

Alain Gastineau

La géométrie

Librio

2€

- Tous les théorèmes expliqués, dès la 6^e
- Des exemples clairs, illustrés de figures géométriques
- Des exercices pour s'entraîner

Mémo
Inédit



La géométrie

DANS LA MÊME COLLECTION

- Conjugaison française*, Libro n° 470
Grammaire française, Libro n° 534
Conjugaison anglaise, Libro n° 558
Le calcul, Libro n° 595
Orthographe française, Libro n° 596
Grammaire anglaise, Libro n° 601
Solfège, Libro n° 602
Difficultés du français, Libro n° 642
Vocabulaire anglais courant, Libro n° 643
Conjugaison espagnole, Libro n° 644
Dictées pour progresser, Libro n° 653
Dictionnaire des rimes, Libro n° 671
Le français est un jeu, Libro n° 672
Jeux de cartes, jeux de dés, Libro n° 705
Figures de style, Libro n° 710
Mouvements littéraires, Libro n° 711
Grammaire espagnole, Libro n° 712
Latin pour débutants, Libro n° 713
Formulaire de mathématiques, Libro n° 756
La cuisse de Jupiter, Libro n° 757
Maths pratiques, maths magiques, Libro n° 763
Le dico de la philo, Libro n° 767
Le mot juste, Libro n° 772
Chronologie universelle, Libro n° 773

Alain Gastineau

La géométrie

Librio
Inédit

ALAN COOPER

La géométrie

Sommaire

I. Les généralités	7
1. Le plan, les droites, les points	7
2. Le parallélisme et l'orthogonalité	8
3. La médiatrice d'un segment	10
4. Les angles	13
II. Les triangles	19
1. Les généralités	19
2. Les triangles particuliers	19
a. Le triangle isocèle	19
b. Le triangle équilatéral	20
c. Le triangle rectangle	20
3. Les angles d'un triangle	20
4. Les médiatrices d'un triangle	22
5. Les médianes d'un triangle	22
6. Les hauteurs d'un triangle	23
7. Les bissectrices d'un triangle	23
8. La droite d'Euler	24
9. Le cercle d'Euler ou cercle des neuf points	24
10. La droite de Simson	25
11. L'aire d'un triangle	26
III. Les quadrilatères convexes	27
1. Les généralités	27
2. Le trapèze	27
3. Le parallélogramme	29
4. Le rectangle	30
5. Le losange	31
6. Le carré	33
IV. Les polygones	35

V. Le cercle	37
VI. Le théorème de Pythagore	41
1. Énoncé du théorème de Pythagore	41
2. La réciproque du théorème de Pythagore	43
VII. Le théorème de Thalès	45
1. Énoncé du théorème de Thalès	45
2. La réciproque du théorème de Thalès	50
VIII. La trigonométrie	53
IX. Les transformations	57
1. Les symétries centrales	57
2. Les symétries axiales	58
3. Les rotations	59
4. Les translations	60
X. La géométrie analytique	63
1. Repère d'une droite	63
2. Repère d'un plan	64
3. Les équations de droites	67
XI. Les vecteurs	73
1. Les généralités	73
2. La somme de deux vecteurs	74
XII. La géométrie dans l'espace	77
1. Les polyèdres	77
2. Les prismes	78
3. Les pyramides	81
4. Les cylindres de révolution	83
5. Les cônes de révolution	84
6. La sphère	85
7. Les solides de Platon	86
XIII. Compléments sur les mesures	89
1. Les mesures des longueurs	89
2. Les mesures des surfaces	89
3. Les mesures des volumes	90
XIV. Le flocon de Von Koch	93

I

Les généralités

*« En géométrie,
il n'y a pas de chemin réservé aux rois. »*

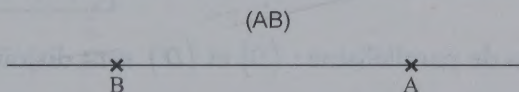
Euclide

1. Le plan, les droites, les points

Définitions

Il existe un ensemble, appelé **plan**, dont les éléments sont appelés **points**.

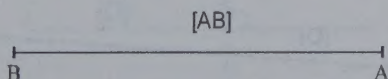
Étant donné deux points distincts A et B , il existe une et une seule **droite** contenant A et B . On la note (AB) ou (BA) .



Remarque : Une droite peut aussi se nommer (D) ou (xy) .

Le **segment** $[AB]$ est l'ensemble des points de la droite (AB) situés entre A et B .

