

Mathématiques

3^e

Le Guide

A B C

brevet

- Rappels de cours
- Méthodes de base
- Exercices corrigés



Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
Kahle/Austin Foundation

Mathématiques

3^e

Le Guide

A B C
brevet

Chantal Carruelle

Françoise Isblé

 Nathan

Conçu pour vous aider à **maîtriser l'indispensable** en mathématiques en Troisième et à aborder la classe de Seconde, cet ouvrage est conforme au **nouveau programme** en vigueur depuis septembre 1999.

Il est organisé en deux grandes parties :

- partie 1 : travaux numériques, gestion de données, fonctions ;
- partie 2 : travaux géométriques.

Chaque chapitre est organisé de la même manière :

RAPPELS DE COURS

Pour chaque notion, le cours est présenté sous forme de rappels synthétiques. Les résultats à retenir sont encadrés. Vous trouverez aussi par endroits quelques démonstrations jugées utiles et simples. Enfin, des remarques et des conseils, signalés par le logo , attirent votre attention sur les points délicats.

Savoir faire et s'Entraîner

La rubrique **Savoir faire** vous présente les méthodes à connaître absolument. Chaque savoir-faire est illustré par un exemple, et toutes les étapes sont expliquées.

La rubrique **s'Entraîner** vous permet ensuite d'appliquer ces méthodes, ainsi que tous les résultats du cours.

TEST

En fin de chapitre, un test vous permet de mettre rapidement en action toutes les notions du chapitre, et de vérifier vos acquis.

Corrigés

Les corrigés détaillés de tous les exercices, ainsi que les réponses aux tests, figurent en fin d'ouvrage.

Une rubrique intitulée **COMMENT DÉMONTRER QUE...** regroupe de nombreuses méthodes « classiques », utiles pour les exercices. Facilement repérable grâce à ses pages bleues, vous pouvez vous y référer à tout moment.

Enfin, un **LEXIQUE** vous permettra de retrouver la signification d'un mot non expliqué dans un chapitre.

Cet ouvrage est destiné à accompagner votre travail tout au long de l'année. Sachez l'utiliser au mieux : n'attendez pas la période des révisions pour vous en servir...

Bon courage !

SOMMAIRE

<i>L'épreuve de mathématiques au brevet</i>	8
<i>Quelques conseils</i>	9

PARTIE 1 Travaux numériques. **Gestion de données. Fonctions**

1. Règles de calcul	
Rappels de cours	13
Savoir faire et s'entraîner	16
Test	18
2. Écritures littérales. Identités remarquables	
Rappels de cours	19
Savoir faire et s'entraîner	21
Test	26
3. Radicaux (1)	
Rappels de cours	27
Savoir faire et s'entraîner	31
Test	34
4. Radicaux (2)	
Rappels de cours	35
Savoir faire et s'entraîner	37
Test	40
5. Équations et inéquations du premier degré à une inconnue	
Rappels de cours	41
Savoir faire et s'entraîner	43
Test	46

6. Équations et problèmes se ramenant au premier degré	
Rappels de cours	47
Savoir faire et s'entraîner	48
Test	52
7. Nombres entiers et rationnels	
Rappels de cours	53
Savoir faire et s'entraîner	57
Test	60
8. Proportionnalité et fonctions linéaires	
Rappels de cours	61
Savoir faire et s'entraîner	64
Test	68
9. Fonctions affines. Représentations	
Rappels de cours	69
Savoir faire et s'entraîner	73
Test	78
10. Systèmes de deux équations à deux inconnues et résolution de problèmes	
Rappels de cours	79
Savoir faire et s'entraîner	82
Test	88
11. Grandeurs composées. Changement d'unités	
Rappels de cours	89
Savoir faire et s'entraîner	92
Test	94
12. Calculs d'aires et de volumes. Effets d'une réduction ou d'un agrandissement	
Rappels de cours	95
Savoir faire et s'entraîner	98
Test	100
13. Données statistiques	
Rappels de cours	101
Savoir faire et s'entraîner	106
Test	110

PARTIE 2 Travaux géométriques

14. Géométrie dans l'espace (1) : la sphère

Rappels de cours	113
Savoir faire et s'entraîner	115
Test	116

15. Géométrie dans l'espace (2) : sections planes de solides

Rappels de cours	117
Savoir faire et s'entraîner	122
Test	124

16. Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

Rappels de cours	125
Savoir faire et s'entraîner	127
Test	130

17. Expression analytique de la distance

Rappels de cours	131
Savoir faire et s'entraîner	132
Test	133

18. Propriété de Thalès

Rappels de cours	135
Savoir faire et s'entraîner	137
Test	140

19. Vecteurs et translations

Rappels de cours	143
Savoir faire et s'entraîner	146
Test	149

20. Coordonnées d'un point et d'un vecteur

Rappels de cours	151
Savoir faire et s'entraîner	153
Test	156

21. Rotations

Rappels de cours	157
Savoir faire et s'entraîner	159
Test	163

22. Polygones réguliers

Rappels de cours	165
Savoir faire et s'entraîner	167
Test	170

23. Composition de transformations

Rappels de cours	171
Savoir faire et s'entraîner	174
Test	176

24. Angles inscrits

Rappels de cours	177
Savoir faire et s'entraîner	181
Test	182

Corrigés	185
-----------------------	-----

Comment démontrer que...	241
---------------------------------------	-----

Lexique	249
----------------------	-----



épreuve de mathématiques au brevet

Durée

2 heures.

Acquisitions à évaluer

Les capacités à évaluer s'organisent autour des pôles suivants :

- exécuter et exploiter un calcul, un graphique ou un tracé géométrique ;
- interpréter graphiquement une situation numérique et interpréter numériquement une situation graphique ou géométrique ;
- mettre en œuvre des connaissances et des méthodes pour la résolution de problèmes simples.

Nature de l'épreuve écrite

L'épreuve comporte trois parties.

- Les deux premières parties portent sur des applications directes des connaissances et des techniques figurant au programme. Chacune d'elles est constituée d'un petit nombre d'exercices indépendants.

Pour la série collège, la première partie est à dominante numérique, la seconde est à dominante géométrique.

- La troisième partie évalue la capacité à mobiliser des connaissances pour résoudre un problème. Elle est constituée d'un petit nombre de questions enchaînées, de difficulté progressive.

Notation : sur 40

Première partie : 12 points.

Deuxième partie : 12 points.

Troisième partie : 12 points.

Rédaction et présentation : 4 points.



quelques conseils

1. Deux usages à respecter

- **L'orthographe**

Les fautes d'orthographe perturbent la lecture et indisposent le lecteur.

- **La formule impersonnelle**

Éviter le « je » ou le « nous » dans la rédaction.

2. Trois habitudes à prendre

- **Indiquer clairement les hypothèses.**

- Dans la rédaction des réponses, **faire référence aux hypothèses.**

- **Indiquer en français les propriétés ou théorèmes utilisés.**

3. Trois questions à régler

- **Faut-il recopier les questions ?**

C'est souhaitable car cela permet de vérifier si la réponse est en accord avec la question et cela rend plus claire la rédaction.

- **Faut-il utiliser des symboles logiques ?**

Tout recours abusif aux symboles logiques est à éviter.

Les formules doivent être intégrées à des phrases françaises correctement rédigées.

- **Faut-il travailler au brouillon ?**

Il est recommandé de faire tous les calculs au brouillon, de tracer les figures ou les constructions de manière à apprécier la place nécessaire à leur réalisation sur la copie.

PARTIE

1

- ***T**ravaux
numériques
Gestion
de données
Fonctions*

Règles de calcul

RAPPELS DE COURS

1 NOMBRES OPPOSÉS ET NOMBRES INVERSES

a. Nombres opposés

Tout nombre a admet un opposé noté $-a$.

Pour tout nombre a , $a + (-a) = 0$.

Deux nombres opposés ont des signes contraires. Retrancher un nombre revient à ajouter son opposé.

Exemple : L'opposé de 2,13 est $-2,13$.

$$2,13 + (-2,13) = 0.$$

! $-x$ signifie opposé de x et ne permet pas de dire si x est positif ou négatif.

b. Nombres inverses

Tout nombre non nul a admet un inverse noté $\frac{1}{a}$ ou bien a^{-1} .

Pour tout nombre a non nul, $\frac{1}{a} \times a = 1$.

Deux nombres inverses l'un de l'autre ont le même signe.

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse.

Exemple

L'inverse de $-0,25$ est $\frac{1}{-0,25}$ soit -4 .

Ne confondez pas $-x$ et x^{-1} .

2 AUTOUR DES PUISSANCES

$$\text{Si } a \neq 0, \quad a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^1 = a.$$

m et n sont des entiers relatifs et $a \neq 0$.

$$\text{Si } n \geq 2, \quad a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{Avec } b \neq 0, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\text{Avec } b \neq 0, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\text{Avec } a \neq 0, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ne confondez pas a^{-n} avec $-a^n$.

$$\text{Exemple : } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; \quad -2^3 = -8.$$

3 PUISSANCES DE DIX

a. Règles de calcul avec n entier naturel non nul

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}} \underbrace{= 100 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$$

L'exposant n est égal au nombre de zéros.

b. Règles de calcul avec m et n entiers relatifs

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n} \text{ et } (10^m)^n = 10^{m \times n}.$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00 \dots 01}_{n \text{ chiffres}} \text{ où } n \text{ est entier naturel non nul.}$$

! L'exposant n est égal au nombre de chiffres situés après la virgule.

c. Nombre décimal écrit à l'aide d'une puissance de dix

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^p$ dans laquelle a et p sont des entiers relatifs.

Exemples

$$13,51 = 1\,351 \times 10^{-2};$$

$$57\,000\,000 = 57 \times 10^6;$$

$$0,003\,4 = 34 \times 10^{-4};$$

$$-7\,632\,000 = -7\,632 \times 10^3.$$

4 NOTATION SCIENTIFIQUE

La notation scientifique permet d'écrire un nombre décimal sous la forme $a \times 10^p$, dans laquelle $1 \leq a < 10$ et p est un entier relatif.

Exemple

$$\underbrace{0,003\,4}_{\substack{\text{écriture} \\ \text{décimale}}} = \underbrace{34 \times 10^{-4}}_{\substack{\text{nombre décimal} \\ \text{écrit à l'aide d'une} \\ \text{puissance de dix}}} = \underbrace{3,4 \times 10^{-3}}_{\substack{\text{écriture scientifique} \\ \text{du nombre décimal}}}$$

Les calculatrices utilisent la notation scientifique.

Nombre	Écriture scientifique	Affichage sur la calculatrice					
0,000 21	$2,1 \times 10^{-4}$	<table><tr><td>2.</td><td>1</td><td>E</td><td>-</td><td>4</td></tr></table>	2.	1	E	-	4
2.	1	E	-	4			
57 000 000	$5,7 \times 10^7$	<table><tr><td>5.</td><td>7</td><td>E</td><td>+</td><td>7</td></tr></table>	5.	7	E	+	7
5.	7	E	+	7			

Savoir faire

Savoir reconnaître la composition d'un nombre pour l'écrire plus simplement

Calculez le nombre A tel que $A = 0,03 \times 10^4 \times 10^{-6} \times 40\,000$.

Méthode

1° Regarder l'écriture du nombre pour répondre aux questions :

- est-ce une somme ou un produit ou un quotient ?
- est-il écrit à l'aide de décimaux ou de fractions ou de puissances ou de radicaux ?

2° Appliquer les règles de calcul spécifiques à chaque type d'écriture et à chaque sorte de nombre.

3° Donner un résultat le plus simple possible.

Corrigé

1° Le nombre A est un produit de nombres décimaux et de puissances de 10.

2° On écrit les décimaux intervenant dans l'écriture de A à l'aide des puissances de 10.

$$A = 3 \times 10^{-2} \times 10^4 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^4.$$

On regroupe les puissances de 10 :

$$A = 3 \times 4 \times 10^{-2} \times 10^4 \times 10^{-6} \times 10^4.$$

On utilise la règle de calcul $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$;

$$A = 12 \times 10^{-2+4-6+4} ; \quad A = 12 \times 10^0.$$

3° Or $10^0 = 1$ d'où $A = 12 \times 1 = 12$.

s'Entraîner

1. On considère les nombres $-0,25$ et $\frac{1}{8}$.

- Calculez la somme des inverses de ces nombres.
- Montrez que l'inverse de leur somme est un nombre entier.

2. Soit un triangle ABC rectangle en B .

L'unité choisie étant le centimètre, on donne

$$AB = 4 \times 10^{-1} \text{ et } AC = 5 \times 10^{-1}.$$

- Calculez BC .
- Déduisez-en le périmètre et l'aire du triangle ABC (les résultats seront donnés en écriture scientifique).

3. Calculez et donnez le résultat sous la forme d'une écriture scientifique.

$$A = (42 \times 10^{-3})^2;$$

$$B = (2 \times 10^2)^4 \times 10^{-5};$$

$$C = 7 \times (10^2)^{-3};$$

$$D = (2 \times 10^2)^{-3} \times 5 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^{10}.$$

4. Complétez le tableau suivant.

$a \times 10^p$ (a et p entiers)	Notation décimale	Notation scientifique
13×10^7		
	113,32	
		$1,71 \times 10^{-3}$
151×10^{-6}		
	0,008 2	

5. Sachant que la vitesse de la lumière est 300 000 km/s, calculez la distance parcourue par la lumière du soleil en une année de 365 jours appelée année-lumière.

Donnez le résultat en écriture scientifique.

► corrigés p. 185

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C	D
1	L'inverse de $-0,08 =$	0,08	$-12,5$	12,5	$\frac{1}{0,08}$
2	L'opposé de $10^{-1} =$	-10	$-0,1$	0,1	1
3	$2^3 - 1^3 =$	1	3	5	7
4	$(2^3)^2 =$	12	36	64	512
5	$2^{(3^2)} =$	12	36	64	512
6	2^{-3}	-6	0,125	-8	$-2,3$
7	$2^2 \times 5^2 =$	10^4	40	10^2	25^2
8	$10^{-3} =$	0,001	$-1\,000$	$\frac{1}{100}$	-3×10
9	$(ab)^3$	ab^3	a^3b	$3ab$	a^3b^3
10	$(3x)^2$	$9x^2$	$3x^2$	$9x$	$6x^2$
11	$2^4 \times 2^3 \times 2^5 =$	2^{60}	8^{12}	2^{12}	8^{60}
12	$3^7 \times 3^2 =$	9^9	3^9	3^{14}	9^{14}
13	$3^{-7} \times 3^2 =$	9^{-5}	3^{-5}	9^{-14}	3^{-14}
14	0,0325	$32,5 \times 10^{-3}$	325×10^{-2}	$\frac{325}{1\,000}$	$3,25 \times 10^{-1}$
15	$10^5 + 10^3$	10^8	20^8	$1\,001 \times 10^3$	101×10^3

2

Écritures littérales Identités remarquables

RAPPELS DE COURS

1 CONVENTIONS D'ÉCRITURE ET PRIORITÉS OPÉRATOIRES

a. Conventions d'écriture

On peut noter de cinq façons différentes le fait de multiplier le nombre relatif a par le nombre relatif b .

$$a \times b = a \cdot b = a(b) = (a)(b) = ab.$$

Les écritures $+ab$ et ab désignent le même nombre relatif.

b. Priorités opératoires

Dire qu'une opération est prioritaire sur une autre signifie que l'on doit commencer les calculs par cette opération.

La division et la multiplication sont prioritaires sur l'addition et sur la soustraction.

L'élevation à la puissance est prioritaire sur toutes les autres opérations.

Exemple 1

$$3 : 2 + 4 = 1,5 + 4 = 5,5.$$

Exemple 2

$$3^2 + 6 = 9 + 6 = 15 ; \quad -2^3 \times 5 = -8 \times 5 = -40.$$

c. Développements

Développer une expression consiste à retirer les parenthèses.

$$a(b + c) = ab + ac ;$$

$$-(a + b) = -a - b ;$$

$$a(b - c) = ab - ac ;$$

$$-(a - b) = -a + b.$$

2 IDENTITÉS REMARQUABLES

a. Expression littérale

On appelle expression littérale toute phrase mathématique dans laquelle figurent des lettres représentant des nombres, et des symboles opératoires ($\times$; $+$; $-$; $:$; élévation à la puissance).

b. Identités remarquables

Une identité remarquable est une égalité entre deux expressions littérales, vraie quelles que soient les valeurs données aux lettres figurant dans l'égalité.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (-a - b)^2.$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (-a + b)^2.$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 = (-a - b)(-a + b).$$

! Ne confondez pas $-x^2$ avec $(-x)^2$; $(3xy)^2$ avec $3xy^2$.

3 UTILISATION DES ÉCRITURES LITTÉRALES ET DES IDENTITÉS REMARQUABLES POUR CALCULER EFFICACEMENT

Une expression algébrique a beaucoup d'écritures littérales : il faut savoir choisir celle permettant de calculer rapidement et efficacement.

! Il est rare que la première écriture soit la mieux adaptée.

Savoir faire

1 Savoir développer une expression

1. Développez et simplifiez l'expression A telle que :

$$A = -2[-3(a+b) + 2(-a+b)] + 5(-2a+3).$$

Méthode

1° Utiliser les propriétés de la multiplication et de l'addition pour développer en commençant par enlever les parenthèses puis les crochets.

2° Réduire les termes semblables, c'est-à-dire additionner les termes ayant la même partie littérale (exemple : $3xy^2$ et $-5xy^2$).

Corrigé

1° On enlève les parenthèses :

$$A = -2[-3a - 3b - 2a + 2b] - 10a + 15.$$

On enlève les crochets :

$$A = 6a + 6b + 4a - 4b - 10a + 15.$$

2° On regroupe les termes semblables pour les additionner :

$$A = (6a + 4a - 10a) + (6b - 4b) + 15$$

$$A = 0a + 2b + 15; \quad A = 2b + 15.$$

2. Développez l'expression B telle que $B = (3x - 4y)^2$.

Méthode

1° Repérer de quelle identité il s'agit.

2° Dire ce que valent les lettres a et b de l'identité dans le cas envisagé.

3° Appliquer à ces valeurs l'identité remarquable pour développer l'expression.

Corrigé

1° Il s'agit de l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

2° Dans ce cas $a = 3x$ et $b = 4y$.

3° $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ donc

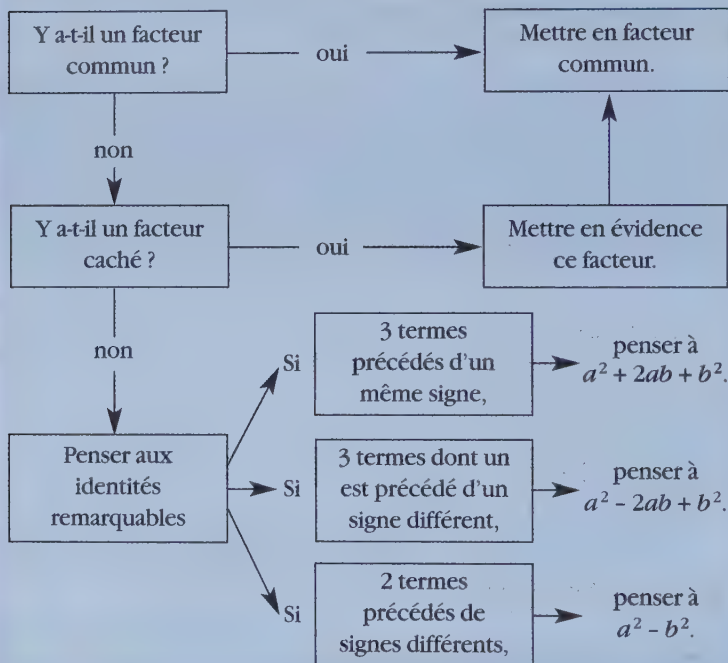
$$B = (3x)^2 - 2(3x)(4y) + (4y)^2 \text{ soit}$$

$$B = 9x^2 - 24xy + 16y^2.$$

2 Savoir factoriser une expression

Méthode générale

Pour factoriser, vous pouvez suivre cette démarche :



1. Factorisez l'expression C telle que :

$$C = (3x - 1)^2 - 4(x - 3)(3x - 1).$$

Corrigé

1° Un facteur est commun : $3x - 1$.

2° On met $3x - 1$ en facteur commun :

$$C = (3x - 1)[(3x - 1) - 4(x - 3)].$$

La factorisation est réalisée. On simplifie l'écriture de C .

$$C = (3x - 1)(3x - 1 - 4x + 12); \quad C = (3x - 1)(-x + 11).$$

2. Factorisez l'expression D telle que :

$$D = (x - 3)^2 - (2x - 6) - (3 - x)(x - 2).$$

Corrigé

1° On ne voit pas de facteur commun donc on recherche un facteur caché.

$$\text{Or } 2x - 6 = 2(x - 3) \text{ et } -(3 - x) = (x - 3).$$

2° On met en évidence le facteur $(x - 3)$:

$$D = (x - 3)^2 - 2(x - 3) + (x - 3)(x - 2).$$

3° On met $x - 3$ en facteur commun :

$$D = (x - 3)[(x - 3) - 2 + (x - 2)] ; \quad D = (x - 3)(x - 3 - 2 + x - 2) ;$$

$$D = (x - 3)(2x - 7).$$

3. Factorisez l'expression E telle que :

$$E = (2x + 1)^2 - 9.$$

Corrigé

1° Il n'y a pas de facteur commun ni de facteur caché, donc on pense aux identités remarquables.

L'expression E comporte deux termes précédés de signes différents, donc on pense à $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

2° Dans l'expression E , $a = 2x + 1$ et $b = 3$.

$$E = [(2x + 1) + 3][(2x + 1) - 3] ; \quad E = (2x + 1 + 3)(2x + 1 - 3) ;$$

$$E = (2x + 4)(2x - 2).$$

$$\text{En définitive, } E = 4(x + 2)(x - 1).$$

3 Savoir calculer sans calculatrice en s'aidant des identités remarquables

Calculez, en utilisant les identités remarquables, les nombres 203^2 ; 199^2 et 61×59 .

Méthode

1° Écrire le nombre sans sa puissance sous la forme d'une somme, d'une différence ou d'un produit où apparaissent des multiples de 10 ou de 100.

2° Reconnaître une des trois identités remarquables ; donner alors les valeurs de a et de b dans chaque cas.

3° Appliquer à ces valeurs les identités remarquables.

Corrigé

1° $203 = 200 + 3$; $199 = 200 - 1$; $61 \times 59 = (60 + 1)(60 - 1)$.

2° • $203^2 = (200 + 3)^2$; on reconnaît l'identité remarquable

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ où $a = 200$ et $b = 3$.

• $199^2 = (200 - 1)^2$; on reconnaît l'identité remarquable

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ où $a = 200$ et $b = 1$.

• $61 \times 59 = (60 + 1)(60 - 1)$; on reconnaît l'identité remarquable

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ où $a = 60$ et $b = 1$.

3° • $203^2 = 200^2 + 2 \times 3 \times 200 + 3^2$

$203^2 = 40\,000 + 1\,200 + 9$, d'où $203^2 = 41\,209$.

• $199^2 = 200^2 - 2 \times 200 \times 1 + 1 = 40\,000 - 400 + 1$,

d'où $199^2 = 39\,601$.

• $61 \times 59 = 60^2 - 1^2 = 3\,600 - 1 = 3\,599$.

s'Entraîner

1. Les expressions suivantes sont-elles des sommes ou des produits ?

$$\begin{array}{ll} A = (x+2) + 3(x-7)(x+1) ; & B = (7x-1)^2 ; \\ C = 3(x+2)(x-7) + (x-7) ; & D = (7x-1)^2(3x+4) ; \\ E = 7x-3(x+2). \end{array}$$

2. Développez et simplifiez les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l} A = -7(a-2b) + 3a - 5(a+2b) + a(3-b) ; \\ B = (7-a)(a+2) - 3(a-5) + (a+4)^2 ; \\ C = -(2a+3) - 7(a-b) + 7b - a(b+4). \end{array}$$

3. Écrivez plus simplement A et B.

$$A = -\frac{1}{7}x \cdot \frac{3}{4}x^2 \cdot \frac{8}{6}x ; \quad B = \left(-\frac{7}{3}x\right)^2 \cdot \frac{3}{4}x \cdot \frac{1}{5}x^2.$$

4. Développez les expressions algébriques A, B, C, D, E suivantes puis factorisez-les.

$$\begin{array}{ll} A = (x-3y)^2 - (2x+1)^2 ; & B = 3x-9+7x(x-3) ; \\ C = (2x+5)^2 + (2x+5)(x+4) ; & D = 9-49(x-3)^2 ; \\ E = (6-x)(x+2) + (x-6)^2. \end{array}$$

5. Calculez le plus simplement possible sans l'aide d'une calculatrice.

$$10,01^2 \quad 9,999^2 \quad 13 \times 27 \quad 13,01 \times 12,99$$

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	$(x - 7)^2 =$	$x^2 - 14x + 49$	$x^2 - 49$	$x^2 - 49 + 14x$
2	$2x(x - 3) =$	$3x - 3$	$2x + x - 3$	$2x^2 - 6x$
3	$(2x)^2 + (x - 3) =$	$2x^2 + x - 3$	$4x^2 + x - 3$	$2x^2 - 6x$
4	$4x^2 - 2x =$	$2x(x - 2)$	$x(x - 2)^2$	$2x(2x - 1)$
5	$-(7 + 3x) =$	$-7 + 3x$	$-7 - 3x$	$(7 - 3x)$
6	$9 - x^2 =$	$(3 - x)(3 + x)$	$(x - 3)(x + 3)$	$(x - 3)^2$
7	$81 + 18x + x^2 =$	$x(x + 18)$	$(x - 9)^2$	$(x + 9)^2$
8	$(x - 1)^2 =$	$(-x + 1)^2$	$(x + 1)^2$	$(-x - 1)^2$
9	$(x - 1)(2x - 10) =$	$4(x - 5)(x - 1)$	$2(x - 1)(x - 10)$	$2(x - 1)(x - 5)$
10	$(2x + 3)^2 =$	$2x^2 + 12x + 9$	$(3 + 2x)^2$	$(2x + 3)(2x - 3)$

RAPPELS DE COURS

1 EXISTENCE ET SIGNIFICATION D'UN RADICAL

Étant donné un nombre positif a , il existe un et un seul nombre positif b dont le carré est égal à a .

On note $b = \sqrt{a}$ et on lit b est égal au radical de a .

Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $b = \sqrt{a}$ signifie $b^2 = a$.

Exemples

$$3^2 = 9 \text{ donc } \sqrt{9} = 3 ; \quad 5^2 = 25 \text{ donc } \sqrt{25} = 5 ;$$

9 a pour racine carrée 3 ; 25 a pour racine carrée 5.

$\sqrt{x} \geq 0$ et $x \geq 0$, x est appelé radicande et $\sqrt{}$ se lit radical.

Si $x \geq 0$, alors $(\sqrt{x})^2 = x$.

Exemples

$$(\sqrt{2})^2 = 2 ; \quad (\sqrt{5})^2 = 5 ; \quad (\sqrt{3})^2 = 3 ; \quad \sqrt{0} = 0 ; \quad \sqrt{1} = 1.$$

$\sqrt{-3^2 \times (-1)^3}$ a un sens, car le radicande est positif ($3^2 \times 1^3$).

$\sqrt{(-2)(-2)^2}$ n'a pas de sens, car le radicande est négatif ($(-2)^3$).

2 MULTIPLICATION, QUOTIENT ET SOMME DE RADICAUX LORSQU'ILS EXISTENT

$$a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$b > 0 \quad \sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

$$a \geq 0 \text{ et } b > 0 \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\text{Si } ab \neq 0, \text{ alors } \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Exemple

$$\sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{9 \times 9} = \sqrt{9^2} = 9.$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

3 RACINE CARRÉE ET CARRÉ

Un nombre strictement négatif ne peut avoir de racine carrée.
Rappelez-vous que le carré d'un nombre est positif.

! $(\sqrt{-1})^2$ n'a aucun sens, car -1 est un nombre négatif.

! Ne confondez pas carré et racine carrée.

Un nombre positif a est le carré de deux nombres, l'un positif ($\sqrt{a}$) et l'autre négatif ($-\sqrt{a}$).

Si $a \geq 0$, alors $(\sqrt{a^2}) = a$ et $(-\sqrt{a})^2 = a$.

! Soyez précis dans le langage.

36 est le carré de 6 ou de -6 ;

6 est le carré de $\sqrt{6}$ ou de $-\sqrt{6}$;

36 a pour racine carrée 6 ;

36 a pour carré 1 296 ;

$-\sqrt{6}$ a pour carré 6 ;

6 est la racine carrée de 36.

4 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION $x^2 = a$

♦ Premier cas : $a < 0$

Si $a < 0$, alors a n'est le carré d'aucun nombre, donc l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

♦ Deuxième cas : $a = 0$

$x^2 = 0$ soit $x = 0$, donc l'équation $x^2 = a$ admet 0 pour solution.

♦ Troisième cas : $a > 0$

$x^2 - a = 0$; a est positif donc a est le carré de $\sqrt{a}$ ou de $-\sqrt{a}$ et $x^2 - a$ est une différence de deux carrés.

$$x^2 - a = 0 \quad \text{soit} \quad (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0 ;$$

$$\text{soit} \quad x + \sqrt{a} = 0 \quad \text{ou} \quad x - \sqrt{a} = 0 ; \quad x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}.$$

Les nombres solutions de l'équation $x^2 = a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemples

• $x^2 = -7$; un carré n'est jamais négatif donc aucune solution.

• $16x^2 - 4x + \frac{1}{4} = 0$ (forme $a^2 - 2ab + b^2 = 0$ soit $(a - b)^2 = 0$)

$$\text{soit} \quad \left(4x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\text{ou bien} \quad 4x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{donc} \quad 4x = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad x = \frac{1}{8}.$$

La solution est $\frac{1}{8}$.

• $x^2 = 25$ soit $x^2 - 25 = 0$ soit $(x - 5)(x + 5) = 0$ d'où $x - 5 = 0$ ou $x + 5 = 0$; par suite $x = 5$ ou $x = -5$.

Les solutions sont 5 et -5.

• $(2x - 7)^2 = 25$ soit $(2x - 7)^2 - 25 = 0$ donc

$$(2x - 7 + 5)(2x - 7 - 5) = 0 \quad \text{donc} \quad (2x - 2)(2x - 12) = 0 ;$$

$$\text{par suite} \quad 4(x - 1)(x - 6) = 0 \quad \text{soit} \quad x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 6 = 0 ;$$

donc deux solutions : 1 et 6.

5 QUAND ET COMMENT LES RADICAUX INTERVIENNENT-ILS ?

Dans la simplification des produits après développement

$$A = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

$$A = 3 + 2\sqrt{15} + 5 - (5 - 3) = 8 + 2\sqrt{15} - 2 = 6 + 2\sqrt{15}.$$

Dans certaines factorisations

$$B = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 - 3(x^2 - 3)$$

$$B = (x - \sqrt{3})^2 - 3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

$$B = (x - \sqrt{3})[(x - \sqrt{3}) - 3(x + \sqrt{3})]$$

$$B = (x - \sqrt{3})(x - \sqrt{3} - 3x - 3\sqrt{3})$$

$$B = (x - \sqrt{3})(-2x - 4\sqrt{3}) = -2(x - \sqrt{3})(x + 2\sqrt{3}).$$

Dans la simplification des sommes de radicaux

$$C = \sqrt{72} + 3\sqrt{12} - 2\sqrt{8} + 4\sqrt{75}$$

$$C = \sqrt{2 \times 36} + 3\sqrt{4 \times 3} - 2\sqrt{4 \times 2} + 4\sqrt{25 \times 3}$$

$$C = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 20\sqrt{3} = 2\sqrt{2} + 26\sqrt{3}.$$

Dans la transformation d'une écriture

$$D = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Dans le calcul exact d'une longueur en géométrie

Soit un triangle MAI rectangle en A tel que $AM = 8$ cm et $IM = 12$ cm.

On cherche la valeur exacte de AI .

Le triangle MAI est rectangle en A . On peut donc appliquer le théorème de Pythagore.

$$IM^2 = AI^2 + AM^2 \text{ d'où } AI^2 = IM^2 - AM^2.$$

$$AI^2 = 144 - 64 \text{ soit } AI = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}; AI = 4\sqrt{5} \text{ cm.}$$

Savoir faire

1 Savoir calculer avec des radicaux

Calculez les nombres suivants :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{25 - 16}; & B &= \sqrt{25^2 - 16^2}; & C &= \sqrt{25} + \sqrt{16}; \\ D &= \sqrt{5} \times \sqrt{125}; & E &= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Méthode

1° Repérer s'il s'agit d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

2° • Traiter chaque terme indépendamment s'il s'agit d'une somme.

• Regrouper sous un même radical les radicandes s'il s'agit d'un produit.

• Calculer les sommes figurant sous le radical s'il s'agit d'un seul radical.

• Multiplier numérateur et dénominateur de chaque fraction par le radical figurant au dénominateur s'il s'agit d'un quotient.

Corrigé

1° On repère s'il s'agit d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

B et C sont des sommes.

A est le radical d'une somme.

D est un produit. E est un quotient.

2° • On traite séparément chaque terme de la somme :

$$B = \sqrt{25^2 - 16^2} = 25 - 16 = 9; \quad C = \sqrt{25} + \sqrt{16} = 5 + 4 = 9.$$

• On regroupe sous un même radical les radicandes.

$$D = \sqrt{5 \times 125} = \sqrt{5 \times 5 \times 5 \times 5} = 5 \times 5 = 25.$$

• On calcule les sommes ou les différences figurant sous un radical :

$$A = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$$

• On multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{3}$:

$$E = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7 \times 3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

2 Savoir écrire une somme sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers,

le nombre $A = 7\sqrt{6} - 3\sqrt{96} + 2\sqrt{24}$.

Méthode

- 1° Repérer l'entier b , le plus grand diviseur commun (cf. Savoir faire, p. 57) à tous les radicandes.
- 2° Écrire chaque radicande sous la forme d'un produit dont l'un des facteurs est b et l'autre un carré.
- 3° Extraire les carrés.
- 4° Simplifier la somme.

Corrigé

1° On repère b : $b = 6$.

2° On écrit chaque radicande sous forme d'un produit :

$$A = 7\sqrt{6} - 3\sqrt{16 \times 6} + 2\sqrt{4 \times 6}.$$

3° On extrait les carrés :

$$A = 7\sqrt{6} - 3 \times 4\sqrt{6} + 2 \times 2\sqrt{6} = 7\sqrt{6} - 12\sqrt{6} + 4\sqrt{6}.$$

4° On simplifie la somme :

$$A = (7 - 12 + 4)\sqrt{6} = -\sqrt{6}.$$

A est écrit sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a = -1$ et $b = 6$.

s'Entraîner

1. Calculez les nombres suivants :

$$A = \sqrt{13^2 - 12^2};$$

$$B = \sqrt{13^2} + \sqrt{12^2};$$

$$C = \sqrt{27} \times \sqrt{6};$$

$$D = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}};$$

$$E = \sqrt{27} \times \sqrt{6} - 3\sqrt{2}.$$

2. Prouvez que $A = \sqrt{8} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$ est un entier.

3. Calculez en utilisant les identités remarquables :

$$A = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3});$$

$$B = (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2});$$

$$C = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2;$$

$$D = (5 + 2\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3}).$$

4. Développez et simplifiez A.

$$A = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1).$$

5. Calculez $\sqrt{500} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{45}$.

Donnez le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers.

6. On donne deux nombres A et B.

$$A = 2 + \sqrt{6};$$

$$B = 1 - \sqrt{6}.$$

Calculez A^2 ; B^2 ; $A \times B$.

Donnez chaque résultat sous la forme $p + q\sqrt{6}$; p et q étant des entiers positifs ou négatifs.

7. a) Construisez un triangle MNP rectangle en N tel que $MN = 6$ et $MP = 12$. Calculez la longueur exacte de NP .

b) Déduisez-en la construction du losange $ABCD$ de centre O dont les diagonales $[BD]$ et $[AC]$ ont pour longueurs respectives 6 et $6\sqrt{3}$. Justifiez votre construction.

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	$\sqrt{25} =$	5	- 5	25
2	$7\sqrt{5} - 6\sqrt{5} =$	1	$\sqrt{5}$	5
3	$7\sqrt{5} \times 6\sqrt{5} =$	42	$42\sqrt{5}$	210
4	$\sqrt{(-3)^2} =$	- 3	3	n'existe pas
5	$\sqrt{48} =$	$16\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	$3\sqrt{16}$
6	si $x > 0$ et $\sqrt{x} = 4$, alors $x =$	$\sqrt{4}$	16	2
7	$(\sqrt{7})^2 =$	$\sqrt{7}$	7	49
8	$x^2 = -3$ a pour solution	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$	aucun nombre
9	$x^2 = 7$ a pour solution	- 7 et 7	$\sqrt{7}$	$-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$
10	$\sqrt{\frac{9}{2}} =$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

RAPPELS DE COURS

1 VALEURS APPROCHÉES, TRONCATURES, ARRONDIS

Lorsque les valeurs ne sont pas exactes, certaines calculatrices affichent des valeurs arrondies, d'autres des troncatures.

$$1,414\,213\,5 < \sqrt{2} < 1,414\,213\,6.$$

Les calculatrices n'affichent généralement que huit chiffres.

Lorsqu'on frappe $\sqrt{2}$, si la calculatrice affiche :

1,414 213 5 elle pratique la *troncature*, c'est-à-dire qu'elle coupe après le huitième chiffre ;

1,414 213 6 elle pratique l'*arrondi* ; si le neuvième chiffre est inférieur à 5, elle garde le huitième chiffre sinon, elle affiche pour huitième chiffre celui qui lui est immédiatement supérieur.

Exemple

$$2,645\,751\,3 < \sqrt{7} < 2,645\,751\,4.$$

2,645 est la valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de $\sqrt{7}$.

2,6 est la troncature au 1^{er} ordre de $\sqrt{7}$; c'est aussi l'arrondi au 1^{er} ordre et la valeur approchée par défaut à 10^{-1} près de $\sqrt{7}$.

2,646 est l'arrondi au troisième ordre de $\sqrt{7}$; c'est aussi la valeur approchée par excès à 10^{-3} près de $\sqrt{7}$.

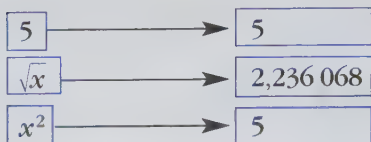
2 CALCULATRICE ET RADICAUX

D'après la définition, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a .

Donc :

$$(\sqrt{5})^2 = 5.$$

Séquence d'une calculatrice :



Pourtant



Le nombre affiché pour $\sqrt{5}$ est une valeur arrondie.

Lorsqu'on exécute la séquence 5 $\sqrt{x}$ x^2 on obtient 5 car la machine affiche une valeur arrondie mais garde en mémoire la valeur exacte de $\sqrt{5}$.

Exemple

Sachant que $f(x) = -6x^2 - 17x + 39$ et que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, on recherche une valeur approchée par défaut de $f(\sqrt{3})$ à 0,03 près.

$$f(\sqrt{3}) = -6 \times 3 - 17\sqrt{3} + 39 = -17\sqrt{3} + 21 ;$$

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733 \text{ soit } 29,444 < 17\sqrt{3} < 29,461$$

$$\text{donc } -29,461 < -17\sqrt{3} < -29,444$$

$$\text{soit } -8,461 < -17\sqrt{3} + 21 < -8,444.$$

Un encadrement de $f(\sqrt{3})$ convenant est

$$-8,47 < f(\sqrt{3}) < -8,44$$

donc $-8,47$ est une valeur approchée par défaut de $f(\sqrt{3})$ à 0,03 près.

Savoir faire

Savoir comparer des nombres dont un au moins comporte des radicaux

Méthode générale

- 1° Regarder si les nombres sont de même signe ou non.
S'ils ne sont pas de même signe, le plus petit est le négatif.
- 2° Transformer si possible les écritures sous la forme $a\sqrt{b}$. Si tous les nombres sont écrits en fonction du même radicande $a\sqrt{b}$, $c\sqrt{b}$, on compare a et c .
- 3° Comparer leur carré si ces nombres s'écrivent sous la forme $a\sqrt{b}$ et $c\sqrt{d}$ avec $b \neq d$.
- 4° Calculer, sinon, une valeur approchée des nombres.
Comparer les valeurs approchées.

1. Comparez $3\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$.

Corrigé

- 1° On regarde si les nombres sont de même signe.
Les nombres $3\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$ sont tous les deux positifs.
- 2° On transforme si possible les écritures.
Ici ce n'est pas possible.
- 3° On calcule les carrés :
 $(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$ et
 $(5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$.
Or $45 < 50$ donc $3\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$.

2. Comparez $\sqrt{3} - 2$ et $7 - 3\sqrt{5}$.

Corrigé

On regarde si les nombres sont de même signe.

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733 \quad \text{donc} \quad \sqrt{3} - 2 < 0.$$

$$\text{Or } 6,708 < 3\sqrt{5} < 6,711, \quad \text{donc} \quad -6,711 < -3\sqrt{5} < -6,708$$

$$\text{et par suite } 7 - 6,711 < 7 - 3\sqrt{5} < 7 - 6,708.$$

$$\sqrt{3} - 2 < 0 \quad \text{et} \quad 7 - 3\sqrt{5} > 0, \text{ donc}$$

$$\sqrt{3} - 2 < 7 - 3\sqrt{5}.$$

s'Entraîner

1. Soit $A = 5x^2 + 2x - 3$.

a) Calculez A pour $x = \sqrt{3}$.

b) Écrivez un encadrement d'ordre 3 de $\sqrt{3}$ et donnez une valeur approchée par excès à 10^{-2} près de A .

2. Comparez $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ et $3 - \sqrt{7}$.

3. a) Écrivez des encadrements d'ordre 2 de $5 - \sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ sachant que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.

b) Rangez dans l'ordre croissant les nombres précédents.

4. Comparez $\sqrt{2} - 3$ et $\sqrt{5} - 1$.

5. Écrivez chacun des nombres A et B suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant deux entiers avec b entier le plus petit possible ; puis comparez A et B .

$$A = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{3}; \quad B = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{48} + 2\sqrt{27}.$$

6. Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, donnez un encadrement de A tel que : $A = (\sqrt{2} - 1)^2 - 3(2\sqrt{2} + 3)^2$ à 4×10^{-2} près.

7. a) Développez $(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})^2$.

b) Le nombre $\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$ est-il positif ou négatif ? Déduisez-en une écriture plus simple du nombre B tel que $B = \sqrt{19 - 4\sqrt{21}}$.

c) Sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, et que $2,645 < \sqrt{7} < 2,646$, donnez un encadrement de B d'amplitude 0,02.

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

Pour les questions 1 à 4, on donne $A = 3x^2 + 7x - 1$ et $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.
Calculer d'abord la valeur exacte de A puis encadrer A pour répondre aux questions.

1.	Pour $x = \sqrt{2}$, une valeur approchée par défaut de A à $2 \cdot 10^{-2}$ près est				
A	14,898	B	14,89	C	14,90
2.	Un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $\sqrt{2}$ est				
A	$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$	B	$1,41 < \sqrt{2} < 1,43$	C	$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
3.	Un encadrement d'amplitude 7×10^{-3} de A , pour la valeur $x = \sqrt{2}$ est				
A	$14,898 < A < 14,905$	B	$14,90 < A < 14,91$	C	$14,898 < A < 15$
4.	Si $x = \sqrt{5}$ et $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$ un encadrement de A est				
A	$15,652 < A < 15,659$	B	$29,652 < A < 29,659$	C	$29,5 < A < 29,6$
5.	$C = \sqrt{5} - 7$; $D = \sqrt{54 - 14\sqrt{5}}$ alors				
A	$C < D$	B	$C = D$	C	$C > D$
6.	Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, un encadrement de $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ d'amplitude 0,02 est				
A	$-2,4 < \frac{1}{1 - \sqrt{2}} < 2,5$	B	$-2,42 < \frac{1}{1 - \sqrt{2}} < -2,3$	C	$-2,42 < \frac{1}{1 - \sqrt{2}} < -2,40$
7.	Le nombre A tel que $A = \sqrt{7} - 2\sqrt{3}$ est				
A	strictement positif	B	nul	C	strictement négatif

5

Équations et inéquations du premier degré à une inconnue

RAPPELS DE COURS

1 RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

- ♦ Résoudre une équation, c'est déterminer les valeurs prises par l'inconnue pour que l'égalité soit vraie.
- ♦ Est solution d'une équation toute valeur de l'inconnue qui rend vraie l'égalité.
- ♦ Quelques propriétés pour résoudre une équation :

Quels que soient les nombres a , b et c :

$$P_1 : \text{si } a = b, \text{ alors } a + c = b + c ;$$

$$P_2 : \text{si } a + c = b + c, \text{ alors } a = b ;$$

$$P_3 : \text{si } a = b, \text{ alors } ac = bc ;$$

$$P_4 : \text{si } ac = bc \text{ et } c \neq 0, \text{ alors } a = b.$$

Toute équation du premier degré (l'exposant de l'inconnue est égal à 1) peut s'écrire sous la forme $ax = b$.

