1 – Sphère de diamètre $[A, A']$

repère orthonormé, on en déduit une équation de la sphère de diamètre $[A, A']$:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - a_k)(x_k - a'_k) = 0$$

2. En désignant par H la projection orthogonale du point Ω sur la droite $\mathcal{D}$, on a $\Omega H = d(\Omega, \mathcal{D}) = \inf_{M \in \mathcal{D}} \Omega M$ et $\overrightarrow{\Omega H} \in \mathcal{D}^\perp$.

- (a) Si $S(\Omega, R) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$, en désignant par A un point de cette intersection, on a alors $d(\Omega, \mathcal{D}) \leq \Omega A = R$, donc $S(\Omega, R) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$.
- (b) Si $\Omega H = d(\Omega, \mathcal{D}) = R$, on a alors $H \in S(\Omega, R) \cap \mathcal{D}$ et pour tout autre point A de cette intersection, on a $R^2 = \Omega A^2 = \Omega H^2 + HA^2 = R^2 + HA^2$, donc $A = H$, donc $S(\Omega, R) \cap \mathcal{D}$ est réduite à $\{H\}$ si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$.
- (c) Enfin dans le cas où $\Omega H = d(\Omega, \mathcal{D}) < R$, on a :

$$\begin{aligned} (M \in S(\Omega, R) \cap \mathcal{D}) &\Leftrightarrow (\Omega M = R \text{ et } M \in \mathcal{D}) \\ &\Leftrightarrow (\Omega M = R \text{ et } \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{\Omega H} = 0) \\ &\Leftrightarrow (\Omega M = R \text{ et } \Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2) \\ &\Leftrightarrow (M \in \mathcal{D} \text{ et } HM^2 = R^2 - \Omega H^2) \end{aligned}$$

avec $R^2 - \Omega H^2 > 0$, ce qui donne deux points distincts sur la droite $\mathcal{D}$.

- 3. Si l'intersection $S(\Omega, R) \cap \mathcal{D}$ est réduite à un point, on a vu que ce point H la projection orthogonale de Ω sur $\mathcal{D}$, donc la droite (Ω, H) est orthogonale à $\mathcal{D}$.
- 4. On désigne par A' le point de S diamétralement opposé au point A . Comme $[A, A']$ est un diamètre de S et $B \in S$, on a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA'} = 0$. Dans le cas où $B \neq A$, le vecteur $\overrightarrow{BA}$ dirige la droite $\mathcal{D}$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA'} = \lambda \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA'} = 0$ pour

$M \in \mathcal{D}$. Dans le cas où $B = A$, $S(\Omega, R) \cap \mathcal{D}$ est réduite au point $\{A\}$, donc la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à la droite $(\Omega, A) = (A, A')$ et on a encore $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$. Dans tous les cas, on a peut écrire que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA'}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A'}) \\ &= (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A}) = M\Omega^2 - \Omega A^2 = M\Omega^2 - R^2\end{aligned}$$

(figure 13.2). On peut remarquer que le signe de $p_S(M)$ peut être utilisé pour

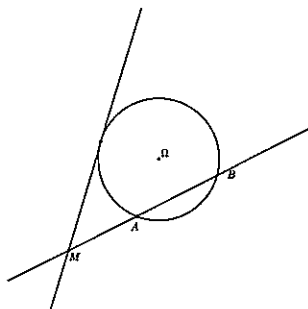


FIGURE 13.2 – $p_S(M)$

préciser la position du point M par rapport à la sphère S : $p_S(M) = 0$ équivaut à $M \in S$; $p_S(M) > 0$ équivaut à dire que M est à l'extérieur de S ; $p_S(M) < 0$ équivaut à dire que M est à l'intérieur de S .

5. Dans un repère orthonormé, la sphère S a pour équation $\sum_{k=1}^n (x_k - \omega_k)^2 = R^2$

et on a $p_S(M) = M\Omega^2 - R^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \omega_k)^2 - R^2$.

6.

- (a) Dans le plan complexe, une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par M d'affixe z est $t = z + \lambda u$ où u est un nombre complexe de module égal à 1 et λ décrit $\mathbb{R}$. Dire que $t = z + \lambda u \in \mathcal{D}$ est sur $S(\Omega, R)$ équivaut à dire que :

$$\begin{aligned}0 &= |z + \lambda u|^2 - R^2 = (z + \lambda u)(\bar{z} + \lambda \bar{u}) - R^2 \\ &= \lambda^2 + 2\Re(u)\lambda + |z|^2 - R^2\end{aligned}$$

Dans le cas où $\mathcal{D} \cap S(\Omega, R) = \{A, B\}$, cette équation de degré 2 a deux solutions réelles α, β et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \Re((z - a)(\bar{z} - \bar{b})) = \Re(\alpha u \beta \bar{u}) \\ &= \alpha \beta = |z|^2 - R^2 = M\Omega^2 - R^2\end{aligned}$$

(b) Si les quatre points sont sur un même cercle $\mathcal{C}$, on a alors :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = p_{\mathcal{C}}(M) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$$

Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ avec $A \neq B$, $C \neq D$ et $(A, B) \cap (C, D) = \{M\}$. Avec ces hypothèses, on peut supposer les points A, B, C non alignés et on désigne par $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC . Comme $M \in (A, B)$ et $C \notin (A, B)$, on a $C \neq M$ et la droite (M, C) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en C et C' . On a alors :

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC'} = p_{\mathcal{C}}(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$$

et $0 = \overrightarrow{MC} \cdot (\overrightarrow{MC'} - \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DC'}$, le vecteur $\overrightarrow{DC'} \in (M, C)$ étant colinéaire à $\overrightarrow{MC}$. On a donc $\overrightarrow{DC'} = \lambda \overrightarrow{MC}$ et $0 = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DC'} = \lambda MC^2$ avec $MC \neq 0$, ce qui nous donne $\lambda = 0$ et $\overrightarrow{DC'} = \vec{0}$, soit $D = C' \in \mathcal{C}$. En définitive, les quatre points A, B, C, D sont sur le même cercle $\mathcal{C}$.

7. Pour $M \in \mathcal{E}_n$, l'égalité $p_S(M) = p_{S'}(M)$ équivaut à $M\Omega^2 - M\Omega'^2 = R^2 - R'^2$. En désignant par I le milieu du segment $[\Omega, \Omega']$, on a :

$$M\Omega^2 - M\Omega'^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IO}) = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IO}$$

donc :

$$(M \in \mathcal{H}_{S, S'}) \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IO} = R^2 - R'^2)$$

ce qui définit un hyperplan de direction $(\mathbb{R} \cdot \overrightarrow{IO})^\perp$.

Problème 13.1. Ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$. Théorèmes de F. John et C. Loewner

Pour tout entier $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure canonique d'espace euclidien. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité correspondante.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{Q}^{++}(\mathbb{R}^n)$ les ensembles respectivement formés des matrices symétriques réelles d'ordre n , des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre n , des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ et des formes quadratiques définies positives sur $\mathbb{R}^n$.

L'espace vectoriel $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ est muni de la norme N définie par $N(q) = \sup_{x \in B_n} |q(x)|$ pour toute forme quadratique q ($\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ est de dimension finie égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, donc toutes les normes sur cet espace sont équivalentes).

- I - Théorème de C. Loewner

On appelle ellipsoïde (centré en 0) toute partie de $\mathbb{R}^n$ de la forme :

$$\mathcal{E}(q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 1\}$$

où $q \in \mathcal{Q}^{++}(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que, pour toute matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. On note $B = \sqrt{A}$.
2. Soient $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ de matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{E}(q)$ l'ellipsoïde correspondant.