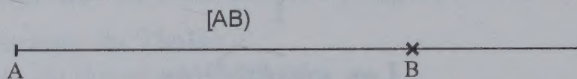
A et B s'appellent les **extrémités** du segment.



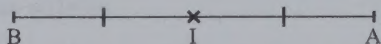
Un point partage une droite en deux **demi-droites**.

La demi-droite $[AB)$ est celle qui contient le point B .

A s'appelle l'**origine** de la demi-droite $[AB)$.



Le **milieu** I d'un segment $[AB]$ est le point du segment situé à égale distance de A et B .

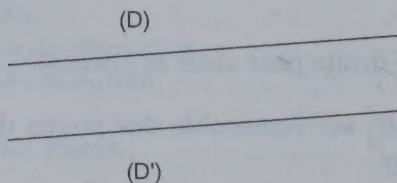


2. Le parallélisme et l'orthogonalité

Définition

Deux droites (D) et (D') sont dites **parallèles** si, et seulement si, elles n'ont aucun point en commun (on dit alors qu'elles sont disjointes) ou si elles sont confondues. On écrit $(D) \parallel (D')$.

- Premier cas de parallélisme : (D) et (D') sont disjointes.

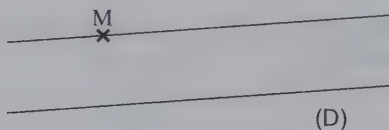


- Deuxième cas de parallélisme : (D) et (D') sont confondues.



Axiome

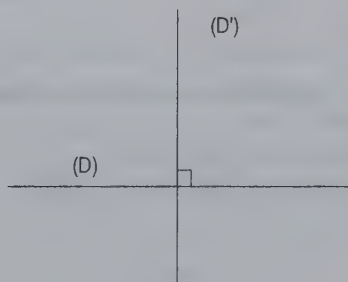
Soit (D) une droite et M un point quelconque du plan. Par le point M il passe une et une seule droite parallèle à (D) .



Définition

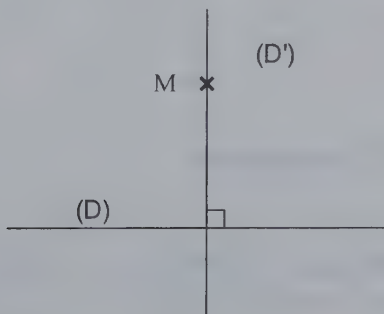
Deux droites (D) et (D') sont dites **perpendiculaires** si, et seulement si, elles se coupent en formant un angle droit.

On écrit $\boxed{(D) \perp (D')}$.



Axiome

Soit (D) une droite et M un point quelconque du plan. Par le point M il passe une et une seule droite (D') perpendiculaire à (D) .

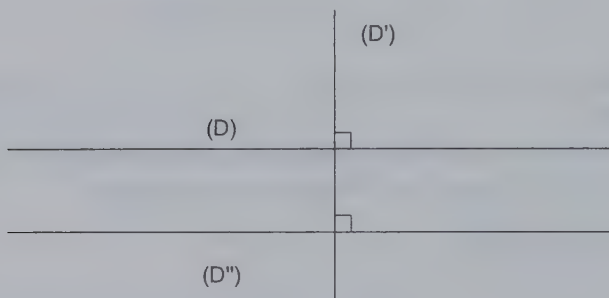


Théorèmes

- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

Écriture mathématique du théorème :

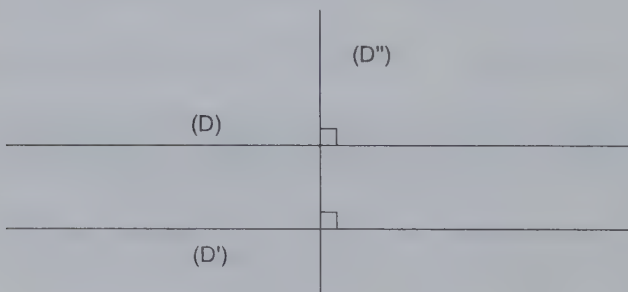
$$(D) \perp (D') \text{ et } (D'') \perp (D') \Rightarrow (D) \parallel (D'')$$



- Si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Écriture mathématique du théorème :

$$(D) \parallel (D') \text{ et } (D'') \perp (D') \Rightarrow (D'') \perp (D)$$

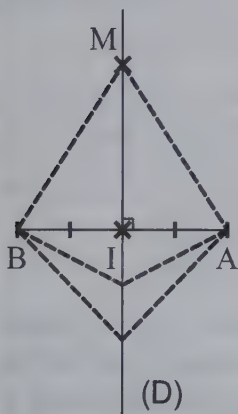


3. La médiatrice d'un segment

Définitions

La **médiatrice** du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu de $[AB]$.