Si $a \neq 0$, alors $x = \frac{b}{a}$; l'équation $ax = b$ a une seule solution $\frac{b}{a}$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $0x = b$; l'équation $ax = b$ n'a pas de solution.

Si $a = 0$ et $b = 0$, alors $0x = 0$; tout nombre est solution de l'équation $ax = b$.

! Une équation a deux membres : celui de droite et celui de gauche ; il s'agit des expressions situées à droite et à gauche du symbole d'égalité.

2 RÉSOLUTION D'UNE INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

- ◆ Résoudre une inéquation consiste à déterminer les valeurs prises par l'inconnue pour que l'inégalité soit vraie.
- ◆ Est solution d'une inéquation toute valeur de l'inconnue qui rend vraie l'inégalité.

Exemple

- $2x + 5 > x - 1$ est une inéquation du premier degré dont l'inconnue est x ; 3 n'est pas une solution ; par contre 0 est une solution de l'inéquation car $5 > -1$ est vraie.

- ◆ Quelques propriétés pour résoudre une inéquation :

Quels que soient les nombres a, b, c :

P_5 : si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$;

P_6 : si $a + c \leq b + c$, alors $a \leq b$;

P_7 : si $c > 0$ et $a \leq b$, alors $ac \leq bc$;

P_8 : si $ac \leq bc$ et $c > 0$, alors $a \leq b$;

P_9 : si $c < 0$ et $a \leq b$, alors $ac \geq bc$;

P_{10} : si $ac \geq bc$ et $c < 0$, alors $a \leq b$.

Ces propriétés restent vraies pour les relations $<, \geq$ ou $>$.

Toute inéquation du premier degré (l'exposant de l'inconnue est égal à 1) peut s'écrire sous une des formes : $ax \leq b$ ou bien $ax \geq b$ ou bien $ax < b$ ou bien $ax > b$.

! On appelle membre d'une inéquation chacune des expressions situées à droite ou à gauche du symbole d'inégalité.

Savoir faire

1 Savoir résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Résolvez l'équation (E) d'inconnue x telle que :

$$(E) : -3(x+5) + 2(2x-1) = 5(-x+8) + 3.$$

Méthode

1° Développer et réduire les expressions situées dans chacun des membres de l'équation.

2° Utiliser les propriétés P_1 et P_2 citées dans le cours pour ramener l'équation à la forme $ax = b$.

3° Utiliser les propriétés P_3 et P_4 citées dans le cours pour déterminer la solution de l'équation.

4° Vérifier que c'est bien la solution en reportant la valeur trouvée dans l'écriture initiale, puis conclure.

Corrigé

1° On développe en retirant les parenthèses :

$$(E) : -3x - 15 + 4x - 2 = -5x + 40 + 3.$$

On réduit les termes semblables :

$$(E) : x - 17 = -5x + 43.$$

2° On ajoute 17 et $5x$ à chaque membre de l'équation, ce qui revient à passer un terme d'un membre dans l'autre en changeant de signe.

$$(E) : x + 5x = 43 + 17 \quad \text{soit } (E) : 6x = 60.$$

3° On multiplie les deux membres par $\frac{1}{6}$ (P_3) ou bien on divise les deux membres par 6 (P_4). Ces deux transformations étant équivalentes, on obtient :

$$(E) : x = \frac{60}{6} \quad \text{soit } x = 10.$$

4° Vérification :

$$\begin{cases} -3(10+5) + 2(2 \times 10 - 1) = -45 + 38 = -7 \\ 5(-10+8) + 3 = -10 + 3 = -7. \end{cases}$$

Donc la solution de l'équation est le nombre 10.

2 Savoir résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue

Résolvez l'inéquation (I) d'inconnue x telle que :

$$(I) : -5(x-6) + 4(-x+3) > -3(2x-3) - 3.$$

Méthode

1° Développer et réduire les expressions situées dans chacun des membres de l'inéquation.

2° Utiliser les propriétés P_5 et P_6 citées dans le cours pour ramener l'inéquation à une des quatre formes $ax \leq b$ ou $ax \geq b$ ou $ax < b$ ou $ax > b$.

3° Utiliser les propriétés P_7 , P_8 , P_9 et P_{10} citées dans le cours pour déterminer les solutions de l'inéquation.

4° Conclure et donner une interprétation géométrique des solutions.

Corrigé

1° On développe en enlevant les parenthèses :

$$(I) : -5x + 30 - 4x + 12 > -6x + 9 - 3.$$

On réduit les termes semblables :

$$(I) : -9x + 42 > -6x + 6.$$

2° On ajoute -42 et $6x$ à chacun des membres de l'inéquation, ce qui revient à passer 42 et $-6x$ dans l'autre membre en changeant de signe.

$$(I) : -9x + 6x > -42 + 6, \text{ soit } (I) : -3x > -36.$$

3° On multiplie les deux membres de l'inéquation par $-\frac{1}{3}$ (P_9)

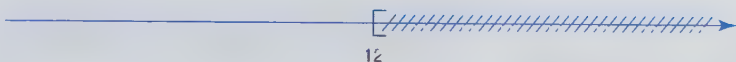
ou bien on divise les deux membres de l'inéquation par -3 (P_{10}).

Ces deux transformations étant équivalentes, on obtient :

$$(I) : x < \frac{-36}{-3} \quad \text{soit } x < 12.$$

4° Tous les nombres strictement inférieurs à 12 sont solutions de l'inéquation I .

On représente les solutions sur une droite orientée. Par convention, on hachure la partie de la droite qui ne convient pas.



Le crochet tourné vers l'extérieur de l'ensemble indique que le nombre 12 ne fait pas partie des solutions.

s'Entraîner

Pour tous les exercices, pensez à vérifier que les solutions trouvées conviennent bien.

Exercices 1 et 2 : résolvez les équations.

1. $E_1 : \frac{x-4}{4} = \frac{2x+4}{2};$

$E_2 : x + \frac{1}{4} = 2x - \sqrt{2};$

$E_3 : \frac{x\sqrt{2}}{2} = 3x - 4;$

$E_4 : \sqrt{2}(7 - 2x) = -2x + 1.$

2. $E_1 : 2x - 3 = 2x - 1;$

$E_2 : (x-2)^2 = (x-3)(x+7);$

$E_3 : \frac{x}{3} - 3 = \frac{5}{4};$

$E_4 : \frac{-x+3}{4} = \frac{2x+4}{14} - 1.$

3. Résolvez les inéquations et représentez graphiquement l'ensemble des solutions.

$I_1 : 3(x+2) > -4(x+5) - 7;$ $I_2 : \frac{x-4}{3} - \frac{1}{6} \leq \frac{-2x+4}{5} - \frac{x+1}{10};$

$I_3 : 2x - 1 > 2(x+2).$

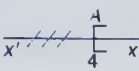
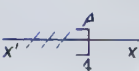
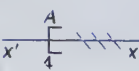
4. Résolvez graphiquement les équations et inéquations suivantes sur une droite graduée.

$E_1 : 3x - 7 = x + 2;$

$I_1 : 4x - 3 < 6x + 5.$

► corrigés p. 191

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	$4x - 7 = 0$ a pour solution	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{4}$	3
2	La solution de $x\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$ est	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	1
3	3 est solution de	$3x - 1 > 0$	$x^2 + 9 = 0$	$3x < 1$
4	 $]4x)$ représente les solutions de	$2x - 3 < x + 2$	$2x - 3 \leq x + 2$	$2x - 3 > x + 2$
5	$-2x > 6$ a les mêmes solutions que	$x\sqrt{5} < -\sqrt{45}$	$2x > -6$	$2 + x < 5$
6	La solution de $\frac{3x - 1}{2} = \frac{5x - 4}{3}$ est	11	5	-11
7	La représentation des solutions de $x - 4 < 0$ est la demi-droite non hachurée	 $[4x)$	 $]4x)$	 $]4x')$
8	$3 > -14x$ peut s'écrire	$x < \frac{3}{14}$	$x < -\frac{3}{14}$	$x > -\frac{3}{14}$
9	Les nombres solutions de $2x - 3 < 1$ sont tels que	$x > 2$	$x < 2$	$x < -2$

6

Équations et problèmes se ramenant au premier degré

RAPPELS DE COURS

ÉQUATIONS POUVANT S'ÉCRIRE SOUS FORME D'UN PRODUIT

Pour résoudre une équation de type $A = 0$ dont le degré est au moins deux, après avoir factorisé A on utilise le théorème :

un produit de facteurs est nul
si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Quels que soient les nombres a et b ,
si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$;
si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $ab = 0$.

Savoir faire

1 Savoir résoudre une équation de degré supérieur strictement à un

Méthode générale

- 1° Passer tous les termes dans un même membre.
- 2° Regarder si les termes de degré supérieur à deux s'éliminent.
 - S'ils s'éliminent, développer, réduire et résoudre.
 - Sinon, factoriser et résoudre en utilisant la propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

1. Résoudre l'équation suivante :

$$(x - 1)^2 = (x - 3)(x + 7).$$

Corrigé

- 1° On passe tous les termes dans le premier membre :
$$(x - 1)^2 - (x - 3)(x + 7) = 0.$$
- 2° On regarde si les termes de degré supérieur à deux s'éliminent ; c'est le cas ici.
On développe : $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 7x + 3x + 21 = 0.$
On réduit : $-6x + 22 = 0.$
On résout : $x = \frac{11}{3}.$
L'équation admet $\frac{11}{3}$ pour solution.

2. Résoudre l'équation $(x - 1)(3x - 2) = 4 - 9x^2$.

Corrigé

- 1° On passe tous les termes dans le premier membre :
$$(x - 1)(3x - 2) + 9x^2 - 4 = 0.$$
- 2° On regarde si les termes de degré supérieur à deux s'éliminent ; ce n'est pas le cas ici.

On factorise : $(x - 1)(3x - 2) + (3x - 2)(3x + 2) = 0$

soit $(3x - 2)(x - 1 + 3x + 2) = 0$;

$$(3x - 2)(4x + 1) = 0.$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$$3x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 4x + 1 = 0, \quad \text{soit} \quad x = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{4}.$$

Les nombres solutions sont $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{4}$.

2 Savoir mettre un problème en équation ou en inéquation et le résoudre

La somme de deux entiers consécutifs est égale à 37. Quels sont ces deux nombres ?

Méthode

1° Choisir l'inconnue ; ne pas oublier les unités (mètres, secondes, etc.) ni les conditions (entier, positif, etc.).

2° Mettre en équation le problème à l'aide de l'inconnue choisie.

3° Résoudre algébriquement ou graphiquement l'équation ou l'inéquation.

4° Vérifier que les solutions trouvées conviennent.

Corrigé

1° On choisit l'inconnue : on note x l'un des nombres ; l'autre est le nombre entier suivant que l'on note donc $x + 1$.

2° On met le problème en équation. La somme des nombres est 37 donc $x + (x + 1) = 37$.

3° On résout l'équation :

$$2x + 1 = 37, \quad \text{soit} \quad 2x = 36$$

$$x = 18.$$

4° On vérifie.

Si l'un des nombres est 18, l'autre est 19.

$$18 + 19 = 37, \quad \text{donc la solution convient.}$$

Les nombres cherchés sont 18 et 19.

s'Entraîner

1. Résoudre les équations suivantes :

$$E_1 : 4x^2 - 2 = 0 ;$$

$$E_2 : (x - 2)^2 = (x + 1)(x + 7) ;$$

$$E_3 : x(x - 7) = 14x^2 - 3x ;$$

$$E_4 : (x + 4)(7x + 1) = 3(x^2 - 16) ;$$

$$E_5 : 7(x - 2)^2 = 3(x + 1)(x - 2) ;$$

$$E_6 : (x - 6)^2 = (x - 3)(x + 4).$$

2. Soit $ABCD$ un carré de côté 2 cm. On ajoute a à la longueur de chaque côté ; l'aire du carré obtenu est le double de l'aire du carré $ABCD$. Que vaut a ?

3. Déterminez trois nombres entiers consécutifs, sachant que leur somme est égale à 84.

4. Déterminez trois nombres pairs consécutifs dont la somme est égale à 132.

5. Déterminez un nombre tel que la somme de son carré et de 7 soit égale au carré de la somme de ce nombre et de 1.

6. Une maman a 49 ans et ses deux enfants ont 22 ans et 24 ans. Dans combien d'années l'âge de la mère sera-t-il la somme des âges de ses enfants ?

7. Un étudiant avait acheté des livres pour 96 €. Il en revend le tiers à 16,5 € pièce et le reste 17,25 € l'un.

Sachant qu'il a fait un bénéfice de 6 €, calculez le nombre de livres qu'il avait achetés.

8. La différence entre la moitié d'un nombre et son quart est 7. Quel est ce nombre ?

9. Soit D , la droite d'équation $y = 7x - 1$.

Quelle est l'abscisse du point A de la droite D , dont l'ordonnée est 24 ?

10. Une dame achète deux fois dans la semaine deux kilogrammes d'abricots. Le prix du kilogramme d'abricots a augmenté d'un tiers entre le premier et le deuxième achat.

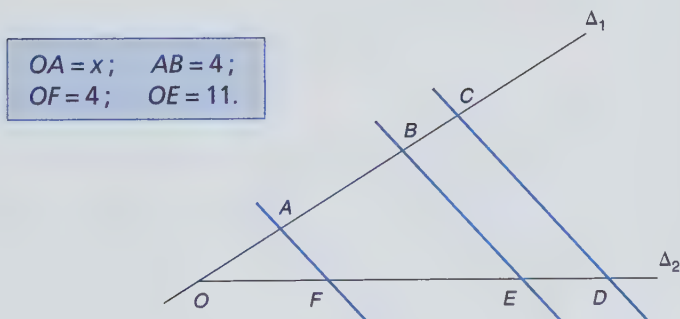
Sachant qu'elle paie 2,4 € de plus la deuxième fois, déterminez le prix d'un kilogramme d'abricots la première fois.

11. Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites sécantes en O et d_1, d_2 et d_3 trois droites parallèles.

Remarque : la résolution de cet exercice nécessite l'utilisation de la propriété de Thalès. Reportez-vous éventuellement au chapitre 18.

a) En utilisant les indications données par la figure ci-dessous, calculez x tel que $OA = x$.

b) Sachant que $OD = x + 12$ et que x est la valeur trouvée à la question précédente, calculez OC et donnez-en une valeur approchée par excès à 0,1 près.



► corrigés p. 193

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
	La longueur x d'un rectangle dépasse sa largeur de 4 cm.			
1	• Sa largeur est	$x + 4$	$x - 4$	$4x$
2	• Le périmètre est	$2x + 4$	$4x + 8$	$4x - 8$
3	• Si le périmètre vaut 160, ses dimensions sont	42 et 46	42 et 38	78 et 82
4	Les dimensions d'un triangle sont 3, x , $x - 1$. Sachant que le périmètre est égal à $x + 6$, alors les dimensions du triangle sont	3, 4, 5	2, 3, 4	3, 4, 3
5	$(x - 1)(x + 1) = 0$ a les mêmes solutions que	$(-x - 1)$ $(-x + 1) = 0$	$3x + 3 = 0$	$x^2 - 1 < 0$
6	Les solutions de $(x - 5)(2x + 1) = 0$ sont	5 et - 0,5	- 5 et $\frac{1}{2}$	- 1 et 5
7	Le carré d'un nombre non nul est égal à son triple. Ce nombre est	2	3	4
	Le côté d'un carré est multiplié par 1,2.			
8	• Son aire est multipliée par	$1,2 \times 4$	1,2	$(1,2)^2$
9	• Son périmètre est multiplié par	$1,2 \times 4$	1,2	$(1,2)^2$

RAPPELS DE COURS

1 AUTOUR DES NOMBRES

♦ Un *entier naturel* est un nombre entier non précédé de signes.

Exemples : 5 ; 10.

♦ Un *entier relatif* est un nombre entier précédé d'un signe.

Exemples : + 5 ; - 10.

♦ Un *nombre décimal* est le produit d'un entier et d'une puissance de dix.

Exemple : $3,45 = 345 \times 10^{-2}$.

♦ Un *nombre rationnel* est un nombre qui peut s'écrire comme quotient de deux entiers.

Tout décimal est un rationnel.

Exemple : $1,5 = \frac{15}{10}$.

Certains rationnels ne sont pas décimaux.

Exemples : $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{11}$.

Certains nombres ne sont pas rationnels ; on les appelle des nombres *irrationnels*.

Exemples : π et $\sqrt{2}$.

2 RÈGLES DE CALCUL

Les nombres a , b , c et d sont des entiers.

$$\text{Si } b \neq 0, \text{ alors } \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

$$\text{Si } bd \neq 0, \text{ alors } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$\text{Si } bcd \neq 0, \text{ alors } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\text{Si } b \neq 0, \text{ alors } \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

! N'oubliez pas que si $b \neq 0$, $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.

3 MULTIPLES ET DIVISEURS

Soit a et b deux nombres entiers tels que b soit non nul.

Le nombre a est multiple de b , si et seulement si, il existe un nombre entier k tel que $a = bk$.

a multiple de b

soit

b diviseur de a

Exemple

$6 = 2 \times 3$. On peut dire que 6 est multiple de 3 ou 6 est multiple de 2 ou 2 est un diviseur de 6 ou 3 est un diviseur de 6.

4 CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ

♦ Par 2 :

Les entiers terminés par 0, 2, 4, 6 ou 8 sont divisibles par 2.

♦ Par 3 :

Les nombres entiers dont la somme des chiffres est un multiple de 3 sont divisibles par 3.

♦ Par 4 :

Les nombres entiers sont divisibles par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est un multiple de 4.

♦ Par 5 :

Les nombres entiers terminés par 0 ou 5 sont divisibles par 5.

♦ Par 9 :

Les nombres entiers dont la somme des chiffres est divisible par 9 sont divisibles par 9.

Exemple

316 est divisible par 2 car son dernier chiffre est 6.

Il est aussi divisible par 4 car ses deux derniers chiffres forment un nombre multiple de 4 ($16 = 4 \times 4$).

Il n'est pas divisible par 3 car $3 + 1 + 6 = 10$ et 10 n'est pas un multiple de 3.

5 PROPRIÉTÉS

Si deux nombres a et b , avec a supérieur à b , sont multiples d'un même nombre k , alors

le nombre $a + b$ est un multiple de k

et le nombre $a - b$ est un multiple de k .

6 PGCD

Parmi tous les diviseurs communs à deux nombres entiers a et b , il en existe un noté PGCD (a, b) qui est le plus grand diviseur commun à a et b .

♦ Si $a = bk$, alors $\text{PGCD}(a, b) = b$.

♦ Si $\text{PGCD}(a, b) = 1$, alors les nombres a et b sont dits premiers entre eux.

♦ Si $a = bq + r$ avec $r \neq 0$, alors $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$.

7 FRACTION IRRÉDUCTIBLE

♦ Soit a et b deux nombres entiers tels que b non nul. La fraction $\frac{a}{b}$ est dite irréductible si et seulement si les deux nombres a et b sont premiers entre eux.

♦ Si a et b sont multiples d'un même nombre non nul k , alors il existe a' et b' tels que

$$a = ka' \quad \text{et} \quad b = kb'.$$

Par suite

$$\frac{a}{b} = \frac{ka'}{kb'} = \frac{a'}{b'}.$$

8 DIVISION EUCLIDIENNE

a. Définition

Étant donné deux nombres entiers naturels non nuls a et b , il existe deux entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$. Le nombre q est le quotient de la division euclidienne de a par b et r est le reste de cette division avec $0 \leq r < b$.

b. Recherche du PGCD de deux nombres

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$a = bq + r_1 \quad \text{avec } 0 \leq r_1 < b$$

$$b = r_1 q_1 + r_2 \quad \text{avec } 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad \text{avec } 0 \leq r_3 < r_2$$

et on s'arrête au dernier reste non nul, ce dernier reste non nul est alors le PGCD de a et de b .

Savoir faire

1 Savoir déterminer le PGCD de deux nombres entiers a et b non nuls

Déterminer PGCD (252 ; 66)

Méthode

1° Effectuer la division euclidienne de a par b :

$$a = bq + r_1 \text{ avec } 0 \leq r_1 < b.$$

2° Si r_1 est non nul, effectuer la division euclidienne de b par r_1 :

$$b = r_1 q' + r_2.$$

3° Si r_2 est non nul, effectuer la division euclidienne de r_1 par r_2 et ainsi de suite jusqu'à ce que le reste soit nul.

Le PGCD (a , b) est le dernier reste non nul.

Corrigé

1° On effectue la division euclidienne de 252 par 66 :

$$252 = 66 \times 3 + 54 \quad r_1 = 54 ; r_1 \neq 0.$$

2° On effectue la division euclidienne de 66 par 54 :

$$66 = 54 \times 1 + 12 \quad r_2 = 12 ; r_2 \neq 0.$$

3° On effectue la division euclidienne de 54 par 12 :

$$54 = 12 \times 4 + 6 \quad r_3 = 6 ; r_3 \neq 0.$$

On effectue la division euclidienne de 12 par 6 :

$$12 = 6 \times 2 + 0 \quad r_4 = 0 \text{ donc PGCD (252 ; 66) } = r_3.$$

$$\text{PGCD (252 ; 66) } = 6.$$

2 Savoir reconnaître si deux nombres sont premiers entre eux

Méthode générale

1° Regarder, dans une première approche, en utilisant les critères de divisibilité, si les nombres ont un diviseur commun parmi les nombres 2, 3 ou 5.

Si oui, alors ils ne sont pas premiers entre eux. Sinon, on ne peut rien conclure.

2° Calculer le PGCD de ces deux nombres.

Si leur PGCD est 1, alors ils sont premiers entre eux.

1. Les nombres 342 et 39 sont-ils premiers entre eux ?

Corrigé

En utilisant les critères de divisibilité, on voit que 342 est multiple de 2 mais 39 ne l'est pas.

Par contre $3 + 4 + 2 = 9$; 342 est divisible par 3 et 39 aussi, donc 342 et 39 ne sont pas premiers entre eux.

2. Les nombres 153 et 35 sont-ils premiers entre eux ?

Corrigé

1° En utilisant les critères de divisibilité, on ne trouve pas de diviseur commun à 153 et 35.

2° On calcule leur PGCD en effectuant les divisions euclidiennes successives :

$$153 = 35 \times 4 + 13 \quad r_1 = 13 ; r_1 \neq 0$$

$$35 = 13 \times 2 + 9 \quad r_2 = 9 ; r_2 \neq 0$$

$$13 = 9 \times 1 + 4 \quad r_3 = 4 ; r_3 \neq 0$$

$$9 = 4 \times 2 + 1 \quad r_4 = 1 ; r_4 \neq 0$$

$$4 = 1 \times 4 + 0 \quad r_5 = 0 \quad \text{donc PGCD}(153 ; 35) = 1.$$

Les nombres 153 et 35 sont premiers entre eux.

s'Entraîner

1. Calculez le PGCD des nombres suivants :

- a) 78 et 195 ; b) 720 et 372.

2. Les nombres suivants sont-ils premiers entre eux ?

- a) 365 et 612 ; b) 36 et 128 ;
c) 68 et 51 ; d) 73 et 37.

3. Donnez une écriture fractionnaire irréductible des nombres A, B, C, D, E suivants :

$$A = \frac{1\,000}{625} ;$$

$$B = \frac{9}{144} ;$$

$$C = \left(\frac{6}{4}\right)^4 ;$$

$$D = \left(\frac{6}{15}\right)^{-3} ;$$

$$E = \left(-\frac{5}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{10}{4}\right)^2 .$$

4. Effectuez les calculs suivants et donnez le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) ;$$

$$B = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} : \frac{5}{2} ;$$

$$C = \frac{13 \times 10^{14} \times 10^6}{2 \times (10^3)^7} ;$$

$$D = \sqrt{\frac{49}{400}} + \frac{(\sqrt{3})^2}{10} .$$

► corrigés p. 198

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	Deux nombres a et b sont multiples d'un nombre c et d'un nombre d , alors	$a + b$ est multiple de $b + c$	$a + b$ est multiple de c et d	$a + b$ est multiple de $c + d$.
2	Un nombre a est divisible par b et c avec ($b > c$), alors	a est divisible par $b + c$	a est divisible par $b \times c$	a est divisible par $b - c$.
3	Deux nombres a et b sont premiers entre eux, alors	$\text{PGCD}(a, b) = 1$	$\text{PGCD}(a, b) = 0$	a est multiple de b .
4	2 235 est divisible par	35	7	15
5	54 720 est divisible par	72	54	100
6	Soit $a = 7\,200$ et $b = 3\,360$	$\text{PGCD}(a, b) = 15$	$\text{PGCD}(a, b) = 480$	$\text{PGCD}(a, b) = 60$
7	Une seule de ces fractions est irréductible. Laquelle ?	$\frac{105}{625}$	$\frac{121}{33}$	$\frac{34}{65}$
8	$A = 125 \times 13 \times 18$ alors	125 est un multiple de A	Tous les diviseurs de A sont multiples de 13	13 est un diviseur de A .
9	Sous forme irréductible $\frac{5}{8} \times \frac{3}{10} =$	$\frac{16}{3}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{16}$

RAPPELS DE COURS

1 PROPORTIONNALITÉ

a. Suites proportionnelles

x	1	-2	3	4	-8
y	3	-6	9	12	-24



Le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité de coefficient 3.

Les suites (1 ; -2 ; 3 ; 4 ; -8) et (3 ; -6 ; 9 ; 12 ; -24) sont proportionnelles.

b. Grandeurs proportionnelles

Lorsque les mesures de deux grandeurs forment deux suites proportionnelles, on dit que les grandeurs sont proportionnelles.

Deux grandeurs sont proportionnelles quand :

- ♦ on passe de l'une à l'autre en multipliant par un nombre constant ;
- ♦ le rapport k des deux grandeurs est constant.

c. Traduction d'une situation de proportionnalité

On peut traduire une situation de proportionnalité par :

- ♦ des égalités de quotients

Exemple : $\frac{3}{1} = \frac{-6}{-2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{-24}{-8}$.

- ♦ une relation

Quand une relation f est telle que l'image de x s'obtient en multipliant x par un nombre constant a , on dit que f est une fonction linéaire.

On note alors $f: x \mapsto ax$. Les nombres x et $f(x)$ sont proportionnels. Le nombre a est appelé coefficient de la fonction linéaire. Si deux grandeurs x et y sont proportionnelles, leurs mesures sont liées par une fonction linéaire.

♦ une représentation graphique

Les points $M(x, y)$ dans un repère sont situés sur une droite passant par l'origine du repère.

d. Application aux pourcentages

Situation	Coefficient de proportionnalité	Fonction linéaire associée
Calculer $t\%$ d'un nombre x	$\frac{t}{100}$	$x \mapsto \frac{t}{100} x$
Augmenter x de $t\%$	$1 + \frac{t}{100}$	$x \mapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right) x$
Réduire x de $t\%$	$1 - \frac{t}{100}$	$x \mapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right) x$

2 FONCTION LINÉAIRE

a. Définition et caractéristiques d'une fonction linéaire

Une fonction linéaire f est telle que pour tout nombre x , $f(x) = ax$. Toute fonction linéaire est déterminée par la connaissance de son coefficient a .

Exemple

- Soit la fonction linéaire f telle que $f(-4) = 3$.

Si f est linéaire, f est telle que $f(x) = ax$, or ici $f(-4) = 3$ donc

$$3 = a(-4), \text{ soit } a = -\frac{3}{4}. \text{ Par suite : } f(x) = -\frac{3}{4}x.$$

- $g(x) = \frac{x}{4} - 7x$; $g(x) = -\frac{27}{4}x$, donc g est linéaire avec $a = -\frac{27}{4}$.

- $h(x) = b^2x$. h est linéaire avec $a = b^2$.

- $k(x) = x \times 2$. k est linéaire avec $a = 2$.

♦ Propriétés spécifiques des fonctions linéaires

Si f est une fonction linéaire :

P_1 : Quels que soient les nombres x_1 et x_2 ,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

P_2 : Quels que soient les nombres k et x_1 , $f(kx_1) = kf(x_1)$.

Exemple

Soit la fonction linéaire f telle que $f(\sqrt{3}) = 5$.

$$f(3) = f(\sqrt{3} \times \sqrt{3}) = (\sqrt{3})f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})(5) = 5\sqrt{3}.$$

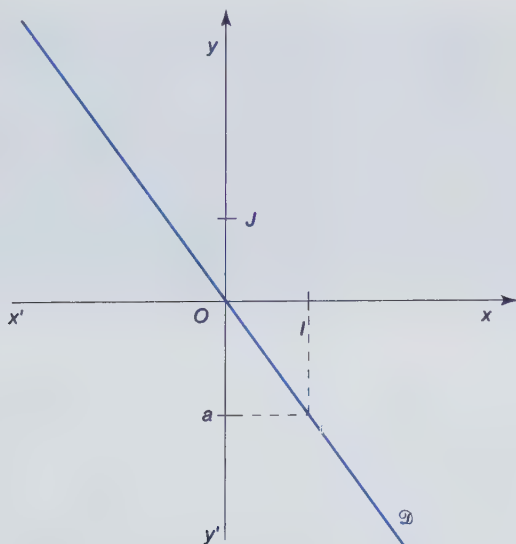
$$f(3 - 5\sqrt{3}) = f(3) - 5f(\sqrt{3}) = 5\sqrt{3} - 5 \times 5 = 5\sqrt{3} - 25.$$

c. Représentation graphique d'une fonction linéaire

Une fonction linéaire est associée à une situation de proportionnalité. Sa représentation graphique est donc une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine du repère.

Son équation est $y = ax$.

Son coefficient directeur est a .



L'axe des abscisses est la représentation graphique d'une fonction linéaire particulière, c'est la fonction linéaire nulle. Tout nombre a pour image zéro ; $f(x) = 0$ pour tout nombre x .

Savoir faire

Savoir reconnaître que deux grandeurs x et y sont proportionnelles

Déterminez si les grandeurs x et y définies dans le tableau suivant sont proportionnelles.

x	2	0,5	-1	3	5	-2
y	3	0,75	-1,5	4,5	7,5	-3

Méthode

Pour montrer que deux grandeurs x et y non nulles sont proportionnelles on peut :

1° Calculer $\frac{y}{x}$ et montrer que ce rapport est constant.

2° Montrer que les points de coordonnées $(x ; y)$ sont situés sur une droite passant par l'origine du repère.

3° Vérifier qu'il existe une fonction linéaire f telle que y soit l'image de x par f .

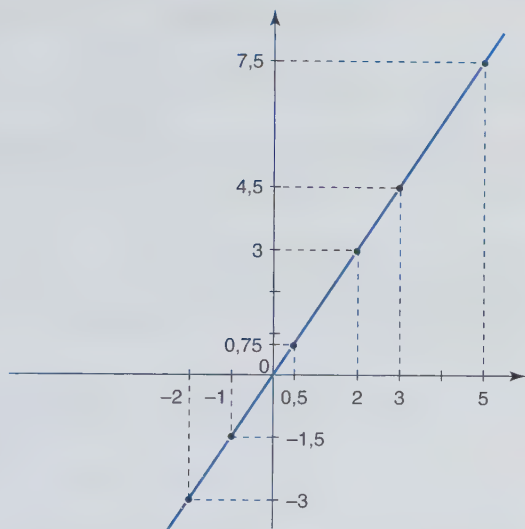
Corrigé

1° On calcule $\frac{y}{x}$ et on constate que

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{2} = \frac{0,75}{0,5} = \frac{-1,5}{-1} = \frac{4,5}{3} = \frac{7,5}{5} = \frac{-3}{-2} = 1,5.$$

2° On place les points de coordonnées (x, y) .

Les points sont alignés sur une droite passant par l'origine O du repère, donc les nombres x et y sont proportionnels.



3° On vérifie qu'il existe une fonction linéaire f telle que y soit l'image de x par f .

S'il existe une application de $f: x \mapsto ax$, alors $a = \frac{3}{2}$.

Vérifions que, pour chaque nombre, $y = f(x)$ avec $f(x) = \frac{3}{2}x$.

$$f(0,5) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}(-1) = -\frac{3}{2} = -1,5;$$

$$f(3) = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} = 4,5;$$

$$f(5) = \frac{3}{2}(5) = \frac{15}{2} = 7,5;$$

$$f(-2) = \frac{3}{2}(-2) = -3.$$

s'Entraîner

1. Déterminez la fonction linéaire f telle que $f(-1) = 7$.
2. Déterminez la fonction linéaire dont la représentation graphique est parallèle à la droite d'équation $y = 7x - 5$.
3. Soit les suites $(-2 ; 5 ; 2\sqrt{3})$ et $(4\sqrt{3} ; -10\sqrt{3} ; -12)$.
 - a) Les suites sont-elles proportionnelles ?
 - b) Si oui, déterminez une fonction linéaire permettant de passer de la première suite à la seconde.
4. Représentez dans un repère orthonormé (O, I, J) les fonctions linéaires f et g telles que $f(x) = -\frac{1}{2}x$ et $g(x) = 2x$.
5. Un automobiliste dit que sa voiture consomme « 7 litres de carburant aux 100 km ».
 - a) Traduisez cette information par une fonction linéaire en exprimant le nombre de litres consommés en fonction du nombre de kilomètres parcourus.
 - b) Représentez graphiquement cette fonction.
 - c) Lisez sur le graphique et vérifiez par le calcul :
 - le nombre de kilomètres parcourus avec 35 litres ;
 - le nombre de litres consommés pour parcourir 50 km.
6. À la caisse d'épargne, un capital placé sur un livret A rapporte 4,5 % chaque année.
 - a) Déterminez une fonction linéaire qui permette de calculer les intérêts annuels.
 - b) Quel est le montant des intérêts en fin d'année si le capital placé en début d'année est 1 120 € ?
 - c) Quel était le capital placé en début d'année si l'on sait que les intérêts en fin d'année sont de 23,4 € ?

7. On donne le tableau suivant :

x	- 1	1	2	4
y	- 5	1	4	10

a) Le plan est rapporté à un repère (O, I, J) .

Représentez les points de coordonnées (x, y) .

Comment sont-ils disposés ?

b) Les valeurs de y sont-elles proportionnelles à celles de x ?

c) Les valeurs de $y + 2$ sont-elles proportionnelles à celles de x ?

Si oui, déterminez la fonction linéaire associée permettant de passer de x à $y + 2$.

8. Un article est affiché au prix de x euros, puis il subit une augmentation de 15 %.

a) Exprimez son prix y en fonction de x .

Il subit ensuite une baisse de 10 % au moment des soldes.

b) Exprimez le prix p de cet article en fonction de y .

c) Exprimez le prix p de cet article en fonction de x . Déduisez-en si l'article a subi finalement une augmentation ou une réduction par rapport à son prix initial x . Précisez le pourcentage de cette variation.

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	L'application linéaire f telle que $f(2) = -5$ est telle que $f(x) =$	$2x$	$-5x$	$-\frac{5}{2}x$
2	La représentation graphique d'une application linéaire f passe par $A(\sqrt{2}; -1)$, alors f est telle que $f(x) =$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}x$	$-\sqrt{2}x$	$-2x$
3	Si une application linéaire f est telle que $f\left(\frac{1}{5}\right) = 5$, alors $f\left(\frac{1}{15}\right) =$	$\frac{125}{3}$	$\frac{5}{3}$	15
4	La représentation graphique d'une application linéaire est une droite	parallèle à l'axe des abscisses	qui passe par l'origine du repère	parallèle à l'axe des ordonnées.
5	Laquelle de ces applications est une application linéaire ?	$x \mapsto 3x\sqrt{2}$	$x \mapsto 3\sqrt{2}x$	$x \mapsto 3x + 5$
6	Une application linéaire est telle que $f(3) = 7$, alors $f(1) =$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{3}$	5

9

Fonctions affines Représentations

RAPPELS DE COURS

1 DÉFINITION ET CARACTÉRISTIQUES D'UNE FONCTION AFFINE

a. Définition

Une fonction affine est une relation qui à tout nombre x associe le nombre $ax + b$ où a et b sont deux nombres donnés.
On écrit $f(x) = ax + b$.

! N'oubliez pas que l'expression associée à une fonction affine est de degré un au plus, c'est-à-dire que l'exposant de x est égal au plus à 1.

b. Caractéristiques d'une fonction affine

Si $a > 0$, alors f est strictement croissante.

Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante.

Si $a = 0$, alors f est constante.

Remarque : si $a \neq 0$ et $b = 0$, alors $f(x) = ax$; nous reconnaissons l'expression d'une fonction linéaire.

Exemple

Soit la fonction f telle que $f(x) = 3x - 2$.

a) Image par f de 2

$$f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4.$$

L'image par f de 2 est 4.

b) Antécédent par f de 3

Soit α le nombre tel que $f(\alpha) = 3$, alors $3\alpha - 2 = 3$, soit $3\alpha = 5$, d'où

$\alpha = \frac{5}{3}$. L'antécédent par f de 3 est $\frac{5}{3}$.

! N'oubliez pas que toute fonction linéaire est une fonction affine.

2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION AFFINE

Rappel : Dans un repère (O, I, J) du plan, tout point M de coordonnées $(x, f(x))$ appartient à la représentation graphique de la fonction f .

Soit $\mathcal{D}'$ la représentation graphique d'une fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$, et $\mathcal{D}$ celle de la fonction linéaire g définie par $g(x) = ax$.

Le point $M'(x; ax + b)$ appartient à $\mathcal{D}'$ et le point $M(x; ax)$ appartient à $\mathcal{D}$.

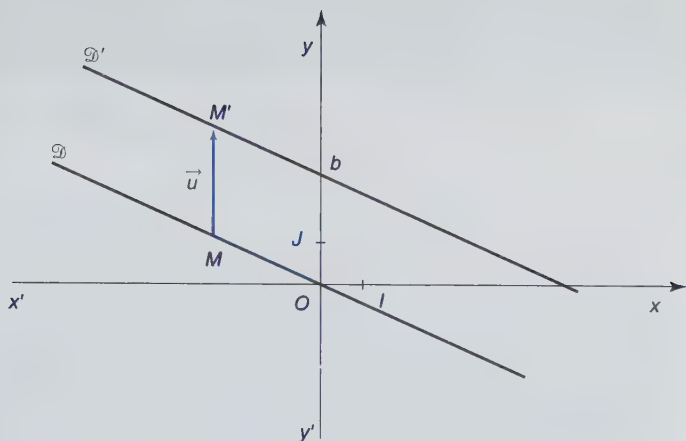
Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(x - x; ax + b - ax)$ donc $\overrightarrow{MM'}(0; b)$.

Le nombre b est connu puisque c'est un élément caractéristique de f ; donc le vecteur $\vec{u}(0; b)$ est fixe.

L'égalité $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ signifie que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

La représentation graphique $\mathcal{D}$ de g est une droite passant par l'origine O du repère, donc la représentation graphique $\mathcal{D}'$ de f est la droite translatée de $\mathcal{D}$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

! N'oubliez pas que l'image d'une droite par une translation est une droite parallèle.



3 DÉTERMINATION D'UNE FONCTION AFFINE

Une fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$ est déterminée pour tout nombre x par la connaissance des deux nombres a et b .

Sachant que $x_1 \neq x_2$
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

et par exemple
$$b = f(x_1) - ax_1.$$

Exemples

Relations	$f(x) = \frac{-2x+4}{3}$	$f(x) = \frac{4}{5}x - \left(\frac{1}{2}x + 3\right)$	$f(x) = -5x$	$f(x) = -5$
a	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{10}$	-5	0
b	$\frac{4}{3}$	-3	0	-5

4 ÉQUATIONS DE DROITES

a. Représentation graphique d'une fonction affine

Toute droite représentant une fonction affine a pour équation $y = ax + b$ où a est le coefficient directeur de la droite et b l'ordonnée à l'origine.

b. Droites parallèles

Soit f et f' les fonctions affines définies respectivement par $f(x) = ax + b$ et $f'(x) = ax + b'$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites les représentant.

On considère la fonction linéaire g définie par $g(x) = ax$ et de représentation graphique la droite Δ .

On sait que $\mathcal{D}$ et Δ d'une part et $\mathcal{D}'$ et Δ d'autre part sont parallèles, donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

Les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si et seulement si $a = a'$.

Savoir faire

1 Savoir déterminer une fonction affine

Déterminez la fonction affine f telle que $f(2) = -3$ et $f(-1) = 4$.

Méthode

1° Déterminer le coefficient a sachant que $f(x) = ax + b$ et que

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ où } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont deux valeurs distinctes prises par}$$

le nombre x .

2° Déterminer le nombre b connaissant par exemple x_1 et son image $f(x_1)$.

3° Conclure en écrivant l'expression de $f(x)$.

Corrigé

1° Sachant que $f(2) = -3$ et que $f(-1) = 4$, alors

$$a = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-3 - 4}{3} \quad \text{d'où} \quad a = -\frac{7}{3}.$$

$$\text{Donc} \quad f(x) = -\frac{7}{3}x + b.$$

$$2^\circ \text{ Or } f(2) = -3 \quad \text{donc} \quad -3 = -\frac{7}{3} \times 2 + b \quad \text{soit} \quad -3 = -\frac{14}{3} + b,$$

$$\text{d'où} \quad b = -3 + \frac{14}{3} = -\frac{9}{3} + \frac{14}{3}; \text{ par suite } b = \frac{5}{3}.$$

$$3^\circ \text{ La fonction affine } f \text{ est telle que } f(x) = -\frac{7}{3}x + \frac{5}{3}.$$

2 Savoir tracer une droite

1. Tracez la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

Méthode

1° Choisir deux valeurs x_1 et x_2 distinctes prises par le nombre x et calculer les valeurs correspondantes y_1 et y_2 à partir de l'équation de la droite $\mathcal{D}$.

2° Placer les points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

La droite (AB) est la droite $\mathcal{D}$.

Corrigé

1° Si $x = 0$, alors $y = 2$; donc $A(0 ; 2)$ appartient à $\mathcal{D}$.

Si $x = 2$, alors $y = -\frac{3}{2} \times 2 + 2$ soit $y = -3 + 2 = -1$;

donc le point $B(2 ; -1)$ appartient à $\mathcal{D}$.

2°

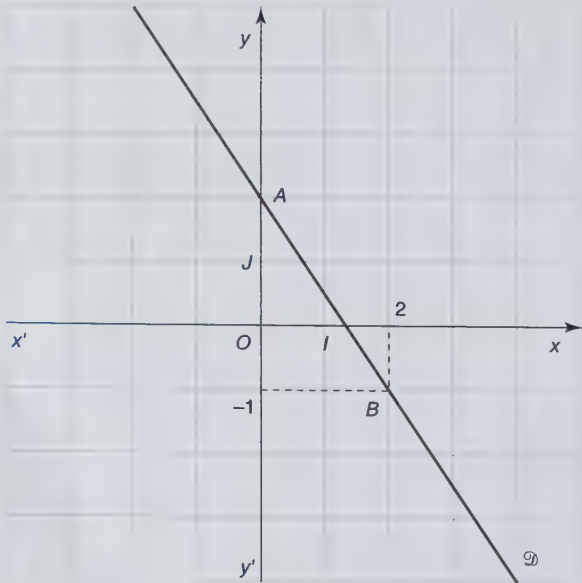


fig. 1

2. Tracez la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$.

Méthode

1° Choisir une valeur x_1 prise par le nombre x et calculer la valeur correspondante y_1 à partir de l'équation de la droite Δ .

2° Placer le point $A(x_1, y_1)$ dans un repère (O, I, J) .

3° Mettre en évidence sur le graphique le coefficient directeur a de la droite Δ .