- (a) Montrer que $\mathcal{E}(q) = \sqrt{A^{-1}}(\mathcal{B}_n)$.
- (b) Montrer que le volume de $\mathcal{E}(q)$ est :

$$V(q) = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} = \frac{V_n}{\sqrt{\prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}} = \frac{V_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} dx$$

où V_n est le volume de $\mathcal{B}_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres distinctes ou confondues de A (voir l'exercice 5.8 pour une expression de V_n).

- (c) En utilisant une expression réduite de q dans une base orthonormée de la forme $q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2}$, donner une expression de $V(q)$ (voir l'exercice 5.8).
- (d) Préciser $V(q)$ pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. Soient q, q' deux formes quadratiques définies positives de matrices respectives A, A' dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour $q \leq q'$, on a $\mathcal{E}(q') \subset \mathcal{E}(q)$ et $\det(A) \leq \det(A')$.
4. Montrer que :

- (a) l'ensemble $Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert convexe de $Q(\mathbb{R}^n)$;
- (b) l'application $V : q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n) \mapsto V(q) \in \mathbb{R}^{+,*}$ est continue et strictement convexe.

5. Étant donné un compact K d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathcal{Q}(K)$ l'ensemble des formes quadratiques positives q telles que $K \subset \mathcal{E}(q)$, en notant encore $\mathcal{E}(q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 1\}$ pour une forme quadratique positive q (cette généralisation est justifiée par le fait que l'ensemble des formes quadratiques positives est fermé alors que l'ensemble des formes quadratiques définies positives ne l'est pas).

- (a) Montrer que $\mathcal{Q}(K)$ contient des formes quadratiques définies positives.
- (b) Montrer que $\mathcal{Q}(K)$ est non vide, convexe et compact dans l'espace normé $(Q(\mathbb{R}^n), N)$.
- (c) Montrer qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}(q_0)$ de volume minimum qui contient K (théorème de Loewner).
- (d) Montrer que cet ellipsoïde $\mathcal{E}(q_0)$ est unique.

- II - Jauge d'un convexe compact et théorème de F. John

Pour toute partie non vide E de $\mathbb{R}^n$ et tout réel λ , on note $\lambda E = \{\lambda x \mid x \in E\}$ l'image de E par l'homothétie de centre 0 et de rapport λ .

Pour cette partie, on se donne un convexe compact K dans $\mathbb{R}^n$ qui contient 0 dans son intérieur et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note $I_K(x) = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid x \in \lambda K\}$.

1. Montrer que $I_K(0) = \mathbb{R}^+$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'ensemble $I_K(x)$ est un intervalle fermé non majoré de $\mathbb{R}^{+,*}$. En notant $j_K(x) = \inf(I_K(x))$, on a $I_K(x) = [j_K(x), +\infty[$ avec $j_K(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$. La fonction $j_K : K \rightarrow \mathbb{R}^+$ est la jauge du convexe K .

2. Expliciter j_K dans les cas suivants :

- (a) $K = \mathcal{E}(q)$ est un ellipsoïde;
- (b) $\|\cdot\|'$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et K est la boule unité de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$;
- (c) K est un parallélogramme dans le plan $\mathbb{R}^2$ de centre 0.

3. En notant $\partial K = K \setminus \overset{\circ}{K}$ la frontière de K , montrer que :

$$(x \in K) \Leftrightarrow (j_K(x) \leq 1) \text{ et } (x \in \partial K) \Leftrightarrow (j_K(x) = 1)$$

4. Montrer que, pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on a $j_K(\lambda x) = \lambda j_K(x)$ et $j_K(x+y) \leq j_K(x) + j_K(y)$.

5. Dans l'hypothèse où $K = -K$, montrer que j_K est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

6. Dédurre de ce qui précède qu'un convexe compact d'intérieur non vide et symétrique (i.e. tel que $K = -K$) de $\mathbb{R}^n$ est la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour une certaine norme, sa frontière étant la sphère unité.

7. On note $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in K, \langle x, y \rangle \leq 1\}$.

(a) Montrer que K^* est un convexe compact qui contient 0 dans son intérieur.

(b) Montrer que $j_{K^*}(y) = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

(c) Montrer que, pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $(A(K))^* = {}^t A^{-1}(K^*)$.

(d) Expliciter K^* et j_{K^*} pour chacun des cas suivants : $K = \mathcal{B}_n$, $K = \mathcal{E}(q)$ est un ellipsoïde, $K = \left\{ (x_i) \in \mathbb{R}^n \mid \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq 1 \right\}$, K est un parallélogramme dans le plan $\mathbb{R}^2$ de centre 0.

(e) Dans l'hypothèse où $K = -K$, montrer que j_{K^*} est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Que dire des espaces normés $(\mathbb{R}^n, j_K)$ et $(\mathbb{R}^n, j_{K^*})$?

8. On suppose que $K = -K$ et, pour tout réel $\mu > 0$, on désigne par $\mathcal{Q}(K, \mu)$ l'ensemble des formes quadratiques définies positives q telles que $\mathcal{E}(q) \subset K$ et $V(q) \geq \mu$, où $V(q)$ est le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E}(q)$.

(a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A(\mathcal{B}_n) \subset K\}$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, l'ensemble :

$$\mathcal{M}(K, \lambda) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A(\mathcal{B}_n) \subset K \text{ et } \det(A) \geq \lambda\}$$

est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que pour tout réel $\mu > 0$, l'ensemble $\mathcal{Q}(K, \mu)$ est un compact de $Q^{++}(\mathbb{R}^n)$.

(d) Dédurre de ce qui précède qu'il existe un unique ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ inclus dans K et de volume maximum (théorème de John).

- III - Théorème de Brunn et Minkowski

Soient K_0, K_1 deux parties compactes de $\mathbb{R}^n$ non nécessairement convexes. On note $K_0 + K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (k_0, k_1) \in K_0 \times K_1, x = k_0 + k_1\}$. Le but de cette partie est de montrer l'inégalité suivante (théorème de Brunn-Minkowski) :

$$\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n} \leq \text{vol}(K_0 + K_1)^{1/n}. \quad (13.1)$$

où on a noté $\text{vol}(K_0)$ le volume d'un compact K .

On admettra pour la suite que l'égalité ne se produit que dans les cas suivants : soit $\text{vol}(K_0) = \text{vol}(K_1) = 0$, soit l'un des compacts est réduit à un point, soit K_0 et K_1 sont images l'un de l'autre par une homothétie affine ou une translation.

Pour $a = (a_k)_{1 \leq k \leq n}$, $b = (b_k)_{1 \leq k \leq n}$ dans $\mathbb{R}^n$, on note $P(a, b) = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$.

On appelle standard un pavé de cette forme et d'intérieur non vide.

1. On suppose que $K_0 = \bigcup_{i=1}^{n_0} P(a^{(i)}, b^{(i)})$, $K_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} P(c^{(i)}, d^{(i)})$ sont chacun réunions finies de pavés standard d'intérieurs disjoints et on se propose de montrer par récurrence sur $n_0 + n_1$ que l'inégalité (13.1) est valable pour K_0 et K_1 .