Une autre définition est : la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.



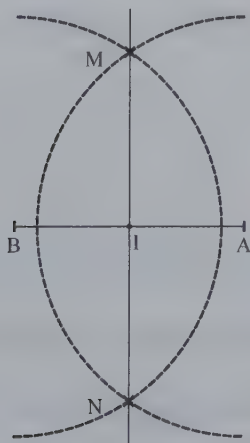
Dire que M est équidistant des extrémités du segment $[AB]$ signifie que $MA = MB$.

(D) est la médiatrice du segment $[AB]$.

Remarque : la médiatrice du segment $[AB]$ partage le plan en deux **demi-plans** : l'un contient A et l'autre contient B .

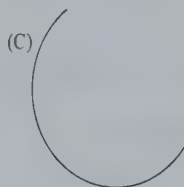
Construction de la médiatrice d'un segment $[AB]$

- On trace un arc de cercle de centre A et de rayon supérieur à IA (I est le milieu de $[AB]$).
- On trace un arc de cercle de centre B et de même rayon que le précédent.
- Les deux arcs de cercle se coupent en M et N .
- La droite (MN) est la médiatrice de $[AB]$.



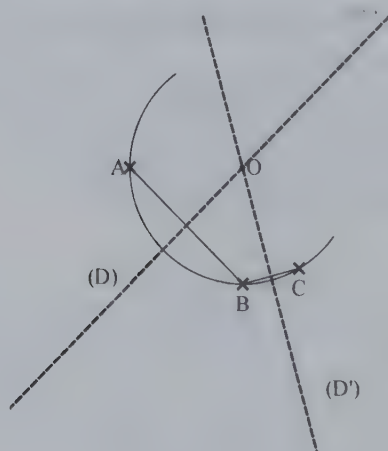
Exercice :

Reconstituer entièrement le cercle (C) qui a été en partie effacé.



Solution :

Soit A , B et C trois points du cercle (C) de centre O . O est à égale distance de A , B et C donc il appartient à la médiatrice de $[AB]$ et de $[BC]$. Il suffit de construire ces deux droites pour déterminer la position de O . On peut alors achever la construction du cercle.



(D) est la médiatrice de $[AB]$ et (D') celle de $[BC]$. Elles se coupent en O .

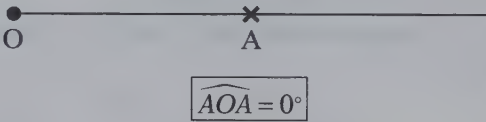
4. Les angles

Définitions

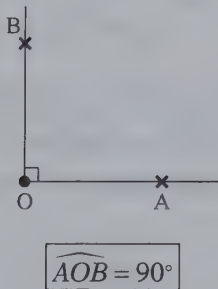
Une unité de mesure d'un angle est le **degré**, noté $^{\circ}$.

Remarque : on écrit $\widehat{BAC} = 36^{\circ}$ mais par abus de notation on écrit aussi $\widehat{BAC} = 36^{\circ}$.

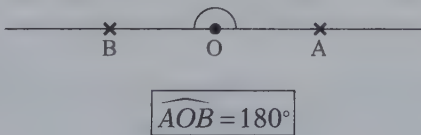
- Un angle qui a pour mesure 0 degré est un **angle nul**.



- Un angle qui a pour mesure 90 degrés est un **angle droit**.

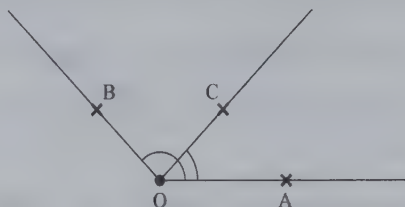


- Un angle qui a pour mesure 180 degrés est un **angle plat**.



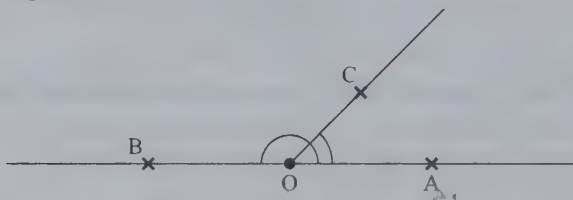
- Un angle qui a une mesure comprise entre 0° et 90° est un angle **aigu**.
- Un angle qui a une mesure comprise entre 90° et 180° est un angle **obtus**.
- Un angle qui a une mesure comprise entre 180° et 360° est un angle **rentrant**.

