

# Maths

2<sup>de</sup>

NOUVEAU  
PROGRAMME  
2009

RÉVISIONS

le  
**Guide  
A B C**

BAC

Progresser  
avec méthode

- Rappels de cours
- Méthodes de base
- Exercices
- Corrigés commentés



**Nathan**

Ce livre est donné par

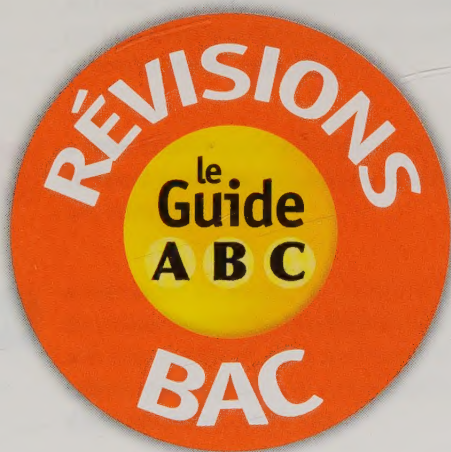


Bibliothèques  
Sans Frontières  
Libraries Without Borders

# Mathématiques

2<sup>de</sup>

NOUVEAU  
PROGRAMME  
2009



**Jean-Luc Dianoux**

Professeur de mathématiques  
à Paris

**Muriel Dorembus**

Professeur de mathématiques  
à Paris

 **Nathan**

Réalisation éditoriale : Roselyne MESSAGER

Édition : Julie LAVALARD

Conception graphique : Jehanne-Marie HUSSON

Couverture : Team Créatif

Compositeur : ScienTech Livre

---

© Nathan 2002 (1<sup>re</sup> éd)

© Nathan 2009 – 25, avenue Pierre de Coubertin, 75013 Paris  
pour la présente édition

ISBN : 978-2-09-182-656-1



# Mode d'emploi

Ce Guide **ABC BAC** Bac est conçu pour vous aider à acquérir des bases solides en Mathématiques, en Seconde. Son contenu de qualité, sa présentation claire et structurée faciliteront votre travail et guideront vos progrès tout au long de l'année.

## Cours

- Le cours présente **l'essentiel** à savoir. Il est structuré en courtes **séquences** d'une double page, qui faciliteront la révision.
- Chaque séquence comporte des **exemples d'application** corrigés et commentés, qui constituent une **préparation** à la résolution des exercices.

## Méthode

- Cette double page présente de manière simple tous les **réflexes à avoir et les pièges à éviter** lors de la résolution des exercices.

## Exercices

- Nombreux et variés, les exercices proposés permettent de couvrir **l'ensemble des thèmes** abordés dans le chapitre.
- Ils sont classés en deux rubriques : les **exercices d'application**, pour vérifier ses connaissances puis, les **exercices d'entraînement** progressifs.

## Corrigés

- Les corrigés, entièrement rédigés, sont très détaillés et présentent toutes les étapes du raisonnement et des calculs.
- Ils sont accompagnés de **commentaires**, de conseils ou remarques.

# Sommaire

|                     |   |
|---------------------|---|
| Mode d'emploi ..... | 3 |
|---------------------|---|

## Partie 1 - Fonctions

|                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Chapitre 1. Représentation des nombres ;<br/>notation et raisonnement mathématiques</b> ..... | 9  |
| <b>1</b> Les ensembles de nombres .....                                                          | 10 |
| <b>2</b> Les intervalles .....                                                                   | 12 |
| <b>Méthode</b> .....                                                                             | 14 |
| <b>Exercices</b> .....                                                                           | 16 |
| <b>Corrigés</b> .....                                                                            | 20 |

|                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Chapitre 2. Comportement global d'une fonction.<br/>Lectures graphiques</b> ..... | 25 |
| <b>1</b> Notion de fonction. Ensemble de définition .....                            | 26 |
| <b>2</b> Représentation graphique d'une fonction .....                               | 28 |
| <b>3</b> Résolution graphique d'équations et d'inéquations .....                     | 30 |
| <b>4</b> Sens de variation d'une fonction .....                                      | 32 |
| <b>5</b> Minimum, maximum d'une fonction .....                                       | 34 |
| <b>Méthode</b> .....                                                                 | 36 |
| <b>Exercices</b> .....                                                               | 38 |
| <b>Corrigés</b> .....                                                                | 50 |

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Chapitre 3. Utilisation des fonctions de référence.<br/>Trigonométrie</b> .....  | 61 |
| <b>1</b> Fonctions linéaires et affines .....                                       | 62 |
| <b>2</b> Fonctions carré et inverse .....                                           | 64 |
| <b>3</b> Développement d'un produit : transformation d'un produit en somme .....    | 66 |
| <b>4</b> Factorisation d'une somme :<br>transformation d'une somme en produit ..... | 68 |
| <b>5</b> Équations et inéquations .....                                             | 70 |
| <b>6</b> Fonction polynôme de degré 2 ; fonction homographique .....                | 72 |

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>7</b> Trigonométrie .....                                                   | 74  |
| <b>Méthode</b> .....                                                           | 76  |
| <b>Exercices</b> .....                                                         | 78  |
| <b>Corrigés</b> .....                                                          | 93  |
| <b>Partie 2 - Géométrie</b>                                                    |     |
| <b>Chapitre 4. Géométrie. Équations de droites</b> .....                       | 119 |
| <b>1</b> Voir et calculer dans l'espace .....                                  | 120 |
| <b>2</b> Positions relatives dans l'espace .....                               | 122 |
| <b>3</b> Configurations usuelles du plan .....                                 | 124 |
| <b>4</b> Repérage de points dans le plan .....                                 | 126 |
| <b>5</b> Équations de droites .....                                            | 128 |
| <b>6</b> Système d'équations linéaires : résolution graphique .....            | 130 |
| <b>7</b> Parallélisme et perpendicularité de deux droites .....                | 132 |
| <b>Méthode</b> .....                                                           | 134 |
| <b>Exercices</b> .....                                                         | 136 |
| <b>Corrigés</b> .....                                                          | 140 |
| <b>Chapitre 5. Vecteurs</b> .....                                              | 149 |
| <b>1</b> Vecteurs du plan .....                                                | 150 |
| <b>2</b> Opérations sur les vecteurs .....                                     | 152 |
| <b>3</b> Coordonnées d'un vecteur .....                                        | 154 |
| <b>4</b> Colinéarité de deux vecteurs .....                                    | 156 |
| <b>Méthode</b> .....                                                           | 158 |
| <b>Exercices</b> .....                                                         | 160 |
| <b>Corrigés</b> .....                                                          | 164 |
| <b>Partie 3 - Statistiques et probabilités</b>                                 |     |
| <b>Chapitre 6. Statistiques</b> .....                                          | 175 |
| <b>1</b> Organisation des données d'une série statistique .....                | 176 |
| <b>2</b> Représentations graphiques d'une série statistique quantitative ..... | 178 |
| <b>3</b> Médiane et quartiles .....                                            | 180 |
| <b>4</b> Moyenne et écart-type .....                                           | 182 |
| <b>Méthode</b> .....                                                           | 184 |
| <b>Exercices</b> .....                                                         | 186 |
| <b>Corrigés</b> .....                                                          | 195 |



# Sommaire

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| <b>Chapitre 7. Probabilités. Échantillonnage</b>        | 205 |
| 1 Expérience aléatoire et simulation                    | 206 |
| 2 Modèle probabiliste                                   | 208 |
| 3 Représentations ensemblistes d'événements             | 210 |
| 4 Probabilité d'un événement                            | 212 |
| 5 Probabilité d'un événement : utilisation d'un tableau | 214 |
| 6 Probabilité d'un événement : utilisation d'un arbre   | 216 |
| 7 Probabilité des événements $A \cap B$ et $A \cup B$   | 218 |
| 8 Notion d'échantillon – Simulation                     | 220 |
| 9 Intervalle de fluctuation                             | 222 |
| Méthode                                                 | 224 |
| Exercices                                               | 226 |
| Corrigés                                                | 234 |

## Partie 4 - Algorithmique

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| <b>Chapitre 8. Algorithmes</b> | 247 |
| 1 Description d'un algorithme  | 248 |
| 2 Boucle et itérateur          | 250 |
| 3 Instruction conditionnelle   | 252 |
| Méthode                        | 254 |
| Exercices                      | 256 |
| Corrigés                       | 262 |

|              |     |
|--------------|-----|
| <b>Index</b> | 269 |
|--------------|-----|

Partie

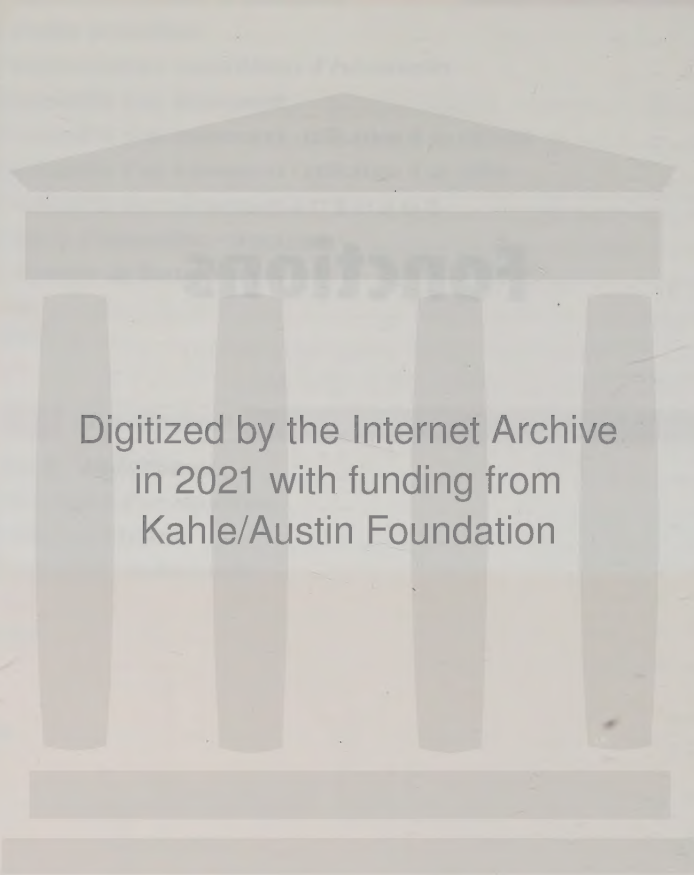
I

Représentation  
des nombres ;

# Fonctions

raisonnement  
mathématiques





Digitized by the Internet Archive  
in 2021 with funding from  
Kahle/Austin Foundation

[https://archive.org/details/isbn\\_9782091826561](https://archive.org/details/isbn_9782091826561)

## Chapitre I

# **Représentation des nombres ; notation et raisonnement mathématiques**

## 1 Les ensembles de nombres

### 1 Définition

L'ensemble des **nombres réels**, noté  $\mathbb{R}$ , est l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons.

On représente cet ensemble par une droite graduée :



### 2 Les différents ensembles de nombres

- L'ensemble des **nombres entiers naturels** est  $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots\}$ .
- L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est :  
 $\mathbb{Z} = \{\dots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dots\}$ .
- L'ensemble des **nombres décimaux**  $\mathbb{D}$  est l'ensemble des nombres dont l'écriture décimale comporte un nombre fini de chiffres après la virgule.  
 Ils s'écrivent aussi sous la forme  $a \times 10^p$ , où  $a$  et  $p$  sont des nombres entiers relatifs.
- L'ensemble des **nombres rationnels**  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme  $\frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  sont des nombres entiers relatifs ( $q \neq 0$ ).

**Remarque :** On a  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

## Exercice résolu



### Placer un nombre dans son ensemble

#### Énoncé

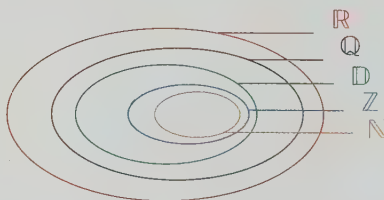
Placer chaque élément de la liste de nombres ci-dessous dans l'ensemble qui lui correspond :

$$-\frac{6}{5} ; \frac{6}{17} ; 0,333\dots ; 8 ;$$

$$4,3 ; \frac{12}{100} ;$$

$$-\frac{5}{11} ; -3 ; 128 ;$$

$$-\frac{3}{8} ; -\frac{1}{\sqrt{2}} ; 10^3 ; \sqrt{3}.$$



## Corrigé commenté

**Indication :** on détermine, dans cette liste, les nombres entiers positifs et négatifs, puis on place ces nombres dans l'ensemble  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ .

8, 128 et  $10^3$  sont des nombres entiers naturels, car  $10^3 = 1\,000$ .

$-3$  est un nombre entier relatif.

**Indication :** on justifie que  $-\frac{6}{5}$ ,  $-\frac{3}{8}$ ,  $\frac{12}{100}$  et 4,3 sont des nombres décimaux, puis on place ces nombres dans l'ensemble qui leur correspond.

$-\frac{6}{5}$ ;  $-\frac{3}{8}$ ;  $\frac{12}{100}$  et 4,3 sont des nombres décimaux, car :

$$-\frac{6}{5} = -1,2; \quad -\frac{3}{8} = -0,375; \quad \frac{12}{100} = 0,12.$$

**Indication :** on justifie que  $0,333\dots$ ,  $\frac{6}{17}$  et  $-\frac{5}{11}$  ne sont pas des nombres décimaux, puis on place ces nombres dans l'ensemble qui leur correspond.

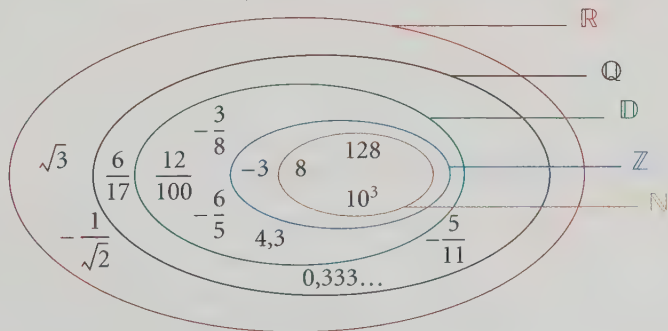
$0,333\dots$ ,  $\frac{6}{17}$  et  $-\frac{5}{11}$  sont des nombres rationnels car :  $0,333\dots$  est un nombre dont le nombre de chiffres après la virgule est illimité et périodique.

$\frac{6}{17}$  et  $-\frac{5}{11}$  sont de la forme  $\frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont des nombres entiers, et lors de la division leurs nombres de chiffres après la virgule sont illimités.

**Indication :** on justifie que  $\sqrt{3}$  et  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  ne sont pas des nombres rationnels, puis on place ces nombres dans l'ensemble qui leur correspond.

$\sqrt{3}$  et  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  sont des nombres irrationnels car :

$$\sqrt{3} = 1,732\,050\,808\dots; \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0,707\,106\,781\,2\dots$$





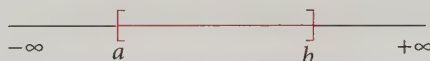
## 2 Les intervalles

### 1 Écriture des intervalles

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a \leq b$ .

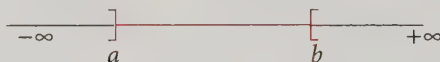
● L'ensemble des nombres réels  $x$  vérifiant la double inégalité  $a \leq x \leq b$  est l'intervalle fermé  $[a ; b]$  d'extrémités  $a$  et  $b$ , où  $a$  et  $b$  sont les bornes de l'intervalle.

Il est représenté sur un axe par un segment :



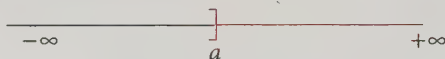
● L'ensemble des nombres réels  $x$  vérifiant la double inégalité  $a < x < b$  est l'intervalle ouvert  $]a ; b[$  d'extrémités  $a$  et  $b$  où  $a$  et  $b$  sont les bornes de l'intervalle.

Il est représenté sur un axe par un segment :



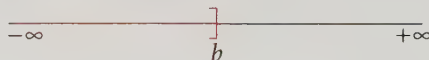
● L'ensemble des nombres réels  $x$  vérifiant l'inégalité  $x > a$  est l'intervalle ouvert en  $a$  noté  $]a ; +\infty[$ .

Il est représenté sur un axe par une demi-droite :



● L'ensemble des nombres réels  $x$  vérifiant l'inégalité  $x \leq b$  est l'intervalle fermé en  $b$  noté  $] -\infty ; b]$ .

Il est représenté sur un axe par une demi-droite :



**Remarque :**  $\mathbb{R}$  est l'intervalle  $] -\infty ; +\infty[$ .

### 2 Intersection et réunion d'intervalles

● L'intersection de deux intervalles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cap B$ , est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à la fois aux deux intervalles.

● La réunion de deux intervalles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cup B$ , est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à l'un ou l'autre des deux intervalles.

## Exercice résolu

## Déterminer des intersections et des réunions d'intervalles

## Énoncé

1. Représenter sur la droite des réels les intervalles suivants :

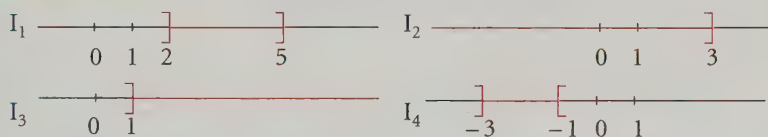
$$I_1 = ]2; 5]; \quad I_2 = ]-\infty; 3]; \quad I_3 = ]1; +\infty]; \quad I_4 = ]-3; -1[.$$

2. Déterminer les intervalles :

$$\bullet I_1 \cap I_2; \quad \bullet I_2 \cup I_3; \quad \bullet I_2 \cap I_3; \quad \bullet I_1 \cap I_4; \quad \bullet I_1 \cup I_2.$$

## Corrigé commenté

1. On représente chacun des intervalles séparément :



2. Pour chaque cas, on représente les intervalles sur une même droite ; on hachure dans un sens le premier intervalle, puis dans l'autre sens le deuxième intervalle.

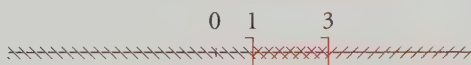
• Pour une intersection, on choisit les points sur la droite qui sont hachurés deux fois.

• Pour une réunion, on choisit les points sur la droite qui sont hachurés au moins une fois.

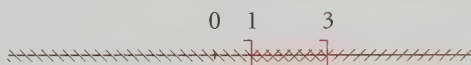
$$I_1 \cap I_2 = ]2; 3].$$



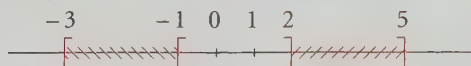
$$I_2 \cup I_3 = \mathbb{R}.$$



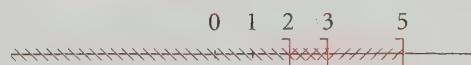
$$I_2 \cap I_3 = ]1; 3].$$



$$I_1 \cap I_4 = \emptyset.$$



$$I_1 \cup I_2 = ]-\infty; 5].$$



## Méthode

## Les réflexes à avoir

**R1** Le symbole «  $\in$  » se lit « appartient à ».

**R2** Le symbole «  $\subset$  » se lit « inclus dans ».

**R3** Le symbole «  $\cap$  » se lit « inter » et le symbole «  $\cup$  » se lit « union ».

L'intersection de deux ensembles ou de deux intervalles A et B est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à A et à B.

La réunion de deux ensembles ou de deux intervalles A et B est l'ensemble des nombres qui appartiennent à A ou à B ou à A et B.

**R4** Pour classer les nombres dans leur ensemble, on choisit :

- d'abord les nombres entiers positifs et négatifs ;
- puis les nombres décimaux ;
- puis les nombres rationnels ;
- et enfin les nombres irrationnels.

**R5** L'ensemble des nombres réels vérifiant à la fois deux inégalités s'exprime par une intersection d'intervalles.

L'ensemble des nombres réels vérifiant l'une ou l'autre des deux inégalités s'exprime par une réunion d'intervalles.

**R6** La négation d'une proposition A se note  $\bar{A}$ .

$\bar{A}$  est donc la proposition contraire de A.

**R7** La négation d'une proposition commençant par « pour tous les nombres réels » est « il existe au moins un nombre réel ».

**R8** La négation de « A et B » dans une proposition est « non A ou non B ».

**R9** Soit A et B deux propositions.

- Une implication est une proposition construite de la façon suivante : « si A, alors B ». On la note  $A \Rightarrow B$ .
- La réciproque de « si A, alors B » est « si B, alors A ».
- La contraposée de « si A, alors B » est « si non B, alors non A ».

**R10** Soit A et B deux propositions.

- Une équivalence est une proposition pour laquelle l'implication et la réciproque sont vraies. On la note  $A \Leftrightarrow B$ .

**R11** Pour démontrer qu'une proposition est fausse, il suffit de trouver un exemple qui ne convient pas.

**R12** Le raisonnement pas disjonction des cas consiste à démontrer une proposition en distinguant plusieurs cas.

**R13** Tout nombre entier naturel pair s'écrit sous la forme  $2p$ , où  $p \in \mathbb{N}$ .  
 Tout nombre entier naturel impair s'écrit sous la forme  $2p + 1$ , où  $p \in \mathbb{N}$ .

## Les pièges à éviter

On dit qu'un nombre « appartient à » un ensemble et qu'un ensemble  $A$  est « inclus » dans un ensemble  $B$ .

*Exemple :*  $2, 1 \in \mathbb{D}$ , mais  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ .

Il faut bien faire la différence entre un nombre décimal et un nombre rationnel :

- un nombre décimal comporte un nombre fini de chiffres après la virgule ;
- un nombre rationnel comporte un nombre illimité et périodique de chiffres après la virgule ; il peut s'écrire sous la forme  $\frac{p}{q}$ .

*Exemples :*  $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$  ;  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ , mais  $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$  car  $\frac{1}{2} = 0,5$  et  $\frac{1}{3} = 0,333\dots$

Le sens mathématique de la conjonction « et » est le même que celui du langage courant.

Le sens mathématique de la conjonction « ou » n'est pas le même que celui du langage courant.

Dans le langage courant, le « ou » est exclusif. Par exemple, si dans un restaurant le menu indique « fromage ou dessert », cela signifie que l'on ne peut pas choisir les deux.

Dans le langage mathématique, le « ou » est inclusif. Dans ce cas, « fromage ou dessert » signifie que l'on peut choisir le fromage ou le dessert ou les deux.

## Exercices

### Exercices d'application

#### 1 Utiliser la notation « $\in$ »

➔ R1 ➔ corrigé p. 20

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

- |                                    |                                   |                           |                            |
|------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. $-2 \in \mathbb{N}$ .           | 2. $3 \in \mathbb{Z}$ .           | 3. $1,6 \in \mathbb{N}$ . | 4. $10,5 \in \mathbb{D}$ . |
| 5. $-\frac{5}{4} \in \mathbb{D}$ . | 6. $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ . | 7. $3 \in \mathbb{Q}$ .   | 8. $-1 \in \mathbb{R}$ .   |
| 9. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ .     | 10. $-\sqrt{7} \in \mathbb{R}$ .  |                           |                            |

#### 2 Utiliser la notation « $\subset$ »

➔ R2 ➔ corrigé p. 20

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

- |                                      |                                      |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$ . | 2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ . | 3. $\mathbb{D} \subset \mathbb{N}$ . | 4. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$ . |
| 5. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$ . | 6. $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ . | 7. $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$ . | 8. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . |

#### 3 Utiliser les notations « $\in$ » et « $\subset$ »

➔ R1, R2 ➔ corrigé p. 20

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

- |                                  |                                    |                             |
|----------------------------------|------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $0 \in \mathbb{Z}$ .          | 2. $4,2 \subset \mathbb{D}$ .      | 3. $\mathbb{R} \in 2,5$ .   |
| 4. $\mathbb{N} \in \mathbb{D}$ . | 5. $-\frac{3}{7} \in \mathbb{R}$ . | 6. $1 \subset \mathbb{D}$ . |

#### 4 Utiliser les notations « $\cap$ » et « $\cup$ »

➔ R3 ➔ corrigé p. 20

On considère les ensembles de nombres  $A = \{-1 ; 0 ; 1 ; 2\}$  et  $B = \{1 ; 1,1 ; 1,2\}$ .  
Écrire les ensembles de nombres suivants.

- |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $A \cap B$ .          | 2. $A \cap \mathbb{N}$ . | 3. $A \cap \mathbb{Z}$ . |
| 4. $B \cap \mathbb{N}$ . | 5. $B \cap \mathbb{R}$ . | 6. $A \cup B$ .          |

#### 5 Utiliser les notations « $\subset$ », « $\cap$ » et « $\cup$ »

➔ R2, R3 ➔ corrigé p. 20

On considère les ensembles de nombres  $A = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0\}$ ,  $B = \{2,1 ; 2,2 ; 2,3\}$  et  $C = \{-1\}$ .

Écrire les ensembles de nombres suivants.

- |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $A \cap B$ .          | 2. $A \cap C$ .          | 3. $B \cap C$ .          | 4. $A \cap \mathbb{N}$ . |
| 5. $B \cap \mathbb{Z}$ . | 6. $C \cap \mathbb{Q}$ . | 7. $A \cap \mathbb{R}$ . | 8. $A \cup C$ .          |
| 9. $B \cup C$ .          | 10. $A \cup B$ .         |                          |                          |



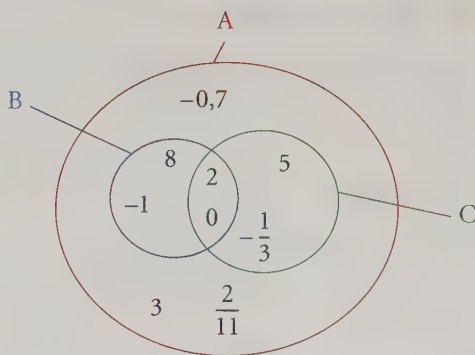
## 6 Écrire des ensembles de nombres

➔ R3 ➔ corrigé p. 20

On considère les ensembles de nombres A, B et C représentés ci-dessous.

Écrire les ensembles de nombres suivants.

1. A, B et C.
2.  $A \cap B$ .
3.  $A \cap C$ .
4.  $B \cap C$ .
5.  $A \cap \mathbb{N}$ .
6.  $A \cap \mathbb{D}$ .
7.  $B \cap \mathbb{Z}$ .
8.  $C \cap \mathbb{Q}$ .
9.  $A \cap B \cap C$ .
10.  $A \cup C$ .
11.  $B \cup C$ .
12.  $A \cup B$ .



## 7 Utiliser la notation « $\in$ »

➔ R1 ➔ corrigé p. 21

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

1.  $-2 \in ]-2 ; 5]$ .
2.  $3 \in [0 ; +\infty[$ .
3.  $1,6 \in ]-\infty ; 1]$ .
4.  $0 \in ]-\infty ; 0]$ .
5.  $-1 \in [-3 ; 3]$ .
6.  $\sqrt{2} \in [0 ; 3]$ .

## 8 Utiliser la notation « $\subset$ »

➔ R2 ➔ corrigé p. 21

1. Représenter sur la droite des réels chacun des intervalles suivants.

$$I_1 = [0 ; +\infty[ ; I_2 = [-1 ; +\infty[ ; I_3 = [1 ; 2] ; I_4 = [0 ; 2[ ; I_5 = ]-3 ; 4[ ; I_6 = [-3 ; 5].$$

2. Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

$$I_1 \subset I_2 ; I_3 \subset I_4 ; I_5 \subset I_6.$$

## 9 Utiliser les notations « $\cap$ » et « $\cup$ »

➔ R3 ➔ corrigé p. 21

1. Représenter sur la droite des réels chacun des intervalles suivants.

$$I_1 = [-1 ; +\infty[ ; I_2 = ]1 ; 6[ ; I_3 = ]-\infty ; 0] ; I_4 = [-3 ; 1].$$

2. Déterminer chacun des intervalles suivants.

$$I_1 \cap I_2 ; I_3 \cap I_4 ; I_2 \cup I_3 ; I_1 \cup I_4.$$

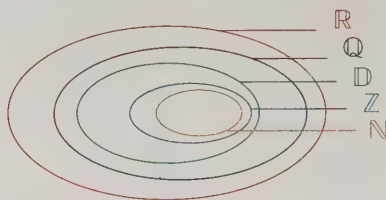
## Exercices d'entraînement

### 10 Utiliser la notation « $\in$ »

➔ R1, R4 ➔ corrigé p. 21

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes, puis placer chaque nombre dans l'ensemble qui lui correspond.

- |                                    |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $0,6 \in \mathbb{N}$ .          | 2. $-1,2 \in \mathbb{Z}$ .        |
| 3. $5 \in \mathbb{N}$ .            | 4. $-8 \in \mathbb{D}$ .          |
| 5. $-\frac{1}{8} \in \mathbb{D}$ . | 6. $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ . |
| 7. $-4,7 \in \mathbb{Q}$ .         | 8. $-6,325 \in \mathbb{R}$ .      |
| 9. $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$ .     | 10. $-\pi \in \mathbb{R}$ .       |



### 11 Représenter l'ensemble des solutions d'une inéquation

➔ corrigé p. 22

Traduire, pour chaque cas, l'inégalité ou la double inégalité par un intervalle, puis représenter l'ensemble de ces nombres réels sur une droite graduée.

- |                        |                      |
|------------------------|----------------------|
| 1. $x \leq -3$ .       | 2. $x > -6$ .        |
| 3. $0 \leq x \leq 4$ . | 4. $-3 < x \leq 0$ . |

### 12 Intersection et réunion d'intervalles

➔ R3, R5 ➔ corrigé p. 22

Traduire, pour chaque cas, l'inégalité ou la double inégalité par une intersection ou une réunion d'intervalles, puis représenter l'ensemble de ces nombres réels sur une droite graduée.

- |                             |                                       |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| 1. $x \leq 0$ et $x > -1$ . | 2. $-1 \leq x \leq 3$ et $x \geq 3$ . |
| 3. $x \leq -1$ ou $x > 4$ . | 4. $3 < x \leq 5$ ou $x > 2$ .        |

### 13 Formuler la négation d'une proposition

➔ R6, R7 ➔ corrigé p. 23

Pour chaque proposition A, écrire sa négation  $\bar{A}$  et en déduire si c'est la proposition A qui est vraie ou si c'est sa négation  $\bar{A}$ .

- A : « Tous les nombres entiers relatifs sont positifs ».
- A : « Tous les nombres réels élevés au carrés sont positifs ou nuls ».
- A : « Il existe au moins un nombre entier strictement négatif ».

**14 Formuler la négation d'une proposition**

➔ R6, R8

➔ corrigé p. 23

Pour chaque proposition A, écrire sa négation  $\bar{A}$  et en déduire si c'est la proposition A qui est vraie ou si c'est sa négation  $\bar{A}$ .

1. A : « Tous les multiples de 5 sont pairs ».
2. A : « Il existe au moins un multiple de 3 qui n'est pas impair ».
3. A : « 6 est un multiple de 2 et de 3 ».

**15 Distinguer l'implication, la réciproque et la contraposée**

➔ R9

➔ corrigé p. 23

1. Répondre par Vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes.
  - a) « Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , si  $a = b$ , alors  $a^2 = b^2$  ».
  - b) « Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , si  $a^2 = b^2$ , alors  $a = b$  ».
  - c) « Pour tous nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , si  $a \leq b$ , alors  $ac \leq bc$  ».
2. Écrire la réciproque de chacune des affirmations de la question 1.
3. Écrire la contraposée de chacune des affirmations de la question 1.

**16 Équivalence**

➔ R10

➔ corrigé p. 24

Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ?

1. Proposition A :  $a^2 = b^2$  ; proposition B :  $a = b$  ou  $a = -b$ .
2. Lorsque  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels non nuls de même signe.

Proposition A :  $a \leq b$  ; proposition B :  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ .

**17 Utiliser le contre exemple**

➔ R11

➔ corrigé p. 24

Montrer à l'aide d'un contre exemple que chaque proposition suivante est fausse.

1. « Pour tout nombre réel  $x$ ,  $x^2 \geq x$  ».
2. « Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , si  $a^2 = b^2$ , alors  $a = b$  ».
3. « Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  non nuls, si  $a < b$ , alors  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  ».
4. «  $x > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4$  ».
5. « La réunion de deux intervalles est un intervalle ».

**18 Utiliser le raisonnement par disjonction des cas**

➔ R12, R13

➔ corrigé p. 24

Montrer à l'aide d'un raisonnement par disjonction des cas que la proposition suivante est vraie : « Pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $n(n+1)$  est divisible par 2. »

- 1** 1. Faux. 2. Vrai.  
3. Faux. 4. Vrai.  
5. Vrai. 6. Faux.  
7. Vrai. 8. Vrai.  
9. Faux. 10. Vrai.

- 2** 1. Vrai. 2. Vrai.  
3. Faux. 4. Faux.  
5. Faux. 6. Vrai.  
7. Faux. 8. Vrai.

- 3** 1. Vrai. 2. Faux,  $4, 2 \in \mathbb{D}$ .  
3. Faux,  $2, 5 \in \mathbb{R}$ . 4. Faux,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$ .  
5. Vrai. 6. Faux,  $1 \in \mathbb{D}$ .

- 4** 1.  $A \cap B = \{1\}$ . 2.  $A \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2\}$ .  
3.  $A \cap \mathbb{Z} = A$ . 4.  $B \cap \mathbb{N} = \{1\}$ .  
5.  $B \cap \mathbb{R} = B$ . 6.  $A \cup B = \{-1; 0; 1; 1,1; 1,2; 2\}$ .

- 5** 1.  $A \cap B = \{ \}$ . 2.  $A \cap C = \{-1\}$ .  
3.  $B \cap C = \{ \}$ . 4.  $A \cap \mathbb{N} = \{0\}$ .  
5.  $B \cap \mathbb{Z} = \{ \}$ . 6.  $C \cap \mathbb{Q} = C$ .  
7.  $A \cap \mathbb{R} = A$ . 8.  $A \cup C = A$ .  
9.  $B \cup C = \{-1; 2,1; 2,2; 2,3\}$ .  
10.  $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 2,1; 2,2; 2,3\}$ .

- 6** 1.  $A = \{-1; -0,7; -\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{11}; 2; 3; 5; 8\}$ ,  $B = \{-1; 0; 2; 8\}$  et  $C = \{-\frac{1}{3}; 0; 2; 5\}$ .  
2.  $A \cap B = B$ .  
3.  $A \cap C = C$ .  
4.  $B \cap C = \{0; 2\}$ .  
5.  $A \cap \mathbb{N} = \{0; 2; 3; 5; 8\}$ .  
6.  $A \cap \mathbb{D} = \{-1; -0,7; 0; 2; 3; 5; 8\}$ .  
7.  $B \cap \mathbb{Z} = B$ .  
8.  $C \cap \mathbb{Q} = C$ .  
9.  $A \cap B \cap C = B \cap C = \{0; 2\}$ .  
10.  $A \cup C = A$ .  
11.  $B \cup C = \{-1; -\frac{1}{3}; 0; 2; 5; 8\}$ .  
12.  $A \cup B = A$ .

**7** 1. Faux.

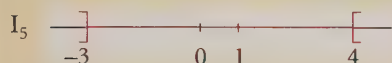
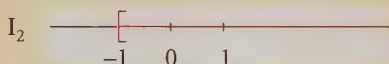
2. Vrai.

3. Faux.

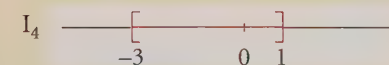
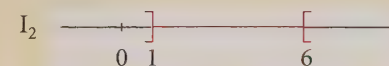
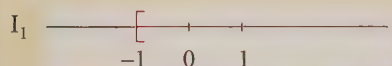
4. Vrai.

5. Vrai.

6. Vrai.

**8** 1. Représentation de chacun des intervalles.

2. Vrai ; Faux ; Vrai.

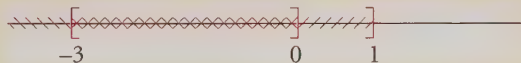
**9** 1. Représentation de chacun des intervalles.

2.

$$I_1 \cap I_2 = I_2.$$



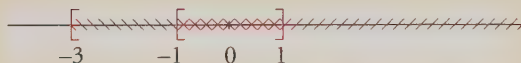
$$I_3 \cap I_4 = [-3 ; 0].$$



$$I_2 \cup I_3 = ]-\infty ; 0] \cup ]1 ; 6[.$$



$$I_1 \cup I_4 = [-3 ; +\infty[.$$

**10** 1. Faux.

2. Faux.

3. Vrai.

4. Vrai.

5. Vrai.

6. Vrai.

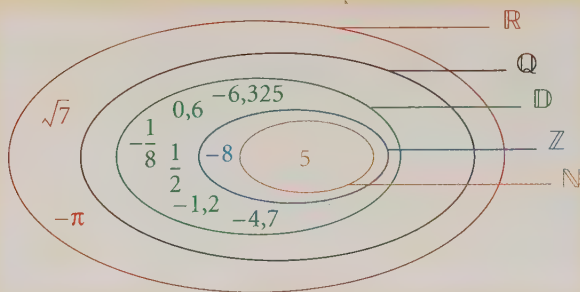


7. Vrai.

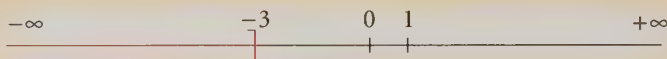
8. Vrai.

9. Faux.

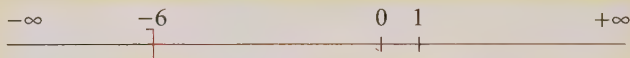
10. Vrai.



**11** 1. Les solutions sont les nombres réels  $x$  inférieurs ou égaux à  $-3$ , ce qui correspond à l'intervalle  $]-\infty ; -3]$ .



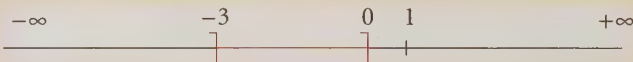
2. Les solutions sont les nombres réels  $x$  strictement supérieurs à  $-6$  ce qui correspond à l'intervalle  $]-6 ; +\infty[$ .



3. Les solutions sont les nombres réels  $x$  compris entre 0 et 4 inclus, ce qui correspond à l'intervalle  $[0 ; 4]$ .

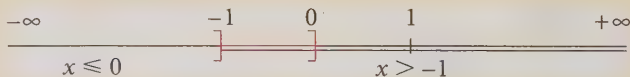


4. Les solutions sont les nombres réels  $x$  compris entre  $-3$  et 0.  
 $-3$  exclu et 0 inclus, ce qui correspond à l'intervalle  $] -3 ; 0 ]$ .



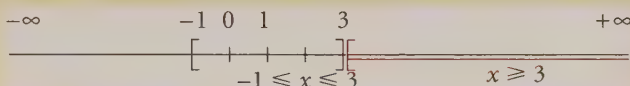
**12** 1. L'ensemble des nombres réels cherchés correspond à une intersection d'intervalle qui s'écrit  $]-\infty ; 0] \cap ]-1 ; +\infty[$  soit  $]-1 ; 0]$ .

Représentation des solutions :



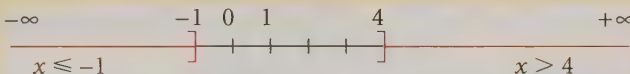
2. L'ensemble des nombres réels cherchés correspond à une intersection d'intervalles qui s'écrit  $[-1 ; 3] \cap [3 ; +\infty[$ , soit  $\{3\}$ .

Représentation des solutions :



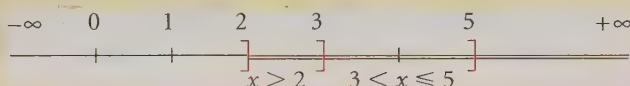
3. L'ensemble des nombres réels cherchés correspond à une réunion d'intervalles qui s'écrit  $] -\infty ; -1] \cup ]4 ; +\infty[$ .

Représentation des solutions :



4. L'ensemble des nombres réels cherchés correspond à une réunion d'intervalles qui s'écrit  $]3 ; 5] \cup ]2 ; +\infty[$ , soit  $]2 ; +\infty[$ .

Représentation des solutions :



**13** 1.  $\bar{A}$  : « Il existe au moins un nombre entier relatif négatif ».

La proposition  $\bar{A}$  est vraie.

2.  $A$  : « Il existe au moins un nombre réel élevé au carré qui est strictement négatif ».

La proposition  $A$  est vraie.

3.  $\bar{A}$  : « Tous les nombres entiers sont positifs ou nuls ».

La proposition  $A$  est vraie.

**14** 1.  $\bar{A}$  : « Il existe au moins un multiple de 5 qui est impair ».

La proposition  $\bar{A}$  est vraie.

2.  $\bar{A}$  : « Tous les multiples de 3 sont impairs ».

La proposition  $A$  est vraie.

3.  $\bar{A}$  : « 6 n'est pas un multiple de 2 ou n'est pas un multiple de 3 ».

La proposition  $A$  est vraie.

**15** 1. a) Vrai. b) Faux. c) Faux.

2. a) « Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , si  $a^2 = b^2$ , alors  $a = b$  ».

b) « Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , si  $a = b$ , alors  $a^2 = b^2$  ».

c) « Pour tous nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , si  $ac \leq bc$ , alors  $a \leq b$  ».

3. a) « Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , si  $a^2 \neq b^2$ , alors  $a \neq b$  ».  
 b) « Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , si  $a \neq b$ , alors  $a^2 \neq b^2$  ».  
 c) « Pour tous nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , si  $ac > bc$ , alors  $a > b$  ».

**16** 1. Vrai. 2. Vrai.

**17** 1. En choisissant  $x = 0,5$ , on a  $0,5^2 = 0,25$ , c'est-à-dire  $0,5^2 < 0,5$ .

2. En choisissant  $a = 2$  et  $b = -2$ , on a  $a^2 = (-2)^2$ , mais  $2 \neq -2$ .

3. En choisissant  $a = -4$  et  $b = 2$ , on a  $-\frac{1}{4} = -0,25$  et  $\frac{1}{2} = 0,5$ , soit  $-\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ .

4. En choisissant  $a = -3$ , on a  $(-3)^2 = 9 > 4$ , mais  $-3 < 2$ .

5. En choisissant deux intervalles  $I_1$  et  $I_2$  tels que  $I_1 = [0 ; 1]$  et  $I_2 = [2 ; 3]$ ,  
 $I_1 \cup I_2 = [0 ; 1] \cup [2 ; 3]$  qui n'est pas un intervalle.

**18** • Cas 1 : si  $n$  est un nombre entier naturel pair, alors  $n$  est multiple de 2 et on peut écrire  $n = 2p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).

Pour  $n = 2p$ , alors  $n(n+1) = 2p \times (n+1)$ , soit  $n(n+1) = 2[p \times (n+1)]$ ,  
 donc  $n(n+1)$  est divisible par 2.

• Cas 2 : si  $n$  est un nombre entier naturel impair on peut écrire  $n = 2p + 1$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).

Pour  $n = 2p + 1$ ,

alors  $n(n+1) = n \times (2p + 1 + 1) = n \times (2p + 2) = 2n \times (p + 1) = 2[n \times (p + 1)]$ ,  
 donc  $n(n+1)$  est divisible par 2.

**Comportement  
global  
d'une fonction.  
Lectures graphiques**

# 1 Notion de fonction. Ensemble de définition

## 1 Définition d'une fonction

- Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

Une fonction définie sur  $I$  est un « dispositif mathématique » qui à chaque valeur  $x$  de  $I$  associe un unique nombre réel noté  $f(x)$ .

$f(x)$  est appelé l'**image** de  $x$  par  $f$ .

$f(x)$  a pour **antécédent**  $x$  par la fonction  $f$ .

**Remarque :** Il ne faut pas confondre  $f(x)$  et  $f$  :

- $f$  est la fonction ;
- $f(x)$  est un nombre réel, c'est l'image de  $x$  par la fonction  $f$ .

### • Exemple

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -2x^2 + 3$ .

L'image de 3 par  $f$ , notée  $f(3)$ , est successivement égale à :

$$f(3) = -2 \times 3^2 + 3; \quad f(3) = -2 \times 9 + 3;$$

$$f(3) = -18 + 3; \quad f(3) = -15.$$

On dit que  $-15$  est l'image de 3 par  $f$  ou que 3 est un antécédent de  $-15$  par  $f$ .

## 2 Ensemble de définition d'une fonction

- La partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  sur laquelle est définie la fonction s'appelle ensemble de définition de cette fonction.

$x$  prend ses valeurs dans cet ensemble.

### • Exemple

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty ; 2[ \cup ] 2 ; +\infty [$  par  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ .

La fonction  $f$  n'est pas définie pour  $x = 2$ , car la valeur 2 annule le dénominateur. Le dénominateur d'un quotient n'est jamais nul.

## Exercices résolus

### → 1. Calculer des images

#### Énoncé

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ .

Déterminer les images par  $f$  des nombres réels  $x_1 = \frac{1}{2}$  et  $x_2 = -1$ .



**Corrigé commenté**

**Indication :** on calcule  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $f(-1)$ .

• Pour  $x_1 = \frac{1}{2}$ , on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \frac{1}{8} - 2 \times \frac{1}{4} + 3;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{2}{4} + 3 = \frac{1}{8} - \frac{4}{8} + \frac{24}{8} = \frac{21}{8}.$$

• Pour  $x_2 = -1$ , on a :

$$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 3;$$

$$f(-1) = -1 - 2 \times 1 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0.$$

L'image de  $\frac{1}{2}$  par  $f$  est  $\frac{21}{8}$ ;

l'image de  $-1$  par  $f$  est  $0$ .

## ➔ 2. Calculer des antécédents

**Énoncé**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^2 - 3$ .

Déterminer, s'ils existent, les antécédents par  $g$  des nombres réels suivants :

$$y_1 = 1, y_2 = -5 \text{ et } y_3 = -3.$$

**Corrigé commenté**

**Indication :** on résout les équations  $g(x) = 1$ ,  $g(x) = -5$  et  $g(x) = -3$ .

• Pour  $y_1 = 1$ , on a l'équation  $x^2 - 3 = 1$  successivement équivalente à :

$$x^2 = 4; x = \sqrt{4} \text{ ou } x = -\sqrt{4}; x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

• Pour  $y_2 = -5$ , on a l'équation :

$$x^2 - 3 = -5, \text{ soit } x^2 = -2.$$

Cette équation n'a pas de solution réelle.

• Pour  $y_3 = -3$ , on a l'équation  $x^2 - 3 = -3$  successivement équivalente à :

$$x^2 = 3 - 3; x^2 = 0; x = 0.$$

Les antécédents de  $1$  par  $g$  sont  $-2$  et  $2$ ;

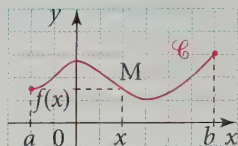
$-5$  n'a pas d'antécédent par  $g$  et l'antécédent de  $-3$  par  $g$  est  $0$ .

## 2 Représentation graphique d'une fonction

• Soit  $f$  une fonction définie sur  $I = [a ; b]$ .

La courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  est l'ensemble des points  $M(x ; y)$  tels que :

$$x \in I \text{ et } y = f(x).$$



### • Exemple

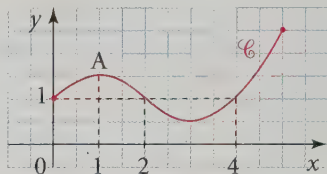
Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0 ; 5]$  dont on donne la représentation graphique dans le plan rapporté à un repère.

On peut lire sur le graphique :

•  $A\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$  appartient à  $\mathcal{C}$  ou encore  $f(1) = \frac{3}{2}$  :

l'image de 1 par  $f$  est  $\frac{3}{2}$ .

•  $f(0) = 1$ ,  $f(2) = 1$  et  $f(4) = 1$  ; 1 a pour antécédents par  $f$  : 0, 2 et 4.



## Exercices résolus

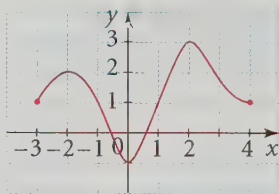
### ➔ 1. Lire sur un graphique

#### Énoncé

On donne la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie sur  $[-3 ; 4]$  dans le plan rapporté à un repère.

Déterminer graphiquement  $f(-2)$  et  $f(2)$ .

Déterminer graphiquement les antécédents de 1 par  $f$ .



#### Corrigé commenté

**Indication :** on se positionne en  $-2$  sur l'axe des abscisses et on cherche le point de la courbe d'abscisse  $-2$  ; on lit alors son ordonnée  $f(-2)$ .

L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse  $-2$  est 2. Donc  $f(-2) = 2$ .

L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 2 est 3. Donc  $f(2) = 3$ .

**Conséquence :** on peut dire que 2 et 3 sont les images respectives de  $-2$  et 2 par  $f$ .

**Indication :** on se positionne en 1 sur l'axe des ordonnées et on cherche les points de la courbe d'ordonnée 1. On lit alors leurs abscisses.

Il existe quatre points de la courbe dont l'ordonnée est 1. Leurs abscisses respectives sont  $-3$  ;  $-1$  ;  $1$  et  $4$ .

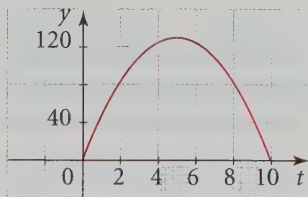
Ainsi 1 a quatre antécédents par  $f$  :  $-3$  ;  $-1$  ;  $1$  et  $4$ .

**Conseil :** pour faire cette lecture graphique, on peut tracer la droite d'équation  $y = 1$ .

## ➔ 2. Résoudre graphiquement un problème

### Énoncé

À l'instant  $t = 0$ , on lance un projectile à partir du sol. La hauteur  $y$  (en m) du projectile en fonction du temps  $t$  (en s) est donnée par la courbe.



1. Quelle est la hauteur atteinte par le projectile au bout de 2 s ?
2. Au bout de combien de temps le projectile retombe-t-il au sol ?
3. Entre quels instants la hauteur du projectile est-elle au moins égale à 80 m ?

### Corrigé commenté

**Indication :** lire sur la courbe l'ordonnée du point d'abscisse 2.

1. L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 2 est 80.  
Au bout de 2 s, le projectile atteint une hauteur de **80 m**.

**Indication :** lire sur la courbe le point d'ordonnée égale à 0.

2. Il y a deux points de la courbe dont l'ordonnée est nulle.  
Ces points ont pour abscisses 0 et 10.

Or le point de coordonnées  $(0 ; 0)$  correspond au lancement du projectile, donc le projectile retombe au sol **au bout de 10 s**.

**Indication :** lire sur la courbe les abscisses des points dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 80.

3. Tous les points dont l'abscisse est comprise entre 2 et 8 ont une ordonnée supérieure ou égale à 80. Ainsi le projectile aura atteint une hauteur supérieure ou égale à 80 m **entre les instants  $t = 2$  et  $t = 8$** .

### 3 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

#### 1 Résolution graphique d'une équation

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 0$  revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $y = 0$ .

#### 2 Résolution graphique d'une inéquation

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

● Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) > 0$  revient à déterminer les abscisses des points de la courbe  $\mathcal{C}$  situés au-dessus de la droite d'équation  $y = 0$ .

● Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) < 0$  revient à déterminer les abscisses des points de la courbe  $\mathcal{C}$  situés au-dessous de la droite d'équation  $y = 0$ .

## Exercices résolus

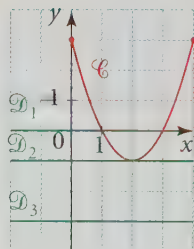
### 1. Résoudre graphiquement des équations

#### Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 4]$  et les droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  d'équations respectives  $y = 0$ ,  $y = -1$  et  $y = -3$ .

Résoudre graphiquement les équations

$f(x) = 0$ ,  $f(x) = -1$  et  $f(x) = -3$ .



#### Corrigé commenté

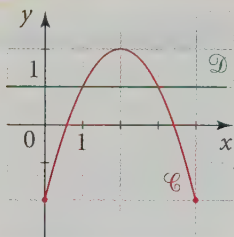
**Indication :** on résout graphiquement sur  $[0 ; 4]$  l'équation  $f(x) = 0$  en déterminant les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{D}_1$ .

- La courbe  $\mathcal{C}$  coupe la droite  $\mathcal{D}_1$  aux points d'abscisses  $x = 1$  et  $x = 3$ . Donc les solutions sont 1 et 3.
- La courbe  $\mathcal{C}$  coupe la droite  $\mathcal{D}_2$  au point d'abscisse  $x = 2$ . Donc la solution est 2.
- La courbe  $\mathcal{C}$  ne coupe pas la droite  $\mathcal{D}_3$ . Donc il n'y a pas de solution.

## 2. Résoudre graphiquement une inéquation

### Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 4]$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 1$ . Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) < 1$ .



### Corrigé commenté

**Indication :** on résout graphiquement sur  $[0 ; 4]$  l'inéquation  $f(x) < 1$  en déterminant les abscisses des points de  $\mathcal{C}$  situées au-dessous de  $\mathcal{D}$ .

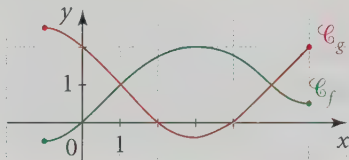
La courbe  $\mathcal{C}$  est située au-dessous de la droite d'équation  $y = 1$  pour  $x \in [0 ; 1[ \cup ]3 ; 4]$ . Donc l'ensemble des solutions est  $[0 ; 1[ \cup ]3 ; 4]$ .

**Conséquence :** les valeurs 1 et 3 sont exclues de l'intervalle des solutions, car pour ces abscisses la courbe  $\mathcal{C}$  coupe la droite  $\mathcal{D}$ .

## 3. Résoudre graphiquement équation et inéquations

### Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère, on considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[-1 ; 6]$  et leurs courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ . Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$  et les inéquations  $f(x) < g(x)$  et  $f(x) > g(x)$ .



### Corrigé commenté

**Indication :** on résout graphiquement sur  $[-1 ; 6]$  :

- $f(x) = g(x)$  en déterminant les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ;
- $f(x) < g(x)$  en déterminant les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés au-dessous de  $\mathcal{C}_g$  ;
- $f(x) > g(x)$  en déterminant les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés au-dessus de  $\mathcal{C}_g$ .

$\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  se coupent aux points d'abscisse  $x = 1$  et  $x = 5$ . Donc les solutions sont 1 et 5.

$\mathcal{C}_f$  est située au-dessous de la courbe  $\mathcal{C}_g$  pour  $x \in [-1 ; 1[ \cup ]5 ; 6]$ . Donc l'ensemble des solutions est  $[-1 ; 1[ \cup ]5 ; 6]$ .

$\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$  pour  $x \in ]1 ; 5[$ . Donc l'ensemble des solutions est  $]1 ; 5[$ .

## 4 Sens de variation d'une fonction

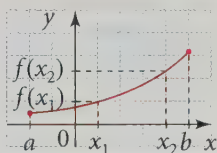
### 1 Définition et propriétés

● Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I = [a; b]$ .

On dit que  $f$  est strictement **croissante** sur  $I$  lorsque pour tout nombre réel  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  tels que  $x_1 \leq x_2$ , on a :  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

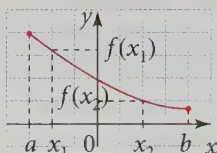
On dit que  $f$  est strictement **décroissante** sur  $I$  lorsque pour tout nombre réel  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  tels que  $x_1 \leq x_2$ , on a :  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

On dit que  $f$  est **constante** sur  $I$  lorsque pour tout nombre réel  $x$  de  $I$ , on a  $f(x) = k$ ;  $k \in \mathbb{R}$ .



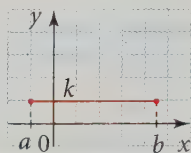
$f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Sa courbe « monte » sur  $I$ .



$f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

Sa courbe « descend » sur  $I$ .



$f$  est constante sur  $I$ .

Sa courbe est « horizontale » sur  $I$ .

● Une fonction strictement croissante sur  $I$  conserve l'ordre : si deux nombres réels de  $I$  sont rangés dans un certain ordre, leurs images sont rangées dans le même ordre.

● Une fonction strictement décroissante sur  $I$  renverse l'ordre : si deux nombres réels de  $I$  sont rangés dans un certain ordre, leurs images sont rangées dans l'ordre contraire.

### 2 Tableau de variation

Le sens de variation d'une fonction se résume dans un tableau de variation : on détermine les intervalles sur lesquels la fonction est strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

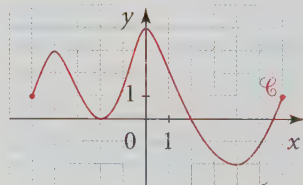
## Exercices résolus

### ➔ 1. Déterminer le sens de variation d'une fonction

#### Énoncé

On donne la représentation graphique  $\mathcal{C}$ , dans le plan rapporté à un repère, d'une fonction  $f$  définie sur  $[-5; 6]$ .

1. Déterminer le sens de variation de  $f$ .
2. Déterminer le tableau de variation de  $f$ .





## Corrigé commenté

**Indication :** on détermine les intervalles sur lesquels  $\mathcal{C}$  « monte » ou « descend », et on écrit alors son sens de variation.

1. • La courbe  $\mathcal{C}$  monte sur les intervalles  $[-5; -4]$ ;  $[-2; 0]$  et  $[4; 6]$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  descend sur les intervalles  $[-4; -2]$  et  $[0; 4]$ .

•  $f$  est strictement croissante sur les intervalles  $[-5; -4]$ ;  $[-2; 0]$  et  $[4; 6]$ .

$f$  est strictement décroissante sur les intervalles  $[-4; -2]$  et  $[0; 4]$ .

2.

|        |    |    |    |   |    |   |
|--------|----|----|----|---|----|---|
| $x$    | -5 | -4 | -2 | 0 | 4  | 6 |
| $f(x)$ | 1  | 3  | 0  | 4 | -2 | 1 |

## 2. Tracer une courbe

### Énoncé

Tracer, dans un repère orthonormal du plan, une représentation graphique  $\mathcal{C}$  correspondant au tableau de variation et au tableau de valeurs suivant :

|        |    |   |    |   |
|--------|----|---|----|---|
| $x$    | -1 | 1 | 3  | 5 |
| $f(x)$ | -3 | 0 | -2 | 1 |

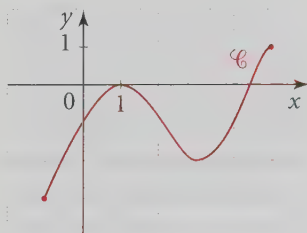
|        |    |      |    |     |
|--------|----|------|----|-----|
| $x$    | 0  | 2    | 4  | 4,5 |
| $f(x)$ | -1 | -0,8 | -1 | 0   |

## Corrigé commenté

Le tableau de variation permet de placer les points de coordonnées :

$(-1; -3)$ ;  $(1; 0)$ ;  $(3; -2)$  et  $(5; 1)$ .