- (a) Établir l'inégalité (13.1) dans le cas où K_0 et K_1 sont des pavés standard (i.e. $n_0 = n_1 = 1$) en précisant le cas d'égalité (on pourra commencer par diviser par $\text{vol}(K_0 + K_1)^{1/n}$).
- (b) Pour n_0 et n_1 quelconques avec $n_0 \geq 2$, trouver un entier compris k entre 1 et n ainsi que deux réels t et u de sorte que chacun des demi-espaces $x_k \geq t$ et $x_k \leq t$ contienne l'un des pavés constituant K_0 et que l'hyperplan $x_k = u$ partage K_1 suivant les mêmes proportions que le fait $x_k = t$ avec K_0 :

$$\frac{\text{vol}(K_0 \cap \{x_k \leq t\})}{\text{vol}(K_0 \cap \{x_k \geq t\})} = \frac{\text{vol}(K_1 \cap \{x_k \leq u\})}{\text{vol}(K_1 \cap \{x_k \geq u\})}.$$

- (c) Établir l'inégalité (13.1) dans le cas où K_0 et K_1 sont des réunions finies de pavés standard d'intérieurs disjoints.

2. En déduire le théorème de Brunn-Minkowski.

Solution.

- I - Théorème de C. Loewner

1. Une matrice réelle symétrique définie positive a toutes ses valeurs propres réelles strictement positives et se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D de termes diagonaux tous strictement positifs telles que $A = PD^tP$. La matrice D peut s'écrire $D = \Delta^2$ avec Δ diagonale de termes diagonaux tous strictement positifs et en posant $B = P\Delta^tP$, on a $A = B^2$ avec B symétrique définie positive. En notant φ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $\varphi(\lambda) = \sqrt{\lambda}$

pour toute valeur propre λ de A (φ est de degré $p-1$ où p est le nombre de valeurs propres distinctes de A), on a $\varphi(A) = P\varphi(D) {}^tP = P\Delta {}^tP = B$, ce qui signifie B est polynomiale en A . Si $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une autre racine carrée de A , on a alors $C^2 = A$ et C commute avec A , donc avec B qui est polynomiale en A . En définitive les matrices B et C commutent et sont symétriques, donc elles sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que $C = Q\Gamma {}^tQ$ et $B = Q\Lambda {}^tQ$ avec Γ et Λ diagonales à coefficients réels strictement positifs. De $C^2 = A = B^2$, on déduit alors que $\Gamma^2 = \Lambda^2$ et $\Gamma = \Lambda$ du fait que ces matrices sont diagonales à coefficients réels positifs. En conclusion, on a $B = C$.

2.

- (a) La matrice $B = \sqrt{A}$ étant symétrique, on a $A = B^2 = {}^tBB$, ce qui nous donne pour tout $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$:

$$q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \langle x, Ax \rangle = \langle x, {}^tBBx \rangle = \|Bx\|^2$$

donc :

$$(x \in \mathcal{E}(q)) \Leftrightarrow (q(x) \leq 1) \Leftrightarrow (\|Bx\| \leq 1) \Leftrightarrow (Bx \in \mathcal{B}_n) \Leftrightarrow (x \in B^{-1}(\mathcal{B}_n))$$

ce qui signifie que $\mathcal{E}(q) = B^{-1}(\mathcal{B}_n) = (\sqrt{A})^{-1}(\mathcal{B}_n) = \sqrt{A^{-1}}(\mathcal{B}_n)$.

(b)

- i. Le volume de $\mathcal{E}(q)$ est $V(q) = \int_{\mathcal{E}(q)} dx_1 \cdots dx_n$ où $\mathcal{E}(q) = \sqrt{A^{-1}}(\mathcal{B}_n)$.

Le changement de variable $x = \sqrt{A^{-1}}y$ nous donne :

$$\begin{aligned} V(q) &= \int_{\mathcal{B}_n} \left| \det(\sqrt{A^{-1}}) \right| dy_1 \cdots dy_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \int_{\mathcal{B}_n} dy_1 \cdots dy_n = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} \end{aligned}$$

En effet, on a $\det(A) = (\det(\sqrt{A}))^2$ avec $\det(\sqrt{A}) > 0$, donc $\det(\sqrt{A^{-1}}) = \det((\sqrt{A})^{-1}) = \frac{1}{\det(\sqrt{A})}$. Ce qui nous donne

$$V(q) = \frac{V_n}{\sqrt{\prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}}.$$

- ii. En écrivant que $A = PD {}^tP$ où P est orthogonale et D diagonale de termes diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, le changement de variable $x = Py$ nous

donne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x|Ax\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle {}^tPx|D{}^tPx\rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle y|Dy\rangle} |\det(P)| dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle y|Dy\rangle} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i y_i^2\right) dy\end{aligned}$$

soit en faisant le changement de variables $z = (\sqrt{\lambda_1}y_1, \dots, \sqrt{\lambda_n}y_n)$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} dx &= \frac{1}{\sqrt{\prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{1 \leq i \leq n} z_i^2\right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} e^{-z_i^2}\right) dz_1 \cdots dz_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}} \prod_{1 \leq i \leq n} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2} dz_i = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}\end{aligned}$$

$$\text{et } V(q) = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} = \frac{V_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} dx.$$

- (c) On peut remarquer que si A' est la matrice de q dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on a alors $A' = {}^tPAP$ avec P orthogonale et $\det(A') = (\det(P))^2 \det(A) = \det(A)$, donc ce déterminant (le discriminant de q) ne dépend pas du choix d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Le théorème de réduction de Gauss nous dit qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle une expression de q est $q(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2}$, les a_i étant des réels strictement positifs. La matrice de q dans cette base orthonormée est donc $D = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1^2}, \dots, \frac{1}{a_n^2}\right)$ et on a :

$$\begin{aligned}V(q) &= \frac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} = \frac{V_n}{\sqrt{\det(D)}} = V_n \prod_{i=1}^n a_i \\ &= \prod_{i=1}^n a_i \begin{cases} \frac{\pi^p}{p!} & \text{si } n = 2p \\ 2^{2p+1} \frac{p!}{(2p+1)!} \pi^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}\end{aligned}$$

(exercice 5.8). On peut aussi dire que les $\frac{1}{a_i^2}$ sont les valeurs propres de A .

- (d) Pour $n = 2$, on a $V_2 = \pi$ et l'intérieur d'une ellipse a pour équation dans une base orthonormée $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, donc $V(q) = \pi ab$. Pour $n = 3$, on a $V_3 = \frac{4\pi}{3}$ et un ellipsoïde a pour équation dans une base orthonormée, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, donc $V(q) = \frac{4\pi abc}{3}$.

3. Pour $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $q(x) = \|x\|^2 q\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)$ avec $\frac{1}{\|x\|}x \in \mathcal{B}_n$, donc :

$$\begin{aligned}(q \leq q') &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leq q'(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{B}_n, q(x) \leq q'(x)) \\ &\Rightarrow (\mathcal{E}(q') \subset \mathcal{E}(q)) \Rightarrow \left(V(q') = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A')}} \leq V(q) = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} \right) \\ &\Leftrightarrow (\det(A) \leq \det(A'))\end{aligned}$$

4.

(a)

- i. Si q, q' sont dans $Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ et λ dans $[0, 1]$, on a alors $q'' = \lambda q + (1 - \lambda)q' \in Q(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$q''(x) = \lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) > 0$$

donc q'' est symétrique définie positive. L'ensemble $Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ est donc convexe.