- Deux angles **adjacents** ont le même sommet, un côté commun ; les autres côtés sont situés de part et d'autre du côté commun.



Les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{COB}$ sont adjacents.

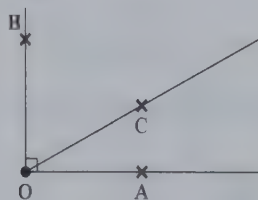
- Des angles sont **supplémentaires** lorsque la somme de leurs mesures égale 180° .



Les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ sont supplémentaires.

$$\widehat{BOC} + \widehat{COA} = 180^\circ.$$

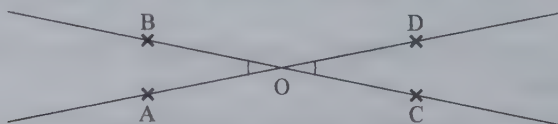
- Des angles sont **complémentaires** lorsque la somme de leurs mesures égale 90° .



Les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ sont complémentaires.

$$\widehat{BOC} + \widehat{COA} = 90^\circ.$$

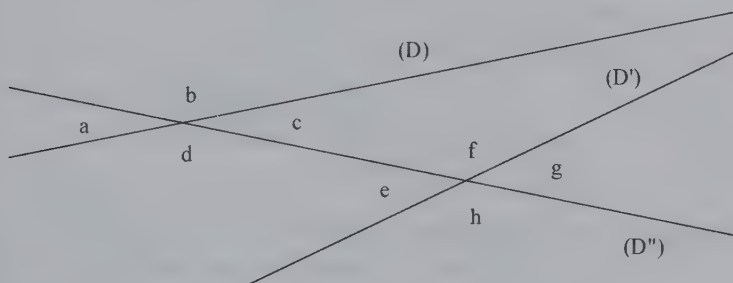
- Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont **opposés** par le sommet.



Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.

- Angles formés par deux droites coupées par une sécante.

Deux droites (D) et (D') sont coupées par une troisième (D'') de façon à déterminer huit angles.



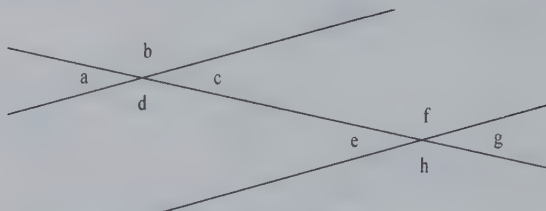
- ♦ Un angle qui est situé à l'intérieur de la partie délimitée par les deux droites (D) et (D') est un angle **interne**. Exemple : les angles c , d , e et f sont internes.
- ♦ Un angle qui est situé à l'extérieur de la partie délimitée par les deux droites (D) et (D') est un angle **externe**. Exemple : les angles a , b , g et h sont externes.
- ♦ Deux angles qui sont de part et d'autre de la sécante sont **alternes**. Exemple : les angles a et f ou b et h sont alternes.
- ♦ Des angles qui sont à la fois alternes et internes sont appelés angles **alternes-internes**. Exemple : les angles d et f sont alternes-internes.
- ♦ Des angles qui sont à la fois alternes et externes sont appelés angles **alternes-externes**. Exemple : les angles a et g sont alternes-externes.
- ♦ Des angles qui sont du même côté de la sécante, l'un interne et l'autre externe sont appelés angles **correspondants**. Exemple : les angles a et e sont correspondants.

Propriétés

Si les deux droites (D) et (D') sont parallèles alors :

- Les angles alternes-internes sont égaux. Exemple : $d = f$ et $c = e$.
- Les angles alternes-externes sont égaux. Exemple : $a = g$ et $b = h$.

- les angles correspondants sont égaux. Exemple : $a=e$, $d=h$, $b=f$ et $c=g$.

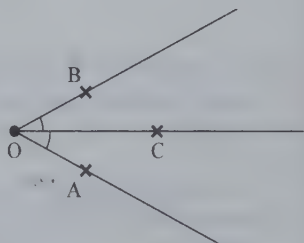


Remarque : la réciproque est vraie.

Définition

La **bissectrice** de l'angle $\widehat{AOB}$ est la demi-droite d'origine O qui partage cet angle en deux angles égaux.