Pour cela construire le point $B(x_1 + 1; y_1)$ puis le point

$C(x_1 + 1; y_1 + a)$.

La droite (AC) est la droite Δ .

Corrigé

1° Si $x = 1$, alors $y = 3$ donc $A(1; 3)$ appartient à Δ .

2° On place le point $A(1; 3)$ dans le repère (O, I, J) .

3° On construit le point $B(2; 3)$ puis le point $C(2; 3 + 2)$ car $a = 2$, donc $C(2; 5)$.

La droite (AC) est la droite Δ .

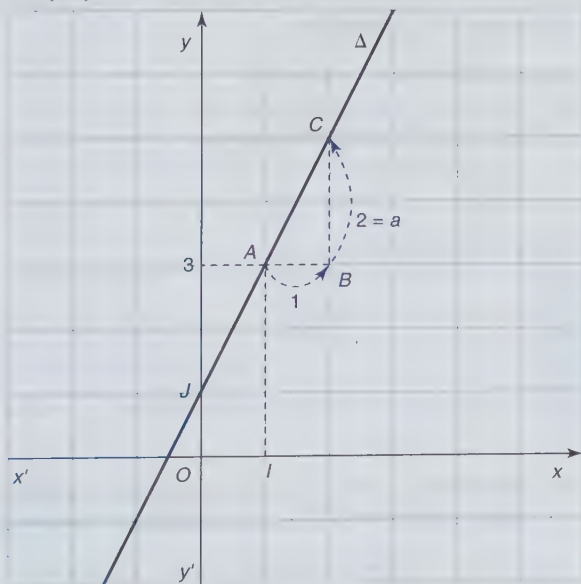


fig. 2

s'Entraîner

Pour tous les exercices, on se place dans un repère (O, I, J) .

1. Complétez le tableau suivant après avoir indiqué O pour oui et N pour non à la deuxième ligne.

Fonction	$f_1(x) = \frac{x}{7} - 3$	$f_2(x) = x\sqrt{2} + 3$	$f_3(x) = x^2$	$f_4(x) = \frac{-2x+3}{4}$
Affine				
Si oui, explicitez a et b .				

2. Déterminez la fonction affine f telle que $f(2) = -7$ et $f(3) = 1$.

3. Déterminez la fonction affine dont la représentation graphique est la droite (AB) avec $A(-1; 2)$ et $B(3; 4)$.

4. Soit la droite D d'équation : $y = 4x - 3$.

a) Quelle est l'ordonnée du point A d'abscisse -1 ?

b) Quelle est l'abscisse du point B d'ordonnée 0 ?

c) Le point $C(-2; 5)$ appartient-il à D ?

d) Tracez la droite D .

5. Complétez le tableau suivant :

Droite d'équation	$y = 3x - 4$	$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$y = -4$	$x = 3$
Point de la droite	$A(\dots; -1)$	$B(-5; \dots)$	$C(3; \dots)$	$D(\dots; 2)$

6. Tracez dans un même repère les droites suivantes en utilisant alternativement les deux méthodes citées dans la rubrique Savoir faire.

$$D_1: y = 3x - 1; \quad D_2: y = -2x + 5; \quad D_3: x = -1 \quad \text{et} \quad D_4: y = -\frac{1}{2}x.$$

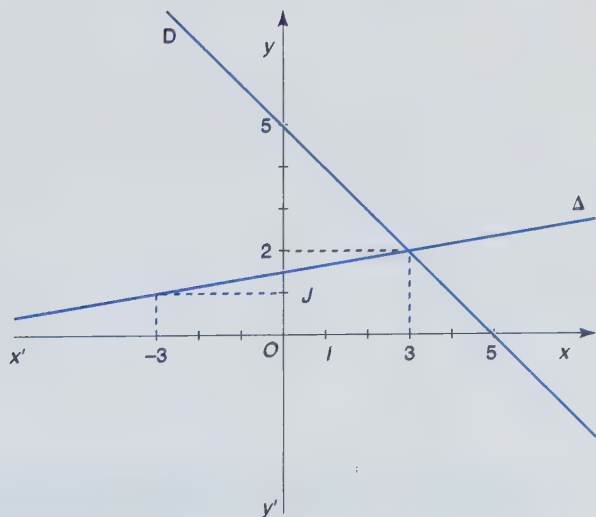
7. Un taxi demande à ses clients une taxe t de prise en charge, puis il fait payer a € par minute passée dans le taxi.

a) Montrez que le prix payé par un client est l'expression d'une fonction affine que l'on demande d'explicitier à l'aide de a , de t et du nombre x de minutes pendant lesquelles le client est resté dans le taxi.

b) Sachant qu'en restant 10 minutes dans le taxi un client a payé 7 € et qu'un autre a payé 13 € en restant 25 minutes, déterminez alors a et t ainsi que la fonction affine correspondante.

c) Représentez graphiquement cette fonction affine. Lisez sur le graphique la durée à partir de laquelle une course coûte plus de 19 €.

8. Déterminez les fonctions affines f et g dont les représentations graphiques sont les droites D et Δ dessinées ci-dessous dans le repère (O, I, J) .



► corrigés p. 202

9. Fonctions affines

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

			A	B	C
1	Soit $f(x) = -\frac{3}{5}x + 4$. Sachant que $f(a) = -5$, alors		$a = \frac{27}{5}$	$a = 7$	$a = 15$
2	La fonction affine associée à la droite (AB) avec A(3 ; -2) et B(2 ; 3) est telle que $f(x)$ soit égale à		$3x - 11$	$-5x + 13$	$-x + 1$
3	La droite D d'équation	a pour coefficient directeur	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
4	$y = \frac{2 - 3x}{4}$	passse par le point	A(-2 ; 2)	B(2 ; 2)	C(10 ; 7)
5	Soit A(-2 ; 5) B(1 ; 2) C(4 ; 2).	Le coefficient directeur de (AC) est	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
6		L'équation de la droite (AB) est	$y = 2x + 9$	$y = -x + 3$	$y = x + 7$
7		La droite (BC) a pour équation	$y = \frac{1}{4}x + 1$	$y = 2$	$y = x + 1$

10

Systèmes de deux équations à deux inconnues et résolution de problèmes

RAPPELS DE COURS

1 ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

(E) : $3x + 2y + 5 = 0$ est une équation à deux inconnues x et y , que l'on peut écrire $y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$.

On reconnaît l'équation d'une droite.

Les coordonnées de tout point de la droite vérifient l'équation. L'équation a donc une infinité de solutions.

Pour déterminer l'ensemble des solutions de (E), on écrit y en

fonction de x par exemple, soit $y = \frac{-3x - 5}{2}$.

Les solutions sont les couples (x, y) avec $y = \frac{-3x - 5}{2}$.

2 SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

a. Définition

Soit le système (S) tel que
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Le système (S) est un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y .

Nous ne résoudrons que des systèmes où $b \neq 0$ et $b' \neq 0$.

Dans ces conditions on peut écrire (S) sous la forme :

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

en posant $m = -\frac{a}{b}$, $p = \frac{c}{b}$, $m' = -\frac{a'}{b'}$ et $p' = \frac{c'}{b'}$.

On reconnaît pour chaque équation composant le système celle d'une droite représentant une fonction affine.

b. Interprétation géométrique et nombre de solutions d'un système

Soit les droites D et D' d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ et le système (S) :

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

Relations particulières entre les coefficients	$m = m'$ et $p \neq p'$	$m = m'$ et $p = p'$	$m \neq m'$
Positions relatives de D et D'	D et D' sont strictement parallèles.	$D = D'$	D et D' sont sécantes en I .
Nombre de points d'intersection de D et D'	Zéro point d'intersection.	Une infinité de points d'intersection.	Un et un seul point d'intersection.
Nombre de solutions de (S)	Aucune solution.	Une infinité de solutions : les coordonnées des points de D .	Une seule solution : le couple de coordonnées du point I .

3 RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME

♦ Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues se résout soit algébriquement, soit géométriquement. Deux méthodes de résolution algébrique sont exposées dans la rubrique Savoir faire.
La résolution géométrique est une application directe des résultats du paragraphe 2.b. ci-avant.

♦ Exemple de résolution géométrique

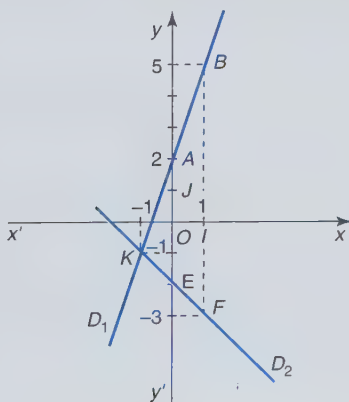
Soit le système S :
$$\begin{cases} y = 3x + 2 & (E_1) \\ y = -x - 2 & (E_2) \end{cases}$$

E_1 est une équation de la droite D_1 de coefficient directeur 3.

E_2 est une équation de la droite D_2 de coefficient directeur - 1.

$3 \neq -1$ donc D_1 et D_2 sont sécantes.

$$\begin{aligned} D_1 &: A(0; 2); B(1; 5). \\ D_2 &: E(0; -2); F(1; -3). \end{aligned}$$



D_1 et D_2 se coupent en K . On lit $K(-1; -1)$. On vérifie que $(-1; -1)$ est solution du système en remplaçant x par -1 dans E_1 et E_2 ; on doit trouver $y = -1$.

On conclut : la solution du système est $(-1; -1)$.

Savoir faire

1 Savoir résoudre un système par « addition » ou par « combinaisons linéaires »

Résolvez le système (S) :
$$\begin{cases} -3x + 2y - 4 = 0 & (E_1) \\ 4x - 5y + 7 = 0 & (E_2). \end{cases}$$

Méthode

- 1° Multiplier chaque équation de façon à obtenir des coefficients opposés pour l'une des inconnues.
- 2° Additionner membre à membre les deux équations obtenues.
- 3° Faire de même pour l'autre inconnue.
- 4° Écrire le système formé d'une équation d'inconnue x et d'une équation d'inconnue y .
- 5° Trouver la solution puis vérifier en reportant la valeur trouvée pour x et celle trouvée pour y dans le système initial.

Corrigé

1° On multiplie (E_1) par 4 et (E_2) par 3 d'où le système

$$\begin{cases} -12x + 8y - 16 = 0 & 4(E_1) \\ 12x - 15y + 21 = 0 & 3(E_2). \end{cases}$$

2° On additionne membre à membre $4(E_1)$ et $3(E_2)$ pour obtenir l'équation $(-12x + 8y - 16) + (12x - 15y + 21) = 0$, soit après réductions $-7y + 5 = 0$.

3° On multiplie (E_1) par 5 et (E_2) par 2 d'où le système

$$\begin{cases} -15x + 10y - 20 = 0 & 5(E_1) \\ 8x - 10y + 14 = 0 & 2(E_2) \end{cases} \quad \text{et on additionne}$$

membre à membre $5(E_1)$ et $2(E_2)$ pour obtenir l'équation $(-15x + 10y - 20) + (8x - 10y + 14) = 0$ qui, après réductions, donne l'équation $-7x - 6 = 0$.

4° On obtient un nouveau système équivalent à (S) :

$$\begin{cases} -7y + 5 = 0 \\ -7x - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y = \frac{5}{7} \\ x = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

5° On vérifie que $\left(-\frac{6}{7}; \frac{5}{7}\right)$ est bien la solution de (S).

$$\begin{cases} -3\left(-\frac{6}{7}\right) + 2\left(\frac{5}{7}\right) - 4 = \frac{18}{7} + \frac{10}{7} - 4 = \frac{28}{7} - 4 = 4 - 4 = 0 \\ 4\left(-\frac{6}{7}\right) - 5\left(\frac{5}{7}\right) + 7 = -\frac{24}{7} - \frac{25}{7} + 7 = -\frac{49}{7} + 7 = -7 + 7 = 0. \end{cases}$$

Donc le système (S) a pour solution le couple $\left(-\frac{6}{7}; \frac{5}{7}\right)$.

2 Savoir résoudre un système « par substitution »

Résolvez le système (S') tel que (S') : $\begin{cases} -4x + y - 5 = 0 & (E_1) \\ 2x - 7y + 1 = 0 & (E_2). \end{cases}$

Méthode

1° Écrire dans une équation une inconnue en fonction de l'autre.

2° Remplacer ou « substituer » cette écriture dans l'autre équation.

3° Le système est composé d'une équation avec deux inconnues et d'une autre équation ne comportant qu'une inconnue qu'il faut déterminer.

4° Déterminer l'autre inconnue en remplaçant la valeur trouvée dans l'équation ayant deux inconnues.

5° Vérifier que les valeurs trouvées pour les inconnues conviennent puis conclure.

Corrigé

1° Dans (E_1) on écrit y en fonction de x .

$$(S') : \begin{cases} y = 4x + 5 & (E_1) \\ 2x - 7y + 1 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

2° On substitue y par $4x + 5$ dans (E_2) :

$$(S') : \begin{cases} y = 4x + 5 & (E_1) \\ 2x - 7(4x + 5) + 1 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

3° On détermine x dans (E_2) :

$$(S') : \begin{cases} y = 4x + 5 \\ 2x - 28x - 35 + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y = 4x + 5 \\ -26x - 34 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } (S') : \begin{cases} y = 4x + 5 & (E_1) \\ x = -\frac{17}{13} & (E_2) \end{cases}.$$

4° On remplace x par $-\frac{17}{13}$ dans (E_1) :

$$(S') : \begin{cases} y = 4\left(-\frac{17}{13}\right) + 5 \\ x = -\frac{17}{13} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y = -\frac{68}{13} + \frac{65}{13} = -\frac{3}{13} \\ x = -\frac{17}{13} \end{cases}$$

5° On reporte les valeurs trouvées pour x et y dans (E_2) du système initial :

$$(E_2) : 2\left(-\frac{17}{13}\right) - 7\left(-\frac{3}{13}\right) + 1 = -\frac{34}{13} + \frac{21}{13} + 1 = -\frac{13}{13} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Donc le système (S') a pour solution le couple $\left(-\frac{17}{13}; -\frac{3}{13}\right)$.

3 Savoir résoudre un problème concret

Déterminez deux nombres dont le quotient est égal à $\frac{15}{7}$ et la somme égale à 66.

Méthode

1° Après une lecture attentive du texte, faire un choix précis des inconnues (souvent données par la lecture de la question posée).

2° Mettre en équations le problème à l'aide des inconnues choisies.

3° Résoudre par la méthode la mieux adaptée le système formé par les équations obtenues précédemment.

4° Vérifier que les solutions conviennent bien en reportant les valeurs trouvées dans le système initial.

5° Énoncer concrètement les solutions en répondant à la question posée à l'aide d'unités si le texte en fait mention.

Corrigé

1° Soit x l'un des deux nombres et y l'autre nombre.

2° Le quotient de x par y est égal à $\frac{15}{7}$ d'où l'équation $\frac{x}{y} = \frac{15}{7}$ avec $y \neq 0$.

Leur somme est égale à 66 donc $x + y = 66$.

3° On obtient le système
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{15}{7} & (E_1) \\ x + y = 66 & (E_2) \end{cases}$$

On résout ce système par substitution en exprimant dans (E_2) y en fonction de x , d'où

$$\begin{cases} 7x = 15y & (E_1) \\ y = 66 - x & (E_2) \end{cases} \quad \text{puis on substitue } y \text{ par } 66 - x \text{ dans } (E_1).$$

On obtient
$$\begin{cases} 7x = 15(66 - x) \\ y = 66 - x \end{cases}, \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} 7x = 990 - 15x \\ y = 66 - x \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 22x = 990 \\ y = 66 - x \end{cases}$$

Le système résolu est donc
$$\begin{cases} x = \frac{990}{22} = 45 \\ y = 66 - 45 = 21. \end{cases}$$

4° On vérifie que les valeurs trouvées pour x et y conviennent :

$$\begin{cases} \frac{45}{21} = \frac{3 \times 15}{3 \times 7} = \frac{15}{7} \\ 45 + 21 = 66 \end{cases}.$$

5° Les deux nombres cherchés sont 45 et 21.

s'Entraîner

1. Soit l'équation (E) : $y = -5x + 35$.

- a) Le couple $(-4 ; 15)$ est-il solution de l'équation ?
- b) Trouvez x pour que le couple $(x ; 0)$ soit solution de (E).
- c) Trouvez y pour que le couple $(0 ; y)$ soit solution de (E).

2. Résolvez les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 4x + y - 3 = 0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

3. Résolvez le système suivant après avoir réduit chacune des équations.

$$\begin{cases} \frac{-4x-1}{3} + \frac{y+3}{2} = \frac{x+2}{6} - \frac{1}{4} \\ \frac{3x+1}{2} - \frac{2y-1}{5} = \frac{1}{10} - \frac{x}{2} \end{cases}$$

4. Le plan est rapporté à un repère (O, I, J) . Soit D_1 , la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x + 2$ et D_2 la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x - 3$.

- a) Les points $A(-1 ; 0,5)$ et $B(-2 ; 5)$ appartiennent-ils à D_1 ?
- b) Déterminez l'abscisse du point C de D_2 dont l'ordonnée est 3.
- c) Construisez D_1 et D_2 . Que peut-on dire de ces droites ?
- d) Déterminez une équation de la droite (AB) .
- e) Déduisez de ce qui précède les solutions, si elles existent, des systèmes

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 2y + 4 = 0 \\ -x + \frac{2}{3}y + 2 = 0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 3x - 2y + 4 = 0 \\ 4,5x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

5. Un enfant part de chez lui à bicyclette et roule à la vitesse moyenne de 15 km/h ; son frère part 20 minutes après lui et roule avec son cyclo-moteur à la vitesse moyenne de 35 km/h.

- a) Au bout de combien de temps rejoindra-t-il son frère et à quelle distance de leur point de départ ?
- b) Résolvez graphiquement ce problème.

6. Paul a acheté lundi trois pains au chocolat et quatre croissants, il a dépensé 4,5 €. Le lendemain il achète aux mêmes prix 2 pains au chocolat et 3 croissants ; il dépense 3,2 €.

Quel est le prix d'un pain au chocolat ? Celui d'un croissant ?

7. Un garçon achète des disques à un camarade. Il en paie certains 0,75 €, d'autres 2,25 €. Il débourse 23,25 €. Il revend les mêmes disques en faisant un bénéfice de 1,05 € sur ceux qu'il a payés 0,75 € et de 1,5 € sur ceux qu'il a payés 2,25 €. Le montant de la vente est égal à 44,25 €.

Combien de disques de chaque sorte a-t-il achetés ?

8. Un touriste souhaite louer une voiture. Une agence X lui propose 0,4 € du kilomètre parcouru plus une somme de 50 € ; une agence Y lui propose 0,45 € du kilomètre parcouru plus une somme de 40 €.

a) Calculez le nombre de kilomètres parcourus pour lequel la somme payée à l'agence X sera égale à la somme payée à l'agence Y.

b) Calculez la distance à partir de laquelle l'agence X devient plus intéressante que l'agence Y.

c) Donnez une interprétation graphique de ces solutions.

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	Le système $\begin{cases} \sqrt{3}x - 2y = 1 \\ x - \sqrt{3}y = 4 \end{cases}$ admet pour solution, le couple	$(\sqrt{3}; 1)$	$(7; \sqrt{3})$	$(-8 + \sqrt{3}; 1 - 4\sqrt{3})$
2	Le système $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -3x + 6y + 12 = 0 \end{cases}$ admet	plus d'une solution	0 solution	1 solu- tion exacte- ment.
3	$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$ admet pour solution	$(3; 3)$	$(3; 0)$	$(0; 3)$
4	Le couple $(5, 3)$ est solution du système	$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y - 11 = 0 \\ 3x - y = 12 \end{cases}$
5	Si on double la longueur x d'un rectangle, son périmètre augmente de 10 cm et son aire de 30 cm^2 , si sa largeur est y , alors (x, y) est égal à	$(4; 7)$	$(5; 6)$	$(7; 4)$
6	Si on augmente x de 3 on obtient le double de y ; si on diminue x de 2 il devient la moitié de y . Le système tradui- sant ces données est	$\begin{cases} x + 3 = 2y \\ x - 2 = \frac{y}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} 2(x + 3) = y \\ \left(\frac{x - 2}{2}\right) = y \end{cases}$	$\begin{cases} 2(x + 3) = y \\ x - 2 = \frac{y}{2} \end{cases}$
7	Pierre et Jean ont huit ans de différence. Dans cinq ans l'âge de Jean sera le double de celui de Pierre.	Jean a 11 ans et Pierre a 3 ans.	Jean a 9 ans et Pierre a 1 an.	Jean a 9 ans et Pierre a 3 ans.

RAPPELS DE COURS

1 DÉFINITION D'UNE GRANDEUR COMPOSÉE ET EXEMPLES

a. Définition

Une grandeur composée est le produit ou le quotient de plusieurs autres grandeurs.

b. Exemples

♦ La *vitesse* d'un mobile est le quotient d'une distance par une durée.

Si la distance est exprimée en kilomètres et la durée en heures, alors la vitesse s'exprime en km/h que l'on note $\text{km} \times \text{h}^{-1}$.

♦ L'*aire* d'une surface est le produit de deux longueurs. Si chaque longueur s'exprime en mètres, alors l'aire s'exprime en $\text{m} \times \text{m}$ que l'on note m^2 .

♦ Le *volume* d'un solide est le produit d'une aire et d'une longueur, ou bien le produit de trois longueurs.

Si l'aire s'exprime en cm^2 et la longueur en cm, alors le volume s'exprime en $\text{cm}^2 \times \text{cm}$ que l'on note cm^3 .

♦ La *consommation d'électricité* est le produit de la puissance électrique et d'une durée.

Si la puissance s'exprime en kilowatts et la durée en heures, alors la consommation d'électricité s'exprime en $\text{kW} \times \text{h}$ que l'on note kWh.

♦ Le *débit* d'un appareil à écoulement régulier est le quotient d'un volume par une durée.

Si le volume s'exprime en m^3 et la durée en secondes, alors le débit s'exprime en m^3/s que l'on note $\text{m}^3 \times \text{s}^{-1}$.

♦ La *masse volumique* d'un matériau homogène est le quotient d'une masse par un volume.

Si le volume s'exprime en m^3 et la masse en kilogrammes, alors la masse volumique s'exprime en kg/m^3 que l'on note $\text{kg} \times \text{m}^{-3}$.

2 TABLEAUX D'UNITÉS PERMETTANT LE CHANGEMENT D'UNITÉS

a. Tableau des unités de masse

Unité de mille	Centaine	Dizaine	Unité	Dixième	Centième	Millième	Dix-millième	Cent-millième	Millionnième
t	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

b. Tableau des unités de capacité

Unité de mille	Centaine	Dizaine	Unité	Dixième	Centième	Millième
	hl	dal	l	dl	cl	ml

c. Tableau des unités de longueur

Unité de mille	Centaine	Dizaine	Unité	Dixième	Centième	Millième
km	hm	dam	m	dm	cm	mm

d. Tableau des unités d'aire

Unité de million	Unité de dix-mille	Centaine	Unité	Centième	Dix-millième	Millionnième
km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²

Pour changer d'unité d'aire, on décale la virgule de deux rangs par unité. Décaler respectivement vers la droite ou vers la gauche revient à multiplier par 10^2 ou par 10^{-2} par unité.

e. Tableau des unités de volume

Unité de mille	Unité	Millième	Millionnième
m ³	dm ³	cm ³	mm ³

Pour changer d'unité de volume, on décale la virgule de trois rangs par unité. Décaler respectivement vers la droite ou vers la gauche revient à multiplier par 10^3 ou par 10^{-3} par unité.

! Une capacité de 1 litre correspond à un volume de 1 dm^3 .

f. Unités de durée

L'unité de temps est la seconde (s).

Une minute (min) correspond à 60 s et une heure (h) à 3 600 s.

Dans une heure il y a 60 minutes.

Savoir faire

Savoir changer d'unités

Le débit d'un robinet est de 0,5 litre par seconde.
Calculez le débit en $\text{m}^3 \times \text{h}^{-1}$.

Méthode

- 1° Donner le débit du robinet en litres par heure ($\text{l} \times \text{h}^{-1}$).
- 2° Convertir les litres en m^3 .
- 3° Conclure en donnant le débit en $\text{m}^3 \times \text{h}^{-1}$.

Corrigé

- 1° Il y a 3 600 s dans une heure, donc le robinet débite $3\,600 \times 0,5$ litres en une heure soit 1 800 l.
- 2° Le volume de 1 m^3 correspond à une capacité de 1 000 l donc 1 800 l correspondent à $1,8 \text{ m}^3$.
- 3° Conclusion : le débit du robinet est de $1,8 \text{ m}^3 \times \text{h}^{-1}$.

s'Entraîner

1. Quel est le volume pris par 1,2 kg de glace à 0 °C, sachant que la masse volumique de la glace est $0,92 \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$?

Donner une valeur approchée à 1 dL près.

2. Une pluie orageuse tombe sur un jardin circulaire et celui-ci est recouvert d'une hauteur d'eau de 3 mm.

Sachant que le rayon du jardin est 10 m et que le tuyau d'arrosage a un débit de $0,6 \text{ l} \times \text{s}^{-1}$, quel temps faut-il mettre pour égaler avec le tuyau d'arrosage la quantité d'eau déversée par la pluie ?

3. Sachant que 1,5 cl de mercure pèse 204 g, que 9 cm^3 de platine pèsent 189 g et que 25 cm^3 d'acier pèsent 195 g, quel corps a la plus grande masse volumique ?

4. On sait que les chutes Inga au Zaïre ont un débit maximum de $80\,000 \text{ m}^3 \times \text{s}^{-1}$.

Le lac Léman a une superficie de 582 km^2 et une profondeur moyenne de 200 m.

Si on voulait remplir un bassin de même capacité que le lac Léman avec les chutes Inga au débit maximum, combien de jours faudrait-il ?

5. Dans une maison chauffée électriquement, les convecteurs consomment 90 kWh en une journée. Deux des occupants utilisent un sèche-cheveux d'une puissance de 1 200 W pour une durée de 10 min chacun. L'un des habitants se sert d'une perceuse d'une puissance de 540 W pendant 20 min. La maîtresse de maison repasse pendant 45 min avec un fer électrique d'une puissance de 1 800 W et utilise ensuite l'aspirateur d'une puissance de 1 400 W pendant 30 min.

Quelle est, en cette journée, la consommation d'énergie électrique, exprimée en kWh, de cette maison pour les seules utilisations citées ?

► corrigés p. 209

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	$2\,500\,000\text{ mm}^2 =$	$25 \times 10^{-3}\text{ dam}^2$	$25 \times 10^{-7}\text{ km}^2$	25 m^2
2	$0,005\,4\text{ m}^2 =$	54 cm^2	$5,4\text{ dm}^2$	540 mm^2
3	$1\,250\text{ cm}^2 =$	$12,5 \times 10^{-4}\text{ m}^2$	$1,25\text{ dm}^2$	$1,25 \times 10^5\text{ mm}^2$
4	$5,3\text{ dam}^2 =$	$53 \times 10^3\text{ dm}^2$	$5,3 \times 10^{-5}\text{ km}^2$	530 m^2
5	$850\,000\text{ m}^2 =$	$0,85\text{ km}^2$	$85 \times 10^9\text{ cm}^2$	$8,5\text{ hm}^2$
6	$7,5\text{ cl} =$	$7,5\text{ cm}^3$	$0,075\text{ dm}^3$	$7,5 \times 10^{-4}\text{ hl}$
7	$0,35\text{ t} =$	35 kg	$35 \times 10^4\text{ g}$	$3,5 \times 10^7\text{ mg}$
8	$754\text{ dm}^3 =$	754 l	$7,54 \times 10^3\text{ cm}^3$	$0,754\text{ hl}$
9	Un débit de $25\text{ l} \times \text{s}^{-1}$ correspond à	$15\text{ m}^3 \times \text{min}^{-1}$	$25 \times 10^{-5}\text{ m}^3 \times \text{s}^{-1}$	$90\text{ m}^3 \times \text{h}^{-1}$
10	Une masse volumique de $25\text{ g} \times \text{cm}^{-3}$ est égale à	$2,5\text{ t} \times \text{m}^{-3}$	$25\text{ kg} \times \text{dm}^{-3}$	$2,5\text{ mg} \times \text{mm}^{-3}$

Calculs d'aires et de volumes

Effets d'une réduction ou d'un agrandissement

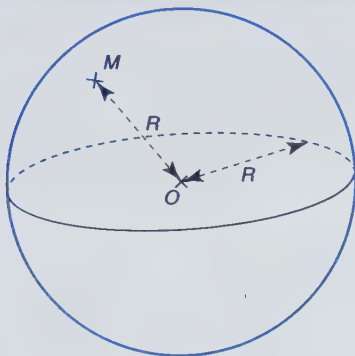
RAPPELS DE COURS

1 AIRE D'UNE SPHÈRE ET VOLUME D'UNE BOULE

a. Définition d'une sphère

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à la distance R du point O .

Un point M de l'espace appartient à la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon R si et seulement si $OM = R$.



b. Aire d'une sphère

Une sphère de rayon R a pour aire $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A} = 4\pi R^2$.

c. Définition et volume d'une boule

La boule B de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à O est inférieure à R .

Un point M de l'espace appartient à la boule B de centre O et de rayon R si et seulement si $OM \leq R$.

Le volume V d'une boule B de rayon R est tel que $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

2 ÉCHELLE

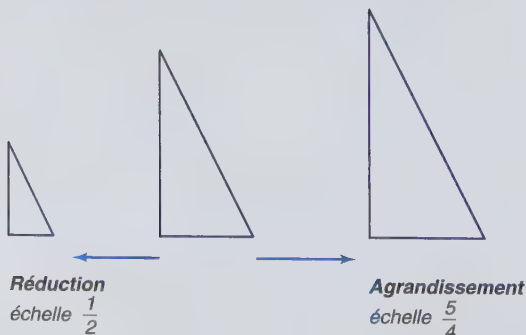
Soit un segment $[AB]$ de longueur L et un segment $[A'B']$ de longueur L' non nulle. Il existe un nombre k tel que $L' = kL$.

Si $k > 1$, alors $[A'B']$ est un agrandissement du segment $[AB]$ à l'échelle k .

Si $k < 1$, alors $[A'B']$ est une réduction du segment $[AB]$ à l'échelle k .
D'une façon plus générale, on considère deux figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ telles que toutes les dimensions de $\mathcal{F}'$ sont celles de $\mathcal{F}$ multipliées par un même nombre k appelé échelle.

Si $k > 1$, alors $\mathcal{F}'$ est un agrandissement de $\mathcal{F}$ à l'échelle k .

Si $k < 1$, alors $\mathcal{F}'$ est une réduction de $\mathcal{F}$ à l'échelle k .



3 EFFETS DE LA RÉDUCTION OU DE L'AGRANDISSEMENT DES OBJETS SUR LES AIRES ET LES VOLUMES

a. Effets sur les aires

Une aire étant une grandeur composée égale au produit de deux longueurs L et L' , si chacune d'elles est multipliée par un réel k non nul, leur produit est multiplié par k^2 .

Si une échelle k permet de passer d'une figure $\mathcal{F}$ à une figure $\mathcal{F}'$, alors l'aire de la figure $\mathcal{F}'$ est celle de $\mathcal{F}$ multipliée par k^2 .

b. Effets sur les volumes

Un volume étant une grandeur composée égale au produit de trois longueurs L , L' et L'' , si chacune d'elles est multipliée par un réel k non nul, leur produit est multiplié par k^3 .

Si une échelle k permet de passer d'un solide $\mathcal{S}$ à un solide $\mathcal{S}'$, alors le volume de $\mathcal{S}'$ est celui de $\mathcal{S}$ multiplié par k^3 .

s'Entraîner

- 1.** Une boule de rayon 6 cm est réduite à l'échelle $\frac{1}{4}$.

Quel est le volume de la boule réduite ? En donner une valeur approchée à $0,1 \text{ cm}^3$ près.

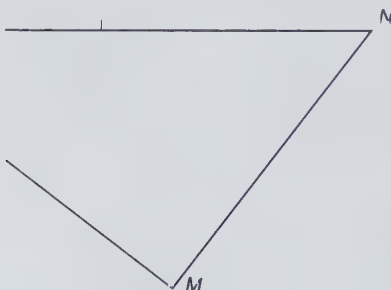
- 2.** On agrandit une sphère de rayon 3 cm à l'échelle 1,5. Quelle est l'aire de la sphère agrandie en prenant 3 pour valeur approchée de π ?

- 3.** Sur une carte à l'échelle $1/200\,000$, on trouve que l'aire d'un terrain est 8 cm^2 . Quelle est, en hectares, l'aire du terrain en grandeur réelle ?

- 4.** On coupe un cône de révolution Γ par un plan P parallèle au plan de base, on obtient un cône de révolution Γ' .

Sachant que la hauteur de Γ' est le tiers de celle de Γ et que le volume de Γ' est égal à $1,5 \text{ cm}^3$, quel est le volume de Γ ?

- 5.** Voici en vraie grandeur, dessiné de façon incomplète, le triangle MNP rectangle en M . (P ne figure pas sur le dessin.) I est le milieu de $[NP]$.



- 1.** Sur ce dessin, on se propose de représenter le triangle MNP à l'échelle $1/2$ par le triangle NIL . L étant un point de la droite (MN) , justifiez la position du point L .

- 2.** Une unité de longueur étant choisie dans le plan, on sait que $NI = 5$ et $NM = 6$.

a) Calculez NP et MP .

b) Calculez le périmètre du triangle NIL .

6. Soit un tétraèdre $ABCD$ régulier dont chaque arête a pour longueur 5 cm.

a) Calculez l'aire de chaque face du tétraèdre.

b) En quel point H particulier de la face BCD le point A se projette-t-il orthogonalement ? En déduire la hauteur du tétraèdre.

c) Soit le plan P passant par H et parallèle au plan (ACD) . Le plan P coupe l'arête $[BD]$ en D' , l'arête $[BC]$ en C' et l'arête $[AB]$ en A' . Faites une figure. Quel est le volume du tétraèdre $BC'D'A'$?

► corrigés p. 211

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	$\mathcal{F}'$ est la reproduction de $\mathcal{F}$ à l'échelle $1/2$. Si $\mathcal{A}$ est l'aire de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{A}'$ celle de $\mathcal{F}'$, alors $\mathcal{A}' =$	$\frac{1}{2} \mathcal{A}$	$\frac{1}{4} \mathcal{A}$	$\frac{1}{8} \mathcal{A}$
2	Si on double le rayon d'un cercle, on obtient	un agrandissement à l'échelle 2	une réduction à l'échelle 2	un agrandissement à l'échelle $1/2$.
3	Si on double la longueur d'un rectangle, sans modifier la largeur, on obtient	un agrandissement	une réduction	un rectangle sans rapport avec le précédent.
4	Si on double les trois dimensions d'un parallépipède rectangle, son volume est multiplié par	2	4	8
5	Un carré d'aire 24 cm^2 est réduit à l'échelle $1/4$; l'aire du carré réduit est :	6 cm^2	$1,5 \text{ cm}^2$	96 cm^2
6	Un cône $\mathcal{C}$ de volume 12 cm^3 est reproduit en un cône $\mathcal{C}'$ de volume 324 cm^3 . Pour obtenir $\mathcal{C}'$, on a multiplié les dimensions de $\mathcal{C}$ par	3	27	$\frac{1}{27}$

RAPPELS DE COURS

1 EXPLOITATION DE DONNÉES STATISTIQUES

♦ Tout ensemble soumis à une étude statistique s'appelle une *population* ; chaque élément de cette population est un *individu* dont on étudie une propriété que l'on nomme *caractère*.

Un caractère peut être *quantitatif*, c'est-à-dire que l'on peut le mesurer (taille des élèves d'une classe de 3^e), ou *qualitatif*, c'est-à-dire non mesurable (couleur des yeux des élèves d'une classe de 3^e) dans ce cas, on parle de *modalité*.

Un caractère quantitatif peut être *discret*, c'est-à-dire prendre quelques valeurs ; ou *continu*, c'est-à-dire prendre une grande quantité de valeurs sur un intervalle, mais pas nécessairement toutes.

♦ Le nombre d'individus ayant la même valeur du caractère ou la même modalité détermine l'*effectif* associé à la valeur ou à la modalité.

♦ La somme des effectifs est l'effectif total de la population étudiée.

Exemple

Des producteurs de fruits conditionnent ceux-ci dans des cagettes dont les masses varient entre 2,450 kg et 2,250 kg. Ici, la population est l'ensemble des fruits ; les individus sont les cagettes et le caractère étudié est la masse de chaque cagette. Le caractère est continu, donc on considère des classes de valeurs dont chacune a, par exemple, pour amplitude 10 g.

2 MOYENNE

La moyenne d'une série de n valeurs est le quotient de leur somme par leur nombre n .

Soit une population dont on étudie le caractère quantitatif.

Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sont les valeurs des n termes de la série, la moyenne de la série est le nombre m tel que :

$$m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Exemple

Considérons la série de notes 7 ; 9 ; 13 ; 14 ; 15. La moyenne de ces notes est :

$$m = \frac{7 + 9 + 13 + 14 + 15}{5}; m = 11,6.$$

La moyenne des notes est 11,6.

3 FRÉQUENCE

Pour une valeur donnée x dont l'effectif est n , sachant que l'effectif total est N , la fréquence de la valeur x est f telle que

$$f = \frac{n}{N}.$$

! Notez bien que $0 \leq f \leq 1$ et que f peut s'exprimer par un pourcentage compris entre 0 % et 100 %.

4 MOYENNE PONDÉRÉE

Lorsque dans une série $x_1, x_2, \dots, x_p$ les valeurs x_i sont affectées de coefficients n_i , on appelle moyenne pondérée le nombre $\bar{m}$ tel que

$$\bar{m} = \frac{n_1 x_1 + \dots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}.$$

On peut regrouper les résultats dans un tableau :

Valeurs x_i	Coefficients n_i	Produits $n_i x_i$
x_1	n_1	$n_1 x_1$
x_2	n_2	$n_2 x_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_p	$n_p x_p$
Sommes	N	S
$\bar{M} = \frac{S}{N}$		

Exemple

À un examen, les différentes épreuves sont affectées de coefficients ; la moyenne de ces notes est une moyenne pondérée.

Relevé de notes d'un élève : Français 9 (coefficient 3) ; Anglais 10 (coefficient 2) ; EPS 13 (coefficient 1) ; Mathématiques 12 (coefficient 3). On peut construire le tableau suivant :

Valeurs x_i	Coefficients n_i	Produits $n_i x_i$
9	3	27
10	2	20
13	1	13
12	3	36
Sommes	9	96

$$\bar{M} = \frac{96}{9} ; \quad \bar{M} \approx 10,7.$$

Remarque :

La moyenne d'une série dont les observations sont groupées en classes est la moyenne pondérée obtenue en prenant pour valeur les centres de classe et pour coefficient les effectifs de ces classes.

Exemple

Classes	Centres de classes x_i	Effectif n_i	Produits $n_i x_i$
$1 \leq x \leq 4$	2,5	5	12,5
$4 < x \leq 6$	5	7	35
$6 < x \leq 9$	7,5	3	22,5
$9 < x \leq 10$	9,5	1	9,5
	Sommes	16	79,5

$$\overline{M} = \frac{79,5}{16} ; \quad \overline{M} \approx 5.$$

5 MÉDIANE D'UNE SÉRIE ET REPRÉSENTATIONS

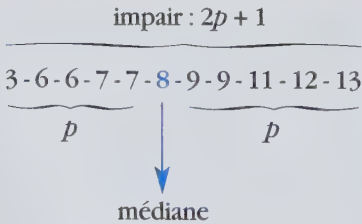
a. Médiane

♦ Si le caractère est quantitatif discret, on range les valeurs par ordre croissant.

La médiane d'une série statistique est la valeur telle qu'il y ait dans cette série autant de valeurs supérieures que de valeurs inférieures à la médiane.

Si le nombre de valeurs est :

♦ Si le caractère est quantitatif continu, on range les valeurs par ordre croissant.



b. Représentations

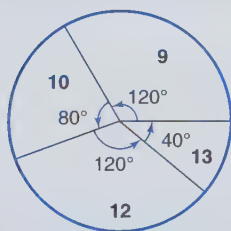
♦ *Représentation dite « en Camembert »* (représentation circulaire). Elle consiste à associer à chaque effectif (ou chaque fréquence) un angle compris entre 0° et 360° . En considérant l'exemple p. 103 :

Valeurs	9	10	13	12	Total
Effectifs	3	2	1	3	9
Angles en degrés	120°	80°	40°	120°	360°

♦ *Représentation semi-circulaire* : on associe à chaque effectif un angle compris entre 0° et 180° .

♦ *Diagramme en bâtons*.

♦ *Histogramme* : représentation pour une exploitation des données par classes (voir exemple p. 104)



« Camembert »

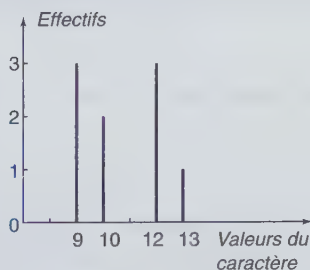
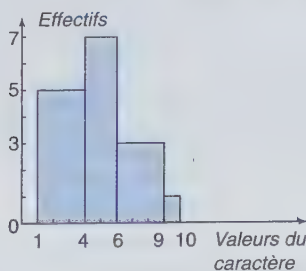


Diagramme en bâtons



Histogramme

Savoir faire

1 Savoir calculer la médiane d'une série dont le caractère est quantitatif discret

Méthode générale

- 1° Ranger les valeurs par ordre croissant.
- 2° Repérer si le nombre de valeurs est impair ou pair.
- 3° Repérer la médiane.
 - Si le nombre de valeurs est impair, il s'écrit sous la forme $2p + 1$. La médiane est le terme situé en $(p + 1)^{\text{ième}}$ position.
 - Si le nombre de valeurs est pair, la médiane est la demi-somme des termes situés en $p^{\text{ième}}$ et $(p + 1)^{\text{ième}}$ position.

1. Calculez la médiane de la série : 1 ; 3,5 ; 2,7 ; 1,2 ; 7.

Corrigé

- 1° On range les valeurs par ordre croissant :
1 ; 1,2 ; 2,7 ; 3,5 ; 7.
- 2° On compte le nombre de valeurs :
il y en a 5, nombre impair ($2 \times 2 + 1$; $p = 2$).
- 3° On repère la médiane.
La médiane est le terme situé en troisième position. C'est 2,7.

2. Calculez la médiane de la série : 2 ; 7 ; 1 ; 4 ; 8 ; 9.

Corrigé

- 1° On range les valeurs par ordre croissant :
1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 9.
- 2° On compte le nombre de valeurs :
il y en a six, nombre pair (2×3 ; $p = 3$).
- 3° On repère la médiane.
La médiane est la demi-somme du 3^e et du 4^e termes :

$$\frac{4 + 7}{2} = \frac{11}{2}. \text{ La médiane est } \frac{11}{2}.$$

Si le nombre de valeurs est pair, la médiane peut être une valeur fictive située entre deux valeurs, ou l'une de ces deux valeurs. Dans l'exemple, la médiane peut être $4; \frac{11}{2}$ ou bien 7.

2 Savoir calculer la médiane d'une série dont le caractère est quantitatif continu

Calculez la médiane de la série dont les observations sont groupées par classes et données dans le tableau suivant.

Classes	Effectifs	Effectifs cumulés
$1 \leq x < 3$	5	5
$3 \leq x < 5$	7	12
$5 \leq x < 8$	10	22
$8 \leq x < 11$	6	28
$11 \leq x < 13$	1	29 $\rightarrow$ effectif total

Méthode

- 1° Repérer l'effectif médian.
- 2° Chercher dans quelle classe on a l'effectif médian.
- 3° Calculer l'amplitude de la classe.
- 4° Calculer la médiane.

Médiane :

$$\left(\text{Amplitude de la classe} \right) \times \frac{\left(\text{Effectif médian} \right) - \left(1^{\text{er}} \text{ individu de la classe} \right)}{\text{Effectif de la classe}} + \left(1^{\text{re}} \text{ valeur de la classe} \right).$$

Corrigé

- 1° On repère l'effectif médian.

Il y a 29 individus dans la série, l'effectif médian est donc 15.