- ii. Pour tout $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$, on a $\delta = \min_{\|x\|=1} q(x) \in \mathbb{R}^{+,*}$ (cette borne inférieure est atteinte sur la sphère unité par continuité de q) et pour $h \in Q(\mathbb{R}^n)$ telle que $N(h) = \sup_{x \in \mathcal{B}_n} |h(x)| < \frac{\delta}{2}$, on a pour tout x dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(q + h)(x) \geq \delta \|x\|^2 - \frac{\delta}{2} \|x\|^2 = \frac{\delta}{2} \|x\|^2 > 0$, c'est-à-dire que $q + h \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$. La boule ouverte de centre q et de rayon $\frac{\delta}{2}$ est donc contenue dans $Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ et $Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans $Q(\mathbb{R}^n)$.

(b)

- i. L'application $q \in Q(\mathbb{R}^n) \mapsto A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui associe à une forme quadratique q de forme polaire φ sa matrice $A = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$ dans la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, donc un homéomorphisme (on est en dimension finie), ce qui entraîne la continuité de $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n) \mapsto V(q) = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} \in \mathbb{R}^{+,*}$ (l'application $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(A)$ est polynomiale, donc continue et on a $\det(A) > 0$ pour $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$).

- ii. Pour $q \neq q'$ dans $Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ et λ dans $]0, 1[$, on a du fait de la stricte convexité de la fonction $\exp$:

$$e^{-(\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x))} \leq \lambda e^{-q(x)} + (1-\lambda) e^{-q'(x)}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité étant stricte pour $q(x) \neq q'(x)$. Par continuité des fonctions q et q' , il en résulte que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x))} dx < \lambda \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} dx + (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q'(x)} dx$$

ce qui entraîne la stricte convexité de la fonction V sur $Q^{++}(\mathbb{R}^n)$.

5.

- (a) Comme K est compact, il est contenu dans une boule euclidienne fermée de centre 0 et de rayon $R > 0$. On a donc $\|x\| \leq R$ pour tout $x \in K$ et la forme quadratique définie positive $q : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{R^2}$ est dans $\mathcal{Q}(K)$.
- (b) $\mathcal{Q}(K)$ est non vide puisque il contient une forme quadratique définie positive.

- i. Pour q, q' dans $\mathcal{Q}(K)$ et λ dans $[0, 1]$, on a :

$$q''(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \geq 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, donc q'' est positive et pour tout $x \in K$, on a $q''(x) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$, donc $K \subset \mathcal{E}(q'')$ et $q'' \in \mathcal{Q}(K)$. L'ensemble $\mathcal{Q}(K)$ est donc convexe.

- ii. Si $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{Q}(K)$ qui converge vers q dans $(\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n), N)$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$|q_k(x) - q(x)| \leq N(q_k - q) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

donc $q(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} q_k(x) \geq 0$, c'est-à-dire que q est positive (l'ensemble $Q^+(\mathbb{R}^n)$ des formes quadratiques positives est fermé dans $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$) et pour tout $x \in K$, on a $q(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} q_k(x) \leq 1$, ce qui signifie que $q \in \mathcal{Q}(K)$. Donc $\mathcal{Q}(K)$ est fermé dans $(\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n), N)$.

- iii. Montrons enfin que $\mathcal{Q}(K)$ est borné. Comme K est d'intérieur non vide il existe une boule fermée $B(a, R)$ de centre $a \in K$ et de rayon $R > 0$ contenue dans K . Pour toute forme quadratique $q \in \mathcal{Q}(K)$ et tout $x \in B_n$, on a $a + Rx \in B(a, R) \subset K$, donc $q(a + Rx) \leq 1$ et, en notant φ la forme polaire de q , on a :

$$\begin{aligned} |q(x)| &= \frac{1}{R^2} |q(Rx)| = \frac{1}{R^2} |q(a + Rx - a)| \\ &= \frac{1}{R^2} |q(a + Rx) - 2\varphi(a + Rx, a) + q(a)| \\ &\leq \frac{2}{R^2} (1 + |\varphi(a + Rx, a)|) \end{aligned}$$

avec $|\varphi(a + Rx, a)| \leq \sqrt{q(a + Rx)}\sqrt{q(a)}$ (Cauchy-Schwarz pour q positive), ce qui nous donne $|q(x)| \leq \frac{4}{R^2}$ pour tout $x \in \mathcal{B}_n$, soit $N(q) \leq \frac{4}{R^2}$ pour tout $q \in \mathcal{Q}(K)$. L'ensemble $\mathcal{Q}(K)$ est donc borné dans $(\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n), N)$ et en conclusion, c'est un compact.

- (c) L'application δ qui associe à une forme quadratique $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ le déterminant $\delta(q) = \det(A) \in \mathbb{R}$ de sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est continue comme composée de $q \mapsto A$ et $A \mapsto \det(A)$ (elle est polynomiale). Donc sur le compact $\mathcal{Q}(K)$ elle est majorée et atteint sa borne supérieure, c'est-à-dire qu'il existe $q_0 \in \mathcal{Q}(K)$ telle que :

$$\delta(q) = \det(A) \leq \delta(q_0) = \det(A_0)$$

Comme $\mathcal{Q}(K)$ contient des formes quadratiques définies positives, on a $\det(A_0) > 0$ et q_0 est définie positive. L'ellipsoïde $\mathcal{E}(q_0)$ contient K et pour tout autre ellipsoïde $\mathcal{E}(q)$ qui contient K , on a :

$$V(q) = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} \geq V(q_0) = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A_0)}}$$

ce qui signifie que $\mathcal{E}(q_0)$ est de volume minimum.

- (d) Supposons qu'il existe un autre ellipsoïde $\mathcal{E}(q_1)$ contenant K tel que $q_1 \neq q_0$ et $V(q_0) = V(q_1)$. La forme quadratique définie positive $q = \frac{1}{2}(q_0 + q_1)$ est alors dans $\mathcal{Q}(K)$ puisque cet ensemble est convexe et avec la stricte convexité de V , on déduit que :

$$V(q) = V\left(\frac{1}{2}(q_0 + q_1)\right) < \frac{1}{2}(V(q_0) + V(q_1)) = V(q_0)$$

ce qui contredit le caractère maximal de $V(q_0)$.

Cet ellipsoïde de volume minimal contenant K est donc unique.

- II - Jauge d'un convexe compact et théorème de F. John

1.

- (a) Pour $x = 0$, on a $I_K(x) = \mathbb{R}^+$ puisque $0 \in \overset{\circ}{K} \subset K$.
- (b) Pour $x \neq 0$, on vérifie que $I_K(x)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^{+,*}$. En effet, comme $0 \in \overset{\circ}{K}$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule fermée $B(0, \varepsilon)$ de centre 0 et de rayon ε soit contenue dans K . Le vecteur $\frac{\varepsilon}{\|x\|}x$ est alors dans $B(0, \varepsilon) \subset K$ et $\frac{\varepsilon}{\|x\|} \in I_K(x)$, donc $I_K(x)$ est non vide. Si $0 \in I_K(x)$, on a alors $x \in 0 \cdot K = \{0\}$, soit $x = 0$, ce qui n'est pas, donc $I_K(x) \subset \mathbb{R}^{+,*}$. On vérifie ensuite que $I_K(x)$ est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}^+$. En effet, pour tout $\lambda \in I_K(x)$, on a $\lambda > 0$ et il existe $y \in K$ tel que $x = \lambda y$. Pour tout réel $\mu > \lambda$, le point $z = \frac{\lambda}{\mu}y + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)0$ est dans K (qui est convexe

contenant 0), donc $x = \lambda y = \mu z \in \mu K$ et $\mu \in I_K(x)$. L'ensemble $I_K(x)$ est donc un intervalle non majoré de $\mathbb{R}^{+,*}$. Il admet donc une borne inférieure $j_K(x)$. Par définition de cette borne inférieure, pour tout entier naturel non nul k , il existe un réel $\lambda_k \in I_K(x)$ tel que $j_K(x) \leq \lambda_k < j_K(x) + \frac{1}{k}$, ce qui nous donne une suite $(y_k)_{k \geq 1}$ de points de K telle que $x = \lambda_k y_k$ pour tout $k \geq 1$. De la suite $(y_k)_{k \geq 1}$ dans le compact K on peut extraire une sous-suite $(y_{\varphi(k)})_{k \geq 1}$ qui converge vers un élément y de K et avec $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_{\varphi(k)} y_{\varphi(k)} = j_K(x) y$, on déduit que $j_K(x) \in I_K(x)$. On a donc $I_K(x) = [j_K(x), +\infty[$ avec $j_K(x) > 0$.