$[OC)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

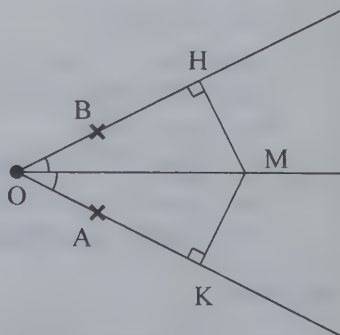


$$\boxed{\widehat{AOC} = \widehat{COB}}.$$

Théorème

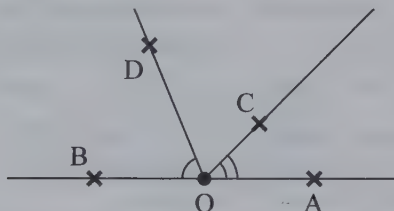
La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points intérieurs équidistants des côtés.

Autrement dit : pour tout point M appartenant à la bissectrice de $\widehat{AOB}$, on a $MH = MK$; et réciproquement.



Exercice :

On considère la figure suivante :



On a $\widehat{BOD} = 67,5^\circ$ et $\widehat{COA} = 45^\circ$.

Montrer que $[OD)$ est la bissectrice de $\widehat{BOC}$.

Solution :

$\widehat{BOD}$, $\widehat{DOC}$ et $\widehat{COA}$ sont supplémentaires donc

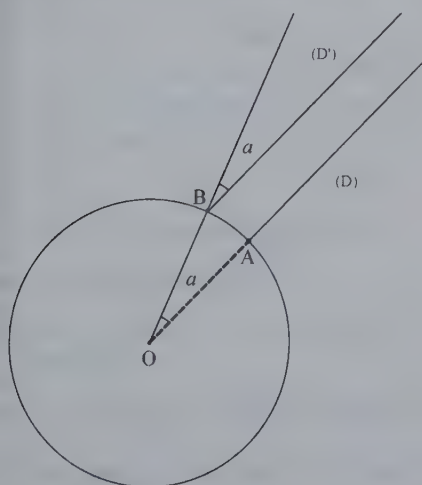
$$\widehat{BOD} + \widehat{DOC} + \widehat{COA} = 180^\circ.$$

$$67,5^\circ + \widehat{DOC} + 45^\circ = 180^\circ.$$

$$\text{Soit } \widehat{DOC} = 180^\circ - 112,5^\circ = 67,5^\circ.$$

$\widehat{BOD} = \widehat{DOC}$ donc $[OD)$ est la bissectrice de $\widehat{BOC}$.

Une utilisation des angles correspondants :
le rayon de la terre calculé par Ératosthène (250 avant J.-C.)



Le soleil à Assouan (symbolisée par le point A) est au zénith donc (D) , symbolisant un rayon du soleil, passe par le centre de la terre. Au même instant, à Alexandrie (symbolisée par le point B) un rayon du soleil (D') fait un angle a avec la verticale (OB) . (D) et (D') sont parallèles donc $\widehat{AOB} = a$ (les angles $\widehat{AOB}$ et a sont correspondants).

Ératosthène mesure l'angle a et trouve $7,15^\circ$. Ensuite il mesure la distance Assouan-Alexandrie et trouve 800 km. On peut alors déterminer la circonférence de la terre.

La longueur d'un arc est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Angle au centre	360	7,15
Longueur de l'arc	L	800

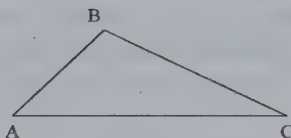
Il obtient $L = \frac{800 \times 360}{7,15}$ soit $L = 40300$ km, puis il en déduit le rayon de la terre en utilisant la formule $L = 2\pi R$.

$$R = \frac{40300}{2 \times 3,14} \text{ d'où } \boxed{R = 6400 \text{ km}}.$$

II

Les triangles

1. Les généralités



Définitions

- A , B et C sont les **sommets** du triangle.
- $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ sont les **côtés** du triangle.
- $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ sont les **angles** du triangle.

Inégalité triangulaire

Soit A , B et C trois points quelconques du plan. La distance entre A et B est inférieure ou égale à la somme de la distance entre A et C et de la distance entre B et C . On écrit $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ ou plus simplement $AB \leq AC + CB$.