**Conseil :** on se positionne sur le point de coordonnées  $(-1; -3)$  et on joint harmonieusement tous les points en respectant le sens de variation indiqué dans le tableau de variation.



## 5 Minimum, maximum d'une fonction

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0$  un nombre réel appartenant à  $I$ .

- $f$  admet un **minimum** en  $x_0$  si pour tout nombre réel  $x$  de  $I$ , on a  $f(x) \geq f(x_0)$ .
- $f$  admet un **maximum** en  $x_0$  si pour tout nombre réel  $x$  de  $I$ , on a  $f(x) \leq f(x_0)$ .

### Remarques

$f$  peut ne pas avoir de minimum ou de maximum.

Le même nombre  $f(x_0)$  peut être minimum (ou maximum) pour plusieurs valeurs de  $x_0$ .

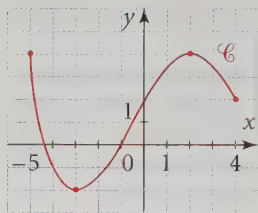
## Exercices résolus

### 1. Déterminer des extremums

#### Énoncé

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-5 ; 4]$ , dont on donne la courbe représentative  $\mathcal{C}$  dans le plan rapporté à un repère.

1. Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur  $[0 ; 4]$ .
2. Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur  $[-5 ; 4]$ .



#### Corrigé commenté

**Indication :** pour déterminer le maximum (ou le minimum), lire l'ordonnée du ou des points les plus « hauts » (ou les plus « bas ») de la courbe, pour les abscisses appartenant à l'intervalle indiqué.

1. • Sur l'intervalle  $[0 ; 4]$ , l'ordonnée du point le plus « haut » de la courbe est  $f(2) = 4$ . Ainsi pour tout  $x \in [0 ; 4]$ ,  $f(x) \leq 4$ , donc  $f$  admet un maximum égal à 4, en  $x = 2$ .  
 • Sur l'intervalle  $[0 ; 4]$ , l'ordonnée du point le plus « bas » de la courbe est  $f(0) = f(4) = 2$ . Ainsi pour tout  $x \in [0 ; 4]$ ,  $f(x) \geq 2$ , donc  $f$  admet un minimum égal à 2, en  $x = 0$  et  $x = 4$ .
2. • Sur l'intervalle  $[-5 ; 4]$ , l'ordonnée du point le plus « haut » de la courbe est  $f(-5) = f(2) = 4$ . Ainsi pour tout  $x \in [-5 ; 4]$ ,  $f(x) \leq 4$ , donc  $f$  admet un maximum égal à 4, en  $x = -5$  et  $x = 2$ .

• Sur l'intervalle  $[-5 ; 4]$ , l'ordonnée du point le plus « bas » de la courbe est  $f(-3) = -2$ . Ainsi pour tout  $x \in [-5 ; 4]$ ,  $f(x) \geq -2$ , donc  $f$  admet un minimum égal à  $-2$ , en  $x = -3$ .

## ➔ 2. Déterminer des extremums

### Énoncé

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-3 ; 5]$ , dont on donne le tableau de variation :

| $x$    | -3 | -1 | 0 | 2 | 5 |
|--------|----|----|---|---|---|
| $f(x)$ | 4  |    | 1 | 1 | 0 |

Diagramme du tableau de variation :  
 - À  $x = -3$ ,  $f(x) = 4$ .  
 - Une flèche descendante va de  $(-3, 4)$  à  $(-1, -3)$ .  
 - Une flèche ascendante va de  $(-1, -3)$  à  $(0, 1)$ .  
 - Une flèche horizontale va de  $(0, 1)$  à  $(2, 1)$ .  
 - Une flèche descendante va de  $(2, 1)$  à  $(5, 0)$ .

Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur  $[-3 ; 5]$ .

### Corrigé commenté

**Indication :** on détermine, si elles existent, la plus petite et la plus grande des valeurs réelles inscrites aux extrémités des flèches du tableau.

Toutes les valeurs de  $f(x)$  sont supérieures ou égales à  $-3$  et inférieures ou égales à  $4$  :  $f$  présente un minimum égal à  $-3$ , en  $x = -1$ , et un maximum égal à  $4$ , en  $x = -3$ .

## ➔ 3. Utiliser l'extremum

### Énoncé

On donne le tableau de variation d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) > 0$ .

| $x$    | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|-----------|
| $f(x)$ |           | 1 |           |

Diagramme du tableau de variation :  
 - À  $x = 3$ ,  $f(x) = 1$ .  
 - Une flèche descendante va de  $(-\infty, 1)$  à  $(3, 1)$ .  
 - Une flèche ascendante va de  $(3, 1)$  à  $(+\infty, 1)$ .

### Corrigé commenté

**Indication :** on détermine le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Toutes les valeurs de  $f(x)$  sont supérieures ou égales à  $1$  :  $f$  présente un minimum égal à  $1$ , en  $x = 3$ .

**Indication :** c'est la définition du minimum qui permet de répondre à la question.

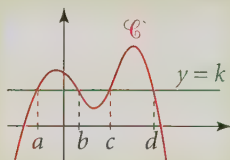
On a donc, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) \geq 1$ .

Or  $1 > 0$  donc, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) > 0$ .

## Méthode

## Les réflexes à avoir

- R1** Tous les nombres réels de l'ensemble de définition possèdent une image et une seule par une fonction, mais un nombre réel n'a pas nécessairement un seul antécédent par une fonction, il peut en avoir 0, un ou plusieurs.
- R2** Chercher l'image d'un nombre réel revient à effectuer un calcul ; chercher un antécédent revient à résoudre une équation.
- R3** Pour tracer une courbe sur la calculatrice, il faut bien choisir ses unités avec la touche *Window* ou *Range*.
- R4** Quand on résout graphiquement une équation ou une inéquation, il faut laisser apparents sur la figure les traits nécessaires à la lecture graphique.
- R5** Pour résoudre graphiquement une inéquation de la forme  $f(x) < k$  ou  $f(x) > k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ), il faut tracer la droite d'équation  $y = k$  sur le graphique.



- R6** Le sens de variation d'une fonction  $f$  sur un intervalle permet de faire des comparaisons d'images de  $f$  :
- si  $f$  est strictement croissante sur  $[a ; b]$ , alors  $f(a) \leq f(b)$  ;
  - si  $f$  est strictement décroissante sur  $[a ; b]$ , alors  $f(a) \geq f(b)$ .
- R7** Il faut être précis dans le vocabulaire :
- soit  $f$  une fonction définie sur  $[a ; b]$ .
  - Si la courbe « monte » sur  $[a ; b]$ , alors la fonction est strictement croissante sur  $[a ; b]$ .
  - Si la courbe « descend » sur  $[a ; b]$ , alors la fonction est strictement décroissante sur  $[a ; b]$ .

**R8** On peut lire graphiquement le maximum et le minimum d'une fonction  $f$  sur un intervalle :

- le maximum est l'ordonnée du point le plus « haut » de la courbe représentative de  $f$  ;
- le minimum est l'ordonnée du point le plus « bas » de la courbe représentative de  $f$ .

**R9** On peut lire dans un tableau de variation le maximum et le minimum d'une fonction  $f$  :

- le maximum est la « plus grande valeur réelle », si elle existe, inscrite aux extrémités des flèches du tableau de variation de  $f$  ;
- le minimum est la « plus petite valeur réelle », si elle existe, inscrite aux extrémités des flèches du tableau de variation de  $f$ .

## Les pièges à éviter

Ne pas commettre l'erreur fréquente de dire que l'équation  $x^2 = a$  possède une seule solution.

La résolution de l'équation  $x^2 = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) dépend du signe de  $a$  :

- si  $a > 0$ , les solutions de l'équation  $x^2 = a$  sont  $x = \sqrt{a}$  et  $x = -\sqrt{a}$  ;
- si  $a = 0$ , la solution de l'équation  $x^2 = a$  est  $x = 0$  ;
- si  $a < 0$ , l'équation  $x^2 = a$  n'a pas de solution réelle.

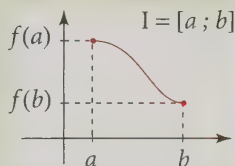
La droite d'équation  $y = 0$  est l'axe des abscisses.

La droite d'équation  $x = 0$  est l'axe des ordonnées.

Une fonction positive n'est pas nécessairement strictement croissante.

Une fonction positive a sa courbe située sur ou au-dessus de l'axe des abscisses, alors que la courbe représentative d'une fonction strictement croissante « monte ».

Une fonction peut, par exemple, être positive et strictement décroissante sur un intervalle  $I$ .



## Exercices

## Exercices d'application

## 1 Calculs d'images et d'antécédents

➔ R2 ➔ corrigé p. 50

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. Déterminer les images par  $f$  des nombres réels  $x$  suivants :

$$x = 0; \quad x = -\frac{1}{2}; \quad x = 3 \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{4}.$$

2. Déterminer les antécédents de 1 par  $f$ .

## 2 Fonction définie à partir d'un tableau de valeurs

➔ R1 ➔ corrigé p. 50

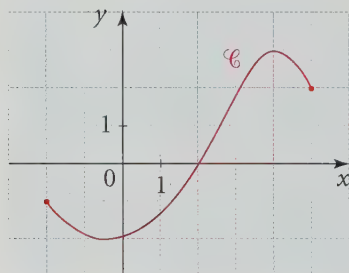
On donne un tableau de valeurs d'une fonction  $f$  définie sur  $[-5 ; 2]$ .

| $x$    | -5   | -4 | -3  | -2 | -1   | 0  | 1    | 2 |
|--------|------|----|-----|----|------|----|------|---|
| $f(x)$ | 11,5 | 7  | 3,5 | 1  | -0,5 | -1 | -0,5 | 1 |

1. Déterminer l'image par  $f$  des nombres réels suivants :  $-5 ; -1 ; 1$ .2. Déterminer l'antécédent de 7 par  $f$ .3. Déterminer les antécédents de 1 par  $f$ .

## 3 Détermination graphique d'images et d'antécédents

➔ R1, R2, R4 ➔ corrigé p. 50

On donne la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère, d'une fonction  $f$  définie sur  $[-2 ; 5]$ .



1. Déterminer graphiquement l'image de  $-2$  par  $f$ .
2. Déterminer  $f(2)$  et  $f(5)$ .
3. Déterminer les antécédents éventuels de  $0$  et  $-3$  par  $f$ .
4. Déterminer le nombre réel  $a$  tel que  $f(a) = 3$ .

#### 4 Lectures graphiques

➔ R2, R3

➔ corrigé p. 50

Une étude montre que la distance de freinage en mètres d'une voiture de marque M, en fonction de la vitesse, est donnée par la fonction :

$$d(v) = 0,006v^2; 0 \leq v \leq 200 \text{ et } v \text{ en km/h.}$$

1. Tracer, sur votre calculatrice, la courbe d'équation  $y = 0,006x^2$ .
2. Déterminer la vitesse à partir de laquelle la distance de freinage est supérieure à  $60$  m.

#### 5 Résolution graphique d'une équation de la forme $f(x) = k$

➔ R4, R5

➔ corrigé p. 51

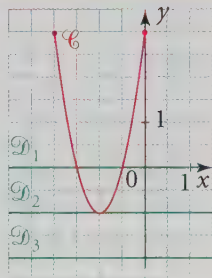
Dans le plan rapporté à un repère, on donne la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $g$  définie sur  $[-2; 0]$ .

Sur ce graphique, on a tracé les droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  d'équations respectives :

$$y = 0, y = -1 \text{ et } y = -2.$$

Résoudre graphiquement sur  $[-2; 0]$  les équations :

$$g(x) = 0, g(x) = -1 \text{ et } g(x) = -2.$$



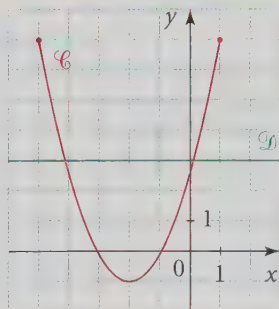
#### 6 Résolution graphique d'une inéquation de la forme $f(x) < k$

➔ R4, R5

➔ corrigé p. 51

Dans le plan rapporté à un repère, on donne la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $g$  définie sur  $[-5; 1]$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 3$ .

Résoudre graphiquement l'inéquation  $g(x) \leq 3$ .

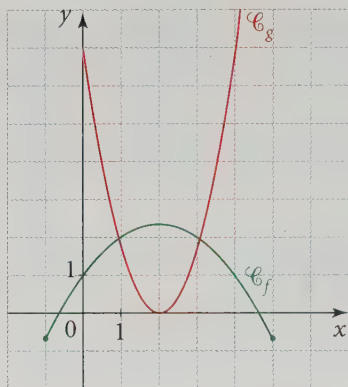


# 7 Résolution graphique d'une inéquation de la forme $f(x) < g(x)$

➔ R4 ➔ corrigé p. 51

Dans le plan rapporté à un repère, on considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[-1; 5]$  et leurs courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$  et les inéquations  $f(x) < g(x)$  et  $f(x) > g(x)$ .



# 8 Détermination du sens de variation d'une fonction définie à partir d'un tableau de variation

➔ R7 ➔ corrigé p. 52

On donne le tableau de variation d'une fonction  $f$  définie sur  $[-10; 10]$ .

| $x$    | -10 | -8 | 0 | 2  | 10 |
|--------|-----|----|---|----|----|
| $f(x)$ | 4   |    | 1 |    | 2  |
|        |     | ↘  | ↗ | ↘  | ↗  |
|        |     | 0  |   | -3 |    |

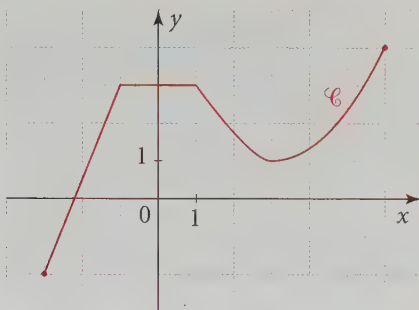
Compléter les phrases suivantes.

- $f$  est strictement ..... sur  $[2; 10]$ .
- $f$  est strictement ..... sur  $[-10; -8]$ .
- L'image de  $-8$  par  $f$  est ...
- $f(0) = \dots\dots\dots$
- $2$  est ..... de  $-3$  par  $f$ .
- $2$  est ..... de  $10$  par  $f$ .
- $f(\dots) = 4$ .

## 9 Détermination du sens de variation d'une fonction définie par une courbe

➔ R7 ➔ corrigé p. 52

On donne la représentation graphique  $\mathcal{C}$ , dans le plan rapporté à un repère, d'une fonction  $f$  définie sur  $[-3 ; 6]$ .



1. Déterminer le sens de variation de  $f$ .
2. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

## 10 Tracé d'une courbe représentative d'une fonction à partir de son tableau de variation

➔ corrigé p. 52

Soit une fonction  $f$  correspondant au tableau de variation et au tableau de valeurs suivants :

| $x$    | -2 | -1 | 1 | 2  | 4 | 5,5 | 7 |
|--------|----|----|---|----|---|-----|---|
| $f(x)$ | 3  | 1  | 1 | -1 | 4 | 2   | 3 |

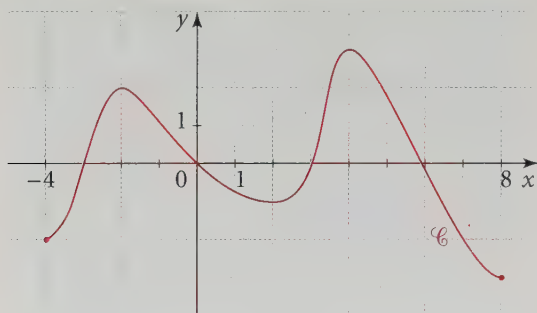
| $x$    | -1,5 | 2,5 | 3   | 4,5 |
|--------|------|-----|-----|-----|
| $f(x)$ | 2    | 0   | 1,8 | 3   |

Tracer, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, une représentation graphique  $\mathcal{C}_f$  de cette fonction  $f$ .

### 11 Détermination des extremums d'une fonction

➔ R8 ➔ corrigé p. 52

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-4; 8]$ , dont on donne la courbe représentative  $\mathcal{C}$  dans le plan rapporté à un repère.



Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur les intervalles suivants :

1.  $[-3; 0]$ ; 2.  $[0; 2]$ ; 3.  $[0; 3]$ ; 4.  $[-4; 8]$ .

### 12 Détermination des extremums

➔ R9 ➔ corrigé p. 53

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-4; 3]$ , dont on donne le tableau de variation.

| $x$    | -4                                                                                                                          | -2 | 0 | 1 | 3 |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---|---|---|
| $f(x)$ | $  \begin{array}{ccccc}  & & 5 & & 5 \\  & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \searrow \\  0 & & & -1 & & 0  \end{array}  $ |    |   |   |   |

Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  sur  $[-4; 3]$ .

### 13 Détermination du signe d'une fonction

➔ R9 ➔ corrigé p. 53

On donne le tableau de variation d'une fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

| $x$    | $-\infty$                                                               | -1 | $+\infty$ |
|--------|-------------------------------------------------------------------------|----|-----------|
| $g(x)$ | $  \begin{array}{ccc}  & -5 & \\  \nearrow & & \searrow  \end{array}  $ |    |           |

1. Déterminer le maximum de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et en déduire que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $g(x) < 0$ .

2. Résoudre l'inéquation  $g(x) > -0,5$ .

## Exercices d'entraînement

### 14 Formuler la négation d'une proposition

➔ corrigé p. 53

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

Pour chaque proposition  $A$ , écrire sa négation  $\bar{A}$ .

1.  $A$  : « Pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) > 2$  ».
2.  $A$  : « Il existe au moins un nombre réel  $x$  tel que  $f(x) \leq 0$  ».
3.  $A$  : «  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  ».
4.  $A$  : «  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  ».
5.  $A$  : «  $f(x_0)$  est le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ».
6.  $A$  : «  $f(x_1)$  est le maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ».

### 15 Calcul d'images

➔ R3

➔ corrigé p. 53

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1.$$

Compléter le tableau suivant :

| $x$    | -5 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 2 | $\frac{1}{3}$ | 10 |
|--------|----|----|----------------|---|---|---------------|----|
| $f(x)$ |    |    |                |   |   |               |    |

### 16 Calculs d'images et d'antécédents

➔ R3

➔ corrigé p. 53

Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -\infty ; 2[ \cup ] 2 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{2x+4}{-x+2}.$$

1. Déterminer :  $g(-10)$  ;  $g(-6)$  ;  $g(2,01)$  ;  $g(1,99)$  ;  $g(0)$  et  $g(3)$ .
2. Déterminer l'antécédent de 0 par  $g$ .

# 17 Tableau de valeurs de fonctions

➔ corrigé p. 54

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $[0 ; 10]$ .

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

| $x$              | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $f(x) = x^2$     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| $g(x) = 4x + 32$ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

2. Vérifier que pour  $x = 8$ ,  $f$  et  $g$  ont la même image ; quelle est sa valeur ?

# 18 Tableau de valeurs de fonctions

➔ corrigé p. 54

On donne un tableau de valeurs des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[-5 ; 5]$ .

| $x$    | -5 | -4,5  | -2,5 | -0,5 | 0 | 0,5  | 2,5  | 3,5   | 5   |
|--------|----|-------|------|------|---|------|------|-------|-----|
| $f(x)$ | 26 | 21,25 | 7,25 | 1,25 | 1 | 1,25 | 7,25 | 13,25 | 26  |
| $g(x)$ | 16 | 14,5  | 8,5  | 2,5  | 1 | -0,5 | -6,5 | -9,5  | -14 |

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses ; les corriger si elles sont fausses.

- $f(-4,5) = 21,25$ .
- L'image de 2,5 par  $g$  est 7,5.
- $f(0) = g(0)$ .
- 3,5 est un antécédent de -10,5 par  $g$ .
- 1,25 est un antécédent de -0,5 par  $f$ .
- 0,5 est un antécédent de 1,5 par  $g$ .
- L'image de -0,5 par  $g$  est 1,25.
- 2,5 est un antécédent de 8,5 par  $g$ .

# 19 Lectures graphiques

➔ corrigé p. 55

Soit  $h$  la fonction définie sur  $]-\infty ; -3[ \cup ]-3 ; +\infty[$  par :

$$h(x) = \frac{2}{x+3}.$$



1. Tracer, avec une calculatrice, la courbe représentative de  $h$ .
  2. À l'aide du graphique ou par le calcul, déterminer :
    - a) L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse  $-1$ .
    - b) L'abscisse du point de la courbe d'ordonnée  $6$ .
    - c) Les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est négative.
    - d) Les ordonnées des points de la courbe dont l'abscisse est positive.
    - e) L'antécédent de  $0$  par  $h$ .
    - f) L'image de  $0$  par  $h$ .
- (Les réponses seront graphiques ou numériques selon la lisibilité de la courbe sur la calculatrice.)

## 20 Utilisation du langage mathématique

➔ corrigé p. 56

Traduire les énoncés suivants en utilisant les symboles des fonctions.

1. L'image de  $-2$  par  $f$  est  $3$ .
2.  $-3$  a pour image  $0$  par  $g$ .
3. Les antécédents de  $-1$  par  $f$  sont  $2$  et  $4$ .
4. La courbe représentative de  $h$  passe par les points  $A(-1 ; 3)$  et  $B(0 ; 1)$ .
5. La courbe représentative de  $f$  coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée  $-2$ .
6. La courbe représentative de  $g$  coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses  $-3$  et  $0$ .
7. La courbe représentative de  $f$  est située au-dessus de l'axe des abscisses pour tout nombre réel  $x$  strictement positif.

## 21 Calculs d'antécédents

➔ R2

➔ corrigé p. 56

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ .  
Déterminer l'antécédent de  $-1$  par  $f$ .

## 22 Calcul d'antécédents

➔ R2

➔ corrigé p. 56

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^2 + 2x - 4$ .

1. Développer l'expression  $(x + 3)(x - 1)$ .
2. En déduire les antécédents de  $-1$  par  $g$ .

## 23 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

➔ R4

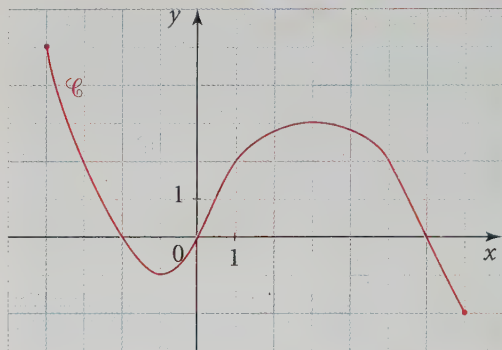
➔ corrigé p. 56

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la fonction  $f$  définie sur  $[-4 ; 7]$

et sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$ .

Résoudre graphiquement sur  $[-4 ; 7]$  les équations et inéquations suivantes :

1.  $f(x) = -2$ .
2.  $f(x) = 0$ . 3.  $f(x) = 2$ .
4.  $f(x) \geq 2$ . 5.  $f(x) < 0$ .



## 24 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

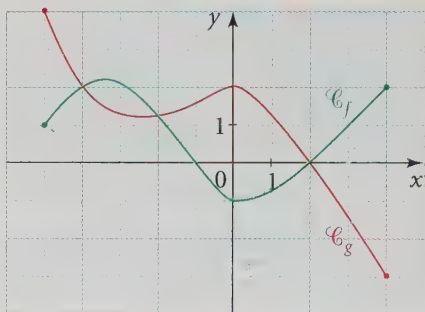
➔ R4

➔ corrigé p. 57

Dans le plan rapporté à un repère, on considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[-5 ; 4]$  et leurs courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

Résoudre graphiquement sur  $[-5 ; 4]$  les équations et inéquations suivantes :

1.  $f(x) = 0$ . 2.  $g(x) = 0$ .
3.  $f(x) = g(x)$ . 4.  $f(x) > g(x)$ .
5.  $g(x) > f(x)$ .



## 25 Tracé de la courbe représentative d'une fonction

➔ R7, R8

➔ corrigé p. 58

Tracer, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, une courbe représentative de la fonction  $f$  sachant que :

- $f$  est définie sur  $[-2 ; 8]$  ;
- $f$  est décroissante sur les intervalles  $[-2 ; 0]$  et  $[3 ; 8]$  ;
- $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; 3]$  ;
- $f(0) = 0$  ;  $f(5) = 0$  ;  $f(-2) = 2$  ;
- le maximum de  $f$  est atteint en  $x = 3$  et vaut 4 ;
- le minimum de  $f$  est atteint en  $x = 8$  et vaut -2.

## 26 Maximum et minimum d'une fonction

➔ R6, R9

➔ corrigé p. 58

On donne le tableau de variation d'une fonction  $f$  définie sur  $[-5 ; 5]$ .

|        |    |    |   |    |
|--------|----|----|---|----|
| $x$    | -5 | -1 | 2 | 5  |
| $f(x)$ | 0  | -3 | 3 | -6 |

1. Déterminer les maximum et minimum de la fonction  $f$  et les valeurs de  $x$  pour lesquels ils sont atteints.

2. Comparer les nombres suivants :

a)  $f(-4)$  et  $f(-3)$  ;

b)  $f(0)$  et  $f(1)$  ;

c)  $f(-0,5)$  et  $f(1)$  ;

d)  $f(3)$  et  $f(4,5)$ .

## 27 Étude d'une fonction définie à partir de son tableau de variation

➔ corrigé p. 59

On donne le tableau de variation d'une fonction  $f$  définie sur  $[2 ; 8]$ .

|        |    |   |   |
|--------|----|---|---|
| $x$    | 2  | 4 | 8 |
| $f(x)$ | -1 | 3 | 0 |

1. Décrire avec un vocabulaire adapté le sens de variation de  $f$ .

2. Déterminer l'image par  $f$  de chacun des nombres : 2 ; 4 ; 8.

3. Déterminer le maximum de  $f$  sur  $[2 ; 8]$ .

4. Tracer une représentation graphique de  $f$  correspondant au tableau de variation.

### 28 Étude d'une fonction définie à partir de son tableau de variation

➔ corrigé p. 59

On donne le tableau de variation d'une fonction  $g$  définie sur  $[0 ; 12]$ .

|        |   |    |    |
|--------|---|----|----|
| $x$    | 0 | 10 | 12 |
| $g(x)$ | 2 | -1 | 0  |

1. Décrire en langage usuel le sens de variation de  $g$ .
2. Que représente  $g(10)$  pour la fonction  $g$  ?
3. Laquelle des deux affirmations suivantes est vraie ?

Pour tout  $x$  de  $[0 ; 12]$ ,  $g(x) \geq -1$ .

Pour tout  $x$  de  $[0 ; 12]$ ,  $g(x) \leq -1$ .

### 29 Étude graphique d'une fonction

➔ R7, R8, R9

➔ corrigé p. 59

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-3 ; 3]$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

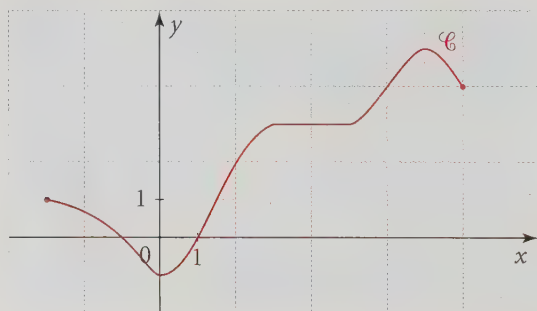
1. Tracer sur une calculatrice, la courbe représentative de  $f$ .
2. Dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les maximum et minimum de  $f$ .

### 30 Sens de variation d'une fonction

➔ R7

➔ corrigé p. 59

Déterminer le sens de variation et dresser le tableau de variation de la fonction  $g$  définie sur  $[-3 ; 8]$ , dont on donne ci-dessous la courbe représentative  $\mathcal{C}$  dans le plan rapporté à un repère.



### 31 Étude d'une fonction

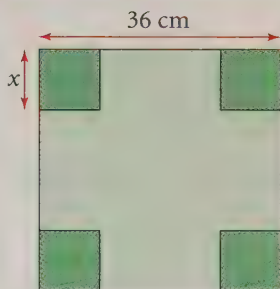
➔ R3, R8

➔ corrigé p. 60

Une entreprise fabrique des boîtes.

Pour cela, elle dispose de cartons carrés de 36 cm de côtés dans lesquels sont découpés, à chaque coin, un carré de  $x$  cm de côté.

Après pliage des côtés, on obtient la boîte.



1. Quelles sont les valeurs que peut prendre  $x$  ?
2. Déterminer en fonction de  $x$  le volume de la boîte.
3. On définit ainsi une fonction  $V$  qui, à tout nombre réel  $x$  déterminé à la question 1, associe le volume de la boîte.

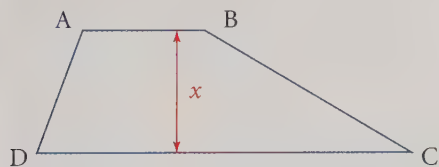
- a) Définir la fonction  $V$ .
- b) Tracer la courbe représentative de la fonction  $V$  sur votre calculatrice.
- c) Déterminer la valeur  $x$  pour laquelle le volume de la boîte est maximal.

### 32 Étude d'une fonction

➔ corrigé p. 60

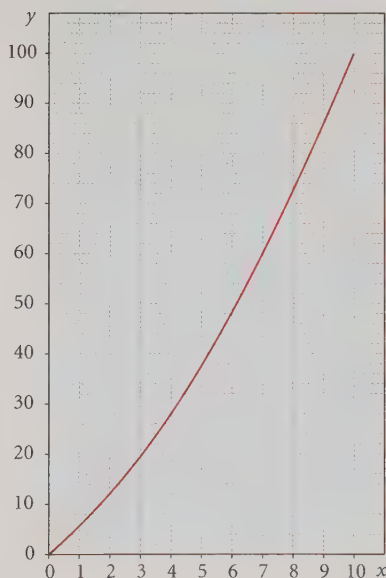
On donne la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 10]$  par  $f(x) = 0,5x^2 + 5x$ .

1. Déterminer l'ordonnée du point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse 8.
2. Déterminer l'antécédent de 12 par  $f$ .
3. On considère le trapèze ABCD :



$AB = x$  cm,  $CD = 10$  cm,  $0 \leq x \leq 10$

- a) Déterminer l'aire  $\mathcal{A}(x)$  du trapèze ABCD en fonction de  $x$ .
- b) Calculer l'aire du trapèze pour  $x = 8$  cm.
- c) Déterminer la valeur de  $x$  si l'aire du trapèze est égale à  $12 \text{ cm}^2$ .
- d) À partir de quelle valeur de  $x$ , l'aire du trapèze est-elle supérieure à  $48 \text{ cm}^2$  ?



**1**  $f(0) = \frac{2 \times 0 + 1}{0 + 1}; f(0) = 1.$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{-\frac{1}{2} + 1}; f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$f(3) = \frac{2 \times 3 + 1}{3 + 1}; f(3) = \frac{7}{4}.$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{4} + 1}{\frac{1}{4} + 1}; f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}};$$

$$\text{d'où } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{5}; f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{5}.$$

Les images de  $0; -\frac{1}{2}; 3$  et  $\frac{1}{4}$  sont respectivement  $1; 0; \frac{7}{4}$  et  $\frac{6}{5}$ .

**2.** On résout l'équation  $f(x) = 1$ .

Cette équation est successivement équivalente à :

$$\frac{2x + 1}{x + 1} = 1;$$

$$2x + 1 = x + 1;$$

$$x = 0.$$

L'antécédent de 1 par  $f$  est 0.

**2** **1.**  $f(-5) = 11,5; f(-1) = -0,5; f(1) = -0,5.$

**2.** L'antécédent de 7 par  $f$  est -4.

**3.** Les antécédents de 1 par  $f$  sont -2 et 2.

**3** **1.** L'image de -2 par  $f$  est  $f(-2)$ , soit -1.

**2.**  $f(2) = 0; f(5) = 2.$

**3.** L'antécédent de 0 par  $f$  est 2.

-3 n'a pas d'antécédent par  $f$ .

**4.**  $a$  est l'antécédent de 3 par  $f$ , soit  $a = 4$ .

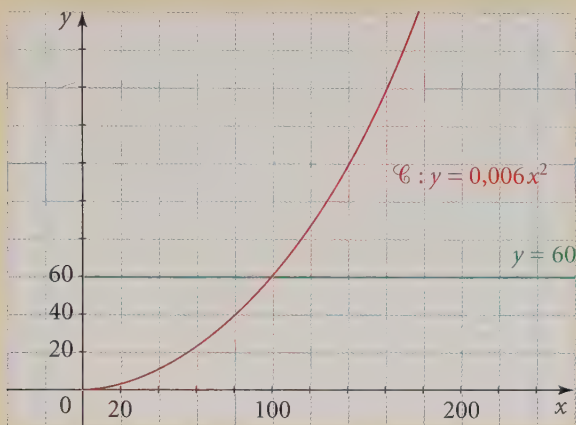
**4** **1.** Graphique ci-après.

**2.** On trace la droite d'équation  $y = 60$ . La valeur cherchée est celle à partir de laquelle la courbe est au-dessus de la droite.



On lit  $x = 100$ .

La distance de freinage est supérieure à 60 m à partir de 100 km/h.



#### 5 • Résolution de l'équation $g(x) = 0$

La courbe  $\mathcal{C}$  coupe la droite  $\mathcal{D}_1$  aux points d'abscisses :

$$x = -\frac{3}{2} \text{ et } x = -\frac{1}{2}.$$

Donc les solutions sont  $-\frac{3}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$ .

#### • Résolution de l'équation $g(x) = -1$

La courbe  $\mathcal{C}$  coupe la droite  $\mathcal{D}_2$  au point d'abscisse  $x = -1$ .

Donc la solution est  $-1$ .

#### • Résolution de l'équation $g(x) = -2$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  ne coupe pas la droite  $\mathcal{D}_3$ .

Donc il n'y a pas de solution.

**6** La courbe  $\mathcal{C}$  est située au-dessous de la droite d'équation  $y = 3$  pour  $x \in ]-4 ; 0[$  et coupe la droite d'équation  $y = 3$  pour  $x = -4$  et  $x = 0$ .

Donc l'ensemble des solutions est  $[-4 ; 0]$ .

**7** Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  se coupent aux points d'abscisses  $x = 1$  et  $x = 3$ .

Les solutions sont 1 et 3.

La courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessous de la courbe  $\mathcal{C}_g$  pour  $x \in [-1 ; 1[ \cup ]3 ; 5]$ .

L'ensemble des solutions est  $[-1 ; 1[ \cup ]3 ; 5]$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$  pour  $x \in ]1 ; 3[$ .

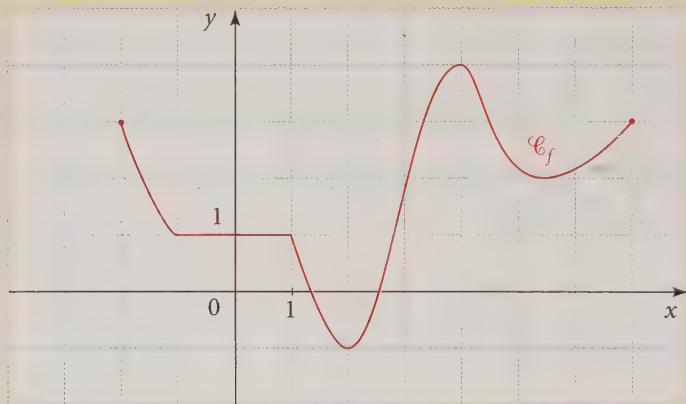
L'ensemble des solutions est  $]1 ; 3[$ .

- 8**
- $f$  est strictement **croissante** sur  $[2; 10]$ .
  - $f$  est strictement **décroissante** sur  $[-10; -8]$ .
  - L'image de  $-8$  par  $f$  est **0**.
  - $f(0) = 1$ .
  - 2 est un **antécédent** de  $-3$  par  $f$ .
  - 2 est l'**image** de 10 par  $f$ .
  - $f(-10) = 4$ .

- 9**
- 1.** Sens de variation de  $f$ :
- $f$  est strictement croissante sur  $[-3; -1]$  et sur  $[3; 6]$ ;
  - $f$  est constante sur  $[-1; 1]$ ;
  - $f$  est strictement décroissante sur  $[1; 3]$ .
- 2.** Tableau de variation de  $f$ .

| $x$    | -3 | -1 | 1 | 3 | 6 |
|--------|----|----|---|---|---|
| $f(x)$ | -2 | 3  | 3 | 1 | 4 |

- 10** Tracé de  $\mathcal{C}_f$  en prenant en compte les données fournies par le tableau de variation et le tableau de valeurs.



- 11**
- 1.** Sur  $[-3; 0]$  :  $f$  admet un maximum égal à 2, en  $x = -2$  et un minimum égal à 0, en  $x = -3$  et  $x = 0$ .
- 2.** Sur  $[0; 2]$  :  $f$  admet un maximum égal à 0, en  $x = 0$  et un minimum égal à  $-1$ , en  $x = 2$ .

**3.** Sur  $[0 ; 3]$  :  $f$  admet un maximum égal à 0, en  $x = 0$  et  $x = 3$  et un minimum égal à  $-1$ , en  $x = 2$ .

**4.** Sur  $[-4 ; 8]$  :  $f$  admet un maximum égal à 3, en  $x = 4$  et un minimum égal à  $-3$ , en  $x = 8$ .

**12** Pour tout  $x \in [-4 ; 3]$ ,  $f(x) \leq 5$  et  $f(x) \geq -1$ . Ainsi,  $f$  présente un maximum égal à 5, en  $x = -2$  et  $x = 1$  ;  $f$  présente un minimum égal à  $-1$ , en  $x = 0$ .

**13** **1.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) \leq -5$ , donc  $g$  présente un maximum, en  $x = -1$ . Or,  $-5 < 0$  ; donc, pour tout nombre réel  $x$ ,  $g(x) < 0$ .

**2.** Pour tout nombre réel  $x$ , on a  $g(x) \leq -5$ , donc l'inéquation  $g(x) > -0,5$  n'a pas de solution.

**14** **1.**  $\bar{A}$  : « Il existe au moins un nombre réel  $x$  tel que  $f(x) \leq 2$  ».

**2.**  $\bar{A}$  : « Pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) > 0$  ».

**3.**  $\bar{A}$  : « Il existe au moins deux nombres réels  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_1 < x_2$  et  $f(x_1) > f(x_2)$  ».

**4.**  $\bar{A}$  : « Il existe au moins deux nombres réels  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_1 < x_2$  et  $f(x_1) < f(x_2)$  ».

**5.**  $\bar{A}$  : « Il existe au moins un nombre réel  $x$  tel que  $f(x) < f(x_0)$  ».

**6.**  $\bar{A}$  : « Il existe au moins un nombre réel  $x$  tel que  $f(x) > f(x_1)$  ».

**15**

|        |     |    |                |   |    |                |      |
|--------|-----|----|----------------|---|----|----------------|------|
| $x$    | -5  | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 2  | $\frac{1}{3}$  | 10   |
| $f(x)$ | 191 | 7  | $\frac{25}{8}$ | 1 | -5 | $\frac{5}{27}$ | -829 |

**16** **1.**  $g(-10) = \frac{2(-10) + 4}{10 + 2}$  ;  $g(-10) = -\frac{4}{3}$ .

$g(-6) = \frac{2(-6) + 4}{6 + 2}$  ;  $g(-6) = -1$ .

$g(2,01) = \frac{2 \times 2,01 + 4}{-2,01 + 2}$  ;

$$\text{d'où } g(2,01) = \frac{8,02}{-0,01}; \quad g(2,01) = -802.$$

$$g(1,99) = \frac{2 \times 1,99 + 4}{-1,99 + 2};$$

$$\text{d'où } g(1,99) = \frac{7,98}{0,01}; \quad g(1,99) = 798.$$

$$g(0) = \frac{2 \times 0 + 4}{-0 + 2}; \quad g(0) = 2.$$

$$g(3) = \frac{2 \times 3 + 4}{-3 + 2}; \quad g(3) = -10.$$

**2.** On résout l'équation  $\frac{2x+4}{-x+2} = 0$ ; elle est équivalente à :

$$2x + 4 = 0, \text{ soit } x = -2.$$

L'antécédent de 0 par  $g$  est  $-2$ .

**17** 1. Tableau de valeurs :

| $x$              | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| $f(x) = x^2$     | 0  | 1  | 4  | 9  | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| $g(x) = 4x + 32$ | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 | 64 | 68 | 72  |

**2.**  $f(8) = g(8)$ , donc  $f$  et  $g$  ont la même image ; sa valeur est 64.

**18** 1. Vrai.

**2.** Faux, l'image de 2,5 par  $g$  est  $-6,5$ .

**3.** Vrai.

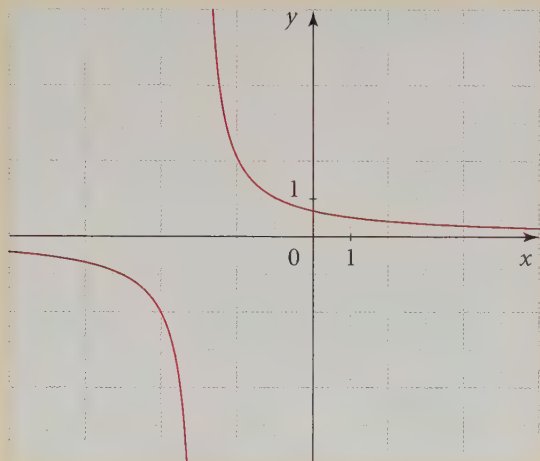
**4.** Faux, 3,5 est un antécédent de  $-9,5$  par  $g$ .

**5.** Faux, 1,25 est l'image de  $-0,5$  par  $f$ .

**6.** Faux,  $-0,5$  est un antécédent de 2,5 par  $g$ .

**7.** Faux, l'image de  $-0,5$  par  $g$  est 2,5.

**8.** Vrai.

**19** 1.

**2. a)** On peut répondre à cette question graphiquement ou numériquement. L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse  $-1$  est  $h(-1)$ .

On a  $h(-1) = 1$ .

**b)** Réponse numérique : l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 6 est l'antécédent de 6 par  $h$ .

On a l'équation  $\frac{2}{x+3} = 6$  successivement équivalente à :

$$2 = 6(x+3), \text{ soit } 2 = 6x + 18;$$

$$6x = -16; x = -\frac{16}{6}, \text{ soit } x = -\frac{8}{3}.$$

**c)** Réponse graphique : on détermine les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de l'axe des abscisses.

On lit :  $x < -3$ .

**Remarque :**

On peut retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'inéquation  $\frac{2}{x+3} < 0$ .

**d)** Réponse graphique : on détermine les ordonnées des points de la courbe dont l'abscisse est positive ( $x \geq 0$ ). On a  $h(0) = \frac{2}{3}$ .

On lit :  $0 < y \leq \frac{2}{3}$ .

**e)** Réponse graphique : la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses, donc 0 n'a pas d'antécédent par  $h$ .

**f)** Réponse numérique :  $h(0) = \frac{2}{3}$ ; l'image de 0 par  $h$  est  $\frac{2}{3}$ .

**20** 1.  $f(-2) = 3$ .

2.  $g(-3) = 0$ .

3.  $f(2) = -1$  et  $f(4) = -1$ .

4.  $h(-1) = 3$  et  $h(0) = 1$ .

5.  $f(0) = -2$ .

6.  $g(-3) = 0$  et  $g(0) = 0$ .

7.  $f(x) > 0$  pour  $x > 0$ .

**21** On résout l'équation  $f(x) = -1$ .

Cette équation est successivement équivalente à :

$$x^2 - 6x + 8 = -1, \text{ soit } x^2 - 6x + 9 = 0;$$

$$(x - 3)^2 = 0, \text{ soit } x = 3.$$

L'antécédent de  $-1$  par  $f$  est  $3$ .

**22** 1.  $(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$ .

2. On résout l'équation  $x^2 + 2x - 4 = -1$ . Cette équation est successivement équivalente à :

$$x^2 + 2x - 3 = 0; (x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0, \text{ soit } x = -3 \text{ ou } x = 1.$$

Les antécédents de  $-1$  par  $g$  sont  $-3$  et  $1$ .

**23** 1. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = -2$  revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $y = -2$ .

On trace la droite d'équation  $y = -2$ , parallèle à l'axe des abscisses. On lit :  $x = 7$ .  
Donc, la solution est  $7$ .

2. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 0$  revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de l'axe des abscisses. On lit :  $x = -2$ ,  $x = 0$  et  $x = 6$ .

Donc les solutions sont  $-2$  ;  $0$  et  $6$ .

3. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 2$  revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de la droite d'équation  $y = 2$ .

On trace la droite d'équation  $y = 2$ , parallèle à l'axe des abscisses.

On lit :  $x = -3$ ,  $x = 1$  et  $x = 5$ .

Donc les solutions sont  $-3$  ;  $1$  et  $5$ .

4. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \geq 2$  revient à déterminer les abscisses des points de  $\mathcal{C}$  situés sur ou au-dessous de la droite d'équation  $y = 2$ .

On lit :  $x \in [-4 ; -3] \cup [1 ; 5]$ .

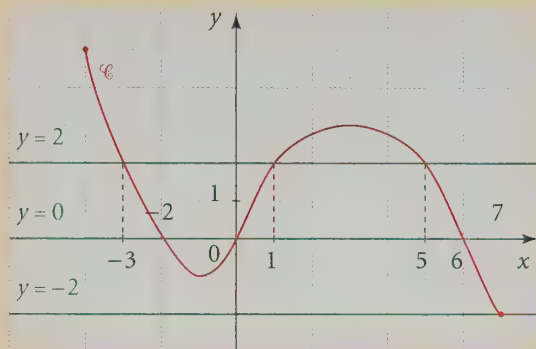
Donc l'ensemble des solutions est  $[-4 ; -3] \cup [1 ; 5]$ .



**5.** Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) < 0$  revient à déterminer les abscisses des points de  $\mathcal{C}$  situés au-dessous de la droite d'équation  $y = 0$ .

On lit :  $x \in ]-2 ; 0[ \cup ]6 ; 7]$ .

Donc l'ensemble des solutions est  $]-2 ; 0[ \cup ]6 ; 7]$ .



**24 1.** Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 0$  revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et de la droite d'équation  $y = 0$ .

On lit :  $x = -1$  et  $x = 2$ .

Donc, les solutions sont  $-1$  et  $2$ .

**2.** Résoudre graphiquement l'équation  $g(x) = 0$  revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_g$  et de la droite d'équation  $y = 0$ .

On lit :  $x = 2$ .

Donc, la solution est  $2$ .

**3.** Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$  revient à déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

On lit :  $x = -4$ ,  $x = -2$  et  $x = 2$ .

Donc, les solutions sont  $-4$ ,  $-2$  et  $2$ .

**4.** Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) > g(x)$  revient à déterminer les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés au-dessus de  $\mathcal{C}_g$ .

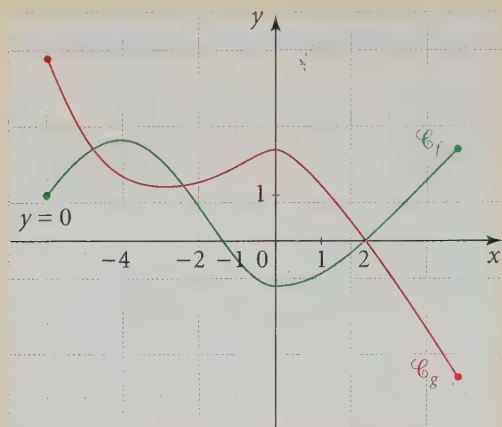
On lit :  $x \in ]-4 ; -2[ \cup ]2 ; 4]$ .

Donc, l'ensemble des solutions est  $]-4 ; -2[ \cup ]2 ; 4]$ .

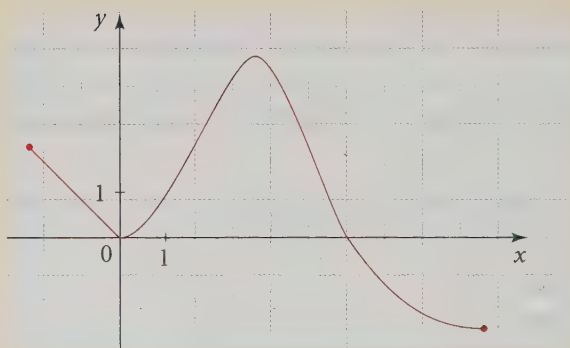
**5.** Résoudre graphiquement l'inéquation  $g(x) > f(x)$  revient à déterminer les abscisses des points de  $\mathcal{C}_g$  situés au-dessus de  $\mathcal{C}_f$ .

On lit :  $x \in [-5 ; -4[ \cup ]-2 ; 2]$ .

Donc, l'ensemble des solutions est  $[-5 ; -4[ \cup ]-2 ; 2]$ .



25

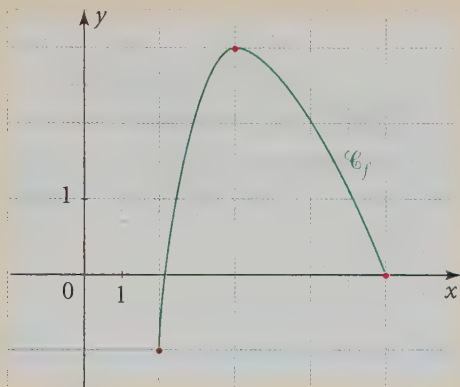


26

1.  $f$  admet un minimum égal à  $-6$  en  $x = 5$ .  
 $f$  admet un maximum égal à  $3$  en  $x = 2$ .

- 2. a)  $f$  est strictement décroissante sur  $[-5; -1]$ ;  $-4 < -3$ , donc  $f(-4) > f(-3)$ .
- b)  $f$  est strictement croissante sur  $[-1; 2]$ ;  $0 < 1$ , donc  $f(0) < f(1)$ .
- c)  $f$  est strictement croissante sur  $[-1; 2]$ ;  $-0,5 < 1$ , donc  $f(-0,5) < f(1)$ .
- d)  $f$  est strictement décroissante sur  $[2; 5]$ ;  $3 < 4,5$ , donc  $f(3) > f(4,5)$ .

- 27** 1.  $f$  est strictement **croissante** sur  $[2; 4]$  et strictement **décroissante** sur  $[4; 8]$ .  
 2.  $f(2) = -1$ ;  $f(4) = 3$  et  $f(8) = 0$ .  
 3. Le maximum de  $f$  sur  $[2; 8]$  est 3.  
 4.



- 28** 1.  $g$  est strictement décroissante sur  $[0; 10]$  et strictement croissante sur  $[10; 12]$ .  
 2.  $g(10)$  est le minimum de  $g$  sur  $[0; 12]$ .  
 3. La 1<sup>re</sup> affirmation est vraie : pour tout  $x$  de  $[0; 12]$ ,  $g(x) \geq -1$ .

- 29** 1. Travail à faire avec une calculatrice.  
 2. Tableau de variation de  $f$  sur  $[-3; 3]$  :

|        |     |    |    |    |
|--------|-----|----|----|----|
| $x$    | -3  | -1 | 1  | 3  |
| $f(x)$ | -17 | 3  | -1 | 19 |

3. Le minimum de  $f$  sur  $[-3; 3]$  est  $-17$ , en  $x = -3$ .  
 Le maximum de  $f$  sur  $[-3; 3]$  est  $19$ , en  $x = 3$ .

- 30**  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[-3; 0]$ .  
 $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 3]$ .  
 $g$  est constante sur l'intervalle  $[3; 5]$ .  
 $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[5; 7]$ .  
 $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[7; 8]$ .

| $x$    | -3 | 0  | 3 | 5 | 7 | 8 |
|--------|----|----|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 1  | -1 | 3 | 3 | 5 | 4 |

**31** 1.  $0 < x < 18$ .

2. La hauteur de la boîte est  $x$ .

Un côté du fond de la boîte est  $36 - 2x$ .

Le volume  $V$  d'un parallélépipède rectangle est :

$V = (\text{côté})^2 + \text{hauteur}$ .

Numériquement :  $V = x(36 - 2x)^2$ , soit  $V = x(1\,296 - 144x + 4x^2)$

$V = 4x^3 - 144x^2 + 1\,296x$ .

a)  $V$  est la fonction définie sur  $]0 ; 18[$  par :

$$V(x) = 4x^3 - 144x^2 + 1\,296x.$$

b) On obtient le tracé de la courbe représentative de cette fonction à l'aide d'une calculatrice graphique.

c) La fonction  $V$  admet un maximum sur  $]0 ; 18[$  en  $x = 6$ .

Le volume de la boîte est donc maximal pour  $x = 6$  cm.

**32** 1. L'ordonnée du point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse 8 est 72.

2. L'antécédent de 12 par  $f$  est 2.

3. a) L'aire du trapèze

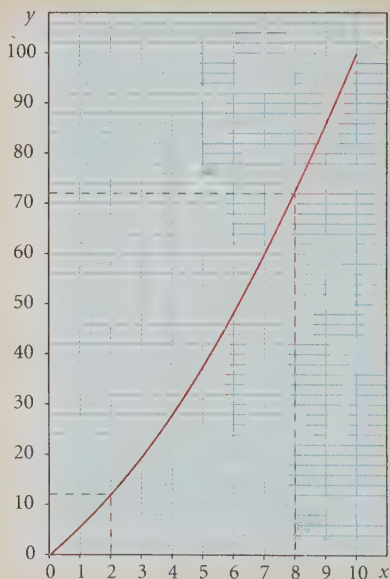
$$\text{est } \mathcal{A}(x) = \frac{(10 + x) \times x}{2},$$

$$\text{soit } \mathcal{A}(x) = 5x + \frac{x^2}{2} = f(x).$$

b)  $\mathcal{A}(8) = 72$  ; si  $x = 8$  cm, l'aire du trapèze est égale à  $72 \text{ cm}^2$  (cf. 1.).

c) Si l'aire du trapèze est  $12 \text{ cm}^2$ ,  $x = 2$  cm (cf. 2.).

d) L'aire du trapèze est supérieure à  $48 \text{ cm}^2$  pour  $x$  supérieur à 6 cm.



**Utilisation  
des fonctions  
de référence.  
Trigonométrie**

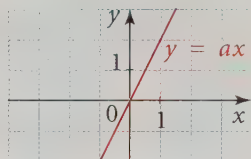
## 1 Fonctions linéaires et affines

### 1 Fonction linéaire : $x \mapsto ax$

Cette fonction est définie sur  $\mathbb{R}$ .

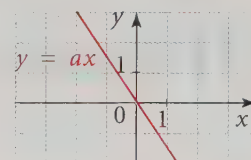
•  $a > 0$

|               |           |                 |           |
|---------------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | $0$             | $+\infty$ |
| $ax$          | $-\infty$ | $0 \rightarrow$ | $+\infty$ |
| signe de $ax$ | $-$       | $0$             | $+$       |



•  $a < 0$

|               |           |                 |           |
|---------------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | $0$             | $+\infty$ |
| $ax$          | $+\infty$ | $0 \rightarrow$ | $-\infty$ |
| signe de $ax$ | $+$       | $0$             | $-$       |



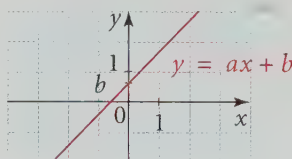
### 2 Fonction affine : $x \mapsto ax + b$

Cette fonction est définie sur  $\mathbb{R}$ .

•  $a > 0$

|                   |           |                 |           |
|-------------------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$               | $-\infty$ | $\frac{-b}{a}$  | $+\infty$ |
| $ax + b$          | $-\infty$ | $0 \rightarrow$ | $+\infty$ |
| signe de $ax + b$ | $-$       | $0$             | $+$       |

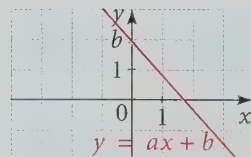
$a > 0 ; b \neq 0$



•  $a < 0$

|                   |           |                 |           |
|-------------------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$               | $-\infty$ | $\frac{-b}{a}$  | $+\infty$ |
| $ax + b$          | $+\infty$ | $0 \rightarrow$ | $-\infty$ |
| signe de $ax + b$ | $+$       | $0$             | $-$       |

$a < 0 ; b \neq 0$





## Exercices résolus

### ➔ 1. Résoudre une inéquation

#### Énoncé

Résoudre l'inéquation  $6x - 1 > 3x + 2$ .

#### Corrigé commenté

**Indication :** on regroupe tous les termes en  $x$  dans un membre et tous les termes constants dans l'autre membre.

$$6x + -1 - 3x > 3x + 2 - 3x, \text{ soit } 3x - 1 > 2.$$

$$3x - 1 + 1 > 2 + 1, \text{ soit } 3x > 3.$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{3}{3}, \text{ soit } x > 1.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $6x - 1 > 3x + 2$  est l'ensemble de tous les nombres réels strictement supérieurs à 1 :  $]1 ; +\infty[$ .

### ➔ 2. Comparer graphiquement deux fonctions

#### Énoncé

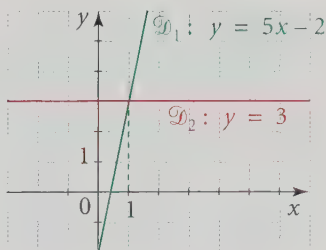
Dans le plan rapporté à un repère, tracer les courbes représentatives des fonctions  $f(x) = 5x - 2$  et  $g(x) = 3$ .

Comparer graphiquement les fonctions  $f$  et  $g$ .

#### Corrigé commenté

On trace les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  d'équations respectives  $y = 5x - 2$  et  $y = 3$ .

**Indication :** comparer graphiquement deux fonctions revient à étudier la position de l'une par rapport à l'autre.



- L'abscisse du point d'intersection des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est 1 ; pour  $x = 1$ ,  $f(x) = g(x)$ .

- $\mathcal{D}_1$  est située au-dessus de  $\mathcal{D}_2$  pour  $x \in ]1 ; +\infty[$ , soit  $f(x) > g(x)$ .

- $\mathcal{D}_1$  est située au-dessous de  $\mathcal{D}_2$  pour  $x \in ]-\infty ; 1[$ , soit  $f(x) < g(x)$ .

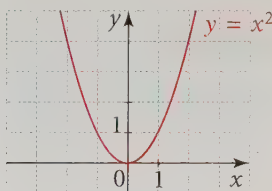
## 2 Fonctions carré et inverse

### 1 Fonction carré : $x \mapsto x^2$

Cette fonction est définie sur  $\mathbb{R}$ .

|                |           |     |           |
|----------------|-----------|-----|-----------|
| $x$            | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $x^2$          | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| signe de $x^2$ | $+$       | $0$ | $+$       |

La courbe est une parabole.