- 2° On cherche dans quelle classe on a l'effectif médian. Grâce aux effectifs cumulés, on remarque que le 15^e individu est dans la classe $5 \leq x < 8$.

- 3° On calcule l'amplitude de la classe : $8 - 5 = 3$.

4° On calcule la médiane :

$$\text{médiane} = \frac{3(15 - 13)}{10} + 5 = 5,6.$$

Diagram illustrating the calculation of the median:

- effectif médian** points to the numerator's coefficient (3).
- 1^{er} individu dans la classe** points to the first term of the numerator (15).
- 1^{re} valeur de la classe** points to the second term of the numerator (13).
- amplitude de la classe** points to the denominator (10).
- effectif de la classe** points to the constant term (5).

s'Entraîner

1. Dans un jeu comportant 9 cases numérotées de 1 à 9, on lance un pion. On a relevé dans le tableau suivant le nombre de fois où le pion est tombé dans une case donnée.

Numéro des cases (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois (n_i)	1	1	12	13	15	7	8	2	2

- Calculez la moyenne pondérée de cette série.
- Quelle est la médiane de cette série ?

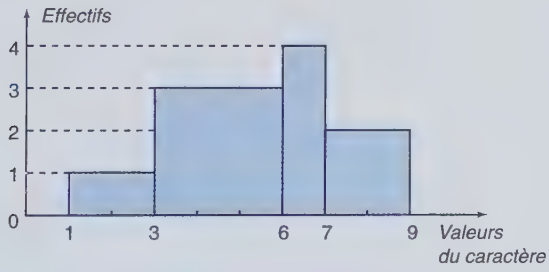
2. Dans une classe de 3^e, on a relevé les âges des élèves :

Âge	Nombres d'élèves
$13 \leq x < 14$	2
$14 \leq x < 15$	7
$15 \leq x < 16$	10
$16 \leq x < 17$	2
$17 \leq x < 18$	2

- a) Calculez la moyenne d'âge de cette classe.
 b) Déterminez la médiane de cette série après avoir dressé le tableau des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants.

3. a) Regroupez dans un tableau le dépouillement de 24 fiches de renseignements remplies par les élèves d'une classe en début d'année. Nombre de frères et sœurs : 1 - 0 - 2 - 3 - 5 - 7 - 1 - 2 - 0 - 3 - 2 - 1 - 2 - 4 - 1 - 2 - 0 - 1 - 2 - 2 - 1 - 3 - 1 - 0.
 b) Calculez la moyenne de cette série.
 c) Quelle est la médiane ?

4. Soit l'histogramme dessiné ci-dessous :



- a) Quel est l'effectif total de la série ?
 Rappel : pour un caractère continu, chaque bande d'histogramme a une aire proportionnelle à l'effectif de la classe.
 b) Complétez le tableau suivant :

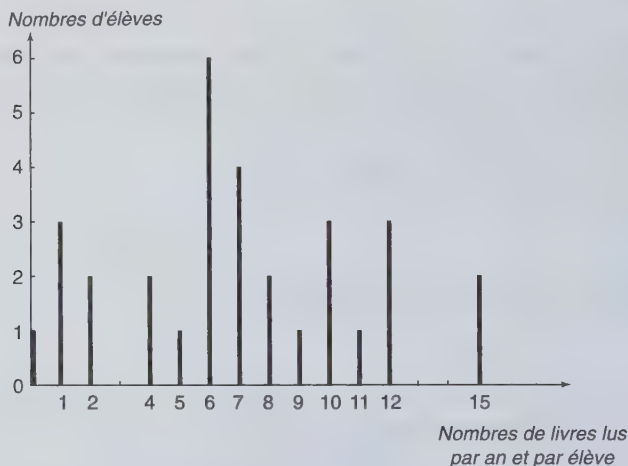
x	$1 \leq x < 3$	$3 \leq x < 6$	$6 \leq x < 7$	$7 \leq x < 9$
Effectif	2	...	...	...

- c) Quelle est, d'après cet histogramme, la moyenne de la série ?
 d) Quelle est la médiane de cette série ?

► corrigés p. 213

À des élèves d'une classe de troisième on a demandé le nombre de livres que chacun d'eux estimait lire par an.

Ce diagramme en bâtons est une représentation des réponses.



Chacune de ces affirmations est-elle vraie (V) ou fausse (F) ?

1	L'effectif total est égal à 30.
2	La moyenne annuelle de livres lus pour chaque élève est égale à $6,9 \text{ à } 10^{-1}$ près.
3	La médiane est environ égale à 7.
4	Il y a 10 élèves lisant chacun au moins 8 livres par an.
5	Il y a 9 élèves lisant au plus 5 livres par an.
6	La fréquence des élèves lisant 10 livres par an est égale à 0,97 %.
7	La fréquence des élèves lisant moins de la moyenne annuelle est strictement inférieure à 50 %.

PARTIE

2

● ***T**ravaux
géométriques*

Géométrie dans l'espace (1)

La sphère

RAPPELS DE COURS

1 LA SPHÈRE

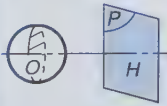
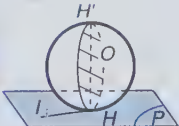
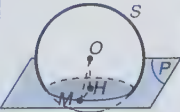
a. Définitions

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace situés à la distance R du point O .

Les cercles de centre O et de rayon R sont appelés grands cercles de la sphère.

b. Section d'une sphère par un plan

On considère la sphère S de centre O et de rayon R située à la distance OH d'un plan P (H est le projeté orthogonal de O sur P).

Si	$OH > R$	$OH = R$	$OH < R$
Points communs à S et P	Aucun point	Le point H	Le cercle de centre H et de rayon MH égal à $\sqrt{R^2 - OH^2}$
Positions relatives de S et P			

! La section d'une sphère par un plan est un cercle.

2 REPÉRAGE D'UN POINT T DE LA SPHÈRE TERRESTRE

a. La sphère terrestre

Dans la suite, on considère la surface terrestre comme une sphère. On appelle méridien terrestre tout grand cercle passant par le pôle Nord et le pôle Sud. Pour réaliser les cartes, on projette les points de la sphère sur un plan.

Un point T de la sphère terrestre est repéré par deux angles.

b. La longitude du point T

On appelle longitude de T la mesure de l'angle $\widehat{E_0OX_0}$.

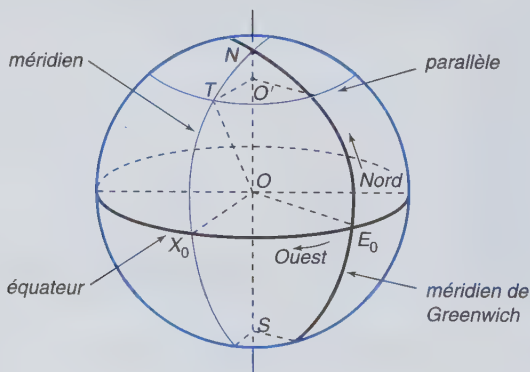
Elle varie de -180° à $+180^\circ$. Elle est notée positivement quand on tourne dans le sens de la flèche ouest, et appelée dans ce cas longitude ouest. Dans l'autre cas, elle est notée négativement et appelée longitude est.

Tous les points d'un même méridien ont la même longitude.

c. La latitude du point T

La latitude est la mesure de l'angle $\widehat{X_0OT}$.

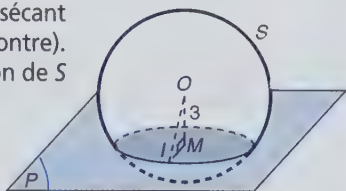
La latitude varie de -90° à $+90^\circ$. Elle est notée positivement quand on tourne dans le sens de la flèche nord, et appelée latitude nord. Dans l'autre cas, elle est notée négativement et appelée latitude sud. Tous les points d'un même parallèle ont la même latitude.



s'Entraîner

1. Remarque : la résolution de cet exercice nécessite l'utilisation des relations trigonométriques. Reportez-vous éventuellement au chapitre 16.

Soit S une sphère de rayon 4 et un plan sécant à cette sphère tel que $OM = 3$ (fig. ci-contre). Calculez le rayon du cercle, intersection de S et P .



2. On considère une sphère S de centre O et de rayon 7 cm.

Un plan coupe cette sphère suivant un cercle $\mathcal{C}$ de centre H et de rayon 3,5 cm.

Si M est un point quelconque de $\mathcal{C}$, calculez OH et la mesure de $\widehat{HOM}$, en degrés.

3. On considère un cube dont la diagonale a pour longueur d .

a) À quelle condition une sphère peut-elle être contenue et tangente aux faces de ce cube ?

b) Déduisez-en, en fonction de d , le volume de la boule et celle du cube.

4. La masse volumique d'un corps donne la masse en grammes d'un cm^3 de ce corps. Sachant que la masse volumique de l'acier est 7,8, combien de billes d'acier (pour roulements de bicyclettes) de 4 mm de diamètre y a-t-il dans un kilogramme ?

5. En considérant la Terre comme une sphère dont le diamètre équatorial mesure 12 756 km, donnez une valeur approchée de l'aire de la surface de la Terre et de son volume.

6. En admettant qu'un méridien terrestre mesure environ 40 000 km, calculez la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ séparant deux points A et B d'un même demi-méridien ayant les latitudes suivantes :

$A : 65^\circ\text{N}, B : 32^\circ\text{N}.$

► corrigés p. 215

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	Deux points T_1 et T_2 de la Terre repérés par T_1 (17°N , 25°O) T_2 (17°N , 20°O) sont situés	sur un même parallèle	sur un même méridien	sur l'équateur.
2	Une boule de rayon 2 cm a pour volume	$16 \pi \text{ cm}^3$	$48 \pi \text{ cm}^3$	$\frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$
3	Une sphère dont l'aire est $36 \pi \text{ cm}^2$ a pour diamètre	3 cm	6 cm	9 cm
4	Une sphère et un plan non tangents ont pour nature de section lorsqu'elle existe	un cercle	un disque	un polygone régulier.
5	Deux points de la Terre situés sur un même parallèle ont	la même latitude et la même longitude	la même latitude	la même longitude.
6	Soit S une sphère de centre O et de rayon 37 cm, située à 3,7 dm d'un plan P , alors S et P sont	sécants	extérieurs	tangents.

Géométrie dans l'espace (2)

Sections planes de solides

RAPPELS DE COURS

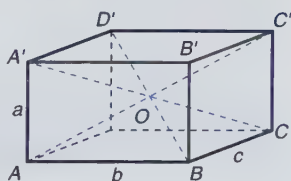
1 RAPPELS CONCERNANT LE PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE ET LE CUBE

a. Parallélépipède rectangle

Un parallélépipède rectangle est un solide dont toutes les faces sont des rectangles.

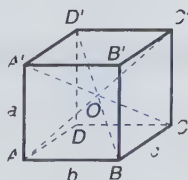
Un parallélépipède est déterminé par la connaissance de trois longueurs : il a quatre arêtes de longueur a , quatre arêtes de longueur b et quatre arêtes de longueur c .

Le point A est l'un des sommets, seul C' appartient à une face ne contenant pas A ; $[AC']$ est une diagonale du parallélépipède.



b. Cube

Un cube est un parallélépipède dont les faces sont des carrés ; donc $a = b = c$.



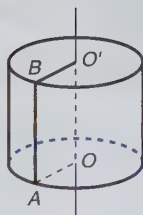
2 CYLINDRE DE RÉVOLUTION

Si on fait tourner le rectangle $OABO'$ autour de la droite (OO') , en un tour complet, il engendre un solide appelé cylindre de révolution. La droite (OO') est l'axe du cylindre, le côté $[AB]$ est une génératrice du cylindre.

La surface engendrée par le côté $[AB]$ est appelée surface latérale.

Le cylindre de révolution est donc un solide dont :

- les bases sont deux disques de même rayon ;
- les deux plans de base sont parallèles ;
- les supports des génératrices sont perpendiculaires aux plans de base.



3 CÔNE DE RÉVOLUTION

Si on fait tourner le triangle SAB rectangle en A autour de la droite (SA) , on engendre le cône de révolution de sommet S .

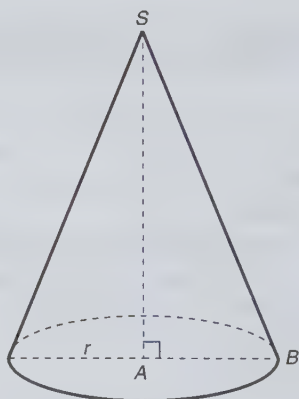
La base de ce cône est le disque de centre A et de rayon AB .

La droite (SA) est un axe de symétrie pour le cône de révolution et la droite (SB) est une génératrice.

Le volume V du cône est tel que :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h ; h = SA ;$$

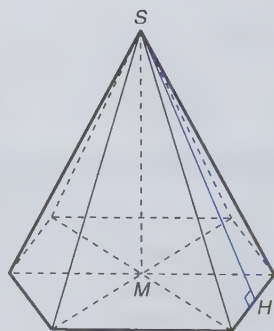
$$\mathcal{B} = \pi r^2.$$



4 PYRAMIDE RÉGULIÈRE

Une pyramide régulière est une pyramide admettant comme base un polygone régulier et dont le sommet se projette orthogonalement sur le plan de base au centre du polygone.

Dans ce cas, les faces latérales sont des triangles isocèles superposables. Si $[SH]$ est l'une des hauteurs de l'un de ces triangles, issue de S , alors SH est appelée l'apothème.



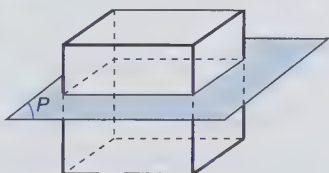
5 SECTION D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE PAR UN PLAN PARALLÈLE À UNE FACE

Soit P un plan parallèle à une face du parallélépipède. La section du parallélépipède par le plan P est une surface délimitée par un rectangle de mêmes dimensions que la face.



6 SECTION D'UN CUBE PAR UN PLAN PARALLÈLE À UNE FACE

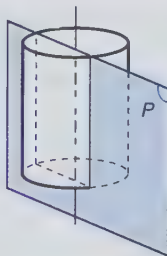
Soit P un plan parallèle à une face du cube. La section du cube par le plan P est une surface délimitée par un carré de mêmes dimensions que la face.



7 SECTION D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION PAR UN PLAN PARALLÈLE OU PERPENDICULAIRE À SON AXE DE RÉVOLUTION

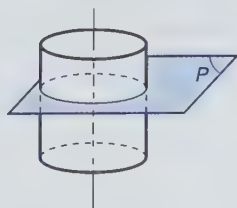
a. Par un plan parallèle à son axe de révolution

Soit P un plan parallèle à l'axe du cylindre. La section du cylindre par le plan P est un rectangle.



b. Par un plan perpendiculaire à son axe de révolution

Soit P un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. La section du cylindre par le plan P est un disque de même rayon que le disque de base.

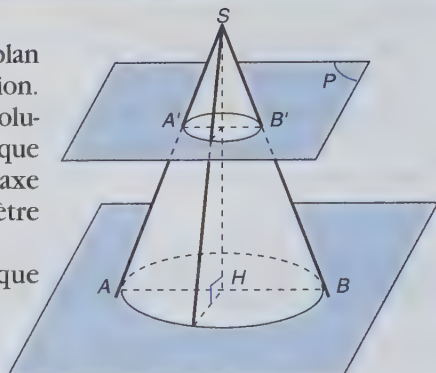


8 SECTION D'UN CÔNE DE RÉVOLUTION OU D'UNE PYRAMIDE PAR UN PLAN PARALLÈLE À LA BASE

a. Cône de révolution

Soit P un plan parallèle au plan de base du cône de révolution. La section du cône de révolution par le plan P est un disque dont le centre appartient à l'axe de symétrie et de diamètre $[A'B']$.

C'est une réduction du disque de base.



b. Pyramide

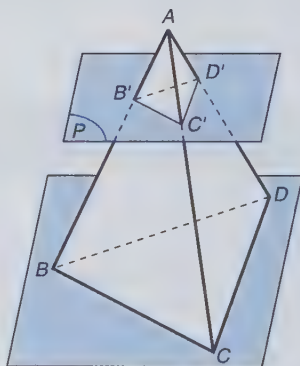
Une pyramide à base triangulaire est un tétraèdre.

La section du tétraèdre par un plan P parallèle au plan (BCD) est la surface délimitée par le triangle $B'C'D'$.

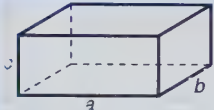
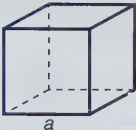
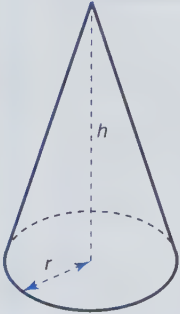
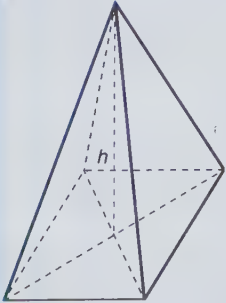
Cette surface est une réduction de la surface de la base. Le plan (ABC) coupe le plan P et le plan (BCD) selon les droites parallèles $(B'C')$ et (BC) .

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est une surface limitée par un polygone de même nature que le polygone de la base.

Cette surface est une réduction de la surface de la base.



9 AIRES ET VOLUMES

Solide		Aire totale	Volume
Parallélépipède rectangle		$2(ac + bc + ab)$	abc
Cube		$6a^2$	a^3
Cylindre		Aire latérale + $2\mathcal{B}$ ($\mathcal{B} = \pi r^2$; Aire latérale : $2 \times \pi \times r \times h$ où $h = OO'$)	$\pi r^2 h$
Cône de révolution			$\frac{1}{3} \pi r^2 h$
Pyramide régulière		$\mathcal{B} + n\mathcal{A}$, où $\mathcal{B}$: aire du polygone à n côtés et $\mathcal{A}$ l'aire d'un triangle.	$\frac{1}{3} \mathcal{B} h$

s'Entraîner

1. Soit une pyramide régulière dont le sommet S se projette orthogonalement en O sur la base carrée $ABCD$ de côté 4 cm, et dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux.

a) Calculez BD puis OB .

b) Montrez que le triangle SBD est rectangle et isocèle ; déduisez-en la hauteur SO .

c) Calculez le volume V de cette pyramide $SABCD$.

d) On coupe la pyramide par un plan (P) parallèle au plan (ABC) . Ce plan (P) coupe $[OS]$ en O' tel que $SO' = 2$ cm et chacune des arêtes $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$ respectivement en A' , B' , C' , D' .

Quelle est la nature de la figure $A'B'C'D'$?

Calculez la valeur exacte de l'échelle permettant de passer de la pyramide $SABCD$ à la pyramide $SA'B'C'D'$.

Quelle est alors la valeur exacte du volume de la pyramide $SA'B'C'D'$?
Donnez une valeur approchée de ce volume à 1 cm^3 près.

2. Soit un triangle ABC rectangle en A tel que $AC = 4$ cm et $AB = 2$ cm et le cône de révolution obtenu en faisant tourner ABC autour de (CA) .

On considère le plan P parallèle au plan de base du cône et passant par le point I du segment $[AC]$ tel que $IC = 1$ cm.

Quelle est l'aire de la section du cône par le plan P ? Donnez-en une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut en prenant $\pi = 3,1$.

3. 1. $ABCD$ est un carré de 3 cm de côté. Soit E un point de la demi-droite $[AB]$ tel que $AE = 9$ cm. Les droites (EC) et (AD) se coupent en un point F .

a) Faites une figure.

b) Démontrez que $AF = 4,5$ cm.

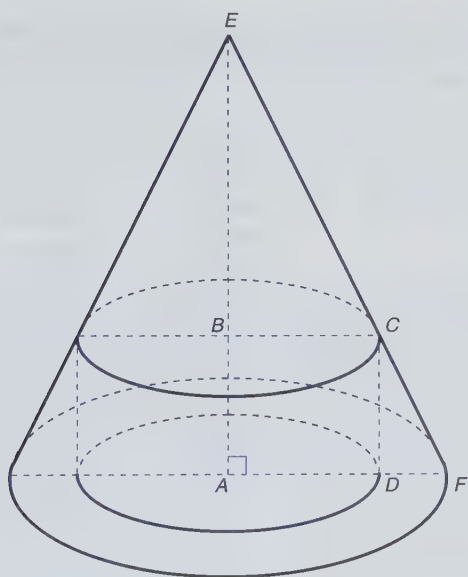
c) Calculez EF . Donnez la valeur arrondie à 0,1 cm.

d) Calculez la valeur approchée, à un degré près par excès, de la mesure de l'angle $\widehat{AEF}$.

2. En tournant autour de la droite (AE) , le triangle AEF engendre un cône de hauteur 9 cm et de rayon 4,5 cm, et le carré $ABCD$ engendre un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 3 cm inscrit dans le cône.

Voir figure page suivante.

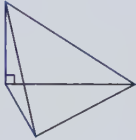
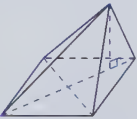
- a) Exprimez, en fonction de π le volume V_1 du cône.
- b) Exprimez, en fonction de π , le volume V_2 du cylindre.
- c) Vérifiez que le rapport $\frac{V_1}{V_2}$ est égal à 2,25.



(D'après Brevet, Scandinavie, 1997)

► corrigés p. 216

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	Le volume d'un cône de révolution, de rayon de base 3 cm et de hauteur 4 cm est	$12 \pi \text{ cm}^3$	$36 \pi^2 \text{ cm}^3$	$36 \pi \text{ cm}^3$
2	Une pyramide à base carrée est coupée par un plan parallèle au plan de base. La section est	un domaine plan limité par un parallélogramme	un domaine plan limité par un carré de mêmes dimensions que la base	un domaine plan limité par un carré.
3	Laquelle de ces 3 pyramides représente une pyramide régulière ?			
4	Si h est la hauteur d'une pyramide et $\mathcal{B}$ l'aire de la base, le volume v de la pyramide est	$\frac{\mathcal{B}h^2}{3}$	$\frac{\mathcal{B}h}{3}$	$\frac{1}{3} \mathcal{B}^2h$
5	La section d'un cône de révolution par un plan parallèle au plan de la base du cône est	un cercle	un polygone régulier	un disque.

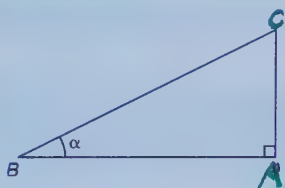
16

Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

RAPPELS DE COURS

1 RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Soit un triangle ABC rectangle en A et α et β les mesures, en degrés, des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

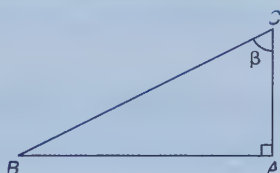


$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} \quad \cos \alpha = \frac{BA}{BC}$$

$$\tan \alpha = \frac{AC}{BA}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{« côté opposé »}}{\text{« hypoténuse »}} ;$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{« côté opposé »}}{\text{« côté adjacent »}}.$$



$$\sin \beta = \frac{BA}{BC} \quad \cos \beta = \frac{CA}{BC}$$

$$\tan \beta = \frac{BA}{CA}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{« côté adjacent »}}{\text{« hypoténuse »}} ;$$

! Dans un triangle rectangle, les angles non droits sont aigus et complémentaires.

! Dans un triangle rectangle, les angles non droits sont aigus.
Donc si α est la mesure, en degrés, d'un de ces angles :

$$0 < \sin \alpha < 1 \text{ et } 0 < \cos \alpha < 1.$$

2 RELATION FONDAMENTALE DE LA TRIGONOMETRIE

Soit un triangle rectangle ABC rectangle en A et α la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{ABC}$.

$$\cos \alpha = \frac{BA}{BC} \text{ et } \sin \alpha = \frac{AC}{BC}; \text{ donc } \cos^2 \alpha = \frac{BA^2}{BC^2}, \sin^2 \alpha = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\text{et} \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{BA^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2}.$$

Or d'après le théorème de Pythagore :

$$BA^2 + AC^2 = BC^2.$$

$$\text{Par suite, } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{BA^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

Pour toute mesure α , en degrés, d'un angle :

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

! Cette relation permet, connaissant le sinus de la mesure d'un angle, de déterminer le cosinus de la mesure de cet angle et réciproquement.

3 TRIGONOMETRIE ET CALCULATRICE

♦ Connaissant la mesure α , en degrés, d'un angle, la calculatrice permet de donner une valeur approchée de $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\tan \alpha$.

♦ Connaissant le sinus, le cosinus, la tangente de la mesure d'un angle, la calculatrice permet de donner une valeur approchée, en degrés, de la mesure de cet angle en utilisant la touche INV (inverse) ou SHIFT ou 2nd selon les modèles.

Savoir faire

Savoir déterminer la longueur d'un côté ou la mesure d'un angle en utilisant la trigonométrie.

Méthode générale

- 1° Faire une figure et choisir parmi les trois relations trigonométriques celle qui fait intervenir les deux données du texte et la grandeur à déterminer.
- 2° Écrire la relation trigonométrique choisie littéralement (avec les lettres du texte).
- 3° Exprimer la longueur cherchée exactement.
- 4° Donner une valeur approchée du résultat à l'aide d'une calculatrice puis répondre à la question posée avec l'unité donnée dans le texte.

1. Soit un triangle ABH rectangle en H tel que $AH = 2,5$ cm et $\widehat{ABH} = 21^\circ$. Calculez AB à 0,1 cm près par défaut.

Corrigé

1° Le côté $[AB]$ est l'hypoténuse du triangle ABH ; le côté $[AH]$ est opposé à l'angle $\widehat{ABH}$. Donc, on choisit la relation trigonométrique faisant intervenir le côté opposé à un angle et l'hypoténuse, c'est-à-dire le sinus.

$$2^\circ \sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB}.$$

$$3^\circ \text{ On exprime } AB : AB = \frac{AH}{\sin \widehat{ABH}}$$

$$\text{soit } AB = \frac{2,5}{\sin 21^\circ}.$$

4° Avec la calculatrice, on lit 6,976 070 274. Donc 6,9 cm est une valeur approchée de AB à 0,1 cm près par défaut.



2. Soit un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2$ cm et $AC = 3$ cm. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ à 1 degré près.

Corrigé

1° Le côté $[AB]$ est opposé à l'angle $\widehat{ACB}$ et le côté $[AC]$ lui est adjacent. Donc on choisit la relation trigonométrique faisant intervenir le côté opposé et le côté adjacent à un angle, c'est-à-dire la tangente.

$$2^\circ \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}.$$

$$3^\circ \tan \widehat{ACB} = \frac{2}{3}.$$

4° En utilisant la calculatrice, on lit 33,690 067 526. Donc 33° est la mesure de $\widehat{ACB}$ à 1° près par défaut.

s'Entraîner

1. Soit un triangle ABC rectangle en A et tel que $AC = 3$ cm et $AB = 5$ cm. Calculez $\sin \widehat{BCA}$. En déduire une valeur approchée de la mesure des angles aigus de ce triangle.

2. a) Construisez un triangle EFG , sachant que $\widehat{FGE} = 30^\circ$, $EG = 8$ cm et $FG = 5$ cm.

b) Construisez la hauteur $[FH]$. Calculez FH .

c) Calculez l'aire, en centimètres carrés, du triangle EFG .

3. Soit un triangle ABC rectangle en A , tel que $\widehat{BCA} = 37^\circ$, $BC = 90$ mm. Calculez AB . On donnera une valeur arrondie au millimètre près.

4. Soit un cercle de centre O et de rayon 5 cm. Soit $[AB]$ un diamètre de ce cercle. Soit C l'un des points du cercle tel que $\widehat{BAC} = 36^\circ$.

a) Faites une figure.

b) Déterminez la nature des triangles AOC , ABC , BOC en justifiant les réponses. Déduisez-en BC .

c) Calculez AC .

5. Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ de rayon 5 cm. Soit $[AB]$ une corde de ce cercle, de longueur 6 cm. Soit H le projeté orthogonal de O sur (AB) .

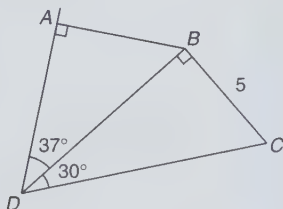
a) Faites une figure.

b) Quelle est la nature du triangle ABO ? Calculez AH .

c) Calculez $\cos \widehat{HAO}$ et déduisez-en au degré près par défaut la mesure de l'angle $\widehat{HAO}$.

6. Soit le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-contre.

Calculez DC , AB et AD .



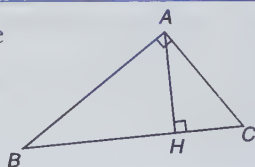
► corrigés p. 218

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	$\tan 30^\circ =$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$
2	si $\cos \widehat{A} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, alors $\sin \widehat{A} =$	$\sqrt{7}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{3}$
3	Si $\sin \widehat{B} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $\cos \widehat{B} = \frac{2}{3}$, alors $\tan \widehat{B} =$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{2\sqrt{5}}{9}$

Pour les questions 4 à 9, on utilise la figure ci-contre.

$AB = 4 \text{ cm}$; $AC = 3 \text{ cm}$;
 $BC = 5 \text{ cm}$



4	$\cos \widehat{ABC} =$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
5	$\sin \widehat{ABC} =$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
6	$AH =$	$AC \times \sin \widehat{ACB}$	$AC \times \cos \widehat{ACB}$	$AC \times \tan \widehat{ACB}$
7	$\cos \widehat{ABC} =$	$\frac{AH}{AB}$	$\frac{BH}{AB}$	$\frac{AB}{BH}$
8	Une valeur approchée de $\widehat{ABC}$ est	37°	63°	53°
9	$\cos \widehat{ABC} =$	$\sin \widehat{ACB}$	$\sin \widehat{ABC}$	$\sin \widehat{CAH}$

RAPPELS DE COURS

1 REPÈRE ORTHONORMÉ

Le repère (O, I, J) est orthonormé si et seulement si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et si $OI = OJ = 1$ (unité choisie dans le plan).

2 CALCUL DE LA DISTANCE DE DEUX POINTS DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Soit un repère orthonormé (O, I, J) et les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

On note AB la distance des points A et B .

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on donne les points $A(-3; 2)$ et $B(3; -4)$. On peut calculer AB :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3 + 3)^2 + (-4 - 2)^2}$$

$$AB = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

! N'oubliez pas que si $AB = \sqrt{a}$, alors $AB^2 = a$; et que si $a \geq 0$ et $AB^2 = a$, alors $AB = \sqrt{a}$.

s'entraîner

Méthode

Pour les exercices suivants, on peut utiliser « Comment démontrer que » aux pages indiquées ci-dessous :

Ex. 1 : voir p. 243, n° 10.

Ex. 2 : voir p. 245-246, n° 14, 15 et 16.

Ex. 3 : voir p. 245, n° 13.

Pour tous les exercices, on considère un repère orthonormé.

1. On considère les points $A(-3 ; -4)$, $B(3 ; 2)$ et $C(7 ; -2)$.

Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

2. Placez les points A , B , C , D et E définis par leurs coordonnées :

$A(1 ; -2)$, $B(-3 ; -4)$, $C(-1 ; 2)$, $D(3 ; 2)$ et $E(5 ; 0)$.

a) Démontrez que A est le milieu du segment $[BE]$.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

c) Démontrez que $AD = AB$.

d) Démontrez que le cercle de diamètre $[BE]$ passe par les points C et D .

3. Soit un cercle de centre $A(-3 ; 5)$ et de rayon 2.

Démontrez qu'une relation liant les coordonnées x et y de tout point du cercle est $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$.

4. En considérant la médiatrice d'un segment comme l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment, déterminez une relation liant les coordonnées x et y d'un point M de la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(3 ; 5)$ et $B(-1 ; 2)$.

5. Soit les points $A(x ; 2)$ et $B(6 ; 5)$.

Déterminez les valeurs du nombre x pour que la distance de A à B soit égale à $\sqrt{15}$.

► corrigés p. 220

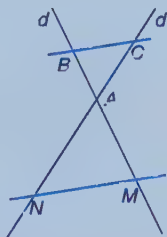
Pour chaque question, entourez la réponse exacte.
Dans tout le test, on considère un repère orthonormé.

		A	B	C
1	Si $A(-1; 2)$ et $B(-2; -1)$, alors $AB =$	10	$\sqrt{10}$	4
2	Si $A\left(3; \frac{7}{2}\right)$, $B\left(7; \frac{11}{2}\right)$ et $C\left(4; \frac{5}{2}\right)$, alors le triangle ABC est	isocèle	rectangle	équilateral
3	Si $A(3; 2)$, $B(x; -1)$ et $AB = \sqrt{13}$, alors $x =$	1 ou 5	- 1 ou - 5	2 ou 5
On considère les points $A(6; 1)$, $B(3; 5)$ et $C(11; 1)$. I est le milieu du segment $[BC]$ et E est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle BIA .				
4	$AB =$	25	5	10
5	Le triangle ABC est	isocèle	rectangle	quelconque
6	Les coordonnées de I sont	$(7; 2)$	$(4; -2)$	$(7; 3)$
7	$IA =$	20	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$
8	Les coordonnées de E sont	$(4,5; 3)$	$(2; -1)$	$(5; 4)$

RAPPELS DE COURS

1 THÉORÈME DE THALÈS

Soit deux droites d et d' sécantes en A .
 Soit B et M deux points de d , distincts de A .
 Soit C et N deux points de d' , distincts de A .



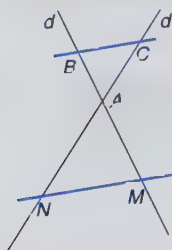
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles,

$$\text{alors } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

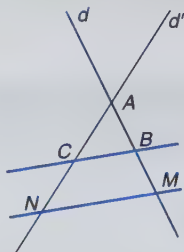
Remarquez que les points B et M sont situés de part et d'autre de A . Ils peuvent être également d'un même côté de A .

2 RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

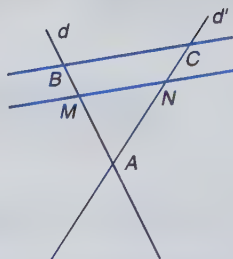
a. Configurations possibles



B, A, M et C, A, N
sont dans le même
ordre.



A, B, M et A, C, N
sont dans le même
ordre.



B, M, A et C, N, A
sont dans le
même ordre.

b. Réciproque du théorème de Thalès

Soit deux droites d et d' sécantes en A .

Soit B et M deux points de d , distincts de A .

Soit C et N deux points de d' , distincts de A .

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et A, C, N sont situés selon
une des trois configurations décrites ci-dessus, alors
les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

! Soyez attentif : une de ces trois configurations de points permet
de conclure au parallélisme des droites (BC) et (MN) : bien la
rappeler dans une démonstration.

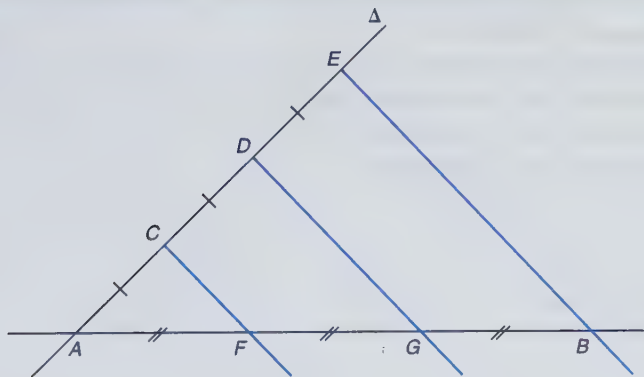
Savoir faire

Savoir partager un segment en segments de même longueur

Subdivisez un segment $[AB]$ de longueur L en trois segments consécutifs de longueur $\frac{L}{3}$ en utilisant le théorème de Thalès.

Méthode illustrée

- 1° Tracer une droite Δ passant par A et distincte de (AB) .
- 2° Construire sur Δ , à l'aide du compas, à partir de A , trois segments consécutifs $[AC]$, $[CD]$ et $[DE]$ de même longueur.
- 3° Tracer la droite (EB) joignant le point B et l'extrémité du dernier segment tracé sur Δ .
- 4° Construire des parallèles à (EB) passant par chacune des extrémités des segments (ici C et D) mis en évidence sur Δ et qui coupent respectivement le segment $[AB]$ aux points F et G .



D'après le théorème de Thalès, on a créé sur Δ une division régulière, donc la division obtenue sur (AB) est régulière.

On a ainsi subdivisé le segment $[AB]$ de longueur L en trois segments de longueur $\frac{L}{3}$.

s'Entraîner

1. On considère deux droites Δ et Δ' sécantes en A.

Par deux points B et C de Δ tels que B appartienne à $[AC]$, on trace deux droites parallèles qui coupent Δ' en D et E . Par les points D et E , on trace deux autres parallèles qui coupent Δ en F et G tels que F appartienne à $[AG]$.

Sachant que $AC = 8$ cm, $BC = 3$ cm, $AE = 10$ cm et $FG = 7$ cm, calculez AD et AF .

2. a) Construisez un triangle ABC sachant que $BC = 8$ cm et $AB = 5$ cm et que la médiane issue de A mesure 7 cm.

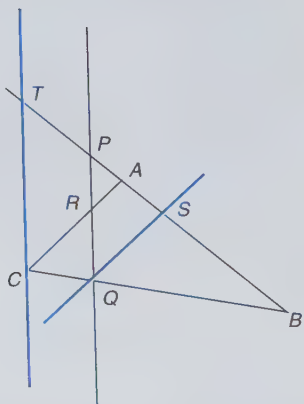
b) Soit G le centre de gravité d'un tel triangle, la parallèle à (BC) passant par G coupe (AB) en E . Calculez AE .

3. Soit un triangle ABC et une droite quelconque qui coupe les droites (AB) , (AC) et (BC) respectivement en P , R , Q . La parallèle à (PQ) passant par C coupe la droite (AB) en T . La parallèle à (AC) passant par Q coupe (AB) en S .

a) Comparez $\frac{BP}{BT}$ et $\frac{BQ}{BC}$

puis $\frac{BS}{BA}$ et $\frac{BQ}{BC}$.

b) Dédisez-en $PB \times BA = BT \times BS$.



4. Soit un repère (O, I) d'une droite D .

Construisez les points A , B , C d'abscisses respectives $-\frac{2}{7}$, $\frac{11}{7}$ et $-\frac{5}{7}$ dans le repère (O, I) .

5. Soit un triangle ABC et (CC') et (BB') les hauteurs issues de B et C ($B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$).

Soit les hauteurs $(B'P)$ et $(C'R)$ issues de B' et C' dans le triangle $AB'C'$ ($P \in (AC')$ et $R \in (AB')$).

a) Comparez les réels $\frac{AR}{AB'}$ et $\frac{AC'}{AB}$ puis les réels $\frac{AP}{AC'}$ et $\frac{AB'}{AC}$.

b) Dédisez-en l'égalité $AR \times AB = AP \times AC$.

Comparez alors la direction des droites (PR) et (BC) .

6. Soit un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les diagonales se coupent en O . Les points E et F sont les projetés orthogonaux respectifs de O et C sur la droite (AB) ; G et H sont les projetés orthogonaux respectifs de O et C sur la droite (AD) .

Comparez $\frac{AE}{AF}$ et $\frac{AG}{AH}$ et les directions des droites (GE) et (FH) .

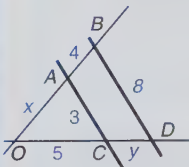
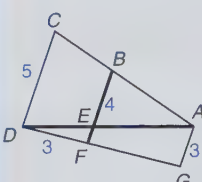
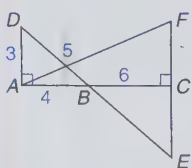
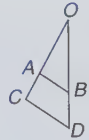
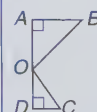
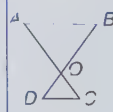
7. Soit un triangle ABC rectangle en A , l'hypoténuse a pour longueur 5 cm et $AB = 3$ cm.

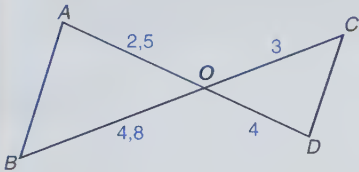
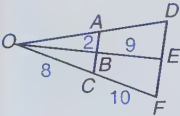
On considère un point M de $[BC]$ tel que $BM = x$.

La parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en N .

Exprimez MN en fonction de x .

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	 $(AC) \parallel (BD)$ $OA = x$ $AB = 4$ $BD = 8$ $CD = y$ $OC = 5$ $AC = 3$	$x = 4$	$x = \frac{3}{2}$	$x = 2,4$
2		$y = \frac{25}{3}$	$y = 8,3$	$y = 6,6$
3	 $(DC) \parallel (BE)$ $(BE) \parallel (AG)$ $AD = 12$ $DC = 5$ $EB = 4$ $AG = 3$ $DF = 3$	$DE = 9,6$	$DE = 2,4$	$DE = 3$
4		$EF = 0,6$	$EF = 0,75$	$EF = 1$
5		$DG = 9$	$DG = 12$	$DG = 15$
6	 $BD = 5$ $BC = 6$ $AB = 4$ $AD = 3$	$BE = 6,7$	$BE = \frac{20}{3}$	$BE = 7,5$
7		$CE = 3,3$	$CE = 4,5$	$CE = \frac{10}{3}$
8	Laquelle de ces figures ne permet pas d'utiliser le théorème de Thalès ?			

		A	B	C
9		Les droites (AB) et (DC) sont parallèles.	Les droites (AB) et (DC) ne sont pas parallèles.	On ne peut conclure sur la direction des droites (AB) et (DC).
10	 $(AC) \parallel (DF)$ $AB = 2$ $OC = 8$ $CF = 10$ $BE = 9$	$ED = \frac{32}{7}$	$ED = 4,5$	$ED = 4$

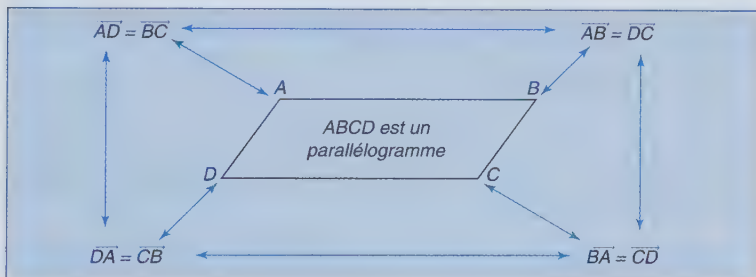
19

Vecteurs et translations

RAPPELS DE COURS

1 VECTEURS

N'oubliez pas que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu et également que $ABCD$ est un parallélogramme.



Exemples

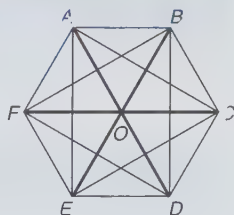
Soit l'hexagone régulier $ABCDEF$ dessiné ci-contre.

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DE}$$

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EC} ; \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD} ; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}.$$



Remarque : si I est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Dans l'exemple précédent, le point O est le milieu de $[AD]$ donc $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$.

N'oubliez pas que si quatre points A, B, C et D sont alignés et si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme aplati.

2 TRANSLATIONS

Soit la translation t associée au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a. Définition

Le point M' est le translaté du point M par la translation t ; ceci signifie que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}. \text{ On note } t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'.$$

b. Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par :

- sa direction (celle de la droite (AB)) ;
- sa longueur (celle du segment $[AB]$) ;
- son sens (celui de A vers B).

Ne pas confondre sens et direction (différent du langage courant).

Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (vecteur nul).

Si $A \neq B$, alors $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

c. Propriétés

Toute translation conserve la distance entre deux points et la direction d'une droite.

Par une translation, l'image		d'un segment est un segment, d'une droite est une droite parallèle, d'un cercle est un cercle de même rayon.
------------------------------	---	--

3 SOMME DE VECTEURS

On appelle somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur associé à la translation $t_{\vec{u}}$ suivie de la translation $t_{\vec{v}}$.

La translation $t_{\vec{u}}$ suivie de la translation $t_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ notée $t_{\vec{u} + \vec{v}}$.

Si $t_{\vec{u}}(A) = B$ et $t_{\vec{v}}(B) = C$, la translation qui transforme A en C étant celle de vecteur $\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Relation de Chasles : quels que soient les points A, B et C ,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Remarque :

Si de plus $t_{\vec{v}}(A) = B'$ et $t_{\vec{u}}(B') = C'$, comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB'} = \vec{v}$, alors $AB'CB$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'C'} = \vec{u}$. Or $\overrightarrow{B'C} = \vec{u}$, ce qui signifie que $C = C'$.