2. Les triangles particuliers

a. Le triangle isocèle

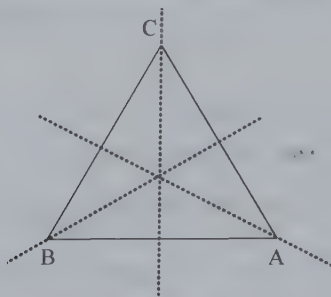
- Un triangle qui a deux côtés de même longueur est un triangle **isocèle**.
- Si ABC est isocèle en A alors $[BC]$ est la base et $AB = AC$.
- Les angles à la base sont égaux donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

- La médiatrice de $[BC]$ est un axe de symétrie du triangle. C'est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, la hauteur et la médiane issues de A .



b. Le triangle équilatéral

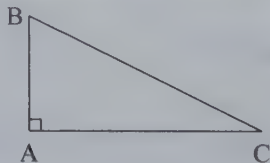
- Un triangle qui a trois côtés de même longueur est un triangle **équilatéral**. Les trois angles sont égaux et valent 60° .
- Les médiatrices des côtés sont les axes de symétrie du triangle.



Remarque : un triangle dont les trois côtés sont inégaux est un triangle **scalène**.

c. Le triangle rectangle

- Un triangle qui a un angle droit est un triangle **rectangle**.
- Si ABC est un triangle rectangle en A alors $[BC]$ est l'**hypoténuse** (c'est le plus grand des trois côtés).



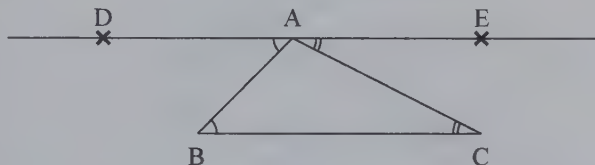
3. Les angles d'un triangle

Dans un triangle ABC la somme des angles égale 180° .

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

Exercice :

Soit ABC un triangle et (DE) la droite passant par A et parallèle à (BC) comme cela est indiqué sur la figure. Montrer que $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$. En déduire que la somme des angles du triangle ABC égale 180° .

Solution :

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles, coupées par la sécante (AB) et les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont alternes-internes donc ils sont égaux : $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$.

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles, coupées par la sécante (AC) et les angles $\widehat{EAC}$ et $\widehat{ACB}$ sont alternes-internes donc ils sont égaux : $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$.

De plus, $\widehat{DAE}$ est un angle plat donc $\widehat{DAE} = 180^\circ$ soit $\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{EAC} = 180^\circ$. En remplaçant $\widehat{DAB}$ par $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EAC}$ par $\widehat{ACB}$, on obtient $\boxed{\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ}$.

Exercice :

Dans un triangle ABC , on a : $\hat{A} = 54^\circ$ et $\hat{B} = 72^\circ$.

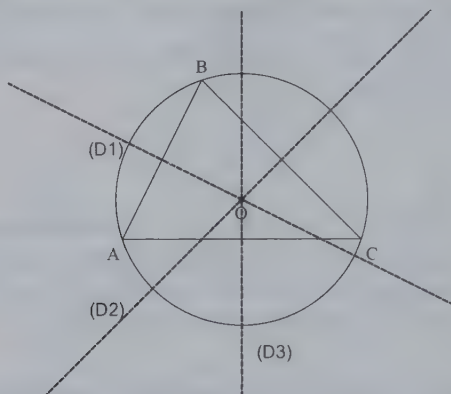
Déterminer la nature du triangle ABC .

Solution :

La somme des angles du triangle égale 180° . $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ donc $54^\circ + 72^\circ + \hat{C} = 180^\circ$ d'où $126^\circ + \hat{C} = 180^\circ$ soit $\boxed{\hat{C} = 54^\circ}$. Comme $\hat{A} = \hat{C}$, on en déduit que ABC est isocèle en B .

4. Les médiatrices d'un triangle

Les trois médiatrices d'un triangle concourent en un même point appelé **centre du cercle circonscrit** au triangle ABC .

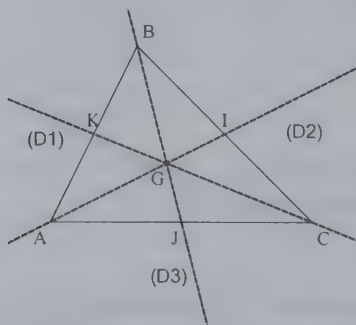


O est le centre du cercle circonscrit. Il est équidistant des sommets du triangle. Les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) sont les médiatrices du triangle.

5. Les médianes d'un triangle

Dans un triangle une **médiane** est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé. Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point appelé **centre de gravité** du triangle.