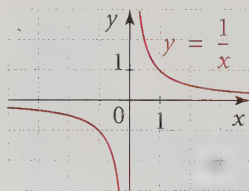


### 2 Fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$

Cette fonction est définie sur  $] -\infty ; 0[ \cup ] 0 ; +\infty [$ .

|                        |           |           |           |
|------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $x$                    | $-\infty$ | $0$       | $+\infty$ |
| $\frac{1}{x}$          | $0$       | $-\infty$ | $+\infty$ |
| signe de $\frac{1}{x}$ | $-$       |           | $+$       |

La courbe est une hyperbole.



## Exercice résolu

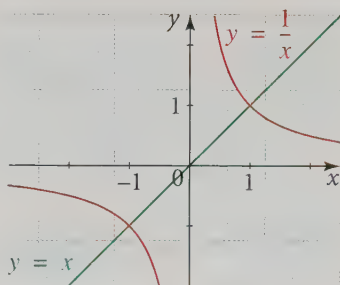
### Résoudre graphiquement une équation puis une inéquation

#### Énoncé

1. Résoudre graphiquement l'équation  $\frac{1}{x} = x$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $x^2 > 1$ .

#### Corrigé commenté

**Indication :** on trace la courbe d'équation  $y = \frac{1}{x}$  et la droite d'équation  $y = x$  dans un repère bien choisi, puis on détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.



1. Les solutions de l'équation  $\frac{1}{x} = x$  sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite. On lit :  $-1$  et  $1$ .

**Indication :** on transforme l'écriture de l'inéquation et on utilise une identité remarquable.

2.  $x^2 > 1$  équivaut à  $x^2 - 1 > 0$ , soit  $(x - 1)(x + 1) > 0$ .

**Conseil :** on étudie le signe de  $x^2 - 1$  à l'aide d'un tableau.

| $x$                | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |   |   |
|--------------------|-----------|------|-----|-----------|---|---|
| $x-1$              |           | -    | -   | 0         | + |   |
| $x+1$              |           | -    | 0   | +         | + |   |
| $x^2-1=(x-1)(x+1)$ |           | +    | 0   | -         | 0 | + |

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $x^2 > 1$  est :

$$]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[.$$

### 3 Développement d'un produit : transformation d'un produit en somme

On considère quatre nombres réels  $a, b, c$  et  $d$ .

#### 1 Développer une expression

Pour développer une expression algébrique, on peut :

- appliquer les règles de distributivité :

$$a(b + c) = ab + ac \text{ et } (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

- utiliser les identités remarquables :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ;

- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  ;

- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ .

#### 2 Règle des parenthèses

- $a + (-b) = a - b$ .

- $a + (b + c) = a + b + c$ .

- $a - (b + c) = a - b - c$ .

- $a - (b - c) = a - b + c$ .

#### 3 Règle des signes

- $a \times (-b) = -ab$ .

- $(-a) \times b = -ab$ .

- $(-a) \times (-b) = ab$ .

## Exercice résolu

➔ Développer pour résoudre une équation et une inéquation

#### Énoncé

Soit  $A(x) = (2x - 1)^2 - (3 - x)(5x - 1) - (3x - 2)(3x + 2)$ .

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

1. l'équation  $A(x) = 6$  ;

2. l'inéquation  $A(x) \geq -10x - 7$ .

## Corrigé commenté

**Indication** : développer  $(2x-1)^2$  et  $(3x-2)(3x+2)$  à l'aide des identités remarquables, puis  $(3-x)(5x-1)$  en utilisant les règles de la distributivité.

$$(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2; \quad (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1.$$

$$(3x-2)(3x+2) = (3x)^2 - 2^2; \quad (3x-2)(3x+2) = 9x^2 - 4.$$

$$(3-x)(5x-1) = 3 \times 5x + 3 \times (-1) - x \times 5x - x \times (-1);$$

$$(3-x)(5x-1) = 15x - 3 - 5x^2 + x;$$

$$(3-x)(5x-1) = -5x^2 + 16x - 3.$$

**Conseil** : donner l'expression développée, réduite et ordonnée de  $A(x)$ .

$$\text{On a donc } A(x) = 4x^2 - 4x + 1 - (-5x^2 + 16x - 3) - (9x^2 - 4).$$

$$\text{Soit } A(x) = 4x^2 - 4x + 1 + 5x^2 - 16x + 3 - 9x^2 + 4;$$

$$A(x) = -20x + 8.$$

1. On résout alors l'équation  $A(x) = 6$ .

L'équation  $A(x) = 6$  est successivement équivalente à :

$$-20x + 8 = 6; \quad -20x = 6 - 8; \quad -20x = -2; \quad x = \frac{-2}{-20}; \quad x = \frac{1}{10}.$$

La solution de l'équation est  $\frac{1}{10}$ .

2. On résout à présent l'inéquation  $A(x) \geq -10x - 7$ .

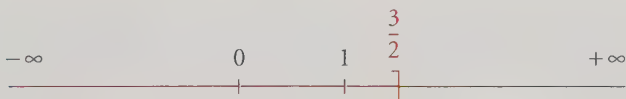
L'inéquation  $A(x) \geq -10x - 7$  est successivement équivalente à :

$$-20x + 8 \geq -10x - 7; \quad -20x + 10x \geq -8 - 7; \quad -10x \geq -15;$$

$$\text{alors } x \leq \frac{-15}{-10}, \text{ soit } x \leq \frac{5 \times 3}{5 \times 2}, \text{ soit } x \leq \frac{3}{2}.$$

**Conseil** : représenter l'ensemble des solutions de l'inéquation sur une droite graduée.

L'ensemble des solutions de cette inéquation sont les nombres réels inférieurs ou égaux à  $\frac{3}{2}$  ce qui correspond à la demi-droite en couleur.



On a donc  $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$ .

## 4 Factorisation d'une somme : transformation d'une somme en produit

On considère quatre nombres réels  $a, b, c$  et  $d$ .

1. Pour factoriser une expression algébrique, on peut :

• chercher un facteur commun apparent :  $ac + bc = c(a + b)$  ;

• utiliser les identités remarquables :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 ;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 ;$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) ;$$

• combiner les deux en écrivant une expression sous la forme  $A(x) \times B(x)$ .

2. La factorisation permet de résoudre des équations et des inéquations pour lesquelles on applique la règle du produit de facteurs :

$A(x) \times B(x) = 0$ , équivaut à  $A(x) = 0$  ou  $B(x) = 0$ .

## Exercice résolu

### Factoriser pour résoudre une équation ou une inéquation

#### Énoncé

Soit  $A(x) = 3(x - 1) + (x^2 - 1) + (x + 2)(1 - x)$ .

Soit  $B(x) = (2 - x)[1 - (2 - x)^2]$  et  $C(x) = 4x^2 + 12x + 9$ .

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations  $B(x) = 0$  et  $C(x) = 0$  et l'inéquation  $A(x) \geq -2$ .

#### Corrigé commenté

**Indication :** Écrire  $A(x)$  de façon à faire apparaître un facteur commun, puis factoriser  $A(x)$ . Résoudre alors dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $A(x) \geq -2$  et représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

$(x - 1)$  est un facteur commun car :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad \text{et} \quad (x + 2)(1 - x) = -(x + 2)(x - 1).$$

On a alors :

$$A(x) = 3(x - 1) + (x - 1)(x + 1) - (x + 2)(x - 1).$$

$$\text{Soit } A(x) = (x - 1)[3 + (x + 1) - (x + 2)] ;$$

$$A(x) = (x - 1)(3 + x + 1 - x - 2) ; A(x) = 2(x - 1).$$



L'inéquation  $A(x) \geq -2$  est successivement équivalente à :

$$2(x-1) > -2; \quad x-1 > \frac{-2}{2};$$

$$x-1 > -1; \text{ soit } x > 0.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation sont les nombres réels strictement supérieurs à 0 ce qui correspond à la demi-droite en couleur, soit  $]0; +\infty[$ .



**Indication :** montrer que  $1 - (2-x)^2$  peut s'écrire comme la différence de deux carrés, puis factoriser  $B(x)$  à l'aide d'une identité remarquable. En déduire les solutions de l'équation  $B(x) = 0$ .

$1 - (2-x)^2$  est la différence de deux carrés :

$$1 - (2-x)^2 = [1 - (2-x)][1 + (2-x)];$$

$$1 - (2-x)^2 = (1-2+x)(1+2-x); \quad 1 - (2-x)^2 = (x-1)(3-x).$$

On a donc :  $B(x) = (2-x)(x-1)(3-x)$ .

L'équation  $B(x) = 0$  est successivement équivalente à :

$$(2-x)(x-1)(3-x) = 0;$$

$$2-x=0 \text{ ou } x-1=0 \text{ ou } 3-x=0;$$

$$x=2 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=3.$$

Les solutions sont 1, 2 et 3.

**Indication :** en posant  $a^2 = 4x^2$  et  $b^2 = 9$ , identifier les valeurs de  $a$  et de  $b$ , puis montrer que  $C(x)$  est de la forme  $a^2 + 2ab + b^2$ .

En déduire une factorisation de  $C(x)$ . Résoudre alors dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $C(x) = 0$ .

En posant  $a^2 = 4x^2$  et  $b^2 = 9$  soit  $a^2 = (2x)^2$  et  $b^2 = 3^2$ , on obtient :

$$a = 2x \text{ et } b = 3.$$

$C(x)$  est alors de la forme  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ .

En effet :

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2;$$

$$(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9;$$

$$(2x+3)^2 = C(x).$$

L'équation  $C(x) = 0$  est successivement équivalente à :

$$(2x+3)^2 = 0; \quad 2x+3 = 0; \quad x = -\frac{3}{2}.$$

La solution est  $-\frac{3}{2}$ .

## 5 Équations et inéquations

### 1 Équations

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  une équation revient à déterminer tous les nombres réels  $x$  qui vérifient l'égalité. Ces nombres réels sont appelés les **solutions** de l'équation.

#### ● Équation du premier degré de la forme $ax + b = 0$ ( $a \neq 0$ )

L'équation  $ax + b = 0$  ( $a \neq 0$ ) d'inconnue  $x$  a pour unique solution le nombre réel

$$-\frac{b}{a}. \text{ L'ensemble des solutions est noté } S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

#### ● Équation du second degré de la forme $x^2 = a$

- Si  $a > 0$ , alors l'équation possède deux solutions réelles :  $-\sqrt{a}$  et  $\sqrt{a}$ .
- Si  $a = 0$ , alors l'équation possède une solution réelle : 0.
- Si  $a < 0$ , alors l'équation ne possède aucune solution réelle.

#### ● Équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0, b \neq 0$ )

On factorise, si possible, l'expression à l'aide d'une identité remarquable pour obtenir un produit de facteurs du premier degré.

#### ● Autres formes d'équations

Soit  $A(x)$  et  $B(x)$  deux expressions algébriques.

- $A(x) \times B(x) = 0$  équivaut à  $A(x) = 0$  ou  $B(x) = 0$ .
- $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$  équivaut à  $A(x) = 0$  et  $B(x) \neq 0$ .

### 2 Inéquations

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  une inéquation revient à déterminer tous les nombres réels  $x$  qui vérifient l'inégalité.

#### ● Signe de $ax + b$ ( $a \neq 0$ )

- Si  $a > 0$ , alors  $ax + b > 0$

$$\text{équivaut à } x > -\frac{b}{a}.$$

- Si  $a < 0$ , alors  $ax + b > 0$

$$\text{équivaut à } x < -\frac{b}{a}.$$

| $x$      | $-\infty$     | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$    |
|----------|---------------|----------------|--------------|
| $ax + b$ | signe de $-a$ | 0              | signe de $a$ |

#### ● Détermination algébrique du signe d'un produit ou d'un quotient

Pour résoudre une inéquation de degré supérieur à 1, il est nécessaire que l'expression soit ramenée à un produit ou quotient de facteurs du premier degré.

**Règle des signes :**

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels, non nuls.

Si  $a$  et  $b$  sont de mêmes signes, alors  $a \times b$  et  $\frac{a}{b}$  sont positifs.

Si  $a$  et  $b$  sont de signes contraires, alors  $a \times b$  et  $\frac{a}{b}$  sont négatifs.

**Tableau de signe :**

Pour déterminer le signe d'un produit ou quotient de facteurs du premier degré, il suffit d'étudier le signe de chacun des facteurs et d'appliquer la règle des signes.

**Exercice résolu** Étudier le signe d'une expression**Énoncé**

Étudier le signe de  $f(x) = (x-2)^2 - 9 - (x+1)(2x-3)$ .

**Corrigé commenté**

**Indication :** factoriser  $(x-2)^2 - 9$  à l'aide d'une identité remarquable.

•  $(x-2)^2 - 9$  est la différence de deux carrés.

$$(x-2)^2 - 3^2 = (x-2-3)(x-2+3) = (x-5)(x+1).$$

$$\bullet f(x) = (x-5)(x+1) - (x+1)(2x-3) = (x+1)[(x-5) - (2x-3)];$$

$$f(x) = (x+1)(x-5-2x+3); \quad f(x) = (x+1)(-x-2).$$

• Pour trouver les valeurs qui annulent  $f(x)$ , on résout l'équation  $f(x) = 0$ . Cette équation est successivement équivalente à :

$$(x+1)(-x-2) = 0; \quad x+1 = 0 \text{ ou } -x-2 = 0; \quad x = -1 \text{ ou } x = -2.$$

• On établit le tableau de signe, puis on conclut :

|                      | $x \in ]-\infty; -2[$ |      | $x \in ]-2; -1[$ |      | $x \in ]-1; +\infty[$ |           |
|----------------------|-----------------------|------|------------------|------|-----------------------|-----------|
| $x$                  | $-\infty$             | $-2$ |                  | $-1$ |                       | $+\infty$ |
| $x+1$                | -                     |      | -                | 0    |                       | +         |
| $-x-2$               | +                     | 0    | -                |      |                       | -         |
| $f(x) = (x+1)(-x-2)$ | -                     | 0    | +                | 0    |                       | -         |
|                      | $f(x) < 0$            |      | $f(x) > 0$       |      | $f(x) < 0$            |           |

• Pour  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]-1; +\infty[$ ,  $f(x) < 0$ .

• Pour  $x \in ]-2; -1[$ ,  $f(x) > 0$ .

• Pour  $x = -2$  ou  $x = -1$ ,  $f(x) = 0$ .

## 6 Fonction polynôme de degré 2 ; fonction homographique

### 1 Fonction polynôme de degré 2

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  des nombres réels.

● Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , avec  $a \neq 0$ .

● La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole** d'équation  $y = ax^2 + bx + c$ .

● Une parabole admet un **axe de symétrie** qui est la droite verticale d'équation  $x = -\frac{b}{2a}$ .

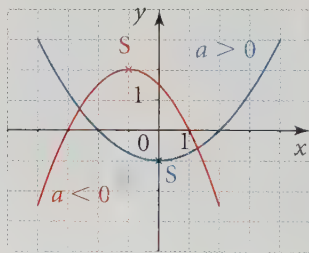
● Une parabole est tournée vers le haut si  $a > 0$  et vers le bas si  $a < 0$ .

● Le sommet  $S$  d'une parabole est le point dont l'ordonnée est le minimum de la fonction polynôme si  $a > 0$  ou le maximum de la fonction polynôme si  $a < 0$ .

L'abscisse du sommet  $S$  est  $-\frac{b}{2a}$ .

● Sens de variation et courbe représentative.

| $x$                            | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$ |
|--------------------------------|-----------|-------------------------------|-----------|
| $ax^2 + bx + c$<br>( $a < 0$ ) | $-\infty$ | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ | $-\infty$ |
| $ax^2 + bx + c$<br>( $a > 0$ ) | $+\infty$ | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ | $+\infty$ |



### 2 Fonction homographique

Soit  $a$ ,  $b$ ,  $d$  des nombres réels et  $c$  un nombre réel non nul.

● Une fonction homographique est le quotient de deux fonctions polynôme de degré 1.

● Une fonction homographique est une fonction  $f$  de la forme  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  avec  $c \neq 0$ .

● Une fonction homographique n'est définie que si son dénominateur ne s'annule pas ( $cx + d \neq 0$ ). Son ensemble de définition est donc  $\left] -\infty ; -\frac{d}{c} \right[ \cup \left] -\frac{d}{c} ; +\infty \right[$ .

## Exercice résolu

➔ Utiliser des propriétés d'une fonction polynôme de degré 2

## Énoncé

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-2 ; 7]$  par  $f(x) = x^2 - 5x + 2$ .

1. a) La parabole représentative de  $f$  est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?
- b) Quelle est l'abscisse du sommet de cette parabole ?
2. Déterminer le sens de variation de  $f$  sur  $[-2 ; 7]$ .
3. a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- b) Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole ?
- c) Quelle est la valeur du minimum de  $f$  ?

## Corrigé commenté

**Indication :** on détermine le signe de  $a$ .

1. a) Comme  $a > 0$  ( $a = 1$ ), la parabole est tournée vers le haut.

**Indication :** on détermine les valeurs de  $a$  et de  $b$ , puis on calcule  $-\frac{b}{2a}$ .

- b) Comme  $a = 1$  et  $b = -5$ , l'abscisse du sommet de cette parabole est  $x = \frac{5}{2} = 2,5$ .

**Indication :** on utilise le signe de  $a$  et l'abscisse du sommet de la parabole.

2. Comme  $a > 0$ ,  $f$  est strictement décroissante sur  $[-2 ; 2,5]$  et  $f$  est strictement croissante sur  $[2,5 ; 7]$ .

**Indication :** on calcule  $f(-2)$ ,  $f(2,5)$ ,  $f(7)$ , puis on utilise la réponse de la question 2.

3. a)

|        |    |       |    |
|--------|----|-------|----|
| $x$    | -2 | 2,5   | 7  |
| $f(x)$ | 16 | -4,25 | 16 |

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - 5 \times (-2) + 2 \\ &= 4 + 10 + 2 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2,5) &= 2,5^2 - 5 \times 2,5 + 2 \\ &= 6,25 - 12,5 + 2 = -4,25 \end{aligned}$$

$$f(7) = 7^2 - 5 \times 7 + 2 = 49 - 35 + 2 = 16$$

- b) Les coordonnées du sommet de la parabole sont  $(2,5 ; -4,25)$ .
- c)  $f$  admet un minimum égal à  $-4,25$ .

## 7 Trigonométrie

### 1 Le cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique**  $\mathcal{C}$  est un cercle orienté de rayon 1.



### 2 Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique

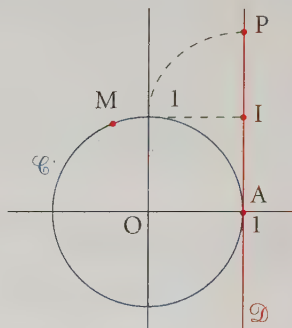
•  $\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique ;  $\mathcal{D}$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  en A, graduée à l'aide du repère (A ; I).

• Soit  $x$  un nombre réel et P le point de  $\mathcal{D}$  d'abscisse  $x$ .

• En enroulant  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{C}$ , on fait coïncider P avec un point M sur le cercle.

Cet enroulement permet :

- d'associer à chaque nombre réel un point M sur le cercle ;
- de repérer tout point M du cercle par un nombre réel.



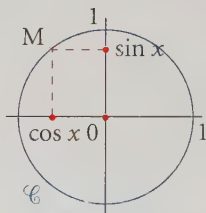
### 3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

$\mathcal{C}$  est un cercle trigonométrique.

Soit M le point de  $\mathcal{C}$  associé au nombre réel  $x$ .

• On appelle **cosinus du nombre réel  $x$** , noté  $\cos x$ , l'abscisse du point M.

• On appelle **sinus du nombre réel  $x$** , noté  $\sin x$ , l'ordonnée du point M.



### 4 Lien entre les cosinus et sinus d'un angle aigu et les cosinus et sinus d'un nombre réel

$\mathcal{C}$  est un cercle trigonométrique.

Le triangle OPQ est rectangle en Q.

Soit M le point de  $\mathcal{C}$  associé au nombre réel  $x$ .

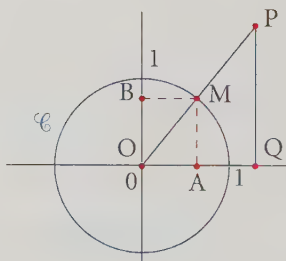
On a :

$$\cos \widehat{QOP} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OA}{OM} = \frac{OA}{1} = \cos x$$

(car  $OM = 1$ ).

$$\sin \widehat{QOP} = \frac{PQ}{OP} = \frac{AM}{OM} = \frac{OB}{OM} = \frac{OB}{1} = \sin x$$

(car  $OM = 1$ ).





## Exercice résolu

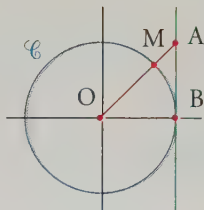
➔ Déterminer des valeurs remarquables de cosinus et de sinus

## Énoncé

ABO est un triangle rectangle isocèle en B.

M est le point d'intersection du cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  et du segment [OA].

1. Quelle est la valeur de l'angle  $\widehat{AOB}$  ?
2. Calculer la longueur OA.
3. Déterminer les valeurs exactes de  $\cos \widehat{AOB}$  et  $\sin \widehat{AOB}$  en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle.
4. Déterminer la valeur exacte de l'arc  $\widehat{BM}$ .
5. En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{4}$  et  $\sin \frac{\pi}{4}$ .



## Corrigé commenté

1. ABO est un triangle isocèle en B, donc les angles  $\widehat{BOA}$  et  $\widehat{OAB}$  sont égaux.

Ainsi,  $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$ .

2. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAB, on a  $OA^2 = OB^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$  ; soit  $OA = \sqrt{2}$ .

3. En appliquant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle :

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \widehat{AOB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. La longueur du cercle est égale à  $2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$ .

On est dans une situation de proportionnalité :

|                 |        |                |
|-----------------|--------|----------------|
| Angle en degrés | 360    | 45             |
| Longueur        | $2\pi$ | $\widehat{BM}$ |

La longueur de l'arc  $\widehat{BM}$  est

$$\text{donc égale à : } \frac{2\pi \times 45}{360} = \frac{\pi}{4}.$$

5. Le point M est le point du cercle associé au nombre réel  $\frac{\pi}{4}$ .

$$\text{On en déduit : } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## Méthode

## Les réflexes à avoir

**R1** Dans une résolution graphique d'équations et d'inéquations, ne pas oublier de faire apparaître sur le graphique les éléments nécessaires à la lecture.

**R2** On peut s'aider d'une calculatrice graphique pour visualiser l'allure d'une courbe ; cela permet de faire le bon choix des unités du repère avant de tracer la courbe sur sa feuille.

**R3** Pour résoudre graphiquement sur un intervalle une inéquation  $f(x) < g(x)$  (ou  $f(x) > g(x)$ ), on trace les courbes d'équations  $y = f(x)$  et  $y = g(x)$ , puis on détermine par lecture sur le graphique l'ensemble des abscisses des points de la courbe représentative de  $f$  situées au-dessous (ou au-dessus) de la courbe représentative de  $g$ .

**R4** Pour résoudre graphiquement sur un intervalle une équation  $f(x) = g(x)$ , on trace les courbes d'équations  $y = f(x)$  et  $y = g(x)$ , puis on détermine par lecture graphique les abscisses de tous les points d'intersection des deux courbes.

**R5** Comparer graphiquement deux fonctions  $f$  et  $g$  revient à résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$  et les inéquations  $f(x) < g(x)$  et  $f(x) > g(x)$ . (Voir les réflexes 3 et 4.)

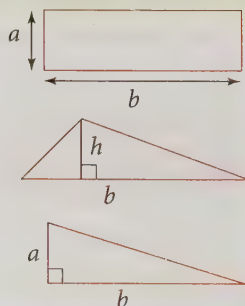
**R6** Pour comparer algébriquement deux fonctions  $f$  et  $g$ , on étudie le signe de  $f(x) - g(x)$  à l'aide d'un tableau après avoir factorisé  $f(x) - g(x)$ .

**R7** • Périmètre d'un rectangle :  $2(a + b)$

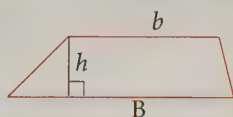
Aire d'un rectangle :  $a \times b$

• Aire d'un triangle :  $\frac{b \times h}{2}$

• Aire d'un triangle rectangle :  $\frac{a \times b}{2}$

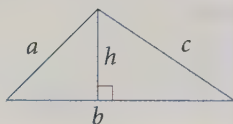
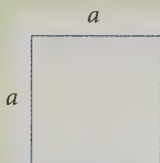


• Aire d'un trapèze :  $\frac{B+b}{2} \times h$



**R8** Ne pas oublier qu'une longueur est toujours positive.

**R9** L'aire d'un carré est :  $a^2$   
L'aire d'un triangle est :  $\frac{b \times h}{2}$ .



**R10** La longueur d'un cercle étant  $2\pi R$ , la longueur du cercle trigonométrique est  $2\pi$  (car  $R = 1$ ).

**R11** Il faut mettre une double barre dans le tableau de signe d'une fonction homographique pour la valeur de  $x$  pour laquelle la fonction n'est pas définie.

## Les pièges à éviter

Lorsqu'on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, il ne faut pas oublier de changer le sens de l'inégalité.

Il faut mettre une double barre dans le tableau de variation de la fonction inverse pour  $x = 0$ , car elle n'est pas définie en 0.

Pour résoudre par le calcul une inéquation de degré 2, on l'écrit sous la forme  $f(x) < 0$  ou  $f(x) > 0$ , puis on étudie le signe de  $f(x)$  à l'aide d'un tableau après avoir factorisé  $f(x)$ .

## Exercices

## Exercices d'application

**1 Utiliser les identités remarquables pour développer une expression**

→ corrigé p. 93

Développer, réduire et ordonner :

$$M(x) = (5 - 2x)^2 + \left[\frac{1}{3}(x + 3)\right]^2 - (2 - 3x)(2 + 3x).$$

**2 Utiliser les identités remarquables pour factoriser une expression**

→ corrigé p. 93

Factoriser  $C(x)$  et  $D(x)$  :

$$C(x) = 4(2 - 3x)^2 - 25(2x + 1)^2 \text{ et } D(x) = 4x^2 - 12x + 9.$$

**3 Construire un tableau de signe**

→ corrigé p. 93

Étudier le signe de  $g(x) = 2x(5 - x)$ .**4 Développer une expression algébrique**

→ corrigé p. 94

Soit  $A(x) = x + (2x - 1)^2 + 4(x - 1)(2 - x)$ .Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = 6x + 5$  et l'inéquation  $A(x) \geq 10x - 3$ .**5 Factoriser une expression algébrique**

→ corrigé p. 94

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $A(x) < -5$  et les équations :

$$B(x) = 0 \text{ et } C(x) = 0.$$

On donne :

$$A(x) = -6(2x - 3) + 2(x - 1)(3 - 2x) + 4x^2 - 9.$$

$$B(x) = 4(1 - x) - (1 - x)^3 \text{ et } C(x) = 9x^2 - 12x + 4.$$

**6 Équations du premier degré**

→ corrigé p. 95

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\text{a) } 4x + 7 = 3x + 5;$$

$$\text{b) } -3x + 1 = 4 - 3x;$$

$$\text{c) } -1 + 6x = 4x - 1.$$

## 7 Équations du second degré

→ corrigé p. 95

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- a)  $x^2 = 16$  ;                      b)  $x^2 = 0$  ;  
c)  $x^2 = -5$  ;                      d)  $x^2 = 8$ .

## 8 Inéquations du premier degré

→ corrigé p. 96

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

- a)  $-5 < x + 3$  ;                      b)  $-2x - 4 \geq -3x + 2$  ;  
c)  $2x + 6 \leq 7x - 9$ .

## 9 Inéquations du second degré

→ corrigé p. 96

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

- a)  $x^2 > 9$  ;                      b)  $x^2 \leq 4$ .

## 10 Résolutions graphique et algébrique d'une inéquation

→ R3      → corrigé p. 97

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation :

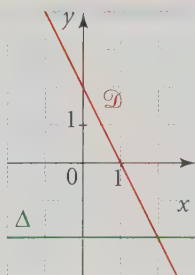
$$y = -2x + 2,$$

et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -2$ .

1. Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$-2x + 2 < -2.$$

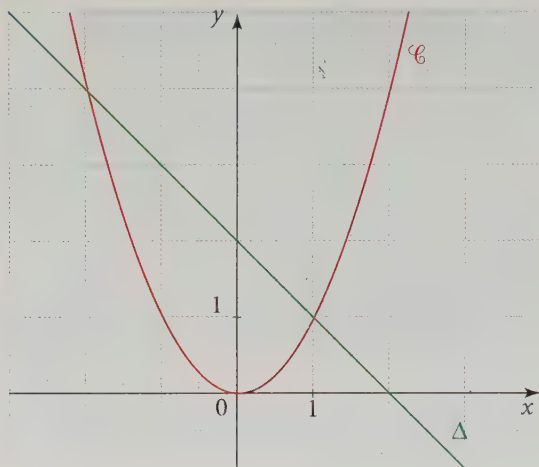
2. Retrouver ce résultat par le calcul.



## 11 Comparaison graphique et algébrique de fonctions

→ R3      → corrigé p. 97

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -x + 2$ .



1. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \geq -x + 2$ .
2. Montrer que  $f(x) + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ , puis retrouver par le calcul les résultats de la question 1.

#### 12 Utiliser les identités remarquables

→ corrigé p. 98

Développer les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable.

1.  $(4 - x)^2$ .
2.  $(-7x - 3)^2$ .
3.  $(x^2 - y^2)^2$ .
4.  $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$ .
5.  $(x + 1 - \sqrt{2})^2$ .
6.  $(7 - 2x)(7 + 2x)$ .
7.  $(2x^2 - 5)(2x^2 + 5)$ .
8.  $(x - y + 1)(x - y - 1)$ .
9.  $(x - y + 2)(x + y - 2)$ .

#### 13 Utiliser les identités remarquables

→ corrigé p. 99

Factoriser les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable.

1.  $36 - 4x^2$ .
2.  $(2x - 3)^2 - (1 - 3x)^2$ .
3.  $x^2 - 10x + 25$ .
4.  $4x^2 + 28x + 49$ .



**14 Transformer une expression algébrique**

→ corrigé p. 99

1. Développer  $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ .
2. En déduire une expression factorisée de  $x^2 - 7x + 10$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation de  $x^2 - 7x + 10 = 0$ .

**15 Transformer une expression algébrique**

→ corrigé p. 99

1. Montrer que pour tout  $x \neq -2$ , on a  $3 - \frac{1}{x+2} = \frac{3x+5}{x+2}$ .
2. Montrer que pour tout  $x \neq 1$ , on a  $2 + \frac{3}{1-x} = \frac{-2x+5}{1-x}$ .
3. Montrer que pour tout  $x \neq 3$ , on a  $1 + \frac{2}{x-3} = \frac{x-1}{x-3}$ .

**16 Compléter un tableau de signe**

→ R11

→ corrigé p. 99

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-3 ; 1[ \cup ]1 ; 10]$  par  $f(x) = \frac{x-5}{1-x}$ .

Compléter le tableau de signe de  $f(x)$  :

|                          |    |    |
|--------------------------|----|----|
| $x$                      | -3 | 10 |
| $x-5$                    |    |    |
| $1-x$                    |    |    |
| $f(x) = \frac{x-5}{1-x}$ |    |    |

**17 Compléter un tableau de signe**

→ R11

→ corrigé p. 100

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[-5 ; -1[ \cup ]-1 ; 0]$  par  $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$ .

Compléter le tableau de signe de  $g(x)$  :

|                          |    |   |
|--------------------------|----|---|
| $x$                      | -5 | 0 |
| $x + 2$                  |    |   |
| $x + 1$                  |    |   |
| $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$ |    |   |

### 18 Propriétés d'une fonction polynôme de degré 2

➔ corrigé p. 100

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-2; 4]$  par  $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ .

1. a) La parabole représentative de  $f$  est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?
- b) Quelle est l'abscisse du sommet de cette parabole ?
2. Déterminer le sens de variation de  $f$  sur  $[-2; 4]$ .
3. a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- b) Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole ?
- c) Quelle est la valeur du maximum de  $f$  ?

### 19 Tracer la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2

➔ corrigé p. 101

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-4; 1]$  par  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ .

1. Compléter le tableau de valeurs suivant.

|        |    |      |    |      |    |      |
|--------|----|------|----|------|----|------|
| $x$    | -4 | -3,5 | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 |
| $f(x)$ |    |      |    |      |    |      |

2. a) La parabole représentative de  $f$  est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?
- b) Quelle est l'abscisse du sommet de cette parabole ?
- c) Quel est l'axe de symétrie de cette parabole ?
3. a) Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse ; 1 cm pour 1 unité en ordonnée), placer les 6 points obtenus à la question 1.
- b) Dans le repère précédent, tracer la droite verticale d'équation  $x = -1,5$ .
- c) En déduire la représentation graphique  $\mathcal{C}$  de  $f$ .

## 20 Tracer la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2

➔ corrigé p. 101

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1 ; 5]$  par  $f(x) = -0,5x^2 + 3x - 5$ .

1. Compléter le tableau de valeurs suivant.

| $x$    | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|--------|---|-----|---|-----|---|
| $f(x)$ |   |     |   |     |   |

2. a) La parabole représentative de  $f$  est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?
- b) Quelle est l'abscisse du sommet de cette parabole ?
- c) Quel est l'axe de symétrie de cette parabole ?
3. a) Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 unité en abscisse ; 2 cm pour 1 unité en ordonnée), placer les 5 points obtenus à la question 1.
- b) Dans le repère précédent, tracer l'axe de symétrie de cette parabole.
- c) En déduire une représentation graphique  $\mathcal{C}$  de  $f$ .

## 21 Ensemble de définition d'une fonction homographique

➔ corrigé p. 102

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

$$1. f(x) = \frac{2x+2}{3x+12} \quad 2. g(x) = \frac{-7x}{x+2} \quad 3. h(x) = \frac{x-4}{5-x}$$

## 22 Cosinus et sinus de nombres réels

➔ R10

➔ corrigé p. 102

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points P, Q, R, S et T associés respectivement aux nombres réels  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$  et  $-\pi$ .
2. En déduire les valeurs des cosinus et sinus de ces cinq nombres réels.

## 23 Cosinus et sinus de nombres réels

➔ R10

➔ corrigé p. 103

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points P, Q, R, S et T associés respectivement aux nombres réels  $0, -\frac{\pi}{2}, -2\pi, \frac{3}{2}\pi$ , et  $-4\pi$ .
2. En déduire les valeurs des cosinus et sinus de ces cinq nombres réels.

#### 24 Cosinus et sinus de nombres réels

→ corrigé p. 104

1. Tracer un cercle trigonométrique.
2. Colorier en couleur l'arc de cercle correspondant aux points M associés aux nombres réels  $x$  tels que  $\cos x < 0$  et  $\sin x < 0$ .

#### 25 Cosinus et sinus de nombres réels

→ corrigé p. 104

1. Tracer un cercle trigonométrique.
2. Colorier en couleur l'arc de cercle correspondant aux points M associés aux nombres réels  $x$  tels que  $\cos x > 0$  et  $\sin x < 0$ .

#### 26 Cosinus et sinus d'un nombre réel

→ corrigé p. 104

1. Placer sur le cercle trigonométrique le point P associé au nombre réel  $x$  tel que  $\cos x = -\frac{1}{2}$  et  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
2. Calculer  $(\cos x)^2 + (\sin x)^2$  ; retrouver ce résultat à l'aide du graphique.

#### 27 Distinguer « et » et « ou »

→ corrigé p. 104

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes.

1.  $a \times b = 0$  équivaut à  $a = 0$  ou  $b = 0$ .
2.  $a \times b = 0$  équivaut à  $a = 0$  et  $b = 0$ .
3.  $a^2 + b^2 = 0$  équivaut à  $a = 0$  ou  $b = 0$ .
4.  $a^2 + b^2 = 0$  équivaut à  $a = 0$  et  $b = 0$ .

## Exercices d'entraînement

#### 28 Résolution d'inéquations

→ corrigé p. 104

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Résoudre sur  $]0 ; +\infty[$ , l'inéquation  $f(x) < 2$ .

**29 Résolution d'équations**

→ corrigé p. 104

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ .

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 1$ .

**30 Transformation d'écriture**

→ corrigé p. 105

1. Développer  $2(x-1)^2 + 3$ .
2.  $2(x-1)^2 + 3$  est-elle une autre écriture de  $2x^2 - 4x + 5$  ?
3. En déduire que l'équation  $2x^2 - 4x + 5 = 0$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

**31 Comparaison de fonctions**

→ R6

→ corrigé p. 105

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x^2 \text{ et } g(x) = 5x + 3.$$

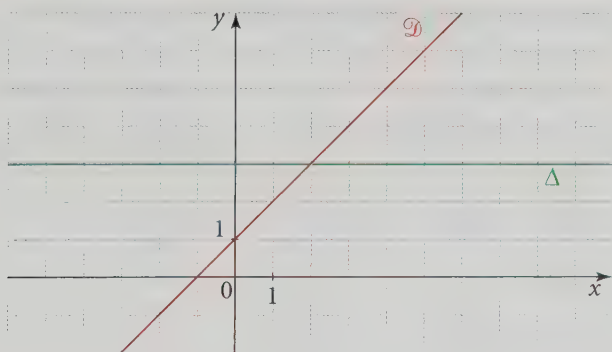
1. Développer  $(x-3)(2x+1)$ .
2. Comparer les fonction  $f$  et  $g$ .

**32 Résolution d'une inéquation**

→ R3

→ corrigé p. 105

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + 1$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 3$ .



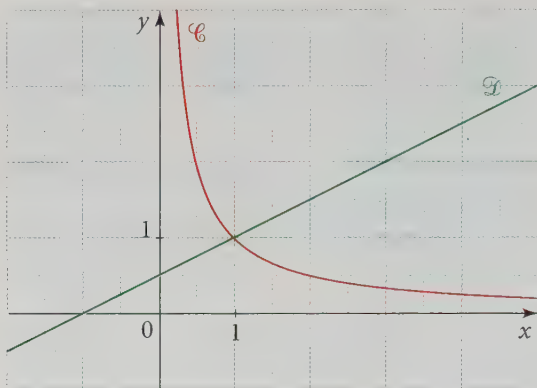
1. Résoudre graphiquement l'inéquation  $x + 1 \leq 3$ .
2. Retrouver ce résultat par le calcul.

**33 Comparaison de fonctions**

➔ R3, 4 et 5 ➔ corrigé p. 106

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  
et la droite  $\mathcal{D}$  représentative de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$



Comparer graphiquement les fonctions  $f$  et  $g$ .

**34 Résolution d'équations et d'inéquations**

➔ R1, 2, 3 et 4 ➔ corrigé p. 106

Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

a)  $\frac{1}{x} < -1$ ;    b)  $x^2 = 2x - 1$ ;    c)  $\frac{1}{x} = -x$ ;    d)  $\frac{1}{x} \leq x$ ;    e)  $x^2 < 4$ .

**35 Comparaison de fonctions**

➔ R2, 3, 4, 5 et 6 ➔ corrigé p. 108

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la courbe  $\mathcal{C}$  représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2.$$

Et la droite  $\mathcal{D}$  représentative d'une fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x + 6.$$

1. Tracer les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .
2. Comparer graphiquement les fonctions  $f$  et  $g$ .
3. Développer  $(x + 2)(x - 3)$ , puis retrouver les résultats de la question précédente par le calcul.

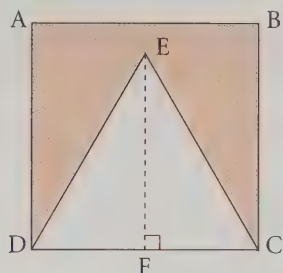


**36 Mise en équation d'un problème**

➔ R9 ➔ corrigé p. 109

On considère un carré ABCD de côté  $x$  (en cm) et EDC un triangle isocèle en E tel que  $EF = 4$  (en cm) ;  $x \geq 4$ .

1. Développer  $(x + 2)(x - 4)$ .
2. Exprimer l'aire  $\mathcal{A}_1$  du carré ABCD en fonction de  $x$ .
3. Exprimer l'aire  $\mathcal{A}_2$  du triangle EDC en fonction de  $x$ .
4. Déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie coloriée est de  $8 \text{ cm}^2$ .

**37 Application à la géométrie**

➔ R2, 5 et 7 ➔ corrigé p. 110

1. Résoudre graphiquement l'équation :

$$x^2 = 4,5x - 4,5.$$

2. Soit ABCD un rectangle dont le périmètre est égal à 9 cm.

On pose  $AB = x$  et  $BC = y$ .

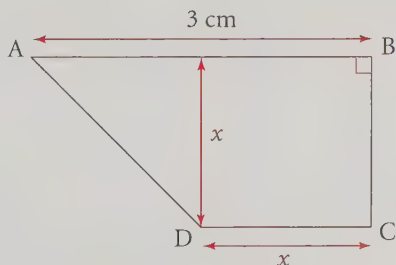
Déterminer, en fonction de  $x$ , l'aire  $f(x)$  du rectangle.

3. Déterminer les dimensions du rectangle ABCD dont l'aire est égale à  $4,5 \text{ cm}^2$ .

**38 Application à la géométrie**

➔ R1, 2, 4, 7 et 8 ➔ corrigé p. 110

Déterminer graphiquement la longueur  $x$  en cm pour que l'aire du trapèze soit égale à  $5 \text{ cm}^2$ .



#### 39 Comparaison de fonctions affines et linéaires

➔ R1, 2, 3, 4 et 5 ➔ corrigé p. 111

Un vidéo club propose à ses clients trois formules de location de DVD :

- formule ① : abonnement annuel 60 €, location d'un DVD 1,50 € ;
- formule ② : abonnement annuel 30 €, location d'un DVD 2 € ;
- formule ③ : pas d'abonnement, location d'un DVD 3 €.

Soit  $x$  le nombre annuel de DVD loués et  $y$  l'argent dépensé pour la location de ces  $x$  DVD.

1. Exprimer  $y$  en fonction de  $x$  pour chacune des formules.
2. Représenter sur le même graphique les droites d'équations  $y = 1,5x + 60$ ,  $y = 2x + 30$  et  $y = 3x$ .
3. Déterminer graphiquement pour une année donnée, la formule la plus intéressante pour un client, en fonction du nombre de DVD loués.

#### 40 Résolution d'un problème de géométrie

➔ R7 et R8 ➔ corrigé p. 112

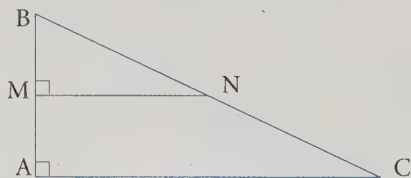
ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$$AB = 5\text{ cm et } AC = 10\text{ cm.}$$

Soit M un point du segment [AB] ; on pose  $BM = x$ .

N est le point du segment [BC] tel que (MN) et (AC) sont parallèles.

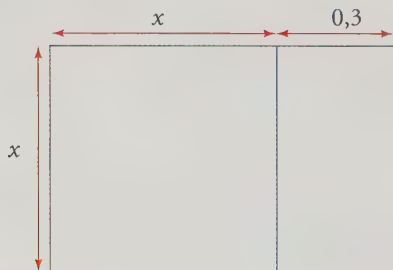
Déterminer  $x$  pour que l'aire du triangle BMN soit égale à  $20,25\text{ cm}^2$ .



#### 41 Mise en équation d'un problème

➔ corrigé p. 112

On considère le rectangle suivant.



1. a) Exprimer l'aire de ce rectangle en fonction de  $x$ .
- b) Montrer que pour tout  $x$ ,  $x^2 + 0,3x - 1,8 = (x + 0,15)^2 - 1,35^2$ .  
En déduire une expression factorisée de  $x^2 + 0,3x - 1,8$ .
- c) Résoudre l'équation  $x^2 + 0,3x - 1,8 = 0$ .

2. Le rectangle précédent représente une pièce de tissu dans laquelle on confectionne une jupe longue.

Les dimensions sont exprimées en mètres et l'aire de cette pièce est égale à  $1,80 \text{ m}^2$ .

- a) L'une des solutions de l'équation du second degré représente la largeur de la pièce de tissu. Quelle est cette largeur ?
- b) Calculer la longueur et vérifier que l'aire vaut bien  $1,80 \text{ m}^2$ .

## 42 Utilisation d'un tableur

 corrigé p. 113

1. Soit la fonction  $f$  définie sur  $[15 ; 90]$  par  $f(x) = \frac{270}{x} - 0,48x + 44,5$ .

a) Représenter à l'aide d'un tableur la courbe représentative de  $f$ . Pour cela, ouvrir une feuille de calcul.

– Écrire  $x$  dans la cellule A1 et  $f(x)$  dans la cellule B1.

– Entrer 15 dans la cellule A2 et 16 dans la cellule A3 ; sélectionner ces deux cellules, puis tirer la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la cellule A77.

– Entrer la formule  $= 270/A2 - 0,48 * A2 + 44,5$  dans la cellule B2, puis copier cette formule vers le bas jusqu'à la cellule B77.

– Sélectionner les cellules A1 à B77 ; ouvrir l'assistant graphique ; dans la boîte de dialogue « Type de graphique », choisir « Nuages de points », puis le sous-type de graphique « Nuage de points reliés par une courbe sans marquage de données » ; cliquer sur « Terminer ».

b) Déterminer graphiquement  $f(60)$ .

c) Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 32$ .

2. Une société d'électroménager met sur le marché un nouveau modèle de lave-linge à programmation « hybride ». Un sélecteur informe la carte électronique de la température choisie par le consommateur.

La résistance, en  $\text{k}\Omega$ , du capteur de température de cet appareil est donnée par

$$R = \frac{270}{\theta} - 0,48\theta + 44,5 \quad \text{où } \theta \text{ est la température comprise entre } 15^\circ\text{C et } 90^\circ\text{C}.$$

Utiliser les résultats du 1. pour répondre aux questions suivantes.

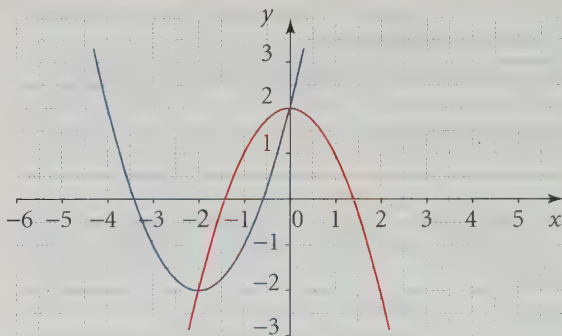
- a) Quelle est la résistance correspondant à une température de  $60^\circ\text{C}$  ?
- b) Quelle est la température correspondant à une résistance de  $32 \text{ k}\Omega$  ?

#### 43 Résoudre graphiquement équation et inéquation

➔ corrigé p. 113

On donne un tracé des paraboles représentatives des fonctions  $f$  (en rouge) et  $g$  (en bleu).

1. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$ .
2. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) > g(x)$ .



#### 44 Étudier le signe d'une fonction homographique

➔ corrigé p. 114

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{2-x}{2x+4}$ .

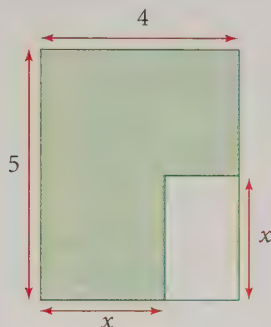
1. Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
2. Étudier le signe de  $f(x)$  sur  $D$ .

#### 45 Étudier une fonction polynôme de degré 2

➔ corrigé p. 114

1. Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 4]$  par  $f(x) = x^2 - 4x + 20$ .
  - a) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
  - b) Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 4]$  (unités graphiques : 2 cm en abscisse pour 1 et 1 cm en ordonnée pour 1).
  - c) Tracer, dans le même repère, la droite horizontale d'équation  $y = 17$ .
  - d) Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 17$ .
2. L'entreprise Prim' Jet se propose de réaliser un logo représentant la lettre P stylisée, dans une pièce métallique rectangulaire d'épaisseur 5 mm.

Dans la figure suivante, la partie colorée représente la zone où le matériau doit être déposé. Les cotes sont exprimées en cm et  $0 \leq x \leq 4$ .

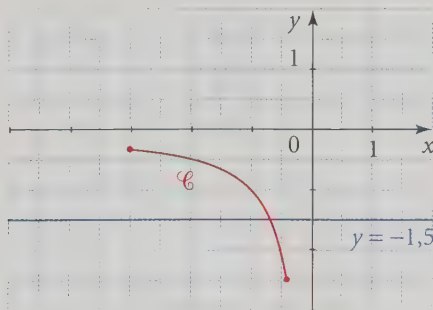


- a) Exprimer l'aire du rectangle découpé (blanc sur le schéma) en fonction de  $x$ .
  - b) Vérifier que l'aire est donnée par la fonction  $f$  de la question 1.
3. Utiliser les résultats de la question 1. pour répondre aux questions suivantes.
- a) Quelle est la cote  $x$  pour laquelle la surface à traiter est minimale ?
  - b) L'entreprise qui a commandé les pièces propose de réaliser un logo dont l'aire est égale à  $17 \text{ cm}^2$ . Quelles sont les cotes  $x$  correspondantes ?

#### 46 Déterminer un encadrement de la solution d'une équation

➔ corrigé p. 115

On donne un tracé de la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $[-3; -0,4]$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$  et de la droite d'équation  $y = -1,5$ .



On se propose de résoudre l'équation  $f(x) = -1,5$ .

1. À l'aide du graphique, donner un encadrement de la solution  $x_0$  de cette équation par deux nombres entiers consécutifs : .....  $< x_0 <$  .....

2. Établir un tableau de valeurs pour déterminer un encadrement de la solution  $x_0$  de cette équation à 0,1 près. Pour cela, utiliser la calculatrice ou le tableur.

a) Avec la calculatrice, faire afficher le tableau.

– Entrer l'expression de  $f(x)$ .

– Entrer  $-1$  comme valeur minimum,  $-0,4$  comme valeur maximum et  $0,1$  comme pas entre deux valeurs de  $x$ .

b) Avec le tableur, ouvrir une feuille de calcul.

– Écrire  $x$  dans la cellule A1 et  $f(x)$  dans la cellule B1.

– Entrer la valeur  $-1$  dans la cellule A2, la valeur  $-0,9$  dans la cellule A3, sélectionner les cellules A2 et A3, puis tirer la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la valeur  $-0,4$ .

– Entrer la formule  $=1/A2$  dans la cellule B2, puis faire glisser cette formule vers le bas à l'aide de la poignée de remplissage.

#### 47 Valeurs remarquables de cosinus et de sinus

➔ corrigé p. 116

$\mathcal{C}$  est un cercle trigonométrique et OAB est un triangle équilatéral.  
(BI) est la médiatrice de [OA].

1. Quelle est la valeur de l'angle  $\widehat{AOB}$  ?

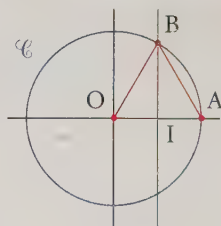
2. Quelle est la longueur OI ?

En déduire la longueur BI.

3. Déterminer les valeurs exactes de  $\cos \widehat{AOB}$  et  $\sin \widehat{AOB}$  en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

4. Déterminer la valeur exacte de l'arc  $\widehat{AB}$ .

5. En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{3}$  et  $\sin \frac{\pi}{3}$ .





- 1** • En posant  $a = 5$  et  $b = 2x$  :

$$(5 - 2x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 2x + (2x)^2.$$

$$\text{Soit } (5 - 2x)^2 = 25 - 20x + 4x^2.$$

- En posant  $a = x$  et  $b = 3$  :

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2.$$

$$\text{Soit } (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

$$\text{On a donc } \left[ \frac{1}{3}(x + 3) \right]^2 = \left( \frac{1}{3} \right)^2 \times (x + 3)^2 = \frac{1}{9}(x^2 + 6x + 9);$$

$$\left[ \frac{1}{3}(x + 3) \right]^2 = \frac{1}{9}x^2 + \frac{6}{9}x + \frac{9}{9}; \quad \left[ \frac{1}{3}(x + 3) \right]^2 = \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 1.$$

- En posant  $a = 2$  et  $b = 3x$ ,  $(2 - 3x)(2 + 3x) = 2^2 - (3x)^2$ .

$$\text{Soit } (2 - 3x)(2 + 3x) = 4 - 9x^2.$$

- On a donc  $M(x) = 25 - 20x + 4x^2 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 - 4 + 9x^2$ .

$$\text{Soit } M(x) = 4x^2 + 9x^2 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 20x + 1 - 4 + 25.$$

$$M(x) = \frac{118}{9}x^2 - \frac{58}{3}x + 22.$$

- 2** •  $C(x) = 2^2(2 - 3x)^2 - 5^2(2x + 1)^2$ ;

$$C(x) = [2(2 - 3x)]^2 - [5(2x + 1)]^2.$$

$[2(2 - 3x)]^2 - [5(2x + 1)]^2$  est la différence de deux carrés.

On a donc :

$$C(x) = [2(2 - 3x) - 5(2x + 1)] \times [2(2 - 3x) + 5(2x + 1)];$$

$$C(x) = (4 - 6x - 10x - 5)(4 - 6x + 10x + 5);$$

$$C(x) = (-16x - 1)(4x + 9).$$

- En posant  $a^2 = 4x^2$  et  $b^2 = 9$  soit  $a^2 = (2x)^2$  et  $b^2 = 3^2$ , on obtient :

$$a = 2x \text{ et } b = 3.$$

$D(x)$  est alors de la forme  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ .

$$\text{En effet : } (2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2; \quad (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

$$D(x) = (2x - 3)^2.$$

- 3** •  $g(x) = 0$  équivaut successivement à :

$$2x(5 - x) = 0; \quad 2x = 0 \text{ ou } 5 - x = 0; \quad x = 0 \text{ ou } x = 5.$$

• Tableau de signe :

| $x$              | $-\infty$ | $0$ | $5$ | $+\infty$ |
|------------------|-----------|-----|-----|-----------|
| $2x$             | $-$       | $0$ | $+$ | $+$       |
| $5-x$            | $+$       | $+$ | $0$ | $-$       |
| $g(x) = 2x(5-x)$ | $-$       | $0$ | $+$ | $-$       |

• Signe de  $g(x)$  :

Pour  $x \in ]-\infty ; 0[ \cup ]5 ; +\infty[$ ,  $g(x) < 0$ .

Pour  $x \in ]0 ; 5[$ ,  $g(x) > 0$ .

Pour  $x = 0$  et  $x = 5$ ,  $g(x) = 0$ .



• Développons  $A(x)$  :

$$A(x) = x + 4x^2 - 4x + 1 + 4(2x - x^2 - 2 + x);$$

$$A(x) = x + 4x^2 - 4x + 1 + 4(3x - x^2 - 2);$$

$$A(x) = x + 4x^2 - 4x + 1 + 12x - 4x^2 - 8;$$

$$A(x) = 9x - 7.$$

• Résolvons l'équation  $A(x) = 6x + 5$ .

L'équation  $A(x) = 6x + 5$  est successivement équivalente à :

$$9x - 7 = 6x + 5; \quad 9x - 6x = 7 + 5;$$

$$3x = 12; \quad x = 4.$$

**La solution est 4.**

• Résolvons l'inéquation  $A(x) \geq 10x - 3$ .

L'inéquation  $A(x) \geq 10x - 3$  est successivement équivalente à :

$$9x - 7 \geq 10x - 3; \quad -x \geq 4; \quad x \leq -4.$$

**L'ensemble des solutions est  $]-\infty ; -4]$ .**



•  $(2x - 3)$  est un facteur commun car :

$$4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3) \text{ et } 2(x - 1)(3 - 2x) = -2(x - 1)(2x - 3).$$

On a alors :

$$A(x) = -6(2x - 3) - 2(x - 1)(2x - 3) + (2x - 3)(2x + 3);$$

$$A(x) = (2x - 3)[-6 - 2(x - 1) + (2x + 3)];$$

$$A(x) = (2x - 3)(-6 - 2x + 2 + 2x + 3);$$

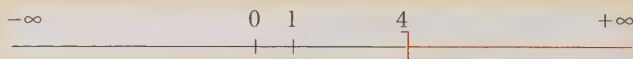
$$A(x) = -(2x - 3).$$

L'inéquation  $A(x) < -5$  est successivement équivalente à :

$$-(2x - 3) < -5; \quad -2x + 3 < -5; \quad -2x < -8; \quad 2x > 8; \quad x > 4.$$

**L'ensemble des solutions est  $]4 ; +\infty[$ .**

Représentation des solutions :



- $(1-x)$  est un facteur commun apparent et :

$$B(x) = (1-x)[4 - (1-x)^2].$$

$4 - (1-x)^2$  est la différence de deux carrés :

$$2^2 - (1-x)^2 = [2 - (1-x)][2 + (1-x)];$$

$$2^2 - (1-x)^2 = (2-1+x)(2+1-x);$$

$$2^2 - (1-x)^2 = (1+x)(3-x).$$

On a donc :  $B(x) = (1-x)(1+x)(3-x)$ .

L'équation  $B(x) = 0$  est successivement équivalente à :

$$(1-x)(1+x)(3-x) = 0; \quad 1-x=0 \text{ ou } 1+x=0 \text{ ou } 3-x=0;$$

$$x=1 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } x=3.$$

**Les solutions sont -1, 1 et 3.**

- En posant  $a^2 = 9x^2$  et  $b^2 = 4$ , soit  $a^2 = (3x)^2$  et  $b^2 = 2^2$ , on obtient  $a = 3x$  et  $b = 2$ .

$C(x)$  est alors de la forme  $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ .

En effet :

$$(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2;$$

$$(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4;$$

$$(3x-2)^2 = C(x).$$

L'équation  $C(x) = 0$  est successivement équivalente à :

$$(3x-2)^2 = 0; \quad 3x-2=0; \quad x = \frac{2}{3}.$$

**La solution est  $\frac{2}{3}$ .**

- 6 a)** Cette équation est équivalente à  $4x - 3x = 5 - 7$ , soit  $x = -2$ .

La solution de cette équation est **-2**.

- b)** Cette équation est équivalente à  $-3x + 3x = 4 - 1$ , soit  $0 = 3$ .

Cette équation ne possède **pas de solution**.

- c)** Cette équation est successivement équivalente à :

$$6x - 4x = -1 + 1;$$

$$2x = 0;$$

$$x = 0.$$

La solution de cette équation est **0**.