2.

- (a) Un ellipsoïde $K = \mathcal{E}(q)$ est convexe compact avec 0 à l'intérieur (image de $\mathcal{B}_n$ par $\sqrt{A^{-1}} \in GL_n(\mathbb{R})$). On sait déjà que $I_K(0) = \mathbb{R}^+$ et $j_K(0) = 0$. Pour $x \neq 0$ et tout $\lambda > 0$ dans $I_K(x)$, on a $x \in \lambda \mathcal{E}(q) = \mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda^2} q\right)$, donc $\lambda^2 \geq q(x)$. Il en résulte que $j_K(x) \geq \sqrt{q(x)}$. Tenant compte de $x = \sqrt{q(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{q(x)}} x\right) \in \sqrt{q(x)} K$, on déduit que $\sqrt{q(x)} \in I_K(x)$ et $\sqrt{q(x)} \geq j_K(x)$, ce qui nous donne $j_K(x) = \sqrt{q(x)}$. Pour $K = \mathcal{B}_n = \mathcal{E}(\|\cdot\|^2)$, on a $j_K = \|\cdot\|$.
- (b) La boule unité fermée $K = B'(0, 1)$ de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$ est bien convexe compacte contenant 0 dans son l'intérieur. Pour $x \neq 0$ et tout $\lambda > 0$ dans $I_K(x)$, on a $x \in \lambda K = B'(0, \lambda)$, donc $\lambda \geq \|x\|'$ et $j_K(x) \geq \|x\|'$. Tenant compte de $x = \|x\|' \left(\frac{1}{\|x\|'} x\right) \in \|x\|' K$, on a $\|x\|' \geq j_K(x)$ et $j_K(x) = \|x\|'$.
- (c) Soit $K = ABCD$ un parallélogramme centré en 0 de sommets $A = -C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $B = -D = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$. Il existe une unique matrice inversible $M \in GL_2(\mathbb{R})$ telle $K = M(C)$ où $C = PQRS$ est le carré de sommets $P = -R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Q = -S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est définie par $MP = A$, $MQ = B$ (par conservation des barycentres le carré C est bien transformé en K si, et seulement si, ces deux conditions sont réalisées), ce qui nous donne $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \alpha - \gamma \\ \beta + \delta & \beta - \delta \end{pmatrix}$. Pour $x \neq 0$, $\lambda > 0$ dans $I_K(x)$, on a $x \in \lambda K = \lambda M(C)$, ce qui équivaut à $\left\| \frac{1}{\lambda} M^{-1} x \right\|_\infty \leq 1$ et en conséquence $\lambda \geq \|M^{-1} x\|_\infty$. Il en résulte que $j_K(x) \geq \|M^{-1} x\|_\infty$. Comme $x = M y$, $y = \|y\|_\infty \left(\frac{1}{\|y\|_\infty} y\right) \in \|y\|_\infty C$, on a $x \in \|y\|_\infty M(C) = \|y\|_\infty K$ et $\|y\|_\infty = \|M^{-1} x\|_\infty \geq j_K(x)$. On a donc $j_K(x) = \|M^{-1} x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

3.

- (a) On a $x \in K$ si, et seulement si, $1 \in I_K(x)$, ce qui équivaut encore à $j_K(x) \leq 1$, donc $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid j_K(x) \leq 1\}$.
- (b) Supposons que $j_K(x) < 1$. Le réel $j_K(x)$ étant dans $I_K(x)$, il existe $y \in K$ tel que $x = j_K(x)y$. D'autre part, comme $0 \in \overset{\circ}{K}$, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset K$. En écrivant tout vecteur $v \in B(x, (1 - j_K(x))\varepsilon)$ sous la forme $v = x + (1 - j_K(x))z = j_K(x)y + (1 - j_K(x))z$ avec $z \in B(0, \varepsilon) \subset K$, on déduit par convexité que $v \in K$. Donc la boule $B(x, (1 - j_K(x))\varepsilon)$ est contenue dans K et $x \in \overset{\circ}{K}$. On a donc ainsi montré que si $x \in \partial K = K \setminus \overset{\circ}{K}$, on a alors $j_K(x) = 1$. Réciproquement, si $j_K(x) = 1$, on a alors $x \neq 0$ et pour tout réel $\varepsilon \in]0, 1[$, on vérifie que le vecteur $y = x + \frac{\varepsilon}{\|x\|}x = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\|x\|}\right)x$ qui est dans la boule fermée $B(x, \varepsilon)$ n'est pas dans K . En effet, si $y \in K$, on a alors $x = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\|x\|}}y \in \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\|x\|}}K$ et $j_K(x) \leq \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\|x\|}} < 1 = j_K(x)$, ce qui est impossible. On a donc $B(x, \varepsilon) \not\subset K$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, ce qui signifie que $x \notin \overset{\circ}{K}$, soit $x \in \partial K = K \setminus \overset{\circ}{K}$. En conclusion, $\partial K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid j_K(x) = 1\}$.

4.

- (a) Pour $\lambda = 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a $j_K(\lambda x) = 0 = \lambda j_K(x)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(\mu \in I_K(\lambda x)) \Leftrightarrow \left(x \in \frac{\mu}{\lambda}K\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda} \in I_K(x)\right) \Leftrightarrow (\mu \in \lambda I_K(x))$$

donc $I_K(\lambda x) = \lambda I_K(x)$, soit $[j_K(\lambda x), +\infty[= \lambda [j_K(x), +\infty[$ et en conséquence, $j_K(\lambda x) = \lambda j_K(x)$.

- (b) Pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, on a $j_K(x) \in I_K(x)$, $j_K(y) \in I_K(y)$, donc $x \in j_K(x)K$, $y \in j_K(y)K$ et il existe z, t dans K tels que $x = j_K(x)z$, $y = j_K(y)t$. Si $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $j_K(x) + j_K(y) > 0$ et avec la convexité de K , il en résulte que $u = \frac{j_K(x)}{j_K(x) + j_K(y)}z + \frac{j_K(y)}{j_K(x) + j_K(y)}t \in K$, donc $x + y = (j_K(x) + j_K(y))u \in (j_K(x) + j_K(y))K$, ce résultat étant encore valable pour $(x, y) = (0, 0)$. On a donc $j_K(x) + j_K(y) \in I_K(x + y)$ et en conséquence, $j_K(x + y) \leq j_K(x) + j_K(y)$.