Par suite $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{u}} \text{ donc } \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés, leur somme est le vecteur nul :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

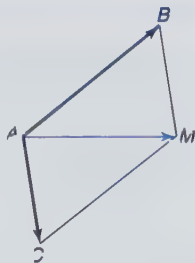
Exemple

Soit M le point tel que $ABMC$ est un parallélogramme. On veut construire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$, donc

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$$

d'après la relation de Chasles.



Savoir faire

1 Savoir construire le translaté d'un point

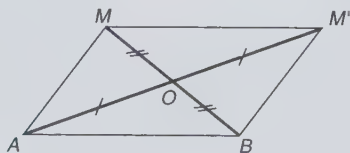
Construisez le translaté M' du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Méthode

- 1° Écrire l'égalité vectorielle traduisant le texte.
- 2° Traduire l'égalité vectorielle en terme de parallélogramme.
- 3° Construire un parallélogramme dont on connaît trois points ; le quatrième est le point cherché.

Corrigé

- 1° Le point M' est le translaté du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
- 2° L'égalité $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ signifie que le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme.
- 3° Comme $ABM'M$ est un parallélogramme, alors les segments $[BM]$ et $[AM']$ ont le même milieu O .
On connaît les points A , B et M ; on connaît donc aussi le milieu O de $[BM]$. Le point M' est alors le point tel que O soit le milieu de $[AM']$. Ainsi le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme et M' est le translaté de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



2 Savoir simplifier une somme de plusieurs vecteurs

Simplifiez la somme vectorielle $\vec{S}$ telle que

$$\vec{S} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AC}.$$

Méthode

- 1° Transformer la somme pour que seul le symbole + de l'addition apparaisse.
- 2° Associer dans la somme les vecteurs dont l'extrémité de l'un est l'origine de l'autre.
- 3° Utiliser les propriétés de l'addition des vecteurs, notamment la relation de Chasles, pour simplifier la somme.

Corrigé

$$1^\circ \vec{S} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AC} \text{ car } -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

$$2^\circ \vec{S} = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).$$

$$3^\circ \vec{S} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\vec{S} = \overrightarrow{MC} \quad \text{(relation de Chasles).}$$

s'Entraîner

Pour les exercices suivants, on peut utiliser « Comment démontrer que » aux pages indiquées ci-dessous :

Ex. 1, 4 et 5 : voir p. 241, n° 3.

1. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r et un cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' et de même rayon r , sécants en A et B .

a) Quelle est l'image du cercle $\mathcal{C}$ par la translation $t_{\overrightarrow{OO'}}$?

b) Le point A est un point de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$. De quel point A' de $\mathcal{C}$ le point A est-il l'image ?

c) Dessinez le point B' image de B par $t_{\overrightarrow{OO'}}$.

d) Quelle est la nature du quadrilatère $A'AB'B$?

2. Simplifiez les sommes suivantes :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} ;$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AF} ;$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MA}.$$

3. Soit trois points alignés A, B, C tels que B soit milieu de $[AC]$; soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.

Quels sont les vecteurs de la figure égaux à $\overrightarrow{IB}$? égaux à $\overrightarrow{AB}$? égaux à $\overrightarrow{CI}$?

4. Construisez trois segments $[AB], [CD], [EF]$ ayant même milieu I , de longueurs différentes et portés par des droites distinctes.

a) Quelle est la nature du quadrilatère $AEBF$? Qu'en déduisez-vous pour les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FB}$?

b) Quels sont tous les parallélogrammes de la figure ?

5. Soit un carré $EFGH$ et A, B, C, D les milieux respectifs de $[EF], [FG], [GH], [HE]$; les droites (EG) et (FH) se coupent en O .

a) Démontrez que $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{EH}$.

b) Démontrez que $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.

c) Quelle est l'image O' du point O par les translations successives $t_{\overrightarrow{GB}}, t_{\overrightarrow{OD}}, t_{\overrightarrow{FG}}, t_{\overrightarrow{HC}}$ et $t_{\overrightarrow{BF}}$? Que pensez-vous du passage de O à O' ?

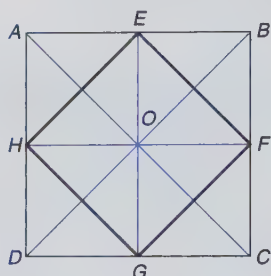
► corrigés p. 227

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	Si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, alors	$MNPQ$ est un quadrilatère quelconque	$MNPQ$ est un parallélogramme	$MNQP$ est un parallélogramme.
2	Si $MN = QP$, alors	$MNPQ$ est un quadrilatère quelconque	$MNPQ$ est un parallélogramme	$MNPQ$ est un trapèze isocèle.
3	Si $MN = PN$, alors	N est le milieu de $[MP]$	N appartient à la médiatrice de $[PM]$	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$
4	$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$, alors	M, N, P sont alignés	M appartient à $[NP]$	M, N, P sont quelconques
5	Si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$, alors	$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN}$	N est le milieu de $[PM]$	M, N, P ne sont pas alignés.
6	Le vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GE}$ est égal à	$\overrightarrow{AG}$	$\overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{AF}$
7	Le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EC}$ est égal à	$\overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{DA}$	$\vec{0}$

	A	B	C
--	---	---	---

La figure ci-dessous est celle des questions 8-9-10-11-12.



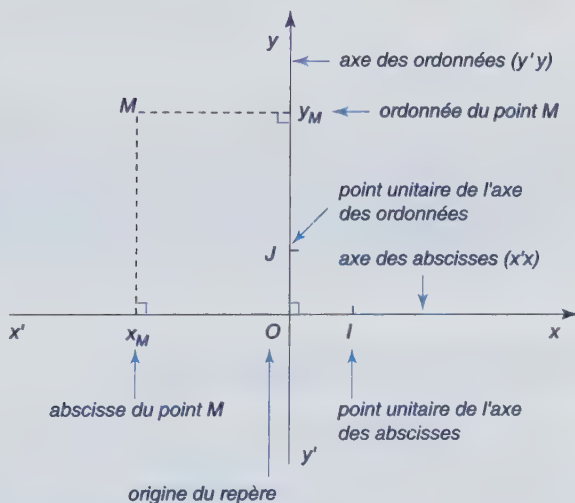
$ABCD$ est un carré et E, F, G, H sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. O est le centre du carré.

8	Le point D a pour image par $t_{\overrightarrow{HE}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{HG}}$	C	F	B
9	Le point A a pour image par $t_{\overrightarrow{GC}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{HD}}$	D	O	B
10	Le point O a pour image par $t_{\overrightarrow{DH}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{HG}}$	D	F	C
11	Le point B a pour image par $t_{\overrightarrow{OG}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{EA}}$ puis de $t_{\overrightarrow{HG}}$	C	D	E
12	Le point A a pour image par $t_{\overrightarrow{OF}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{HG}}$	O	F	G

RAPPELS DE COURS

1 REPÈRE DU PLAN – COORDONNÉES D'UN POINT

Un repère du plan est un triplet (O, I, J) tel que les points O, I et J ne soient pas alignés.



Le point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère (O, I, J) . Le nombre x est l'abscisse du point M ; le nombre y est l'ordonnée du point M .

Si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, alors le repère est orthogonal. Si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et $OI = OJ = 1$, alors le repère est orthonormé ou orthonormal.

Dans le repère (O, I, J) , le point O a pour coordonnées $(0 ; 0)$, le point I a pour coordonnées $(1 ; 0)$ et le point J $(0 ; 1)$.

2 COORDONNÉES D'UN VECTEUR

1. Lecture de coordonnées

Dans le repère (O, I, J) , on considère les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

! Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont les opposées de celles de $\overrightarrow{BA}$. Il faut calculer les différences des abscisses et des ordonnées dans le bon ordre.

Le point K milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

2. Égalité de deux vecteurs

Le couple de coordonnées d'un vecteur est unique dans un repère.

Soit deux vecteurs $\vec{u}(X, Y)$ et $\vec{v}(X', Y')$.

Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $X = X'$ et $Y = Y'$.

Si $X = X'$ et $Y = Y'$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.

3 COORDONNÉES DU TRANSLATÉ D'UN POINT

Soit un repère (O, I, J) et la translation t de vecteur $\vec{u}(a; b)$.

Le point $B(x_B, y_B)$ est le translaté du point $A(x_A, y_A)$ par la translation t si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \text{ soit } \begin{cases} x_B - x_A = a \\ y_B - y_A = b \end{cases} \quad \text{d'où } \begin{cases} x_B = x_A + a \\ y_B = y_A + b \end{cases}$$

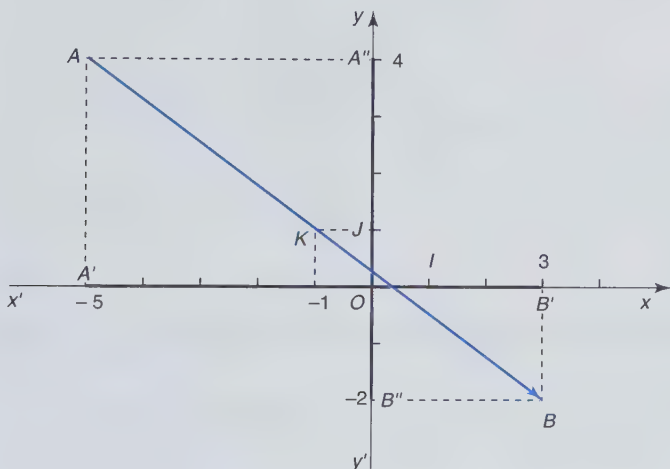
Si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ soit } \begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$$

Savoir faire

Savoir lire les coordonnées d'un vecteur dans un repère

Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère (O, I, J) orthogonal.

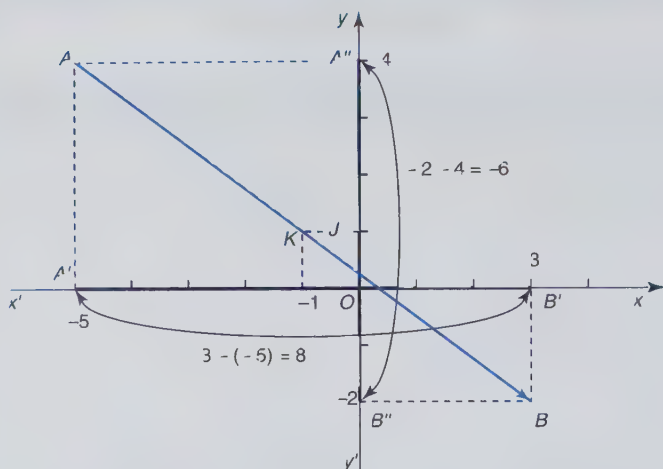


Méthode

- 1° Projeter orthogonalement les points A et B sur les axes de coordonnées.
- 2° Lire la différence des abscisses et des ordonnées des projetés de ces points.

Corrigé

- 1° On projette orthogonalement les points A et B sur les axes de coordonnées. Les points A' et A'' sont les projetés orthogonaux de A sur les axes et B' et B'' ceux de B.



2° On lit la différence des abscisses et des ordonnées des projetés de ces points.

Pour $\overrightarrow{AB}$ ($x_{B'} - x_{A'} ; y_{B''} - y_{A''}$), soit $\overrightarrow{AB}$ ($3 - (-5) ; -2 - 4$) d'où $\overrightarrow{AB}$ ($8 ; -6$).

s'Entraîner

Pour tous les exercices, on choisit un repère (O, I, J) orthonormé.

- 1.** a) Placez les points $A(2; 3)$, $B(5; 1)$, $C(-2; 3)$ et $D(-3; -2)$.
b) Lisez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$ en projetant chaque vecteur sur chaque axe orthogonalement.
c) Vérifiez par le calcul l'exactitude de vos lectures.

- 2.** a) Placez les points $A(2; -1)$ et $B(-3; -1)$.
Que remarquez-vous ? Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$?
b) Placez les points $C(-2; 3)$ et $D(-2; -1)$.
Que remarquez-vous ? Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$?
c) Placez le point F tel que le vecteur $\overrightarrow{AF}$ ait pour coordonnées $(0; -2)$.

- 3.** Soit le vecteur $\vec{u}\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ et le point $A\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

Quelles sont les coordonnées du point B dont l'image par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point A ?

- 4.** Soit les points $A(-2; 3)$, $B(1; -1)$ et $C(0; 2)$.

Déterminez les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

- 5.** On considère les points $A(3; -5)$, $B(5; -9)$, $C(-1; 1)$ et $D(-3; 5)$.

Démontrez de deux façons différentes que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

- 6.** a) Placez les points $M(x, y)$ tels que $-2 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 3$.

- b) Placez les points $N(x, y)$ tels que $x = 2$ et $-3 \leq y \leq 2$.

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

Pour toutes les questions de ce test, on se place dans un repère (O, I, J) et on considère les points $D(-2; 3)$, $E(1; -2)$, $F\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $G\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

		A	B	C
1	Les coordonnées de $\overrightarrow{GF}$ sont	$(-1; 2)$	$(1; -2)$	$\left(-1; \frac{3}{2}\right)$
2	Le milieu de $[GF]$ a pour coordonnées	$(-1; 2)$	$(1; -2)$	$\left(-1; \frac{3}{2}\right)$
3	On a l'égalité	$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{GF}$	$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DF}$	$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{EF}$
4	Le translaté de D par la translation de vecteur $\vec{u}\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ est le point	E	F	G
5	On obtient le parallélogramme	$DEFG$	$OEFG$	$DFEO$
6	Le quadrilatère $DEFH$ est un parallélogramme si les coordonnées de H sont	$\left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right)$	$\left(\frac{7}{2}; -\frac{9}{2}\right)$	$\left(-\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$
7	Le milieu de $[DE]$ est	G	O	F

RAPPELS DE COURS

1 QUELQUES DÉFINITIONS UTILES

a. Sens de rotation

Pour faire tourner une figure, on doit savoir dans quel sens cette rotation s'opère.

Par convention, on appelle sens direct le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. De ce fait, on appelle sens indirect ou rétrograde le même sens que celui des aiguilles d'une montre.

La donnée d'un point et de son transformé permet de préciser le sens.

! Si rien n'est précisé dans un texte, on choisit le sens direct.

b. Points et figures invariants

♦ Un point est invariant si par une transformation il reste à la même position.

♦ Une figure est invariante si par une transformation elle reste inchangée.

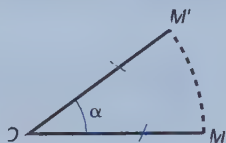
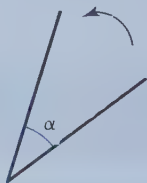
! Une figure peut être globalement invariante par une transformation sans que tous les points de cette figure soient invariants.

2 DÉFINITION D'UNE ROTATION

On se donne un point O , un angle de mesure α en degrés et un sens de rotation.

La rotation de centre O et d'angle α transforme un point M du plan en un point M' tel que :

$$\begin{cases} OM = OM' \\ \widehat{MOM'} = \alpha \end{cases}$$



Remarques :

- Le point O est le seul point invariant.
- La rotation de sens direct et d'angle 90° est un quart de tour direct.
- La rotation de sens indirect et d'angle 90° est un quart de tour indirect.
- La rotation d'angle 180° est un demi-tour ou bien la symétrie centrale de centre O .

3 PROPRIÉTÉS DES ROTATIONS

a. Par une rotation, les figures et leurs transformées sont superposables.

Une rotation conserve les distances, les aires des surfaces, les angles géométriques et l'alignement des points.

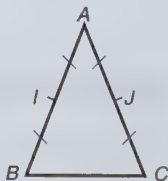
b. Par une rotation le transformé :

- d'une droite est une droite,
- d'un cercle est un cercle de même rayon,
- d'un segment est un segment de même longueur,
- du milieu d'un segment est le milieu du segment transformé.

Exemple

Soit un triangle ABC isocèle en A et I le milieu de $[AB]$.

Par la rotation de centre A qui transforme B en C , l'image du point I milieu de $[AB]$ est le point J milieu de $[AC]$.



Savoir faire

1 Savoir construire le transformé d'un point par une rotation

Soit un point O et la rotation de centre O , d'angle 70° dans le sens direct.

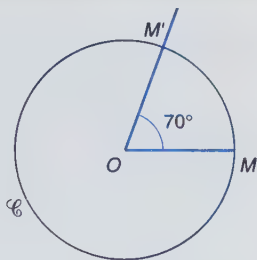
Construisez l'image M' d'un point M par cette rotation.

Méthode illustrée

1° Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par M .

2° Tracer la demi-droite d'origine O faisant un angle de 70° avec (OM) c'est-à-dire égal à celui de la rotation. Faire attention au sens de rotation : ici sens direct.

L'intersection de cette demi-droite et du cercle $\mathcal{C}$ met en évidence le point M' transformé de M par la rotation de centre O d'angle 70° dans le sens direct.



2 Savoir construire la droite transformée d'une droite par une rotation

Soit une droite $\mathcal{D}$ et un point A n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. Construisez l'image de $\mathcal{D}$ par la rotation de centre A et d'angle 80° dans le sens direct.

Méthode

1° Projeter orthogonalement le centre de la rotation sur la droite à transformer : soit H ce projeté.

2° Construire l'image H' de H par cette rotation.

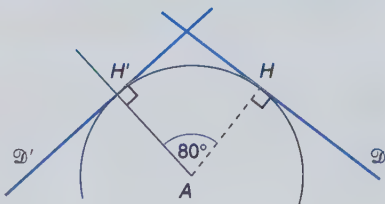
3° Construire la perpendiculaire en H' à la droite joignant H' et le centre de la rotation. Cette perpendiculaire est la droite cherchée.

Corrigé

1° On construit le point H projeté du point A sur la droite $\mathcal{D}$.

2° On construit le transformé H' de H par la rotation de centre A et d'angle 80° dans le sens direct.

3° Par une rotation un angle droit se transforme en un angle droit. Comme la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire en H à (AH) , elle se transforme par la rotation en la perpendiculaire en H' à (AH') soit la droite $\mathcal{D}'$.



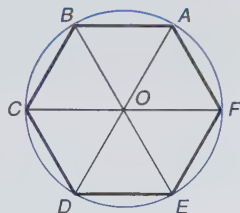
s'Entraîner

1. Soit l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O dessiné ci-contre.

a) Quel est le transformé du triangle FOB par la rotation de centre O qui transforme C en D ?

b) Quel est le transformé du losange $BCDO$ par la rotation de centre O qui transforme C en A ?

c) Quelle est la rotation de sens indirect qui transforme le triangle OAB en le triangle BOC ?

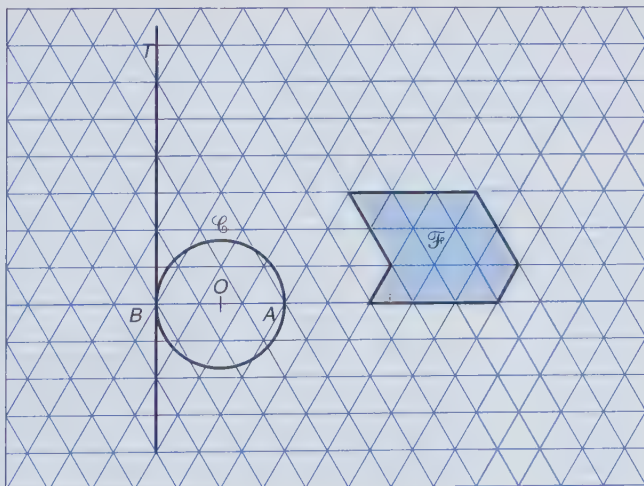


2. Soit un segment $[AB]$

Où se situent les centres des rotations qui transforment A en B ?

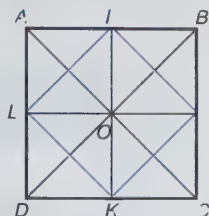
3. Soit un triangle équilatéral ABC et O le centre de son cercle circonscrit. Déterminez une rotation laissant le triangle ABC invariant.

4. Soit une figure $\mathcal{F}$, un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ de centre O et la tangente T en B à $\mathcal{C}$.



- a) Construisez la transformée $\mathcal{F}'$ de la figure $\mathcal{F}$ par la rotation de centre A et d'angle 60° dans le sens direct en vous servant du pavage en triangles équilatéraux.
- b) Construisez le transformé $\mathcal{C}'$ du cercle $\mathcal{C}$ et la droite T' transformée de T par la rotation de centre A et d'angle 120° dans le sens direct en vous servant du pavage en triangles équilatéraux.

Le carré $ABCD$ a pour centre O . Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

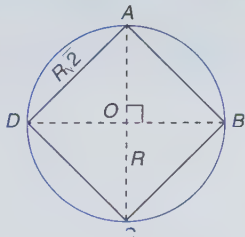
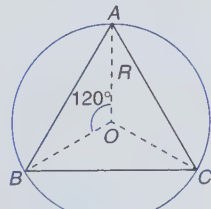
			A	B	C
1	Le quart de tour direct de centre I transforme	A en	B	O	D
2		L en	J	A	O
3		O en	J	A	B
4		Le triangle ILA en	ILO	BIJ	IJO
5	Le quart de tour indirect de centre O transforme	A en	I	B	D
6		L en	I	A	K
7		C en	D	B	L
8		Le triangle COJ en	JOD	IOB	DOK

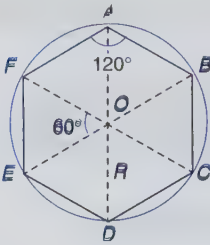
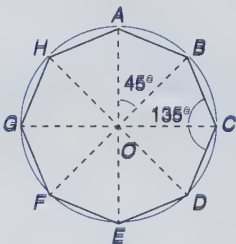
RAPPELS DE COURS

● CARACTÉRISTIQUES DES POLYGONES RÉGULIERS

Un polygone régulier a ses côtés de même longueur et ses angles ont la même mesure.

Un polygone régulier est inscriptible dans un cercle dont le centre est le centre du polygone.

Polygones	Caractéristiques
Carré 	Les diagonales ont même longueur et des supports perpendiculaires. Angle au centre : $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Angle : $\widehat{BAD} = 90^\circ$. Le centre du cercle est le point d'intersection des diagonales. Le point O est le milieu de [AC] et [DB]. Côtés : $R\sqrt{2}$.
Triangle équilatéral 	Les médianes sont aussi hauteurs, bissectrices et médiatrices. Angle au centre : $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Angle : $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Le centre du cercle est le point d'intersection des médiatrices des côtés. Côtés : $R\sqrt{3}$.

Polygones	Caractéristiques
Hexagone régulier 	Les diagonales ont même longueur et se coupent au centre du cercle. Angle au centre : $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Angle : $\widehat{BAF} = 120^\circ$. 6 côtés de longueur R.
Octogone régulier 	8 côtés. Les diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu au centre du cercle. Angle au centre $\widehat{AOB} = 45^\circ$. Angle : $\widehat{BCD} = 135^\circ$.

Savoir faire

1 Savoir construire un carré et un octogone connaissant leur centre et un sommet

Tracez le carré $ABCD$ et l'octogone $AEBFCGDH$ de centre O et dont un sommet est le point A .

Méthode

1° Tracer le cercle $\mathcal{C}$ dont le centre est le centre du carré et de l'octogone passant par le sommet donné.

2° Tracer le diamètre (d) passant par le sommet donné.

3° Tracer la médiatrice Δ à ce diamètre (d) qui coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux autres sommets du carré.

Les extrémités des deux diamètres sont les sommets du carré cherché.

4° Tracer les bissectrices des angles au centre déterminés par les diagonales du carré ; elles coupent le cercle $\mathcal{C}$ en quatre autres points qui forment avec les sommets du carré les huit sommets de l'octogone.

Corrigé

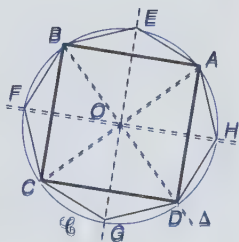
1° On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par A .

2° On trace le diamètre $[AC]$.

3° On trace la médiatrice Δ de $[AC]$ qui coupe $\mathcal{C}$ aux points B et D .

4° On trace les bissectrices des angles au centre $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$; elles coupent le cercle $\mathcal{C}$ aux points E, G, F et H avec E appartenant à l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas C , et F appartenant à l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas D .

On met ainsi en évidence l'octogone $AEBFCGDH$.



2 Savoir construire un hexagone et un triangle équilatéral connaissant leur centre et un sommet

Tracez l'hexagone $ABCDEF$ et le triangle équilatéral ACE connaissant leur centre O et un sommet A tel que $OA = 2,5$ cm.

Méthode

1° Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et passant par le sommet connu.

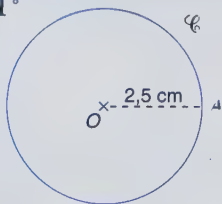
2° Tracer à partir du sommet connu le cercle de même rayon R que $\mathcal{C}$: il coupe $\mathcal{C}$ en deux points B et F .

3° Tracer en chacun de ces points un cercle de rayon R - ces cercles mettent en évidence sur $\mathcal{C}$ deux autres points C et E - puis tracer un cercle de rayon R et de centre C (ou E) : il détermine le sixième point de l'hexagone.

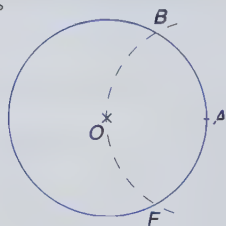
4° Joindre, à partir du sommet connu, les sommets de deux en deux pour mettre en évidence un triangle équilatéral de même centre que l'hexagone.

Corrigé

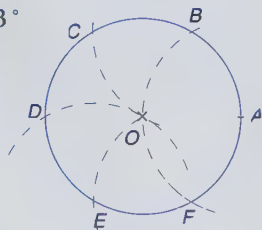
1°



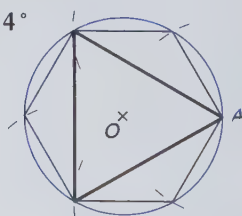
2°



3°



4°



s'Entraîner

1. a) Tracez un carré $ABCD$ sachant qu'il est inscrit dans un cercle de rayon 3 cm. De chaque sommet du carré, tracez un arc de cercle intérieur au carré, dont le rayon vaut la moitié du côté du carré. On obtient ainsi une rosace $EFGH$, avec E point de $[AB]$, F point de $[BC]$, G point de $[DC]$ et H point de $[DA]$.

b) Calculez l'aire de la surface limitée par la rosace. On donnera la valeur exacte et la valeur approchée au millimètre carré près.

2. On se propose de réaliser la maquette d'un carrelage.

a) Tracez un octogone régulier $ABCDEFGH$ inscrit dans un cercle de centre O tel que $AO = 2,5$ cm.

b) Sur le segment $[BO]$, placez le point A' tel que $BA' = 1,5$ cm.

c) Tracez les quatre sommets du carré $A'B'C'D'$ de centre O , avec B' point de $[OD]$, C' point de $[OF]$ et D' point de $[OH]$.

d) Tracez l'étoile $AA'C B'EC'GD'$.

3. Partie A. Calculez l'aire d'un carré de 120 m de périmètre.

Partie B. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de 120 m de périmètre.

a) Calculez la longueur AB du côté de l'hexagone régulier.

b) Soit (OH) la hauteur issue de O du triangle AOB .

Calculez AH puis OH .

c) Calculez la valeur exacte puis la valeur arrondie à 2 m^2 près de l'aire de $ABCDEF$.

Partie C. On considère un décagone (dix côtés) régulier $ABCDEFGHIJMN$ de 120 m de périmètre, inscrit dans un cercle de centre I .

a) Calculez la longueur MN du côté du décagone régulier.

b) Calculez l'angle $\widehat{MIN}$ puis l'angle $\widehat{IMN}$.

c) On appelle K le projeté orthogonal de I sur $[MN]$. Montrez que la valeur arrondie au centimètre près de IK est 18,47 mètres.

d) En utilisant la valeur approchée de IK donnée en c), calculez :

– l'aire du triangle MIN ,

– l'aire du décagone régulier ; donnez la valeur arrondie à 2 m^2 près de ce dernier résultat.

(D'après DNB, juin 1997, Clermont-Ferrand)

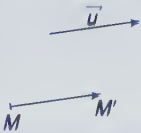
► corrigés p. 232

Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	Un carré de côté 2 cm est inscrit dans un cercle de rayon	$\sqrt{2}$ cm	$2\sqrt{2}$ cm	2 cm
2	Un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 2 cm a des côtés de	$\sqrt{2}$ cm	$2\sqrt{2}$ cm	2 cm
3	Un octogone régulier a des angles au centre de	45°	60°	120°
4	Dans un triangle ABC équilatéral de centre O , $\widehat{AOB} =$	45°	60°	120°
5	Un octogone régulier a	5 côtés	6 côtés	8 côtés
6	Dans un octogone régulier, les angles mesurent	60°	120°	135°
7	Dans un hexagone régulier, la somme des angles est	180°	360°	720°

RAPPELS DE COURS

1 RAPPELS

Transformations	Éléments caractéristiques	M' étant le transformé de M	Figure
Symétrie centrale	Un point O	O est le milieu $[MM']$.	
Translation	Un vecteur $\vec{u}$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	

2 FIGURES TRANSFORMÉES

Ensemble de points	Figure transformée par une symétrie centrale ou une translation
Une droite D	se transforme en une droite D' parallèle à D .
Un segment $[AB]$	se transforme en un segment $[A'B']$ de même longueur que $[AB]$.
Un cercle de centre I et de rayon R	se transforme en un cercle de centre I' image de I et de rayon R .
Trois droites concourantes en un point G	se transforment en trois droites concourantes en G' image de G .
Le centre de gravité d'un triangle	se transforme en le centre de gravité du triangle transformé.
L'orthocentre d'un triangle	se transforme en l'orthocentre du triangle transformé.

3 COMPOSITION DE DEUX TRANSFORMATIONS

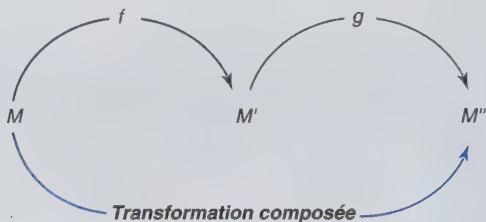
Les transformations que vous connaissez sont : les translations, les symétries centrales, les symétries orthogonales, les rotations.

Soit f et g deux transformations telles que :

l'image de M par f soit M' et

l'image de M' par g soit M'' .

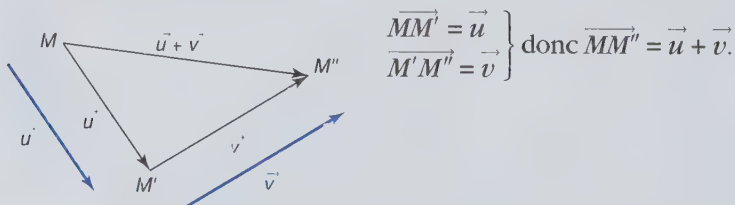
Le moyen de passage de M à M'' s'appelle la composée de f suivie de g . Elle consiste à faire agir f sur une figure F pour obtenir une figure F' puis à faire agir la transformation g sur F' pour obtenir une figure F'' .



4 COMPOSITION DE DEUX TRANSLATIONS

Soit $\vec{u}$ le vecteur de la translation t ; soit $\vec{v}$ le vecteur de la translation t' . Un point M du plan se transforme en M' par la translation t ; le point M' se transforme en M'' par la translation t' .

Le moyen qui permet de passer du point M au point M'' est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$: c'est la translation t'' obtenue en faisant agir t suivie de t' .



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} \end{array} \right\} \text{ donc } \overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v}.$$

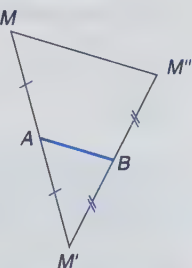
Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v} + \vec{u}$ sont égaux, donc la translation t suivie de t' est égale à la translation t' suivie de t .

La transformation obtenue en faisant agir la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

5 COMPOSITION DE DEUX SYMÉTRIES CENTRALES

Soit A et B deux points distincts, s la symétrie de centre A et s' la symétrie de centre B . Un point M se transforme en M' par s et le point M' se transforme en M'' par s' .

Le point M'' est le translaté du point M par la translation de vecteur $2\vec{AB}$.



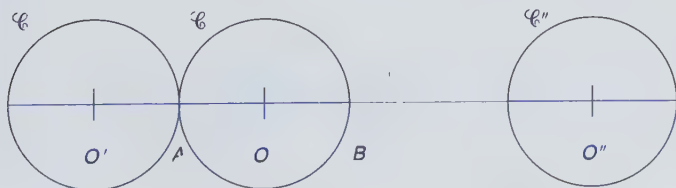
Si on fait agir la symétrie de centre A suivie de la symétrie de centre B , on obtient la translation de vecteur $2\vec{AB}$.

Exemple

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$.

Le cercle $\mathcal{C}$ se transforme par la symétrie de centre A en $\mathcal{C}'$, de centre O' et de rayon OA ; le cercle $\mathcal{C}'$ se transforme par la symétrie de centre B en $\mathcal{C}''$, de centre O'' et de rayon OA . Le cercle $\mathcal{C}$ se transforme en $\mathcal{C}''$ par la translation de vecteur $2\vec{AB}$;

$$\overrightarrow{OO''} = 2\vec{AB}.$$



Savoir faire

Savoir tracer l'image d'un polygone par la composée de deux translations (ou symétries centrales)

Soit le triangle ABC , la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et la translation t' de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

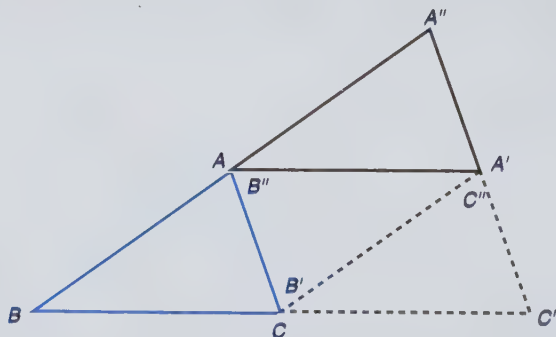
Construire l'image du triangle ABC par la translation t suivie de la translation t' .

Méthode

- 1° Construire les images des sommets du polygone par la première translation (ou symétrie).
- 2° Construire les images de ces images par la deuxième translation (ou symétrie).
- 3° Conclure.

Corrigé

- 1° On trace les images des points A , B et C par la translation t . On obtient le triangle $A'B'C'$.
- 2° On trace les images des points A' , B' et C' par la translation t' . On obtient le triangle $A''B''C''$ qui est aussi le triangle $A''AA'$.
- 3° Le triangle ABC se transforme en $A''B''C''$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, soit la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.



s'Entraîner

1. Soit un carré $ABCD$ et les points E, F, G, H milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

On appelle O le point de concours des diagonales du carré $ABCD$. Quelle transformation permet de passer :

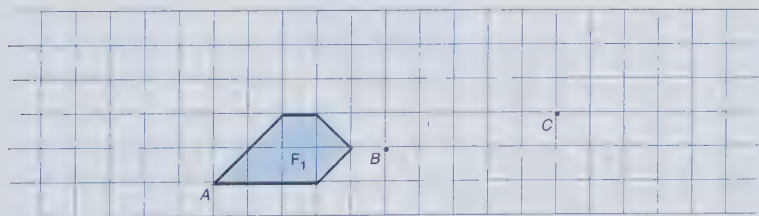
- du triangle AEH au triangle GFC ;
- du triangle AEH au triangle OFG ?

2. Soit I le milieu d'un segment $[AB]$, D la médiatrice de $[AB]$ et C un point de D .

- Construisez l'image C' de C par la symétrie de centre A et l'image C'' de C' par la symétrie de centre B .
- Comparez les directions des droites (CC'') et (AB) . Justifiez votre réponse.

3. Reproduisez la figure F_1 ci-dessous ainsi que les points B et C en respectant leurs positions.

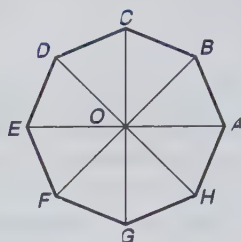
- Tracez l'image F_2 de F_1 par la symétrie de centre B . Précisez l'image de A par cette symétrie.
- Tracez l'image F_3 de F_2 par la symétrie de centre C .
- Par quelle transformation passe-t-on de F_1 à F_3 ? En utilisant des points de la figure, précisez cette transformation.
- Tracez l'image de F_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



(D'après BEPC, Créteil, 1997)

► corrigés p. 234

$ABCDEFGH$ est un octogone régulier de centre O . On notera S_O la symétrie de centre O , S_A la symétrie de centre A et S_D celle de centre D .



Pour chaque question, entourez la réponse exacte.

		A	B	C
1	La symétrie S_O suivie de S_A est la translation de vecteur	$2 \overrightarrow{AO}$	$\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{EA}$
2	La translation t de vecteur $\overrightarrow{CD}$ suivie de la translation t' de vecteur $\overrightarrow{AH}$ est	S_O	la translation de vecteur $\overrightarrow{CE}$	la translation de vecteur $\overrightarrow{EC}$
3	L'image de A par t suivie de t' est	C	E	G
4	L'image de A par s_A suivie de s_O est	A	E	O
5	L'image de A par $t_{\overrightarrow{AB}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{EF}}$ est	A	B	F
6	La translation de vecteur $\overrightarrow{DF}$ est la composée de	$t_{\overrightarrow{BA}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{AH}}$	$t_{\overrightarrow{FE}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{ED}}$	S_D suivie de S_O .
7	La transformation S_O suivie de S_D est égale à	$t_{2 \overrightarrow{AB}}$	S_H suivie de S_O	S_O suivie de S_E .

RAPPELS DE COURS

1 ANGLES ET CERCLE

a. Définitions

♦ Angle inscrit

L'angle $\widehat{AMB}$ est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Son sommet M est un point de $\mathcal{C}$ et ses côtés sont des cordes du cercle. Il intercepte l'arc $\widehat{AIB}$.

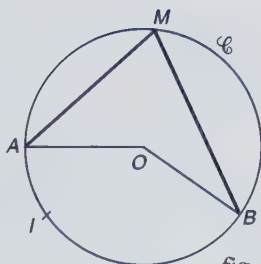


fig. 1

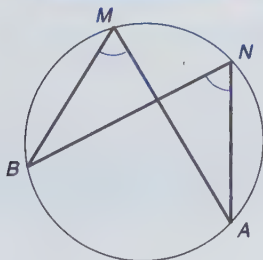
♦ Angle au centre

L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre ; son sommet est le centre du cercle et ses côtés sont deux rayons du cercle. Il intercepte l'arc $\widehat{AIB}$.

b. Comparaison de deux angles inscrits

Deux angles inscrits interceptant le même arc ont la même mesure.

$$\widehat{BMA} = \widehat{BNA}$$



2 ANGLES ET TRANSFORMATIONS

Une translation, une symétrie centrale ou orthogonale, une rotation transforment un angle géométrique en un angle de même mesure.

Figure	Transformation considérée	Angles	Angles égaux
	S_O symétrie centrale	opposés par le sommet	$\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'Oy'}$
	S_I symétrie centrale	alternes internes	$\widehat{yOt}$ et $\widehat{zO'x'}$
	$t_{\overline{OO'}}$ translation	correspondants	$\widehat{zOy}$ et $\widehat{zO'y'}$
	S_I symétrie centrale	alternes externes	$\widehat{zOx}$ et $\widehat{y'O't}$

3 ANGLES ET FIGURES USUELLES

a. Angles d'un triangle

Les angles d'un triangle ABC sont $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ et $\widehat{CAB}$ notés parfois, lorsque cela ne prête pas à confusion, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{A}$.

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

b. Angles d'un parallélogramme

Les angles des sommets opposés d'un parallélogramme sont égaux.
Les angles des sommets adjacents d'un parallélogramme sont supplémentaires.

Soit (xy) le support de $[AB]$.

$\widehat{DCB} = \widehat{CB\gamma}$ car $\widehat{DCB}$ et $\widehat{CB\gamma}$ sont alternes internes.

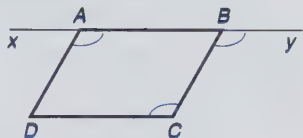
De plus, $\widehat{CB\gamma} = \widehat{DAB}$ car $\widehat{CB\gamma}$ et $\widehat{DAB}$ sont correspondants (par translation de vecteurs $\overrightarrow{BA}$) donc $\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$.

De plus, $\widehat{AB\gamma} = 180^\circ$ donc

$\widehat{ABC} + \widehat{CB\gamma} = 180^\circ$ et par suite

$\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires.



Remarque :

La somme des mesures des angles d'un quadrilatère non croisé est égale à 360 degrés.

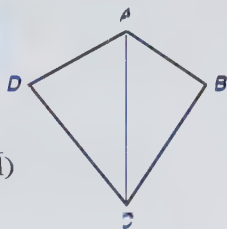
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$$

$$\alpha = \widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA}$$

$$\alpha = \widehat{DAC} + \widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{ACD} + \widehat{CDA}$$

$$\alpha = (\widehat{DAC} + \widehat{ACD} + \widehat{ADC}) + (\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA})$$

$$\alpha = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$



! N'oubliez pas la trigonométrie pour déterminer la mesure des angles dans un triangle rectangle.

c. Angle inscrit et angle au centre

Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc $[AIB]$ (voir la figure 1, p. 177).

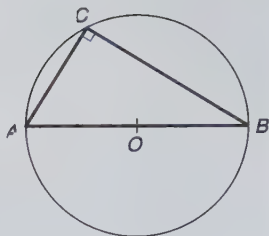
$\widehat{AMB}$ est un angle inscrit et $\widehat{AOB}$ est un angle au centre :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

d. Angles inscrits particuliers

◆ Angle droit

L'angle $\widehat{ACB}$ est droit ; il intercepte un demi-cercle.



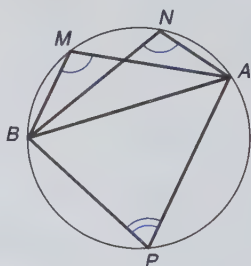
◆ Angles inscrits ayant en commun une corde [AB]

Si les sommets sont du même côté de la corde, alors ils sont égaux :

$$\widehat{BMA} = \widehat{BNA}.$$

Si les sommets sont de part et d'autre de cette corde, alors ils sont supplémentaires :

$$\widehat{BMA} + \widehat{BPA} = 180^\circ.$$



! N'oubliez pas que toutes ces comparaisons se font dans un même cercle.

s'Entraîner

1. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et M un point extérieur à ce cercle. On mène par M les tangentes (MT) et (MQ) au cercle $\mathcal{C}$. La droite (MO) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en A et B , avec A un point du segment $[OM]$.

Si $\widehat{TMQ} = \alpha$, en degrés, exprimez en fonction de α les mesures des angles du quadrilatère croisé $ABQT$.

2. Soit un point O d'une droite (xy) et une demi-droite $[Oz)$ telle que (Oz) et (xy) ne soient pas perpendiculaires.

a) Tracez la bissectrice $[Ot)$ de l'angle $\widehat{xOz}$ et la bissectrice $[Ot')$ de l'angle $\widehat{zOy}$.

b) Démontrez que $\widehat{t'Ot}$ est un angle droit.

3. Soit un triangle ABC tel que $\widehat{CAB} = 45^\circ$. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre $[AB]$ coupe $[AC]$ en D et $[CB]$ en E .

Démontrez, à l'aide de l'angle au centre $\widehat{DOB}$, que les droites (DO) et (AB) sont perpendiculaires.

4. Soit un quadrilatère $ABCD$ non croisé inscrit dans un cercle de centre O ; il est tel que $\widehat{BAD} = 62^\circ$ et $\widehat{ADC} = 54^\circ$.

Quelles sont les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$?

5. Soit deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sécants en A et B . Une droite passant par A recoupe $\mathcal{C}$ en M et $\mathcal{C}'$ en N . Une autre droite passant par A recoupe $\mathcal{C}$ en P et $\mathcal{C}'$ en Q .

Démontrez que chaque angle du triangle MNB est égal à un angle du triangle PQB .

6. Soit un trapèze $ABCD$ non croisé dont les bases sont $[AB]$ et $[DC]$ et tel que $DA = AB = BC$. La parallèle à (AC) menée par B coupe (DC) en E . Sachant que $\widehat{ADC} = 62^\circ$, calculez les mesures des angles du triangle BCE .