- 7 a)** L'équation  $x^2 = 16$  est équivalente à :

$$x = \sqrt{16} \text{ ou } x = -\sqrt{16}.$$

Or  $\sqrt{16} = 4$ . Les solutions de l'équation  $x^2 = 16$  sont :

$$4 \text{ et } -4.$$

- b)** L'équation  $x^2 = 0$  est équivalente à  $x = 0$ .

La solution de l'équation  $x^2 = 0$  est **0**.

- c)** Comme  $-5 < 0$ , l'équation  $x^2 = -5$  n'admet aucune solution réelle.

**d)** L'équation  $x^2 = 8$  est équivalente à :

$$x = \sqrt{8} \text{ ou } x = -\sqrt{8}$$

$$\text{soit } x = 2\sqrt{2} \text{ ou } x = -2\sqrt{2} \text{ car } \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}.$$

Les solutions de l'équation  $x^2 = 8$  sont  $2\sqrt{2}$  et  $-2\sqrt{2}$ .



**a)** L'inéquation  $-5 < x + 3$  est successivement équivalente à :

$$x + 3 > -5;$$

$$x > -5 - 3 \text{ soit } x > -8.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est  $]-8; +\infty[$ .

**b)** L'inéquation  $-2x - 4 \geq -3x + 2$  est équivalente à :

$$-2x + 3x \geq 2 + 4, \text{ soit } x \geq 6.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle  $[6; +\infty[$ .

**c)** L'inéquation  $2x + 6 \leq 7x - 9$  est successivement équivalente à :

$$2x - 7x \leq -9 - 6;$$

$$-5x \leq -15;$$

$$x \geq \frac{-15}{-5};$$

$$x \geq \frac{15}{5}, \text{ soit } x \geq 3.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle  $[3; +\infty[$ .



**a)**  $x^2 > 9$  équivaut à :

$$x^2 - 9 > 0, \text{ soit } (x - 3)(x + 3) > 0.$$

Tableau de signe :

| $x$                | $-\infty$ | $-3$ | $3$ | $+\infty$ |   |   |
|--------------------|-----------|------|-----|-----------|---|---|
| $x-3$              |           | -    | -   | 0         | + |   |
| $x+3$              |           | -    | 0   | +         | + |   |
| $x^2-9=(x-3)(x+3)$ |           | +    | 0   | -         | 0 | + |

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $x^2 > 9$  est :

$$]-\infty; -3[ \cup ]3; +\infty[.$$

**b)**  $x^2 \leq 4$  équivaut à :

$$x^2 - 4 \leq 0, \text{ soit } (x - 2)(x + 2) \leq 0.$$

Tableau de signe :

| $x$                | $-\infty$ | $-2$ | $2$ | $+\infty$ |   |   |
|--------------------|-----------|------|-----|-----------|---|---|
| $x-2$              |           | -    | -   | 0         | + |   |
| $x+2$              |           | -    | 0   | +         | + |   |
| $x^2-4=(x-2)(x+2)$ |           | +    | 0   | -         | 0 | + |

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $x^2 \leq 4$  est :  
 $[-2 ; 2]$ .

**10** 1. La droite  $\mathcal{D}$  est située au-dessous de la droite  $\Delta$  pour  $x \in ]2 ; +\infty[$ , donc :  
 l'ensemble des solutions est  $]2 ; +\infty[$ .

2. L'inéquation  $-2x + 2 < -2$  est équivalente à :  
 $-2x < -2 - 2$ , soit  $-2x < -4$   
 $x > \frac{-4}{-2}$ , soit  $x > 2$ .

L'ensemble des solutions de cette inéquation est  $]2 ; +\infty[$ , ce qui vérifie le résultat précédent.

**11** 1. La courbe  $\mathcal{C}$  est située sur et au-dessus de la droite  $\Delta$  pour :  
 $x \in ]-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty[$ .

2. L'inéquation  $f(x) \geq -x + 2$  s'écrit :  
 $x^2 \geq -x + 2$ , soit  $x^2 + x - 2 \geq 0$ .

Or  $(x + 2)(x - 1) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$ .

Ainsi, il s'agit de résoudre l'inéquation  $(x + 2)(x - 1) \geq 0$ .

•  $(x + 2)(x - 1) = 0$  équivaut à :

$x + 2 = 0$  ou  $x - 1 = 0$ , soit  $x = -2$  ou  $x = 1$ .

• Tableau de signe :

| $x$       | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |
|-----------|-----------|------|-----|-----------|
| $x+2$     |           | $-$  | $0$ | $+$       |
| $x-1$     |           | $-$  | $-$ | $0$       |
| $x^2+x-2$ |           | $+$  | $0$ | $-$       |

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $x^2 + x - 2 \geq 0$  est bien l'intervalle  
 $]-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty[$ .

**12** 1.  $(4-x)^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times x + x^2$ ;

$$(4-x)^2 = x^2 - 8x + 16.$$

2. En posant  $a = -7x$  et  $b = -3$ ,  $(-7x-3)^2$  est de la forme  $(a+b)^2$ .

$$(-7x-3)^2 = (-7x)^2 + 2 \times (-7x) \times (-3) + (-3)^2$$

$$(-7x-3)^2 = 49x^2 + 42x + 9.$$

On peut aussi poser  $a = -7x$  et  $b = 3$ ;

$$(-7x-3)^2 \text{ est alors de la forme } (a-b)^2$$

ou remarquer que  $(-7x-3)^2 = [-(7x+3)]^2$ , soit  $(-1)^2(7x+3)^2 = (7x+3)^2$ .

3. En posant  $a = x^2$  et  $b = y^2$ ,  $(x^2-y^2)^2$  est de la forme  $(a-b)^2$ .

$$(x^2-y^2)^2 = (x^2)^2 - 2 \times x^2 \times y^2 + (y^2)^2, \text{ soit } (x^2-y^2)^2 = x^{2 \times 2} - 2x^2y^2 + y^{2 \times 2}$$

$$(x^2-y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4.$$

$$4. (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 2 + 2\sqrt{2 \times 5} + 5$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 7 + 2\sqrt{10}.$$

5. En posant  $a = x+1$  et  $b = \sqrt{2}$ ,  $(x+1-\sqrt{2})^2$  est de la forme  $(a-b)^2$ .

$$(x+1-\sqrt{2})^2 = (x+1)^2 - 2 \times (x+1) \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$(x+1-\sqrt{2})^2 = (x^2 + 2x + 1) - 2\sqrt{2}(x+1) + 2$$

$$(x+1-\sqrt{2})^2 = x^2 + 2x - 2\sqrt{2}x + 1 - 2\sqrt{2} + 2$$

$$(x+1-\sqrt{2})^2 = x^2 + 2(1-\sqrt{2})x + 3 - 2\sqrt{2}.$$

On peut aussi poser  $a = x$  et  $b = 1-\sqrt{2}$ ;

$$(x+1-\sqrt{2})^2 \text{ est alors de la forme } (a+b)^2.$$

$$6. (7-2x)(7+2x) = 7^2 - (2x)^2$$

$$(7-2x)(7+2x) = 49 - 4x^2.$$

$$7. (2x^2-5)(2x^2+5) = (2x^2)^2 - 5^2$$

$$(2x^2-5)(2x^2+5) = 4x^4 - 25.$$

8. En posant  $a = x-y$  et  $b = 1$ ,  $(x-y+1)(x-y-1)$  est de la forme  $(a+b)(a-b)$ .

$$(x-y+1)(x-y-1) = (x-y)^2 - 1^2$$

$$(x-y+1)(x-y-1) = x^2 - 2xy + y^2 - 1.$$

9. En posant  $a = x$  et  $b = y-2$ ,  $(x-y+2)(x+y-2)$  est de la forme  $(a-b)(a+b)$ .

$$(x-y+2)(x+y-2) = x^2 - (y-2)^2$$

$$(x-y+2)(x+y-2) = x^2 - (y^2 - 2 \times 2y + 2^2)$$

$$(x-y+2)(x+y-2) = x^2 - y^2 + 4y - 4.$$



**13** 1.  $36 - 4x^2 = 6^2 - (2x)^2$ ;  $36 - 4x^2 = (6 - 2x)(6 + 2x)$ .

2.  $(2x - 3)^2 - (1 - 3x)^2 = (2x - 3 + 1 - 3x)(2x - 3 - 1 + 3x)$ ;  
 $(2x - 3)^2 - (1 - 3x)^2 = (-x - 2)(5x - 4)$ .

3. En posant  $a = x$  et  $b = 5$ ,  $x^2 - 10x + 25$  est de la forme  $a^2 - 2ab + b^2$ .  
 $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$ .

4. En posant  $a = 2x$  et  $b = 7$ ,  $4x^2 + 28x + 49$  est de la forme  $a^2 + 2ab + b^2$ .  
 $4x^2 + 28x + 49 = (2x + 7)^2$ .

**14** 1.  $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = x^2 - 2 \times \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = x^2 - 7x + \frac{49}{4} - \frac{9}{4} = x^2 - 7x + 10$ .

2.  $x^2 - 7x + 10 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right)$

$x^2 - 7x + 10 = \left(x - \frac{10}{2}\right)\left(x - \frac{4}{2}\right) = (x - 5)(x - 2)$ .

3.  $x^2 - 7x + 10 = 0$  équivaut successivement à  $(x - 5)(x - 2) = 0$ ;  $x - 5 = 0$  ou  $x - 2 = 0$ ;  $x = 5$  ou  $x = 2$ .

Les solutions de l'équation sont 2 et 5.

**15** 1. Pour tout  $x \neq -2$ , on a :

$3 - \frac{1}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} - \frac{1}{x+2} = \frac{3x+6-1}{x+2} = \frac{3x+5}{x+2}$ .

2. Pour tout  $x \neq 1$ , on a :  $2 + \frac{3}{1-x} = \frac{2(1-x)}{1-x} + \frac{3}{1-x} = \frac{2-2x+3}{1-x} = \frac{-2x+5}{1-x}$ .

3. Pour tout  $x \neq 3$ , on a :  $1 + \frac{2}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{2}{x-3} = \frac{x-3+2}{x-3} = \frac{x-1}{x-3}$ .

**16** • Pour déterminer le signe de  $x - 5$ , on résout l'équation  $x - 5 = 0$ , puis l'inéquation  $x - 5 > 0$ .

$x - 5 = 0$  équivaut à  $x = 5$ .

$x - 5 > 0$  équivaut à  $x > 5$ .

• De la même manière,  $1 - x = 0$  équivaut à  $x = 1$  et  $1 - x > 0$  équivaut à  $1 > x$ , soit  $x < 1$ .

• La valeur qui annule le dénominateur de  $f(x)$  est 1 (double barre dans le tableau) :  $f$  n'est pas définie en 1.

- On reporte ces résultats dans un tableau :

|                          |    |   |     |     |
|--------------------------|----|---|-----|-----|
| $x$                      | -3 | 1 | 5   | 10  |
| $x - 5$                  | -  |   | - 0 | +   |
| $1 - x$                  | +  | 0 | -   | -   |
| $f(x) = \frac{x-5}{1-x}$ | -  |   | +   | 0 - |

**17** • Pour déterminer le signe de  $x + 2$ , on résout l'équation  $x + 2 = 0$ , puis l'inéquation  $x + 2 > 0$ .

$x + 2 = 0$  équivaut à  $x = -2$ .

$x + 2 > 0$  équivaut à  $x > -2$ .

• De la même manière,  $x + 1 = 0$  équivaut à  $x = -1$  et  $x + 1 > 0$  équivaut à  $x > -1$ .

• La valeur qui annule le dénominateur de  $g(x)$  est  $-1$  (double barre dans le tableau) :  $g$  n'est pas définie en  $-1$ .

- On reporte ces résultats dans un tableau :

|                          |    |    |     |   |   |
|--------------------------|----|----|-----|---|---|
| $x$                      | -5 | -2 | -1  | 0 |   |
| $x + 2$                  | -  | 0  | +   | + |   |
| $x + 1$                  | -  |    | - 0 | + |   |
| $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$ | +  | 0  | -   |   | + |

**18** 1. a) Comme  $a < 0$  ( $a = -2$ ), la parabole est tournée vers le bas.

b) Comme  $a = -2$  et  $b = 4$ , l'abscisse du sommet de cette parabole est  $x = \frac{-4}{-4} = 1$ .

2. Comme  $a < 0$ ,  $f$  est strictement croissante sur  $[-2 ; 1]$  et  $f$  est strictement décroissante sur  $[1 ; 4]$ .

3. a) Tableau de variation de  $f$ .

|        |     |   |     |               |
|--------|-----|---|-----|---------------|
| $x$    | -2  | 1 | 4   | $f(-2) = -13$ |
| $f(x)$ | -13 | 5 | -13 | $f(1) = 5$    |
|        |     |   |     | $f(4) = -13$  |

b) Les coordonnées du sommet de la parabole sont  $(1 ; 5)$ .

c) Le maximum de  $f$  est 5.

### 19 1. Tableau de valeurs.

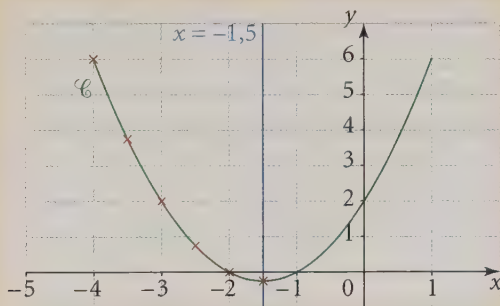
|        |    |      |    |      |    |       |
|--------|----|------|----|------|----|-------|
| $x$    | -4 | -3,5 | -3 | -2,5 | -2 | -1,5  |
| $f(x)$ | 6  | 3,75 | 2  | 0,75 | 0  | -0,25 |

2. a) Comme  $a > 0$  ( $a = 1$ ), la parabole est tournée vers le haut.

b) Comme  $a = 1$  et  $b = 3$ , l'abscisse du sommet de cette parabole est  $x = \frac{-3}{2} = -1,5$ .

c) L'axe de symétrie de cette parabole est la droite d'équation  $x = -1,5$ .

3. a), b) et c) Le tracé de la courbe représentative de  $f$  sur  $[-1,5 ; 1]$  s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation  $x = -1,5$ .



### 20 1. Tableau de valeurs.

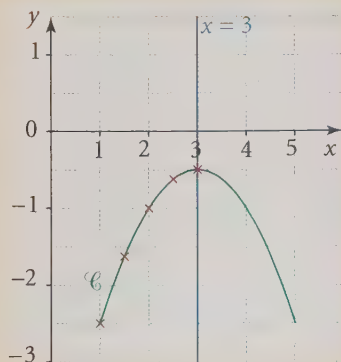
|        |      |        |    |        |      |
|--------|------|--------|----|--------|------|
| $x$    | 1    | 1,5    | 2  | 2,5    | 3    |
| $f(x)$ | -2,5 | -1,625 | -1 | -0,625 | -0,5 |

2. a) Comme  $a < 0$  ( $a = -0,5$ ), la parabole est tournée vers le bas.

b) Comme  $a = -0,5$  et  $b = 3$ , l'abscisse du sommet de cette parabole est  $x = \frac{-3}{-1} = 3$ .

c) L'axe de symétrie de cette parabole est la droite d'équation  $x = 3$ .

3. a), b) et c)



**21** 1. On résout l'équation  $3x + 12 = 0$  successivement équivalente à :

$$3x = -12; \quad x = -\frac{12}{3}; \quad x = -4.$$

$f$  est définie pour tout nombre réel  $x \neq -4$ .

Ainsi, l'ensemble de définition de  $f$  est  $]-\infty; -4[ \cup ]-4; +\infty[$ .

2. On résout l'équation  $x + 2 = 0$  équivalente à  $x = -2$ .

$f$  est définie pour tout nombre réel  $x \neq -2$ .

Ainsi, l'ensemble de définition de  $f$  est  $]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$ .

3. On résout l'équation  $5 - x = 0$  équivalente à  $x = 5$ .

$f$  est définie pour tout nombre réel  $x \neq 5$ .

Ainsi, l'ensemble de définition de  $f$  est  $]-\infty; 5[ \cup ]5; +\infty[$ .

**22** 1. La longueur du cercle trigonométrique est  $2\pi$ .

Ainsi,  $\frac{\pi}{2}$  est la longueur du quart de cercle trigonométrique et  $\pi$  du demi cercle trigonométrique.

On obtient ainsi les points P, Q, R, S et T associés respectivement aux nombres réels  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, -\pi$  par enroulement de la droite des réels autour du cercle.

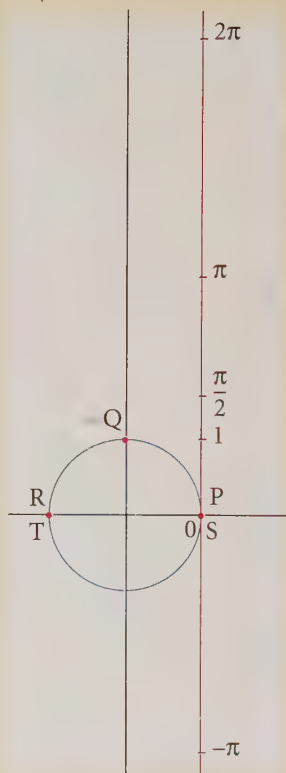
2.  $\cos 0 = 1$  et  $\sin 0 = 0$ ;

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ et } \sin \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$\cos \pi = -1 \text{ et } \sin \pi = 0;$$

$$\cos 2\pi = 1 \text{ et } \sin 2\pi = 0;$$

$$\cos(-\pi) = -1 \text{ et } \sin(-\pi) = 0.$$



**23** 1. La longueur du cercle trigonométrique est  $2\pi$ .

Ainsi,  $\frac{\pi}{2}$  est la longueur d'un quart de cercle,

$2\pi$  d'un cercle,  $\frac{3}{2}\pi$  la longueur de  $\frac{3}{4}$  de tour et  $4\pi$  la longueur de deux tours.

On obtient ainsi les points P, Q, R, S et T associés respectivement aux nombres réels

$0$ ,  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $-2\pi$ ,  $\frac{3}{2}\pi$ , et  $-4\pi$  par enroulement de la droite des nombres réels autour du cercle.

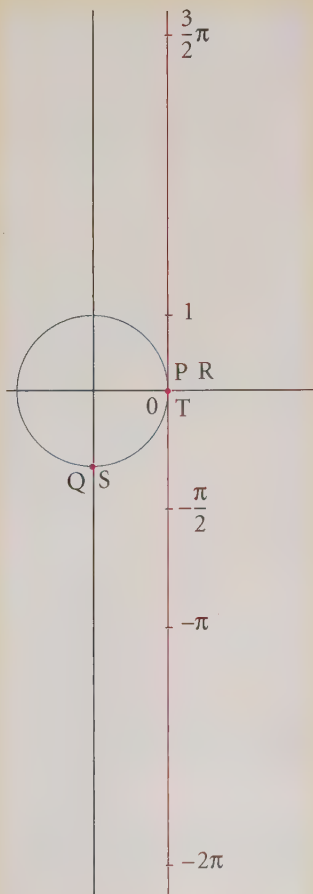
2.  $\cos 0 = 1$  et  $\sin 0 = 0$ ;

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1;$$

$$\cos(-2\pi) = 1 \text{ et } \sin(-2\pi) = 0;$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \text{ et } \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1;$$

$$\cos(-4\pi) = 1 \text{ et } \sin(-4\pi) = 0.$$



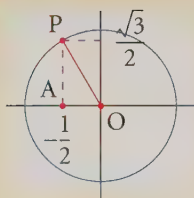
**24** 1. et 2.



**25** 1. et 2.



**26** 1.



$$2. (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

À l'aide du graphique, le théorème de Pythagore appliqué au rectangle OPA, rectangle en A permet d'écrire  $OA^2 + AP^2 = OP^2$ .

Or,  $OA^2 = (\cos x)^2$ ;  $AP^2 = (\sin x)^2$  et  $OP^2 = 1$  (rayon du cercle).

Ainsi,  $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ .

**27** 1. Vrai. 2. Faux. 3. Faux. 4. Vrai.

**28** Pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ , l'inéquation  $f(x) < 2$  est équivalente à :

$$\frac{1}{x} < 2, \text{ soit } \frac{1}{2} < x, \text{ c'est-à-dire } x > \frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) < 2$  est  $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$ .

**29** L'équation  $f(x) = 1$  est équivalente à :

$$x^2 - 4x + 5 = 1, \text{ soit } x^2 - 4x + 4 = 0.$$

$$\text{Or } x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times 2x + 2^2.$$

Ainsi, en utilisant l'identité remarquable  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ , on obtient :

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$



Or  $(x-2)^2 = 0$  équivaut à :

$$x-2 = 0, \text{ soit } x = 2.$$

La solution de l'équation  $f(x) = 1$  est 2.

**30** 1.  $2(x-1)^2 + 3 = 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = 2x^2 - 4x + 2 + 3 = 2x^2 - 4x + 5.$

2. Oui.

3. Pour tout nombre réel  $x$ ,  $2(x-1)^2 \geq 0$ , donc  $2(x-1)^2 + 3 > 0$ .

Ainsi, pour tout nombre réel  $x$ ,  $2(x-1)^2 + 3 \neq 0$  et l'équation  $2x^2 - 4x + 5 = 0$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

**31** 1.  $(x-3)(2x+1) = 2x^2 + x - 6x - 3 = 2x^2 - 5x - 3.$

2. On étudie le signe de  $f(x) - g(x)$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \bullet f(x) - g(x) &= 2x^2 - (5x + 3) \\ &= 2x^2 - 5x - 3 \\ &= (x-3)(2x+1). \end{aligned}$$

• L'équation  $(x-3)(2x+1) = 0$  est équivalente à :

$$x-3 = 0 \text{ ou } 2x+1 = 0, \text{ soit } x = 3 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

• Tableau de signe

| $x$         | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | 3 | $+\infty$ |   |
|-------------|-----------|----------------|---|-----------|---|
| $x-3$       | -         | -              | 0 | +         |   |
| $2x+1$      | -         | 0              | + | +         |   |
| $f(x)-g(x)$ | +         | 0              | - | 0         | + |

• Pour  $x \in ]-\infty ; -\frac{1}{2}[ \cup ]3 ; +\infty[$ ,  $f(x) - g(x) > 0$ , soit  $f(x) > g(x)$ .

Pour  $x = -\frac{1}{2}$  ou  $x = 3$ ,  $f(x) - g(x) = 0$ , soit  $f(x) = g(x)$ .

Pour  $x \in ]-\frac{1}{2} ; 3[$ ,  $f(x) - g(x) < 0$ , soit  $f(x) < g(x)$ .

**32** 1. La droite  $\mathcal{D}$  est située sur ou au-dessous de la droite  $\Delta$  pour  $x \in ]-\infty ; 2]$ .

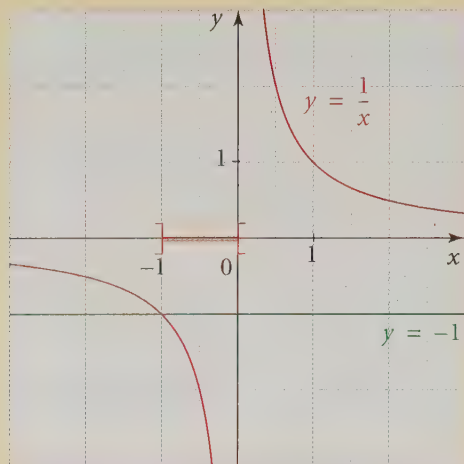
2. L'inéquation  $x+1 \leq 3$  est équivalente à :

$$x \leq 3-1, \text{ soit } x \leq 2.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $x+1 \leq 3$  est  $]-\infty ; 2]$ .

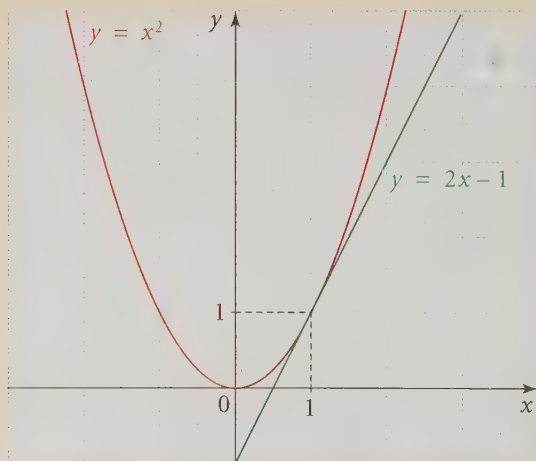
- 33** • Pour  $x \in ]0 ; 1[$ ,  $\mathcal{C}$  est située au-dessus de  $\mathcal{D}$ , donc  $f(x) > g(x)$ .  
 • Pour  $x = 1$ ,  $\mathcal{C}$  coupe  $\mathcal{D}$ , donc  $f(x) = g(x)$ .  
 • Pour  $x \in ]1 ; +\infty[$ ,  $\mathcal{C}$  est située au-dessous de  $\mathcal{D}$ , donc  $f(x) < g(x)$ .

**34 a)**  $\frac{1}{x} < -1$



Les solutions sont les abscisses des points de la courbe d'équation  $y = \frac{1}{x}$  situés au-dessous de la droite d'équation  $y = -1$ . On lit :  $] -1 ; 0 [$ .

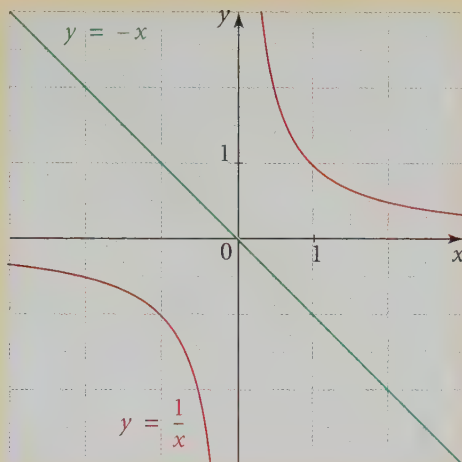
**b)**  $x^2 = 2x - 1$



Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation  $y = x^2$  et de la droite d'équation  $y = 2x - 1$ .

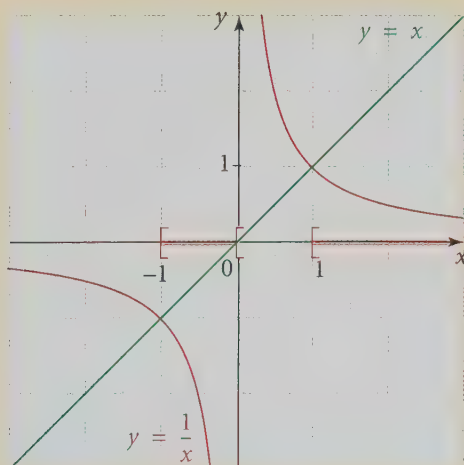
On lit : 1.

c)  $\frac{1}{x} = -x$



La courbe d'équation  $y = \frac{1}{x}$  et la droite d'équation  $y = -x$  ne se coupent pas.  
Il n'y a pas de solution.

d)  $\frac{1}{x} \leq x$

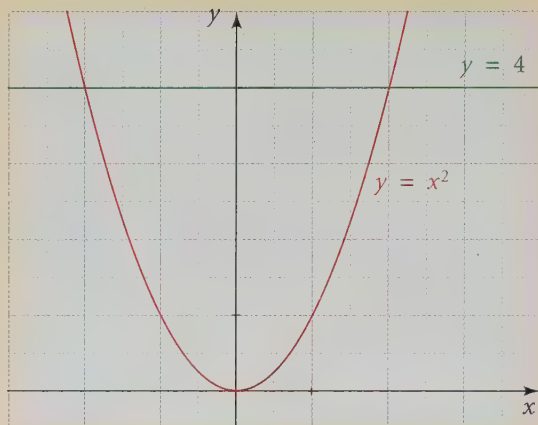


### 3 Utilisation des fonctions de référence. Trigonométrie

Les solutions sont les abscisses des points de la courbe d'équation  $y = \frac{1}{x}$  situés au-dessous ou sur la droite d'équation  $y = x$ .

On lit :  $[-1 ; 0[ \cup [1 ; +\infty[$ .

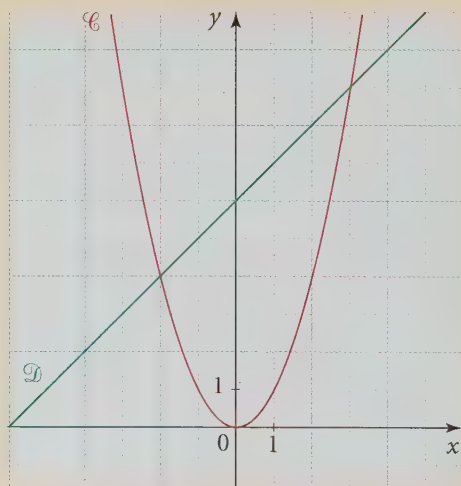
e)  $x^2 < 4$



Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe d'équation  $y = x^2$  situés au-dessous de la droite d'équation  $y = 4$ .

On lit :  $]-2 ; 2[$ .

**35** 1. Tracés des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dessous.



2. Pour  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]3; +\infty[$ ,  $\mathcal{C}$  est située au-dessus de  $\mathcal{D}$ , donc :

$$f(x) > g(x).$$

Pour  $x = -2$  et  $x = 3$ ,  $\mathcal{C}$  coupe  $\mathcal{D}$ , donc  $f(x) = g(x)$ .

Pour  $x \in ]-2; 3[$ ,  $\mathcal{C}$  est située au-dessous de  $\mathcal{D}$ , donc  $f(x) < g(x)$ .

3.  $(x+2)(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6.$

On étudie le signe de  $f(x) - g(x)$  sur  $\mathbb{R}$  :

- $f(x) - g(x) = x^2 - (x+6) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3).$

- L'équation  $f(x) - g(x) = 0$  équivaut successivement à :

$$(x+2)(x-3) = 0; \quad x+2 = 0 \text{ ou } x-3 = 0, \text{ soit } x = -2 \text{ ou } x = 3.$$

- Tableau de signe :

| $x$                      | $-\infty$ | $-2$ | $3$ | $+\infty$ |
|--------------------------|-----------|------|-----|-----------|
| $x+2$                    |           | $-$  | $0$ | $+$       |
| $x-3$                    |           | $-$  | $-$ | $0$       |
| $f(x)-g(x) = (x+2)(x-3)$ |           | $+$  | $0$ | $-$       |

- Pour  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]3; +\infty[$ ,  $f(x) - g(x) > 0$ , soit  $f(x) > g(x)$ .

Cela signifie que la courbe représentative de  $f$  est située au-dessus de celle de  $g$  sur ces intervalles.

- Pour  $x = -2$  et  $x = 3$ ,  $f(x) - g(x) = 0$ , soit  $f(x) = g(x)$ .

Cela signifie que les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  se coupent aux points d'abscisses  $-2$  et  $3$ .

- Pour  $x \in ]-2; 3[$ ,  $f(x) - g(x) < 0$ , soit  $f(x) < g(x)$ .

Cela signifie que la courbe représentative de  $f$  est située au-dessous de celle de  $g$  sur cet intervalle.

**36** 1.  $(x+2)(x-4) = x^2 - 4x + 2x - 8;$

$$(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8.$$

2.  $\mathcal{A}_1 = DC^2;$   $\mathcal{A}_1 = x^2.$

3.  $\mathcal{A}_2 = \frac{DC \times EF}{2};$   $\mathcal{A}_2 = \frac{x \times 4}{2};$   $\mathcal{A}_2 = 2x.$

4.  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$ , donc  $\mathcal{A} = x^2 - 2x.$

L'équation  $\mathcal{A} = 8$  est équivalente à :  $x^2 - 2x = 8$ , soit  $x^2 - 2x - 8 = 0$ .

On sait que  $(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$ , donc l'équation  $\mathcal{A} = 8$  est successivement équivalente à :

$$(x+2)(x-4) = 0;$$

$$x+2 = 0 \text{ ou } x-4 = 0, \text{ soit } x = -2 \text{ ou } x = 4.$$

On ne retient que la solution positive 4.

Pour que l'aire soit égale à  $8 \text{ cm}^2$ , il faut que le côté du carré soit de 4 cm.

**37** 1. On trace la courbe d'équation  $y = x^2$  et la droite d'équation  $y = 4,5x - 4,5$ .  
Tracés ci-contre.

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite. On lit 1,5 et 3.

2. On exprime  $y$  en fonction de  $x$  en utilisant la condition sur le périmètre :

$$(AB + BC) \times 2 = 9.$$

Alors  $(x + y) \times 2 = 9$ ;

$$(x + y) = 4,5; y = 4,5 - x.$$

On en déduit  $f(x)$  :

$$f(x) = x \times y.$$

Or  $y = 4,5 - x$ .

Donc  $f(x) = x(4,5 - x)$ ,

$$\text{soit } f(x) = 4,5x - x^2.$$

3. On résout l'équation  $f(x) = 4,5$ .

On a l'équation :  $4,5x - x^2 = 4,5$ ,

$$\text{soit } x^2 = 4,5x - 4,5.$$

On a résolu cette équation à la question 1.

Les solutions sont 1,5 et 3.

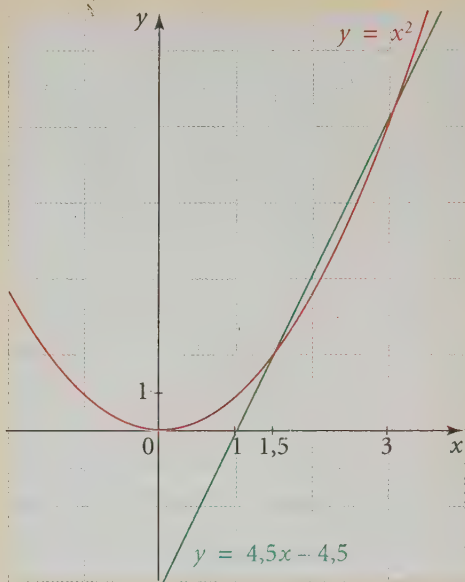
Si  $x = 1,5$ , alors  $y = 4,5 - 1,5$ , soit  $y = 3$ .

Si  $x = 3$ , alors  $y = 4,5 - 3$ , soit  $y = 1,5$ .

Le rectangle cherché a pour dimension :

$AB = 1,5\text{cm}$  et  $BC = 3\text{cm}$

ou  $AB = 3\text{cm}$  et  $BC = 1,5\text{cm}$ .



**38** L'aire du trapèze est :  $\frac{(x+3) \times x}{2}$ .

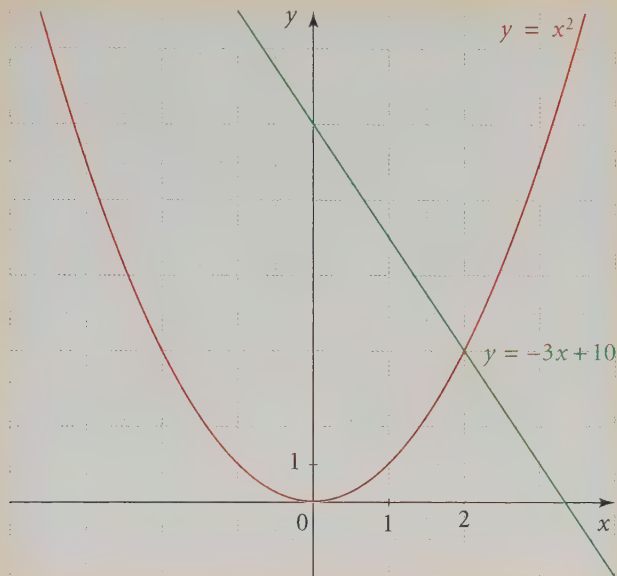
Pour que cette aire soit égale à  $5 \text{ cm}^2$ , on résout l'équation :

$$\frac{(x+3)x}{2} = 5.$$

Cette équation est équivalente à :

$$x^2 + 3x = 10, \text{ soit } x^2 = -3x + 10.$$

On résout graphiquement cette équation en traçant la courbe d'équation  $y = x^2$  et la droite d'équation  $y = -3x + 10$ .



Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation  $y = x^2$  et de la droite d'équation  $y = -3x + 10$ .

La solution positive est donc 2.

L'aire du trapèze est donc égale à  $5 \text{ cm}^2$  pour  $x = 2 \text{ cm}$ .

**39** 1. Soit  $x$  le nombre annuel de DVD loués et  $y$  l'argent dépensé pour la location de ces  $x$  DVD. On a d'après l'énoncé :

- formule ① :  $y = 60 + 1,5x$ ;
- formule ② :  $y = 30 + 2x$ ;
- formule ③ :  $y = 3x$ .

2. Soit  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  les fonctions associées respectivement aux formules ①, ② et ③ :

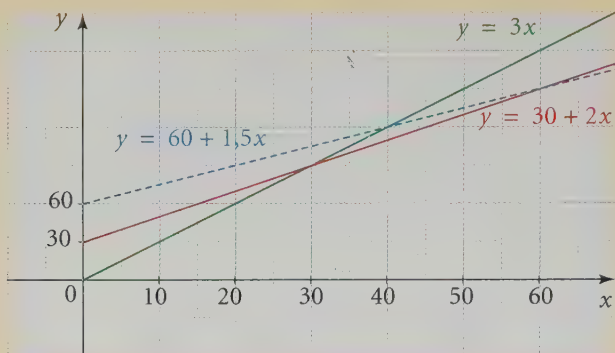
$$f_1(x) = 60 + 1,5x;$$

$$f_2(x) = 30 + 2x;$$

$$\text{et } f_3(x) = 3x.$$

Représentation graphique des fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  :





3. Pour  $0 \leq x < 30$ , la droite d'équation  $y = 3x$  est située au-dessous des deux autres droites.

Pour  $30 < x < 60$ , la droite d'équation  $y = 30 + 2x$  est située au-dessous des deux autres droites.

Pour  $x > 60$ , la droite d'équation  $y = 60 + 1,5x$  est située au-dessous des deux autres droites.

#### Conclusion :

- Pour un nombre annuel de DVD inférieur à 30, la formule n° 3 est la plus avantageuse.
- Pour un nombre annuel de DVD compris entre 30 et 60, la formule n° 2 est la plus avantageuse.
- Au-delà de 60 DVD loués annuellement, c'est la formule n° 1 qui est la plus avantageuse.

**40** Les droites sécantes (BA) et (BC) sont coupées par les parallèles (MN) et (AC). Le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}, \text{ soit } \frac{x}{5} = \frac{MN}{10}.$$

$$MN = \frac{10x}{5}, \text{ soit } MN = 2x \quad (0 \leq x \leq 5).$$

$$\text{L'aire du triangle BMN est égale à : } \frac{BM \times MN}{2}, \text{ soit } \frac{x \times 2x}{2} = x^2.$$

On a donc l'équation  $x^2 = 20,25$ .

La solution positive de cette équation est  $x = 4,5$ .

Pour que l'aire du triangle BMN soit égale à  $20,25 \text{ cm}^2$ , il faut choisir  $x = 4,5 \text{ cm}$ .

**41** 1. a)  $x(x + 0,3)$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } (x + 0,15)^2 - 1,35^2 &= x^2 + 2 \times 0,15x + 0,15^2 - 1,35^2 = x^2 + 0,3x + 0,0225 - 1,8225; \\ (x + 0,15)^2 - 1,35^2 &= x^2 + 0,3x - 1,8. \end{aligned}$$

Une expression factorisée de  $x^2 + 0,3x - 1,8$  est  $(x + 0,15 - 1,35)(x + 0,15 + 1,35)$ , soit  $(x - 1,2)(x + 1,5)$ .

**c)** L'équation  $x^2 + 0,3x - 1,8 = 0$  équivaut successivement à  $(x - 1,2)(x + 1,5) = 0$  ;  $x - 1,2 = 0$  ou  $x + 1,5 = 0$  ;  $x = 1,2$  ou  $x = -1,5$ .

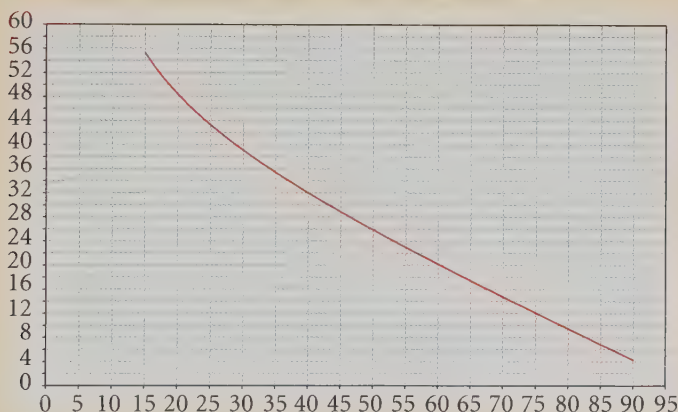
Les solutions de l'équation sont 1,2 et -1,5.

**2. a)** Il s'agit de la solution positive de l'équation.

La largeur de la pièce de tissu est donc 1,2 m.

**b)** La longueur de la pièce de tissu est  $1,2 + 0,3 = 1,5$  m et l'aire est  $1,2 \times 1,5 = 1,8 \text{ m}^2$ .

**42 1. a)** Tracé de la courbe sur tableur.



**b)** Pour  $x = 60$ , on lit  $y = 20$ , donc  $f(60) = 20$ .

**c)** Pour  $y = 32$ , on lit  $x = 40$ , donc la solution de l'équation  $f(x) = 32$  est 40.

**2. a)** La résistance correspondant à une température de  $60^\circ\text{C}$  est 20 k $\Omega$ .

**b)** La température correspondant à une résistance de 32 k $\Omega$  est  $40^\circ\text{C}$ .

**43 1.** Les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  se coupent aux points d'abscisses  $x = -2$  et  $x = 0$ . Les solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$  sont -2 et 0.

**2.** La courbe représentative de la fonction  $f$  est située au-dessus de la courbe représentative de la fonction  $g$  pour  $x \in ]-2 ; 0[$ . L'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) > g(x)$  est  $]-2 ; 0[$ .

**44** 1. On résout l'équation  $2x + 4 = 0$  successivement équivalente à  $2x = -4$  ;

$$x = -\frac{4}{2} ; x = -2.$$

$f$  est définie pour tout nombre réel  $x \neq -2$ .

Ainsi, l'ensemble de définition de  $f$  est  $D = ]-\infty ; -2[ \cup ]-2 ; +\infty[$ .

2. •  $f(x) = 0$  équivaut à  $2 - x = 0$ , soit  $x = 2$ .

• Tableau de signe :

| $x$                       | $-\infty$ | $-2$ | $2$ | $+\infty$ |   |   |
|---------------------------|-----------|------|-----|-----------|---|---|
| $2-x$                     |           | +    | +   | 0         | - |   |
| $2x+4$                    |           | -    | 0   | +         | + |   |
| $f(x) = \frac{2-x}{2x+4}$ |           | -    |     | +         | 0 | - |

• Signe de  $f(x)$  :

Pour  $x \in ]-\infty ; -2[ \cup ]2 ; +\infty[$ ,  $f(x) < 0$ .

Pour  $x \in ]-2 ; 2[$ ,  $f(x) > 0$ .

Pour  $x = 2$ ,  $f(x) = 0$ .

**45** 1. a) • Comme  $a > 0$ , la parabole est tournée vers le haut.

De plus  $a = 1$  et  $b = -4$ , le minimum de  $f$  est donc atteint pour  $x = \frac{4}{2} = 2$ .

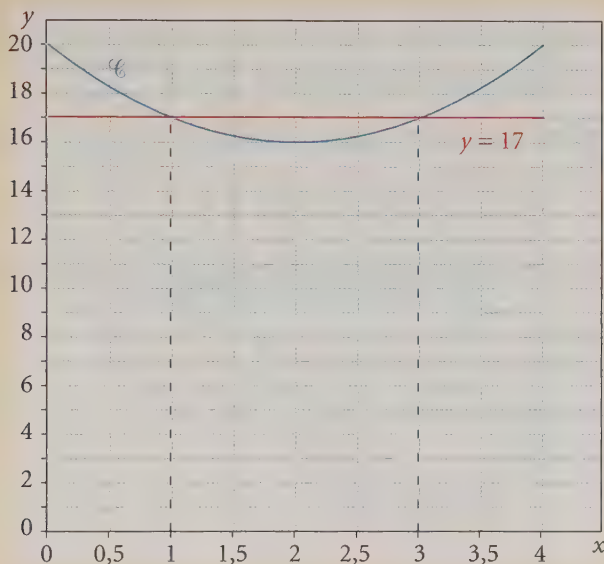
$f$  est donc strictement décroissante  $[0 ; 2]$  et strictement croissante  $[2 ; 4]$ .

•  $f(0) = 20$ ,  $f(2) = 16$  et  $f(4) = 20$ .

• Tableau de variation de  $f$ .

| $x$    | 0  | 2  | 4  |
|--------|----|----|----|
| $f(x)$ | 20 | 16 | 20 |

**b) et c)** Représentations graphiques.



**d)** La courbe représentative de  $f$  coupe la droite d'équation  $y = 17$  aux points d'abscisses 1 et 3.

Les solutions de l'équation  $f(x) = 17$  sont 1 et 3.

**2. a)**  $4 \times 5 - x(4 - x) = x^2 - 4x + 20$ .

**b)** L'aire est bien donnée par la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 4x + 20$ .

**3. a)** D'après le tableau de variation,  $f$  admet un minimum égal à 16, atteint pour  $x = 2$ .

La cote  $x$  pour laquelle la surface à traiter est minimale est donc égale à 2 cm.

**b)** Les solutions de l'équation  $f(x) = 17$  sont 1 et 3. On a donc deux possibilités pour la cote  $x$  : 1 cm ou 3 cm.

**46** 1. On lit sur la figure :  $-1 < x_0 < 0$ .

2. On obtient avec le tableau de valeurs :  $-0,7 < x_0 < -0,6$ .

**47** 1. OAB est un triangle équilatéral, donc les 3 angles sont égaux. Ainsi,  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ .

2. • OAB est un triangle équilatéral, donc les côtés sont égaux à 1 et I est le milieu de [OA]. (Propriété du triangle équilatéral.) Ainsi,  $OI = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}$ .

• OIB est un triangle rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore  $OI^2 + IB^2 = OB^2$ ,

$$\text{soit } IB^2 = OB^2 - OI^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \text{ Ainsi, } BI = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. En appliquant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle :

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OI}{OB} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \widehat{AOB} = \frac{IB}{OB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. La longueur du cercle est égale à  $2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$ .  
On est dans une situation de proportionnalité :

|                 |        |                |
|-----------------|--------|----------------|
| Angle en degrés | 360    | 60             |
| Longueur        | $2\pi$ | $\widehat{AB}$ |

La longueur de l'arc  $\widehat{AB}$  est donc égale à :  $\frac{2\pi \times 60}{360} = \frac{\pi}{3}$ .

5. Le point B est le point du cercle associé au nombre réel  $\frac{\pi}{3}$ .

On en déduit :  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  et  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Partie **2**

# Géométrie





Chapitre 4

**Géométrie.  
Équations  
de droites**

## 1 Voir et calculer dans l'espace

### 1 Règles de base

- Tous les théorèmes de géométrie plane sont applicables à chaque plan de l'espace.
- Par trois points non alignés passe un seul plan.
- Toute droite qui passe par deux points distincts d'un plan est contenue dans ce plan.

#### Conséquences :

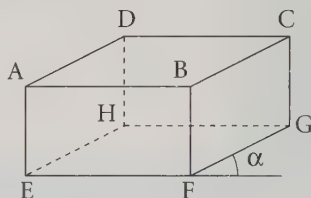
Un plan est déterminé par :

- Trois points non alignés.
- Une droite et un point extérieur à cette droite.
- Deux droites sécantes.

### 2 La perspective cavalière

Dans la représentation en perspective cavalière :

- Les droites parallèles sont représentées par des droites parallèles.
- Les rapports de longueurs des segments à supports parallèles sont conservés.
- Dans le plan frontal, les distances et les angles sont conservés.
- $\alpha$  est appelé angle de fuite.



## Exercices résolus

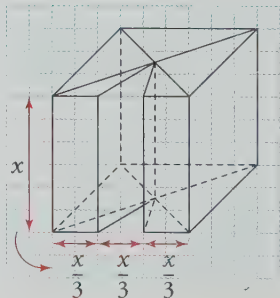
### ➔ 1. Dessiner dans l'espace

#### Énoncé

Un cube possédant une encoche est dessiné en perspective cavalière.

Ce cube est tourné d'un quart de tour vers la droite.

Dessiner, dans cette nouvelle position, le cube en perspective cavalière.



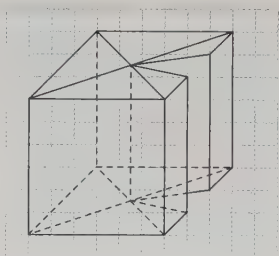
## Corrigé commenté

### Indication :

Il faut dans un premier temps « visualiser » le cube dans sa nouvelle position.

« Voir » dans l'espace n'est pas toujours simple, on peut s'aider d'objets de la vie courante (boîte d'allumettes, emballage, ...).

Dans un deuxième temps, il faut repérer les arêtes qui ne sont pas visibles pour les représenter en pointillés.



## 2. Calculer dans l'espace

### Énoncé

ABCDEFGH est un cube d'arête 5 cm.  
Déterminer la mesure du segment [DF].

### Corrigé commenté

**Indication :** on repère dans le cube une figure qui contient le segment [DF].

On utilise ensuite les théorèmes de géométrie plane.

Le quadrilatère DBFH est un rectangle, car les droites (DH) et (BF) sont parallèles, les droites (DB) et (HF) sont parallèles et les droites (HD) et (DB) sont perpendiculaires.

[DF] est une diagonale de ce rectangle.

On calcule d'abord HF en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle HEF rectangle en E :

$$HF^2 = EF^2 + EH^2, \text{ donc } HF^2 = 5^2 + 5^2, \text{ soit } HF^2 = 50.$$

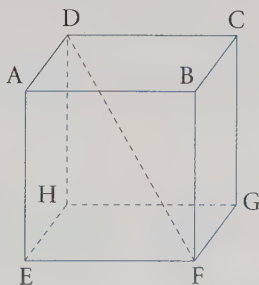
Donc  $HF = \sqrt{50}$ , soit  $HF = 5\sqrt{2}$  cm.

On calcule DF en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle DHF rectangle en H :

$$DF^2 = HF^2 + HD^2, \text{ soit } DF^2 = (5\sqrt{2})^2 + 5^2.$$

Ainsi,  $DF^2 = 50 + 25 = 75$ .

Soit  $DF = \sqrt{75}$  ;  $DF = 5\sqrt{3}$  cm.

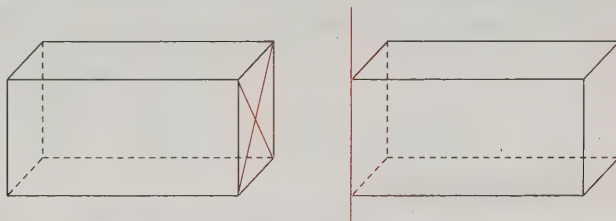


## 2 Positions relatives dans l'espace

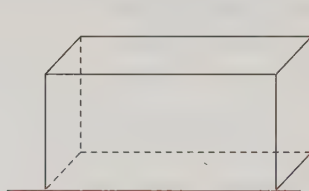
### 1 Positions relatives de deux droites

- Si deux droites sont contenues dans un même plan, alors elles sont coplanaires. Dans ce cas, elles sont, soit sécantes, soit parallèles.

On peut illustrer ces situations en observant le parallélépipède rectangle :

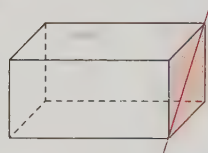


- Elles sont non coplanaires s'il n'existe aucun plan les contenant.

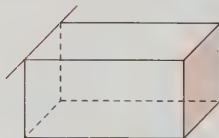


### 2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

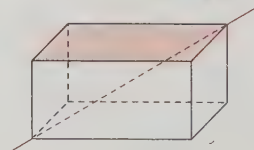
- La droite est incluse dans le plan.



- La droite et le plan n'ont aucun point commun.

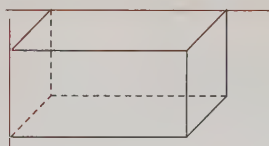
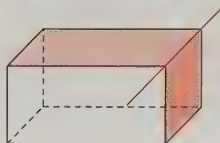
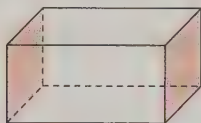


- La droite et le plan ont un seul point commun.



### 3 Positions relatives de deux plans

- Les deux plans sont confondus.
- Les deux plans n'ont aucun point commun.
- Les deux plans sont sécants ; leur intersection est une droite.



### 4 Droites orthogonales

Deux droites sont orthogonales quand leurs parallèles menées par un point quelconque sont perpendiculaires.

### 5 Droites et plans perpendiculaires

Une droite  $\mathcal{D}$  et un plan  $\mathcal{P}$  sont orthogonaux quand la droite  $\mathcal{D}$  est orthogonale à toute droite du plan  $\mathcal{P}$ .

## Exercice résolu

### Voir dans l'espace

#### Énoncé

ABCDEFGH est un cube.

Quelles sont les positions relatives des droites (DF) et (BH) ?

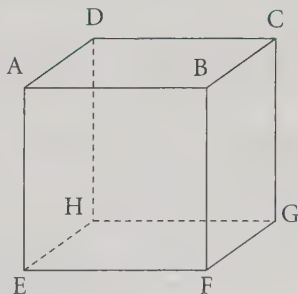
#### Corrigé commenté

**Indication :** on cherche un plan contenant ces deux droites.

Le quadrilatère DBFH est un rectangle.

Les droites (DF) et (BH) sont deux droites du plan (DBFH).

Les droites (DF) et (BH) sont sécantes en un point O milieu de [DF] et [BH].



### 3 Configurations usuelles du plan

#### 1 Théorème de Pythagore

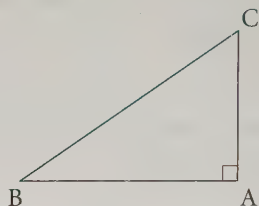
##### ● Théorème

Soit ABC un triangle rectangle en A.

On a :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

##### ● Réciproque

Si ABC est un triangle tel que  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  alors le triangle est rectangle en A.

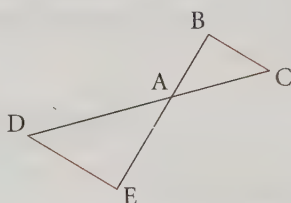
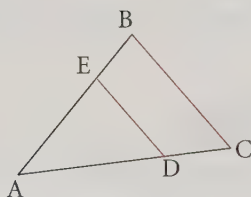


#### 2 Théorème de Thalès appliqué au triangle

##### ● Théorème

Les droites sécantes (AB) et (AC) sont coupées par les droites parallèles (ED) et (BC). Sur les droites (AB) et (AC) sécantes en A, les points A, E, B et A, D, C sont alignés dans le même ordre.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}.$$



##### ● Réciproque

Soit ABC et AED deux triangles tels que A, E, B et A, D, C soient alignés dans le même ordre.

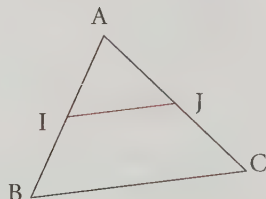
Si  $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$  alors les droites (ED) et (BC) sont parallèles.

#### 3 Théorème des milieux dans le triangle

Soit ABC un triangle.

Si I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC], alors (IJ) et (BC) sont parallèles et :

$$IJ = \frac{1}{2} BC.$$



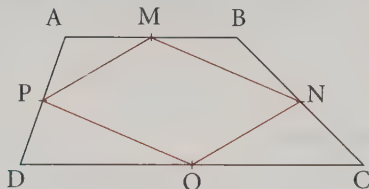
## Exercice résolu

### Utiliser le théorème des milieux

#### Énoncé

ABCD est un trapèze ; M, N, O et P sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].

Déterminer la nature du quadrilatère MNOP.



#### Corrigé commenté

**Indication :** on repère les mots-clés de l'énoncé en observant la figure.

• Les mots-clés sont « milieux des côtés » ; ce qui fait penser au théorème des milieux dans le triangle.

Dans le triangle ABD, M est le milieu de [AB], P est le milieu de [AD], donc d'après le théorème des milieux dans le triangle, on en déduit que les droites (MP) et (BD) sont parallèles et que :

$$MP = \frac{1}{2} BD.$$

De même, dans le triangle CBD, N est le milieu de [BC], O est le milieu de [CD], donc (NO) est parallèle à (BD) et  $NO = \frac{1}{2} BD$ .

On a donc :

- (MP) parallèle à (BD) et  $MP = \frac{1}{2} BD$  ;
- (NO) parallèle à (BD) et  $NO = \frac{1}{2} BD$ .

On en déduit que les droites (MP) et (NO) sont parallèles et que  $MP = NO$ . Deux côtés opposés du quadrilatère MNOP sont parallèles et de même longueur ; le quadrilatère MNOP est donc un parallélogramme.



## 4 Repérage de points dans le plan

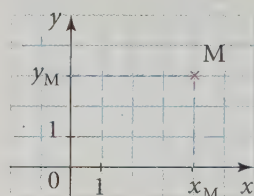
### 1 Repère orthonormé

Trois points (O, I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet O définissent un repère orthonormé du plan.

### 2 Coordonnées d'un point

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les coordonnées d'un point M sont l'abscisse  $x_M$  et l'ordonnée  $y_M$  de M.

On note  $M(x_M; y_M)$ .



### 3 Distance de deux points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ .

La distance de A à B, notée AB est égale à  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

### 4 Milieu d'un segment

Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan.

Les coordonnées du milieu I de [AB] sont :  $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .

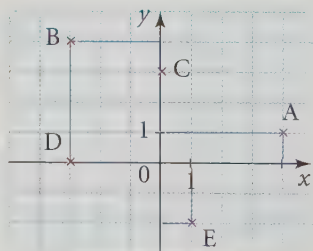
## Exercices résolus

### ➔ 1. Lire les coordonnées de points

#### Énoncé

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Déterminer, par lecture graphique, les coordonnées des points A, B, C, D et E.



## Corrigé commenté

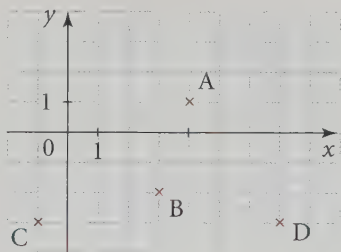
**Indication :** on lit l'abscisse, puis l'ordonnée des points.