5. On a vu en I.1 que $j_K(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Comme K est symétrique (i.e. $K = -K$), on a pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(\lambda \in I_K(-x)) \Leftrightarrow (-x \in \lambda K) \Leftrightarrow (x \in -\lambda K = \lambda K) \Leftrightarrow \lambda \in I_K(x)$$

donc $I_K(-x) = I_K(x)$ et $j_K(-x) = j_K(x)$ et de I.4a on déduit que pour tout réel λ on a $j_K(\lambda x) = j_K(|\lambda|x) = |\lambda|j_K(x)$. L'inégalité triangulaire étant vérifiée en I.4b on peut dire que j_K est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

6. On vérifie d'abord que K contient 0 dans son intérieur. En effet, comme K est d'intérieur non vide, on dispose de $x \in \overset{\circ}{K}$, donc $-x$ est dans $\overset{\circ}{K}$ par symétrie et

aussi de $0 = \frac{x + (-x)}{2}$ par convexité. Sous ces hypothèses, on a vu que j_K est une norme sur $\mathbb{R}^n$, $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid j_K(x) \leq 1\}$ est la boule unité de $(\mathbb{R}^n, j_K)$ et $\partial K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid j_K(x) = 1\}$ est la sphère unité de $(\mathbb{R}^n, j_K)$.

7.

(a)

i. Pour y, z dans K^* et λ dans $[0, 1]$, on a pour tout $x \in K$:

$$\langle x, \lambda y + (1 - \lambda)z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + (1 - \lambda) \langle x, z \rangle \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1$$

ce qui signifie que $\lambda y + (1 - \lambda)z \in K^*$. L'ensemble K^* est donc convexe.

ii. Pour tout $x \in K$, l'application linéaire $\varphi_x : y \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue, donc $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1\} = \varphi_x^{-1}([-\infty, 1])$ est fermé et $K^* = \bigcap_{x \in K} \varphi_x^{-1}([-\infty, 1])$ est fermé comme intersection de fermés.

iii. Comme $0 \in \overset{\circ}{K}$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule fermée $B(0, \varepsilon)$ de centre 0 et de rayon ε est contenue dans K . Pour $y \in K^* \setminus \{0\}$, on a $x = \frac{\varepsilon}{\|y\|}y \in B(0, \varepsilon) \subset K$ et $\varepsilon \|y\| = \langle x, y \rangle \leq 1$, soit $\|y\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

L'ensemble K^* est donc borné contenu dans la boule $B\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right)$. En conclusion, K^* est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ et en conséquence compact.

iv. Enfin, K qui est compact est contenu dans une boule fermée $B(0, R)$ avec $R > 0$ et pour $y \in B\left(0, \frac{1}{R}\right)$, $x \in K$, on a $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \leq \frac{1}{R} \|x\| \leq 1$, ce qui signifie que $y \in K^*$. On a donc $B\left(0, \frac{1}{R}\right) \subset K^*$, c'est-à-dire que K^* contient 0 en son intérieur.

(b) Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ l'application continue $\varphi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle$ est bornée et atteint ses bornes sur le compact K . On peut donc poser $M(y) = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle$.

Pour $y = 0$, on a $\varphi_y = 0$ et $M(y) = 0 = j_{K^*}(y)$. Pour $y \neq 0$, on a $j_{K^*}(y) > 0$, $M(y) > 0$ et pour $0 < \lambda < M(y)$, par définition de la borne supérieure, il existe $x \in K$ tel que $\lambda < \langle x, y \rangle \leq M(y)$, donc $\left\langle x, \frac{1}{\lambda}y \right\rangle > 1$ et $\frac{1}{\lambda}y \notin K^*$, c'est-à-dire que $y \notin \lambda K^*$ et $\lambda \notin I(K^*, y) = \{\mu \in \mathbb{R}^+ \mid y \in \mu K^*\}$. Il en résulte que $M(y) \leq j_{K^*}(y)$. D'autre part, pour tout $x \in K$, on a $\langle x, y \rangle \leq M(y)$, soit $\left\langle x, \frac{1}{M(y)}y \right\rangle \leq 1$ et $\frac{1}{M(y)}y \in K^*$, c'est-à-dire que $y \in M(y)K^*$ et en conséquence $M(y) \geq j_{K^*}(y)$. En définitive, on a $j_{K^*}(y) = M(y) = \max_{x \in K} \langle x, y \rangle$.

(c) On a $y \in (A(K))^*$ si, et seulement si, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, {}^tAy \rangle \leq 1$ pour tout $x \in K$, ce qui équivaut à dire que ${}^tAy \in K^*$, encore équivalent à $y \in ({}^tA)^{-1}(K^*)$. On a donc $(A(K))^* = ({}^tA)^{-1}(K^*)$.

(d)

- i. Soit $K = \mathcal{B}_n$. Pour x, y dans K , on a $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \leq 1$, donc $y \in K^*$. Réciproquement si $y \in K^*$, on a alors $\langle x, y \rangle \leq 1$ pour tout $x \in K$ et en particulier pour $y \neq 0$, $\frac{1}{\|y\|} y \in K$ donne $\left\langle y, \frac{1}{\|y\|} y \right\rangle \leq 1$ équivalent à $\|y\| \leq 1$, soit $y \in K$. Donc $K = K^*$ et $j_{K^*} = j_K = \|\cdot\|$.
- ii. Soient $K = \mathcal{E}(q)$ un ellipsoïde et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a vu que $\mathcal{E}(q) = B^{-1}(\mathcal{B}_n)$, où $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est la racine carrée de A^{-1} , donc $K^* = (B^{-1}(\mathcal{B}_n))^* = {}^t B(\mathcal{B}_n^*) = B(\mathcal{B}_n) = \mathcal{E}(q')$ où q' est la forme quadratique de matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $j_{K^*} = q'$.
- iii. Soit $K = B_\infty$ la boule unité pour la norme infini. Pour $y \in K^* \setminus \{0\}$, on a $x = (\text{signe}(y_i))_{1 \leq i \leq n} \in K$ et $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n |y_i| = \|y\|_1 \leq 1$, donc $K^* \subset B_1 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_1 \leq 1\}$ (boule unité pour la norme $\|\cdot\|_1$). Réciproquement si $y \in B_1$, on a alors pour tout $x \in K$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \|x\|_\infty \|y\|_1 \leq 1$$

soit $y \in K^*$. On a donc $K^* = B_1$ et $j_{K^*} = \|\cdot\|_1$.

- iv. Soit $K = M(C)$ un parallélogramme, où C est le carré de sommets $P = -R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Q = -S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a $K^* = (M(C))^* = ({}^t M)^{-1}(C^*)$, soit :

$$(x \in K^*) \Leftrightarrow ({}^t Mx \in C^*) \Leftrightarrow (\|{}^t Mx\|_1 \leq 1)$$

On a vu que $j_K(x) = \|M^{-1}x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et de manière analogue, on voit que $j_{K^*}(x) = \|{}^t Mx\|_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

- (e) Si K est symétrique, il en est alors de même de K^* , donc K^* a les mêmes propriétés que K et j_{K^*} est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Si φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, il existe alors un vecteur u tel que $\varphi(x) = \langle x, u \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et la norme induite par j_K sur $(\mathbb{R}^n)^*$ (le dual de $\mathbb{R}^n$) est définie par :

$$N(\varphi) = \sup_{j_K(x) \leq 1} |\varphi(x)| = \sup_{x \in K} |\langle x, u \rangle| = \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle = j_{K^*}(u)$$

En conclusion j_{K^*} est la norme induite par j_K sur $(\mathbb{R}^n)^*$.

8.