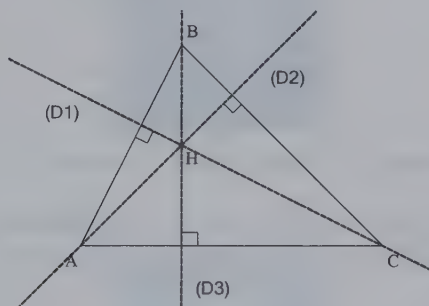
De plus, $AG = \frac{2}{3}AI$, $BG = \frac{2}{3}BJ$, $CG = \frac{2}{3}CK$.



G est le centre de gravité du triangle. Les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) sont les médianes du triangle.

6. Les hauteurs d'un triangle

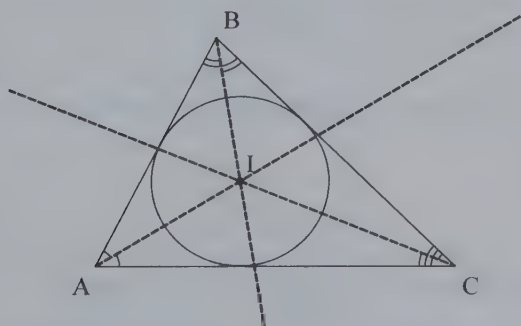
Dans un triangle une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé. Les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point appelé **orthocentre** du triangle.



H est l'orthocentre du triangle. Les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) sont les hauteurs du triangle.

7. Les bissectrices d'un triangle

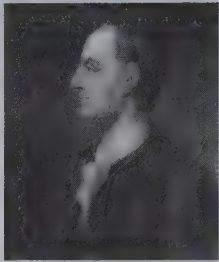
Les trois bissectrices des angles d'un triangle concourent en un même point appelé **centre du cercle inscrit** dans le triangle.



I est le centre du cercle inscrit dans le triangle. $[AI)$, $[BI)$ et $[CI)$ sont les bissectrices du triangle.

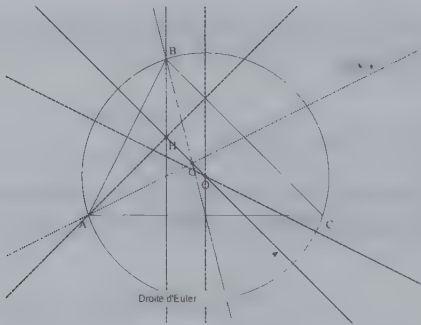
Le cercle inscrit dans le triangle est tangent aux trois côtés du triangle.

8. La droite d'Euler



Leonhard Euler est un mathématicien suisse du XVIII^e siècle.

Dans tout triangle, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre appartiennent à une même droite appelée **droite d'Euler**.



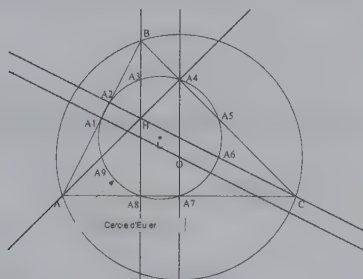
O : centre du cercle circonscrit, G : centre de gravité, H : orthocentre

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OH}$$

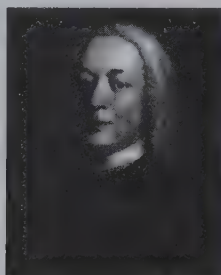
9. Le cercle d'Euler ou cercle des neuf points

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre. On note A_1, A_5, A_7 les milieux des côtés, A_2, A_4, A_8 les pieds des hauteurs et A_3, A_6, A_9 les milieux des segments $[BH], [CH], [AH]$. Le cercle de centre U , milieu de $[OH]$, passant par A_1 , passe aussi par les points $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$.

A7, A8, A9. On l'appelle le cercle d'Euler dont le rayon égale la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

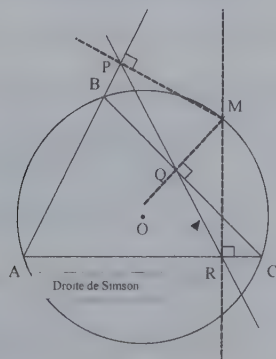


10. La droite de Simson



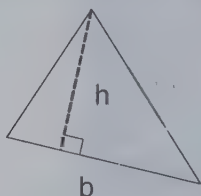
Simson est un mathématicien écossais du XVIII^e siècle.

Soit ABC un triangle et (C) son cercle circonscrit. Soit M un point de (C) . On note P , Q et R les projetés orthogonaux de M sur les côtés du triangle ABC . Les points P , Q et R sont alignés sur une droite appelée droite de Simson.