$A(4; 1)$  ;  $B(-3; 4)$  ;  $C(0; 3)$  ;  $D(-3; 0)$  et  $E(1; -2)$ .

## 2. Déterminer la distance de deux points, le milieu d'un segment

### Énoncé

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.
2. Déterminer les coordonnées du milieu I de [BC].
3. Calculer BC, BD et CD. Quelle est la nature du triangle BCD ?



## Corrigé commenté

**Indication :** utiliser les formules du cours.

1. On lit les coordonnées des points A, B, C et D.  
 $A(4; 1)$  ;  $B(3; -2)$  ;  $C(-1; -3)$  et  $D(7; -3)$ .
2. Les coordonnées du point I milieu de [BC] sont :

$$I\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right); \text{ soit } I\left(\frac{3 + (-1)}{2}; \frac{(-2) + (-3)}{2}\right); I\left(1; \frac{-5}{2}\right).$$

$$3. BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-3 - (-2))^2}$$

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(7 - 3)^2 + (-3 - (-2))^2}$$

$$BD = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (-3 - (-3))^2}$$

$$CD = \sqrt{8^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8.$$

On a  $BC = BD$ , donc le triangle BCD est isocèle en B.

## 5 Équations de droites

### 1 Équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

#### → Équation réduite d'une droite $\mathcal{D}$ de la forme $y = mx + p$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, une droite  $\mathcal{D}$  non parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation réduite  $y = mx + p$ .

Le nombre réel  $m$  est appelé coefficient directeur de  $\mathcal{D}$ . Si  $m > 0$  alors la droite « monte » ; si  $m < 0$  alors la droite « descend ».

Le nombre réel  $p$  est appelé ordonnée à l'origine ;  $\mathcal{D}$  passe par le point de coordonnées  $(0 ; p)$ .

#### → Calcul du coefficient directeur

Soit  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  deux points distincts d'une droite  $\mathcal{D}$  non verticale.

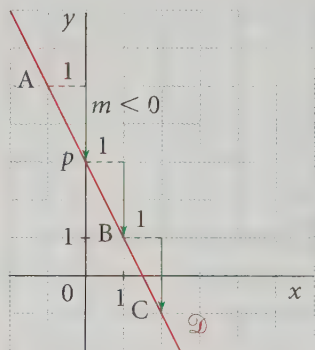
Le coefficient directeur  $m$  de  $\mathcal{D}$  est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

#### → Coordonnées d'un point de la droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite $y = mx + p$

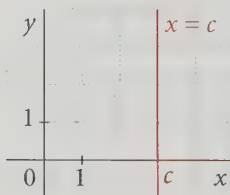
Un point  $A(x_A ; y_A)$  est un point de  $\mathcal{D}$  si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. On peut alors écrire :

$$y_A = mx_A + p.$$



### 2 Équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé une droite  $\mathcal{D}$  parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation :  $x = c$  ;  $c \in \mathbb{R}$ .



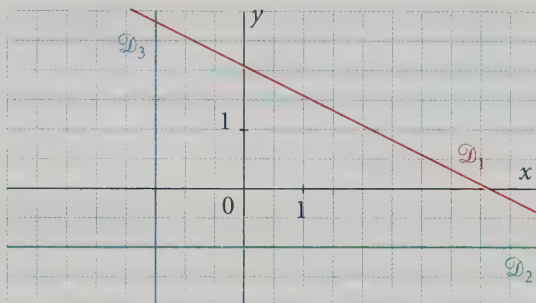
## Exercice résolu

## Déterminer une équation de droite

## Énoncé

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer :

1. les équations des droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  ;
2. l'équation de la droite passant par les points A(3 ; 1) et B(-1 ; -8).



## Corrigé commenté

**Indication** : on lit sur le graphique les valeurs de  $m$  et de  $p$ .

1. • Le coefficient directeur de  $\mathcal{D}_1$  est égal à  $-0,5$ , son ordonnée à l'origine est égale à  $2$  donc l'équation réduite de  $\mathcal{D}_1$  est :  $y = -0,5x + 2$ .

•  $\mathcal{D}_2$  est parallèle à l'axe des abscisses et passe par  $(0 ; -1)$ , son équation est  $y = -1$ .

•  $\mathcal{D}_3$  est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par  $(-\frac{3}{2} ; 0)$ , son équation est  $x = -\frac{3}{2}$ .

2. Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \text{ soit } m = \frac{-8 - 1}{-1 - 3} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}.$$

Son équation réduite est de la forme  $y = \frac{9}{4}x + p$  ; or A étant un point de (AB), on peut écrire :

$$1 = \frac{9}{4} \times 3 + p, \text{ soit } 1 = \frac{27}{4} + p.$$

$$\text{Ainsi } p = 1 - \frac{27}{4} = \frac{-23}{4} \text{ et (AB) : } y = \frac{9}{4}x - \frac{23}{4}.$$

## 6 Système d'équations linéaires : résolution graphique

On considère le système 
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

où  $a, b, c, a', b', c'$  sont des nombres réels donnés.

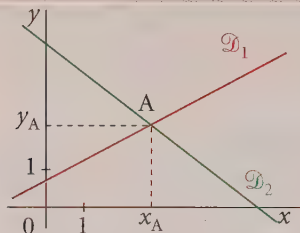
Résoudre un tel système revient à déterminer tous les couples  $(x; y)$  qui vérifient les deux égalités considérées.

● On écrit les deux équations sous la forme  $y = mx + p$ , puis on trace les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  correspondant à ces deux équations.

Résoudre un tel système revient à déterminer les coordonnées du point d'intersection (s'il existe) des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

● Lorsque les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont :

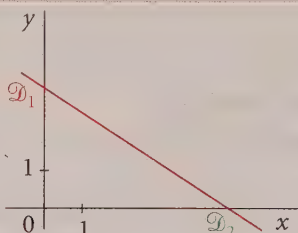
a) Sécantes en un point  $A(x_A; y_A)$



Le système admet un unique couple solution.

$$S = \{(x_A; y_A)\}.$$

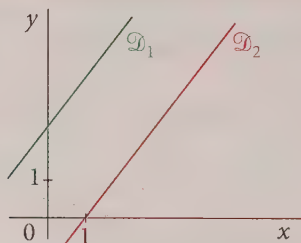
b) Confondues



Le système admet une infinité de couples solutions : les couples

$(x; y)$  vérifiant l'une des équations des droites.

c) Strictement parallèles



Le système n'admet pas de solution.  $S = \emptyset$ .

## Exercice résolu

## ➔ Résoudre graphiquement un système

## Énoncé

On donne les représentations graphiques des droites d'équations :

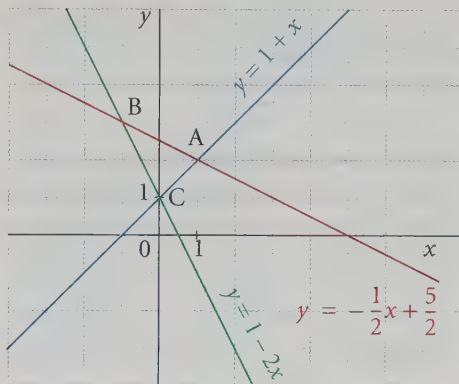
$$y = 1 + x; y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \text{ et } y = 1 - 2x.$$

À l'aide du graphique, résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} -x + y = 1 \\ \frac{1}{2}x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} \frac{1}{2}x + y = \frac{5}{2} \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$



## Corrigé commenté

**Indication :** on lit sur le graphique les coordonnées des points d'intersection des droites associées à chaque équation des systèmes.

$$(S_1) \text{ est équivalent à : } \begin{cases} y = 1 + x \\ y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \end{cases}. \text{ Le point d'intersection de ces deux}$$

droites est le point A(1 ; 2), donc  $(S_1)$  a pour solution le couple (1 ; 2).

$$(S_2) \text{ est équivalent à : } \begin{cases} y = 1 + x \\ y = 1 - 2x \end{cases}. \text{ Le point d'intersection de ces deux}$$

droites est le point C(0 ; 1), donc  $(S_2)$  a pour solution le couple (0 ; 1).

$$(S_3) \text{ est équivalent à : } \begin{cases} y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \\ y = 1 - 2x \end{cases}. \text{ Le point d'intersection de ces deux}$$

droites est le point B(-1 ; 3), donc  $(S_3)$  a pour solution le couple (-1 ; 3).

## 7 Parallélisme et perpendicularité de deux droites

Soit  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites d'équations réduites respectives :

$$y = mx + p \text{ et } y = m'x + p',$$

dans le plan rapporté à un repère.

### 1 Droites parallèles

Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

$\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$  si et seulement si  $m = m'$ .

### 2 Droites perpendiculaires

Si le plan est rapporté à un repère orthonormé, alors deux droites non parallèles aux axes sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à  $-1$ .

$\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$  si et seulement si  $m \times m' = -1$ .

### 3 Exemple

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On considère les droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  d'équations réduites respectives :

$$\mathcal{D}_1 : y = 2x - 1;$$

$$\mathcal{D}_2 : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2};$$

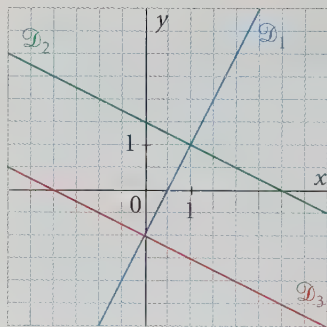
$$\mathcal{D}_3 : y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

• Les droites  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  ont le même coefficient directeur  $\left(m = -\frac{1}{2}\right)$  : elles sont parallèles.

• Le repère est orthonormal. Le coefficient directeur de  $\mathcal{D}_1$  est 2, le coefficient directeur de  $\mathcal{D}_2$  est  $-\frac{1}{2}$  ; on a  $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ .

Les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont perpendiculaires.

De plus  $\mathcal{D}_3$  est parallèle à  $\mathcal{D}_2$ , donc  $\mathcal{D}_3$  est perpendiculaire à  $\mathcal{D}_1$  ; on peut vérifier que le produit de leur coefficient directeur est égal à  $-1$ .





## Exercice résolu

### ➔ Déterminer le parallélisme et l'orthogonalité

#### Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points  $A(2; -1)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(0; 5)$  et les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  d'équations réduites respectives :  $y = -x - 1$  et  $y = x + 1$ .

1. Que peut-on dire de la droite (AB) ? Montrer que les droites  $\mathcal{D}_1$  et (CB) sont parallèles, puis que les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont perpendiculaires.
2. Tracer ces droites.

#### Corrigé commenté

**Indication :** on détermine les équations des droites (AB) et (BC).

1. La droite (AB) passe par les points A et B de même abscisse :

$x_A = x_B = 2$ . La droite (AB) a donc pour équation :  $x = 2$ .

Toute droite dont l'équation est de la forme :  $x = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) est parallèle à l'axe des ordonnées.

- (BC) est une droite dont l'équation réduite est de la forme  $y = mx + p$ .

Soit  $m$  le coefficient directeur de (BC) :  $m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$  ;  $m = \frac{5 - 3}{0 - 2} = \frac{2}{-2} = -1$ .

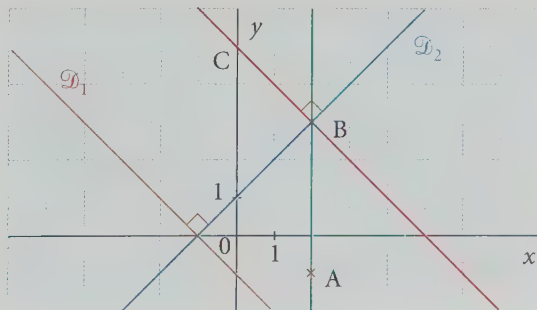
La droite (BC) s'écrit alors :  $y = -x + p$ .

$C \in (BC)$ , donc  $y_C = -x_C + p$  équivaut à  $5 = 0 + p$  ;  $p = 5$ .

La droite (BC) a pour équation réduite  $y = -x + 5$ .

- Les coefficients directeurs des droites  $\mathcal{D}_1$  et (BC) sont égaux et valent  $-1$ , donc les droites  $\mathcal{D}_1$  et (BC) sont parallèles.
- Le produit des coefficients directeurs des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est égal à  $-1$ , donc les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont perpendiculaires.

2.



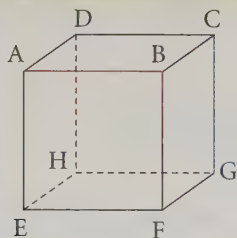
## Méthode

## Les réflexes à avoir

- R1** Dans l'espace, il est nécessaire de connaître les règles qui régissent les relations entre les points, les droites et les plans.
- R2** Pour faire des calculs de longueurs dans l'espace, on se place dans un plan dans lequel on applique les théorèmes de la géométrie plane.
- R3** Pour tracer une droite, il suffit de connaître :
- soit deux points distincts de la droite ;
  - soit un point et le coefficient directeur de cette droite.
- R4** Le coefficient directeur  $m$  d'une droite indique la variation de l'ordonnée d'un point de la droite lorsque l'abscisse de ce point augmente d'une unité.
- R5** Dans l'équation réduite d'une droite  $y = mx + p$ , on connaît le point de coordonnées  $(0, p)$  car  $p$  est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse nulle.
- R6** Si un point  $A(x_A; y_A)$  appartient à la droite d'équation réduite  $y = mx + p$ , alors on a  $y_A = mx_A + p$ .
- R7** Résoudre graphiquement un système revient à déterminer les coordonnées, s'ils existent, du ou des points d'intersection des droites associées aux équations du système.
- R8** Il est conseillé pour résoudre un système de visualiser la situation en traçant d'abord les droites sur l'écran d'une calculatrice graphique.
- R9** Après avoir résolu un système, on vérifie la solution en remplaçant  $x$  et  $y$  par les valeurs trouvées (dans chacune des équations).

## Les pièges à éviter

Dans l'espace, deux droites non sécantes ne sont pas forcément parallèles.



$(AB)$  et  $(CG)$  ne sont pas parallèles  
et ne sont pas sécantes.

Il faut repérer, dans l'espace, les arêtes qui ne sont pas visibles et les représenter en pointillés.

Seules les figures planes du plan frontal sont représentées en vraie grandeur.

Avant de faire des calculs dans l'espace, on visualise la situation par un dessin en perspective cavalière.

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'a pas de coefficient directeur, pas d'équation réduite et pas d'ordonnée à l'origine.

La droite d'équation  $y = 0$  est l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = 0$  est l'axe des ordonnées.

On ne peut déterminer le coefficient directeur d'une droite que si elle est écrite sous la forme  $y = mx + p$ .

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a son équation de la forme  $x = c$  alors qu'une droite parallèle à l'axe des abscisses a son équation de la forme  $y = c$  ( $c$  est un nombre réel).

Le coefficient directeur d'une droite parallèle à l'axe des abscisses est égal à 0. Cette équation peut s'écrire :

$$y = 0x + c.$$

# Exercices

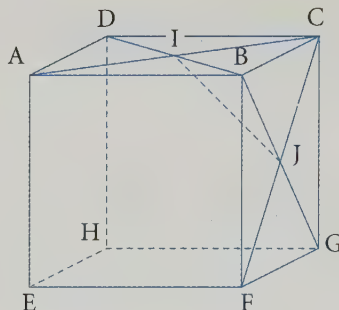
## Exercices d'application

### 1 Calculs dans l'espace

➔ R1, R2 ➔ corrigé p. 140

ABCDEFGH est un cube d'arête 10 cm ; I et J sont les centres des faces ABCD et BFGC.

Calculer IJ.



### 2 Volume dans l'espace

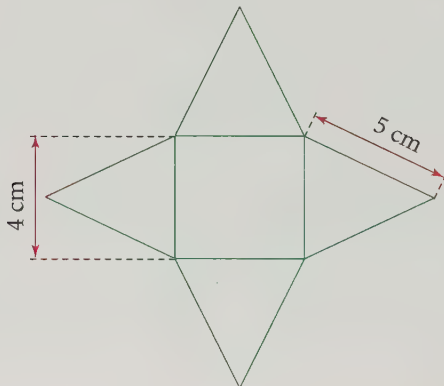
➔ R1, R2 ➔ corrigé p. 140

Le dessin représente le patron d'une pyramide régulière à base carrée. Calculer le volume de la pyramide arrondi à  $1 \text{ cm}^3$ .

Volume de la pyramide :  $V = \frac{1}{3}b \times h$ .

$\mathcal{B}$  : aire de la base.

$h$  : hauteur.

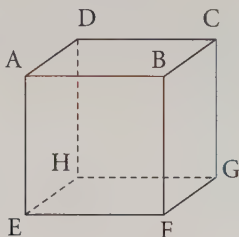


### 3 Positions relatives dans l'espace

➔ R1

➔ corrigé p. 141

Soit le cube ABCDEFGH.



Compléter les tableaux dans chaque question.

1. La droite  $\mathcal{D}$  est-elle parallèle au plan  $\mathcal{P}$  ?

|                |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mathcal{D}$  | (AE)  | (DC)  | (HG)  | (AE)  | (DB)  | (DH)  | (AC)  |
| $\mathcal{P}$  | (DGC) | (CBF) | (ABD) | (DBF) | (EFG) | (EFG) | (FGH) |
| <b>oui/non</b> |       |       |       |       |       |       |       |

2. La droite  $\mathcal{D}$  est-elle perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}$  ?

|                |       |       |       |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mathcal{D}$  | (AB)  | (FG)  | (CF)  | (HF)  | (CG)  |
| $\mathcal{P}$  | (BCG) | (HDC) | (EFG) | (EAD) | (ABD) |
| <b>oui/non</b> |       |       |       |       |       |

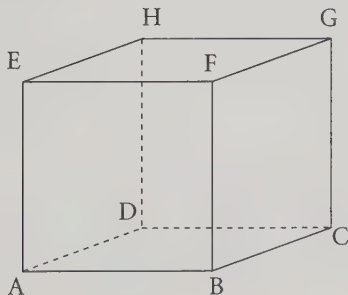
### 4 Calculs dans l'espace

➔ R1, R2

➔ corrigé p. 141

Soit un cube d'arête 5 cm.

Calculer l'aire du triangle ACG.



### 5 Équations de droites

➔ R5, R6    ➔ corrigé p. 141

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point  $A(-2 ; 1)$  et la droite  $\Delta$  d'équation réduite  $y = -2x + 1$ .

Déterminer les équations réduites des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  passant par  $A$  et telles que  $\Delta$  soit parallèle à  $\mathcal{D}_1$  et perpendiculaire à  $\mathcal{D}_2$ .

### 6 Système d'équations

➔ R5    ➔ corrigé p. 142

Résoudre numériquement et graphiquement le système (S) :

$$(S) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

## Exercices d'entraînement

### 7 Problème et système

➔ corrigé p. 143

Un distributeur de boissons contient exactement 19 euros en pièces de 0,50 euro et de 0,20 euro.

Déterminer le nombre de pièces de chaque sorte sachant que le distributeur contient 62 pièces.

### 8 Avec la géométrie

➔ corrigé p. 143

Déterminer les dimensions d'un panneau rectangulaire sachant que :

- si on diminue sa largeur de 5 cm et si on augmente sa longueur de 8 cm, son aire augmente de  $0,83 \text{ dm}^2$  ;
- si on augmente sa largeur de 1 cm et si on diminue sa longueur de 4 cm, son aire diminue de  $1,63 \text{ dm}^2$ .

### 9 Équations de droites

➔ R3, R4, R5, R6    ➔ corrigé p. 144

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Déterminer, pour chaque cas, une équation de la droite, puis la tracer.

1.  $\mathcal{D}_1$  passe par les points de coordonnées  $(2 ; -2)$  et  $(-1 ; 7)$ .
2.  $\mathcal{D}_2$  passe par le point de coordonnées  $(2 ; 4)$  et a pour coefficient directeur  $\frac{5}{2}$ .

3.  $\mathcal{D}_3$  passe par le point de coordonnées (2 ; 3) et est parallèle à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .
4.  $\mathcal{D}_4$  passe par le point de coordonnées (0 ; 2) et est perpendiculaire à la droite d'équation  $y = \frac{1}{3}x + 3$ .

## 10 Médianes d'un triangle

→ corrigé p. 145

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A(−4 ; −3), B(−1 ; 2) et C(2 ; 1).

1. Déterminer une équation des droites (AB), (AC) et (BC).
2. Calculer les coordonnées des points A', B' et C', milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].
3. Déterminer une équation de chacune des médianes du triangle ABC.
4. Montrer que ces trois médianes se coupent en un point G et déterminer ses coordonnées.

## 11 Avec la géométrie

→ R1, R2

→ corrigé p. 147

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère trois points M, N et P.

1. Déterminer les coordonnées des points M, N et P sachant que :
  - la droite (MN) a pour équation réduite  $y = 3x + 8$  ;
  - la droite (MP) a pour équation réduite  $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$  ;
  - le point N a pour abscisse −1 ;
  - les droites (OM) et (PN) sont parallèles.
2. Montrer que le quadrilatère MNPO est un parallélogramme.



# Corrigés

**1** Considérons le triangle ACF.

I est le milieu de [AC] et J le milieu de [FC].

On applique le théorème des milieux des côtés d'un triangle.

On a alors :  $IJ = \frac{1}{2}AF$ .

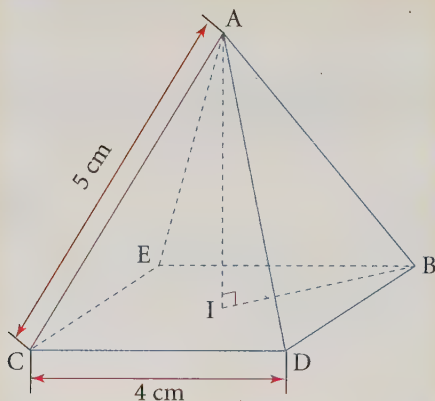
On calcule AF en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AEF :

$$AF^2 = AE^2 + EF^2, \text{ avec } AE = EF = 10.$$

$$AF^2 = 200 ; AF = 10\sqrt{2} \text{ cm},$$

$$\text{d'où } IJ = 5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

**2**



Il faut calculer la longueur AI, hauteur de la pyramide.

Le triangle AIB est rectangle en I. On a  $AB = 5 \text{ cm}$  et  $IB = \frac{1}{2}BC$ .

BCD est un triangle rectangle en D, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = CD^2 + DB^2 ; BC^2 = 4^2 + 4^2 ; BC^2 = 32.$$

$$\text{Soit } BC = 4\sqrt{2} \text{ cm, d'où } IB = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

On utilise maintenant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AIB :

$$AB^2 = AI^2 + IB^2 ;$$

$$\text{soit } AI^2 = AB^2 - IB^2, \text{ soit aussi } AI^2 = 25 - 8 = 17.$$

$$\text{D'où } AI = \sqrt{17} \text{ cm}.$$

L'aire de la base est égale à l'aire du carré CDBE, soit  $16 \text{ cm}^2$ .

Ainsi, le volume de la pyramide est :

$$V = \frac{1}{3} \times 16 \times \sqrt{17}, \text{ soit } V \approx 22 \text{ cm}^3 \text{ arrondi à l'unité.}$$

**3** 1.

|                |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mathcal{D}$  | (AE)  | (DC)  | (HG)  | (AE)  | (DB)  | (DH)  | (AC)  |
| $\mathcal{P}$  | (DGC) | (CBF) | (ABD) | (DBF) | (EFG) | (EFG) | (FGH) |
| <b>oui/non</b> | oui   | non   | oui   | oui   | oui   | non   | oui   |

2.

|                |       |       |       |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mathcal{D}$  | (AB)  | (FG)  | (CF)  | (HF)  | (CG)  |
| $\mathcal{P}$  | (BCG) | (HDC) | (EFG) | (EAD) | (ABD) |
| <b>oui/non</b> | oui   | oui   | non   | non   | oui   |

**4** ACG est un triangle rectangle en C.L'aire du triangle ACG est :  $\frac{AC \times GC}{2}$ .

• Calcul de AC : dans le triangle rectangle ABC, on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 ;$$

$$AC^2 = 5^2 + 5^2 = 50, \text{ soit } AC = 5\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$\text{D'où } \mathcal{A}_{ACG} = \frac{5\sqrt{2} \times 5}{2},$$

$$\text{donc } A_{ACG} = \frac{25\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2.$$

**5** •  $\mathcal{D}_1$  est une droite dont l'équation réduite est de la forme  $y = mx + p$ .Les droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_1$  sont parallèles donc  $m = -2$ .La droite  $\mathcal{D}_1$  s'écrit alors :  $y = -2x + p$ .Le point  $A \in \mathcal{D}_1$ , donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite :

$$y_A = -2x_A + p.$$

Ce qui équivaut à :  $1 = -2 \times (-2) + p ; p = -3$ .**La droite  $\mathcal{D}_1$  a pour équation réduite  $y = -2x - 3$ .**•  $\mathcal{D}_2$  est une droite dont l'équation réduite est de la forme  $y = mx + p$ .Les droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_2$  sont perpendiculaires donc  $-2 \times m = -1$  ; soit  $m = \frac{1}{2}$ .La droite  $\mathcal{D}_2$  s'écrit alors :  $y = \frac{1}{2}x + p$ .Le point  $A \in \mathcal{D}_2$ , donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite :

$$y_A = \frac{1}{2}x_A + p \text{ qui équivaut à : } 1 = \frac{1}{2} \times (-2) + p ; p = 2.$$

**La droite  $\mathcal{D}_2$  a pour équation réduite  $y = \frac{1}{2}x + 2$ .**

**6 • Résolution par la méthode de combinaison linéaire**

En multipliant la première équation par  $-2$ , on obtient :

$$\begin{cases} -4x - 2y = -8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$-x = -1 ; \text{ soit } x = 1.$$

En remplaçant  $x$  par 1 dans la seconde équation, on obtient ;

$$3 \times 1 + 2y = 7 ; \quad 2y = 7 - 3 ; \quad y = 2.$$

Le couple  $(1 ; 2)$  est solution de (S).

$$S = \{(1 ; 2)\}.$$

Vous pouvez aussi utiliser la méthode de substitution en exprimant  $y$  en fonction de  $x$  dans la première équation. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

**• Résolution graphique**

$2x + y = 4$  équivaut à :  $y = -2x + 4$ .

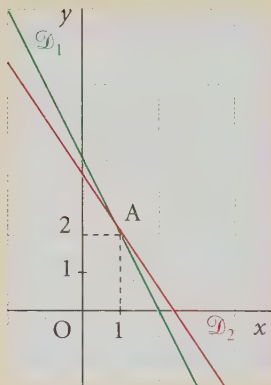
$3x + 2y = 7$  équivaut à :  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ .

Les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ont pour équations réduites respectives :

$$y = -2x + 4 \text{ et } y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}.$$

On trace les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de sorte que :  $\mathcal{D}_1$  passe par les points  $(2 ; 0)$  et  $(0 ; 4)$  ;  $\mathcal{D}_2$  passe par les points  $(3 ; -1)$  et  $(-1 ; 5)$ .

Les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont sécantes au point  $A(1 ; 2)$ .



**7** Le nombre  $x$  représente le nombre de pièces de 0,50 euro et le nombre  $y$  le nombre de pièces de 0,20 euro.

Le distributeur contient en tout 62 pièces :

$$x + y = 62.$$

Le distributeur contient 19 euros dont  $x$  pièces de 0,50 euro et  $y$  pièces de 0,20 euro :

$$0,5x + 0,2y = 19.$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} x + y = 62 \\ 0,5x + 0,2y = 19 \end{cases}$$

Résolvons ce système par la méthode de substitution.

$$\begin{cases} x + y = 62 \\ 0,5x + 0,2y = 19 \end{cases} \text{ équivaut successivement à :}$$

$$\begin{cases} x = 62 - y \\ 5x + 2y = 190 \end{cases} ; \begin{cases} x = 62 - y \\ 5(62 - y) + 2y = 190 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x = 62 - y \\ 310 - 5y + 2y = 190 \end{cases} ; \begin{cases} x = 62 - y \\ 3y = 120 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x = 62 - 40 \\ y = 40 \end{cases} ; \begin{cases} x = 22 \\ y = 40 \end{cases}$$

$$S = \{(22 ; 40)\}.$$

Le distributeur contient 22 pièces de 0,50 euro et 40 pièces de 0,20 euro.

**8** On désigne par  $x$  la largeur du panneau et par  $y$  sa longueur.

On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} (x - 5) \times (y + 8) = xy + 83 \\ (x + 1) \times (y - 4) = xy - 163 \end{cases}$$

équivalent successivement à :

$$\begin{cases} xy + 8x - 5y - 40 = xy + 83 \\ xy - 4x + y - 4 = xy - 163 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 5y = 123 \\ -4x + y = -159 \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par 5, on obtient :

$$\begin{cases} 8x - 5y = 123 \\ -20x + 5y = -795 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$-12x = -672, \text{ soit } x = 56.$$

En remplaçant  $x$  par 56 dans la première équation, on obtient :

$$8 \times 56 - 5y = 123, \text{ puis } 448 - 5y = 123;$$

$$-5y = -325, \text{ soit } y = 65.$$

Le couple  $(56 ; 65)$  est solution du système.

$$S = \{(56 ; 65)\}.$$

**Le panneau a une largeur de 56 cm et une longueur de 65 cm.**

**Remarque :** il est nécessaire d'harmoniser les unités.



1.  $\mathcal{D}_1$  est une droite dont l'équation réduite est de la forme  $y = mx + p$ .

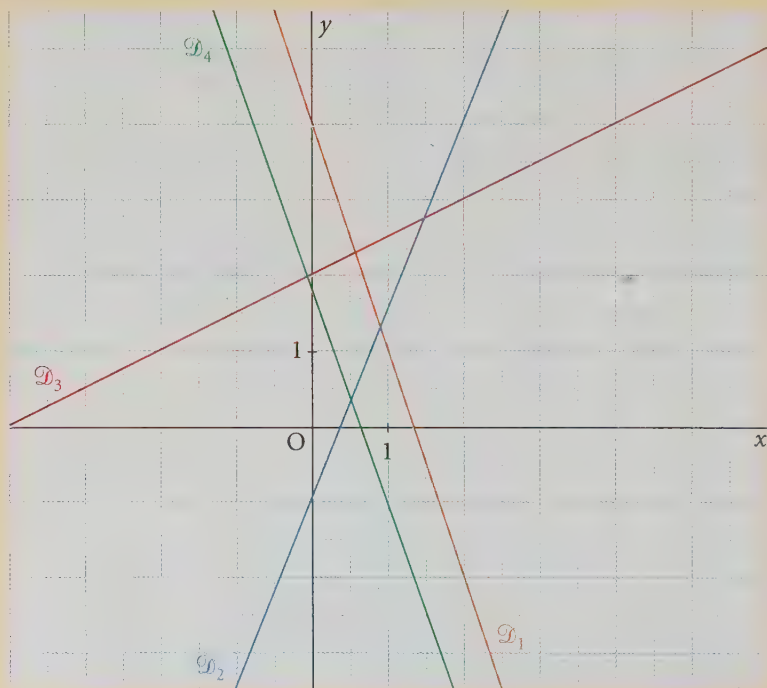
Le coefficient directeur de  $\mathcal{D}_1$  est :

$$m = \frac{7+2}{-1-2} = -3.$$

$$(2 ; -2) \in \mathcal{D}_1 : -2 = -3 \times 2 + p \text{ équivaut à } p = 4.$$

La droite  $\mathcal{D}_1$  a pour équation  $y = -3x + 4$ .

**Représentation graphique**



2.  $\mathcal{D}_2$  est une droite dont l'équation réduite est de la forme  $y = mx + p$ .

Le coefficient directeur de  $\mathcal{D}_2$  est :  $m = \frac{5}{2}$ .

$(2; 4) \in \mathcal{D}_2$  :  $4 = 2 \times \frac{5}{2} + p$  équivaut à  $p = -1$ .

La droite  $\mathcal{D}_2$  a pour équation  $y = \frac{5}{2}x - 1$ .

3.  $\mathcal{D}_3$  est une droite dont l'équation réduite est de la forme  $y = mx + p$ .

Le coefficient directeur de  $\mathcal{D}_3$  est  $m = \frac{1}{2}$ .

$(2; 3) \in \mathcal{D}_3$  :  $3 = 2 \times \frac{1}{2} + p$  équivaut à  $p = 2$ .

La droite  $\mathcal{D}_3$  a pour équation  $y = \frac{1}{2}x + 2$ .

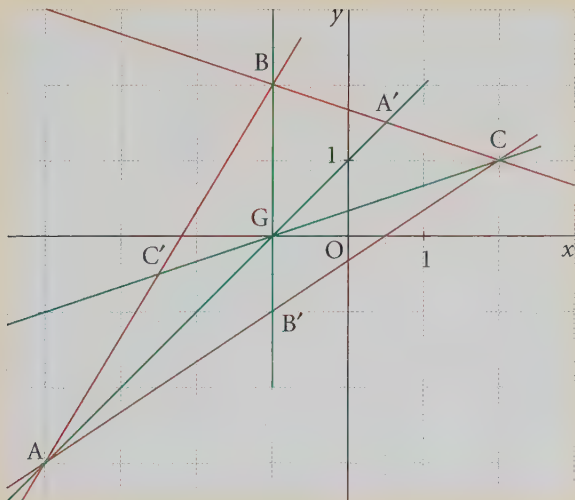
4.  $\mathcal{D}_4$  est une droite dont l'équation réduite est de la forme  $y = mx + p$ .

Le coefficient directeur de  $\mathcal{D}_4$  est tel que :  $m \times \frac{1}{3} = -1$ , soit  $m = -3$ .

$(0; 2) \in \mathcal{D}_4$  :  $2 = 0 \times (-3) + p$  équivaut à  $p = 2$ .

La droite  $\mathcal{D}_4$  a pour équation  $y = -3x + 2$ .

## 10 Représentation graphique



1. Comme  $x_A \neq x_B \neq x_C$ , les droites (AB), (AC) et (BC) sont de la forme  $y = mx + p$ .

- Le coefficient directeur de (AB) est :

$$m = \frac{2+3}{-1+4}, \text{ soit } m = \frac{5}{3}.$$

$$B(-1; 2) \in (AB): 2 = -1 \times \frac{5}{3} + p \text{ équivaut à } p = \frac{11}{3}.$$

**La droite (AB) a pour équation réduite**  $y = \frac{5}{3}x + \frac{11}{3}$ .

- Le coefficient directeur de (AC) est :

$$m = \frac{1+3}{2+4}, \text{ soit } m = \frac{2}{3}.$$

$$C(2; 1) \in (AC): 1 = 2 \times \frac{2}{3} + p \text{ équivaut à } p = -\frac{1}{3}.$$

**La droite (AC) a pour équation réduite**  $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ .

- Le coefficient directeur de (BC) est :

$$m = \frac{1-2}{2+1}, \text{ soit } m = -\frac{1}{3}.$$

$$C(2; 1) \in (BC): 1 = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + p \text{ équivaut } p = \frac{5}{3}.$$

**La droite (BC) a pour équation réduite**  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ .

**2.** A' est le milieu du segment [BC] donc  $A'\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

B' est le milieu du segment [AC] donc  $B'(-1; -1)$ .

C' est le milieu du segment [AB] donc  $C'\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ .

**Remarque :** n'oubliez pas que les coordonnées du milieu A' de [BC] sont :

$$A'\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right).$$

**3.** Déterminons les équations des médianes (AA'), (BB') et (CC') du triangle ABC.

Comme  $x_A \neq x_{A'}$  et  $x_C \neq x_{C'}$ , les droites (AA') et (CC') sont de la forme

$y = mx + p$ . Comme  $x_B = x_{B'}$ , la droite (BB') est de la forme  $x = c$ .

- Le coefficient directeur de (AA') est :

$$m = \frac{\frac{3}{2} + 3}{-\frac{1}{2} + 4}, \text{ soit } m = 1.$$



$A(-4; -3) \in (AA')$ :  $-3 = -4 \times 1 + p$  équivaut à  $p = 1$ .

La droite  $(AA')$  a pour équation réduite  $y = x + 1$ .

- Le coefficient directeur de  $(CC')$  est :  $m = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{-\frac{5}{2} - 2}$ , soit  $m = \frac{1}{3}$ .

$C(2; 1) \in (CC')$ :  $1 = 2 \times \frac{1}{3} + p$  équivaut à  $p = \frac{1}{3}$ .

La droite  $(CC')$  a pour équation réduite  $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ .

- La droite  $(BB')$  a pour équation  $x = -1$ .

**Remarque :** n'oubliez pas que la médiane d'un triangle est la droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

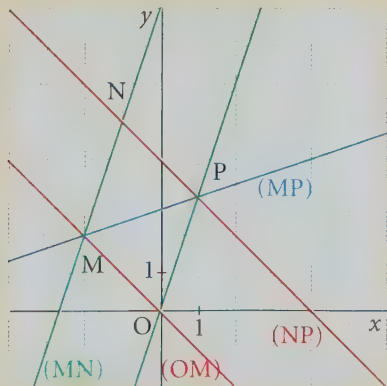
4. Pour trouver le point d'intersection G de ces trois médianes, résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = x + 1 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + 1 \\ y = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Les trois médianes sont sécantes au point  $G(-1; 0)$ .

**Remarque :** rappelez-vous que le point de concours des médianes d'un triangle s'appelle le centre de gravité du triangle.

## 11 Représentation graphique :



1. • M est le point d'intersection des droites (MN) et (MP).

On doit donc résoudre le système : 
$$\begin{cases} y = 3x + 8 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$\frac{8}{3}x + \frac{16}{3} = 0, \text{ soit } x = -2.$$

En remplaçant  $x$  par  $-2$  dans la première équation, on obtient :

$$y = -6 + 8, \text{ soit } y = 2.$$

$$S = \{(-2; 2)\}.$$

**Les droites (MN) et (MP) sont sécantes au point  $M(-2; 2)$ .**

•  $N(-1; y) \in (MN)$  :  $y = 3 \times (-1) + 8 = 5$ .

**Le point N a pour coordonnées  $(-1; 5)$ .**

• Déterminons une équation de (OM).

Comme  $x_M \neq x_O$ , la droite (OM) est de la forme  $y = mx + p$ .

Le coefficient directeur de (OM) est :  $m = \frac{2-0}{-2-0} = -1$ .

$O(0; 0) \in (OM)$  :  $p = 0$ .

**La droite (OM) a pour équation réduite  $y = -x$ .**

• Les droites (OM) et (PN) sont parallèles, donc l'équation réduite de (PN) est de la forme :  $y = -x + p$ .

De plus  $N(-1; 5) \in (PN)$  :  $5 = 1 + p$  ; soit  $p = 4$ .

La droite (PN) a pour équation réduite  $y = -x + 4$ .

P est le point d'intersection des droites (PN) et (MP).

On doit donc résoudre le système : 
$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$-\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0, \text{ soit } x = 1.$$

En remplaçant  $x$  par 1 dans la première équation, on obtient :

$$y = -1 + 4 = 3.$$

$$S = \{(1; 3)\}.$$

**Les droites (PN) et (MP) sont sécantes au point  $P(1; 3)$ .**

2. MNPO est un parallélogramme si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{PN}$  sont égaux. On a :  $\overrightarrow{OM}(-2; 2)$  et  $\overrightarrow{PN}(-2; 2)$ .

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PN}$ , donc MNPO est un parallélogramme.

## Chapitre 5

# Vecteurs

# 1 Vecteurs du plan

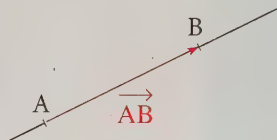
Soit A, B, C et D quatre points quelconques distincts.

## 1 Définition d'un vecteur

### → Définition

À deux points A et B, on peut associer le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  caractérisé par une direction, un sens et une longueur.

- La **direction** de  $\overrightarrow{AB}$  est celle de la droite (AB).
- Le **sens** de  $\overrightarrow{AB}$  est de A vers B.
- La **longueur** de  $\overrightarrow{AB}$  est la distance AB.



### → Vecteur nul

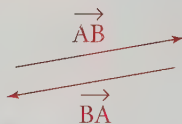
Lorsque les points A et B sont confondus, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est appelé **vecteur nul**.

Si  $A = B$ , alors  $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ .

### → Vecteurs opposés

• Deux **vecteurs opposés** ont la même direction, la même longueur mais des sens contraires.

• Le vecteur opposé à  $\overrightarrow{AB}$  est le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  ;  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ .



## 2 Vecteurs égaux

### → Définition

Deux **vecteurs égaux** ont la même direction, le même sens et la même longueur.

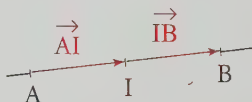
### → Vecteurs égaux et translation

Le point D est l'image de C par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  si et seulement si  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ . On écrit :  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$  si et seulement si  $D = t_{\overrightarrow{AB}}(C)$ .

### → Milieu d'un segment

Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement

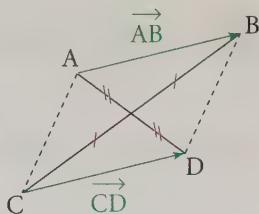
si :  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$  ou  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$  ou  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .



### → Vecteurs égaux et parallélogramme

Lorsque les points A, B, C et D ne sont pas alignés, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\vec{AB} = \vec{CD}$ .
- (2) ABDC est un parallélogramme.
- (3) Les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.



## Exercice résolu

### → Placer des points

#### Énoncé

Soit A, B, M, T quatre points distincts. Placer les points C, D, E, F, G, H tels que :

$$\vec{AC} = 2\vec{AB}; \quad \vec{AD} = -\frac{1}{2}\vec{AB}; \quad \vec{AE} + \vec{AD} = \vec{0}$$

$$\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AF}; \quad \vec{AB} + \vec{AM} = \vec{AG};$$

$$\vec{AM} + \vec{TB} = \vec{AH}.$$



#### Corrigé commenté

$\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont de même sens et  $AC = 2AB$ . Le point C est sur la droite (AB).

$\vec{AD}$  et  $\vec{AB}$  sont de sens contraires et

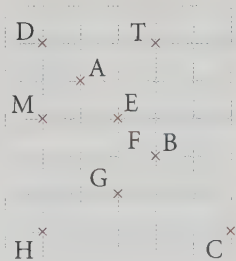
$AD = \frac{1}{2}AB$ . Le point D est sur la droite (AB).

$\vec{AE}$  et  $\vec{AD}$  sont opposés :  $\vec{AE}$  et  $\vec{AD}$  sont de sens contraires,  $AE = AD$  et le point E est sur la droite (AD).

D'après la relation de Chasles :  $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$ . Donc  $\vec{AB} = \vec{AF}$ . Les points B et F sont confondus.

$\vec{AB}$  et  $\vec{AM}$  ont la même origine. On applique la règle du parallélogramme : on place le point G de sorte que ABGM soit un parallélogramme.

$\vec{AM}$  et  $\vec{TB}$  n'ont pas la même origine. On place H tel que  $\vec{MH} = \vec{TB}$ .

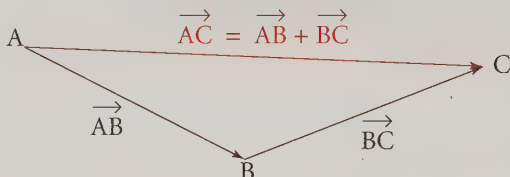


## 2 Opérations sur les vecteurs

Soit A, B et C trois points distincts et  $k$  un nombre réel non nul.

### 1 Somme de deux vecteurs

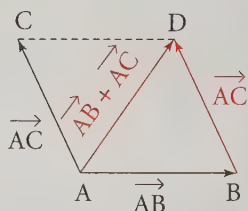
• Lorsque l'extrémité du premier vecteur et l'origine du second vecteur sont identiques, on applique la **relation de Chasles** :  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .



• Lorsque deux vecteurs ont la même origine, on applique la **règle du parallélogramme** :

• Pour représenter la somme  $\vec{AB} + \vec{AC}$   
On place le point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

On a alors  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$  ou encore  $\vec{AC} + \vec{AB} = \vec{AD}$ .



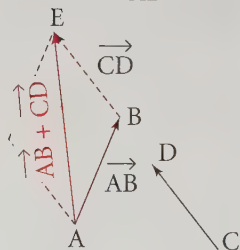
• Pour représenter la somme  $\vec{AB} + \vec{CD}$

On place le point E tel que :

$$\vec{CD} = \vec{BE}.$$

On applique la relation de Chasles :

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BE} ; \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AE}.$$

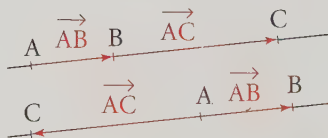


### 2 Produit d'un vecteur par un nombre réel non nul

Le produit du vecteur  $\vec{AB}$  par le nombre réel  $k$  est le vecteur  $\vec{AC}$  tel que  $\vec{AC} = k\vec{AB}$ .

• Si  $k > 0$ , alors  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont de même sens.

• Si  $k < 0$ , alors  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont de sens contraires.



## Exercice résolu

### ➔ Représenter des vecteurs

#### Énoncé

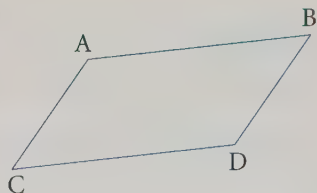
Soit  $ABDC$  un parallélogramme non aplati.

Déterminer et représenter les vecteurs  $\vec{u}$ ,

$\vec{v}$  et  $\vec{w}$  tels que :

$$\vec{u} = \vec{AB} + \vec{BD}; \quad \vec{v} = \vec{AB} + \vec{DB};$$

$$\vec{w} = \vec{CA} + \vec{BA}.$$



#### Corrigé commenté

**Indication :** on utilise la relation de Chasles et la règle du parallélogramme.

• D'après la relation de Chasles :

$$\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}, \text{ soit } \vec{u} = \vec{AD}.$$

• Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{DB}$  n'ont pas la même origine. On place le point E tel que  $\vec{BE} = \vec{DB}$ .

$$\text{On a alors : } \vec{AB} + \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{BE}.$$

Soit en appliquant la relation de Chasles :

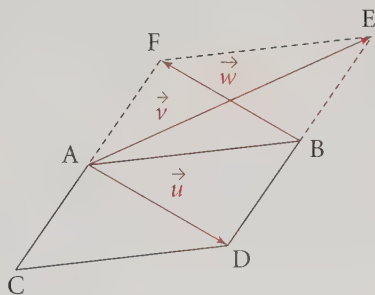
$$\vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}, \text{ soit } \vec{v} = \vec{AE}.$$

• On a  $\vec{CA} = \vec{BE}$ . Les vecteurs  $\vec{BE}$  et  $\vec{BA}$  ont la même origine.

On applique la règle du parallélogramme : on place le point F de sorte que BEFA soit un parallélogramme.

On a alors :

$$\vec{BE} + \vec{BA} = \vec{BF}, \text{ soit } \vec{w} = \vec{BF}.$$





### 3 Coordonnées d'un vecteur

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Soit deux points A et B de coordonnées respectives  $(x_A ; y_A)$  et  $(x_B ; y_B)$ .

#### 1 Définitions

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ .

#### → Coordonnées de l'opposé d'un vecteur et de la somme de deux vecteurs

● Si le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $(x ; y)$ , alors le vecteur opposé  $\overrightarrow{BA}$  a pour coordonnées  $(-x ; -y)$ .

● Si deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  ont pour coordonnées respectives  $(x ; y)$  et  $(x' ; y')$ , alors le vecteur  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$  a pour coordonnées  $(x + x' ; y + y')$ .

#### → Coordonnées du milieu d'un segment

Les coordonnées du milieu I de [AB] sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

#### → Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel k

Si  $\overrightarrow{AB}$  est le vecteur de coordonnées  $(x ; y)$ , alors  $k\overrightarrow{AB}$  est le vecteur de coordonnées  $(kx ; ky)$ .

#### 2 Égalité de deux vecteurs

$\overrightarrow{AB}(x ; y)$  et  $\overrightarrow{CD}(x' ; y')$  sont égaux équivaut à :  $x = x'$  et  $y = y'$ .

## Exercice résolu

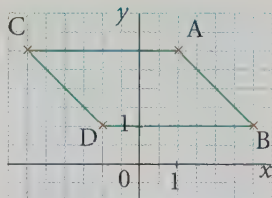
### Lire les coordonnées d'un vecteur

#### Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le parallélogramme ABDC.

Déterminer par lecture graphique les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  tels que :

$$\vec{u} = \vec{AB}; \quad \vec{v} = \vec{BC}; \quad \vec{w} = \vec{AB} + \vec{AC}.$$



#### Corrigé commenté

• Soit  $(x; y)$  les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$ .

Pour aller du point A au point B, on se déplace :

– horizontalement de deux unités vers la droite, donc  $x = 2$  ;

– verticalement de deux unités vers le bas, donc  $y = -2$ .

On a ainsi :  $\vec{u}(2; -2)$ .

• Soit  $(x; y)$  les coordonnées du vecteur  $\vec{v}$ .

Pour aller du point B au point C, on se déplace :

– horizontalement de six unités vers la gauche, donc  $x = -6$  ;

– verticalement de deux unités vers le haut, donc  $y = 2$ .

On a ainsi :  $\vec{v}(-6; 2)$ .

• ABDC est un parallélogramme donc les vecteurs  $\vec{BD}$  et  $\vec{AC}$  sont égaux.

On a alors :  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD}$  ; soit en appliquant la relation de

Chasles :  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ . On a ainsi :  $\vec{w} = \vec{AD}$ .

Soit  $(x; y)$  les coordonnées du vecteur  $\vec{w}$ .

Pour aller du point A au point D, on se déplace :

– horizontalement de deux unités vers la gauche, donc  $x = -2$  ;

– verticalement de deux unités vers le bas, donc  $y = -2$ .

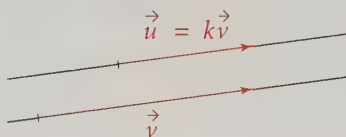
On a ainsi :  $\vec{w}(-2; -2)$ .

## 4 Colinéarité de deux vecteurs

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

### 1 Définition

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction. Il existe donc un nombre réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$ .



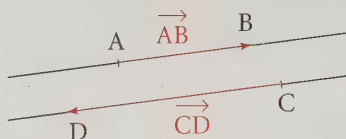
### 2 Conditions de colinéarité

Deux vecteurs  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  sont colinéaires si et seulement si :  $xy' - x'y = 0$ .

### 3 Vecteurs colinéaires et droites parallèles

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan.

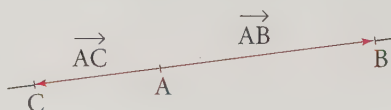
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires.



### 4 Vecteurs colinéaires et points alignés

Soit A, B et C trois points distincts du plan.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.



**Remarque :** lorsqu'on peut former deux vecteurs colinéaires à partir de trois points, cela signifie que ces trois points sont alignés.

## Exercice résolu

### ➔ Justifier l'alignement de trois points

#### Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :  $A(2; 1)$ ,  $B(4; 3)$  et  $C(0; -2)$ .

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

#### Corrigé commenté

**Indication :** on place les points sur une figure, on calcule les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ , puis on applique la condition de colinéarité.

#### Représentation graphique :

Calcul des coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A);$$

$$\overrightarrow{AB}(4 - 2; 3 - 1), \text{ soit } \overrightarrow{AB}(2; 2).$$

Calcul des coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AC}$  :

$$\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A);$$

$$\overrightarrow{AC}(0 - 2; -2 - 1),$$

$$\text{soit } \overrightarrow{AC}(-2; -3).$$

Condition de colinéarité :

Si  $\overrightarrow{AB}(x; y)$  et  $\overrightarrow{AC}(x'; y')$  sont colinéaires, alors  $xy' - x'y = 0$ .

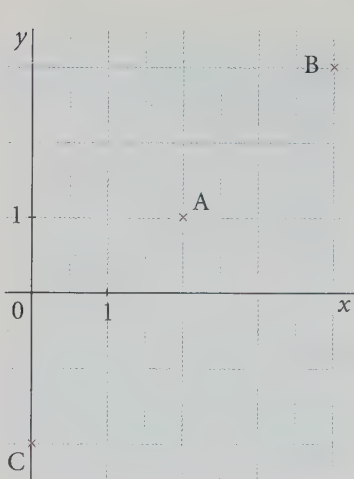
Comme  $\overrightarrow{AB}(2; 2)$  et  $\overrightarrow{AC}(-2; -3)$

alors :

$$xy' - x'y = 2 \times (-3) - (-2) \times 2 = -6 + 4 = -2. \quad xy' - x'y \neq 0.$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

**Remarque :** sur la figure, les points A, B et C semblaient alignés.

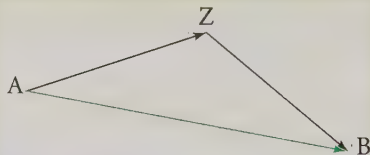


## Méthode

## Les réflexes à avoir

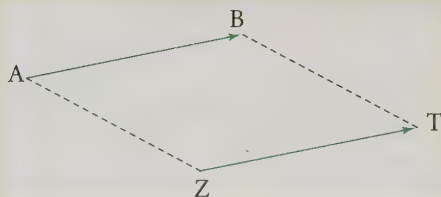
**R1** La relation de Chasles peut s'appliquer sur une configuration de la forme :

$$\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{AB}.$$



**R2** Il faut connaître l'égalité vectorielle qui définit un parallélogramme ;

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ZT}, \text{ par exemple, équivaut à } ABTZ \text{ est un parallélogramme.}$$



**R3** Quand on lit, sur un graphique, les coordonnées d'un vecteur, il faut faire attention au sens des vecteurs.

**R4** Les coordonnées d'un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  se calculent avec la formule :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A).$$

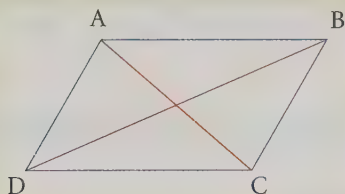
**R5** Pour montrer que trois points sont alignés, on montre que deux vecteurs formés avec ces trois points sont colinéaires.



**R6** Pour montrer que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, on cherche un réel  $k$  non nul tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$ , ou on calcule le réel  $xy' - x'y$  quand on connaît les coordonnées de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$ .

## Les pièges à éviter

- La colinéarité de deux vecteurs permet de montrer que deux droites sont parallèles.
- Il ne faut pas se fier à un dessin pour montrer que des points sont alignés, il faut appliquer la condition de colinéarité.
- Si ABCD est un parallélogramme alors les diagonales sont [AC] et [BD] ; on peut visualiser la situation de la manière suivante  $\widehat{ABCD}$ .



On a  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  ou encore  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

## Exercices

## Exercices d'application

## 1 Relations vectorielles

R1 corrigé p. 164

Soit ABC un triangle rectangle en A. Construire les points D, E, F, G, H et I définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= -\vec{AC}; \vec{DE} = 2\vec{BC}; \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BC}; \vec{BG} = \vec{BE} + \vec{BF}; \vec{AF} + \vec{BD} = \vec{AH}; \\ \vec{IA} + \vec{BA} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

## 2 Déterminer des vecteurs

R1 corrigé p. 164

Soit ABCD un losange.

Déterminer et représenter les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  tels que :

$$\vec{u} = \vec{BC} + \vec{CA}; \vec{v} = \vec{BA} + \vec{BC}; \vec{w} = \vec{AD} - \vec{CB}.$$

## Exercices d'entraînement

## 3 Relation de Chasles

R1 corrigé p. 165

Soit A, B, C, D quatre points quelconques.

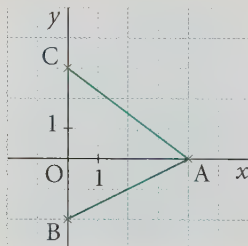
Écrire les sommes suivantes sous la forme d'un seul vecteur :

- $\vec{AD} + \vec{BA}$ ;
- $2\vec{CA} + \vec{AD} - \vec{BD} - \vec{DA} + \vec{DC}$ ;
- $\vec{BD} - 2\vec{BA} + \vec{DA} - \vec{AB}$ .

## 4 Lectures graphiques

corrigé p. 166

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le triangle ABC.





Déterminer par lecture graphique les coordonnées des vecteurs  $\vec{s}$ ,  $\vec{t}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  et  $\vec{z}$  tels que :

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB}; \quad \vec{t} = \overrightarrow{AC}; \quad \vec{u} = \overrightarrow{BC};$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{CB}; \quad \vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}; \quad \vec{z} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}.$$

## 5 Relation vectorielle

➔ corrigé p. 166

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points  $A(-3; 2)$ ,  $B(0; -1)$ ,  $C(6; -1)$  et  $D(x; y)$ .

Déterminer les coordonnées du point D défini par :

$$\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

## 6 Points alignés

➔ R6

➔ corrigé p. 167

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points  $E(1; 5)$ ,  $F(-1; 2)$  et  $G(2; y)$ .

Déterminer le nombre réel  $y$  pour que les points E, F et G soient alignés.

## 7 Milieu d'un segment

➔ R1, R2

➔ corrigé p. 167

Soit A, B, C trois points du plan non alignés.

1. Placer le point D tel que  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ .

2. Placer le point E tel que  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ .

3. Dédire de la construction que A est le milieu de [DE].

## 8 Points alignés

➔ R6

➔ corrigé p. 168

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$A(2; 3)$ ,  $B(-1; 1)$ ,  $C(0; -1)$ ,  $D(-1; -3)$  et  $E(1; -3)$ .

Déterminer, pour chaque cas, si les trois points suivants sont alignés.

1. A, C et D.

2. A, B et E.

3. E, B et C.

## 9 Vecteurs colinéaires

→ R6

→ corrigé p. 168

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}(6; -4), \vec{v}(3; y) \text{ et } \vec{w}(x+1; 2).$$

Déterminer les nombres réels  $x$  et  $y$  sachant que :

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires.

## 10 Droites parallèles

→ corrigé p. 169

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(-1; 4) \text{ et } B(1; -1)$$

et les vecteurs  $\vec{AE}(-2; 3-y)$  et  $\vec{CD}(x+2; 10)$ .

Déterminer les nombres réels  $x$  et  $y$  sachant que :

1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Les points A, B et E sont alignés.

## 11 Distances dans le plan

→ corrigé p. 169

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(1; 1); B(-2; -1) \text{ et } C(3; -2).$$

1. Placer les points A, B et C sur une figure.
2. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

## 12 Configurations du plan

→ corrigé p. 170

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(3; 1) \text{ et } B(5; -1).$$

1. Placer les points A et B sur une figure.
2. Déterminer les coordonnées du point C symétrique de O par rapport à A.
3. Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un parallélogramme.
4. Déterminer les coordonnées du point M telles que  $\vec{AM} = -2\vec{AB}$ .
5. Déterminer les coordonnées du point N telles que  $\vec{ON} = \vec{CD}$ .