► corrigés p. 235

Pour chaque question, entourez la réponse exacte

		A	B
1	Le triangle ABC est rectangle en B et isocèle, alors	$\widehat{ACB} = 45^\circ$	$\widehat{ABC} = 45^\circ$
2	Le triangle ABC est isocèle en A et $\widehat{BAC} = 46^\circ$, donc	$\widehat{ACB} = 46^\circ$	$\widehat{ACB} = 67^\circ$
3	Le triangle ABC est équilatéral et (AH) une hauteur, alors	$\widehat{ACH} = 30^\circ$	$\widehat{BAH} = 30^\circ$
4	Les points A et B appartiennent à un cercle de centre O et de rayon 7 cm et $\widehat{AOB} = 90^\circ$ alors la longueur de l'arc $[AIB]$ est	$3,5 \pi$ cm	11 cm
5	Le triangle ABC est tel que $\widehat{BAC} = 65^\circ$ et $\widehat{ACB} = 37^\circ$, la bissectrice de $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en I , alors	$\widehat{BIC} = 104^\circ$	$\widehat{BIC} = 39^\circ$
6	 $\widehat{AOB} = 116^\circ$	$\widehat{AMB} = 58^\circ$	$\widehat{COB} = 58^\circ$
7		$\widehat{ANB} = 116^\circ$	$\widehat{ANB} = 122^\circ$

Corrigés

© 2005 Pearson Education, Inc.

1000000

1000000

1000000

1 Règles de calcul

p. 17

1. a) L'inverse de $-0,25$ est égal à -4 et celui de $\frac{1}{8}$ est égal à 8 .

Donc la somme des inverses de ces nombres est égale à $-4 + 8$, soit le nombre 4 .

b) La somme de $-0,25$ et $\frac{1}{8}$ est égale à $-0,125$, donc l'inverse de

cette somme est le nombre $\frac{1}{-0,125}$ soit -8 qui est un nombre

entier.

2. a) D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ soit } BC^2 = AC^2 - AB^2, \text{ d'où}$$

$$BC^2 = (5 \times 10^{-1})^2 - (4 \times 10^{-1})^2;$$

$$BC^2 = 25 \times 10^{-2} - 16 \times 10^{-2};$$

$$BC^2 = 9 \times 10^{-2}, \text{ or } BC > 0 \text{ donc}$$

$$BC = 3 \times 10^{-1} \text{ c m.}$$

b) Soit p le périmètre du triangle ABC et $\mathcal{A}$ son aire.

$$\bullet p = AB + BC + CA;$$

$$p = 4 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-1};$$

$$p = 12 \times 10^{-1};$$

$$p = 1,2 \times 10^0 \text{ c m.}$$

$$\bullet \mathcal{A} = \frac{AB \times BC}{2};$$

$$\mathcal{A} = \frac{4 \times 10^{-1} \times 3 \times 10^{-1}}{2};$$

$$\mathcal{A} = 6 \times 10^{-2} \text{ c m}^2.$$

$$3. A = (42 \times 10^{-3})^2 = 42^2 \times 10^{-6} = 1\,764 \times 10^{-6} = 1,764 \times 10^{-3};$$

$$B = (2 \times 10^2)^4 \times 10^{-5} = 2^4 \times 10^8 \times 10^{-5} = 2^4 \times 10^3 = 16 \times 10^3$$

$$B = 1,6 \times 10^4;$$

$$C = 7 \times (10^2)^{-3} = 7 \times 10^{-6};$$

$$D = (2 \times 10^2)^{-3} \times 5 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^{10}$$

$$D = 2^{-3} \times 10^{-6} \times 5 \times 2 \times 10^5 \text{ d'où}$$

$$D = 2^{-2} \times 5 \times 10^{-1} = \frac{5}{4} \times 10^{-1} = 1,25 \times 10^{-1}.$$

4.

$a \times 10^p$	Notation décimale	Notation scientifique
13×10^7	130 000 000	$1,3 \times 10^8$
$11\,332 \times 10^{-2}$	113,32	$1,133\,2 \times 10^2$
171×10^{-5}	0,001 71	$1,71 \times 10^{-3}$
151×10^{-6}	0,000 151	$1,51 \times 10^{-4}$
82×10^{-4}	0,008 2	$8,2 \times 10^{-3}$

5. En une année de 365 jours, la lumière émise par le soleil parcourt une distance d telle que $d = 300\,000 \times 365 \times 3\,600 \times 24$ soit $d = 94\,608 \times 10^8$, donc en écriture scientifique
 $d = 9,460\,8 \times 10^{12}$ km.

TEST : 1B ; 2B ; 3D ; 4C ; 5D ; 6B ; 7C ; 8A ; 9D ;
 10A ; 11C ; 12B ; 13B ; 14A ; 15D.

p. 18

2 Écritures littérales

Identités remarquables

p. 25

1. Les expressions A , C et E sont des sommes.
 Les expressions B et D sont des produits.

2. $A = -7a + 14b + 3a - 5a - 10b + 3a - ab$;

$$A = -6a + 4b - ab.$$

$$B = 7a + 14 - a^2 - 2a - 3a + 15 + a^2 + 8a + 16 ;$$

$$B = 10a + 45.$$

$$C = -2a - 3 - 7a + 7b + 7b - ab - 4a ;$$

$$C = -13a + 14b - ab - 3.$$

3. $A = -\frac{1}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{6} \times x \times x^2 \times x = -\frac{1}{7} x^4.$

$$B = \frac{49}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times x^2 \times x \times x^2 = \frac{49}{60} x^5.$$

$$4. A = x^2 + 9y^2 - 6xy - (4x^2 + 4x + 1);$$

$$A = x^2 + 9y^2 - 6xy - 4x^2 - 4x - 1;$$

$$A = -3x^2 + 9y^2 - 6xy - 4x - 1 \quad \text{Forme développée.}$$

$$A = [(x - 3y) + (2x + 1)] [(x - 3y) - (2x + 1)];$$

$$A = (3x - 3y + 1)(-x - 3y - 1);$$

$$A = -(3x - 3y + 1)(x + 3y + 1) \quad \text{Forme factorisée.}$$

$$B = 3x - 9 + 7x^2 - 21x;$$

$$B = 7x^2 - 18x - 9 \quad \text{Forme développée.}$$

$$B = 3(x - 3) + 7x(x - 3) = (x - 3)(3 + 7x) \quad \text{Forme factorisée.}$$

$$C = 4x^2 + 25 + 20x + 2x^2 + 8x + 5x + 20;$$

$$C = 6x^2 + 33x + 45 \quad \text{Forme développée.}$$

$$C = (2x + 5)[(2x + 5) + (x + 4)] = (2x + 5)(3x + 9);$$

$$C = 3(2x + 5)(x + 3) \quad \text{Forme factorisée.}$$

$$D = 9 - 49(x^2 - 6x + 9) = 9 - 49x^2 + 294x - 441;$$

$$D = -49x^2 + 294x - 432 \quad \text{Forme développée.}$$

$$D = 3^2 - [7(x - 3)]^2 = [3 - 7(x - 3)][3 + 7(x - 3)];$$

$$D = (3 - 7x + 21)(3 + 7x - 21);$$

$$D = (-7x + 24)(7x - 18) \quad \text{Forme factorisée.}$$

$$E = 6x + 12 - x^2 - 2x + x^2 - 12x + 36$$

$$E = -8x + 48 \quad \text{Forme développée.}$$

$$E = (6 - x)(x + 2) + (x - 6)(x - 6);$$

$$E = (6 - x)(x + 2) - (6 - x)(x - 6);$$

$$E = (6 - x)[(x + 2) - (x - 6)] = (6 - x)(x + 2 - x + 6);$$

$$E = 8(6 - x) \quad \text{Forme factorisée.}$$

$$5. 10,01^2 = (10 + 0,01)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 0,01 + 0,01^2;$$

$$10,01^2 = 100 + 0,2 + 0,0001 = 100,2001.$$

$$9,999^2 = (10 - 0,001)^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 0,001 + 0,001^2;$$

$$9,999^2 = 100 - 0,020 + 0,000001 = 99,980001.$$

$$13 \times 27 = (20 - 7)(20 + 7) = 20^2 - 7^2 = 400 - 49 = 351.$$

$$13,01 \times 12,99 = (13 + 0,01)(13 - 0,01) = 13^2 - 0,01^2;$$

$$13,01 \times 12,99 = 169 - 0,0001 = 168,9999.$$

TEST : 1A ; 2C ; 3B ; 4C ; 5B ; 6A ; 7C ; 8A ; 9C ; 10B.

p. 26

3 Radicaux (1)

p. 33

$$1. A = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5.$$

$$B = \sqrt{13^2} + \sqrt{12^2} = 13 + 12 = 25.$$

$$C = \sqrt{27} \times \sqrt{6} = \sqrt{27 \times 6} = \sqrt{9 \times 3 \times 3 \times 2};$$

$$C = 3 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}.$$

$$D = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{5}{5 \times 9}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}.$$

$$E = \sqrt{27} \times \sqrt{6} - 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

$$2. A = \sqrt{8 \times 2} - 2\sqrt{25 \times 3} + 5\sqrt{4 \times 3};$$

$$A = 4 - 2 \times 5\sqrt{3} + 5 \times 2\sqrt{3}.$$

$A = 4$; donc A est un entier.

$$3. A = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1.$$

$$B = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3.$$

$$C = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2};$$

$$C = 5 + 2 - 2\sqrt{5 \times 2} = 7 - 2\sqrt{10}.$$

$$D = (5 + 2\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3}) = (5)^2 - (2\sqrt{3})^2;$$

$$D = 25 - 4 \times 3 = 25 - 12 = 13.$$

$$4. A = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1);$$

$$A = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - [(\sqrt{5})^2 - 1^2];$$

$$A = 3 - 2\sqrt{6} + 2 - 5 + 1 = 1 - 2\sqrt{6}.$$

$$5. A = \sqrt{500} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{45} = \sqrt{100 \times 5} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{9 \times 5};$$

$$A = 10\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 3 \times 3\sqrt{5} = 13\sqrt{5} - 9\sqrt{5};$$

$$A = 4\sqrt{5}.$$

$$a = 4 \text{ et } b = 5.$$

$$6. A^2 = (2 + \sqrt{6})^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{6};$$

$$A^2 = 4 + 6 + 4\sqrt{6} = 10 + 4\sqrt{6}; p = 10 \text{ et } q = 4.$$

$$B^2 = (1 - \sqrt{6})^2 = 1^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{6};$$

$$B^2 = 1 + 6 - 2\sqrt{6} = 7 - 2\sqrt{6}; p = 7 \text{ et } q = -2.$$

$$A \times B = (2 + \sqrt{6})(1 - \sqrt{6}) = 2 - 2\sqrt{6} + \sqrt{6} - (\sqrt{6})^2.$$

$$A \times B = 2 - 2\sqrt{6} + \sqrt{6} - 6 = -4 - \sqrt{6}; p = -4 \text{ et } q = -1.$$

7. a) On construit un segment $[MP]$ de longueur 12 cm. Le point N se trouve sur le cercle de diamètre $[MP]$ et sur le cercle de centre M et de rayon 6 (voir figure 1).

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle MNP rectangle en N , on obtient $MN^2 + NP^2 = MP^2$ soit $NP^2 = MP^2 - NM^2$;
 $NP^2 = 144 - 36 = 108$ soit $NP = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3}$;
 $NP = 6\sqrt{3}$.

b) Dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu et ont des supports perpendiculaires.

À l'aide du compas on trace un segment $[AC]$ de même longueur que $[NP]$.

On trace la médiatrice de $[AC]$. Puis on place sur cette médiatrice deux points B et D tels que (AC) soit la médiatrice de $[BD]$ et $BD = 6$. On joint les points A, B, C, D (figure 2).

fig. 1

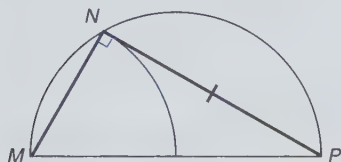
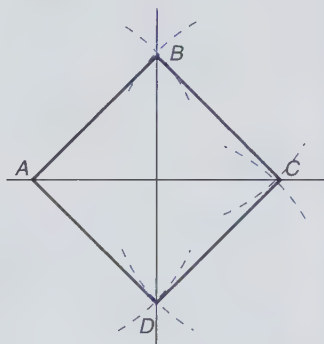


fig. 2



TEST : 1A ; 2B ; 3C ; 4B ; 5B ; 6B ;
 7B ; 8C ; 9C ; 10A.

p. 34

4 Radicaux (2)

p. 39

1. a) Si $x = \sqrt{3}$, $A = 5(\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3}) - 3 = 15 - 3 + 2\sqrt{3}$;
 $A = 12 + 2\sqrt{3}$.

b) $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.
 $3,464 < 2\sqrt{3} < 3,466$

$15,464 < 12 + 2\sqrt{3} < 15,466$ donc $15,46 < 12 + 2\sqrt{3} < 15,47$.
 Une valeur approchée à 10^{-2} près par excès est 15,47.

2. $(3 - \sqrt{7})^2 = 9 + 7 - 6\sqrt{7} = 16 - 6\sqrt{7}$.

$(\sqrt{16 - 6\sqrt{7}})^2 = 16 - 6\sqrt{7}$.

De plus $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$ donc $3 - \sqrt{7} > 0$ et $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} > 0$

et $3 - \sqrt{7} = \sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$.

3. a) $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ donc $-1,42 < -\sqrt{2} < -1,41$
 $3,58 < 5 - \sqrt{2} < 3,59$; $4,23 < 3\sqrt{2} < 4,26$.
 $2,82 < 2\sqrt{2} < 2,84$.

b) Donc $2\sqrt{2} < 5 - \sqrt{2} < 3\sqrt{2}$.

4. À l'aide de la calculatrice, on sait
 $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$,
donc $\sqrt{2} - 3 < 0$ et $\sqrt{5} - 1 > 0$.

On en déduit que $\sqrt{2} - 3 < \sqrt{5} - 1$.

5. $A = 5\sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{25 \times 3} + 3\sqrt{3}$;

$A = 15\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$;

$A = 8\sqrt{3}$; $a = 8$ et $b = 3$.

$B = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{16 \times 3} + 2\sqrt{9 \times 3}$;

$B = 5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$;

$B = 3\sqrt{3}$; $a = 3$ et $b = 3$.

Les nombres A et B sont écrits avec le même radicande. De plus $3 < 8$ donc $B < A$.

6. On calcule A :

$A = (\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \times \sqrt{2} - 3 [(2\sqrt{2})^2 + 3^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{2}]$;

$A = 2 + 1 - 2\sqrt{2} - 3(8 + 9 + 12\sqrt{2})$;

$A = 3 - 2\sqrt{2} - 51 - 36\sqrt{2}$;

$A = -48 - 38\sqrt{2}$.

Or $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ donc $53,732 < 38\sqrt{2} < 53,770$

$-53,770 < -38\sqrt{2} < -53,732$

$-48 - 53,77 < -48 - 38\sqrt{2} < -48 - 53,732$

$-101,77 < -48 - 38\sqrt{2} < -101,732$.

Donc un encadrement de A à 4.10^{-2} près est

$-101,77 < A < -101,73$.

7. a) $(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{7} \times 2\sqrt{3}$;

$(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})^2 = 7 + 12 - 4\sqrt{21}$;

$(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})^2 = 19 - 4\sqrt{21}$.

b) Le nombre $\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$ est négatif car $(\sqrt{7})^2 = 7$; $(2\sqrt{3})^2 = 12$;
or $7 < 12$ donc $\sqrt{7} < 2\sqrt{3}$ et par suite $\sqrt{7} - 2\sqrt{3} < 0$.

$B = \sqrt{19 - 4\sqrt{21}} = \sqrt{(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} - \sqrt{7}$.

c) $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$ donc

$3,464 < 2\sqrt{3} < 3,466$.

Par ailleurs $-2,646 < -\sqrt{7} < -2,645$ donc
 $0,818 < 2\sqrt{3} - \sqrt{7} < 0,821$.

Un encadrement de B d'amplitude $0,02$ est :
 $0,81 < B < 0,83$.

TEST : 1B ; 2C ; 3A ; 4B ; 5A ; 6C ; 7C.

p. 40

5 Équations et inéquations du premier degré à une inconnue

p. 45

Pour les exercices 1 et 2, pensez à vérifier que les solutions trouvées conviennent bien : vous reporter à la méthode développée dans la rubrique Savoir faire.

1. $(E_1) : x - 4 = 4x + 8$ soit $x - 4x = 8 + 4$
 d'où $3x = -12$ soit $x = -4$.

La solution de (E_1) est -4 .

$(E_2) : x - 2x = -\frac{1}{4} - \sqrt{2}$ soit $-x = -\frac{1}{4} - \sqrt{2}$

d'où $x = \frac{1}{4} + \sqrt{2}$ donc $\frac{1}{4} + \sqrt{2}$ est la solution de (E_2) .

$(E_3) : x\sqrt{2} = 2(3x - 4)$ soit $x\sqrt{2} = 6x - 8$

d'où $x(\sqrt{2} - 6) = -8$ soit $x = \frac{-8}{\sqrt{2} - 6}$; on peut encore écrire

$x = -\frac{8(\sqrt{2} + 6)}{(\sqrt{2})^2 - 6^2}$ soit $x = \frac{-8(\sqrt{2} + 6)}{-34}$ ou encore $x = \frac{24 + 4\sqrt{2}}{17}$;

la solution de (E_3) est $\frac{24 + 4\sqrt{2}}{17}$.

$(E_4) : 7\sqrt{2} - 2\sqrt{2}x = -2x + 1$ soit $x(2\sqrt{2} - 2) = 7\sqrt{2} - 1$

d'où $x = \frac{7\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 2}$ soit $x = \frac{(7\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 2)}{(2\sqrt{2})^2 - 2^2}$;

donc $x = \frac{28 + 14\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2}{8 - 4}$

$x = \frac{26 + 12\sqrt{2}}{4}$ soit $x = \frac{13}{2} + 3\sqrt{2}$.

$\frac{13}{2} + 3\sqrt{2}$ est la solution de (E_4) .

2. $E_1 : 2x - 3 = 2x - 1$ soit $2x - 2x = 3 - 1$ soit $0 = 2$.
Cette égalité n'est jamais vraie. L'équation (E_1) n'a aucune solution.

$$E_2 : (x - 2)^2 = (x - 3)(x + 7) \text{ soit } (x - 2)^2 - (x - 3)(x + 7) = 0.$$

On ne peut pas factoriser, donc on développe.

$$x^2 - 4x + 4 - x^2 - 7x + 3x + 21 = 0 \text{ soit } -8x + 25 = 0$$

$$\text{d'où } x = \frac{25}{8}. \text{ La solution de } (E_2) \text{ est } \frac{25}{8}.$$

$$(E_3) : \frac{x}{3} = 3 + \frac{5}{4} \text{ soit } x = 3 \left(\frac{12 + 5}{4} \right)$$

$$\text{d'où } x = \frac{51}{4}. \text{ La solution de } (E_3) \text{ est } \frac{51}{4}.$$

$$(E_4) : \frac{-x + 3}{4} = \frac{x + 2}{7} - 1 \text{ soit } \frac{-7x + 21}{28} = \frac{4x + 8 - 28}{28}$$

$$\text{d'où } -7x + 21 = 4x - 20 \text{ soit } 4x + 7x = 21 + 20 \text{ donc } 11x = 41$$

$$\text{d'où } x = \frac{41}{11}. \text{ La solution de } (E_4) \text{ est } \frac{41}{11}.$$

$$3. (I_1) : 3x + 6 > -4x - 20 - 7$$

$$\text{d'où } 3x + 4x > -20 - 7 - 6 \text{ soit } 7x > -33$$

$$\text{donc } x > -\frac{33}{7}.$$

La représentation graphique des solutions est la demi-droite $]Ax)$ (A exclu), partie non hachurée sur la figure 1.

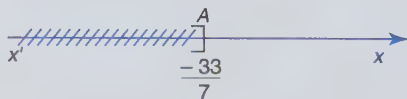


fig. 1

$$(I_2) : \frac{10x - 40 - 5}{30} \leq \frac{-12x + 24 - 3x - 3}{30}$$

$$\text{soit } 10x - 45 \leq -15x + 21 \text{ d'où } 10x + 15x \leq 21 + 45$$

$$\text{soit } 25x \leq 66 \text{ donc } x \leq \frac{66}{25}.$$

La représentation graphique des solutions est la demi-droite $[Bx')$ non hachurée sur la figure 2.

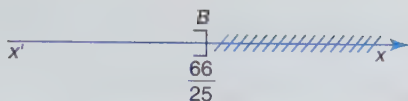


fig. 2

$(I_3) : 2x - 1 > 2x + 4$ soit $2x - 2x > 4 + 1$
d'où $0 > 5$. Cette inégalité n'est jamais vraie. (I_3) n'a aucune solution et la représentation est une droite hachurée (cf. figure 3).



fig. 3

4. $(E_1) : 3x - x = 2 + 7$ soit $2x = 9$ d'où $x = \frac{9}{2}$.

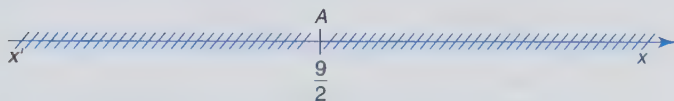


fig. 4

Sur la droite, le point A est la représentation graphique de la solution.

$(I_1) : -3 - 5 < 6x - 4x$ soit $-8 < 2x$ d'où $-4 < x$.

Sur la droite, la représentation graphique des solutions de (I_1) est la demi-droite $]Bx)$. Partie non hachurée sur la figure 5.

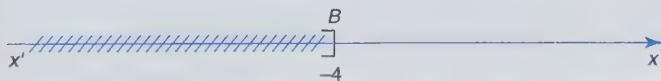


fig. 5

TEST : 1B ; 2A ; 3A ; 4C ; 5A ; 6B ; 7C ; 8C ; 9B.

p. 46

6 Équations et problèmes se ramenant au premier degré

p. 50

1. $E_1 : 4x^2 - 2 = 0$ soit $(2x - \sqrt{2})(2x + \sqrt{2}) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

E_1 équivaut à $2x - \sqrt{2} = 0$ ou $2x + \sqrt{2} = 0$ soit $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les solutions de l'équation sont $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$E_2 : (x - 2)^2 = (x + 1)(x + 7).$$

On passe tous les termes dans un même membre :

$$E_2 : (x - 2)^2 - (x + 1)(x + 7) = 0.$$

Les termes de degré deux s'éliminent ; on développe :

$$E_2 : x^2 - 4x + 4 - x^2 - 7x - x - 7 = 0 \text{ soit } -12x - 3 = 0$$

$$\text{d'où } x = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}.$$

La solution de E_2 est $-\frac{1}{4}$.

$$E_3 : x(x - 7) = 14x^2 - 3x.$$

On passe tous les termes dans un même membre :

$$E_3 : x(x - 7) - 14x^2 + 3x = 0.$$

Les termes de degré deux ne s'éliminent pas. On factorise :

$$E_3 : x(x - 7) - x(14x - 3) = 0 \text{ soit } x[(x - 7) - (14x - 3)] = 0 ;$$

$$E_3 : x(-13x - 4) = 0 \text{ soit } x = 0 \text{ ou } -13x - 4 = 0$$

$$\text{d'où } x = 0 \text{ ou } x = -\frac{4}{13}.$$

Les solutions de l'équation sont 0 et $-\frac{4}{13}$.

$$E_4 : (x + 4)(7x + 1) = 3(x^2 - 16).$$

On passe tous les termes dans le premier membre :

$$E_4 : (x + 4)(7x + 1) - 3(x^2 - 16) = 0.$$

Les termes de degré deux ne s'éliminent pas. On factorise :

$$E_4 : (x + 4)(7x + 1) - 3(x - 4)(x + 4) = 0 \text{ soit}$$

$$(x + 4)[7x + 1 - 3(x - 4)] = 0 \text{ d'où } (x + 4)(7x + 1 - 3x + 12) = 0.$$

$$E_4 : (x + 4)(4x + 13) = 0 \text{ soit } x = -4 \text{ ou } x = -\frac{13}{4}.$$

Les solutions de cette équation sont -4 et $-\frac{13}{4}$.

$$E_5 : 7(x - 2)^2 = 3(x + 1)(x - 2).$$

Les termes de degré deux ne s'éliminent pas ; on passe tous les termes dans le premier membre et on factorise :

$$E_5 : 7(x - 2)^2 - 3(x + 1)(x - 2) = 0$$

soit $(x - 2) [7(x - 2) - 3(x + 1)] = 0$

soit $(x - 2) (7x - 14 - 3x - 3) = 0$.

$E_5 : (x - 2) (4x - 17) = 0$ d'où $x = 2$ ou $x = \frac{17}{4}$.

Les solutions de l'équation sont 2 et $\frac{17}{4}$.

$E_6 : (x - 6)^2 = (x - 3)(x + 4)$.

On passe tous les termes dans le premier membre :

$E_6 : (x - 6)^2 - (x - 3)(x + 4) = 0$.

Les termes de degré deux s'éliminent. On développe et on résout :

$E_6 : x^2 - 12x + 36 - (x^2 - 3x + 4x - 12) = 0$ soit $-13x + 48 = 0$

d'où $x = \frac{48}{13}$.

La solution de l'équation est $\frac{48}{13}$.

2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du carré $ABCD$, $\mathcal{A} = 4 \text{ cm}^2$.

Le nouveau carré $A'B'C'D'$ a pour aire $\mathcal{A}' = (a + 2)^2$.

$\mathcal{A}' = 2\mathcal{A}$, soit $(a + 2)^2 = 8$ soit $(a + 2)^2 - 8 = 0$ d'où

$(a + 2 - 2\sqrt{2})(a + 2 + 2\sqrt{2}) = 0$ donc $a = -2 + 2\sqrt{2}$ ou

$a = -2 - 2\sqrt{2}$. Seul $a = -2 + 2\sqrt{2}$ convient, car a représente une distance, donc doit être positif.

3. Soit x l'un des nombres, le précédent est $x - 1$ et le suivant $x + 1$.

$x - 1$; x ; $x + 1$ représentent les 3 nombres entiers consécutifs.

Leur somme vaut 84, soit $(x - 1) + x + (x + 1) = 84$

d'où $3x = 84$, donc $x = 28$.

Par suite $x - 1 = 27$ et $x + 1 = 29$.

Vérification : $27 + 28 + 29 = 84$.

Les trois nombres cherchés sont 27, 28 et 29.

4. Soit $2x$ l'un des nombres pairs, le précédent est $2x - 2$ et le suivant $2x + 2$.

Leur somme est 132 soit $2x + 2x - 2 + 2x + 2 = 132$

donc $6x = 132$ d'où $x = 22$.

Par suite $2x = 44$; $2x - 2 = 42$; $2x + 2 = 46$.

Vérification : $44 + 42 + 46 = 132$.

Les trois nombres cherchés sont 42, 44 et 46.

5. Soit x le nombre cherché ; son carré est donc x^2 .

La somme du carré de ce nombre et de 7 est $x^2 + 7$.

La somme de ce nombre et de 1 est $x + 1$.

Le carré est $(x + 1)^2$.

Donc $x^2 + 7 = (x + 1)^2$ soit $x^2 + 7 = x^2 + 2x + 1$

soit $2x = 6$ et par suite $x = 3$.

Vérification : $x^2 + 7 = 9 + 7 = 16$;

$(x + 1)^2 = (3 + 1)^2 = 4^2 = 16$.

Le nombre cherché est donc 3.

6. Soit x le nombre d'années cherché.

Dans x années la maman aura $(49 + x)$ ans et les enfants auront $(22 + x)$ ans et $(24 + x)$ ans.

D'où $49 + x = 22 + x + 24 + x$ soit $49 + x = 46 + 2x$ d'où $x = 3$.

Vérification : dans 3 ans la maman aura 52 ans, les enfants auront 25 et 27 ans, or $25 + 27 = 52$.

Conclusion : dans 3 ans l'âge de la mère sera la somme des âges de ses enfants.

7. Soit x le nombre de livres achetés.

Il fait 6 € de bénéfice, il a donc revendu le tout pour $96 \text{ €} + 6 \text{ €}$ soit 102 €.

Il revend $\frac{1}{3}$ des livres à 16,5 € pièce et $\frac{2}{3}$ à 17,25 €.

Donc $\frac{1}{3}x \times 16,5 + \frac{2}{3}x \times 17,25 = 102$.

Soit $16,5x + 17,25x = 306$

d'où $51x = 306$

soit $x = 6$.

Vérification : s'il a 6 livres, il en revend 2 à 16,5 € soit 33 € et 4 à 17,25 € soit 69 €. Il revend donc tous ses livres pour $33 + 69 = 102$, soit un bénéfice de 6 €.

Conclusion : il avait acheté 6 livres.

8. Soit x le nombre cherché. La moitié de ce nombre est $\frac{x}{2}$.

Le quart de ce nombre est $\frac{x}{4}$.

$\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 7$ soit $\frac{2x - x}{4} = 7$; $\frac{x}{4} = 7$ donc $x = 28$.

Vérification : la moitié de 28 est 14, le quart est 7 ; $14 - 7 = 7$.

Le nombre cherché est 28.

9. Soit x_A l'abscisse du point A et y_A son ordonnée.

A est un point de D , donc ses coordonnées sont telles que

$$y_A = 7x_A - 1 \text{ avec } y_A = 24.$$

$$\text{D'où } 24 = 7x_A - 1 \text{ soit } 7x_A = 25 \text{ et } x_A = \frac{25}{7}.$$

$$\text{Vérification : } 7 \times \frac{25}{7} - 1 = 25 - 1 = 24.$$

$$\text{L'abscisse du point } A \text{ est } \frac{25}{7}.$$

10. Soit x le prix du kilogramme d'abricots lors du premier achat.

Lors du deuxième achat, le prix du kilogramme est donc $x + \frac{1}{3}x$ soit $\frac{4}{3}x$.

Pour deux kilogrammes d'abricots la dame paie donc $2 \times \frac{4}{3}x$ alors qu'elle avait payé $2x$ la première fois.

$$\frac{8}{3}x - 2x = 2,4. \text{ Soit } \frac{2}{3}x = 2,4 \text{ donc } x = 3,6.$$

Vérification : si un kilogramme d'abricots coûte 3,6 € la première fois, la deuxième fois il coûte $3,6 + \frac{1}{3}(3,6)$ soit 4,8 € ;

$$\text{or } 64 - 48 = 16.$$

La première fois la dame a payé 3,6 € le kilogramme d'abricots.

11. a) D'après le théorème de Thalès appliqué aux droites sécantes Δ_1 et Δ_2 et aux parallèles (AF) et (EB) :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OE}{OF} \text{ soit } \frac{x+4}{x} = \frac{11}{4}.$$

$$\text{On en déduit que } 4(x+4) = 11x \text{ soit } 7x = 16 \text{ d'où } x = \frac{16}{7}.$$

b) D'après le théorème de Thalès appliqué aux droites sécantes (OC) et (OD) et aux parallèles (AF) et (CD) :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OF}{OD} ; \frac{x}{OC} = \frac{4}{x+12} \text{ soit } x(x+12) = 4OC \text{ or } x = \frac{16}{7}$$

$$\text{donc } \frac{16}{7} \left(\frac{16}{7} + 12 \right) = 4OC \text{ soit } 4OC = \frac{1600}{49} \text{ et } OC = \frac{400}{49}.$$

$$OC \approx 8,2 \text{ (à } 0,1 \text{ près par excès).}$$

TEST : 1B ; 2C ; 3B ; 4C ; 5A ; 6A ; 7B ; 8C ; 9B.

p. 52

1. Pour calculer le PGCD de deux nombres, on effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 195 = 78 \times 2 + 39 & r_1 = 39 ; \quad r_1 \neq 0 \\ 78 = 39 \times 2 + 0 & r_2 = 0 ; \text{ PGCD } (195 ; 78) = 39. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b) } 720 = 372 \times 1 + 348 & r_1 = 348 ; \quad r_1 \neq 0 \\ 372 = 348 \times 1 + 24 & r_2 = 24 ; \quad r_2 \neq 0 \\ 348 = 24 \times 14 + 12 & r_3 = 12 ; \quad r_3 \neq 0 \\ 24 = 12 \times 2 + 0 & r_4 = 0 ; \text{ PGCD } (720 ; 372) = 12. \end{array}$$

2. a) On utilise les critères de divisibilité.

$3 + 6 + 5 = 14$; 365 n'est pas multiple de 3, il est multiple de 5.

Le nombre 612 est multiple de 2 et de 3 car $6 + 1 + 2 = 9$. Les critères de divisibilité ne permettant pas de trouver de diviseur commun, on calcule leur PGCD en effectuant les divisions successives.

$$612 = 365 \times 1 + 247 ;$$

$$365 = 247 \times 1 + 118 ;$$

$$247 = 118 \times 2 + 11 ;$$

$$118 = 11 \times 10 + 8 ;$$

$$11 = 8 \times 1 + 3 ;$$

$$8 = 3 \times 2 + 2 ;$$

$$3 = 2 \times 1 + 1 ;$$

$$2 = 1 \times 2 + 0.$$

Le dernier reste non nul est 1. PGCD (612, 365) = 1.

Les nombres 612 et 365 sont premiers entre eux.

b) Grâce aux critères de divisibilité, on remarque que 36 et 128 sont tous les deux divisibles par 2, ils ne sont donc pas premiers entre eux.

c) Le nombre 68 est multiple de 2 mais 51 ne l'est pas. 51 est multiple de 3 mais 68 ne l'est pas. On recherche leur PGCD.

$$68 = 51 \times 1 + 17 \quad r_1 = 17 ; \quad r_1 \neq 0.$$

$$51 = 17 \times 3 + 0 \quad r_2 = 0 \text{ donc PGCD } (68 ; 51) = 17.$$

Les nombres 68 et 51 ne sont pas premiers entre eux.

d) Les critères de divisibilité ne nous permettent pas de trouver de diviseur commun. On calcule leur PGCD.

$$73 = 37 \times 1 + 36 \quad r_1 = 36 ; \quad r_1 \neq 0$$

$$37 = 36 \times 1 + 1 \quad r_2 = 1 ; \quad r_2 \neq 0$$

$$36 = 1 \times 36 + 0 \quad r_3 = 0 \text{ PGCD } (73 ; 37) = 1.$$

Les nombres 73 et 37 sont premiers entre eux.

3. Pour trouver une écriture fractionnaire irréductible on utilise les critères de divisibilité ou on recherche le PGCD du numérateur et du dénominateur, de façon à faire apparaître un diviseur commun.

$$A = \frac{1\,000}{625} = \frac{5 \times 200}{5 \times 125} = \frac{200}{125} = \frac{5 \times 40}{5 \times 25} = \frac{5 \times 8}{5 \times 5} = \frac{8}{5};$$

$$B = \frac{9}{144} = \frac{9 \times 1}{9 \times 16} = \frac{1}{16}; C = \left(\frac{2 \times 3}{2 \times 2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16};$$

$$D = \left(\frac{2 \times 3}{5 \times 3}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8};$$

$$E = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 5}{5 \times 2}\right)^2 = 1.$$

$$4. A = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \left(\frac{5}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$$B = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4} - \frac{1}{10} = \frac{15}{20} - \frac{2}{20} = \frac{13}{20}.$$

$$C = \frac{13 \times 10^{20}}{2 \times 10^{21}} = \frac{13}{2 \times 10^{21-20}} = \frac{13}{20}.$$

$$D = \frac{7}{20} + \frac{3}{10} = \frac{7+6}{20} = \frac{13}{20}.$$

TEST : 1B ; 2B ; 3A ; 4C ; 5A ; 6B ; 7C ; 8C ; 9C.

p. 60

8 Proportionnalité et fonctions linéaires

p. 66

1. $f(-1) = 7$ donc $-a = 7$ soit $a = -7$.

La fonction linéaire cherchée est définie par $f(x) = -7x$.

2. Si deux droites sont parallèles, elles ont le même coefficient directeur ; donc $a = 7$.

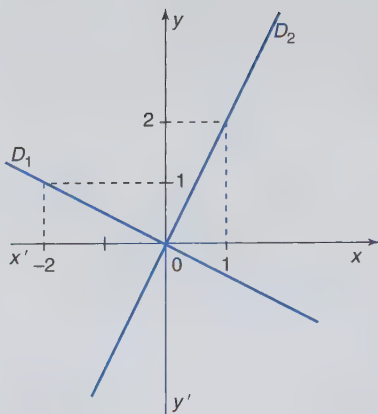
La fonction linéaire cherchée est définie par $f(x) = 7x$.

3. a) Les deux suites sont proportionnelles et le coefficient de proportionnalité est $-2\sqrt{3}$.

b) La fonction f est telle que $f(x) = -2\sqrt{3}x$. Elle permet de passer de la première suite à la seconde.

4. $D_1 : y = -\frac{1}{2}x$;

$D_2 : y = 2x$.



5. a) Si x est le nombre de kilomètres parcourus et $f(x)$ le nombre de litres d'essence consommés, $f(x) = \frac{7 \times x}{100}$.

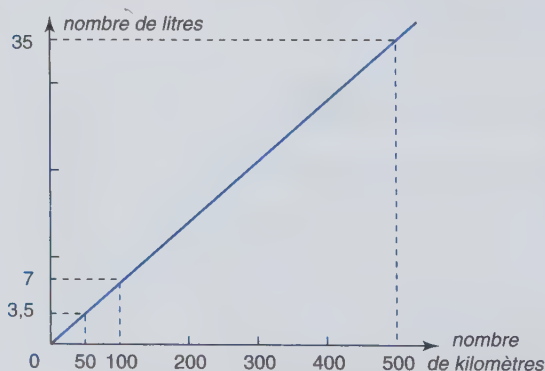
b) Voir figure.

c) $35 = \frac{7 \times x}{100}$ donc $x = \frac{3\,500}{7} = 500$.

Il parcourt 500 km avec 35 litres de carburant.

Pour parcourir 50 km : $f(50) = \frac{7 \times 50}{100} = 3,5$.

Il faut 3,5 litres de carburant pour parcourir 50 km.



6. a) Si x représente le capital placé en début d'année et y le montant des intérêts en fin d'année :

$$y = \frac{4,5}{100} \times x \text{ soit } y = 0,045x.$$

La fonction linéaire f définie par $f(x) = 0,045x$ est celle cherchée.

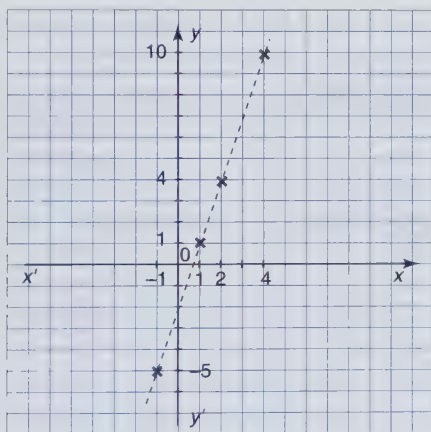
b) $f(1\,120) = 0,045 \times 1\,120 = 50,4$.

Le montant des intérêts en fin d'année est 50,4 € si le capital placé est 1 120 €.

c) $f(x) = 23,4$ soit $23,4 = 0,045x$ d'où $x = \frac{23,4}{0,045} = 520$.

Si les intérêts en fin d'année sont de 23,4 €, alors le capital placé était 520 €.

7. a)



Les points sont alignés sur une droite qui ne passe pas par l'origine du repère.

b) $\frac{-5}{-1} = 5$ et $\frac{1}{1} = 1$: les valeurs x et y ne sont pas proportionnelles.

c)

x	-1	1	2	4
$y + 2$	-3	3	6	12

$$\frac{-3}{-1} = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Les valeurs de $y + 2$ sont proportionnelles à celles de x : le coefficient de proportionnalité est 3.

La fonction linéaire associée est donc $f : x \mapsto 3x$.

8. a) La fonction linéaire associée à une augmentation de 15 % est : $x \mapsto \left(1 + \frac{15}{100}\right)x$ soit $x \mapsto 1,15x$.

On en déduit $y = 1,15x$.

b) La fonction linéaire associée à une réduction de 10 % est : $y \mapsto \left(1 - \frac{10}{100}\right)y$ soit $y \mapsto 0,9y$.

On en déduit $p = 0,9y$.

c) $p = 0,9y$ et $y = 1,15x$ d'où $p = 0,9 \times 1,15x$; $p = 1,035x$.

Finalement, le prix de cet article a augmenté de 3,5 %.

TEST : 1C ; 2A ; 3B ; 4B ; 5A ; 6B.

p. 68

9 Fonctions affines. Représentations

p. 76

1.

Relations	$f_1(x) = \frac{x}{7} - 3$	$f_2(x) = x\sqrt{2} + 3$	$f_3(x) = x^2$	$f_4(x) = \frac{-2x+3}{4}$
Affine	O	O	N	O
Si oui, explicitez a et b	$a = \frac{1}{7}$ et $b = -3$	$a = \sqrt{2}$ et $b = 3$		$a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{4}$

2. Si $f(2) = -7$ et $f(3) = 1$, la fonction affine f est telle que $f(x) = ax + b$ avec $a = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$ soit $a = \frac{1 - (-7)}{3 - 2} = 8$

et $-7 = 8(2) + b$ soit $b = -7 - 16 = -23$;
par suite $f(x) = 8x - 23$.

3. Les points $A(-1 ; 2)$ et $B(3 ; 4)$ appartiennent à la représentation graphique d'une fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$ où $a = \frac{4 - 2}{3 - (-1)} = \frac{2}{4}$.

Soit $a = \frac{1}{2}$. Donc $f(x) = \frac{1}{2}x + b$.

Or $f(3) = 4$ puisque le point B appartient à la représentation graphique de f ; donc $4 = \frac{1}{2} \times 3 + b$ soit $b = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, par suite

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

4. a) Le point $A(-1; y_A)$ appartient à la droite $D: y = 4x - 3$ donc ses coordonnées sont telles que $y_A = 4(-1) - 3 = -7$.

L'ordonnée du point A d'abscisse -1 est -7 .

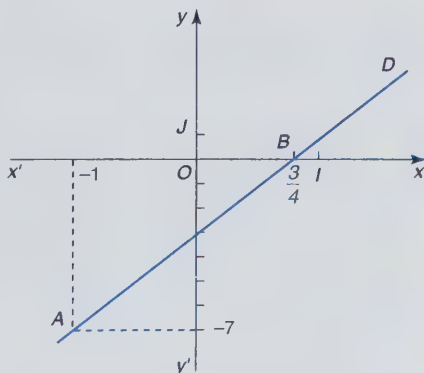
b) Le point $B(x_B; 0)$ appartient à la droite D donc $0 = 4x_B - 3$ soit $x_B = \frac{3}{4}$.

L'abscisse du point B d'ordonnée nulle est $\frac{3}{4}$.

c) Calculons $4x_C - 3$ soit $4(-2) - 3 = -11$ or $y_C = 5$ donc les coordonnées de C ne vérifient pas l'équation de D ce

qui prouve que C n'appartient pas à la droite D .

d) Pour représenter la droite D on utilise les points A et B .



5.

Droites d'équation	$y = 3x - 4$	$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$y = -4$	$x = 3$
Point de la droite	$A(1; -1)$	$B(-5; -1)$	$C(3; -4)$	$D(3; 2)$

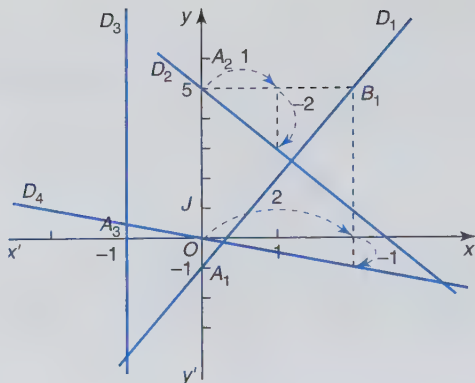
6. Pour tracer D_1 on utilise les points $A_1(0; -1)$ et $B_1(2; 5)$.

Pour tracer D_2 on utilise le point $A_2(0; 5)$ et le coefficient directeur -2 .

Pour tracer D_3 on utilise le point $A_3(-1; 0)$.

Pour tracer D_4 on utilise seulement le coefficient directeur $-\frac{1}{2}$

sachant que D_4 passe par l'origine (si on augmente x de 2, y diminue de 1).