- (a) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} (A(\mathcal{B}_n) \subset K) &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{B}_n, A(x) \in K) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{B}_n, j_K(A(x)) \leq 1) \\ &\Leftrightarrow \left(\sup_{x \in \mathcal{B}_n} j_K(A(x)) \leq 1 \right) \end{aligned}$$

l'application $N_K : A \mapsto \sup_{x \in B_n} j_K(A(x))$ définissant une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(norme induite d'une application linéaire de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}^n, j_K)$). Il en résulte que $\mathcal{M}(K)$ est la boule unité de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N_K)$ et en particulier c'est un compact puisqu'on est en dimension finie.

- (b) On a $\mathcal{M}(K, \lambda) = \mathcal{M}(K) \cap \mathcal{M}(\lambda)$ où $\mathcal{M}(\lambda) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \geq \lambda\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme image réciproque du fermé $[\lambda, +\infty[$ par l'application continue $\det$, donc $\mathcal{M}(K, \lambda)$ est un fermé et il est borné car contenu dans le compact $\mathcal{M}(K)$. En conclusion $\mathcal{M}(K, \lambda)$ est compact.
- (c) En désignant par $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ la matrice d'une forme quadratique définie positive q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{E}(q) = B(B_n)$ où $B = \sqrt{A^{-1}} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $V(q) = \frac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} = \det(B) V_n$, donc :

$$(q \in \mathcal{Q}(K, \mu)) \Leftrightarrow \left(B(B_n) \subset K \text{ et } \det(B) \geq \frac{\mu}{V_n} \right) \Leftrightarrow \left(B \in \mathcal{M}\left(K, \frac{\mu}{V_n}\right) \right)$$

ce qui signifie que $\mathcal{Q}(K, \mu)$ est l'image du compact $\mathcal{M}\left(K, \frac{\mu}{V_n}\right) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})$ (pour la topologie induite) par l'application continue qui associe à une matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ la forme quadratique $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ de matrice $A = (B^2)^{-1}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est donc un compact de $Q^{++}(\mathbb{R}^n)$.

(d)

- i. Le convexe K contenant 0 en son intérieur, il existe un ellipsoïde contenu dans K . On note μ le volume de cet ellipsoïde. L'ensemble $\mathcal{Q}(K, \mu)$ est donc non vide et compact. Avec la continuité de l'application volume V , on déduit qu'il existe dans $\mathcal{Q}(K, \mu)$ un ellipsoïde $\mathcal{E}(q_1)$ de volume maximum et ce volume (qui est plus grand que μ) est maximum parmi tous les ellipsoïdes contenus dans K .
- ii. Vérifions que cet ellipsoïde est unique. En notant A_1 la matrice de q_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{E}(q_1) = B_1(B_n)$ où $B_1 = \sqrt{A_1^{-1}} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $V(q_1) = \det(B_1) V_n$. Pour tout ellipsoïde $\mathcal{E}(q) = B(B_n)$, on a $(\mathcal{E}(q))^* = {}^t B^{-1}(B_n^*) = B^{-1}(B_n)$ et $\text{vol}((\mathcal{E}(q))^*) = \frac{V_n}{\det(B_1)}$, soit $\text{vol}(\mathcal{E}(q)) \text{vol}((\mathcal{E}(q))^*) = V_n^2$, donc $(\mathcal{E}(q))^*$ est un ellipsoïde de volume minimum qui contient K^* (on vérifie facilement que $K_1 \subset K_2$ équivaut à $K_2^* \subset K_1^*$), ce qui assure l'unicité de $(\mathcal{E}(q_1))^*$ et celle de $\mathcal{E}(q_1)$.

– III – Théorème de Brunn et Minkowski

1. (a) Si $K_0 = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ et $K_1 = \prod_{k=1}^n [c_k, d_k]$ sont deux pavés standards, on a alors $K_0 + K_1 = \prod_{k=1}^n [a_k + c_k, b_k + d_k]$. En effet si $x = y + z$ avec $y \in [a, b]$,

$z \in [c, d]$ alors $x \in [a + c, b + d]$ et réciproquement tout $x \in [a + c, b + d]$ s'écrit :

$$x = \lambda(a + c) + (1 - \lambda)(b + d) = (\lambda a + (1 - \lambda)b) + (\lambda c + (1 - \lambda)d) = y + z$$

avec $y \in [a, b]$, $z \in [c, d]$. En posant $\alpha_k = b_k - a_k$, $\beta_k = d_k - c_k$ pour tout k compris entre 1 et n , on a :

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(\frac{\text{vol}(K_0)}{\text{vol}(K_0 + K_1)} \right)^{1/n} + \left(\frac{\text{vol}(K_1)}{\text{vol}(K_0 + K_1)} \right)^{1/n} \\ &= \left(\prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_k + \beta_k} \right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\alpha_k + \beta_k} \right)^{1/n} \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité $\left(\prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma_k$ (la moyenne arithmétique majore la moyenne géométrique), on a :

$$\gamma \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_k + \beta_k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\alpha_k + \beta_k} = 1$$

soit l'inégalité de Brunn-Minkowski. L'égalité est réalisée si et seulement si K_0 et K_1 sont positivement homothétiques ou translatés, ce qui correspond à $\frac{\alpha_k}{\beta_k} = C$ ste et $\gamma = 1$.

- (b) Soit $K_0 = \bigcup_{i=1}^{n_0} P_i$ avec $n_0 \geq 2$, où les $P_i = \prod_{k=1}^n [a_k^{(i)}, b_k^{(i)}]$ sont des pavés

standards d'intérieurs disjoints. De $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$, on déduit qu'il existe un indice k compris entre 1 et n tel que $[a_k^{(1)}, b_k^{(1)}] \cap [a_k^{(2)}, b_k^{(2)}] = \emptyset$ et un réel t tel que chacune des demi-droites $]-\infty, t]$ et $[t, +\infty[$ contienne l'un des intervalles $[a_k^{(1)}, b_k^{(1)}]$ ou $[a_k^{(2)}, b_k^{(2)}]$. Chacun des demi-espaces définis par $x_k \geq t$ et $x_k \leq t$ contient alors l'un des pavés P_1 ou P_2 . Avec la continuité de l'application $u \mapsto \frac{\text{vol}(K_1 \cap \{x_k \leq u\})}{\text{vol}(K_1 \cap \{x_k \geq u\})}$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$ et le théorème des accroissements finis, on déduit alors qu'il existe un réel u tel que $\frac{\text{vol}(K_0 \cap \{x_k \leq t\})}{\text{vol}(K_0 \cap \{x_k \geq t\})} = \frac{\text{vol}(K_1 \cap \{x_k \leq u\})}{\text{vol}(K_1 \cap \{x_k \geq u\})}$.

- (c) Soit à montrer par récurrence sur l'entier $p \geq 2$ la propriété $\mathcal{H}_p$ suivante : si K_0, K_1 sont deux compacts réunions respectivement de n_0 et n_1 pavés standards d'intérieurs disjoints avec $n_0 + n_1 \leq p$, alors $\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n} \leq \text{vol}(K_0 + K_1)^{1/n}$.