**13 Configurations du plan**

➔ corrigé p. 171

Soit un triangle ABC quelconque. Traduire par une relation vectorielle les phrases suivantes, puis placer les points D, E, F, G et H sur une figure.

1. D est le symétrique de B par rapport à A.
2. C est le milieu du segment [BE].
3. F est l'image de B dans la translation de vecteur  $\overrightarrow{AC}$ .
4. BDGF est un parallélogramme.
5. H est le centre du parallélogramme ADGC.

**14 Relations vectorielles**

➔ R2

➔ corrigé p. 172

Soit A, B, C trois points du plan non alignés.

1. Placer le point D tel que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .
2. Placer le point E tel que  $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ .
3. Dédire de la construction que CEDB est un parallélogramme.

## Corrigés

**1** • On place D de sorte que les vecteurs  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AC}$  soient opposés.

•  $\overrightarrow{DE}$  et  $\overrightarrow{BC}$  ont la même direction, le même sens et  $DE = 2BC$ .

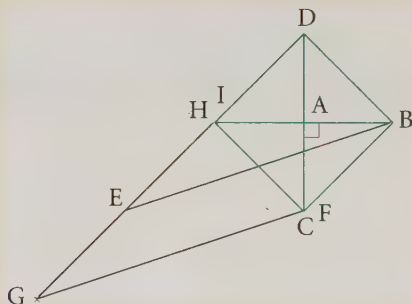
• D'après la relation de Chasles :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Donc  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}$ . Les points C et F sont confondus.

• Les vecteurs  $\overrightarrow{BE}$  et  $\overrightarrow{BF}$  ont la même origine. On applique la règle du parallélogramme : on place le point G de sorte que BEGF (ou BEGC) soit un parallélogramme.

• Les vecteurs  $\overrightarrow{AF}$  et  $\overrightarrow{BD}$  n'ont pas la même origine. On place le point H tel que  $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$ .

• Les vecteurs  $\overrightarrow{IA}$  et  $\overrightarrow{BA}$  sont opposés. Les points I et H sont confondus.



**1** • D'après la relation de Chasles :  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$ , soit  $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ .

• Les vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$  ont la même origine. On applique la règle du parallélogramme : on place le point E de sorte que ABCE soit un parallélogramme, soit  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$ .

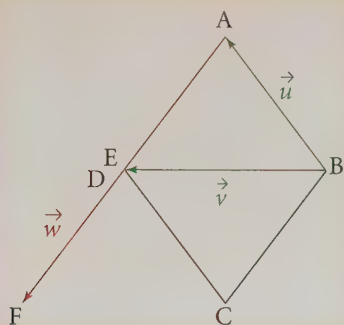
On a alors :  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$  ;  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE}$ , soit  $\vec{v} = \overrightarrow{BE}$ .  
Les points E et D sont confondus.

•  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{BC}$  n'ont pas la même origine.

On place le point F de sorte que  $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BC}$ .

On a alors :  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$  ;  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF}$ , soit  $\vec{w} = \overrightarrow{AF}$ .

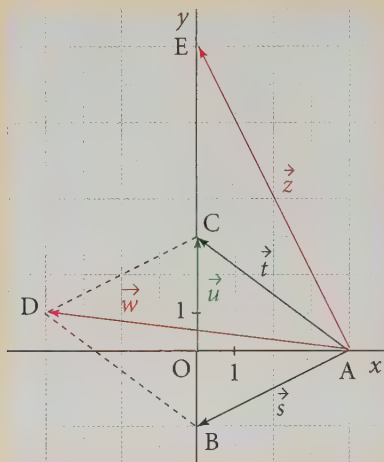


**3** a)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD};$   
 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}.$

b) 
$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} &= 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \\ &= 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \\ &= 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \\ &= 2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \\ &= (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= \overrightarrow{DD} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

c) 
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AA} \\ &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

#### 4 Représentation graphique :



On lit :  $\vec{s}(-4; -2)$ ;  $\vec{t}(-4; 3)$ ;  $\vec{u}(0; 5)$ ;  $\vec{v}(0; -5)$ .

•  $\vec{w} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ont la même origine. On applique la règle du parallélogramme : on place le point D de sorte que ABDC soit un parallélogramme.

On a alors :  $\vec{w} = \vec{AD}$ .

On lit :  $\vec{w}(-8; 1)$ .

•  $\vec{z} = \vec{AC} + \vec{BC}$ .

Les vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{BC}$  n'ont pas la même origine.

On place le point E tel que  $\vec{BC} = \vec{CE}$ . On a alors :  $\vec{z} = \vec{AE}$ .

On lit :  $\vec{z}(-4; 8)$ .

5 • Les coordonnées des vecteurs  $\vec{AC}$ ,  $-\frac{1}{3}\vec{AC}$  et  $\vec{CB}$  sont :

$$\vec{AC}(9; -3), \quad -\frac{1}{3}\vec{AC}(-3; 1) \quad \text{et} \quad \vec{CB}(-6; 0).$$

Les coordonnées du vecteur  $-\frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{CB}$  sont alors  $(-9; 1)$ .

• Les coordonnées du vecteur  $\vec{CD}$  sont :  $(x - 6; y + 1)$ .

- L'égalité  $\vec{CD} = -\frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{CB}$  s'écrit analytiquement :

$$\begin{pmatrix} x-6 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x-6 = -9 \\ y+1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 6-9 \\ y = -1+1 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Le point D a pour coordonnées  $(-3; 0)$ .



### Représentation graphique :

- Les coordonnées des vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{EG}$  sont :

$$\vec{EF}(-2; -3) \text{ et } \vec{EG}(1; y-5).$$

- Les vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{EG}$  sont colinéaires, si et seulement si :

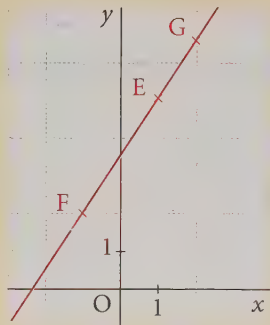
$$-2(y-5) - 1 \times (-3) = 0;$$

$$-2y + 10 + 3 = 0;$$

$$-2y + 13 = 0;$$

$$-2y = -13, \text{ soit } y = \frac{13}{2}.$$

Pour  $G(2; \frac{13}{2})$  les vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{EG}$  sont colinéaires, et les points E, F et G sont alignés.



**Remarque :** les points E, F, G sont alignés, car on peut former deux vecteurs colinéaires  $\vec{EF}$  et  $\vec{EG}$  avec ces trois points.



**1.** On applique la règle du parallélogramme : on place le point D tel que CADB soit un parallélogramme.

**2.**  $\vec{CE} = \vec{CA} + \vec{BC}$ .

On place le point E de sorte que  $\vec{BC} = \vec{AE}$ .

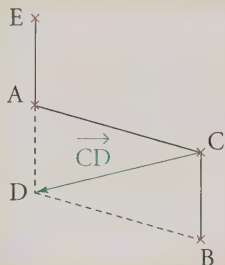
**3.** On sait d'après la question 1. que CADB est un parallélogramme. On a donc la relation :  $\vec{DA} = \vec{BC}$ .

On sait d'après la question 2. que :  $\vec{BC} = \vec{AE}$ .

Des égalités  $\vec{DA} = \vec{BC}$  et  $\vec{BC} = \vec{AE}$ , on déduit :

$$\vec{DA} = \vec{AE}.$$

Ainsi, l'égalité  $\vec{DA} = \vec{AE}$  signifie que A est le milieu de [DE].





**8** 1. Étudions la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  :

$$\overrightarrow{AC}(-2; -4) \text{ et } \overrightarrow{AD}(-3; -6).$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont colinéaires si et seulement si  $xy' - x'y = 0$ .  
Or,  $xy' - x'y = -2 \times (-6) + 4 \times (-3)$ ;  $xy' - x'y = 12 - 12$ .  
Soit  $xy' - x'y = 0$ .

**Les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont donc colinéaires et les points A, C et D sont alignés.**

2. Étudions la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BE}$  :

$$\overrightarrow{AB}(-3; -2) \text{ et } \overrightarrow{BE}(2; -4).$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BE}$  sont colinéaires si et seulement si  $xy' - x'y = 0$ .  
Or,  $xy' - x'y = -3 \times (-4) + 2 \times 2$ ;  $xy' - x'y = 12 + 4$ .  
Soit  $xy' - x'y = 16$ .

Comme  $xy' - x'y \neq 0$ , **les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BE}$  ne sont pas colinéaires et les points A, B et E ne sont pas alignés.**

3. Étudions la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{BE}$  :

$$\overrightarrow{CB}(-1; 2) \text{ et } \overrightarrow{BE}(2; -4).$$

On remarque que  $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{CB}$ .

**Les vecteurs  $\overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{BE}$  sont donc colinéaires et les points E, B et C sont alignés.**

**9** 1. Pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires, il faut déterminer le nombre réel  $y$  tel que :

$$6y - 3 \times (-4) = 0.$$

Cette équation est successivement équivalente à :

$$6y + 12 = 0, \text{ soit } y = -2.$$

**Pour  $\vec{v}(3; -2)$ , les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.**

2. Pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  soient colinéaires, il faut déterminer le nombre réel  $x$  tel que :

$$6 \times 2 + 4 \times (x + 1) = 0.$$

Cette équation est successivement équivalente à :

$$12 + 4x + 4 = 0;$$

$$16 + 4x = 0;$$

$$x = -4.$$

Le vecteur  $\vec{w}$  a pour coordonnées  $(-4 + 1; 2)$ , soit  $(-3; 2)$ .

**Pour  $\vec{w}(-3; 2)$ , les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires.**

**10** 1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

On a :  $\overrightarrow{AB}(2 ; -5)$  et on sait que  $\overrightarrow{CD}(x+2 ; 10)$ .

On détermine alors le nombre réel  $x$  tel que :  $2 \times 10 + 5(x+2) = 0$ .

Cette équation est successivement équivalente à :

$$20 + 5x + 10 = 0 ;$$

$$30 + 5x = 0 ;$$

$$x = -6.$$

Le vecteur  $\overrightarrow{CD}$  a pour coordonnées  $(-6+2 ; 10)$  ; soit  $(-4 ; 10)$ .

Pour  $\overrightarrow{CD}(-4 ; 10)$ , les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2. Les points A, B et E sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AE}$  sont colinéaires.

On sait que :  $\overrightarrow{AB}(2 ; -5)$  et  $\overrightarrow{AE}(-2 ; 3-y)$ .

On détermine alors le nombre réel  $y$  tel que :

$$2 \times (3-y) + 2 \times (-5) = 0.$$

Cette équation est successivement équivalente à :

$$6 - 2y - 10 = 0 ;$$

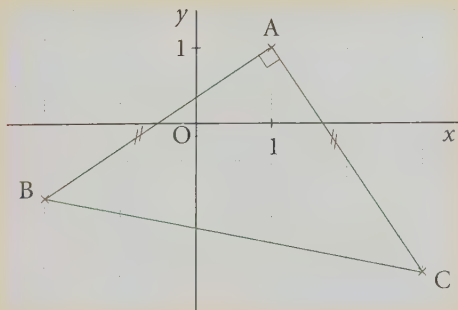
$$-2y - 4 = 0 ;$$

$$2y = -4, \text{ soit } y = -2.$$

Le vecteur  $\overrightarrow{AE}$  a pour coordonnées  $(-2 ; 3+2)$  ; soit  $(-2 ; 5)$ .

Pour  $\overrightarrow{AE}(-2 ; 5)$ , les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AE}$  sont colinéaires et les points A, B et E sont alignés.

**11** 1. Représentation graphique :



## 2. Calcul des distances AB, BC et AC :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}; \quad AB = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2};$$

$$AB = \sqrt{9+4}, \text{ soit } AB = \sqrt{13}.$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}; \quad BC = \sqrt{5^2 + (-1)^2};$$

$$BC = \sqrt{25+1}, \text{ soit } BC = \sqrt{26}.$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}; \quad AC = \sqrt{2^2 + (-3)^2};$$

$$AC = \sqrt{4+9}, \text{ soit } AC = \sqrt{13}.$$

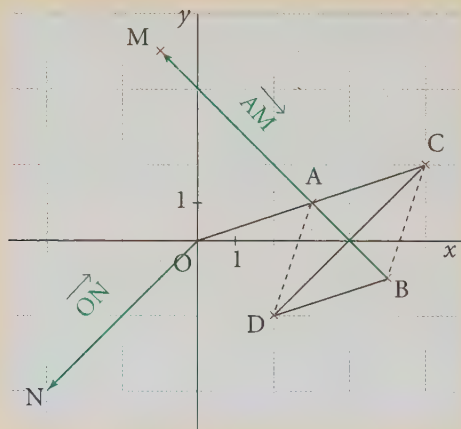
Les distances AB et AC sont égales donc le triangle ABC est isocèle en A.

De plus  $AB^2 = 13$ ,  $AC^2 = 13$  et  $BC^2 = 26$ .

Donc  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

## 12 1. Représentation graphique :



2. Le point C est le symétrique de O par rapport à A ; cela signifie que le point A est le milieu du segment [OC].

$$\text{On a donc : } x_A = \frac{x_O + x_C}{2} \text{ et } y_A = \frac{y_O + y_C}{2}.$$

$$\text{Or, } O(0; 0) \text{ et } A(3; 1) \text{ donc } x_C = 2x_A \text{ et } y_C = 2y_A.$$

Le point C a pour coordonnées (6; 2).

3. Si ACBD est un parallélogramme alors les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{DB}$  sont égaux :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}.$$

On a :  $\overrightarrow{DB}(5 - x_D; -1 - y_D)$  et  $\overrightarrow{AC}(3; 1)$ .

Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées :  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} 5 - x_D = 3 \\ -1 - y_D = 1 \end{cases}; \begin{cases} 5 - 3 = x_D \\ -1 - 1 = y_D \end{cases}; \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = -2 \end{cases}.$$

**Le point D a pour coordonnées (2; -2).**

4. On a :  $\overrightarrow{AM}(x_M - 3; y_M - 1)$  et  $\overrightarrow{AB}(2; -2)$ ; soit  $-2\overrightarrow{AB}(-4; 4)$ .

Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées :  $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} x_M - 3 = -4 \\ y_M - 1 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x_M = 3 - 4 \\ y_M = 1 + 4 \end{cases}; \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = 5 \end{cases}.$$

**Le point M a pour coordonnées (-1; 5).**

5. On a :  $\overrightarrow{ON}(x_N; y_N)$  et  $\overrightarrow{CD}(-4; -4)$ .

Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées, donc le point N a les mêmes coordonnées que le vecteur  $\overrightarrow{CD}$ , soit  $N(-4; -4)$ .

**13** 1. On peut écrire par exemple :

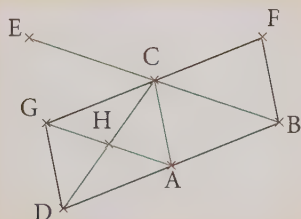
$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} \text{ ou } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \text{ ou } \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DA}.$$

2. On peut écrire par exemple :

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CB} \text{ ou } \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} \text{ ou } \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EC}.$$

3. On peut écrire par exemple :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF} \text{ ou } \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}.$$



4. On peut écrire par exemple :

$$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DB} \text{ ou } \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{BF}.$$

5. On peut écrire par exemple :  $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{HD}$  ou  $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HA}$ .

**14** 1. On place le point D tel que ACDB soit un parallélogramme.

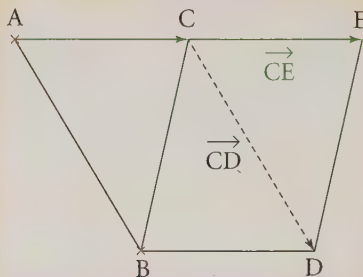
2.  $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$  équivaut à  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$ . On place le point E tel que C soit le milieu de [AE].

3. On sait d'après 1. que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .

On sait d'après 2. que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}$ .

Des égalités  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}$ , on déduit :  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CE}$ .

Or, l'égalité  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CE}$  signifie que CEDB est un parallélogramme.



Partie **3**

# **Statistiques et probabilités**





## Chapitre 6

# Statistiques

# 1 Organisation des données d'une série statistique

## 1 Vocabulaire

- La **population** est un ensemble faisant l'objet d'une étude statistique.
- Un élément de la population est un **individu** ou une **unité statistique**.
- On observe des **caractères** qui prennent différentes **valeurs**.

Un caractère est **quantitatif** si ses valeurs s'expriment par un nombre, sinon, il est **qualitatif**.

Un caractère quantitatif est **continu** s'il peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle (ou classe). L'**amplitude d'une classe**  $[a ; b[$  est  $b - a$ .

## 2 Effectif et fréquence

- L'**effectif**  $n_i$  est le nombre d'individus de la population dont le caractère prend une valeur donnée.
- L'**effectif total** est le nombre d'individus de la population. Il est noté  $N$ .
- La **fréquence**  $f_i$  d'une valeur du caractère est le rapport :  $\frac{n_i}{N}$ .

|                 |                       |                       |     |                       |                               |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----|-----------------------|-------------------------------|
| Valeur $x_i$    | $x_1$                 | $x_2$                 | ... | $x_p$                 | Total                         |
| Effectif $n_i$  | $n_1$                 | $n_2$                 | ... | $n_p$                 | $n_1 + n_2 + \dots + n_p = N$ |
| Fréquence $f_i$ | $f_1 = \frac{n_1}{N}$ | $f_2 = \frac{n_2}{N}$ | ... | $f_p = \frac{n_p}{N}$ | $f_1 + f_2 + \dots + f_p = 1$ |

## 3 Effectifs et fréquences cumulés

- On obtient l'**effectif cumulé croissant** de la valeur  $x_i$  en ajoutant à l'effectif  $n_i$  qui lui correspond l'effectif des valeurs précédentes. Le dernier effectif cumulé croissant est toujours égal à l'effectif total  $N$ .

|                           |       |             |     |                               |
|---------------------------|-------|-------------|-----|-------------------------------|
| Valeur $x_i$              | $x_1$ | $x_2$       | ... | $x_p$                         |
| Effectif $n_i$            | $n_1$ | $n_2$       | ... | $n_p$                         |
| Effectif cumulé croissant | $n_1$ | $n_1 + n_2$ | ... | $n_1 + n_2 + \dots + n_p = N$ |

- On obtient de la même façon la **fréquence cumulée croissante**. La dernière fréquence cumulée croissante est toujours égale à 1.

## Exercices résolus

### ➔ 1. Construire un tableau statistique et calculer une fréquence

#### Énoncé

Les notes de mathématiques de 20 élèves sont les suivantes :

06-10-18-08-14-12-10-06-15-13-10-08-09-12-15-06-14-14-12-18.

Regrouper ces résultats dans un tableau, puis déterminer la série statistique des fréquences.

#### Corrigé commenté

**Indication :** on identifie le caractère observé, on place les différentes valeurs du caractère dans l'ordre croissant dans un tableau, puis on compte l'effectif de chaque valeur.

|                 |                       |                       |                       |                       |                       |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Note $x_i$      | 06                    | 08                    | 09                    | 10                    | 12                    |
| Effectif $n_i$  | 3                     | 2                     | 1                     | 3                     | 3                     |
| Fréquence $f_i$ | $\frac{3}{20} = 0,15$ | $\frac{2}{20} = 0,10$ | $\frac{1}{20} = 0,05$ | $\frac{3}{20} = 0,15$ | $\frac{3}{20} = 0,15$ |

|                 |                       |                       |                       |                       |          |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|
| Note $x_i$      | 13                    | 14                    | 15                    | 18                    | Total    |
| Effectif $n_i$  | 1                     | 3                     | 2                     | 2                     | $N = 20$ |
| Fréquence $f_i$ | $\frac{1}{20} = 0,05$ | $\frac{3}{20} = 0,15$ | $\frac{2}{20} = 0,10$ | $\frac{2}{20} = 0,10$ | 1        |

### ➔ 2. Calculer des effectifs cumulés

#### Énoncé

La répartition de 26 participants à une compétition sportive est la suivante.

|                |           |           |           |           |           |           |
|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Âge            | [10 ; 13[ | [13 ; 16[ | [16 ; 19[ | [19 ; 22[ | [22 ; 25[ | [25 ; 28] |
| Effectif $n_i$ | 7         | 6         | 8         | 1         | 1         | 3         |

Calculer les effectifs cumulés croissants.

#### Corrigé commenté

|                           |           |              |               |               |               |               |
|---------------------------|-----------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Âge                       | [10 ; 13[ | [13 ; 16[    | [16 ; 19[     | [19 ; 22[     | [22 ; 25[     | [25 ; 28]     |
| Effectif $n_i$            | 7         | 6            | 8             | 1             | 1             | 3             |
| Effectif cumulé croissant | 7         | $7 + 6 = 13$ | $13 + 8 = 21$ | $21 + 1 = 22$ | $22 + 1 = 23$ | $23 + 3 = 26$ |

**Indication :** on vérifie que le dernier effectif cumulé croissant est bien égal à l'effectif total, c'est-à-dire à 26 dans cet exemple.

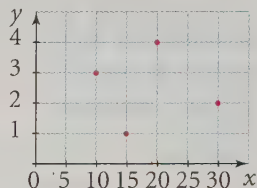
## 2 Représentations graphiques d'une série statistique quantitative

### 1 Nuage de points

Il est utilisé pour représenter les valeurs de deux caractères quantitatifs.

*Exemple :*

|                            |    |    |    |    |
|----------------------------|----|----|----|----|
| Valeurs du caractère $x_i$ | 10 | 15 | 20 | 30 |
| Valeurs du caractère $y_i$ | 3  | 1  | 4  | 2  |

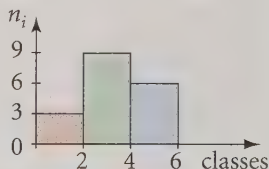


### 2 Histogramme

- Il est utilisé pour représenter un caractère quantitatif dont les valeurs sont regroupées en classes.
- Les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes.

*Exemple :*

|                |         |         |         |
|----------------|---------|---------|---------|
| Classes        | [0 ; 2[ | [2 ; 4[ | [4 ; 6[ |
| Effectif $n_i$ | 3       | 9       | 6       |



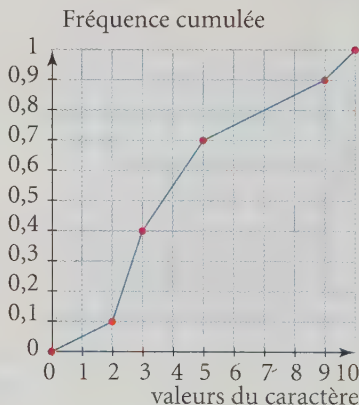
**Remarque :** dans cet exemple, les classes ont la même amplitude.

### 3 Courbe des fréquences cumulées

- Elle est utilisée pour représenter les fréquences cumulées croissantes d'un caractère quantitatif.

*Exemple :*

| Valeurs du caractère $x_i$ | Fréquence | Fréquence cumulée croissante |
|----------------------------|-----------|------------------------------|
| 0                          | 0         | 0                            |
| 2                          | 0,10      | 0,10                         |
| 3                          | 0,30      | 0,40                         |
| 5                          | 0,30      | 0,70                         |
| 9                          | 0,20      | 0,90                         |
| 10                         | 0,10      | 1                            |



## Exercice résolu



Représenter la courbe des fréquences cumulées d'une série statistique



### Énoncé

La répartition du poids (en kg) de 70 élèves de seconde est la suivante.

| Poids           | [40 ; 60[ | [60 ; 70[ | [70 ; 80[ | [80 ; 100] |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Fréquence $f_i$ | 0,28      | 0,36      | 0,21      | 0,15       |

Représenter la courbe des fréquences cumulées de cette série statistique.



### Corrigé commenté

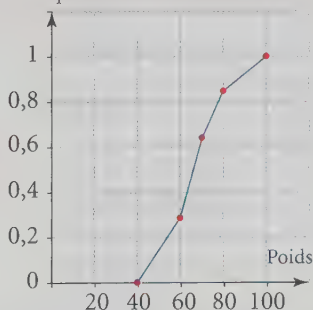
**Indication :** on calcule les fréquences cumulées croissantes.

| Poids                        | [40 ; 60[ | [60 ; 70[ | [70 ; 80[ | [80 ; 100] |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Fréquence cumulée croissante | 0,28      | 0,64      | 0,85      | 1          |

**Indication :** on place les points qui ont pour abscisses les bornes de droites des classes et pour ordonnées les fréquences cumulées croissantes. Le 1<sup>er</sup> point a pour abscisse la borne de gauche de la 1<sup>re</sup> classe et pour ordonnée 0. On joint ces points par des segments.

|          | Bornes de droite des classes    |      |      |      |     |
|----------|---------------------------------|------|------|------|-----|
| Abscisse | 40                              | 60   | 70   | 80   | 100 |
| Ordonnée | 0                               | 0,28 | 0,64 | 0,85 | 1   |
|          | Fréquences cumulées croissantes |      |      |      |     |

Fréquence cumulée croissante

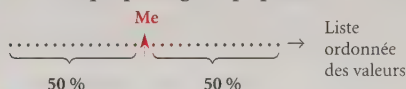


### 3 Médiane et quartiles

La **médiane** est un nombre qui caractérise une « **position** » des valeurs du caractère d'une série statistique à caractère quantitatif ; les **quartiles** sont deux nombres qui caractérisent une « **dispersion** » des valeurs du caractère d'une série statistique à caractère quantitatif.

#### 1 Médiane

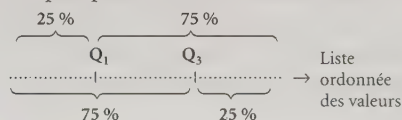
Pour un caractère dont les valeurs sont rangées en ordre croissant, la **médiane** est une valeur qui partage la population en deux groupes d'effectifs à peu près égaux.



#### 2 Quartiles

● Le premier quartile  $Q_1$  est une valeur qui partage la population, dont les valeurs du caractère sont rangées en ordre croissant, en deux groupes : le 1<sup>er</sup> groupe représente à peu près 25 % de l'effectif total et le 2<sup>nd</sup> groupe à peu près 75 %.

● Le troisième quartile  $Q_3$  est une valeur qui partage la population, dont les valeurs du caractère sont rangées en ordre croissant, en deux groupes : le 1<sup>er</sup> groupe représente à peu près 75 % de l'effectif total et le 2<sup>nd</sup> groupe à peu près 25 %.



#### 3 Utilisation de la calculatrice ou du tableur

Pour obtenir la médiane et les quartiles, on utilise une calculatrice ou un tableur.

● Avec une calculatrice de **modèle CASIO** :

Dans le menu, on choisit **STAT** et on tape **[EXE]** : on entre les valeurs  $x_i$  dans List 1 et les effectifs  $n_i$  dans List 2.

On sélectionne **CALC** et **SET**, puis sur la ligne **1 Var X :**, on sélectionne List 1 ; sur la ligne **1 Var Freq :**, on sélectionne List 2 (ou 1 si la série est donnée sous forme d'une liste de valeurs).

On termine par **[EXE]** **1 VAR** et on cherche sur l'écran la médiane Med, le 1<sup>er</sup> quartile  $Q_1$  et le 3<sup>e</sup> quartile  $Q_3$ .

● Avec une calculatrice de **modèle TEXAS INSTRUMENTS** :

On tape **stats** et **[entrer]** pour sélectionner **1:Edit :** : on entre les valeurs  $x_i$  dans L1 et les effectifs  $n_i$  dans L2.



On tape **stats**, ► (**CALC**) et **SET**, puis **entrer** pour sélectionner **1: 1 - Var Stats** ; puis **2nde** **1**, **2nde** **2** (ou seulement **2nde** **1** si la série est donnée sous forme d'une liste de valeurs).

On termine par **entrer** et on cherche sur l'écran la médiane  $Med$ , le 1<sup>er</sup> quartile  $Q_1$  et le 3<sup>e</sup> quartile  $Q_3$ .

● Avec un tableur (logiciel **Excel**), on utilise les formules :

**=MEDIANE(... : ...)** pour obtenir la médiane, **=QUARTILE(... : ... ; 1)** pour obtenir le 1<sup>er</sup> quartile et **=QUARTILE(... : ... ; 3)** pour obtenir le 3<sup>e</sup> quartile.

#### 4 Détermination graphique

Pour déterminer graphiquement la médiane et les quartiles, on trace la courbe des fréquences cumulées.

- La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est la fréquence 0,5.
- Le 1<sup>er</sup> quartile est l'abscisse du point du polygone d'ordonnée 0,25.
- Le 3<sup>e</sup> quartile est l'abscisse du point du polygone d'ordonnée 0,75.

### Exercice résolu

#### ➔ Déterminer la médiane et les quartiles avec une calculatrice

##### Énoncé

Une enquête relative au lancement d'un nouveau produit et portant sur 150 clients a donné les résultats suivants.

|                                                  |    |    |    |    |    |    |
|--------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|
| Nombre de litres consommés<br>dans le mois $x_i$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| Nombre de clients $n_i$                          | 30 | 25 | 32 | 20 | 24 | 19 |

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice la médiane et les premier et troisième quartiles.
2. Interpréter par une phrase chacun de ces résultats

##### Corrigé commenté

1. La calculatrice affiche :  $Med = 3$ ,  $Q_1 = 2$  et  $Q_3 = 5$ .
2. Cela signifie, pour le mois considéré, qu'environ 50 % des clients ont consommé un nombre de litres inférieur ou égal à 3, environ 25 % des clients ont consommé un nombre de litres inférieur ou égal à 2 et environ 75 % des clients ont consommé un nombre de litres inférieur ou égal à 5.



## 4 Moyenne et écart-type

### 1 Définition et formule

- La **moyenne** est un nombre qui caractérise une « **position** » des valeurs du caractère d'une série statistique à caractère quantitatif.
- On note  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , les différentes valeurs prises par un caractère quantitatif ;  $n_1, n_2, \dots, n_p$ , les effectifs respectifs de ces valeurs et  $N$  l'effectif total.
- La **moyenne**  $\bar{x}$  est définie par 
$$\bar{x} = \frac{x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + \dots + x_p \times n_p}{N}$$

### 2 Utilisation de la calculatrice pour obtenir la moyenne

- Avec une calculatrice de **modèle CASIO** :

Dans le menu, on choisit **STAT** et on tape **EXE** : on entre les valeurs  $x_i$  dans List 1 et les effectifs  $n_i$  dans List 2.

On sélectionne **CALC** et **SET**, puis sur la ligne **1 Var X :**, on sélectionne **List 1** ; sur la ligne **1 Var Freq :**, on sélectionne **List 2** (ou 1 si la série est donnée sous forme d'une liste de valeurs).

On termine par **EXE** **1 VAR** et on cherche sur l'écran la moyenne  $\bar{x}$ .

- Avec une calculatrice de **modèle TEXAS INSTRUMENTS** :

On tape **stats** et **entrer** pour sélectionner **1:Edit** : on entre les valeurs  $x_i$  dans L1 et les effectifs  $n_i$  dans L2.

On tape **stats**, ► (**CALC**) et **SET**, puis **entrer** pour sélectionner **1: 1 - Var Stats :**, puis **2nde** **[1]**, **2nde** **[2]** (ou seulement **2nde** **[1]** si la série est donnée sous forme d'une liste de valeurs).

On termine par **entrer** et on cherche sur l'écran la moyenne  $\bar{x}$ .

**Attention** : si les valeurs sont regroupées en classes, de la forme  $[a_i; b_i[$ , on entre dans la liste 1 de la calculatrice le **centre des classes** avec la formule  $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ .

### 3 Utilisation du tableur pour obtenir la moyenne

Avec un tableur (logiciel **Excel**), on utilise la formule **= MOYENNE(... ; ...)**.

## Exercice résolu

### Déterminer la moyenne avec une calculatrice ou un tableur

#### Énoncé

Le tableau statistique suivant indique l'âge de 10 salariés d'une entreprise.

|     |           |           |           |           |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Âge | [25 ; 35[ | [35 ; 45[ | [45 ; 55[ | [55 ; 65] |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|

|                    |  |  |  |  |
|--------------------|--|--|--|--|
| Centre des classes |  |  |  |  |
|--------------------|--|--|--|--|

|                 |   |   |   |   |
|-----------------|---|---|---|---|
| Effectifs $n_i$ | 1 | 4 | 3 | 2 |
|-----------------|---|---|---|---|

1. Compléter le tableau précédent.
2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, la moyenne de cette série.
3. Déterminer, à l'aide d'un tableur, la moyenne de cette série.
4. Interpréter par une phrase ce résultat.

#### Corrigé commenté

1. Calcul du centre des classes.

|                    |                          |                          |                          |                          |
|--------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Âge                | [25 ; 35[                | [35 ; 45[                | [45 ; 55[                | [55 ; 65]                |
| Centre des classes | $\frac{25 + 35}{2} = 30$ | $\frac{35 + 45}{2} = 40$ | $\frac{45 + 55}{2} = 50$ | $\frac{55 + 65}{2} = 60$ |
| Effectifs $n_i$    | 1                        | 4                        | 3                        | 2                        |

**Indication :** on entre les centres des classes dans la liste 1 de la calculatrice et les effectifs dans la liste 2.

2. La calculatrice affiche :  $\bar{x} = 46$ .

**Indication :** on entre les centres des classes dans les cellules A1 à D1, puis on répète ces valeurs à l'aide de la poignée de remplissage pour obtenir les effectifs en colonnes ; on entre par exemple dans la cellule F1 la formule =MOYENNE(A1:D4)

3. On obtient la feuille de calcul suivante.

|   | A  | B  | C  | D  | E | F  |
|---|----|----|----|----|---|----|
| 1 | 30 | 40 | 50 | 60 |   | 46 |
| 2 |    | 40 | 50 | 60 |   |    |
| 3 |    | 40 | 50 |    |   |    |
| 4 |    | 40 |    |    |   |    |

4. Cela signifie que la moyenne des âges des salariés de l'entreprise est 46 ans.

## Méthode

## Les réflexes à avoir

- R1** Vérifier que la somme des fréquences est bien égale à 1.
- R2** Vérifier que la dernière fréquence cumulée croissante est bien égale à 1.
- R3** Vérifier que le dernier effectif cumulé croissant est bien égal à l'effectif total.
- R4** Choisir une unité adaptée pour chacun des axes : les graduations ne commencent pas obligatoirement à 0.  
Pour cela, repérer la plus petite valeur et la plus grande valeur prises par chacun des caractères.
- R5** Lorsque les classes ont la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont proportionnelles à leurs effectifs qui se lisent alors sur l'axe gradué en ordonnée.
- R6** Pour tracer la courbe des fréquences cumulées, on place dans un repère les points ayant pour abscisses les valeurs du caractère et pour ordonnées les fréquences cumulées croissantes. Le premier point à placer a pour abscisse 0 et pour ordonnée 0.  
On place ainsi les 6 points de coordonnées (0 ; 0), (1 ; 0,4), (2 ; 0,7), (3 ; 0,85), (4 ; 0,95) et (5 ; 1) dans un repère, puis on relie ces points à la règle.
- R7** Pour tracer la courbe des fréquences cumulées, on place dans un repère les points ayant pour abscisses les bornes de droite des classes et pour ordonnées les fréquences cumulées croissantes. Le premier point à placer a pour abscisse la borne de gauche de la 1<sup>re</sup> classe et pour ordonnée 0. On relie ces 6 points à la règle.
- R8** Les résultats de la médiane et des quartiles déterminés avec la calculatrice peuvent être différents de ceux trouvés avec un tableur (les méthodes de calculs ne sont pas les mêmes).
- R9** On reproduit le tableau statistique dans une feuille de calcul du tableur. Pour cela, on entre les valeurs du caractère dans les cellules A1 à E1, puis les effectifs en répétant ces valeurs à l'aide de la poignée de remplissage.
- R10** Lorsque les valeurs d'une série statistique sont regroupées en classes, on prend pour valeurs  $x_i$  les centres des classes.
- R11** La médiane, le 1<sup>er</sup> quartile et le 3<sup>e</sup> quartile sont les abscisses respectives des points de la courbe des fréquences cumulées dont les ordonnées sont les fréquences 0,5 ; 0,25 et 0,75.

**R12** Pour éviter d'entrer une à une toutes les valeurs du caractère dans une feuille de calcul d'un tableur : on entre la valeur 3 dans la cellule A1 et la valeur 4 dans la cellule B1 ; on sélectionne les cellules A1 et B1, puis on tire la poignée de remplissage jusqu'à atteindre la valeur 18 (cellule P1). Ne pas oublier ensuite de supprimer le contenu de la cellule I1, car la valeur 11 a pour effectif 0.

**R13** On entre les fréquences dans la liste 2 de la calculatrice.

**R14** Entrer les différentes valeurs dans la liste 1 de la calculatrice.

## Les pièges à éviter

- Le nombre réel  $b$  n'appartient pas à la classe  $[a ; b[$ , mais à la classe  $[b ; c[$ .
- Pour tracer la courbe des fréquences cumulées d'une série statistique à valeurs regroupées en classes, il faut joindre à la règle les points qui ont pour abscisses les bornes de droite des classes et pour ordonnées les fréquences cumulées croissantes. Ne pas oublier que le premier point à placer a pour abscisse la borne de gauche de la première classe et pour ordonnée 0.
- Pour déterminer des caractéristique des position (médiane et moyenne) ou de dispersion (quartiles) d'une série statistique à valeurs regroupées en classes, on prend comme valeurs  $x_i$  du caractère les centres des classes.
- Pour déterminer graphiquement la médiane et les quartiles, on utilise le tracé de la courbe des fréquences cumulées.
- Il ne faut pas oublier d'effacer les données statistiques précédentes avant d'entrer une nouvelle série dans les listes de la calculatrice.
  - Avec une calculatrice de **modèle CASIO** :  
Dans le menu, on choisit STAT et on tape **[EXE]**. On efface les données précédentes par **[▶]**, on choisit **DELA**, puis on tape **[F1] (YES)**.
  - Avec une calculatrice de **modèle TEXAS INSTRUMENTS** :  
On tape stats et **[entrer]**. On efface les données précédentes en plaçant le rectangle noir sur le nom d'une liste et en tapant **[suppr]** et **[entrer]**.

## Exercices

## Exercices d'application

## 1 Calculer une fréquence

➔ R1

➔ corrigé p. 195

Compléter le tableau suivant.

| Valeurs $x_i$ | Effectif $n_i$ | Fréquence $f_i$ |
|---------------|----------------|-----------------|
| 1             | 20             |                 |
| 2             | 50             |                 |
| 3             | 30             |                 |
| 4             | 100            |                 |
|               | $N =$          |                 |

## 2 Calculer une fréquence

➔ R1

➔ corrigé p. 195

Le tableau suivant indique le temps d'attente, en minutes, à un carrefour pour 122 véhicules.

| Classe    | Effectif $n_i$ | Fréquence $f_i$ arrondie à 0,001 |
|-----------|----------------|----------------------------------|
| [0 ; 5[   | 3              |                                  |
| [5 ; 10[  | 12             |                                  |
| [10 ; 15[ | 55             |                                  |
| [15 ; 20[ | 7              |                                  |
| [20 ; 25] | 45             |                                  |
| Total     | $N =$          |                                  |

## 3 Calculer des fréquences et des fréquences cumulées

➔ R1, R2

➔ corrigé p. 195

Compléter le tableau suivant.

| Classe  | Effectif $n_i$ | Fréquence $f_i$ | Fréquence cumulée croissante |
|---------|----------------|-----------------|------------------------------|
| [0 ; 2[ | 1              |                 |                              |
| [2 ; 6[ | 15             |                 |                              |



| Classe    | Effectif $n_i$ | Fréquence $f_i$ | Fréquence cumulée croissante |
|-----------|----------------|-----------------|------------------------------|
| [6 ; 12[  | 45             |                 |                              |
| [12 ; 30[ | 16             |                 |                              |
| [30 ; 60] | 3              |                 |                              |
|           | $N =$          |                 |                              |

#### 4 Calculer des effectifs cumulés

R3

corrigé p. 195

Compléter le tableau suivant.

| Classe      | Effectif $n_i$ | Effectif cumulé croissant |
|-------------|----------------|---------------------------|
| [0 ; 50[    | 8              |                           |
| [50 ; 60[   | 26             |                           |
| [60 ; 100[  | 30             |                           |
| [100 ; 110[ | 28             |                           |
| [110 ; 200] | 10             |                           |
|             | $N =$          |                           |

#### 5 Représenter une série statistique par un nuage de points

R4

corrigé p. 196

Le tableau suivant indique les notes sur 20 obtenues en français (variable  $y$ ) et en mathématiques (variable  $x$ ) par un groupe de 10 étudiants.

|                             |   |    |    |    |    |   |    |   |   |   |
|-----------------------------|---|----|----|----|----|---|----|---|---|---|
| Note de mathématiques $x_i$ | 8 | 10 | 12 | 11 | 11 | 9 | 12 | 5 | 4 | 8 |
| Note de français $y_i$      | 9 | 9  | 10 | 9  | 8  | 7 | 11 | 6 | 4 | 7 |

Représenter le nuage de points de la série statistique  $(x ; y)$ .

## 6 Représenter une série statistique par un histogramme

➔ R5 ➔ corrigé p. 196

Le relevé journalier des retraits, en euros, effectués par 500 clients de moins de 25 ans à un guichet de la poste a donné les résultats suivants.

| Classe des prix | Effectif $n_i$ |
|-----------------|----------------|
| [10 ; 20[       | 80             |
| [20 ; 30[       | 320            |
| [30 ; 40[       | 60             |
| [40 ; 50]       | 40             |

Représenter cette série statistique par un histogramme.

## 7 Représenter une série statistique par un histogramme

➔ R3 ➔ corrigé p. 196

Le relevé de la taille, en cm, de 20 élèves a fourni les résultats suivants :

172 ; 169 ; 177 ; 171 ; 179 ; 169 ; 176 ; 180 ; 170 ; 173 ; 169 ; 172 ; 175 ; 182 ; 174 ; 177 ; 181 ; 179 ; 170 ; 172.

1. Regrouper ces données en 5 classes d'amplitude 3 en complétant le tableau suivant.

| Classe des tailles | Effectif $n_i$ |
|--------------------|----------------|
| [169 ; 172[        |                |
| [     ; 175[       |                |
| [175 ;     [       |                |
| [     ;     [      |                |
| [181 ; 184]        |                |
| Total              |                |

2. Représenter cette série statistique par un histogramme.



**8 Tracer la courbe des fréquences cumulées**

R1, R2, R6



corrigé p. 197

Un sondage est réalisé auprès de 300 élèves sur le nombre de films vus en salles de cinéma dans une année. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

| Nombre de films $x_i$ | Nombre d'élèves $n_i$ | Fréquence $f_i$ | Fréquence cumulée croissante |
|-----------------------|-----------------------|-----------------|------------------------------|
| 1                     | 120                   |                 |                              |
| 2                     | 90                    |                 |                              |
| 3                     | 45                    |                 |                              |
| 4                     | 30                    |                 |                              |
| 5                     | 15                    |                 |                              |
| $N = 300$             |                       |                 |                              |

1. Compléter le tableau précédent.
2. Tracer la courbe des fréquences cumulées.

**9 Tracer la courbe des fréquences cumulées**

R1, R2, R7



corrigé p. 198

On relève la longueur, en mm, de 160 pièces métalliques sur une chaîne de production. Les résultats sont représentés dans le tableau suivant.

| Longueur (en mm) | Fréquence $f_i$ | Fréquence cumulée croissante |
|------------------|-----------------|------------------------------|
| $[10 ; 20[$      | 0,15            |                              |
| $[20 ; 30[$      | 0,30            |                              |
| $[30 ; 40[$      | 0,40            |                              |
| $[40 ; 50[$      | 0,10            |                              |
| $[50 ; 60]$      | 0,05            | 1                            |
|                  | 1               |                              |

1. Compléter le tableau précédent.
2. Tracer la courbe des fréquences cumulées.

**10 Déterminer la médiane et les quartiles**

➔ R8, R9

➔ corrigé p. 199

Le tableau statistique suivant présente la répartition des prix d'une marque de pulls dans différents points de vente.

| Prix (en euros) $x_i$    | 20 | 30 | 35 | 40 | 45 |
|--------------------------|----|----|----|----|----|
| Nombre de magasins $n_i$ | 1  | 7  | 11 | 8  | 4  |

Déterminer avec une calculatrice ou un tableur la médiane et les quartiles de cette série statistique. Interpréter par une phrase chacun des résultats obtenus.

**11 Déterminer la médiane et les quartiles**

➔ R8, R9, R10

➔ corrigé p. 199

Une enquête réalisée auprès d'un groupe de personnes indique leur durée d'écoute quotidienne de la radio.

| Durée (en min)            | [0 ; 30[ | [30 ; 60[ | [60 ; 90[ | [90 ; 150] |
|---------------------------|----------|-----------|-----------|------------|
| Centre des classes $x_i$  |          |           |           |            |
| Nombre de personnes $n_i$ | 64       | 100       | 164       | 86         |

1. Compléter le tableau précédent.
2. Déterminer avec une calculatrice la médiane et les quartiles de cette série statistique. Interpréter par une phrase chacun des résultats obtenus.

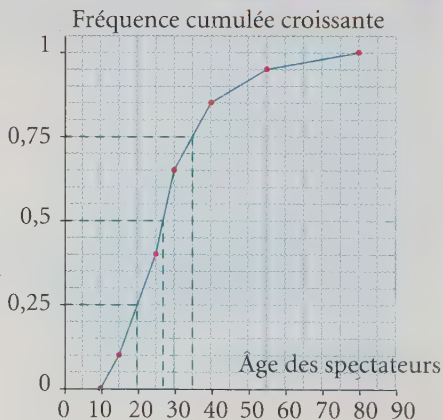
**12 Déterminer graphiquement la médiane et les quartiles**

➔ p11

➔ corrigé p. 200

La courbe des fréquences cumulées illustre la répartition des âges des spectateurs présents lors d'un tournoi de tennis.

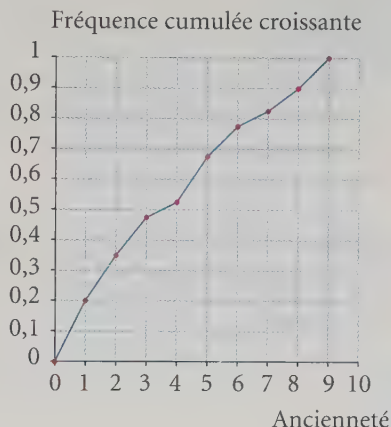
Lire la valeur de la médiane et des quartiles (indiquer leurs positions sur l'axe des abscisses).



### 13 Déterminer graphiquement la médiane et les quartiles

➔ R11 ➔ corrigé p. 200

La courbe des fréquences cumulées illustre la répartition de 40 salariés d'une entreprise en fonction de leur ancienneté (en années).



Placer les fréquences 0,25 ; 0,5 et 0,75 sur l'axe des ordonnées et en déduire une valeur approchée à 0,1 près de la médiane et des quartiles (indiquer leurs positions sur l'axe des abscisses).

### 14 Déterminer la moyenne

➔ R10 ➔ corrigé p. 201

On a demandé à un groupe de 60 lycéens le temps hebdomadaire passé devant la télévision. Les résultats en heures sont les suivants.

|                              |   |   |   |   |   |   |   |    |
|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Nombre d'heures devant la TV | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Nombre de lycéens            | 4 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 10 |

|                              |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Nombre d'heures devant la TV | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| Nombre de lycéens            | 0  | 5  | 2  | 10 | 4  | 5  | 3  | 5  |

1. Déterminer avec une calculatrice ou un tableur la moyenne de cette série statistique.
2. Interpréter par une phrase le résultat obtenu.

**15 Déterminer la moyenne**

→ R13 → corrigé p. 201

Le tableau des fréquences suivant indique le nombre de jours d'absences des élèves d'une classe de seconde un trimestre donné.

| Nombre de jours d'absences $x_i$ | 1    | 3    | 4   | 5    | 7    | 8    | 9   | 10   |
|----------------------------------|------|------|-----|------|------|------|-----|------|
| Fréquence $f_i$                  | 0,05 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,15 | 0,25 | 0,2 | 0,05 |

1. Déterminer avec une calculatrice la moyenne de cette série statistique.
2. Interpréter par une phrase le résultat obtenu.

**16 Déterminer la moyenne**

→ R10 → corrigé p. 201

Le tableau suivant présente le relevé du temps d'attente, en minutes, de 55 skieurs à un télésiège au pied d'une piste.

| Durée (en min)           | [1 ; 3[ | [3 ; 5[ | [5 ; 7[ | [7 ; 9[ | [9 ; 11[ | [11 ; 13[ | [13 ; 15] |
|--------------------------|---------|---------|---------|---------|----------|-----------|-----------|
| Centre des classes $x_i$ |         |         |         |         |          |           |           |
| Nombre de skieurs $n_i$  | 10      | 9       | 7       | 14      | 8        | 5         | 2         |

1. Compléter le tableau précédent.
2. Déterminer avec une calculatrice ou un tableur la moyenne de cette série statistique.
3. Interpréter par une phrase le résultat obtenu.

**Exercices d'entraînement****17 Caractéristiques d'une série statistique**

→ R14 → corrigé p. 202

Voici les notes d'évaluation de fin de trimestre en mathématiques obtenues par 25 élèves d'une classe de seconde : 14 ; 12 ; 14 ; 06 ; 06 ; 11 ; 07 ; 10 ; 08 ; 06 ; 02 ; 10 ; 09 ; 11 ; 06 ; 14 ; 11 ; 03 ; 02 ; 11 ; 11 ; 11 ; 03 ; 04 ; 11.

Déterminer avec une calculatrice ou un tableur la moyenne, la médiane et les quartiles de cette série statistique.

### 18 Comparer deux séries statistiques par le couple (médiane ; quartiles)

➔ R14 ➔ corrigé p. 202

Les tailles, en cm, de 26 filles et de 26 garçons d'un club sportif sont les suivantes.  
Filles :

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 | 171 | 172 | 175 | 180 |
| 166 | 168 | 165 | 166 | 168 | 166 | 167 | 168 | 169 | 171 |
| 172 | 166 | 170 | 169 | 166 | 170 |     |     |     |     |

Garçons :

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 170 | 172 | 175 | 172 | 178 | 181 | 179 | 183 | 182 | 187 |
| 181 | 179 | 185 | 177 | 183 | 188 | 192 | 183 | 192 | 186 |
| 188 | 191 | 190 | 188 | 185 | 188 |     |     |     |     |

1. Déterminer, avec une calculatrice ou un tableur, la médiane, le premier et le troisième quartile de la série des tailles des filles.
2. Déterminer, avec une calculatrice ou un tableur, la médiane, le premier et le troisième quartile de la série des tailles des garçons.
3. Comparer les deux séries statistiques.

### 19 Comparer deux séries statistiques à l'aide de la courbe des fréquences cumulées

➔ R1, R2, R11 ➔ corrigé p. 203

On interroge deux groupes de lycéens sur le montant de l'argent de poche dont ils disposent chaque mois. Les résultats sont les suivants.

Groupe 1 :

| Somme (en €)   | [0 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 15[ | [15 ; 20[ | [20 ; 25[ | [25 ; 30] |
|----------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Effectif $n_i$ | 8       | 20       | 15        | 11        | 6         | 10        |

Groupe 2 :

| Somme (en €)   | [0 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 15[ | [15 ; 20[ | [20 ; 25[ | [25 ; 30] |
|----------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Effectif $n_i$ | 5       | 14       | 22        | 16        | 6         | 7         |

1. Compléter les tableaux suivants.

Groupe 1 :

| Somme (en €)                          | [0 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 15[ | [15 ; 20[ | [20 ; 25[ | [25 ; 30] |
|---------------------------------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Effectif $n_i$                        | 8       | 20       | 15        | 11        | 6         | 10        |
| Fréquence $f_i$<br>arrondie à 0,01    |         |          |           |           |           |           |
| Fréquences<br>cumulées<br>croissantes |         |          |           |           |           |           |

Groupe 2 :

| Somme (en €)                          | [0 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 15[ | [15 ; 20[ | [20 ; 25[ | [25 ; 30] |
|---------------------------------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Effectif $n_i$                        | 5       | 14       | 22        | 16        | 6         | 7         |
| Fréquence $f_i$<br>arrondie à 0,01    |         |          |           |           |           |           |
| Fréquences<br>cumulées<br>croissantes |         |          |           |           |           |           |

2. Tracer, pour chaque groupe, la courbe des fréquences cumulées (échelle : 1 cm pour 2 € en abscisse et 1 cm pour 0,1 en ordonnée). Indiquer, sur l'axe des abscisses de chaque graphique, la position de la médiane et des quartiles.

3. Comparer les deux séries statistiques.



1

| Valeurs $x_i$ | Effectif $n_i$ | Fréquence $f_i$ |
|---------------|----------------|-----------------|
| 1             | 20             | 0,10            |
| 2             | 50             | 0,25            |
| 3             | 30             | 0,15            |
| 4             | 100            | 0,50            |
| $N = 200$     |                | 1               |

2

| Classe    | Effectif $n_i$ | Fréquence $f_i$ arrondie à 0,001 |
|-----------|----------------|----------------------------------|
| [0 ; 5[   | 3              | 0,025                            |
| [5 ; 10[  | 12             | 0,098                            |
| [10 ; 15[ | 55             | 0,451                            |
| [15 ; 20[ | 7              | 0,057                            |
| [20 ; 25] | 45             | 0,369                            |
| Total     | $N = 122$      | 1                                |

3

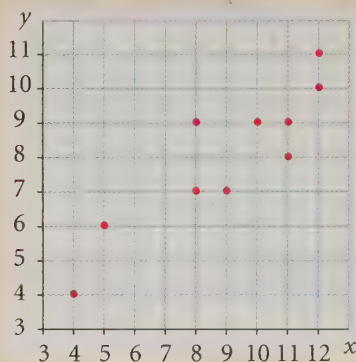
| Classe    | Effectif $n_i$ | Fréquence $f_i$ | Fréquence cumulée croissante |
|-----------|----------------|-----------------|------------------------------|
| [0 ; 2[   | 1              | 0,012 5         | 0,012 5                      |
| [2 ; 6[   | 15             | 0,187 5         | 0,2                          |
| [6 ; 12[  | 45             | 0,562 5         | 0,762 5                      |
| [12 ; 30[ | 16             | 0,2             | 0,962 5                      |
| [30 ; 60] | 3              | 0,037 5         | 1                            |
| $N = 80$  |                | 1               |                              |

4

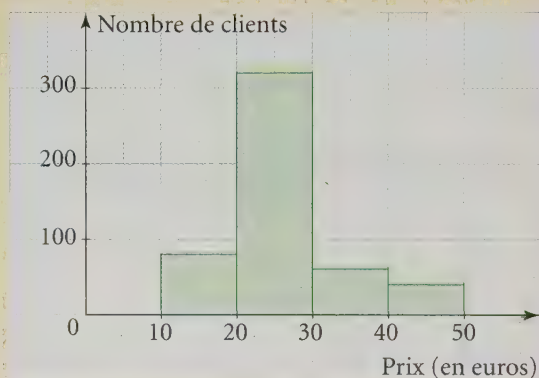
| Classe      | Effectif $n_i$ | Effectif cumulé croissant |
|-------------|----------------|---------------------------|
| [0 ; 50[    | 8              | 8                         |
| [50 ; 60[   | 26             | 34                        |
| [60 ; 100[  | 30             | 64                        |
| [100 ; 110[ | 28             | 92                        |
| [110 ; 200] | 10             | 102                       |
| $N = 102$   |                |                           |



## 5 Nuage de points :



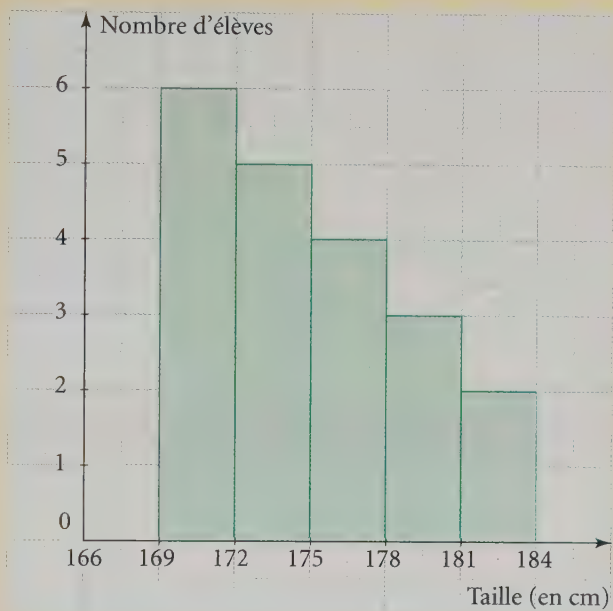
## 6 Histogramme.



## 7 1. Tableau statistique.

| Classe des tailles | Effectif $n_i$ |
|--------------------|----------------|
| [169 ; 172[        | 6              |
| [172 ; 175[        | 5              |
| [175 ; 178[        | 4              |
| [178 ; 181[        | 3              |
| [181 ; 184]        | 2              |
| Total              | 20             |

## 2. Histogramme.



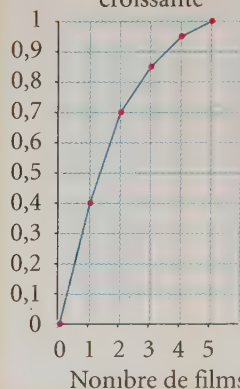
8

## 1. Tableau statistique.

| Nombre de films $x_i$ | Nombre d'élèves $n_i$ | Fréquence $f_i$ | Fréquence cumulée croissante |
|-----------------------|-----------------------|-----------------|------------------------------|
| 1                     | 120                   | 0,4             | 0,4                          |
| 2                     | 90                    | 0,3             | 0,7                          |
| 3                     | 45                    | 0,15            | 0,85                         |
| 4                     | 30                    | 0,1             | 0,95                         |
| 5                     | 15                    | 0,05            | 1                            |
| $N = 300$             |                       | 1               |                              |

## 2. Tracé de la courbe des fréquences cumulées.

Fréquence cumulée croissante

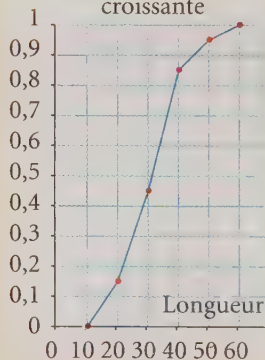


### 9 1. Tableau statistique.

| Longueur (en mm) | Fréquence $f_i$ | Fréquence cumulée croissante |
|------------------|-----------------|------------------------------|
| [10 ; 20[        | 0,15            | 0,15                         |
| [20 ; 30[        | 0,30            | 0,45                         |
| [30 ; 40[        | 0,40            | 0,85                         |
| [40 ; 50[        | 0,10            | 0,95                         |
| [50 ; 60]        | 0,05            | 1                            |
|                  | 1               |                              |

## 2. Tracé de la courbe des fréquences cumulées.

Fréquence cumulée croissante



**10** • La calculatrice affiche :  $\text{Med} = 35$ ,  $Q_1 = 30$  et  $Q_3 = 40$ .

• Avec un tableur : on entre, par exemple, la formule `= MEDIANE(A1:E11)` dans la cellule G1, la formule `= QUARTILE(A1:E11;1)` dans la cellule G2 et la formule `= QUARTILE(A1:E11;3)` dans la cellule G3.