7. a) Soit x le nombre de minutes correspondant à la durée de la course et $f(x)$ le prix de la course : $f(x) = ax + b$.

b) On sait que $f(10) = 47$ et $f(25) = 80$, donc on détermine a :

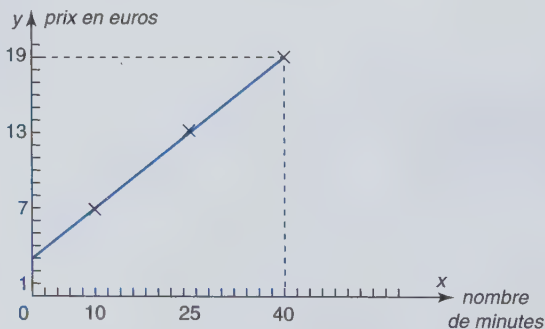
$$a = \frac{f(25) - f(10)}{25 - 10} = \frac{13 - 7}{25 - 10} \quad \text{soit } a = \frac{6}{15} = 0,4$$

donc $f(x) = 0,4x + b$.

Or $f(25) = 13$ soit $0,4 \times 25 + b = 13$ d'où $b = 13 - 10$; $b = 3$.

Par suite $f(x) = 2,2x + 25$.

c) Pour représenter graphiquement f , on utilise les données $f(10) = 7$ et $f(25) = 13$.



Une course coûte plus de 19 € si elle dépasse 40 min ; on lit cela en traçant la droite d'équation $y = 19$ € : son intersection avec la droite représentant f donne le point d'abscisse 40.

8. On lit que $f(3) = 2$ et $f(5) = 0$. Soit f telle que $f(x) = ax + b$.

Le coefficient a est tel que :

$$a = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \text{ soit } a = \frac{0 - 2}{2} = -1 \text{ donc } f(x) = -x + b.$$

Or $f(5) = 0$ donc $-5 + b = 0$ soit $b = 5$; par suite $f(x) = -x + 5$.

On lit que $g(-3) = 1$ et $g(3) = 2$ donc $g(x) = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

TEST : 1C ; 2B ; 3C ; 4A ; 5C ; 6B ; 7B.

p. 78

10 Systèmes de deux équations à deux inconnues et résolution de problèmes

p. 86

1. a) (E) : $y = -5x + 35$ s'écrit encore $y + 5x - 35 = 0$.

Si $x = -4$ et $y = 15$, alors

$$y + 5x - 35 = 15 + 5 \times (-4) - 35 \text{ donc } y + 5x - 35 \neq 0$$

donc $(-4 ; 15)$ n'est pas solution de E.

b) Si $(x ; 0)$ est solution de E, alors $0 + 5x - 35 = 0$ soit $x = 7$.

Donc $(7 ; 0)$ est solution de E.

c) $(0, y)$ est solution de E signifie $y + 5 \times 0 - 35 = 0$ soit $y = 35$.

Donc $(0 ; 35)$ est solution de E.

2. On peut facilement résoudre ces systèmes par substitution.

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 4x + y - 3 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -2y - 1 \\ 4(-2y - 1) + y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x = -2y - 1 \\ -8y - 4 + y - 3 = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = -2y - 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x = -2(-1) - 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

(S_1) a pour solution $(1 ; -1)$.

$$(S_2) : \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -x + 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} -x + 1 = 2x + 3 \\ y = -x + 1 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} 3x = -2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} + 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \cdot (S_2) \text{ a pour solution } \left(-\frac{2}{3} ; \frac{5}{3}\right).$$

$$3. \begin{cases} \frac{-4x-1}{3} + \frac{y+3}{2} = \frac{x+2}{6} - \frac{1}{4} \\ \frac{3x+1}{2} - \frac{2y-1}{5} = \frac{1}{10} - \frac{x}{2} \end{cases}$$

donc $\begin{cases} -16x - 4 + 6y + 18 = 2x + 4 - 3 \\ 15x + 5 - 4y + 2 = 1 - 5x \end{cases}$

soit $\begin{cases} -18x + 6y + 13 = 0 \\ 10x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Multiplions la première équation par 5 et la seconde par 9 pour « éliminer » x . Multiplions de même la première équation par 1 et la seconde par 3 pour « éliminer » y . On arrive au système équivalent suivant :

$$\begin{cases} -90x + 30y + 65 + 90x - 18y + 27 = 0 \\ -18x + 6y + 13 + 30x - 6y + 9 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} 12y = -92 \\ 12x = -22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{23}{3} \\ x = -\frac{11}{6} \end{cases} \quad \text{Le système a pour solution} \left(-\frac{11}{6}; -\frac{23}{3} \right).$$

4. a) Si A et B sont des points de D_1 , les couples $(-1; 0,5)$ et $(-2; 5)$ sont solutions de l'équation de D_1 soit de $y - \frac{3}{2}x - 2 = 0$.

Or $0,5 - \frac{3}{2}(-1) - 2 = 0$ donc A est un point de D_1 .

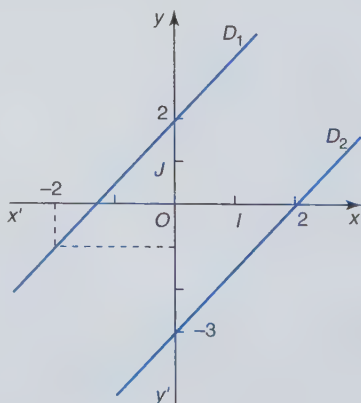
$5 - \frac{3}{2}(-2) - 2 \neq 0$ donc B n'est pas un point de D_1 .

b) Le point C d'ordonnée 3 est un point de D_2 , donc le couple $(x, 3)$ est solution de $y - \frac{3}{2}x + 3 = 0$ ce qui

signifie $3 - \frac{3}{2}x + 3 = 0$
d'où $x = 4$.

L'abscisse du point C est 4 donc $C(4; 3)$.

c) Voir figure. Les droites D_1 et D_2 sont parallèles.



d) La droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ($x_A \neq x_B$), donc son équation est de la forme $y = ax + b$. Les points A et B sont des points de la droite donc a et b vérifient le système :

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 0,5 = -a + b \\ 5 = -2a + b \end{cases}$$

$$\text{d'où} \begin{cases} 5 - 0,5 = -2a + a \\ b = a + 0,5 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = -4,5 \\ b = -4 \end{cases}$$

L'équation de la droite (AB) est $y = -4,5x - 4$.

$$\text{e) } (S_1) : \begin{cases} 3x - 2y + 4 = 0 \\ -x + \frac{2}{3}y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{3}{2}x - 3 \end{cases}$$

On reconnaît les équations de D_1 et D_2 .

Or D_1 et D_2 sont strictement parallèles, donc S_1 n'a pas de solution.

$$(S_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 4 = 0 \\ 4,5x + y + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = -4,5x - 4 \end{cases}$$

On reconnaît les équations de D_1 et (AB) .

Or les droites D_1 et (AB) ne sont pas parallèles et le point A est un point de ces deux droites.

La solution du système est donc $(-1 ; 0,5)$.

5. a) Soit d la distance parcourue et t le temps mis par le frère (en heures).

L'enfant qui roule à 15 km/h met 20 min de plus que son frère ; il parcourt donc la distance d pendant $\left(t + \frac{1}{3}\right)$ d'heure

$$\text{soit } d = 15 \left(t + \frac{1}{3}\right).$$

Le frère parcourt la distance d à la vitesse de 35 km/h d'où $d = 35t$.

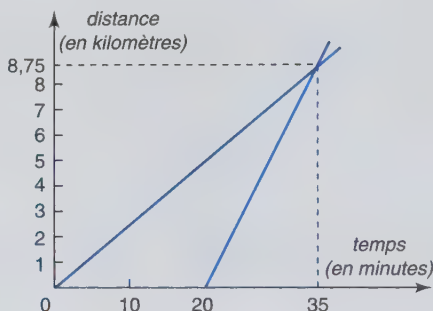
$$\text{On obtient alors le système} \quad \begin{cases} d = 15 \left(t + \frac{1}{3}\right) \\ d = 35t \end{cases}$$

en égalant les deux expressions de d on obtient :

$$\begin{cases} 15 \left(t + \frac{1}{3} \right) = 35t \\ d = 35t \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 5 = 35t - 15t \\ d = 35t \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} t = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \\ d = 35 \times \frac{1}{4} = \frac{35}{4} \end{cases}$$

Il rejoindra son frère au bout de 15 minutes et ils auront parcouru 8,75 kilomètres.

b)



6. Soit x le prix d'un pain au chocolat et y le prix d'un croissant.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 4,5 \\ 2x + 3y = 3,2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 8y = 9 \\ 6x + 9y = 9,6 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0,6 \\ 2x + 3y = 3,2 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} y = 0,6 \\ x = 0,7 \end{cases}$.

Le prix d'un croissant est 0,6 €
et celui d'un pain au chocolat est 0,7 €.

7. Soit x le nombre de disques achetés à 0,75 € et y le nombre de disques achetés à 2,25 €.

$$\begin{cases} 0,75x + 2,25y = 23,25 \\ 1,8x + 3,75y = 44,25 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 3x + 9y = 93 \\ 7,2x + 15y = 177 \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} x + 3y = 31 \\ 2,4x + 5y = 59 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = 31 - 3y \\ 2,4(31 - 3y) + 5y = 59 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = 31 - 3y \\ -2,2y = -15,4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y = 7 \\ x = 10. \end{cases}$

Il a acheté 10 disques à 0,75 € et 7 disques à 2,25 €.

8. a) Le système obtenu est $\begin{cases} 0,4x + 50 = S \\ 0,45x + 40 = S \end{cases}$ avec

x le nombre de kilomètres parcourus et S la somme payée.

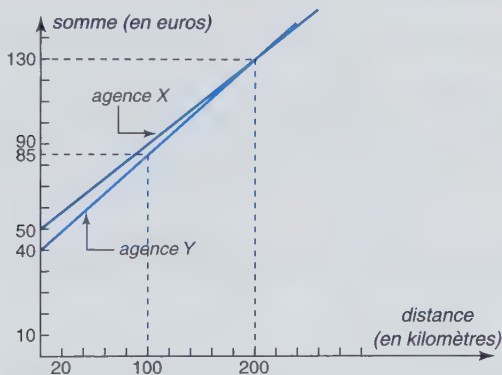
$0,4x + 50 = 0,45x + 40$ soit $0,05x = 10$, d'où $x = 200$.

Il faut parcourir 200 kilomètres
pour que la somme soit la même.

b) $0,4x + 50 < 0,45x + 40$ soit $50 - 40 < 0,45x - 0,4x$
d'où $10 < 0,05x$ donc $x > 200$.

Si la distance parcourue est supérieure à 250 kilomètres, l'agence
 X est plus intéressante que l'agence Y .

c) Voir le graphique ci-dessous.



TEST : 1C ; 2A ; 3B ; 4C ; 5B ; 6A ; 7A.

p. 88

11 Grandeurs composées Changement d'unités

p. 93

1. Soit V le volume de 1,2 kg de glace. Sachant que 0,92 g occupe
un volume de 1 cm^3 , alors $V = \frac{1\,200}{0,92}$ soit $V \approx 1\,304 \text{ cm}^3$ ou bien
 $V \approx 1,3 \text{ L}$ à 1 dl près.

2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du jardin circulaire.

$\mathcal{A} = \pi \times 10^2 = 100 \pi$ d'où $\mathcal{A} = 100 \pi \text{ m}^2$.

Une hauteur d'eau de 3 mm sur le jardin donne un volume d'eau V
tel que $V = \mathcal{A} \times 3 \times 10^{-3}$ soit $V = 3\pi \times 10^{-1} \text{ m}^3$ d'où $V \approx 0,943 \text{ m}^3$ ou
bien $V \approx 943 \text{ l}$.

Le débit du robinet est $0,6 \text{ l} \times \text{s}^{-1}$ donc il faut $\frac{943}{0,6} \text{ s}$ pour recouvrir le jardin d'une quantité d'eau égale à celle déversée par la pluie.

La durée d'arrosage est alors égale à 1 570 s
soit approximativement 26 min.

3. On exprime la masse volumique de chacun des corps en $\text{g} \times \text{cm}^{-3}$.

1,5 cL soit 15 cm^3 de mercure ont une masse égale à 204 g, donc la masse volumique du mercure est $\frac{204}{15} \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$ soit $13,6 \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$.

9 cm^3 de platine ont une masse égale à 189 g donc la masse volumique du platine est $\frac{189}{9} \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$ soit $21 \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$.

25 cm^3 d'acier ont une masse égale à 195 g donc la masse volumique de l'acier est $\frac{195}{25} \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$ soit $7,8 \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$.

C'est donc le platine
qui a la plus grande masse volumique.

4. Le lac Léman a un volume approximatif égal à $582 \times 0,2$ soit $116,4 \text{ km}^3$ ce qui correspond à $116,4 \times 10^9 \text{ m}^3$.

Pour que les chutes Inga au maximum de leur débit remplissent un bassin de même volume que le lac Léman, il faudrait $\frac{116,4 \times 10^9}{8 \times 10^4} \text{ s}$.

Or 24 h correspondent à $24 \times 3\,600 \text{ s}$ soit 86 400 s.

Il faudrait donc $\frac{116,4 \times 10^9}{8 \times 10^4 \times 86\,400}$ jours pour remplir ce bassin, soit approximativement 17 jours.

5. Soit E l'énergie électrique consommée en une journée, exprimée en kWh.

L'utilisation du sèche-cheveux correspond à une consommation de $1,2 \times \frac{20}{60}$ soit 0,4 kWh.

L'utilisation de la perceuse pendant 20 min correspond à une consommation de $0,54 \times \frac{20}{60}$ soit 0,18 kWh. Le fer à repasser consomme $1,8 \times \frac{3}{4}$ soit 1,35 kWh.

L'aspirateur consomme $1,4 \times \frac{1}{2}$ soit 0,7 kWh.

$$\text{Donc } E = 90 + 0,4 + 0,18 + 1,35 + 0,7 ;$$

$$E = 92,63 \text{ kWh.}$$

TEST : 1B ; 2A ; 3C ; 4A ; 5A ; 6B ; 7B ; 8A ; 9C ; 10B. p. 94

12 Calculs d'aires et de volumes

Effets d'une réduction ou d'un agrandissement

p. 98

1. Soit V le volume de la boule de rayon 6 cm et V' celui de la boule réduite.

$$V = \frac{4}{3} \pi \times 6^3 = \frac{4 \times 6^2 \times 3 \times 2 \times \pi}{3} = 4 \times 6^2 \times 2 \times \pi$$

$$\text{d'où } V = 288\pi \text{ cm}^3.$$

L'échelle de la réduction étant $\frac{1}{4}$, alors $V' = \left(\frac{1}{4}\right)^3 V$,

$$\text{d'où } V' = \frac{288\pi}{64} = 4,5\pi \text{ donc } V' \approx 14,1 \text{ cm}^3 \text{ à } 0,1 \text{ cm}^3 \text{ près.}$$

2. Soit S l'aire de la sphère agrandie :

$$S = k^2 \times (4\pi r^2) \text{ donc } S \approx (1,5)^2 \times 4 \times 3 \times 9 \text{ soit } S \approx 243 \text{ cm}^2.$$

3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du terrain en grandeur réelle :

$$\mathcal{A} = (200\,000)^2 \times 8 \text{ donc } \mathcal{A} = 3,2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^2 \text{ d'où } \mathcal{A} = 3\,200 \text{ ha.}$$

4. Soit V' le volume de Γ' et V celui de Γ :

$$V' = k^3 \times V \text{ soit } V = \frac{1}{k^3} V'. \text{ Or } k = \frac{1}{3} \text{ et } V' = 1,5 \text{ cm}^3, \text{ donc}$$

$$V = 3^3 \times 1,5 = 27 \times 1,5 = 40,5 \text{ donc } V = 40,5 \text{ cm}^3.$$

5. 1. NIL étant une reproduction de MNP à l'échelle $\frac{1}{2}$, toutes les dimensions du triangle NIL sont divisées par 2.

Le point L se trouve donc au milieu de $[NM]$.

2. a) Le triangle MNP est donc un agrandissement de NIL à l'échelle 2, d'où $NP = 2NI = 10$.

Le triangle MNP étant rectangle en M , en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient

$$MP^2 + NM^2 = NP^2 \text{ soit } MP^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\text{d'où } MP = 8.$$

b) Soit $\mathcal{P}$ le périmètre du triangle MNP et $\mathcal{P}'$ celui du triangle NIL .

$$\text{On a } \mathcal{P}' = \frac{1}{2} \mathcal{P}. \text{ Or } \mathcal{P} = MN + NP + MP. \mathcal{P} = 10 + 8 + 6 = 24$$

$$\text{d'où } \mathcal{P}' = 12.$$

6. a) Dans le triangle BCD , d'après le théorème de Pythagore et en considérant le milieu B' de $[CD]$:

$$BB'^2 = BC^2 - CB'^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4} \text{ d'où}$$

$$BB' = \frac{5\sqrt{3}}{2}. \text{ Donc aire } (BCD) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4};$$

$$\text{aire } (BCD) \approx 10,8 \text{ cm}^2.$$

b) Le tétraèdre $ABCD$ étant régulier, le point A se projette orthogonalement au centre de symétrie du triangle BCD qui est aussi le centre de gravité, donc

$$BH = \frac{2}{3} BB' = \frac{2}{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Par suite, dans le triangle ABH rectangle en H

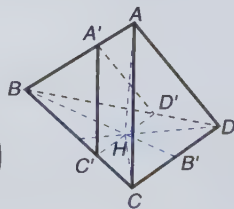
$$AH^2 = AB^2 - BH^2, \text{ soit } AH^2 = 25 - \frac{75}{9} = \frac{225 - 75}{9} = \frac{150}{9} = \frac{50}{3}$$

$$\text{d'où } AH = 5\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

c) Voir figure ci-contre.

Soit V' le volume de $BC'D'A'$ et V celui de $BCDA$.

$$V' = k^3 \times V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3} \times AH \times \text{aire } (BCD)\right)$$



$$\text{donc } V' = \frac{8}{27} \times 5 \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{25\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{250\sqrt{2}}{3^4};$$

$$V' = \frac{250\sqrt{2}}{81} \text{ cm}^3 \text{ d'où } V' \approx 4,4 \text{ cm}^3.$$

TEST : 1B ; 2A ; 3C ; 4C ; 5B ; 6A.

p. 100

13 Données statistiques

p. 108

1. a)

$$\bar{M} = \frac{1 \times 1 + 1 \times 2 + 12 \times 3 + 13 \times 4 + 15 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 7 + 2 \times 8 + 2 \times 9}{61}.$$

$$\bar{M} = \frac{298}{61}; \quad \bar{M} \approx 4,9.$$

b) Il y a 61 valeurs. Quel numéro correspond à la 31^e valeur ? 5 est la médiane.

$$2. \text{ a) } \bar{M} = \frac{2 \times 13,5 + 7 \times 14,5 + 15,5 \times 10 + 2 \times 16,5 + 2 \times 17,5}{23}.$$

$$\bar{M} = \frac{351,5}{23} \text{ donc } \bar{M} \approx 15,3.$$

La moyenne d'âge des enfants se situe autour de 15 ans.

b)

Ages	Nombre d'enfants	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
$13 \leq x < 14$	2	2	23
$14 \leq x < 15$	7	9	21
$15 \leq x < 16$	10	19	14
$16 \leq x < 17$	2	21	4
$17 \leq x < 18$	2	23	2

On cherche la valeur du caractère associé au 12^e individu ;

$$\text{médiane} = \frac{1(12 - 10)}{10} + 15 = 15,2.$$

3. a)

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5	6	7	Total
Dépouillement	☐	☒	☒	☐					
Effectifs	4	7	7	3	1	1	0	1	24
Produits $n_i x_i$	0	7	14	9	4	5	0	7	46

b) Moyenne = $\frac{46}{24}$; Moyenne ≈ 2 .

c) Il y a 24 élèves dans cette classe. La médiane est 1 ou 2.

4. a) Effectif total : 19.

b)

x	$1 \leq x < 3$	$3 \leq x < 6$	$6 \leq x < 7$	$7 \leq x < 9$
Effectifs	2	9	4	4

$$\text{c) } \bar{m} = \frac{2 \times 2 + 9 \times 4,5 + 4 \times 6,5 + 4 \times 8}{19} ; \bar{m} \approx 5,4.$$

d) Effectif total : 19. On cherche la valeur du caractère associé au 10^e individu.

$$\text{Médiane} = \frac{3(10 - 3)}{9} + 3 ; \text{Médiane} \approx 5,3.$$

TEST : 1F ; 2V ; 3V ; 4F ; 5V ; 6F ; 7V.

p. 110

14 Géométrie dans l'espace (1) – La sphère

p. 115

1. Soit I un point du cercle de centre M , la droite (OM) est perpendiculaire au plan P , donc (OM) est perpendiculaire à la droite (MI) .

Le triangle OMI est rectangle en M , donc d'après la propriété de Pythagore, $OM^2 + MI^2 = OI^2$, donc $MI^2 = 16 - 9 = 7$.

$$MI = \sqrt{7}.$$

2. Soit $R = 7$ et $r = \frac{7}{2}$.

On sait que $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$;

$$\frac{7}{2} = \sqrt{49 - OH^2} ; \text{ soit } \frac{49}{4} = 49 - OH^2 \text{ et par suite } OH = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

Le triangle OHM est rectangle en H , et par suite

$$\cos \widehat{HMO} = \frac{MH}{OM} = \frac{r}{R} = \frac{7}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{2}$$

donc $\widehat{HMO} = 60^\circ$ et par suite $\widehat{HOM} = 30^\circ$.

3. a) Il faut que le rayon de la sphère soit égal à $\frac{a}{2}$ si on appelle

a la longueur d'un côté du cube, or $d = a\sqrt{3}$ donc $a = \frac{d\sqrt{3}}{3}$.

Le rayon de la sphère doit donc être égal à $\frac{d\sqrt{3}}{6}$.

b) $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4 \times \pi \times d^3 \times 3\sqrt{3}}{3 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{\pi d^3 \sqrt{3}}{54}$ (V : volume de la boule) ;

volume du cube : $V' = \left(\frac{d}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{d^3 \sqrt{3}}{9}$.

4. Calculons le volume V d'une bille d'acier (en cm^3).

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ avec } R = 0,2 \text{ cm.}$$

$$V = \frac{0,032\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Dressons un tableau de proportionnalité :

Volume en cm^3	1	V
Masse en grammes	7,8	m

On en déduit que la masse m d'une bille d'acier exprimée en grammes est :

$$m = 7,8 V \quad \text{soit } m = 0,083 \, 2 \pi g.$$

Dans un kilogramme d'acier (soit 1 000 g) il y aura donc

$$\frac{1 \, 000}{0,083 \, 2 \pi} \text{ billes d'acier soit environ } 3 \, 825 \text{ billes d'acier.}$$

5. Soit R le rayon supposé de la Terre, V son volume exprimé en kilomètres cubes et S sa surface exprimée en kilomètres carrés.

$$R = 6 \, 378 \text{ km.}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad V \approx 1 \, 086 \, 781 \, 293 \cdot 10^3 \text{ km}^3.$$

$$S = 4 \pi R^2; \quad S \approx 511 \, 185 \, 932 \text{ km}^2.$$

6. En notant O le centre de la Terre, $\widehat{AOB} = 33^\circ$.

En utilisant le tableau de proportionnalité suivant :

Distance en km	40 000	AB
Mesure de l'angle en degré	360	33

$$\text{on obtient la longueur } \widehat{AB} = \frac{33 \times 40 \, 000}{360};$$

$$\text{longueur } \widehat{AB} \approx 3 \, 667 \text{ km.}$$

TEST : 1A ; 2C ; 3B ; 4A ; 5B ; 6C.

p. 116

15 Géométrie dans l'espace (2) – Sections planes de solides

p. 122

1. a) Le triangle ABD est rectangle et isocèle puisque $ABCD$ est un carré ; d'après le théorème de Pythagore : $BD^2 = 2AB^2 = 16 \times 2 = 32$ d'où $BD = 4\sqrt{2}$. Comme O est le milieu de $[BD]$, alors $OB = 2\sqrt{2}$.

b) Les triangles SAB et SDA sont équilatéraux donc $SD = SB = 4$ cm. Or $SD^2 + SB^2 = 32$ et $BD^2 = 32$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle SBD est rectangle en S ; de plus il est isocèle puisque $SD = SB$.

Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Donc
$$SO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

c) Le volume V de la pyramide $SABCD$ est tel que

$$V = \frac{1}{3}SO \times \text{aire}(ABCD) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times 4^2 = \frac{32}{3}\sqrt{2};$$

$$V = \frac{32}{3}\sqrt{2} \text{ cm}^3 \quad \text{d'où } V \approx 15 \text{ cm}^3.$$

d) Le plan (P) étant parallèle à (ABC) , le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un carré.

Soit k l'échelle de la réduction :

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soit V' le volume de $SA'B'C'D'$, $V' = k^3 V$ d'où

$$V' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \times \frac{32}{3}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{8} \times \frac{32}{3} \times \sqrt{2} = \frac{16}{3} \quad \text{d'où } V' \approx 5 \text{ cm}^3.$$

2. Plaçons-nous dans le plan (ABC) . D'après le théorème de Thalès appliqué au triangle ABC , I est un point de $[AC]$, B' est un point de $[BC]$ et (IB') est parallèle à (AB) donc

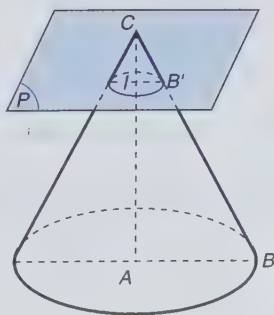
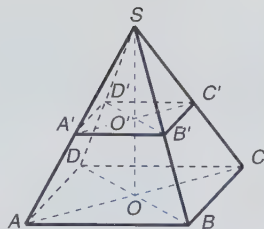
$$\frac{IB'}{AB} = \frac{IC}{AC} \text{ et par suite}$$

$$IB' = \frac{1 \times 2}{4};$$

$$IB' = 0,5 \text{ cm.}$$

$$S = \pi \times r^2 \text{ d'où } S = (0,5)^2 \times \pi.$$

$$S \approx 0,77 \text{ cm}^2 \text{ (en prenant } \pi \approx 3,1).$$



3. 1. a) Voir figure ci-dessous.

b) Dans le triangle AEF , les droites (AF) et (BC) sont parallèles car $ABCD$ est un carré et F est un point de (AD) .

On peut donc appliquer le théorème de

Thalès : $\frac{EB}{EA} = \frac{BC}{AF}$

soit $AF = \frac{BC \times EA}{EB}$.

B est un point de $[AE]$, donc $AE = AB + BE$

soit $BE = 9 - 3 = 6$.

$AF = \frac{3 \times 9}{6} = \frac{9}{2} = 4,5$; $AF = 4,5 \text{ cm}$.

c) Le triangle AEF est un triangle rectangle en A car $ABCD$ est un carré. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore.

$EF^2 = AE^2 + AF^2$ soit $EF^2 = 9^2 + (4,5)^2 = 101,25$;

or $EF > 0$ car EF est une distance, donc $EF = \sqrt{101,25}$;

$EF \approx 10,1 \text{ cm}$.

d) Dans le triangle AEF rectangle en A , $\tan \widehat{AEF} = \frac{AF}{AE} = \frac{4,5}{9} = \frac{1}{2}$.

En utilisant la calculatrice, on trouve $\widehat{AEF} \approx 27^\circ$ (valeur approchée à un degré près par excès).

2. a) $V_1 = \frac{\pi(AF)^2 \times EA}{3} = \frac{\pi \times (4,5)^2 \times 9}{3} = 60,75 \pi$.

b) $V_2 = \pi(AD)^2 \times AB = \pi \times 9 \times 3 = 27\pi$.

c) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{60,75\pi}{27\pi} = 2,25$.

TEST : 1A ; 2C ; 3B ; 4B ; 5C.

p. 124

16 Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

p. 129

1. Dans le triangle ABC rectangle en A , $\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$; or

d'après le théorème de Pythagore $BC^2 = AB^2 + AC^2$ soit

$BC^2 = 25 + 9 = 34$ d'où $BC = \sqrt{34}$.

Corrigés

On en déduit $\sin \widehat{BCA} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$.

En utilisant la calculatrice, on trouve $\widehat{BCA} \approx 59^\circ$ (à un degré près par défaut) et donc $\widehat{ABC} \approx 31^\circ$.

2. a) Voir figure.

b) Dans le triangle GHE rectangle en H ,

on a $\sin \widehat{HGF} = \frac{FH}{GF}$

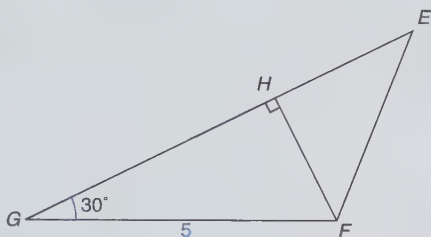
soit $FH = GF \times \sin 30^\circ$

$FH = 5 \times 0,5 = 2,5$.

$FH = 2,5 \text{ cm}$.

c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle EFG .

$\mathcal{A} = \frac{HF \times GE}{2} = \frac{2,5 \times 8}{2} = 10$; $\mathcal{A} = 10 \text{ cm}^2$.



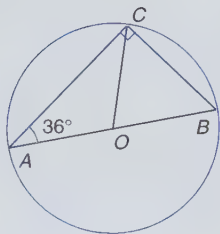
3. Dans le triangle ABC rectangle en A , $\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$

d'où $AB = BC \times \sin \widehat{BCA}$ soit $AB = 90 \times \sin 37^\circ$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $AB \approx 54 \text{ mm}$.

54 mm est une valeur arrondie de AB , au millimètre près.

4. a)



b) Les triangles AOC et BOC sont isocèles en O , car $OC = OA = OB = r$.

$[AB]$ est un diamètre du cercle et C un point du cercle, donc le triangle ABC est un triangle rectangle en C .

Dans le triangle ABC rectangle en C , on a

donc $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$ d'où

$BC = AB \times \sin 36^\circ$ d'où $BC \approx 5,9 \text{ cm}$.

c) Pour calculer AC , on peut à nouveau utiliser la trigonométrie ou calculer AC à l'aide du théorème de Pythagore.

$\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$

donc $AC = AB \times \cos \widehat{BAC} = 10 \cos 36^\circ$.

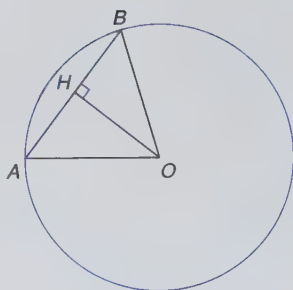
$AC \approx 8,1 \text{ cm}$.

5. a) Voir figure.

b) Les points A et B sont deux points du même cercle donc $AO = OB = r = 5$ cm.

Le triangle AOB est un triangle isocèle en O ; la hauteur $[OH]$ est donc aussi la médiane et par suite H est le milieu de $[AB]$;

d'où $AH = \frac{AB}{2} = 3$ cm.



c) Dans le triangle AHO rectangle en H : $\cos \widehat{HAO} = \frac{AH}{AO} = \frac{3}{5}$.

À l'aide de la calculatrice, on en déduit $\widehat{HAO} \approx 53^\circ$ (à un degré près par défaut).

6. Dans le triangle BCD rectangle en B , $\sin \widehat{BDC} = \frac{BC}{DC}$ donc $DC = \frac{BC}{\sin 30^\circ}$ soit $DC = 2 \times BC = 10$.

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle BCD rectangle en B , on obtient $DB^2 + BC^2 = DC^2$ soit

$$DB^2 = DC^2 - BC^2 = 100 - 25 = 75.$$

D'où $DB = 5\sqrt{3}$.

Dans le triangle BAD rectangle en A , $\sin \widehat{ADB} = \frac{AB}{DB}$ donc

$AB = DB \times \sin 37^\circ$ soit $AB = 5\sqrt{3} \sin 37^\circ$. À l'aide de la calculatrice, on obtient $AB \approx 5,2$ (à 0,1 près par défaut).

De même, $\cos \widehat{ADB} = \frac{AD}{DB}$ d'où $AD = DB \times \cos \widehat{ADB}$ soit

$AD = 5\sqrt{3} \cos 37^\circ$. À l'aide de la calculatrice, on obtient $AD \approx 6,9$ (à 0,1 près par défaut).

TEST : 1B ; 2C ; 3B ; 4B ; 5A ; 6A ; 7B ; 8A ; 9A.

p. 130

17 Expression analytique de la distance p. 132

1. $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (3 + 3)^2 + (2 + 4)^2$;
 $AB^2 = 36 + 36 = 72$.

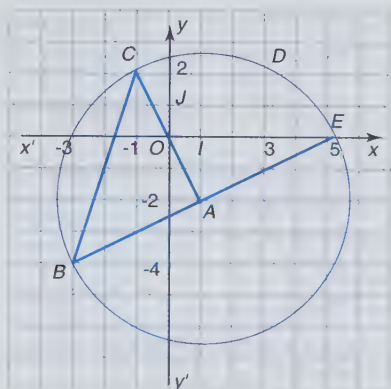
$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (7 + 3)^2 + (-2 + 4)^2$;
 $AC^2 = 100 + 4 = 104$.

$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (7 - 3)^2 + (-2 - 2)^2;$$

$$BC^2 = 16 + 16 = 32.$$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$; donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut affirmer que le triangle ABC est rectangle en B .

2.



a) Soit M le milieu de $[BE]$.

$$x_M = \frac{x_B + x_E}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_B + y_E}{2} = \frac{-4 + 0}{2} = -2$$

donc $M(1 ; -2)$;

or $A(1 ; -2)$ donc A est le milieu de $[BE]$.

$$b) AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (-4 + 2)^2} ;$$

$$AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 + 2)^2} ;$$

$$AC = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (2 + 4)^2} ;$$

$$BC = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

$AB = AC$ donc ABC est un triangle isocèle en A .

De plus $BC^2 = 40$ et $AC^2 + AB^2 = 40$ donc $AC^2 + AB^2 = BC^2$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A .

Conclusion :

le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .

$$c) AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 + 2)^2};$$

$$AD = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \text{ or } AB = 2\sqrt{5}, \text{ donc } AB = AD.$$

d) Le cercle de diamètre $[BE]$ a pour centre le milieu A de $[BE]$, et pour rayon $AB = 2\sqrt{5}$.

Si les points C et D sont des points du cercle, on doit avoir $AC = AD = 2\sqrt{5}$.

D'après la question b), $AB = AC = 2\sqrt{5}$ et d'après la question c), $AB = AD = 2\sqrt{5}$; donc les points C et D sont sur le cercle.

3. Si $M(x, y)$ est un point du cercle, on doit avoir $AM = 2$ soit $AM^2 = 4$.

$$AM^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x + 3)^2 + (y - 5)^2;$$

$$AM^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25;$$

$$AM^2 = x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34;$$

$$AM^2 = 4 \text{ signifie que } x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 4$$

$$\text{soit } x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0.$$

Donc si $M(x, y)$ est un point du cercle, on a

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0.$$

4. Si M est un point de la médiatrice de $[AB]$, alors

$$AM = MB \text{ donc } AM^2 = MB^2;$$

$$AM^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25;$$

$$AM^2 = x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34.$$

$$MB^2 = (x_B - x)^2 + (y_B - y)^2 = (-1 - x)^2 + (2 - y)^2;$$

$$MB^2 = 1 + 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2;$$

$$MB^2 = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5.$$

$$AM^2 = MB^2 \text{ si } x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$$

$$\text{soit } -8x - 6y + 29 = 0.$$

Si M est un point de la médiatrice de $[AB]$, on a

$$-8x - 6y + 29 = 0.$$

$$\mathbf{5.} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6 - x)^2 + (5 - 2)^2};$$

$$AB = \sqrt{(6 - x)^2 + 9};$$

$$AB = \sqrt{15} \text{ soit } AB^2 = 15 \text{ soit}$$

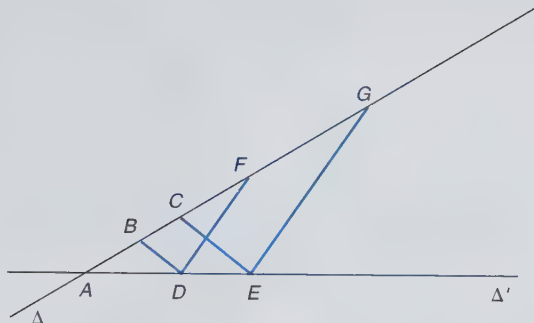
$$(6 - x)^2 + 9 = 15 \quad \text{d'où} \quad (6 - x)^2 = 6$$

$$\text{soit } (6 - x) = \sqrt{6} \quad \text{ou} \quad (6 - x) = -\sqrt{6}$$

$$\text{d'où} \quad x = 6 - \sqrt{6} \quad \text{ou} \quad x = 6 + \sqrt{6}.$$

TEST : 1B ; 2B ; 3A ; 4B ; 5A ; 6C ; 7B ; 8A.

p. 133



• On considère les points A, B et C dans cet ordre sur Δ et les points A, D et E , situés dans cet ordre sur Δ' .

Les droites (BD) et (CE) étant parallèles, d'après le théorème de

Thalès on a : $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ soit $\frac{AC - BC}{AC} = \frac{AD}{AE}$,

car B appartient à $[AC]$.

Par suite, $AD = \frac{AE(AC - BC)}{AC}$ soit $AD = \frac{10 \times (8 - 3)}{8}$

d'où $AD = \frac{25}{4}$. $AD = 6,25$ cm.

• On considère les points A, D et E de Δ' et les points A, F et G de Δ . Les droites (DF) et (EG) étant parallèles, d'après le théorème de

Thalès on a : $\frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AE} = \frac{DF}{EG}$.

Le point F appartient à $[AG]$ donc $AF + FG = AG$.

Par suite, $\frac{AF}{AF + FG} = \frac{AD}{AE} = \frac{6,25}{10} = \frac{5}{8}$ d'où

$8AF = 5(AF + FG)$ soit $8AF = 5(AF + 7)$ d'où

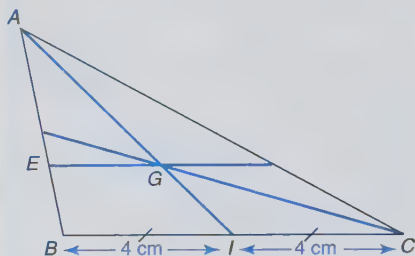
$8AF - 5AF = 35$. Donc $3AF = 35$ soit $AF = \frac{35}{3}$ cm ;

$AF \approx 11,7$ cm.

2. a) On trace un segment $[BC]$ de longueur 8 cm.

Soit I le milieu de $[BC]$; une intersection du cercle de centre I et de rayon 7 cm avec le cercle de centre B et de rayon 5 cm donne un point A qui satisfait aux conditions et par suite on obtient la

construction du triangle ABC .



b) Le tracé d'une deuxième médiane met en évidence le centre de gravité G du triangle ABC .

D'après les propriétés du centre de gravité d'un triangle,

$$\text{on a } AG = \frac{2}{3} AI.$$

On considère les points A, E et B d'une part et les points A, G et I d'autre part.

Les droites (EG) et (BI) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{AG}{AI} = \frac{AE}{AB} \quad \text{soit } AE = AB \times \frac{AG}{AI} \quad \text{d'où } AE = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ donc}$$

$$AE = \frac{10}{3} \text{ cm.}$$

$$AE \approx 3,3 \text{ cm.}$$

3. a) On considère les points B, P et T de la droite (BT) et les points B, Q et C de la droite (BC) .

Les droites (TC) et (PQ) étant parallèles, d'après le théorème de

$$\text{Thalès on a : } \frac{BP}{BT} = \frac{BQ}{BC}. \quad (1)$$

On considère les points B, S et A de la droite (BT) et les points B, Q et C de la droite (BC) .

Les droites (QS) et (AC) étant parallèles, d'après le théorème de

$$\text{Thalès on a : } \frac{BS}{BA} = \frac{BQ}{BC}. \quad (2)$$

b) D'après (1) et (2) on a : $\frac{BP}{BT} = \frac{BS}{BA}$ donc $BP \cdot BA = BS \cdot BT$.

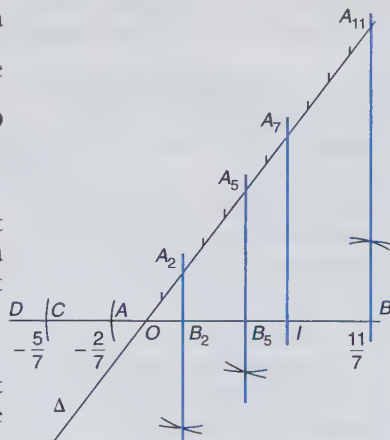
4. On choisit une droite graduée Δ passant par O . On reporte à l'aide du compas 11 fois le « pas » de cette graduation ; seuls les points A_2, A_5, A_7, A_{11} sont nécessaires pour construire les points A, B, C .

La parallèle à (A_7I) passant par A_2 donne le point B_2 de la droite D d'abscisse $\frac{2}{7}$ dont le symétrique par rapport à O est le point A d'abscisse $-\frac{2}{7}$.

La parallèle à (A_7I) passant par A_{11} donne le point B de la droite D dont l'abscisse est égale à $\frac{11}{7}$.

La parallèle à (A_7I) passant par A_5 donne le point B_5 de la droite D d'abscisse $\frac{5}{7}$ et

dont le symétrique par rapport à O est le point C d'abscisse $-\frac{5}{7}$.



5. a) Les droites (BB') et $(C'R)$, étant toutes deux perpendiculaires à (AC) , sont parallèles.

Il en est de même des droites (CC') et $(B'P)$ perpendiculaires à (AB) .

• On considère les points A, R et B' de la droite (AC) et les points A, C' et B de la droite (AB) .

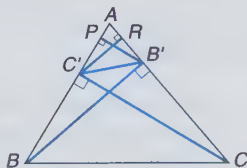
Les droites (BB') et $(C'R)$ étant parallèles, d'après le théorème de Thalès

$$\text{on a : } \frac{AR}{AB'} = \frac{AC'}{AB}. \quad (1)$$

• On considère les points A, B' et C de la droite (AC) et les points A, P et C' de la droite (AB) .

Les droites (CC') et $(B'P)$ étant parallèles, d'après le théorème de

$$\text{Thalès on a : } \frac{AP}{AC'} = \frac{AB'}{AC}. \quad (2)$$



b) D'après (1) et (2), $AR \times AB = AB' \times AC'$ et $AP \times AC = AB' \times AC'$ donc $AR \times AB = AP \times AC$.

Par suite, on peut écrire : $\frac{AR}{AC} = \frac{AP}{AB}$. Or R appartient au segment

$[AC]$ et P au segment $[AB]$; donc, d'après la réciproque de Thalès, les droites (PR) et (BC) sont parallèles.

6. • On considère les points A, E et F de la droite (AF) et les points A, O et C de la droite (OC) .

Les droites (OE) et (FC) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AO}{AC}. \quad (1)$$

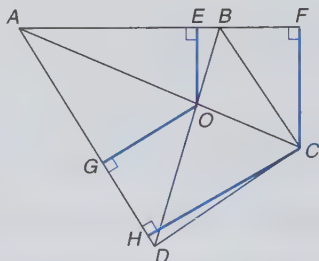
• On considère les points A, O et C de la droite (AC) et les points A, G et H de la droite (AD) .

Les droites (OG) et (CH) étant parallèles, d'après le théorème de

Thalès on a : $\frac{AO}{AC} = \frac{AG}{AH}$. (2)

D'après (1) et (2) : $\frac{AE}{AF} = \frac{AG}{AH}$. (3)

Les points A, E et F sont dans cet ordre sur (AF) et les points A, G et H dans cet ordre sur (AD) . D'après la réciproque du théorème de Thalès et l'égalité (3), on en déduit que les droites (EG) et (FH) sont parallèles.



7. D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en A :

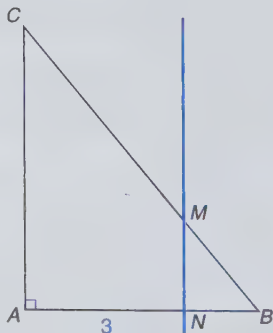
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\text{soit } AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$\text{d'où } AC^2 = 25 - 9 = 16 ;$$

$$\text{par suite } AC = 4 \text{ cm.}$$

On considère les points B, M et C de la droite (BC) et les points B, N et A de la droite (BA) .