En III.1a on a vu que $\mathcal{H}_2$ est vraie. Supposons le résultat acquis pour $p - 1 \geq 2$ et soient $K_0 = \bigcup_{i=1}^{n_0} P_i$, $K_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} Q_i$ avec $n_0 \geq 2$, $n_0 + n_1 \leq p$, où les P_i {resp. Q_i } sont des pavés standards d'intérieurs disjoints. En utilisant

les notations de III. 1b on pose :

$$\begin{cases} K_0^- = K_0 \cap \{x_k \leq t\}, & K_0^+ = K_0 \cap \{x_k \geq t\} \\ K_1^- = K_1 \cap \{x_k \leq u\}, & K_1^+ = K_1 \cap \{x_k \geq u\} \end{cases}$$

et on a $K_j = K_j^- \cup K_j^+$ avec K_j^- , K_j^+ d'intérieurs disjoints. Les compacts K_0^- et K_0^+ sont réunions respectivement de $n_0^- < n_0$ et $n_0^+ < n_0$ parallélépipèdes standards d'intérieurs disjoints et K_1^- et K_1^+ réunions respectivement de $n_1^- \leq n_0$ et $n_1^+ \leq n_0$ parallélépipèdes standards d'intérieurs disjoints avec $\frac{\text{vol}(K_0^-)}{\text{vol}(K_0^+)} = \frac{\text{vol}(K_1^-)}{\text{vol}(K_1^+)}$. On note $v_j = \text{vol}(K_j)$,

$v_j^\pm = \text{vol}(K_j^\pm)$ et $\alpha = \frac{v_j^-}{v_j^+}$ pour $j = 0, 1$. En écrivant que :

$$v_j = v_j^- + v_j^+ = v_j^+ (1 + \alpha) = v_j^- \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (j = 0, 1)$$

on a :

$$\begin{aligned} v_0^{1/n} + v_1^{1/n} &= (1 + \alpha)^{1/n} \left((v_0^+)^{1/n} + (v_1^+)^{1/n} \right) \\ &= \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha} \right)^{1/n} \left((v_0^-)^{1/n} + (v_1^-)^{1/n} \right) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \alpha} \left(v_0^{1/n} + v_1^{1/n} \right)^n &= \left((v_0^+)^{1/n} + (v_1^+)^{1/n} \right)^n \\ \frac{\alpha}{1 + \alpha} \left(v_0^{1/n} + v_1^{1/n} \right)^n &= \left((v_0^-)^{1/n} + (v_1^-)^{1/n} \right)^n \end{aligned}$$

et en additionnant :

$$\left(v_0^{1/n} + v_1^{1/n} \right)^n = \left((v_0^+)^{1/n} + (v_1^+)^{1/n} \right)^n + \left((v_0^-)^{1/n} + (v_1^-)^{1/n} \right)^n$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\left(v_0^{1/n} + v_1^{1/n} \right)^n \leq \text{vol}(K_0^+ + K_1^+) + \text{vol}(K_0^- + K_1^-)$$

Enfin avec $(K_0^+ + K_1^+)$, $(K_0^- + K_1^-)$ d'intérieurs disjoints (ils sont de part et d'autre de l'hyperplan $x_k = t + u$) et $(K_0^+ + K_1^+) \cup (K_0^- + K_1^-) \subset K_0 + K_1$, on déduit que $\text{vol}(K_0^+ + K_1^+) + \text{vol}(K_0^- + K_1^-) \leq \text{vol}(K_0 + K_1)$ et $\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n} \leq \text{vol}(K_0 + K_1)^{1/n}$.

2. Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, pour tout entier $p \geq 1$ on peut recouvrir K par un nombre fini de pavés standards d'intérieurs disjoints dont les cotés sont de longueur au plus égale à $\frac{1}{p}$. En notant K_p la réunion de ces pavés, on a $K \subset K_p \subset K + \frac{1}{p}B_\infty(O, 1)$, où $B_\infty(O, 1) = [-1, 1]^n$. Si K_0 et K_1 sont deux

compacts de $\mathbb{R}^n$, on note $(K_0^{(p)})_{p \geq 1}$ et $(K_1^{(p)})_{p \geq 1}$ deux telles suites. On a alors, d'après III. 1c pour tout $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n} &\leq \text{vol}(K_0^{(p)})^{1/n} + \text{vol}(K_1^{(p)})^{1/n} \\ &\leq \text{vol}(K_0^{(p)} + K_1^{(p)})^{1/n} \end{aligned}$$

Puis avec $K_0 + K_1 \subset K_0^{(p)} + K_1^{(p)} \subset K_0 + K_1 + \frac{2}{p}B_\infty(O, 1)$, on déduit que :

$$\text{vol}(K_0 + K_1) \leq \text{vol}(K_0^{(p)} + K_1^{(p)}) \leq \text{vol}\left(K_0 + K_1 + \frac{2}{p}B_\infty(O, 1)\right)$$

et avec $\lim_{p \rightarrow +\infty} \text{vol}\left(K_0 + K_1 + \frac{2}{p}B_\infty(O, 1)\right) = \text{vol}(K_0 + K_1)$ (convergence dominée), on déduit que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \text{vol}(K_0^{(p)} + K_1^{(p)}) = \text{vol}(K_0 + K_1)$$

et l'inégalité de Brunn-Minkowski s'en suit.

Bibliographie

- [1] M. AUDIN. *Géométries. De la licence à l'agrégation*. Belin (1998).
- [2] P. BOYER, J.-J. RISLER. *Algèbre pour la licence 3*. Dunod.
- [3] J. F. DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. Vuibert (2016).
- [4] J. DELCOURT. *Théorie des groupes*. Dunod. (2001).
- [5] S. FRANCINO, H. GIANELLA, S. NICOLAS. *Oraux X-ENS. Analyse 1 et 2*. Cassini.
- [6] S. FRANCINO, H. GIANELLA, S. NICOLAS : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Algèbre 1 et 2*. Cassini (2001).
- [7] S. FRANCINO, H. GIANELLA, S. NICOLAS : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Algèbre 3*. Cassini (2008).
- [8] X. GOURDON. *Les Maths en tête. Algèbre*. Ellipses (1994).
- [9] X. GOURDON. *Les Maths en tête. Analyse*. Ellipses (1994).
- [10] W. J. KACZOR, M. T. NOWAK. *Problems in mathematical analysis. Vol. I, II et III*. American Mathematical Society (2001).
- [11] E. LEICHTNAM, X. SCHAUER. *Exercices corrigés de Mathématiques, volume 4*. Ellipses (1982).
- [12] E. LEICHTNAM. *Exercices corrigés de Mathématiques. Polytechnique et ENS. Analyse*. Ellipses (2000).
- [13] P. MEUNIER. *Agrégation interne de mathématiques. Exercices d'oral corrigés commentés*. P. U. F. (1997).
- [14] D.-J. MERCIER. *Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation*. Publibook, 2004.
- [15] J. M. MONIER. *Géométrie, cours et exercices corrigés*. Dunod (1997).
- [16] D. PERRIN. *Cours d'algèbre*. Ellipses (1996).
- [17] J. P. RAMIS, A. WARUSFEL. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L2*. Dunod. (2007).
- [18] J. P. RAMIS, A. WARUSFEL. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L3*. Dunod. (2015).
- [19] J. E. ROMBALDI. *Thèmes pour l'agrégation de Mathématiques*. EDP Sciences (1999).

- [20] J. E. ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. EDP Sciences (2004)
- [21] J. E. ROMBALDI. *Analyse matricielle*. EDP Sciences (2000).
- [22] J. E. ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie. Deboeck (2017)*.
- [23] F. ROUVIERE. *Calcul différentiel*. Cassini (1999).
- [24] J. TRIGNAN. *La géométrie des nombres complexes*. Bréal (1983).



N° éditeur 2018_0117

Achevé d'imprimer en avril 2018 par Wilco aux Pays-Bas

N° d'impression : 267249