On obtient la feuille de calcul suivante.

|    | A  | B  | C  | D  | E  | F | G    |
|----|----|----|----|----|----|---|------|
| 1  | 20 | 30 | 35 | 40 | 45 |   | 35   |
| 2  |    | 30 | 35 | 40 | 45 |   | 32,5 |
| 3  |    | 30 | 35 | 40 | 45 |   | 40   |
| 4  |    | 30 | 35 | 40 | 45 |   |      |
| 5  |    | 30 | 35 | 40 |    |   |      |
| 6  |    | 30 | 35 | 40 |    |   |      |
| 7  |    | 30 | 35 | 40 |    |   |      |
| 8  |    |    | 35 | 40 |    |   |      |
| 9  |    |    | 35 |    |    |   |      |
| 10 |    |    | 35 |    |    |   |      |
| 11 |    |    | 35 |    |    |   |      |

Cela signifie qu'environ 50 % des magasins vendent cette marque de pulls à un prix inférieur ou égal à 35 €, environ 25 % des magasins vendent cette marque de pulls à un prix inférieur ou égal à 32,50 € et environ 75 % des magasins vendent cette marque de pulls à un prix inférieur ou égal à 40 €.

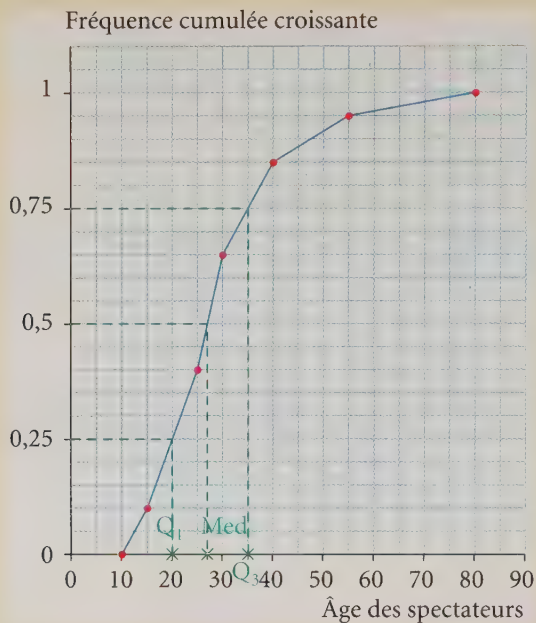
**11** 1. Tableau statistique :

| Durée (en min)            | [0 ; 30[ | [30 ; 60[ | [60 ; 90[ | [90 ; 150] |
|---------------------------|----------|-----------|-----------|------------|
| Centre des classes $x_i$  | 15       | 45        | 75        | 120        |
| Nombre de personnes $n_i$ | 64       | 100       | 164       | 86         |

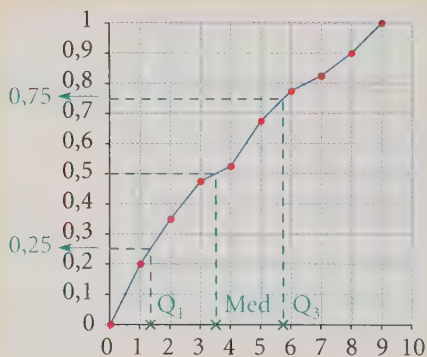
2. La calculatrice affiche :  $\text{Med} = 75$ ,  $Q_1 = 45$  et  $Q_3 = 75$ .

Cela signifie qu'environ 50 % des personnes écoutent chaque jour la radio au plus 1 h 15, environ 25 % des personnes écoutent chaque jour la radio au plus 45 minutes et environ 75 % des personnes écoutent chaque jour la radio au plus 1 h 15.

**12** On lit :  $\text{Med} = 27$ ,  $Q_1 = 20$  et  $Q_3 = 35$ .



**13** On lit :  $\text{Med} = 3,5$ ,  $Q_1 = 1,4$  et  $Q_3 = 5,7$ .



**14** 1. • La calculatrice affiche :  $\bar{x} = 11,55$ .

• Avec un tableur : on entre, par exemple, la formule  $= \text{MOYENNE}(A1:P10)$  dans la cellule R1. On obtient la feuille de calcul suivante.

| ◇  | A | B | C | D | E | F | G | H  | I | J  | K  | L  | M  | N  | O  | P  | Q | R     |
|----|---|---|---|---|---|---|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|---|-------|
| 1  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |   | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |   | 11,55 |
| 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |   |   | 10 |   | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |   |       |
| 3  | 3 |   |   | 6 | 7 |   |   | 10 |   | 12 |    | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |   |       |
| 4  | 3 |   |   |   |   |   |   | 10 |   | 12 |    | 14 | 15 | 16 |    | 18 |   |       |
| 5  |   |   |   |   |   |   |   | 10 |   | 12 |    | 14 |    | 16 |    | 18 |   |       |
| 6  |   |   |   |   |   |   |   | 10 |   |    |    | 14 |    |    |    |    |   |       |
| 7  |   |   |   |   |   |   |   | 10 |   |    |    | 14 |    |    |    |    |   |       |
| 8  |   |   |   |   |   |   |   | 10 |   |    |    | 14 |    |    |    |    |   |       |
| 9  |   |   |   |   |   |   |   | 10 |   |    |    | 14 |    |    |    |    |   |       |
| 10 |   |   |   |   |   |   |   | 10 |   |    |    | 14 |    |    |    |    |   |       |

2. Le temps hebdomadaire moyen passé devant la télévision est environ 11 h 30.

**15** 1. La calculatrice affiche :  $\bar{x} = 6,7$ .

2. Cela signifie que le nombre moyen de jours d'absences est environ 6,7.

**16** 1. Tableau statistique.

| Durée (en min)           | [1 ; 3[ | [3 ; 5[ | [5 ; 7[ | [7 ; 9[ | [9 ; 11[ | [11 ; 13[ | [13 ; 15] |
|--------------------------|---------|---------|---------|---------|----------|-----------|-----------|
| Centre des classes $x_i$ | 2       | 4       | 6       | 8       | 10       | 12        | 14        |
| Nombre de skieurs $n_i$  | 10      | 9       | 7       | 14      | 8        | 5         | 2         |

2. • La calculatrice affiche :  $\bar{x} \approx 6,9$ .

• Avec un tableur : on entre, par exemple, la formule

$= \text{MOYENNE}(A1:G14)$

dans la cellule I1. On obtient la feuille de calcul suivante.

3. Cela signifie que le temps d'attente moyen des skieurs est environ 6,9 minutes.

| ◇  | A | B | C | D | E  | F  | G  | H | I          |
|----|---|---|---|---|----|----|----|---|------------|
| 1  | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |   | 6,87272727 |
| 2  | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |   |            |
| 3  | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |    |   |            |
| 4  | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |    |   |            |
| 5  | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |    |   |            |
| 6  | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |    |    |   |            |
| 7  | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |    |    |   |            |
| 8  | 2 | 4 |   | 8 | 10 |    |    |   |            |
| 9  | 2 | 4 |   | 8 |    |    |    |   |            |
| 10 | 2 |   |   | 8 |    |    |    |   |            |
| 11 |   |   |   | 8 |    |    |    |   |            |
| 12 |   |   |   | 8 |    |    |    |   |            |
| 13 |   |   |   | 8 |    |    |    |   |            |
| 14 |   |   |   | 8 |    |    |    |   |            |



- 17** • La calculatrice affiche :  $\bar{x} = 8,52$ ,  $Med = 10$ ,  $Q_1 = 6$  et  $Q_3 = 11$ .  
 • Avec le tableur, on obtient la feuille de calcul suivante.

|    | A  | B | C                  | D    |
|----|----|---|--------------------|------|
| 1  | 14 |   | Moyenne            | 8,52 |
| 2  | 12 |   | Médiane            | 10   |
| 3  | 14 |   | Premier quartile   | 6    |
| 4  | 6  |   | Troisième quartile | 11   |
| 5  | 6  |   |                    |      |
| 6  | 11 |   |                    |      |
| 7  | 7  |   |                    |      |
| 8  | 10 |   |                    |      |
| 9  | 8  |   |                    |      |
| 10 | 6  |   |                    |      |
| 11 | 2  |   |                    |      |
| 12 | 10 |   |                    |      |
| 13 | 9  |   |                    |      |
| 14 | 11 |   |                    |      |
| 15 | 6  |   |                    |      |
| 16 | 14 |   |                    |      |
| 17 | 11 |   |                    |      |
| 18 | 3  |   |                    |      |
| 19 | 2  |   |                    |      |
| 20 | 11 |   |                    |      |
| 21 | 11 |   |                    |      |
| 22 | 11 |   |                    |      |
| 23 | 3  |   |                    |      |
| 24 | 4  |   |                    |      |
| 25 | 11 |   |                    |      |

- 18** 1. La calculatrice ou le tableur affiche :  $Med = 168$ ,  $Q_1 = 166$ ,  $Q_3 = 170$ .  
 2. La calculatrice ou le tableur affiche :  $Med = 183$ ,  $Q_1 = 179$ ,  $Q_3 = 188$ .  
 3. La taille médiane des filles est plus petite que celle des garçons.  
 L'écart entre le premier et le troisième quartile est plus petit pour les filles que pour les garçons, ce qui traduit une plus grande dispersion des tailles des garçons.



**19** 1. Tableaux statistiques.

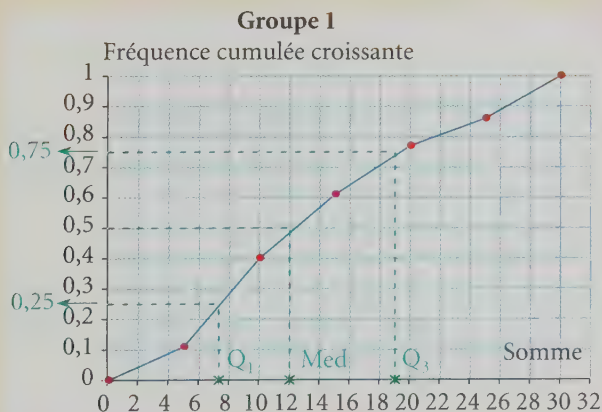
Groupe 1 :

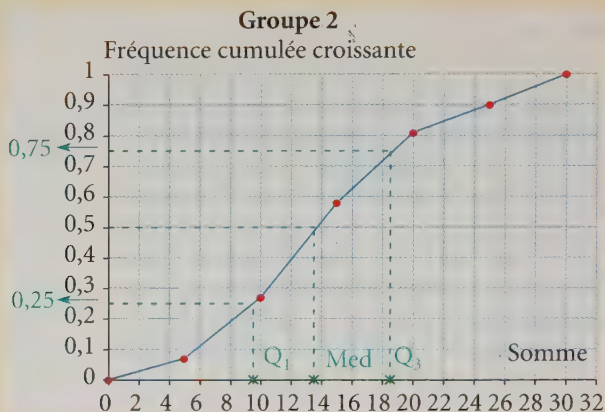
| Somme (en €)                       | [0 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 15[ | [15 ; 20[ | [20 ; 25[ | [25 ; 30] |
|------------------------------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Effectif $n_i$                     | 8       | 20       | 15        | 11        | 6         | 10        |
| Fréquence $f_i$<br>arrondie à 0,01 | 0,11    | 0,29     | 0,21      | 0,16      | 0,09      | 0,14      |
| Fréquences cumulées<br>croissantes | 0,11    | 0,4      | 0,61      | 0,77      | 0,86      | 1         |

Groupe 2 :

| Somme (en €)                       | [0 ; 5[ | [5 ; 10[ | [10 ; 15[ | [15 ; 20[ | [20 ; 25[ | [25 ; 30] |
|------------------------------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Effectif $n_i$                     | 5       | 14       | 22        | 16        | 6         | 7         |
| Fréquence $f_i$<br>arrondie à 0,01 | 0,07    | 0,20     | 0,31      | 0,23      | 0,09      | 0,1       |
| Fréquences cumulées<br>croissantes | 0,07    | 0,27     | 0,58      | 0,81      | 0,9       | 1         |

## 2. Courbes des fréquences cumulées.





3. Le montant médian de l'argent de poche du groupe 1 est inférieur à celui du groupe 2.

L'écart entre le premier et le troisième quartile est plus grand pour le groupe 1 que pour le groupe 2, ce qui traduit une plus grande dispersion des montants pour le groupe 1.

Chapitre **7**

# **Probabilités. Échantillonnage**

# 1 Expérience aléatoire et simulation

## 1 Expérience aléatoire et simulation

- On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne connaît pas le résultat à l'avance (par exemple, le lancer d'un dé).
- La réalisation pratique d'une expérience aléatoire n'est pas toujours possible. Aussi on effectue une **simulation** de cette expérience afin de fournir une série de résultats. On peut ainsi concevoir une expérience aléatoire à partir d'une série statistique.

## 2 Distribution des fréquences

Les résultats d'une expérience aléatoire peuvent se résumer par la donnée des fréquences de chacun des résultats possibles.

La répartition ainsi obtenue s'appelle la **distribution des fréquences**. On représente, en général, cette distribution par un diagramme en bâtons.

**Remarque** : la somme des fréquences des résultats possibles d'une expérience aléatoire est égale à 1.

## 3 Fluctuation d'échantillonnage

La fluctuation d'échantillonnage exprime le fait qu'entre plusieurs séries d'expériences identiques la distribution des fréquences varie.

## Exercice résolu



### Utiliser un diagramme en bâtons

#### Énoncé

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher. Ces boules sont numérotées 1-2-3-4-5. L'expérience consiste à tirer une boule, puis à la remettre dans l'urne. Cette expérience est effectuée plusieurs fois par 4 élèves d'une classe de Seconde.

Représenter pour chaque cas le diagramme en bâtons des fréquences et comparer les fréquences pour chaque échantillon.

| n°       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|
| Effectif | 3 | 2 | 4 | 0 | 6 |

Élève A : 15 tirages

| n°       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|
| Effectif | 4 | 6 | 3 | 4 | 3 |

Élève B : 20 tirages

|          |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|
| n°       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Effectif | 2 | 4 | 5 | 6 | 3 |

Élève C : 20 tirages

|          |    |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|----|
| n°       | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Effectif | 16 | 20 | 18 | 26 | 20 |

Élève D : 100 tirages

### Corrigé commenté

**Indication :** on utilise la formule  $f_i = \frac{\text{nombre de fois où la boule n°i sort}}{\text{nombre de tirages effectués}}$

|       |     |      |      |   |     |
|-------|-----|------|------|---|-----|
| $i$   | 1   | 2    | 3    | 4 | 5   |
| $f_i$ | 0,2 | 0,13 | 0,27 | 0 | 0,4 |

Élève A

|       |     |     |      |     |      |
|-------|-----|-----|------|-----|------|
| $i$   | 1   | 2   | 3    | 4   | 5    |
| $f_i$ | 0,2 | 0,3 | 0,15 | 0,2 | 0,15 |

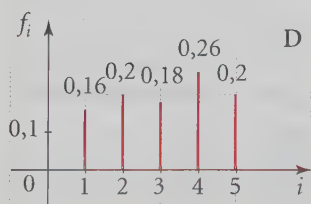
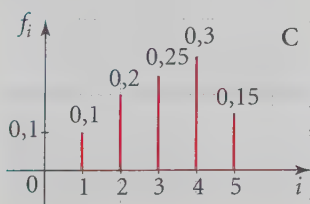
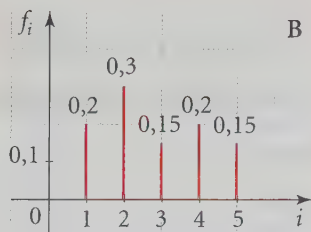
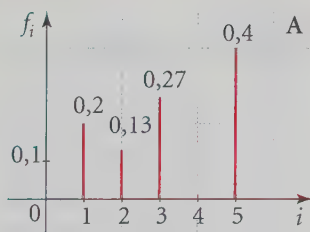
Élève B

|       |     |     |      |     |      |
|-------|-----|-----|------|-----|------|
| $i$   | 1   | 2   | 3    | 4   | 5    |
| $f_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,15 |

Élève C

|       |      |     |      |      |     |
|-------|------|-----|------|------|-----|
| $i$   | 1    | 2   | 3    | 4    | 5   |
| $f_i$ | 0,16 | 0,2 | 0,18 | 0,26 | 0,2 |

Élève D



Les fréquences obtenues pour chaque échantillon fluctuent.

C'est la variation des distributions des fréquences qui permet de comprendre la notion de fluctuation d'échantillonnage.

## 2 Modèle probabiliste

### 1 Fréquence d'un événement

- La fréquence d'un événement est égale à :

$$\frac{\text{nombre de fois où l'événement est réalisé}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$$

- Quand on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, les fréquences de réalisation d'un événement se stabilisent autour d'une certaine valeur. Cette valeur est la **probabilité** de l'événement considéré.

### 2 Fréquence statistique et probabilité

Si les probabilités tirent leur origine de tentatives de modélisation mathématique du hasard (aléa), elles sont surtout utiles pour essayer de généraliser les observations recueillies à partir de données statistiques, particulièrement lorsque l'étude exhaustive de la population considérée ne peut être réalisée.

À la fréquence d'un événement déterminée par l'étude de l'échantillon, on associera sa probabilité lors d'une expérience aléatoire.

## Exercice résolu

### → Appréhender une probabilité

#### Énoncé

L'expérience consiste à lancer deux fois de suite un jeton sur lequel sont inscrits 1 sur une face et 0 sur l'autre face. On fait ensuite la somme des chiffres obtenus sur la face visible après chaque lancer ; trois résultats sont possibles : 0 ; 1 et 2.

On appelle A l'événement : « la somme obtenue est 0 ».

L'expérience est répétée 200 fois. Les résultats sont les suivants :

|                                            |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |
|--------------------------------------------|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Nombre de fois où est répétée l'expérience | 10 | 20 | 30 | 50 | 80 | 100 | 130 | 150 | 180 | 200 |
| Nombre de fois où la somme est égale à 0   | 4  | 9  | 10 | 15 | 17 | 28  | 32  | 34  | 46  | 49  |

1. Déterminer, pour chaque série d'expériences, la fréquence de l'événement A.
2. Représenter graphiquement la fréquence d'apparition de l'événement A en fonction du nombre de fois où est répétée l'expérience.
3. Quelle est la probabilité de l'événement A ?

### Corrigé commenté

**Indication :** on utilise la formule :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de fois où est réalisée l'expérience}}$$

puis on détermine à partir du diagramme en bâtons la valeur vers laquelle se stabilise la fréquence de l'événement A.

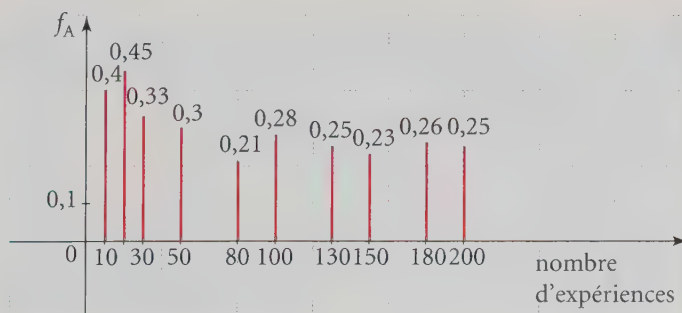
1.

Nombre de fois  
où est répétée  
l'expérience

10 20 30 50 80 100 130 150 180 200

$f_A$  0,4 0,45 0,33 0,3 0,21 0,28 0,25 0,23 0,26 0,25

2. Diagramme en bâtons :



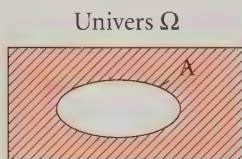
3. Lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois la fréquence de l'événement A se stabilise vers 0,25.

Il y a 25 % de chances d'obtenir une somme égale à 0 quand on lance deux fois de suite le jeton. Ainsi,  $p(A) = 0,25$ .

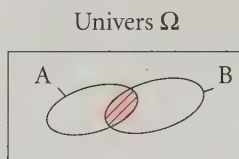


### 3 Représentations ensemblistes d'événements

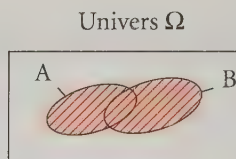
Les événements d'un univers peuvent se représenter à l'aide d'ensembles. Cette représentation permet de visualiser une situation et apporte un support pratique à la comptabilisation du nombre d'issues d'un événement.



$\bar{A}$   
(issues qui ne sont pas dans A).



$A \cap B$   
(issues qui sont dans A et B).



$A \cup B$   
(issues qui sont dans A ou B).

**Propriétés :**  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  et  $A \cup \bar{A} = \Omega$ .

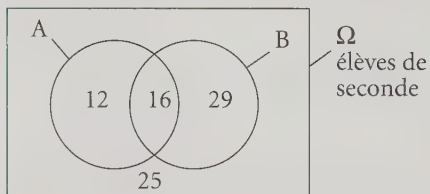
## Exercices résolus

### 1. Lire un diagramme

#### Énoncé

On a interrogé les 82 élèves de seconde d'un lycée sur leurs activités extrascolaires (musique et sport).

On modélise les réponses par le diagramme suivant :



A : ensemble des élèves qui pratiquent régulièrement un sport.  
B : ensemble des élèves qui jouent d'un instrument de musique.

1. Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent régulièrement un sport.
2. Déterminer le nombre d'élèves qui jouent d'un instrument de musique.
3. Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent régulièrement un sport ou qui jouent d'un instrument de musique.

## Corrigé commenté

**Indication :** on réfléchit à la signification du nombre 16 sur le diagramme.

1. 16 correspond au nombre d'élèves qui pratiquent régulièrement un sport et qui jouent d'un instrument de musique.

Il y a  $12 + 16 = 28$  élèves qui pratiquent régulièrement un sport.

2. Il y a  $16 + 29 = 45$  élèves qui jouent d'un instrument de musique.

3. Il y a  $12 + 16 + 29 = 57$  élèves qui pratiquent régulièrement un sport ou qui jouent d'un instrument de musique.



## 2. Modéliser une situation par un diagramme

### Énoncé

Un club de vacances propose deux activités nautiques à ses clients : voile et planche à voile.

Parmi les 250 vacanciers du mois de juillet, 75 font de la planche à voile, 120 font de la voile et 40 font les deux sports.

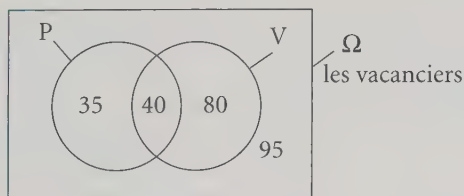
1. Représenter la situation par un diagramme.

2. Déterminer le nombre de vacanciers qui ne pratiquent aucune activité.

## Corrigé commenté

**Indication :** on place d'abord dans le diagramme le nombre de vacanciers qui pratiquent les deux activités.

1.



P : ensemble des vacanciers qui pratiquent la planche à voile.

V : ensemble des vacanciers qui pratiquent la voile.

- On place les 40 vacanciers qui pratiquent les deux activités.
  - $75 - 40 = 35$  vacanciers ne pratiquent que la planche à voile.
  - $120 - 40 = 80$  vacanciers ne pratiquent que la voile.
  - $250 - (35 + 40 + 80) = 95$  vacanciers ne pratiquent aucune activité.
2. 95 vacanciers ne pratiquent aucune activité.

## 4 Probabilité d'un événement

### 1 Vocabulaire

- L'univers est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire, il est noté  $\Omega$ .
- Les résultats possibles d'une d'expérience aléatoire sont appelés événements élémentaires.
- Un événement est un ensemble d'événements élémentaires.

### 2 Calcul des probabilités

- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- Il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être obtenus.

Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre d'événements élémentaires constituant A}}{\text{Nombre d'événements élémentaires de l'univers}}$$

## Exercices résolus

### ➔ 1. Déterminer une probabilité sur un tirage de cartes

#### Énoncé

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.

On définit les événements suivants :

A : « La carte tirée est un roi » ;

B : « La carte tirée est rouge » ;

C : « La carte tirée est un cœur ».

Calculer  $p(A)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$ .

#### Corrigé commenté

**Indication :** déterminer le nombre d'événements élémentaires constituant chaque événement, puis appliquer la formule d'équiprobabilité.

- On tire une carte « au hasard », on est donc dans une situation d'équiprobabilité.
- L'expérience aléatoire est constituée de 52 événements élémentaires (chacune des cartes du jeu).

• Il y a 4 rois dans le jeu ; l'événement A est constitué de ces 4 événements élémentaires.

$$\text{Donc } p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

• Il y a 26 cartes rouges ; l'événement B est constitué de ces 26 événements élémentaires, donc  $p(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ .

• Il y a 13 cœurs ; l'événement C est constitué de ces 13 événements élémentaires, donc  $p(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ .

## ➔ 2. Déterminer une probabilité sur un tirage de boules d'une urne

### Énoncé

Une urne contient six boules rouges numérotées de 1 à 6, quatre boules vertes numérotées de 1 à 4 et cinq boules blanches numérotées de 1 à 5.

On tire au hasard une boule de l'urne.

Déterminer la probabilité des événements suivants.

A : « La boule tirée est blanche ».

B : « La boule tirée est numérotée 5 ».

C : « La boule tirée à un numéro pair ».

### Corrigé commenté

**Indication :** déterminer le nombre total d'événements élémentaires, puis le nombre d'événements élémentaires de chaque événement ; appliquer alors la formule d'équiprobabilité.

• On tire « au hasard » une boule de l'urne, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.

• L'expérience aléatoire est constituée des 15 boules de l'urne.

• Il y a 5 boules blanches, donc  $p(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ .

Il y a 2 boules numérotées 5, donc  $p(B) = \frac{2}{15}$ .

Il y a 7 boules portant un numéro pair, donc  $p(C) = \frac{7}{15}$ .

## 5 Probabilité d'un événement : utilisation d'un tableau

● Pour calculer la probabilité d'un événement, il faut déterminer le nombre d'événements élémentaires de l'expérience aléatoire et le nombre d'événements élémentaires constituant l'événement.

Le tableau à double entrée peut être un outil pratique à ce dénombrement.

● **Exemple** : on lance deux fois de suite un dé à six faces ; on obtient ainsi un couple  $(a ; b)$  où :

- $a$  est le chiffre apparu avec le premier lancer,
- $b$  est le chiffre apparu avec le deuxième lancer.

On détermine les événements élémentaires de l'expérience aléatoire à l'aide d'un tableau.

| 2 <sup>e</sup><br>lancer | 1 <sup>er</sup><br>lancer | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       |
|--------------------------|---------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                          |                           |         |         |         |         |         |         |
| 1                        |                           | (1 ; 1) | (1 ; 2) | (1 ; 3) | (1 ; 4) | (1 ; 5) | (1 ; 6) |
| 2                        |                           | (2 ; 1) | (2 ; 2) | (2 ; 3) | (2 ; 4) | (2 ; 5) | (2 ; 6) |
| 3                        |                           | (3 ; 1) | (3 ; 2) | (3 ; 3) | (3 ; 4) | (3 ; 5) | (3 ; 6) |
| 4                        |                           | (4 ; 1) | (4 ; 2) | (4 ; 3) | (4 ; 4) | (4 ; 5) | (4 ; 6) |
| 5                        |                           | (5 ; 1) | (5 ; 2) | (5 ; 3) | (5 ; 4) | (5 ; 5) | (5 ; 6) |
| 6                        |                           | (6 ; 1) | (6 ; 2) | (6 ; 3) | (6 ; 4) | (6 ; 5) | (6 ; 6) |

L'expérience aléatoire comporte 36 événements élémentaires.

## Exercice résolu



### Utiliser un tableau

#### Énoncé

Dans une foire, un forain propose le jeu suivant.

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on fait tourner une roue portant les numéros 0, 1, 2, 3. On obtient ainsi un couple  $(a ; b)$  où :

- le nombre  $a$  est lu sur la face supérieure du dé,
- le nombre  $b$  est indiqué par la roue.

On suppose que tous les couples  $(a; b)$  ont la même probabilité d'être obtenus.

Le résultat du jeu est le nombre  $a \times b$ .

1. Déterminer les événements élémentaires de cette expérience aléatoire à l'aide d'un tableau.

2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

A : « Le résultat du jeu est un nombre qui appartient à l'intervalle  $[5; 9]$  ».

B : « Le résultat du jeu a été obtenu à partir d'un numéro impair sur la roue ».

[5; 18]

### Corrigé commenté

**Indication :** on crée un tableau à double entrée dans lequel on va pouvoir compter les événements élémentaires de l'expérience et les événements élémentaires constituant les événements A et B.

1.

| $b \quad a$ | 1   | 2   | 3   | 4    | 5    | 6    |
|-------------|-----|-----|-----|------|------|------|
| 0           | 0   | 0   | 0   | 0    | 0    | 0    |
| 1           | 1 ◦ | 2 ◦ | 3 ◦ | 4 ◦  | 5 ×  | 6 ×  |
| 2           | 2   | 4   | 6 × | 8 ×  | 10 × | 12 × |
| 3           | 3   | 6 × | 9 × | 12 × | 15 × | 18 × |

L'expérience aléatoire compte 24 événements élémentaires.

2. • On dénombre 11 événements élémentaires constituant A (marqués dans le tableau par un ×).

On a donc  $p(A) = \frac{11}{24}$ .

• On dénombre 12 événements élémentaires constituant B (marqués dans le tableau par un ◦).

On a donc  $p(B) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ .

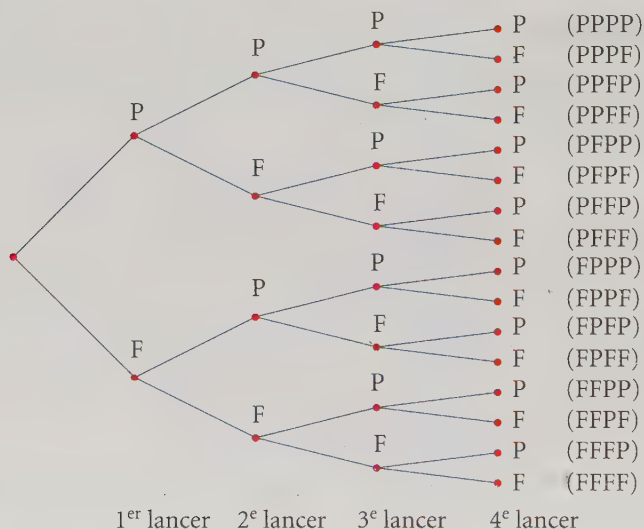


## 6 Probabilité d'un événement : utilisation d'un arbre

● Dans le cas d'une expérience aléatoire mettant en œuvre des choix successifs, le tableau et les diagrammes ne peuvent rendre compte de la situation.

Il faut utiliser un arbre pour dénombrer et déterminer les événements élémentaires de l'expérience aléatoire.

● **Exemple :** on lance 4 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On détermine les événements élémentaires à l'aide d'un arbre.



L'expérience compte 16 événements élémentaires.

## Exercice résolu

### Utiliser un arbre

#### Énoncé

Une urne contient deux boules indiscernables au toucher, numérotées 1 et 3. On effectue trois tirages successifs d'une boule avec remise et on obtient ainsi un nombre à trois chiffres en notant dans l'ordre les trois numéros obtenus.

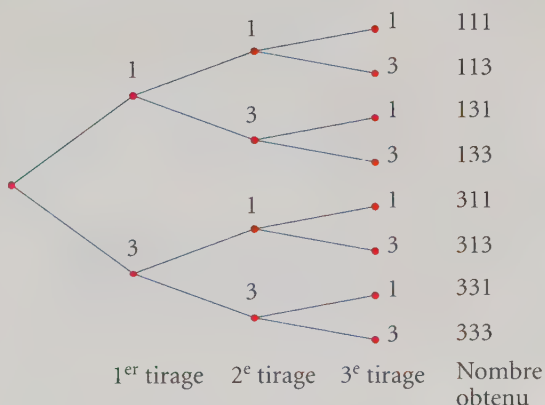


1. Déterminer les événements élémentaires de cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité des événements suivants.  
 A : « Le nombre obtenu est supérieur à 120 ».  
 B : « Le nombre obtenu est un multiple de 3 ».  
 C : « Le nombre obtenu est compris entre 132 et 315 ».

### Corrigé commenté

**Indication :** déterminer à l'aide d'un arbre les événements élémentaires de l'expérience aléatoire, puis compter les événements élémentaires constituant A et B.

1.



L'expérience aléatoire compte 8 événements élémentaires.

2. Six nombres sont supérieurs à 120 : 131, 133, 311, 313, 331 et 333.

Ainsi,  $p(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ .

Deux nombres sont des multiples de 3 : 111 et 333.

Ainsi,  $p(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ .

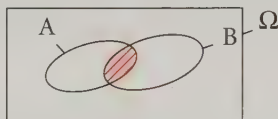
Trois nombres sont compris entre 132 et 315 : 133, 311 et 313.

Ainsi,  $p(C) = \frac{3}{8}$ .

## 7 Probabilité des événements $A \cap B$ et $A \cup B$

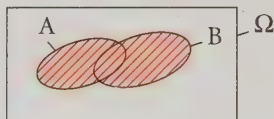
### 1 Événement $A \cap B$

L'événement  $A \cap B$  est constitué des issues qui sont à la fois dans A et dans B.



### 2 Événement $A \cup B$

L'événement  $A \cup B$  est constitué de toutes les issues qui sont dans l'un au moins des événements A, B.



### 3 Probabilité de $A \cap B$ et $A \cup B$

A et B étant deux événements d'une même expérience aléatoire, on a :

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B).$$

**Remarque :** Si  $A \cap B = \emptyset$  c'est-à-dire si A et B sont incompatibles, alors  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

En effet, si  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $p(A \cap B) = 0$ .

## Exercices résolus



### 1. Utiliser les formules

#### Énoncé

Une entreprise produit des pièces d'un même modèle. Ces pièces peuvent présenter deux types de défaut : le défaut A et le défaut B.

On admet que :

- 6 % des pièces présentent le défaut A (événement A),
- 4 % des pièces présentent le défaut B (événement B),
- 2,5 % des pièces présentent les deux défauts.

On choisit une pièce au hasard dans la production de l'entreprise.

Déterminer la probabilité de l'événement E : « la pièce choisie présente l'un au moins des deux défauts ».

**Corrigé commenté**

**Indication :** exprimer E en fonction de A et B.

D'après l'énoncé, on a :  $p(A) = \frac{6}{100} = 0,06$  et  $p(B) = \frac{4}{100} = 0,04$

2,5 % des pièces présentent les deux défauts, donc  $p(A \cap B) = \frac{2,5}{100} = 0,025$ .

L'événement E correspond à  $A \cup B$ , soit  $E = A \cup B$ .

Or,  $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$ , donc

$$p(A \cup B) = p(E) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

$$p(E) = 0,06 + 0,04 - 0,025 = 0,075.$$

➔ **2. Utiliser les formules**

**Énoncé**

Une étude sur le comportement de lycéens face au tabac a donné les résultats suivants.

|                      | Garçons | Filles | Total |
|----------------------|---------|--------|-------|
| Fumeurs réguliers    | 80      | 80     | 160   |
| Fumeurs occasionnels | 40      | 40     | 80    |
| Non fumeurs          | 80      | 60     | 140   |
| Total                | 200     | 180    | 380   |

On choisit au hasard un lycéen.

1. Calculer la probabilité des événements suivants.

A : « Le lycéen est non fumeur », B : « Le lycéen est une fille ».

2. Définir les événements  $A \cap B$  et  $A \cup B$ , puis calculer leur probabilité.

**Corrigé commenté**

1. Parmi les 380 lycéens, 140 sont non fumeurs, donc  $p(A) = \frac{140}{380} = \frac{7}{19}$ .

Parmi les 380 lycéens, 180 sont des filles, donc  $p(B) = \frac{180}{380} = \frac{9}{19}$ .

2. •  $A \cap B$  : « le lycéen est une fille qui ne fume pas ».

$$p(A \cap B) = \frac{60}{380} = \frac{3}{19}.$$

•  $A \cup B$  : « le lycéen ne fume pas ou est une fille ».

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{7}{19} + \frac{9}{19} - \frac{3}{19} = \frac{13}{19}.$$

## 8 Notion d'échantillon – Simulation

### 1 Échantillon

- Un échantillon de taille  $n$  est l'ensemble des résultats obtenus en répétant  $n$  fois une même expérience aléatoire.
- Lorsque l'on observe la fréquence d'un résultat possible d'une expérience aléatoire sur plusieurs échantillons de même taille, on s'aperçoit qu'elle fluctue selon les échantillons.

### 2 Simulations

On effectue des simulations sur calculatrice ou sur tableur afin de produire des données et de créer des échantillons parfaitement aléatoires.

$=\text{ALEA}()$  permet d'obtenir un nombre décimal aléatoire dans l'intervalle  $[0 ; 1[$ .

$=n * \text{ALEA}()$  permet d'obtenir un nombre décimal aléatoire dans l'intervalle  $[0 ; n[$ .

$=\text{ENT}(n * \text{ALEA}())$  permet d'obtenir un nombre entier aléatoire dans l'intervalle  $[0 ; n[$ .

$=\text{ENT}(\text{ALEA}() + P)$ , où  $P$  est un nombre réel de l'intervalle  $[0 ; 1]$ , permet d'obtenir le nombre 1 avec la probabilité  $P$ .

## Exercices résolus

### ➔ 1. Créer un échantillon sur tableur

#### Énoncé

Pour chacun des cas suivants, déterminer la nature et la taille de l'échantillon créé à l'aide d'un tableur.

1. On entre la formule  $=\text{ENT}(6 * \text{ALEA}() + 1)$  dans la cellule A1 ;  
on recopie cette formule jusqu'à la cellule A30.
2. On entre la formule  $=\text{ENT}(2 * \text{ALEA}())$  dans la cellule A1 ;  
on recopie cette formule jusqu'à la cellule A50.
3. On entre la formule  $=3 * \text{ALEA}() + 2$  dans la cellule A1 ;  
on recopie cette formule jusqu'à la cellule A15.
4. On entre la formule  $=\text{ENT}(\text{ALEA}() + 0,8)$  dans la cellule A1 ;  
on recopie cette formule jusqu'à la cellule A10.

### Corrigé commenté

**Indication :** procéder pas à pas en déterminant ce que l'on obtient avec la formule ALEA(), puis  $6 * \text{ALEA}()$ , puis  $6 * \text{ALEA}() + 1$  et enfin  $\text{ENT}(6 * \text{ALEA}() + 1)$ .

1. La formule  $=\text{ENT}(6 * \text{ALEA}() + 1)$  permet d'obtenir un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 6.

On crée donc un échantillon aléatoire de taille 30 de nombres entiers compris entre 1 et 6.

2. La formule  $=\text{ENT}(2 * \text{ALEA}())$  permet d'obtenir un nombre entier aléatoire égal à 0 ou 1.

On crée donc un échantillon aléatoire de taille 50 composé des nombres entiers 0 ou 1.

3. La formule  $=3 * \text{ALEA}() + 2$  permet d'obtenir un nombre décimal aléatoire compris dans l'intervalle  $[2 ; 5[$ .

On crée donc un échantillon aléatoire de taille 15 de nombres décimaux compris dans l'intervalle  $[2 ; 5[$ .

4. La formule  $=\text{ENT}(\text{ALEA}() + 0,8)$  permet d'obtenir les nombres 0 ou 1, 1 étant obtenu avec une probabilité de 0,8 et 0 avec une probabilité de 0,2 ; l'échantillon ainsi créé est de taille 10.

## 2. Simuler un échantillon aléatoire

### Énoncé

Le taux de réussite au bac est de 82 %.

Quelle formule doit-on entrer sur tableur pour simuler un échantillon de 60 lycéens passant le bac ?

### Corrigé commenté

**Indication :** déterminer la formule qui permet d'obtenir 0 ou 1, le 1 étant obtenu avec une probabilité de 0,82.

On entre dans la cellule A1 la formule  $=\text{ENT}(\text{ALEA}() + 0,82)$  ;

on recopie cette formule jusqu'à la cellule A60.

## 9 Intervalle de fluctuation

On considère une population dont la fréquence  $p$  relative à la valeur d'un caractère est connue.

On extrait un échantillon de cette population de taille  $n \geq 25$  ; on montre que la fréquence observée  $f$  sur l'échantillon est une bonne approximation de  $p$ .

$f$  appartient à l'intervalle  $\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  dans au moins 95 % des cas.

**Conséquences :** • La probabilité que la fréquence de l'échantillon soit dans l'intervalle  $\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  étant au moins égale à 95 % permet de juger de la pertinence de certaines observations.

• De façon analogue, pour un risque de 5 %, on a une très bonne approximation de l'intervalle de fluctuation de  $p$  par l'intervalle  $\left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ .

## Exercices résolus

### → 1. Déterminer un intervalle de fluctuation

#### Énoncé

Un sondage est effectué auprès de 1 200 personnes ; 630 déclarent vouloir voter pour M. Ikse.

Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de la population qui est prête à voter pour M. Ikse. Interpréter le résultat.

#### Corrigé commenté

**Indication :** appliquer la formule de l'intervalle de fluctuation après avoir calculé  $f$ .

La fréquence  $f$  observée sur l'échantillon est égale à  $\frac{630}{1\,200}$ , soit 0,525.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$\left[ 0,525 - \frac{1}{\sqrt{630}} ; 0,525 + \frac{1}{\sqrt{630}} \right] \approx [0,49 ; 0,56].$$

Ce qui signifie qu'il y a 95 % de chances pour que l'intervalle  $[0,49 ; 0,56]$  contienne le pourcentage de gens prêts à voter pour M. Ikse.

## → 2. Exploiter un résultat d'échantillonnage

### Énoncé

Le pourcentage de réussite au bac dans une région de France est 78,5 %. On s'intéresse aux 150 élèves d'un lycée de cette région : 108 ont obtenu leur bac.

1. Calculer la fréquence observée  $f$  de réussite au bac pour ce lycée.
2. Calculer l'intervalle de fluctuation pour l'échantillon des 150 élèves.
3. L'écart observé est-il significatif ?

### Corrigé commenté

**Indication :** déterminer si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation.

1. La fréquence observée est :  $f = \frac{108}{150} = 0,72$ . Ainsi 72 % des élèves du lycée ont obtenu leur bac.
2. L'intervalle de fluctuation est :

$$\left[ 0,785 - \frac{1}{\sqrt{150}} ; 0,785 + \frac{1}{\sqrt{150}} \right] \approx [0,70 ; 0,87].$$

Il y a donc 95 % de chances pour que la fréquence observée appartienne à l'intervalle  $[0,70 ; 0,87]$ .

3.  $f = 0,72$  et  $0,72 \in [0,70 ; 0,87]$  ; l'écart n'est donc pas significatif.



## Méthode

## Les réflexes à avoir

- R1** Les diagrammes en bâtons permettent de visualiser les variations des distributions et ainsi, de comprendre et interpréter la notion de fluctuation d'échantillonnage.
- R2** Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, les fréquences d'apparition de chaque issue se stabilisent vers une certaine valeur à laquelle on associe la probabilité de l'issue.
- R3** Un modèle probabiliste ne permet pas de prévoir les résultats d'une expérience, mais il permet de mathématiser une situation. On peut alors obtenir des informations pour une expérience réalisée un grand nombre de fois.
- R4** Le contraire d'un événement  $A$  est (non  $A$ ), il est noté  $\bar{A}$ .
- R5** Le « et » en probabilité renvoie à la notion d'intersection ; le « au moins » renvoie à la notion d'union.
- R6** Les diagrammes, les tableaux ou les arbres sont des moyens de visualiser la situation proposée par l'énoncé.
- R7** Deux événements dont l'intersection est vide sont dit *incompatibles*.
- R8** Pour calculer la probabilité de la réunion de deux événements  $A$  et  $B$ , il faut utiliser la formule  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  ; elle permet d'éviter les pièges liés à la notion inclusive de l'union.
- R9** Les formules données sont adaptées à la version excel 2003 ; la version 2007 propose souvent d'autres possibilités. Par exemple pour obtenir un nombre entier aléatoire compris entre 1 et  $n$ , on utilise la formule `=ENT( $n$ *ALEA()+1)` ; avec excel 2007, on entre la formule `=ALEA.ENTRE.BORNES(1; $n$ )`.
- R10** La formule `=ENT(ALEA()+ $p$ )` où  $p$  est un nombre réel de l'intervalle  $[0 ; 1]$  permet d'obtenir le nombre 0 avec la probabilité  $1 - p$  et le nombre 1 avec la probabilité  $p$ . Dans une simulation, on peut alors créer des échantillons d'une population dont la fréquence  $p$  d'une valeur d'un caractère est connue.
- R11** La fréquence  $f$  observée est une bonne approximation de la fréquence théorique de la population si la taille de l'échantillon est assez grande. La probabilité que la fréquence d'un échantillon de taille  $n$  appartienne à l'intervalle de fluctuation est supérieure ou égale à 95 %.

## Les pièges à éviter

L'union en mathématiques est *inclusif* contrairement au langage de tous les jours où il est *exclusif* : penser au choix « fromage ou dessert » imposé dans un menu, on ne peut pas manger les deux !

La notion de contraire est une notion assez subtile : par exemple pour un lancer de deux pièces de monnaie, le contraire de « obtenir deux piles » n'est pas « obtenir deux faces ».

De façon analogue, le contraire de « il est petit », n'est pas « il est grand ».

Si pour un échantillon de 900 personnes, 468 déclarent vouloir voter pour M. Ikse, alors il faut dire qu'il y a 95 % de chances pour que l'intervalle

$\left[ \frac{468}{900} - \frac{1}{\sqrt{900}} ; \frac{468}{900} + \frac{1}{\sqrt{900}} \right] \approx [0,49 ; 0,55]$  contienne le pourcentage de

gens prêts à voter pour M. Ikse, et non pas que  $\frac{468}{900} = 0,52 = 52\%$  de gens sont prêts à voter pour M. Ikse !

## Exercices

## Exercices d'application

## 1 Distribution des fréquences

➔ R1, R2 ➔ corrigé p. 234

Jean jette 20 fois un dé : le numéro 1 apparaît deux fois, le numéro 2 quatre fois, le numéro 3 six fois, le numéro 4 zéro fois, les numéros 5 et 6 quatre fois chacun.

Pauline jette 30 fois ce même dé : le numéro 1 apparaît huit fois ainsi que le numéro 4, le numéro 2 et le numéro 3 quatre fois chacun, le numéro 5 une fois et le numéro 6 cinq fois.

Isabelle jette 60 fois ce dé et obtient : les numéros 1 et 3 dans 18 % des cas, le 2 dans 20 %, le 4 dans 21 %, le 5 dans 11 % et le 6 dans 12 % des cas.

1. Regrouper ces résultats dans trois tableaux distincts.
2. Déterminer pour chacune des trois séries la distribution des fréquences à l'aide d'un diagramme en bâtons. Conclure.

## 2 Modèle probabiliste

➔ R3 ➔ corrigé p. 235

On lance simultanément un jeton dont les faces sont marquées 2 et 5 et un dé ordinaire dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On fait ensuite la somme des chiffres obtenus sur leur face visible.

On appelle B l'événement : « la somme est un multiple de 3 ».

L'expérience est répétée 300 fois. Les résultats sont les suivants :

| Nombre d'expériences                            | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |
|-------------------------------------------------|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Nombre de fois où la somme est un multiple de 3 | 8  | 10 | 12 | 17 | 19 | 39  | 48  | 64  | 83  | 100 |

Déterminer la probabilité de l'événement B.

Interpréter le résultat en pourcentage de chances d'obtenir un multiple de 3.

## 3 Fréquences et probabilités

➔ R2 ➔ corrigé p. 235

On considère un dé ordinaire dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Ce dé est abîmé et la probabilité d'apparition de chaque numéro n'est plus  $\frac{1}{6}$ .

Plusieurs personnes lancent ce dé et notent le numéro apparu sur sa face supérieure, on obtient alors un échantillon de 1 000 lancers.

| Numéro               | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Nombre d'apparitions | 210 | 120 | 180 | 220 | 150 | 120 |

- Déterminer la fréquence d'apparition de chaque numéro.
- On prend pour probabilité de chaque face la fréquence obtenue.  
On appelle A l'événement « obtenir un multiple de 2 » et B l'événement « obtenir un chiffre inférieur à 3 ».  
Calculer  $P(A)$  et  $P(B)$ .

#### 4 Fréquences et probabilités

➔ R2 ➔ corrigé p. 236

Une urne contient 4 boules indiscernables au toucher, numérotées de 0 à 3.  
On prend au hasard deux boules de l'urne, on note le produit des numéros sortis, puis on les remet dans l'urne.  
On simule à l'aide d'un tableur un échantillon de taille 1 000 de cette expérience.  
Les fréquences obtenues pour chacune des issues sont données dans le tableau suivant.

| Issues<br>(produit des numéros)  | 0    | 2    | 3    | 6    |
|----------------------------------|------|------|------|------|
| Fréquences<br>(arrondies à 0,01) | 0,50 | 0,17 | 0,16 | 0,17 |

On prend pour probabilité de chaque issue sa fréquence.  
On appelle A l'événement « obtenir l'issue 0 ou l'issue 3 » et B l'événement « obtenir une issue inférieure à 4 »  
Calculer  $P(A)$  et  $P(B)$ .

#### 5 Événement contraire : vocabulaire

➔ R4 ➔ corrigé p. 236

À la sortie de la chaîne de fabrication une machine est susceptible de présenter deux types de défaut : le défaut A, le défaut B. On choisit une machine au hasard.

- Quel est le contraire de l'événement « La machine n'a aucun défaut ».
- Quel est le contraire de l'événement « La machine a le défaut A et le défaut B ».

## 6 Vocabulaire des événements

→ R4, R5 → corrigé p. 236

Une pièce détachée peut présenter deux types de défaut : électrique, mécanique.

On en choisit une au hasard dans un lot ; on considère les événements :

E : « La pièce a le défaut électrique » ; M : « La pièce a le défaut mécanique ».

Exprimer en fonction de E et de M les événements suivants :

1. « La pièce n'a pas le défaut mécanique ».
2. « La pièce a le défaut électrique et le défaut mécanique ».
3. « La pièce a au moins un des deux défauts ».
4. « La pièce n'a aucun des deux défauts ».

## 7 Représentation ensembliste d'événements

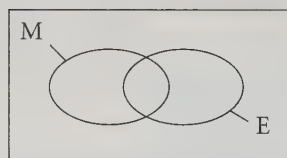
→ R6 → corrigé p. 236

La situation familiale des 80 enseignants d'un lycée est la suivante :

40 sont mariés, 24 ont des enfants et 18 sont mariés et ont des enfants.

On choisit au hasard un enseignant de ce lycée.

1. Compléter le diagramme suivant.



Enseignants  
du lycée

M : ensemble des enseignants mariés.

E : ensemble des enseignants  
ayant des enfants.

2. Calculer la probabilité des événements suivants.

A : « L'enseignant est marié ou a un enfant ».

B : « L'enseignant n'est pas marié et n'a pas d'enfants ».

Quelle remarque peut-on faire ?

## 8 Probabilité d'événements

→ corrigé p. 237

Une urne contient 12 boules de couleurs différentes, indiscernables au toucher.

Parmi les boules : deux sont bleues et valent 2 points ; quatre sont rouges et valent un point et six sont vertes et valent 3 points.

On tire au hasard une boule de l'urne.

Calculer la probabilité des événements suivants.

A : « la boule tirée est rouge ».

B : « on obtient au plus 2 points ».

C : « la boule tirée est bleue ou vaut 3 points ».

D : « la boule tirée est rouge ou vaut plus de 2 points ».

## 9 Probabilité d'événements

➔ R4 ➔ corrigé p. 237

Un dé fantaisiste comporte 7 faces numérotées de 1 à 7. Chaque face a la même probabilité d'être obtenue. On lance le dé et on lit le chiffre indiqué sur la face supérieure.

On considère les événements suivants.

A : « on obtient un chiffre inférieur à 4 » ;

B : « on obtient un chiffre impair » ;

C : « on obtient un chiffre pair ».

Calculer la probabilité des événements suivants :

A, B, C,  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap \bar{C}$ .

## 10 Utilisation d'un tableau

➔ R6, R8 ➔ corrigé p. 238

Dans un établissement scolaire de 2 000 élèves, on sait que :

- 40 % sont des filles ;
- 15 % des filles sont internes ;
- 60 % des élèves, parmi lesquels 760 garçons, sont externes ;
- la moitié des demi-pensionnaires sont des filles.

1. Compléter le tableau suivant.

|         | Internes | Demi-pensionnaires | Externes | Total |
|---------|----------|--------------------|----------|-------|
| Filles  |          |                    |          |       |
| Garçons |          |                    |          |       |
| Total   |          |                    |          | 2 000 |

2. On choisit, au hasard, un élève pour représenter l'établissement. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « L'élève choisi est une fille » ;

B : « L'élève choisi est interne » ;

C : « L'élève choisi est une fille interne » ;

D : « L'élève choisi est interne ou est une fille ».



**11 Utilisation d'un arbre**

➔ R6 ➔ corrigé p. 239

Benoît sait que le congélateur de la cuisine renferme cinq bâtons de crème glacée, de parfums différents (vanille, chocolat, pistache, café, praliné).

Gourmand et insomniaque, il décide de se lever en pleine nuit, sans allumer la lumière, et de prendre, à tâtons et successivement, deux bâtons dans le congélateur. Tous les choix sont équiprobables.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de couples différents de bâtons qu'il peut ainsi obtenir.

2. Ses parfums préférés sont vanille et café.

Calculer la probabilité qu'il obtienne :

- a) le bâton à la vanille, puis le bâton au café ;
- b) les bâtons de ses parfums préférés dans un ordre quelconque ;
- c) un seul de ses parfums préférés ;
- d) aucun de ses parfums préférés.

**12 Intersection et réunion**

➔ R7 ➔ corrigé p. 240

On considère deux événements A et B tels que  $P(A) = 0,6$  et  $P(A \cup B) = 0,84$ . Calculer  $P(B)$  sachant que  $A \cap B = \emptyset$ .

**13 Intersection et réunion**

➔ R8 ➔ corrigé p. 240

On considère deux événements A et B tels que  $P(A) = 0,35$ ,  $P(B) = 0,75$  et  $P(A \cup B) = 0,8$ .

Calculer  $P(A \cap B)$ .

**14 Intersection et réunion**

➔ R6, R8 ➔ corrigé p. 240

Lors de la dernière journée d'un championnat international d'athlétisme, les athlètes sont encouragés par 75 000 spectateurs.

70 % des spectateurs sont français et 30 % sont étrangers.

De plus, 85 % des spectateurs étrangers et 25 % des spectateurs français possèdent une licence d'athlétisme.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un tableau.

2. On choisit une personne au hasard parmi les spectateurs.

On note les événements suivants :



- F : « le spectateur est français » ;
- L : « le spectateur possède une licence d'athlétisme ».

- Calculer  $P(F)$  et  $P(L)$ .
- Calculer  $P(F \cap L)$  ; en déduire  $P(F \cup L)$ .

## 15 Simulation d'échantillons

➔ R9 ➔ corrigé p. 241

Déterminer la nature et la taille de l'échantillon créé avec un tableur pour chacun des cas suivants.

- On entre la formule = ENT(3\*ALEA()) dans la cellule A1, puis on recopie cette formule jusqu'à la cellule A10.
- On entre la formule = ENT(5\*ALEA()+1) dans la cellule A1, puis on recopie cette formule jusqu'à la cellule A30.

## 16 Simulation d'échantillons

➔ R9 ➔ corrigé p. 241

Pour chaque cas, expliquer la démarche qui permet d'obtenir sur tableur l'échantillon demandé.

- Échantillon de 20 nombres entiers aléatoires compris entre 0 et 10 (inclus).
- Échantillon de 10 nombres entiers aléatoires compris entre 1 et 10 (inclus).
- Échantillon de 100 nombres entiers aléatoires compris entre 10 et 20 (inclus).

## 17 Simulation d'un échantillon sur une population connue

➔ R10 ➔ corrigé p. 241

- Quelle formule doit-on entrer, sur un tableur, pour simuler un échantillon de fumeurs de taille 100 dans une population contenant 30 % de fumeurs ?
- On estime à 12 % le nombre d'adolescents jouant d'un instrument de musique. Quelle formule doit-on entrer, sur un tableur, pour simuler un échantillon de 100 lycéens jouant d'un instrument de musique ?

## 18 Intervalle de fluctuation

➔ R11 ➔ corrigé p. 241

Une enquête a montré que 72 % des étudiants sont non fumeurs.

On prélève, dans cette population, des échantillons de taille 200.

Calculer l'intervalle de fluctuation pour lequel la fréquence  $f$  d'étudiants non fumeurs est observée avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

**19 Intervalle de fluctuation**

→ R11

→ corrigé p. 241

Un centre de formation affirme que 75 % de ses apprentis trouvent un emploi dans les trois mois.

On interroge au hasard 80 personnes ayant suivi la formation ; 52 ont trouvé un emploi dans les trois mois.

1. Calculer la fréquence observée  $f$  d'apprentis ayant trouvé un emploi dans les trois mois.
2. Calculer l'intervalle de fluctuation pour l'échantillon de 80 personnes.
3. L'écart observé est-il significatif ?

**Exercices d'entraînement****20 Calcul de probabilités avec un tableur**

→ corrigé p. 242

Le personnel d'une entreprise est constitué de 180 femmes et de 200 hommes. Afin d'appliquer la loi anti-tabac, on réalise une étude dans l'entreprise, sur le comportement des employés face au tabac.

Les résultats de l'étude indiquent que :

- parmi les hommes, la moitié fume régulièrement et 20 % sont des fumeurs occasionnels ;
- une femme sur trois fume régulièrement ;
- autant d'hommes que de femmes fument occasionnellement.