Les droites (MN) et (AC) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{BM}{BC} = \frac{MN}{AC} \text{ soit } MN = \frac{BM \times AC}{BC}$$

$$\text{d'où } MN = \frac{x \times 4}{5} = \frac{4}{5}x.$$

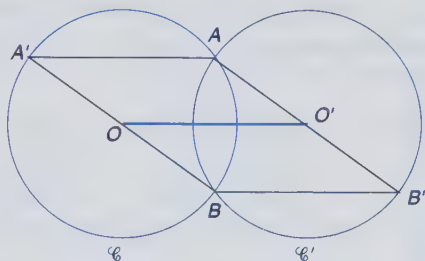
TEST : 1C ; 2A ; 3B ; 4A ; 5C ; 6C ; 7B ; 8B ; 9B ; 10B.

p. 140

19 Vecteurs et translations

p. 148

1. a) Par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, le point O a pour image O' , donc le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r se transforme par cette translation en un cercle de centre O' et de rayon r ; il s'agit du cercle $\mathcal{C}'$.



b) Le point A' appartient à $\mathcal{C}$ et il est tel que $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{OO'}$.

c) Le point B appartient à $\mathcal{C}$ donc son image B' par la translation $t_{\overrightarrow{OO'}}$ appartient à $\mathcal{C}'$ et est telle que $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OO'}$.

d) Des relations $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OO'}$ on déduit que $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{BB'}$ ce qui signifie que le quadrilatère $A'AB'B$ est un parallélogramme.

$$2. \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}$$

$$\text{car } \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ et } \vec{0} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}.$$

$$\vec{v} = (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GA}) + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FF} = \vec{0}.$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MA} ;$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MA} ;$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN} ;$$

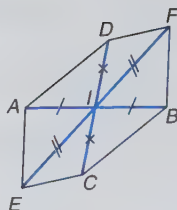
$$\vec{w} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BN} = \vec{0} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.$$

3. Les vecteurs représentés sur la figure égaux à $\vec{IB}$ sont : $\vec{IB}$; $\vec{AI}$; $\vec{BJ}$; $\vec{JC}$; ceux égaux à $\vec{AB}$ sont $\vec{AB}$; $\vec{IJ}$; $\vec{BC}$; ceux égaux à $\vec{CI}$ sont $\vec{CI}$ et $\vec{JA}$.



4. a) $AEBF$ est un parallélogramme car $[AB]$ et $[EF]$ ont même milieu, donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont égaux.

b) $ACBD$, $CFDE$, $AEBF$ sont des parallélogrammes.



5. a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{EH}$.

b) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{0}$.

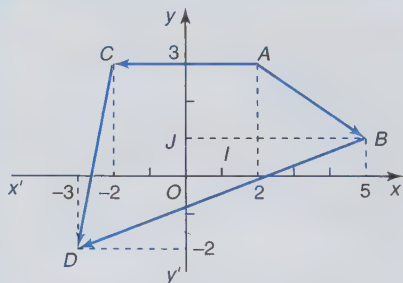
c) L'image du point O par la translation $t_{\overrightarrow{GB}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{OD}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{FG}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{HC}}$ suivie de $t_{\overrightarrow{BF}}$ est le point O ; donc il est à penser que le passage de O à son image O' est la translation associée au vecteur nul.

TEST : 1C ; 2A ; 3B ; 4C ; 5B ; 6C ; 7B ; 8A ; 9B ; 10B ; 11A ; 12B.

p. 149

20 Coordonnées d'un point et d'un vecteur

p. 155



1. a) Voir la figure ci-contre.

b) En projetant orthogonalement les points A, B, C et D sur chaque axe, on lit :

$\overrightarrow{AB}(3; -2)$;

$\overrightarrow{AC}(-4; 0)$;

$\overrightarrow{BD}(-8; -3)$ et

$\overrightarrow{CD}(-1; -5)$.

c) $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ soit $\overrightarrow{AB}(5 - 2; 1 - 3)$

donc $\overrightarrow{AB}(3; -2)$.

$\overrightarrow{AC}(x_C - x_A, y_C - y_A)$ soit $\overrightarrow{AC}(-2 - 2; 3 - 3)$

donc $\overrightarrow{AC}(-4; 0)$.

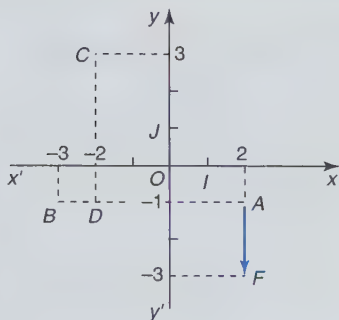
$\overrightarrow{BD}(x_D - x_B, y_D - y_B)$ soit $\overrightarrow{BD}(-3 - 5; -2 - 1)$

donc $\overrightarrow{BD}(-8; -3)$.

$\overrightarrow{CD}(x_D - x_C, y_D - y_C)$ soit $\overrightarrow{CD}(-3 + 2; -2 - 3)$

donc $\overrightarrow{CD}(-1; -5)$.

2. a) Voir la figure ci-dessous pour le placement des points ; on remarque que la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses car les points A et B ont la même ordonnée -1 .



Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(-5 ; 0)$.

b) On remarque que la droite (CD) est parallèle à l'axe des ordonnées car les points C et D ont la même abscisse -2 .

Les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ sont $(0 ; -4)$.

c) Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ $(0 ; -2)$ est tel que la droite (AF) soit parallèle à l'axe des ordonnées ; par ailleurs la deuxième coordonnée

étant négative, le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est de sens contraire du sens positif choisi sur l'axe des ordonnées d'où la position du point F sur le schéma.

3. Si B a pour image A par la translation de vecteur $\vec{u}$, alors $\overrightarrow{BA} = \vec{u}$

soit
$$\begin{cases} x_A - x_B = 2 \\ y_A - y_B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} x_B = -2 + x_A = -2 + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4} \\ y_B = \frac{1}{2} + y_A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$B\left(-\frac{7}{4} ; 2\right).$$

4. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ avec $\overrightarrow{AB}(3 ; -4)$ et $\overrightarrow{DC}(0 - x_D, 2 - y_D)$; on obtient

$$\begin{cases} 3 = 0 - x_D \\ -4 = 2 - y_D \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 6 \end{cases} \quad \text{donc } D(-3 ; 6).$$

5. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}(2; -4)$ et $\overrightarrow{DC}(2; -4)$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ce qui signifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

Si $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Soit K le milieu de $[AC]$; $K\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$ soit $K(1; -2)$.

Soit L le milieu de $[BD]$; $L\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right)$ soit $L(1; -2)$.

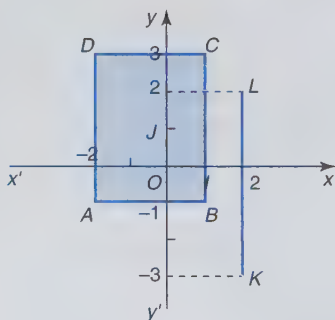
Les points K et L ayant même couple de coordonnées sont confondus, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

6. a) L'ensemble des points $M(x, y)$ situés à l'intérieur du parallélogramme $ABCD$, en incluant les côtés, est tel que

$$-2 \leq x \leq 1 \text{ et}$$

$$-1 \leq y \leq 3.$$

b) L'ensemble des points $N(x, y)$ appartenant au segment $[LK]$ est tel que $x = 2$ et $-3 \leq y \leq 2$.



TEST : 1B ; 2C ; 3A ; 4B ; 5B ; 6C ; 7C.

p. 156

21 Rotations

p. 161

1. a) Par la rotation de centre O transformant C en D , les images respectives des points F, O et B sont A, O et C .

Le triangle FOB a pour transformé AOC par cette rotation.

b) Par la rotation de centre O transformant C en A , les images respectives des points B, C, D et O sont F, A, B, O .

Le losange $BCDO$ a pour transformé le losange $FABO$ par cette rotation.

c) La rotation de sens indirect qui transforme le triangle OAB en le triangle BOC a pour centre le point B et pour angle 60° .

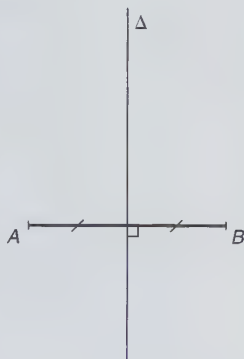
Cette rotation est telle que A ait pour image O et que O ait pour image C .

2. Soit O le centre d'une rotation qui transforme le point A en B .

Par définition d'une rotation $OA = OB$ donc O appartient à la médiatrice Δ de $[AB]$.

Il en est de même pour tous les centres des rotations transformant A en B .

Les centres des rotations appartiennent donc à Δ .



3. Le point de concours des médiatrices des côtés du triangle ABC est le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC .

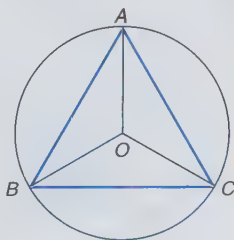
On veut déterminer une rotation r laissant le triangle ABC invariant. Le seul point invariant d'une rotation est le centre de cette rotation.

Les sommets du triangle ne peuvent être le centre de r car il faudrait que les deux autres sommets s'échangent, ce qui n'est pas le cas.

Le centre de r est équidistant de A et de B si B est le transformé de A , donc ce centre appartient à la médiatrice de $[AB]$.

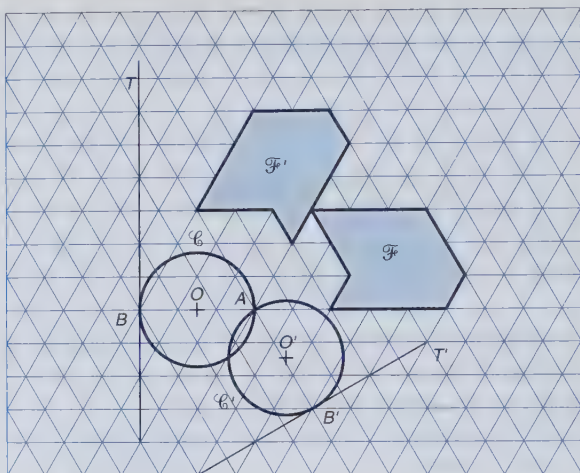
Par suite, si B se transforme en C et C en A , le triangle ABC est invariant.

Le centre appartient aussi à la médiatrice de $[BC]$, donc il s'agit du point O .



Conclusion : la rotation de centre O , d'angle 120° dans le sens direct est une rotation qui laisse le triangle ABC invariant.

4. a) b) Voir la figure ci-dessous où l'on s'est servi du pavage en triangles équilatéraux pour construire $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$ et T .



TEST : 1B ; 2A ; 3C ; 4C ; 5B ; 6A ; 7A ; 8C.

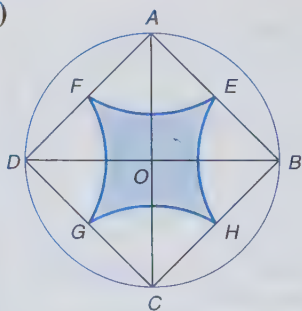
p. 163

22 Polygones réguliers

p. 169

1.

a)



b) Le rayon du cercle mesure 3 cm ; le côté du carré a donc $3\sqrt{2}$ cm pour longueur.

Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire du carré ABCD.

$$\mathcal{A}_1 = (3\sqrt{2})^2 = 18 \text{ cm}^2.$$

Soit $\mathcal{A}_2$ l'aire du quart de disque

de rayon $\frac{1}{2} AB$, soit $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} \right)^2 ;$$

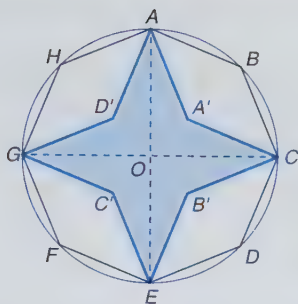
$$\mathcal{A}_2 = \frac{9}{8} \pi \text{ cm}^2.$$

Soit $\mathcal{A}$, l'aire de la rosace EFGH. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - 4\mathcal{A}_2$.

$$\mathcal{A} = 18 - \frac{9}{2} \pi \text{ cm}^2 ;$$

$\mathcal{A} \approx 3,86 \text{ cm}^2$, valeur approchée au millimètre carré près.

2. a) b) c) d)



3. Partie A

Soit p le périmètre du carré de côté a $\begin{cases} p = 4a \\ p = 120 \text{ m} \end{cases}$ donc $a = 30 \text{ m}$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du carré. $\mathcal{A} = (30)^2$; $\mathcal{A} = 900 \text{ m}^2$.

Partie B

a) Soit p le périmètre de l'hexagone régulier.

$p = 6a$; or $p = 120 \text{ m}$ donc $a = 20 \text{ m}$, d'où $AB = 20 \text{ m}$.

b) Le triangle OAB est isocèle en O , la hauteur (OH) est aussi la médiane; donc $AH = \frac{1}{2}AB = 10$ donc $AH = 10 \text{ m}$.

Le triangle OHA est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$OA^2 = OH^2 + HA^2; OH^2 = OA^2 - HA^2 = 400 - 100 = 300$$

d'où $OH = 10\sqrt{3} \text{ m}$.

c) Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle AOB .

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} OH \times AB = 100\sqrt{3} \text{ d'où } \mathcal{A}_1 = 100\sqrt{3} \text{ m}^2.$$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de l'hexagone. $\mathcal{A} = 6\mathcal{A}_1$, donc $\mathcal{A} = 600\sqrt{3} \text{ m}^2$;

$\mathcal{A} \approx 1\,040 \text{ m}^2$ à 2 m^2 près.

Partie C

a) Soit p le périmètre du décagone régulier de côté a .

$p = 10a$; or $p = 120 \text{ m}$ donc $a = 12$. $MN = 12 \text{ m}$.

b) Tous les angles au centre ont la même mesure.

$$\widehat{MIN} = \frac{360}{10}. \quad \widehat{MIN} = 36^\circ.$$

Dans un triangle, la somme des angles vaut 180° .

$$\widehat{NMI} + \widehat{MNI} + \widehat{MIN} = 180^\circ.$$

$\widehat{NMI} = \widehat{MNI}$ car le triangle est isocèle en I ;

donc $2\widehat{MNI} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$. $\widehat{NMI} = 72^\circ$.

c) Dans le triangle MKI rectangle en K , $\tan \widehat{KMI} = \frac{IK}{KM}$ donc

$$IK = KM \tan 72^\circ. IK = 6 \tan 72^\circ \quad \text{soit } IK \approx 18,47 \text{ m.}$$

d) Soit $\mathcal{A}_1$, l'aire du triangle MIN et $\mathcal{A}$ celle du décagone.

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} IK \times MN \text{ soit } \mathcal{A}_1 \approx 110,82 \text{ m}^2.$$

$$\mathcal{A} = 10 \mathcal{A}_1 \quad \text{d'où } \mathcal{A} \approx 1\,110 \text{ m}^2 \text{ à } 2 \text{ m}^2 \text{ près.}$$

TEST : 1A ; 2C ; 3A ; 4C ; 5C ; 6C ; 7C.

p. 170

23 Composition de transformations

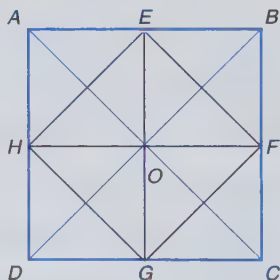
p. 175

1. a) Par la symétrie de centre O , les points A, E, H ont pour images respectives les points C, G, F .

La symétrie de centre O transforme le triangle AEH en GFC ainsi que la symétrie d'axe (BD) .

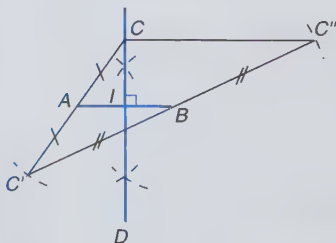
b) Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$, les points A, E, H ont pour images respectives les points O, F, G .

La translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ transforme le triangle AEH en OFG .

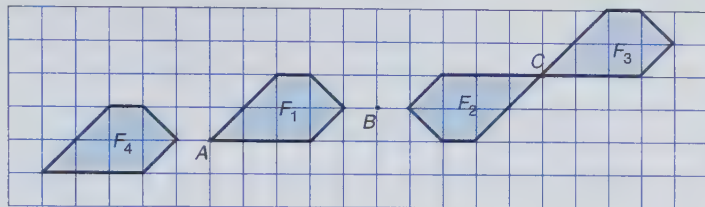


2. a) Voir la figure ci-après.

b) La composée de la symétrie de centre A suivie de celle de centre B est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$. En utilisant le théorème réciproque de la droite des milieux, appliqué au triangle $CC'C''$, on peut en déduire le parallélisme des droites (CC'') et (AB) .



3.



a) L'image de A est le point C car B est le milieu de $[AC]$.

b) Voir figure.

c) On passe de F_1 à F_3 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$s_B(A) = C$ et $s_C(C) = A$. L'image de A par s_B suivie de s_C est le point C , et la composée de deux symétries centrales est une translation.

d) L'image de F_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ est F_4 et l'image de F_4 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est F_1 car la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire la translation de vecteur nul. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ car B est le milieu de $[AC]$.

La figure F_1 est invariante par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

TEST : 1C ; 2B ; 3C ; 4B ; 5A ; 6A ; 7B.

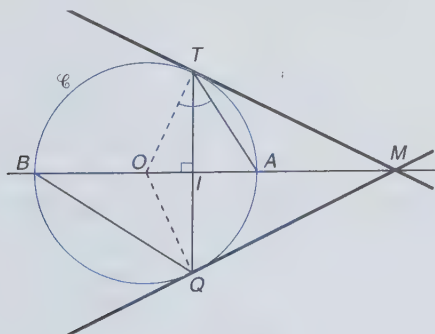
p. 176

24 Angles inscrits

p. 181

1. Les angles inscrits $\widehat{ATQ}$ et $\widehat{ABQ}$ interceptent le même arc $[AQ]$, ils ont donc la même mesure.

Les angles inscrits $\widehat{TAB}$ et $\widehat{TQB}$ interceptent le même arc de cercle $[BT]$, ils ont donc la même mesure.



Le triangle MOQ est rectangle en Q car (MQ) est tangente au cercle en Q et $[OQ]$ est un rayon donc $\widehat{OMQ} + \widehat{MOQ} = 90^\circ$; de plus $\widehat{OMQ} = \frac{\alpha}{2}$ car (MO) est la bissectrice de $\widehat{TMQ}$:

$$(OT) \perp (MT) ; (OQ) \perp (MQ) \text{ et } OT = OQ = R.$$

Par suite $\widehat{MOQ} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

$\widehat{MOQ}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc $[AQ]$ que $\widehat{ABQ}$ donc $\widehat{MOQ} = 2\widehat{ABQ}$; par suite

$$\frac{\widehat{MOQ}}{2} = \widehat{ABQ} = \widehat{ATQ} = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}.$$

Dans le triangle BQI rectangle en I , $\widehat{ABQ} + \widehat{BQT} = 90^\circ$ donc

$$\widehat{BQT} = 90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) \text{ et } \widehat{BQT} = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}.$$

2. a) b) $\widehat{xOy}$ est un angle plat donc $\widehat{xOy} = 180^\circ$.

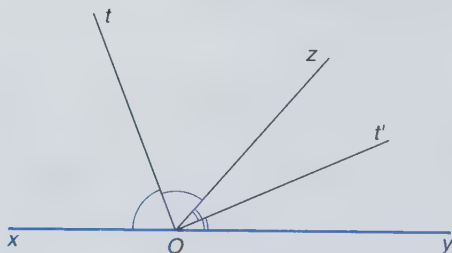
De plus $\widehat{xOz}$ et $\widehat{zOy}$ sont des angles adjacents donc $\widehat{xOz} + \widehat{zOy} = 180^\circ$.

De même, $\widehat{tOz}$ et $\widehat{zOt'}$ sont adjacents, donc

$$\widehat{tOz} + \widehat{zOt'} = \widehat{tOt'}.$$

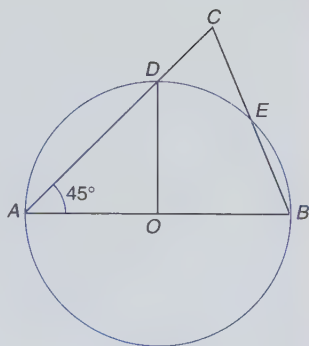
$$\text{Or } \widehat{tOz} = \frac{1}{2}(\widehat{xOz}) \text{ et } \widehat{zOt'} = \frac{1}{2}(\widehat{zOy})$$

$$\text{donc } \widehat{tOt'} = \frac{1}{2}\widehat{xOz} + \frac{1}{2}\widehat{zOy} = 90^\circ.$$



3. L'angle $\widehat{DAB}$ est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$; il intercepte l'arc $[\widehat{DB}]$, or $\widehat{DOB}$ est un angle au centre qui intercepte le même arc $[\widehat{DB}]$ que $\widehat{DAB}$ donc $\widehat{DOB} = 2 \widehat{DAB}$.

Par ailleurs D appartient à $[AC]$ donc $\widehat{DAB} = \widehat{CAB} = 45^\circ$; par suite, $\widehat{DOB} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$. On en déduit que les droites (OD) et (AB) sont perpendiculaires.



4. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont inscrits dans le même cercle et ont une corde commune $[AC]$, leurs sommets B et D étant situés de part et d'autre de $[AC]$; alors

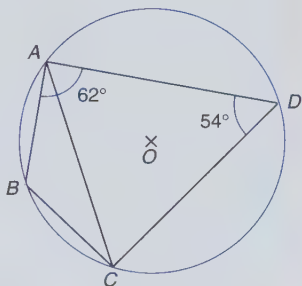
$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ \text{ soit}$$

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC} ;$$

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ.$$

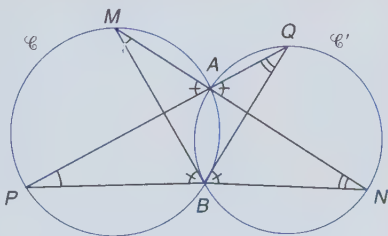
De même, les angles inscrits $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ ont la corde $[BD]$ en commun et ont leurs sommets A et C de part et d'autre de cette corde ; donc

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ \text{ soit } \widehat{BCD} = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ.$$



5. Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{APB}$ sont inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ et interceptent le même arc $[\widehat{AB}]$ donc $\widehat{AMB} = \widehat{APB}$; or A appartient à (MN) et (PQ) donc $\widehat{NMB} = \widehat{QPB}$.

Les angles $\widehat{AQB}$ et $\widehat{ANB}$ sont inscrits dans le cercle $\mathcal{C}'$ et interceptent le même arc $[\widehat{AB}]$ donc $\widehat{AQB} = \widehat{ANB}$; or A appartient à (QP) et (MN) donc $\widehat{PQB} = \widehat{MNB}$.



Par ailleurs, $\widehat{MAP} = \widehat{MBP}$ (angles inscrits du cercle $\mathcal{C}$ interceptant le même arc $[MP]$) et $\widehat{QAN} = \widehat{QBN}$ (angles inscrits du cercle $\mathcal{C}'$ interceptant le même arc $[QN]$) et, de plus, $\widehat{MAP} = \widehat{QAN}$ (angles opposés par le sommet) ; on en déduit que

$$\widehat{MBP} = \widehat{QBN}.$$

$$\text{Or } \widehat{QBP} = \widehat{QBM} + \widehat{MBP} \text{ et } \widehat{MBN} = \widehat{MBQ} + \widehat{QBN}.$$

$$\text{Comme } \widehat{MBP} = \widehat{QBN}, \text{ alors } \widehat{QBP} = \widehat{MBN}.$$

On a ainsi démontré que chaque angle du triangle MNB est égal à un angle du triangle PQB .

6. Le trapèze $ABCD$ est isocèle, car $AD = BC$

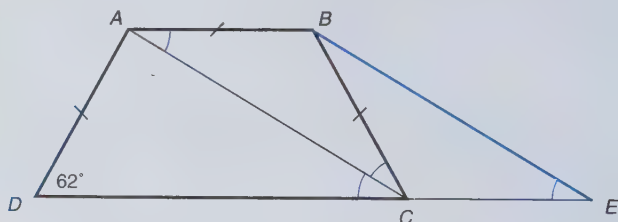
donc $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 62^\circ$ pour des raisons de symétrie.

Par ailleurs, $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ car ABC est isocèle par hypothèse et de plus $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ (angles alternes-internes déterminés par les parallèles (AB) et (DC) et la sécante (AC)),

$$\text{donc } \widehat{BCA} = \widehat{ACD} = \frac{1}{2}(62^\circ) = 31^\circ.$$

Enfin, $\widehat{ACB} = \widehat{CBE}$ (angles alternes-internes déterminés par les parallèles (AC) et (BE) et la sécante (BC)) et $\widehat{BEC} = \widehat{ACD}$ (angles correspondants déterminés par les parallèles (AC) et (BE) et la sécante (DC)).

Des trois égalités précédentes, on déduit que $\widehat{BEC} = \widehat{CBE} = 31^\circ$;
par suite $\widehat{BCE} = 180^\circ - 2 \widehat{BEC}$ soit $\widehat{BCE} = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$.



TEST : 1A ; 2B ; 3B ; 4A ; 5A ; 6A ; 7B.

p. 182

*C*omment
démontrer
que...

COMMENT DÉMONTRER QUE...

1 Comment démontrer une égalité ?

Pour démontrer que $a = b$ (a et b représentant aussi bien des nombres que des vecteurs ou que des expressions algébriques) :

- on part de a et après transformations on arrive à b :

$$a = \dots = \dots = b ;$$

- on part de b et après transformations on arrive à a :

$$b = \dots = \dots = a ;$$

- on part de $a - b$ ou de $b - a$ et après transformations on doit arriver à zéro ;

- si $b \neq 0$, on peut démontrer que $\frac{a}{b} = 1$;

- on part de a , on transforme et on arrive à c ; puis on part de b et après transformations on arrive à c d'où, par transitivité de l'égalité, on obtient $a = b$:

$$\left. \begin{array}{l} a = \dots = \dots = c \\ b = \dots = \dots = c \end{array} \right\} \text{ donc } a = b.$$

2 Comment démontrer que trois points sont alignés ?

Les points A , B et C sont alignés si :

- connaissant par exemple une équation de la droite (AB) , les coordonnées du point C vérifient l'équation de (AB) ;
- les droites (AB) et (AC) sont parallèles (ou (BA) et (BC) ou (CA) et (CB)) ;
- par exemple $\widehat{ABC}$ mesure 180° , ou bien $\widehat{ACB}$ mesure 0° ;
- $AB + BC = AC$ alors B appartient au segment $[AC]$.

3 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?

Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou bien $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, etc.
- $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu ;
- $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$;
- le quadrilatère est non croisé et admet un centre de symétrie ;
- $ABCD$ est non croisé et $(AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD$.

4 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle ?

Un quadrilatère $ABCD$ est un rectangle si :

- $ABCD$ est un parallélogramme et a un angle droit ;
- $ABCD$ est un parallélogramme et les diagonales de même longueur ;
- $ABCD$ est un parallélogramme inscriptible dans un cercle ;
- trois au moins de ses angles sont droits ;
- il a deux axes de symétrie qui sont les médiatrices des côtés opposés.

5 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un losange ?

Un quadrilatère $ABCD$ est un losange si :

- $ABCD$ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur ;
- $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont des supports perpendiculaires ;
- les quatre côtés ont la même longueur ;
- les supports des diagonales sont des axes de symétrie ;
- (BD) est médiatrice de $[AC]$ et (AC) est médiatrice de $[BD]$.

6 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un carré ?

Un carré étant à la fois un rectangle et un losange, on utilise les conditions précédentes.

7 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un trapèze ?

Un quadrilatère $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$ est un trapèze si :

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles (voir n° 11, p. 244).

Le trapèze $ABCD$ est isocèle si :

- $AD = BC$ (voir n° 14, p. 245) ;
- $[AB]$ et $[CD]$ ont une médiatrice commune.

Le trapèze $ABCD$ est rectangle si :

- $(AB) \perp (AD)$ (voir n° 12, p. 244).

8 Comment démontrer qu'un triangle est isocèle ?

Un triangle ABC est isocèle en A si :

- $AB = AC$;
- A appartient à la médiatrice de $[BC]$;
- il admet un axe de symétrie passant par A ;
- $\widehat{CBA} = \widehat{ACB}$;
- deux des quatre droites suivantes sont confondues : la hauteur (AH), la médiatrice de $[BC]$, la médiane relative à $[BC]$ et la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

9 Comment démontrer qu'un triangle est équilatéral ?

Un triangle ABC est équilatéral si :

- $AB = BC = CA$;
- $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ (deux de ces égalités suffisent) ;
- il admet trois axes de symétrie passant chacun par un des sommets du triangle ;
- deux des points suivants sont confondus : le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit, l'orthocentre et le centre de gravité.

10 Comment démontrer qu'un triangle est rectangle ?

Un triangle ABC dont H est le projeté orthogonal de A sur (BC) est rectangle en A si :

- $(AB) \perp (AC)$;
- $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ou bien $BA^2 = BH \cdot BC$ ou bien $CA^2 = CH \cdot CB$ ou bien $AH^2 = HB \cdot HC$ ou bien $AH \cdot BC = AB \cdot AC$;
- il est inscrit dans un cercle dont un diamètre est $[BC]$;
- $\widehat{BAC} = 90^\circ$;
- $\cos \widehat{BAC} = 0$ ou bien $\sin \widehat{BAC} = 1$;
- M est le milieu de $[BC]$ et $AM = \frac{1}{2} BC$.

11 Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si :

- (AB) et (CD) sont parallèles à une même droite ;
- (AB) et (CD) sont perpendiculaires à une même droite ;
- (AB) et (CD) sont les supports des côtés d'un parallélogramme ;
- (AC) et (BD) sont sécantes en E et si d'après la réciproque du

théorème de Thalès : $\frac{EA}{EC} = \frac{EB}{ED}$;

- dans un triangle ECD , A est le milieu de $[EC]$ et B le milieu de $[ED]$;
- $t_{\vec{u}}(A) = C$ et $t_{\vec{u}}(B) = D$;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ou bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
- S_o est la symétrie de centre O et $S_o(A) = D$ et $S_o(B) = C$;
- (AB) et (CD) sont les images de deux droites parallèles par une transformation ;
- dans un repère les droites ont même coefficient directeur.

12 Comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?

Deux droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires si :

- $\widehat{ABC}$ est un angle droit ;
- $AB^2 + BC^2 = AC^2$ d'après la réciproque de Pythagore ;
- B est un point du demi-cercle de diamètre $[AC]$;
- $[BA]$ est un rayon d'un cercle et (BC) est tangente en B au cercle ;
- elles sont respectivement perpendiculaires à deux droites perpendiculaires.

Deux droites D et D' sont perpendiculaires si :

- $\left. \begin{array}{l} D \parallel D'' \\ D' \perp D'' \end{array} \right\} \text{ donc } D \perp D'$;
- elles sont images par une transformation de droites perpendiculaires ;
- D est la médiatrice d'un segment porté par D' ;
- dans un triangle, D est la hauteur relative à un côté porté par D' ;
- elles portent les diagonales d'un losange ou d'un carré.

13 Comment démontrer qu'un point est centre du cercle circonscrit à un triangle ?

Le point O est centre du cercle circonscrit au triangle ABC si :

- $OA = OB = OC$;
- O appartient à l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$;
- le triangle est rectangle et si O est le milieu de l'hypoténuse.

14 Comment démontrer que deux segments ont même longueur ?

Deux segments $[AB]$ et $[CD]$ ont même longueur si :

- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même longueur ;
- $[AB]$ et $[CD]$ sont images l'un de l'autre par une transformation ;
- ce sont les côtés opposés d'un parallélogramme ;
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ou opposés ;
- dans un repère orthonormé, connaissant les coordonnées des points on a $AB = CD$.

Deux segments $[IA]$ et $[IB]$ ont même longueur si :

- le point I est le milieu de $[AB]$ (se reporter aux différentes façons de démontrer qu'un point est le milieu d'un segment) ;
- le triangle AIB est isocèle en I ou équilatéral ;
- le point I appartient à la médiatrice de $[AB]$;
- le point I est le milieu de l'hypoténuse $[AC]$ d'un triangle ABC rectangle en B .

15 Comment démontrer qu'un point est le milieu d'un segment ?

Le point M est le milieu du segment $[AB]$ si :

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$;
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$;

- dans un repère (O, I, J)

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = x_M \\ \frac{y_A + y_B}{2} = y_M \end{cases}$$

- le point M est l'image par une projection ou une transformation du milieu d'un segment ;
- le point M appartient à (AB) et $AM = MB$.

16 Comment démontrer que quatre points appartiennent à un même cercle ?

Les quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle si :

- ils sont les sommets d'un rectangle, d'un carré ou d'un trapèze isocèle ;
- les triangles ADC et ABC sont rectangles et ont la même hypoténuse $[AC]$;
- $OA = OB = OC = OD$ (le point O est alors le centre du cercle passant par ces quatre points).

17 Comment démontrer que deux droites sont sécantes ?

Les droites D et D' sont sécantes si :

- elles ne sont pas parallèles ;
- $D : y = mx + p$ et $D' : y = m'x + p'$ et $m \neq m'$;
- les deux droites étant données par leurs équations, un point et un seul a ses coordonnées vérifiant les deux équations ;
- l'ensemble formé par ces deux droites admet au plus quatre axes de symétrie.

Lexique

LEXIQUE

Abscisse

Première coordonnée d'un point situé dans un repère.

Adjacents (angles)

Deux angles sont adjacents si ils ont un côté commun, le même sommet et si leur intersection est réduite au côté commun.

Aigu (angle)

$\widehat{xOy}$ est un angle aigu si (en degrés)

$$0 < \widehat{xOy} < 90.$$

Aire

Nombre positif associé à une surface dans une unité donnée.

Algorithme

Suite de règles à appliquer pour obtenir un certain résultat.

Alignés

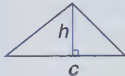
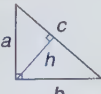
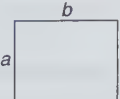
Se dit de points appartenant à une même droite.

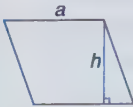
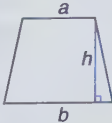
Amplitude

Si le nombre x est tel que $a \leq x \leq b$, alors l'amplitude de l'encadrement est égale à $b - a$.

Analytique

Relatif à la géométrie utilisant un repère et des coordonnées.

Nature	Triangle quelconque	Triangle rectangle	Carré	Rectangle
Figure				
Aire	$\frac{h \times c}{2}$	$\frac{ab}{2} = \frac{hc}{2}$	a^2	ab

Nature	Parallélogramme	Trapeze	Disque	Sphère
Figure				
Aire	ah	$\frac{(a + b) h}{2}$	πr^2	$4\pi r^2$

Arc

Partie de cercle.

Arête

Segment de l'espace joignant deux sommets consécutifs d'un solide.

Axe

Se dit d'une droite munie d'un repère.

Base

Désigne aussi bien un côté d'un triangle dans le plan qu'une surface plane d'un solide dans l'espace.

Bissectrice

Demi-droite partageant un angle en deux angles adjacents de même mesure.

Carré

Quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange.

Carré d'un nombre

Nombre multiplié par lui-même.

Centre

- **d'un cercle** : point situé à égale distance de tous les points d'un cercle ;
- **d'une symétrie centrale** : milieu de tous les segments joignant un point et son image par une symétrie ;
- **de gravité** : point de concours des médianes d'un triangle.

Cercle

Ensemble des points situés à la même distance d'un point appelé centre.

Circonférence

Longueur d'un cercle.

Circonscrit

Se dit d'un cercle passant par les sommets d'une figure.

Coefficient

- **de proportionnalité** : liant deux grandeurs algébriques ;
- **directeur** caractérisant une droite dont on connaît deux points d'abscisses distinctes.

Complémentaires (angles)

Deux angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{zMt}$ sont complémentaires si (*en degrés*)
 $\widehat{xOy} + \widehat{zMt} = 90$.

Concentriques

Se dit de deux cercles ayant le même centre.

Concourantes

Caractérise des droites ayant un seul point commun.

Conjecturer

Émettre une hypothèse.

Construire

Réaliser une figure à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

Coordonnées

Nombres permettant de déterminer la position d'un point dans un repère. Dans le plan un point a deux coordonnées.

Coplanaires

Se dit de points ou d'ensembles contenus dans un même plan.

Corde

Segment joignant deux points d'un cercle.

Côtés

- Segment joignant deux sommets consécutifs d'un polygone.
- Demi-droite délimitant un angle.

Couple

(x, y) est un couple ; si $x \neq y$, alors $(x, y) \neq (y, x)$.

Degré

- Unité de mesure des angles. À un angle plat est associé 180° .
- D'une expression algébrique : valeur la plus grande de l'exposant de la variable.

Développer

Écrire une expression littérale sous forme d'une somme algébrique.

Diagonale

Segment joignant deux côtés non consécutifs d'un polygone.

Diamètre

- Corde d'un cercle contenant le centre.
- Longueur d'une corde passant par le centre.

Direction

Ensemble de droites parallèles entre elles.

Disque

Ensemble des points situés à une distance inférieure à un nombre R donné, d'un point fixé appelé centre.

Distincts

Se dit d'éléments non confondus.

Égalité (numérique)

Relation liant deux expressions mathématiques ayant la même valeur.

Encadrement d'un réel a

Double inégalité vérifiée par a et dont l'amplitude est la différence entre les valeurs extrêmes susceptibles d'être prises par a .

Équation

Égalité dans laquelle figurent une ou plusieurs inconnues.

Équidistants

Caractérise des points situés à égale distance, d'un point, de deux points, de trois points.

Exposant

Dans l'écriture a^n (a non nul et n entier), le nombre n est l'exposant.

Expression analytique

Traduction algébrique d'une propriété géométrique.

Facteurs

Termes d'un produit.

Factoriser

Écrire une expression littérale sous forme d'un produit de facteurs.

Hauteur

- Demi-droite issue d'un sommet d'un triangle et perpendiculaire à la droite portant le côté opposé à ce sommet.
- Demi-droite issue d'un sommet d'un solide et perpendiculaire à la surface opposée à ce sommet.

Hypoténuse

Côté opposé au secteur angulaire droit d'un triangle rectangle.

Hypothèses

Données d'un texte permettant l'élaboration d'une démonstration.

Impair

- Nombre entier s'écrivant $2k + 1$ où k est un entier.
- Nombre entier dont le chiffre des unités est 1 - 3 - 5 - 7 ou 9.

Inconnue

Lettre figurant dans une équation, représentant un nombre dont on cherche à déterminer les valeurs pour que l'égalité soit vraie.

Indice

Nombre figurant en bas et à droite d'une lettre.

Inégalité (numérique)

Phrase mathématique utilisant un des symboles : $<$; $>$; $\leq$; $\geq$.

Rappel : $<$ ($>$) se lit « strictement inférieur (supérieur) » ;

$\leq$ ($\geq$) se lit « inférieur (supérieur) ».

Intersection

Points communs à des ensembles.

Invariance d'une figure

Se dit d'une figure dont l'image par une transformation géométrique est elle-même.

Isocèle

Caractérise :

- un triangle ayant deux côtés de même longueur ;
- un trapèze dont les côtés non parallèles ont même longueur.

Littérale

Se dit d'une écriture dans laquelle figurent des lettres.

Médiane

- Segment d'un triangle joignant un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.
- Caractère spécifique dans une série statistique (voir p. 104).

Médiatrice (d'un segment)

Ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment.

La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire au support de ce segment, passant par le milieu du segment.

Obtus (angle)

$\widehat{xOy}$ est un angle obtus si (*en degrés*) $90 < \widehat{xOy} < 180$.

Opposés

- Deux nombres opposés ont une somme nulle.
- Deux points sont diamétralement opposés s'ils sont les extrémités du diamètre d'un même cercle.

Ordonnée

Deuxième coordonnée d'un point situé dans un repère.

Orthocentre

Point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle.

Pair

- Nombre entier multiple de deux.
- Nombre entier dont le chiffre des unités est 0 - 2 - 4 - 6 ou 8.

Parallélogramme

Quadrilatère dont les supports des côtés opposés sont parallèles ; quadrilatère dont les diagonales ont même milieu.

Patron

Surface plane permettant de réaliser un solide.

Pavage

Juxtaposition de motifs identiques.

Pente

Coefficient directeur d'une droite dans un repère orthonormé.

Plan

Ensemble de points déterminé par trois points non alignés ou bien deux droites sécantes ou bien une droite et un point n'appartenant pas à cette droite ou bien deux droites strictement parallèles.

Point

Intersection de deux droites non parallèles.

Polygone

Ligne brisée fermée.

Prisme

Solide dont les faces latérales sont des rectangles et les bases des polygones superposables.

Proportionnalité

Les suites (a, b) et (c, d) sont proportionnelles ($cd \neq 0$), s'il existe un nombre k tel que

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k.$$

Projection

Étant donné deux droites D et D' sécantes, la projection du plan P sur la droite D' parallèlement à D est l'action qui permet de passer d'un point M de P à un point M' de D' , tel que la droite (MM') soit parallèle à la droite D .

Puissance

Le nombre écrit sous la forme a^n (a non nul et n entier) est la puissance $n^{\text{ième}}$ du nombre a .

Quotient $\frac{a}{b}$

Nombre résultant de la division de a par b (non nul).

Rayon

- Segment joignant un point d'un cercle et son centre.
- Longueur d'un tel segment.

Régulier

Se dit d'un polygone ou d'un solide dont les côtés ou les arêtes ont même longueur.

Repère normé d'une droite

Détermine une graduation dont le pas est égal à une unité de longueur.

Scalène

Caractérise un triangle dont les côtés sont de longueurs différentes.

Sécants

Se dit d'ensembles ayant des points communs.

Section

Ensemble des points communs à un plan et à un solide de l'espace.

Solutions (d'une équation ou d'une inéquation ou d'un système)

Nombres ou couples de nombres rendant vraie une égalité ou une inégalité ou un système.

Somme

Résultat d'une addition.

Supplémentaires (angles)

Deux angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{zMt}$ sont supplémentaires, si, *en degrés*, $\widehat{xOy} + \widehat{zMt} = 180$.

Surface latérale

Ensemble des points appartenant à l'enveloppe d'un solide, en excluant ceux des bases.

Symétrique

Caractérise des points images l'un de l'autre par une symétrie.

Systèmes d'équations ou d'inéquations

Équations ou inéquations dont les solutions vérifient chacune des équations ou des inéquations.

Tangente (à un cercle en A)

Droite perpendiculaire en A à la droite joignant le centre du cercle et le point A .

Tétraèdre

Solide ayant quatre faces triangulaires.

Théorème

Énoncé ou relation auxquels on peut faire référence dans une démonstration.

Transformation

Action dans un plan permettant de passer d'un point à un autre.

Trigonométrie

Signifie « mesure des angles d'un triangle ».

Tronc

Solide résultant de la section par un plan d'un cône ou d'une pyramide.

Troncature

Consiste à couper la suite décimale illimitée d'un nombre et à n'en garder qu'une partie.

Unicité (d'un élément)

Caractérise l'existence d'un élément et d'un seul.

N° éditeur : 10124369 - Laser Graphic

Septembre 2005

Imprimé en France par I.M.E. - 25110 Baume-les-Dames

Mathématiques 3^e

- Des rappels de cours développés, avec de nombreux conseils et remarques
- Des exemples résolus illustrant les méthodes à appliquer
- Des fiches méthode "Comment démontrer que" à consulter à tout moment
- Des tests et des exercices, pour évaluer vos connaissances et vous entraîner
- Tous les corrigés détaillés en fin d'ouvrage.

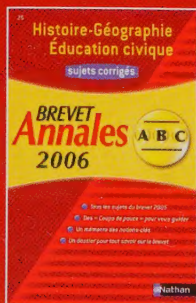
Le Guide

A B C
brevet

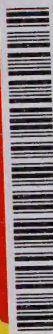
Titres disponibles en Troisième

- Français
- Histoire-Géographie-Éducation civique
- Mathématiques
- Physique-Chimie
- Anglais

Collection conçue à l'origine par Denis Huisman



Pour se préparer aux épreuves,
Les Annales ABC
Toutes les annales du brevet,
avec ou sans corrigés.



KQ-811-666



Nathan