1. Représenter la situation à l'aide d'un tableau.
2. On choisit au hasard une personne de l'entreprise. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.
  - a) Calculer la probabilité des événements suivants.  
 A : « la personne choisie est un fumeur occasionnel ».  
 B : « la personne choisie est un homme ».
  - b) Définir, à l'aide d'une phrase, l'événement  $A \cap B$ , puis calculer sa probabilité.
  - c) Définir, à l'aide d'une phrase, l'événement  $A \cup B$ , puis calculer sa probabilité.

**21 Calcul de probabilités avec un arbre**

→ corrigé p. 243

Un couple a le projet d'avoir quatre enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront à chaque fois autant de chance d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux.

1. En utilisant un arbre, déterminer toutes les issues.

2. Calculer la probabilité des événements suivants.

A : « ils auront quatre garçons ».

B : « ils auront quatre enfants de même sexe ».

C : « ils auront au plus deux garçons ».

D : « ils auront au moins une fille ».

## 22 Calcul de probabilités avec un diagramme

➔ corrigé p. 243

Une entreprise compte 300 salariés. Parmi les salariés, 20 % se sont fait vacciner contre la grippe.

Durant l'hiver, 10 % du personnel a eu la grippe et parmi eux, 20 % étaient vaccinés.

1. Faire un diagramme illustrant la situation.

2. On choisit au hasard une personne de l'entreprise ; toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.

a) Calculer la probabilité des événements.

A : « la personne choisie a eu la grippe ».

B : « la personne choisie était vaccinée ».

b) Calculer  $P(A \cap B)$  et  $P(A \cup B)$ .

## 23 Simulation d'échantillons

➔ corrigé p. 244

Une urne contient 30 % de boules rouges et 70 % de boules blanches.

On prélève au hasard une boule de l'urne, chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

On simule le tirage d'une boule de l'urne sur tableur en entrant dans la cellule A1 la formule =ENT(ALEA()+0,3) ; on recopie ensuite cette formule jusqu'à la cellule A100.

1. Quels sont les résultats possibles que l'on obtient dans la cellule A1 ?

2. Quelle est la probabilité de voir afficher la valeur 1 dans la cellule A1 ?

3. Quelle est la taille de l'échantillon obtenu ?

4. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule A102 pour calculer la fréquence  $f$  des boules rouges observées sur cet échantillon ?

5. Que se passe-t-il lorsque l'on appuie sur la touche F9 du clavier ?

6. a) Simuler, en appuyant 30 fois sur la touche F9, le prélèvement de 30 échantillons de taille 100 ; noter au fur et à mesure les différents résultats obtenus dans la cellule A102.

b) Calculer le pourcentage d'échantillons dont la fréquence  $f$  appartient à l'intervalle  $[0,2 ; 0,5]$ .

**1** 1.

| n°         | 1   | 2   | 3   | 4 | 5   | 6   |
|------------|-----|-----|-----|---|-----|-----|
| Effectifs  | 2   | 4   | 6   | 0 | 4   | 4   |
| Fréquences | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0 | 0,2 | 0,2 |

Jean

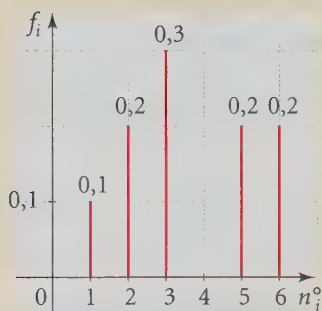
| n°         | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|------------|------|------|------|------|------|------|
| Effectifs  | 8    | 4    | 4    | 8    | 1    | 5    |
| Fréquences | 0,27 | 0,13 | 0,13 | 0,27 | 0,03 | 0,17 |

Pauline

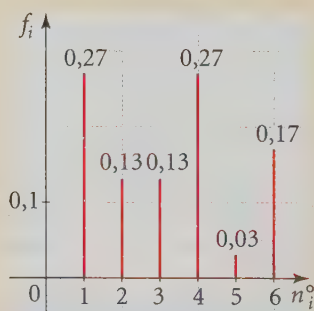
| n°         | 1    | 2   | 3    | 4    | 5    | 6    |
|------------|------|-----|------|------|------|------|
| Fréquences | 0,18 | 0,2 | 0,18 | 0,21 | 0,11 | 0,12 |

Isabelle

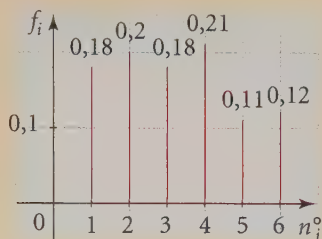
N'oubliez pas que : fréquence =  $\frac{\text{pourcentage}}{100}$ .



Jean



Pauline



Isabelle

Conclusion : les fréquences obtenues pour chaque personne fluctuent.

2

| Nombre d'expériences                      | 10  | 20  | 30  | 40    | 50   | 100  | 150  | 200  | 250  | 300  |
|-------------------------------------------|-----|-----|-----|-------|------|------|------|------|------|------|
| Fréquence d'apparition d'un multiple de 3 | 0,8 | 0,5 | 0,4 | 0,425 | 0,38 | 0,39 | 0,32 | 0,32 | 0,33 | 0,33 |

Lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois la fréquence de l'événement B se stabilise autour de **0,33**.

La probabilité de l'événement B est égale à 0,33. **Il y a 33 % de chances d'obtenir un multiple de 3 lors d'une expérience.**

3 1.

| Numéro               | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|
| Nombre d'apparitions | 210  | 120  | 180  | 220  | 150  | 120  |
| Fréquence            | 0,21 | 0,12 | 0,18 | 0,22 | 0,15 | 0,12 |

2. La fréquence d'apparition de la face 1 est  $p_1 = 0,21$ ,

la fréquence d'apparition de la face 2 est  $p_2 = 0,12$ ,

la fréquence d'apparition de la face 3 est  $p_3 = 0,18$ ,

la fréquence d'apparition de la face 4 est  $p_4 = 0,22$ ,

la fréquence d'apparition de la face 5 est  $p_5 = 0,15$ ,

la fréquence d'apparition de la face 6 est  $p_6 = 0,12$ .

• La fréquence d'apparition d'un multiple de 2 est donc :

$$p_2 + p_4 + p_6 = 0,12 + 0,22 + 0,12 = 0,46.$$

Ainsi,  $P(A) = 0,46$ .

• La fréquence d'apparition d'un chiffre inférieur à 3 est donc :

$$p_1 + p_2 = 0,21 + 0,12 = 0,33.$$

Ainsi,  $P(B) = 0,33$ .

**4** • La probabilité de l'événement A est la somme des fréquences des issues 0 et 3, soit  $P(A) = 0,50 + 0,16 = 0,66$ .

• La probabilité de l'événement B est la somme des fréquences des issues 0, 2 et 3, soit  $P(B) = 0,50 + 0,17 + 0,16 = 0,83$ .

**5** 1. Le contraire de l'événement « la machine n'a aucun défaut » est : « la machine a au moins un défaut ».

Le contraire de « n'avoir aucun défaut » est « avoir 1 seul défaut ou les 2 défauts ».

2. Le contraire de l'événement « la machine a le défaut A et le défaut B » est : « la machine a au plus un défaut ».

Le contraire « d'avoir les 2 défauts » est « d'avoir 0 défaut ou 1 seul défaut ».

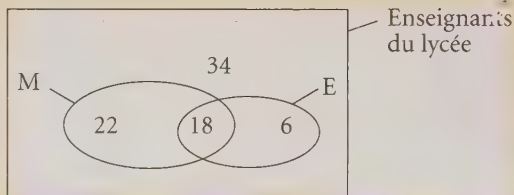
**6** 1. « La pièce n'a pas le défaut mécanique » est l'événement  $\bar{M}$ .

2. « La pièce a le défaut électrique et le défaut mécanique » est l'événement  $E \cap M$ .

3. « La pièce a au moins un des deux défauts » est l'événement  $E \cup M$ .

4. « La pièce n'a aucun des deux défauts » est l'événement  $\bar{E} \cap \bar{M}$  ou encore  $\bar{E \cup M}$ .

**7** 1.



2. • Sur les 80 enseignants, 46 sont mariés ou ont un enfant, donc

$$P(A) = \frac{46}{80} = 0,575.$$

• Sur les 80 enseignants, 34 ne sont pas mariés et n'ont pas d'enfants, donc

$$P(B) = \frac{34}{80} = 0,425.$$

• A et B sont des événements contraires.



- 8** • Sur les 12 boules, 4 sont rouges, donc  $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .
- Sur les 12 boules, 6 boules (4 sont rouges et 2 bleues) valent 1 ou 2 points,  $P(B) = \frac{6}{12} = 0,5$ .
- Sur les 12 boules, 8 boules sont bleues ou valent 3 points,  $P(C) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ .
- Sur les 12 boules, 6 boules sont rouges ou valent au plus 2 points,  $P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ .

- 9** •  $P(A) = \frac{3}{7}$ .
- Il y a 4 chiffres impairs, donc  $P(B) = \frac{4}{7}$ .
- Il y a 3 chiffres pairs, donc  $P(C) = \frac{3}{7}$ .
- $A \cap B$ : « on obtient un chiffre impair inférieur à 4 », soit les chiffres 1 et 3, donc  $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$ .
- $A \cap C$ : « on obtient un chiffre pair inférieur à 4 », soit le chiffre 2, donc  $P(A \cap C) = \frac{1}{7}$ .
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{4}{7}$ .
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{3}{7}$ .
- $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = \frac{4}{7}$ .
- $\bar{A} \cap \bar{B}$ : « on n'obtient ni un chiffre inférieur à 4, ni un chiffre impair », soit les chiffres 4 et 6, donc  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{2}{7}$ .
- $P(\overline{A \cap C}) = 1 - P(A \cap C) = \frac{6}{7}$ .



**10** 1. Données de l'énoncé :

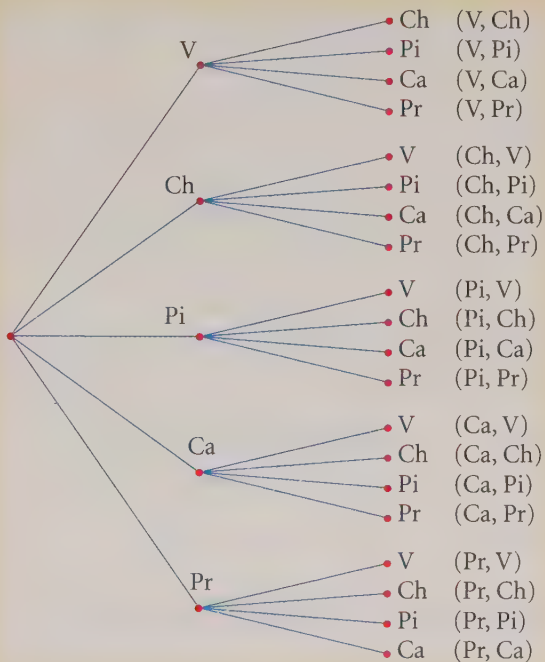
- Parmi les 2 000 élèves, 40 % sont des filles, soit  $2\,000 \times \frac{40}{100} = 800$  filles.
- Parmi les filles, 15 % sont internes, soit  $800 \times \frac{15}{100} = 120$  filles internes.
- 60 % des élèves sont externes, soit  $2\,000 \times \frac{60}{100} = 1\,200$  externes.
- 760 garçons sont externes.
- La moitié des demi-pensionnaires sont des filles, soit le même nombre de garçons demi-pensionnaires.

On peut alors compléter le tableau :

|         | Internes                      | Demi-pensionnaires      | Externes             | Total                   |
|---------|-------------------------------|-------------------------|----------------------|-------------------------|
| Filles  | 120                           | $800 - 120 - 440 = 240$ | $1\,200 - 760 = 440$ | 800                     |
| Garçons | $320 - 120 = 200$             | 240                     | 760                  | $2\,000 - 800 = 1\,200$ |
| Total   | $2\,000 - 480 - 1\,200 = 320$ | 480                     | 1 200                | 2 000                   |

2. • Parmi les 2 000 élèves, 800 sont des filles, donc  $P(A) = \frac{800}{2\,000} = 0,4$ .
- Parmi les 2 000 élèves, 320 sont internes, donc  $P(B) = \frac{320}{2\,000} = 0,16$ .
- Parmi les 2 000 élèves, 120 sont des filles internes, donc  $P(C) = \frac{120}{2\,000} = 0,06$ .
- On remarque que  $D = A \cup B$ ,  
 donc  $P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .  
 Or,  $C = A \cap B$ , donc  $P(D) = 0,4 + 0,16 - 0,06 = 0,5$ .

# 11 1. Arbre des possibilités.



On peut obtenir 20 couples possibles.

**2. a)** Sur les 20 couples possibles, 1 correspond au couple (vanille, café), donc :

$$p = \frac{1}{20} = 0,05.$$

**b)** Sur les 20 couples possibles, 2 correspondent au cas demandé (vanille, café) et

$$(café, vanille), \text{ donc } p = \frac{2}{20} = 0,1.$$

**c)** Sur les 20 couples possibles, 12 contiennent 1 seul des parfums préférés de Benoît,

$$\text{donc } p = \frac{12}{20} = 0,6.$$

**d)** Sur les 20 couples possibles, 7 ne contiennent aucun de ses parfums préférés, donc

$$p = \frac{7}{20} = 0,35.$$

**12** On sait que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , car  $A \cap B = \emptyset$ .

On a donc  $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,84 - 0,6 = 0,24$ .

**13** On sait que  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ .

On a donc  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,35 + 0,75 - 0,8 = 0,3$ .

**14** 1. • Parmi les 75 000 spectateurs, 70 % sont français, soit

$$75\,000 \times \frac{70}{100} = 52\,500 \text{ spectateurs français et}$$

$$75\,000 - 52\,500 = 22\,500 \text{ spectateurs étrangers.}$$

• 85 % des spectateurs étrangers possèdent une licence, soit

$$22\,500 \times \frac{85}{100} = 19\,125 \text{ personnes.}$$

• 25 % des spectateurs français possèdent une licence, soit

$$52\,500 \times \frac{25}{100} = 13\,125 \text{ personnes.}$$

On peut alors modéliser la situation dans un tableau :

|               | Spectateurs français          | Spectateurs étrangers        | Total                         |
|---------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| Licenciés     | 13 125                        | 19 125                       | $13\,125 + 19\,125 = 32\,250$ |
| Non licenciés | $52\,500 - 13\,125 = 39\,375$ | $22\,500 - 19\,125 = 3\,375$ | $39\,375 + 3\,375 = 42\,750$  |
| Total         | 52 500                        | 22 500                       | 75 000                        |

2. a) • Sur les 75 000 spectateurs, 52 500 sont français, donc  $P(F) = \frac{52\,500}{75\,000} = 0,7$ .

• Sur les 75 000 spectateurs, 32 250 possèdent une licence, donc

$$P(L) = \frac{32\,250}{75\,000} = 0,43.$$

b) Sur les 75 000 spectateurs, 13 125 sont français et possèdent une licence, donc

$$P(F \cap L) = \frac{13\,125}{75\,000} = 0,175.$$

On a  $P(F \cup L) = P(F) + P(L) - P(F \cap L)$ , donc  $P(F \cup L) = 0,7 + 0,43 - 0,175 = 0,955$ .

**15** 1. On obtient un échantillon de taille 10 de nombres entiers aléatoires compris entre 0 et 2 inclus.

2. On obtient un échantillon de taille 30 de nombres entiers aléatoires compris entre 1 et 5 inclus.

**16** 1. On entre dans la cellule A1 la formule  $\text{=ENT}(11*\text{ALEA}())$  ; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A20.

2. On entre dans la cellule A1 la formule  $\text{=ENT}(10*\text{ALEA}()+1)$  ; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A10.

3. On entre dans la cellule A1 la formule  $\text{=ENT}(11*\text{ALEA}()+10)$  ; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A100.

**17** 1. On entre la formule  $\text{=ENT}(\text{ALEA}()+0,3)$  dans la cellule A1 ; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A100.

1 s'affiche si la personne est fumeur, 0 sinon.

2. On entre la formule  $\text{=ENT}(\text{ALEA}()+0,12)$  dans la cellule A1 ; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A100.

1 s'affiche si la personne joue d'un instrument, 0 sinon.

**18** L'intervalle de fluctuation est  $\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ , soit

$$\left[ 0,72 - \frac{1}{\sqrt{200}} ; 0,72 + \frac{1}{\sqrt{200}} \right] \approx [0,65 ; 0,79].$$

Ce qui signifie que la probabilité pour que cet intervalle contienne le pourcentage de non fumeurs de l'échantillon est supérieure ou égale à 95 %.

**19** 1. La fréquence observée  $f$  d'apprentis ayant trouvé un emploi dans les 3 mois est  $f = \frac{52}{80} = 0,65$ .

2. L'intervalle de fluctuation est  $\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ , soit

$$\left[ 0,75 - \frac{1}{\sqrt{80}} ; 0,75 + \frac{1}{\sqrt{80}} \right] \approx [0,64 ; 0,86].$$

Ce qui signifie que la probabilité pour que cet intervalle contienne le pourcentage d'apprentis de l'échantillon ayant trouvé un emploi dans les 3 mois est supérieure ou égale à 95 %.

3.  $f$  appartient à l'intervalle de fluctuation, il n'y a donc pas de différence significative au niveau 95 %.

**20** 1. • L'entreprise compte 180 femmes et 200 hommes.

• La moitié des hommes fument régulièrement, soit  $\frac{200}{2} = 100$  hommes ;

20 % des hommes fument occasionnellement, soit  $180 \times \frac{20}{100} = 36$  hommes.

• Une femme sur trois fume régulièrement, soit  $\frac{180}{3} = 60$  femmes.

• Autant d'hommes que de femmes fument occasionnellement, soit 36 femmes.

• On peut alors modéliser la situation dans un tableau.

|        | Ne fument pas         | Fument occasionnellement | Fument régulièrement | Total             |
|--------|-----------------------|--------------------------|----------------------|-------------------|
| Hommes | $200 - 100 - 36 = 64$ | 36                       | 100                  | 200               |
| Femmes | $180 - 36 - 60 = 84$  | 36                       | 60                   | 180               |
| Total  | $64 + 84 = 148$       | $36 + 36 = 72$           | $100 + 60 = 160$     | $200 + 180 = 380$ |

2. a) • Parmi les 380 personnes, 72 sont fumeurs occasionnels ; donc

$$P(A) = \frac{72}{380} = \frac{18}{95} \approx 0,19.$$

• Parmi les 380 personnes, 200 sont des hommes ; donc  $P(B) = \frac{200}{380} = \frac{10}{19} \approx 0,53$ .

b)  $A \cap B$  : « La personne choisie est un homme fumeur occasionnel ».

On compte 36 hommes qui fument occasionnellement,

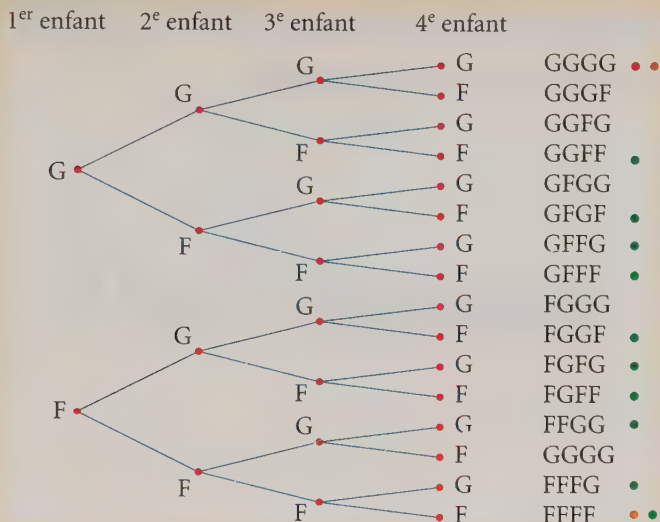
$$\text{donc } P(A \cap B) = \frac{36}{380} = \frac{9}{95} \approx 0,09.$$

c)  $A \cup B$  : « La personne choisie est un homme ou est fumeur occasionnel ».

On sait que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ,

$$\text{donc } P(A \cup B) = \frac{72}{380} + \frac{200}{380} - \frac{36}{380} = \frac{236}{380} = \frac{59}{95} \approx 0,62.$$

# 21 1. Arbre des possibilités.



On compte 16 issues possibles.

2. ● Sur les 16 issues possibles, un cas est favorable à l'événement A, donc

$$P(A) = \frac{1}{16} = 0,0625 \text{ (point rouge de l'arbre).}$$

● Sur les 16 issues possibles, deux cas sont favorables à l'événement B, donc

$$P(B) = \frac{2}{16} = 0,125 \text{ (points oranges de l'arbre).}$$

● Sur les 16 issues possibles, dix cas sont favorables à l'événement C, donc

$$P(C) = \frac{10}{16} = 0,625 \text{ (points verts de l'arbre).}$$

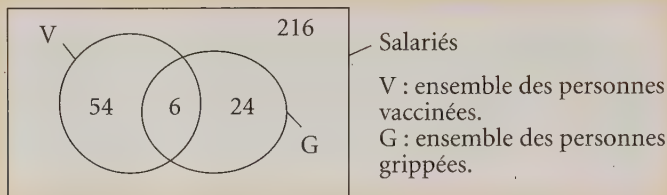
● Sur les 16 issues possibles, quinze cas sont favorables à l'événement D, donc

$$P(D) = \frac{15}{16} = 0,9375 \text{ (toutes les issues sauf GGGG).}$$

# 22 1. ● Parmi les 300 salariés, 20 % se sont fait vacciner, soit

$$300 \times \frac{20}{100} = 60 \text{ personnes.}$$

- 10 % du personnel a eu la grippe, soit  $300 \times \frac{10}{100} = 30$  personnes ;  
parmi ces 30 personnes, 20 % étaient vaccinées, soit  $30 \times \frac{20}{100} = 6$  personnes.
- On peut illustrer la situation avec un diagramme.



2. a) • Sur les 300 salariés, 30 ont eu la grippe, donc  $P(A) = \frac{30}{300} = 0,1$ .

• Sur les 300 salariés, 60 étaient vaccinés, donc  $P(B) = \frac{60}{300} = 0,2$ .

b) • Sur les 300 salariés, 6 ont eu la grippe et étaient vaccinés, donc

$$P(A \cap B) = \frac{6}{300} = 0,02.$$

• On sait que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , donc

$$P(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,02 = 0,28.$$

**23** 1. La formule =ALEA() permet d'obtenir un nombre décimal aléatoire dans l'intervalle  $[0 ; 1[$  ;

la formule =ALEA()+0,3 permet d'obtenir un nombre décimal aléatoire dans l'intervalle  $[0,3 ; 1,3[$  et la formule =ENT(ALEA() + 0,3) permet d'obtenir la partie entière de ce nombre.

On obtient ainsi les nombres entiers 0 ou 1.

2. La probabilité d'obtenir 1 est égale à 0,3.

3. On obtient un échantillon de taille 100.

Le chiffre 0 représentant une boule blanche et le chiffre 1 une boule rouge.

4. On compte le nombre de boule rouges obtenues, puis on divise ce résultat par 100. La formule est : =NB.SI(A1:A100;1)/100 (on peut aussi entrer la formule =SOMME(A1:A100)/100 puisque l'on compte le nombre de 1 dans la plage A1:A100).

5. En appuyant sur la touche F9 du clavier, on obtient un autre échantillon de taille 100.

6. a) b) Les résultats fluctuent selon les échantillons. Cependant la probabilité que la fréquence  $f$  soit dans l'intervalle de fluctuation  $[0,2 ; 0,5]$  est supérieure ou égale à 95 %.



Partie **4**

# **Algorithmique**



Chapitre 8

# Algorithmes

## 1 Description d'un algorithme

### 1 Définition

Un algorithme décrit une succession d'**instructions** permettant de résoudre un problème.

### 2 Description

Un algorithme est organisé en plusieurs parties :

- la déclaration des variables ;
- un début ;
- des instructions : la description d'opérations à exécuter ;
- une fin.

### 3 Les instructions élémentaires

- **Affectation d'une instruction** : cela consiste à attribuer une valeur à une variable avec le symbole «  $\leftarrow$  ».
- **Entrées / sorties** : l'entrée permet à l'utilisateur de rentrer des valeurs au clavier pour être utilisées par le programme, on utilise l'action **Lire** ; la sortie permet de communiquer avec l'utilisateur, on utilise l'action **Écrire**.
- **Exemple** : écrire un algorithme qui demande un nombre  $X$  à l'utilisateur, puis calculer  $X + 5$  et afficher le résultat à l'écran.

Algorithme :

Description :

**Variables**  $X, Y$  : nombres réels

déclaration des variables.

**Début**

début du programme.

**Écrire** « entrez le nombre  $X$  : »

le programme reproduit la phrase écrite entre guillemets.

**Lire**  $X$

le programme attend la frappe d'une valeur au clavier.

$Y \leftarrow X + 5$

le programme calcule la valeur de  $X + 5$  et affecte ce résultat à la variable  $Y$ .

**Écrire**  $Y$

la valeur de  $Y$  est affichée à l'écran.

**Fin**

fin du programme.

## Exercices résolus

### ➔ Interpréter un algorithme

#### Énoncé 1

1. Décrire l'algorithme suivant. Que produit-il ?

**Variables**  $X, c$  : nombres réels

**Début**

Écrire « entrez votre nombre : »

Lire  $X$

$c \leftarrow X * X$

Écrire « son carré est : »,  $c$

**Fin**

2. Quel est le résultat produit pour les valeurs 5 ; 1,5 et  $-7$  de  $X$  ?

#### Corrigé commenté

**Indication** : «  $*$  » est l'opérateur de multiplication.

1. Le programme calcule et affiche le carré du nombre entré par l'utilisateur.

2. Pour  $X = 5$ , on obtient 25 ; pour  $X = 1,5$ , on obtient 2,25 et pour  $X = -7$ , on obtient 49.

#### Énoncé 2

Soit l'algorithme :

**Variables**  $X, Y, P$  : nombres réels

**Début**

Écrire « Entrez  $X$  : »

Lire  $X$

Écrire « Entrez  $Y$  : »

Lire  $Y$

$P \leftarrow 2 * X / (Y^2 + 1)$

Écrire  $P$

**Fin**

Quel est le résultat produit par l'algorithme pour  $X = 3$  et  $Y = -1$  ?

#### Corrigé commenté

**Indication** : «  $/$  » est l'opérateur de division et «  $^$  » est l'opérateur de puissance.

Pour  $X = 3$  et  $Y = -1$ , on obtient  $(2 \times 3) \div ((-1)^2 + 1) = 3$ .

## 2 Boucle et itérateur

C'est la répétition d'un calcul.

### 1 Structure Répéter ... Jusqu'à ...

- Cette structure décrit une action qui est répétée jusqu'à ce qu'une condition soit respectée.
- **Exemple** : L'algorithme suivant affiche la table de multiplication par 8.

```
Variable n : nombre entier
Début
  n ← 1
  Répéter
    Écrire « 8 × », n, « = », 8*n
    n ← n+1
  Jusqu'à n = 11
Fin
```

### 2 Structure Tant que ... Faire ...

- Cette structure est exécutée répétitivement tant qu'une condition est vraie.
- **Exemple** : L'algorithme suivant affiche la table de multiplication par 8.

```
Variable n : nombre entier
Début
  n ← 1
  Tant que n ≤ 10
    Faire
      Écrire « 8 × », n, « = », 8*n
      n ← n+1
    FinFaire
  Fin
```

### 3 Structure Pour ... Faire ...

- Cette structure est exécutée répétitivement un certain nombre de fois.
- **Exemple** : L'algorithme suivant affiche la table de multiplication par 8.

```
Variable n : nombre entier
Début
  Pour n ← 1 Jusqu'à 10
    Faire
      Écrire « 8 × », n, « = », 8*n
    FinFaire
  Fin
```

## Exercice résolu

### Interpréter un algorithme

#### Énoncé

Décrire l'algorithme suivant. Que produit-il pour  $x = 10$  ?

**Variables**  $x, y$  : nombres réels

$c$  : caractère

#### Début

##### Répéter

Écrire « Entrez la valeur de  $x$  »

Lire  $x$

$y \leftarrow x^2 + 2x - 1$

Écrire  $y$

Écrire « Voulez-vous effectuer un autre calcul ? Non, touche N ; Oui, touche O »

Lire  $c$

**Jusqu'à**  $c = \text{« N »}$

#### Fin

#### Corrigé commenté

**Indication** : Décrire, pas à pas, chaque étape de la boucle.

##### Répéter

Écrire « Entrez la valeur de  $x$  »

Lire  $x$

$y \leftarrow x^2 + 2x - 1$

Écrire  $y$

Écrire « voulez-vous effectuer  
un autre calcul ? »

Lire  $c$

**Jusqu'à**  $c = \text{« N »}$

*début de la boucle*

*le programme écrit cette phrase*

*l'utilisateur entre une valeur  
de  $x$  au clavier*

*le programme calcule  $x^2 + 2x - 1$*

*le programme affiche le résultat*

*le programme écrit cette phrase*

*l'utilisateur entre sa réponse*

*si la réponse est N, la boucle s'arrête ;*

*si la réponse est O, la boucle reprend*

Cet algorithme affiche la valeur 119 pour  $x = 10$ .



## 3 Instruction conditionnelle

### 1 Structure Si ... Alors ...

- On teste une condition pour déterminer si une ou plusieurs actions doivent être exécutées.
- Exemple :** L'algorithme suivant affiche la racine carrée d'un nombre s'il est positif.

**Variables**  $x, y$  : nombres réels

**Début**

Écrire « Entrez votre nombre »

Lire  $x$

**Si**  $x \geq 0$  **alors**

$y \leftarrow \text{RacineCarrée}(x)$

Écrire « Sa racine carrée est : »,  $y$

**FinSi**

**Fin**

### 2 Structure Si ... Alors ... Sinon ...

- On teste une condition pour déterminer quelles actions doivent être effectuées.
- Exemple :** L'algorithme suivant affiche la racine carrée d'un nombre s'il est positif, sinon il affiche un message d'erreur.

**Variables**  $x, y$  : nombres réels

**Début**

Écrire « Entrez votre nombre »

Lire  $x$

**Si**  $x < 0$  **Alors**

Écrire « Ce nombre est négatif »

**Sinon**

$y \leftarrow \text{racineCarrée}(x)$

Écrire « Sa racine carrée est : »,  $y$

**FinSi**

**Fin**

## Exercice résolu

### Interpréter un algorithme

#### Énoncé

Décrire l'algorithme suivant. Que produit-il pour  $x = -10,5$  ?

**Variable**  $x$  : nombre réel

**Début**

Écrire « Entrez un nombre non nul »

Lire  $x$

**Si**  $x > 0$  **Alors**

Écrire « Ce nombre est positif »

**Sinon**

Écrire « Ce nombre est négatif »

**FinSi**

**Fin**

#### Corrigé commenté

**Indication** : Repérer la structure conditionnelle.

Écrire « Entrez un nombre »

*le programme écrit cette phrase*

Lire  $x$

*l'utilisateur entre une valeur de  $x$*

**Si**  $x > 0$  **Alors**

*la condition est évaluée par le programme*

Écrire « Ce nombre est positif » *cette condition est exécutée si vrai*

**Sinon**

Écrire « Ce nombre est négatif » *cette condition est exécutée si faux*

**FinSi**

**Fin**

Le programme demande un nombre à l'utilisateur et lui dit si ce nombre est positif ou s'il est négatif (zéro ayant été exclu).

Pour  $x = -10,5$ , le programme affiche : Ce nombre est négatif.

## Méthode

## Les réflexes à avoir

- R1** On affecte à une variable  $Z$  le résultat du calcul, puis l'action « Écrire  $Z$  » affiche ce résultat.
- R2** L'action  $X \leftarrow a$  efface l'ancienne valeur affectée à  $X$  et la remplace par  $a$ .
- R3** Pour comprendre le fonctionnement de l'algorithme, il est utile de le faire d'abord fonctionner avec des valeurs numériques.
- R4** Il est souvent pratique d'utiliser une variable intermédiaire.
- R5** Un algorithme doit être lisible ; il faut penser à mettre du texte entre guillemets ; il est reproduit tel quel lors de l'affichage.
- R6** Dans la boucle **Répéter ... Jusqu'à ...**, il faut bien observer à quel instant la condition d'arrêt est évaluée dans la répétition.
- R7** Le vocabulaire **Faire ... FinFaire** permet de repérer le corps de la boucle.
- R8** On utilise la boucle **Pour ... Jusqu'à ...** quand le nombre d'exécutions de la boucle est connu.
- R9** Il est intéressant de donner aux variables des noms qui rappellent leur « rôle » dans l'algorithme. On a appelé  $bg$  la valeur prise par la borne de gauche et  $bd$  la valeur prise par la borne de droite.
- R10** Dans la structure **Si ... Alors ... Sinon ...**, on décale vers la droite l'écriture de **Alors** et de **Si** pour rendre le choix entre les deux possibilités plus lisible.
- R11** Le vocabulaire **Si ... FinSi...** permet de repérer le corps de la condition.

## Les pièges à éviter

Le nom d'une variable peut être n'importe quelle lettre ou groupe de lettres.

La notation Rep : caractère, utilisée dans le corrigé des exercices 14 et 18, désigne la réponse de l'utilisateur qui doit saisir la réponse « oui » ou « non ».

Dans la boucle :

$n \leftarrow 1$

**Répéter**

*action*

$n \leftarrow n+1$

**Jusqu'à**  $n = 10$

L'*action* n'est pas exécutée pour la valeur 10.

Dans une structure **Si ... Alors ... Sinon ...**, on peut intégrer une autre structure **Si ... Alors ... Sinon ...**

Dans ce cas il faut bien respecter les différents décalages vers la droite de l'écriture de **Alors** et **Sinon** pour que l'algorithme soit lisible. Le rôle des « **FinSI** » devient essentiel.

Pour une variable dont l'affectation sera modifiée au cours du programme, il ne faut pas oublier de l'initialiser.

# Exercices

## Exercices d'application

### 1 Interpréter un algorithme de calculs

➔ R1, R2, R3 ➔ corrigé p. 262

Quel est le résultat produit par chacun des deux algorithmes suivants pour  $X = 6$  ?

a) Variables  $X, Y, Z$  : nombres réels

**Début**

$Y \leftarrow -1$

Lire  $X$

$Z \leftarrow 2 * X + Y$

Écrire  $Z$

**Fin**

b) Variables  $X, Y, Z$  : nombres réels

**Début**

$Y \leftarrow 3$

Lire  $X$

$Z \leftarrow X^2 - Y + 3$

Écrire  $Z$

**Fin**

### 2 Interpréter un algorithme de calculs

➔ R1, R2, R3 ➔ corrigé p. 262

Quel est le résultat produit par chacun des deux algorithmes suivants pour  $X = -5$ , puis pour  $X = 1,5$  ?

a) Variables  $X, Y, Z$  : nombres réels

**Début**

Lire  $X$

$Y \leftarrow 2$

$Z \leftarrow 4 * X + 2 * Y$

Écrire  $Z$

**Fin**

b) Variables  $X, Y, Z$  : nombres réels

**Début**

$Y \leftarrow 1$

Lire  $X$

$Z \leftarrow X^2 - 3 * Y - 5$

Écrire  $Z$

**Fin**

### 3 Interpréter un algorithme

➔ R1, R2, R3 ➔ corrigé p. 262

Quelles seront les valeurs de  $X, Y$  et  $Z$  après exécution du programme suivant ?

Variables  $X, Y, Z$  : nombres entiers

**Début**

$X \leftarrow 4$

$Y \leftarrow 10$

$Z \leftarrow X + Y$

$X \leftarrow 8$

$Y \leftarrow X + Z$

**Fin**

**4 Interpréter un algorithme**

➔ R1, R2, R3 ➔ corrigé p. 262

Quelles seront les valeurs de X et Y après exécution du programme suivant ?

**Variables** X, Y : nombres entiers

**Début**

$X \leftarrow 8$

$Y \leftarrow 3$

$X \leftarrow Y$

$Y \leftarrow X$

**Fin**

**5 Interpréter un algorithme**

➔ R1, R2, R3, R4 ➔ corrigé p. 262

1. Quelles seront les valeurs de X et de Y après exécution du programme suivant ?
2. De manière générale, que produit cet algorithme pour toute valeur de X et de Y ?

**Variables** X, Y, Z : nombres entiers

**Début**

$X \leftarrow 8$

$Y \leftarrow 3$

$Z \leftarrow X$

$X \leftarrow Y$

$Y \leftarrow Z$

**Fin**

**6 Écrire un algorithme de géométrie**

➔ R6 ➔ corrigé p. 263

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur la largeur et la longueur d'un rectangle (en mètres), puis qui calcule et affiche le périmètre et l'aire de ce rectangle.

**7 Écrire un algorithme de calculs**

➔ R6 ➔ corrigé p. 263

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur la valeur de deux nombres A et B, puis qui calcule et affiche la somme de leur carré.

**8 Écrire un algorithme en statistiques**

➔ R6 ➔ corrigé p. 263

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur deux nombres, puis qui calcule et affiche la moyenne de ces deux nombres.

**9 Interpréter un algorithme comportant une instruction conditionnelle**

→ R7

→ corrigé p. 263

Quel est le résultat produit par l'algorithme suivant pour  $x = 2$  ?

**Variable**  $x$  : nombre réel

**Début**

Écrire « Quelle est la valeur de  $x$  ? »

Lire  $x$

**Répéter**

Écrire  $x$

$x \leftarrow x + 3$

**Jusqu'à**  $x = 17$

**Fin**

**10 Interpréter un algorithme comportant une boucle**

→ R7

→ corrigé p. 264

Quel est le résultat produit par l'algorithme suivant pour  $x = 6$  ?

**Variable**  $x$  : nombre réel

**Début**

Écrire « Quelle est la valeur de  $x$  ? »

Lire  $x$

**Répéter**

Écrire  $x$

$x \leftarrow x + 10$

**Jusqu'à**  $x > 50$

**Fin**

**11 Interpréter un algorithme comportant une boucle**

→ R8

→ corrigé p. 264

Quel est le résultat produit par l'algorithme suivant pour  $x = 6$  ?

**Variable**  $x$  : nombre réel

**Début**

Écrire « Quelle est la valeur de  $x$  ? »

Lire  $x$

**Tant que**  $x < 50$

**Faire**

Écrire  $x$

$x \leftarrow x + 10$

**FinFaire**

**Fin**



**12 Interpréter un algorithme donnant un tableau de valeurs d'une fonction**

➔ R9, R10

➔ corrigé p. 264

**1. Décrire l'algorithme suivant.****Variables** bg, bd, x, y : nombres entiers**Début**

Écrire « Borne de gauche ? »

Lire bg

Écrire « Borne de droite ? »

Lire bd

**Pour** x ← bg **Jusqu'à** bd**Faire**y ←  $x^2 + x + 1$ 

Écrire y

**FinFaire****Fin****2. Quel est le résultat produit par cet algorithme pour bg = 4 et bd = 10 ?****13 Écrire un algorithme comportant une boucle**

➔ corrigé p. 265

Écrire un algorithme qui demande un nombre entier à l'utilisateur, puis qui affiche les vingt nombres suivants.

**14 Écrire un algorithme comportant une boucle**

➔ corrigé p. 265

Écrire un algorithme qui demande un nombre entier à l'utilisateur, puis qui affiche la somme de ce nombre avec le nombre suivant ; le programme demande alors à l'utilisateur s'il veut continuer.

**15 Interpréter un algorithme comportant une condition**

➔ R10

➔ corrigé p. 265

Décrire l'algorithme suivant.

**Variable** A : nombre réel**Début**

Écrire « Quel âge avez-vous ? »

Lire A

**Si** A < 18 **Alors**

Écrire « Vous êtes mineur »

**Sinon**

Écrire « Vous êtes majeur »

**FinSi****Fin**

**16 Interpréter un algorithme comportant une condition**

➔ R10 ➔ corrigé p. 265

1. Décrire l'algorithme suivant.
2. Que produit-il pour  $x = 5$  ? pour  $x = 20$  ?

**Variables**  $x, y$  : nombres réels**Début**Écrire « Entrez votre nombre :  $x =$  »Lire  $x$ **Si**  $x < 10$  **Alors** $y \leftarrow x + 10$ Écrire  $y$ **Sinon** $y \leftarrow x - 10$ Écrire  $y$ **FinSi****Fin****17 Écrire un algorithme de calculs**

➔ R11 ➔ corrigé p. 265

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur deux nombres  $A$  et  $B$ , puis si  $B$  est non nul, affiche le quotient de  $A$  par  $B$ .

**18 Écrire un algorithme de calculs**

➔ R11 ➔ corrigé p. 266

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur :

- le prix, en euros, d'un article ;
- si cet article est soldé.

Si l'article est soldé le programme affiche le prix à payer avec une réduction de 50 %.

## Exercices d'entraînement

### 19 Interpréter un algorithme en statistiques

→ R8

→ corrigé p. 266

Que produit l'algorithme suivant ?

Variables  $n$ ,  $cpt$  : nombres entiers

$x$ ,  $S$ ,  $M$  : nombres réels

**Début**

Écrire « Combien de notes avez-vous ? »

Lire  $n$

$S \leftarrow 0$

Pour  $cpt \leftarrow 1$  Jusqu'à  $n$

**Faire**

Écrire « Entrez vos notes »

Lire  $x$

$S \leftarrow S + x$

**FinFaire**

$M \leftarrow S/n$

Écrire « Le résultat est »,  $M$

**Fin**

### 20 Écrire un algorithme de calculs numériques

→ corrigé p. 267

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur un nombre entier positif  $N$ , puis qui calcule le nombre  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + N$ .

### 21 Écrire un algorithme de résolution d'une équation du premier degré

→ corrigé p. 267

Écrire un algorithme qui demande les coefficients  $a$  et  $b$  de l'équation  $ax + b = 0$ , puis qui affiche la solution de cette équation.

### 22 Écrire un algorithme d'étude du signe d'une expression du premier degré

→ corrigé p. 267

Écrire un algorithme qui donne le signe de  $ax + b$  en fonction de  $x$  après avoir demandé à l'utilisateur les coefficients  $a$  et  $b$  (ne considérer que le cas  $a \neq 0$ ).

**1 a)** On affecte la valeur  $-1$  à la variable  $Y$  ; l'utilisateur entre 6 au clavier ; le programme calcule  $2 \times 6 - 1$  et affecte ce résultat à la variable  $Z$  qui est affichée. Le programme affiche ainsi la valeur 11.

**b)** On affecte la valeur 3 à la variable  $Y$  ; l'utilisateur entre la valeur 6 au clavier ; le programme calcule  $6^2 - 6 + 3$  et affecte cette valeur à la variable  $Z$  qui est affichée. Le programme affiche ainsi la valeur 33.

**2 a)** La valeur de  $X$  est entrée au clavier, on affecte la valeur 2 à la variable  $Y$ . Le programme calcule et affiche la valeur affectée à  $Z$ .

Pour  $X = -5$ ,  $Z = 4 \times (-5) + 2 \times 2 = -16$ .

Pour  $X = 1,5$ ,  $Z = 4 \times 1,5 + 2 \times 2 = 10$ .

**b)** On affecte la valeur 1 à la variable  $Y$ . La valeur de  $X$  est entrée au clavier. Le programme calcule et affiche la valeur affectée à  $Z$ .

Pour  $X = -5$ ,  $Z = (-5)^2 - 3 \times 1 - 5 = 17$ .

Pour  $X = 1,5$ ,  $Z = 1,5^2 - 3 \times 1 - 5 = -5,75$ .



*Description :*

$X \leftarrow 4$

*On affecte la valeur 4 à la variable X, soit  $X = 4$*

$Y \leftarrow 10$

*On affecte la valeur 10 à la variable Y, soit  $Y = 10$*

$Z \leftarrow X + Y$

*On affecte la valeur  $10 + 4 = 14$  à la variable Z, soit  $Z = 10 + 4 = 14$*

$X \leftarrow 8$

*On affecte la valeur 8 à la variable X, soit  $X = 8$*

$Y \leftarrow X + Z$

*On affecte la valeur  $8 + 14 = 22$  à la variable Y, soit  $Y = 8 + 14 = 22$*

À la fin du programme, on a  $X = 8$ ,  $Y = 22$  et  $Z = 14$ .



*Valeurs des variables :*

$X \leftarrow 8$

$X = 8$

$Y \leftarrow 3$

$Y = 3$

$X \leftarrow Y$

*On affecte à X la valeur de Y, soit  $X = 3$*

$Y \leftarrow X$

*On affecte à Y la valeur de X, soit  $Y = 3$*

À la fin du programme, on a  $X = Y = 3$ .



*Valeurs des variables :*

**1.**  $X \leftarrow 8$

$X = 8$

$Y \leftarrow 3$

$Y = 3$

$Z \leftarrow X$

*On affecte à Z la valeur de X, soit  $Z = 8$*

$X \leftarrow Y$

*On affecte à X la valeur de Y, soit  $X = 3$*

$Y \leftarrow Z$

*On affecte à Y la valeur de Z, soit  $Y = 8$*

À la fin du programme, on a  $X = 3$  et  $Y = 8$ .

**2.** Ce programme échange les valeurs de  $X$  et de  $Y$ .

**6****Variables** l,L,P,A : nombres réels**Début**

Écrire « Entrez la largeur du rectangle en mètres »

Lire l

Écrire « Entrez la longueur du rectangle en mètres »

Lire L

 $P \leftarrow 2 * (l + L)$  $A \leftarrow l * L$ 

Écrire « Le périmètre du rectangle est égal à : », P, « m »

Écrire « L'aire du rectangle est égale à : », A, « m<sup>2</sup> »**Fin****7****Variables** A,B,S : nombres réels**Début**

Écrire « Entrez la valeur de A »

Lire A

Écrire « Entrez la valeur de B »

Lire B

 $S \leftarrow A^2 + B^2$ Écrire « A<sup>2</sup> + B<sup>2</sup> = », S**Fin****8****Variables** X,Y,M : nombres réels**Début**

Écrire « Entrez le premier nombre »

Lire X

Écrire « Entrez le deuxième nombre »

Lire Y

 $M \leftarrow 0,5 * (X + Y)$ 

Écrire « La moyenne de ces deux nombres est : », M

**Fin****9***Description :***Variable** x : nombre réel**Début**

Écrire « Quelle est la valeur de x ? »

Lire x *L'utilisateur saisit la valeur de x***Répéter** *Début de la boucle*Écrire x *La boucle affiche la valeur de x, puis ajoute 3 à x ; elle s'arrête au moment où x* $x \leftarrow x + 3$  *prend la valeur 17***Jusqu'à** x = 17**Fin**

Pour x = 2, le programme affiche : 2 , 5 , 8 , 11, puis 14.

**10**

*Description :*

**Variable**  $x$  : nombre réel

**Début**

Écrire « Quelle est la valeur de  $x$  ? »

Lire  $x$

*L'utilisateur saisit la valeur de  $x$*

**Répéter**

*Début de la boucle*

Écrire  $x$

*La boucle affiche la valeur de  $x$ , puis ajoute*

$x \leftarrow x + 10$

*10 à cette valeur ; elle s'arrête au moment*

**Jusqu'à**  $x > 50$

*où  $x > 50$*

**Fin**

Pour  $x = 6$ , le programme affiche : 6, 16, 26, 36 et 46.

**11**

*Description :*

**Variable**  $x$  : nombre réel

**Début**

Écrire « Quelle est la valeur de  $x$  ? »

Lire  $x$

*L'utilisateur saisit la valeur de  $x$*

**Tant que**  $x < 50$

*Début de la boucle*

**Faire**

Écrire  $x$

*Le programme affiche la valeur de  $x$ ,*

$x \leftarrow x + 10$

*puis ajoute 10 à cette valeur.*

**FinFaire**

*La boucle s'arrête dès que  $x \geq 50$*

**Fin**

Pour  $x = 6$ , le programme affiche : 6, 16, 26, 36, puis 46.

**12** 1.

*Description :*

**Variables**  $bg, bd, x, y$  : nombres entiers

**Début**

Écrire « Borne de gauche ? »

Lire  $bg$

*L'utilisateur saisit la valeur de la borne de gauche*

Écrire « Borne de droite ? »

Lire  $bd$

*L'utilisateur saisit la valeur de la borne de droite*

**Pour**  $x \leftarrow bg$  **Jusqu'à**  $bd$

**Faire**

*Début de la boucle*

$y \leftarrow x^2 + x + 1$

*Le programme calcule et affiche les valeurs de*

Écrire  $y$

*$x^2 + x + 1$  de  $x = bg$  jusqu'à  $x = bd$ , avec un pas de 1.*

**FinFaire**

*Fin de la boucle*

**Fin**

2. Pour  $bg = 4$  et  $bd = 10$ , le programme affiche : 21, 31, 43, 57, 73, 91 et 111.

**13****Variables** N, x : nombres entiers**Début**

Écrire « Entrez votre nombre entier : »

Lire N

Écrire « Les vingt nombres suivants sont : »

**Pour**  $x \leftarrow N + 1$  **Jusqu'à**  $N + 20$ **Faire**

Écrire x

**FinFaire****Fin****14****Variables** N, M : nombres entiers

rep : caractère

**Début****Répéter**

Écrire « Entrez votre nombre entier : »

Lire N

 $M \leftarrow N + N + 1$ 

Écrire « la somme de votre nombre et du suivant est : », M

Écrire « Voulez-vous effectuer un autre calcul ? Non, touche N ; Oui, touche O »

Lire rep

**Jusqu'à** rep = « N »**Fin****15**

Le programme demande à l'utilisateur son âge, puis l'informe s'il est majeur ou s'il est mineur.

**16**

1. Le programme demande la valeur d'un nombre x à l'utilisateur.

Si  $x < 10$ , le programme affiche la valeur de  $x + 10$  ; si  $x \geq 10$ , le programme affiche la valeur de  $x - 10$ .

2. Pour  $x = 5$ , la valeur 15 est affichée ; pour  $x = 20$ , la valeur 10 est affichée.

**17****Variables** A, B, Q : nombres réels**Début**

Écrire « Entrez la valeur de A »

Lire A

Écrire « Entrez la valeur de B »

Lire B



Si  $B = 0$  Alors

Écrire « Le quotient de A par B n'est pas possible »

Sinon

$Q \leftarrow A/B$

Écrire « Le quotient de A par B est égal à : », Q

FinSi

Fin

**18**

**Variables** P, PF : nombres réels

Rep : caractère

**Début**

Écrire « Quel est le prix de l'article ? »

Lire P

Écrire « Cet article est-il soldé ? Non, touche N ; Oui, touche O »

Lire Rep

Si Rep = « O » Alors

$PF \leftarrow -0,5 * P$

Écrire « Vous devez payer : », PF , « euros »

Sinon

Écrire « Vous devez payer : », P , « euros »

FinSi

Fin

**19**

*Description :*

**Variables** n, cpt : nombres entiers

x, S, M : nombres réels

**Début**

Écrire « Combien de notes avez-vous ? »

Lire n

*L'utilisateur entre le nombre de notes*

$S \leftarrow 0$

*La variable est initialisée*

**Pour** cpt  $\leftarrow 1$  Jusqu'à n

*Création d'un compteur pour la boucle*

**Faire**

*Début de la boucle*

Écrire « Entrez vos notes »

Lire x

*On saisit une à une les notes*

$S \leftarrow S + x$

*On ajoute chaque note à la variable S*

**FinFaire**

*Fin de la boucle*

$M \leftarrow S/n$

*Calcul de la somme des notes divisée par le nombre de notes*

Écrire « Le résultat est », M

*Affichage de M*

Fin

Le programme calcule et affiche la moyenne des notes que l'utilisateur a saisi.

**20****Variables**  $N, S, \text{cpt}$  : nombres entiers**Début**Écrire « Entrez un nombre entier positif  $N$  »Lire  $N$  $S \leftarrow 0$ **Pour**  $\text{cpt} \leftarrow 1$  **Jusqu'à**  $N$ **Faire** $S \leftarrow S + \text{cpt}$ **FinFaire**Écrire «  $1+2+3+\dots+N=$  »,  $S$ **Fin****21****Variables**  $A, B, S$  : nombres réels**Début**Écrire « Entrez le coefficient  $a$  : »Lire  $A$ Écrire « Entrez le coefficient  $b$  : »Lire  $B$ **Si**  $A = 0$  **Alors****Si**  $B = 0$  **Alors**

Écrire « Tous les nombres sont solutions »

**Sinon**

Écrire « L'équation n'a pas de solution »

**FinSi****Sinon** $S \leftarrow -B/A$ Écrire « La solution de l'équation est  $x =$  »,  $S$ **FinSi****Fin****22****Variables**  $A, B, \text{rac}$  : nombres réels**Début**Écrire « Entrez le coefficient  $a$  non nul : »Lire  $A$ Écrire « Entrez le coefficient  $b$  : »Lire  $B$  $\text{rac} \leftarrow -B/A$ **Si**  $A > 0$  **Alors**Écrire «  $ax + b$  est positif si  $x \geq$  »,  $\text{rac}$ , « et  $ax + b$  est négatif si  $x \leq$  »,  $\text{rac}$ **Sinon**Écrire «  $ax + b$  est négatif si  $x \geq$  »,  $\text{rac}$ , « et  $ax + b$  est positif si  $x \leq$  »,  $\text{rac}$ **FinSi****Fin**



## A-B

- abscisse d'un point : 126
- algorithmes : 245
  - boucle et itérateur : 250
  - description : 248
  - instruction conditionnelle : 252
  - instructions élémentaires : 248
- angle
  - de fuite : 120
  - orienté : 74
- antécédent par une fonction : 26

## C

- caractère : 176
  - qualitatif : 176
  - quantitatif : 176
- cercle trigonométrique : 74
- coefficient directeur d'une droite : 128
- colinéarité de vecteurs : 156
- coordonnées
  - du milieu d'un segment : 126
  - d'un point : 126
  - d'un point d'une droite : 128
  - d'un vecteur : 154
- cosinus d'un nombre réel : 74
- courbe
  - des fréquences cumulées : 178
  - représentative d'une fonction : 28

## D

- développer une expression : 66
- diagramme en bâtons : 207
- direction d'un vecteur : 150
- distribution des fréquences : 206
- droites
  - confondues (dans l'espace) : 122
  - confondues (dans le plan) : 130
  - coplanaires : 122
  - orthogonales dans l'espace : 123
  - parallèles : 156
  - parallèles dans le plan : 130, 132
  - parallèles dans l'espace : 122
  - perpendiculaires dans le plan : 132
  - sécantes : 130

## E

- écart-type : 182
- échantillon : 220
- effectif
  - cumulé : 176
  - d'une population : 176
  - total d'une population : 176
- ensemble de définition : 26
- équation
  - (résolution graphique) : 30
  - $ax + b = 0$  : 70
  - d'une droite : 128
  - réduite d'une droite : 128
  - $x^2 = a$  : 70

# Index

événement

- $\bar{A}$  : 210
  - $A \cap B$  : 210, 218
  - $A \cup B$  : 210, 218
- expérience aléatoire : 206

## F

- factoriser une expression : 68
- fluctuation d'échantillonnage : 206
- fonction : 26
- affine : 62
  - carré : 64
  - constante : 32
  - croissante : 32
  - de référence : 61
  - décroissante : 32
  - homographique : 72
  - inverse : 64
  - linéaire : 62
  - polynôme de degré 2 : 72
- fréquence : 176
- d'un événement : 208
  - cumulée : 176

## H-I

- histogramme : 178
- identités remarquables : 66
- image d'un nombre (par une fonction) : 26
- individu : 176
- inéquation
- (résolution graphique) : 30
  - $ax + b > 0$  ou  $ax + b < 0$  : 70
- intersection d'intervalles : 12
- intervalle de fluctuation : 222
- intervalles : 12

## L-M-N

- longueur d'un vecteur : 150
- maximum d'une fonction : 34
- médiane : 180
- milieu d'un segment : 150
- minimum d'une fonction : 34
- moyenne : 182
- nombre
- décimal : 10
  - entier naturel : 10
  - entier relatif : 10
  - premier : 12
  - rationnel : 10
  - réel : 10
- nuage de points : 178

## O-P-Q

- ordonnée d'un point : 126
- parabole : 72
- perspective cavalière : 120
- plans
- confondus : 123
  - sécants : 123
- points alignés : 156
- population : 176
- probabilité : 208
- d'un événement : 212, 214, 216, 218
- produit d'un vecteur par un nombre réel : 152
- quartiles : 180

## R

- règle
- des parenthèses : 66
  - des signes : 66

- du parallélogramme : 152
- relation de Chasles : 152
- repère
- du plan : 126
- orthonormé : 126
- représentation graphique
- d'une fonction : 28
- d'une série statistique : 178
- résolution graphique (de systèmes d'équations) : 130
- réunion d'intervalles : 12

## S

- sens de variation d'une fonction : 32
- sens d'un vecteur : 150
- série statistique : 176
- simulation : 206, 220
- sinus d'un nombre réel : 74
- somme de vecteurs : 152
- systèmes d'équations linéaires : 130

## T

- tableau de signe (de  $ax + b$ ) : 70
- tableau de variation d'une fonction : 32
- théorème
- de Pythagore : 124
- de Thalès : 124
- des milieux : 124
- translation : 150
- trigonométrie : 73

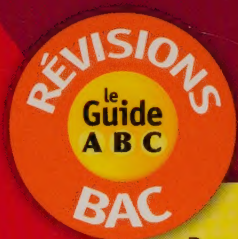
## V

- vecteur(s)
- colinéaires : 156
- du plan : 150
- égaux : 150, 154
- nul : 150
- opposés : 150









# Mathématiques 2<sup>de</sup>

- Des **rappels de cours** simples et structurés, illustrés d'exercices résolus.
- Des fiches **Méthode** avec exemples d'application, pour maîtriser toutes les techniques de base.
- Des **tests de connaissance**, des **exercices** d'application et d'entraînement.
- **Tous les corrigés**, entièrement détaillés et commentés.

Les Guides ABC BAC en Seconde :  
une gamme pour tous les besoins

## Pour progresser avec méthode

### le Guide RÉVISIONS

- Histoire-Géographie, n°200
- SES, n°202
- Mathématiques, n°203
- Physique-Chimie, n°205
- SVT, n°206
- Anglais, n°207
- Français, n°211

## Pour s'exercer intensivement

### le Guide ENTRAÎNEMENT

- Mathématiques, n°204



Préparez-vous à réussir !  
[www.abcbac.com](http://www.abcbac.com)