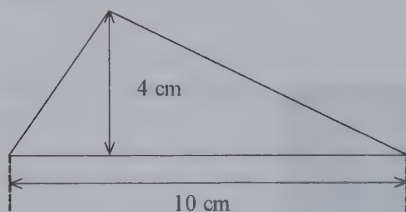
11. L'aire d'un triangle

L'aire d'un triangle égale le demi-produit de la base par la hauteur.



$$S = \frac{b \times h}{2}$$

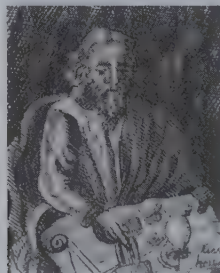
Exemple :



L'aire du triangle est

$$S = \frac{4 \times 10}{2} = \boxed{20 \text{ cm}^2}.$$

La formule de Héron



Héron d'Alexandrie est un mathématicien grec du I^{er} siècle après J.-C.

Soit ABC un triangle et a , b , c les longueurs des côtés du triangle. Notons p le demi-périmètre du triangle.

L'aire du triangle est
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exemple :

L'aire d'un triangle dont les dimensions sont 3 cm, 5 cm et 6 cm est :

$$S = \sqrt{7 \times 4 \times 2 \times 1} = \sqrt{56} \approx \boxed{7,5 \text{ cm}^2}.$$

III

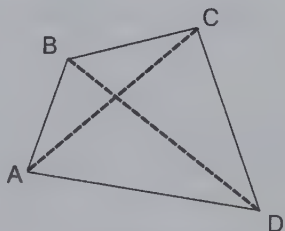
Les quadrilatères convexes

1. Les généralités

Un quadrilatère est convexe lorsque tout segment joignant deux points du quadrilatère reste à l'intérieur de ce quadrilatère.

Si le quadrilatère n'est pas convexe alors il est croisé ou concave. On ne s'intéressera qu'aux quadrilatères convexes.

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe.



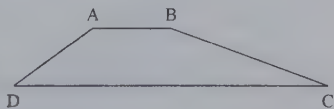
Définitions

- A , B , C et D sont les **sommets** du quadrilatère.
- $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ sont les **côtés**.
- $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDA}$ sont les **angles**.
- $[AC]$ et $[BD]$ sont les **diagonales**.

2. Le trapèze

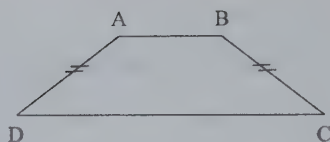
Un **trapèze** est un quadrilatère ayant deux côtés parallèles.

$[AB]$ et $[DC]$ sont les **bases** du trapèze.



Le trapèze isocèle

Lorsque les deux côtés non parallèles d'un trapèze ont la même longueur, on dit que le trapèze est **isocèle**.



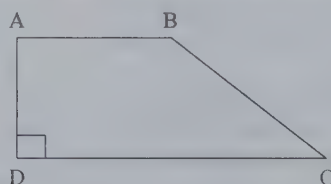
$$AD = BC$$

Remarque : les angles à la base sont égaux.

$$\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$$

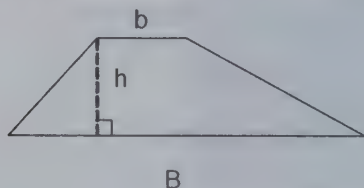
Le trapèze rectangle

Un trapèze possédant un angle droit est un trapèze rectangle.



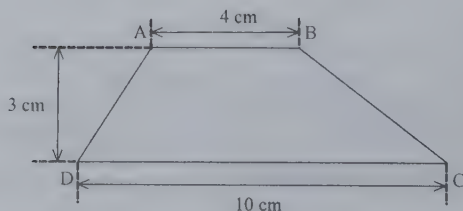
L'aire d'un trapèze

L'aire d'un trapèze égale le demi-produit de la hauteur par la somme de la grande base et de la petite base.



$$S = \frac{h \times (B + b)}{2}$$

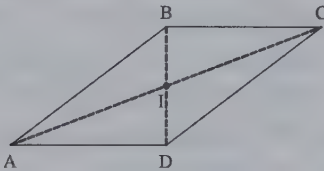
Exemple :



$$\text{L'aire du trapèze est } S = \frac{(4 + 10) \times 3}{2} = \boxed{21 \text{ cm}^2}.$$

3. Le parallélogramme

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



$$\left. \begin{array}{l} (AB) \parallel (CD) \\ (AD) \parallel (BC) \end{array} \right\}$$

$ABCD$ est un parallélogramme

Caractéristiques

Si $ABCD$ est un parallélogramme alors :

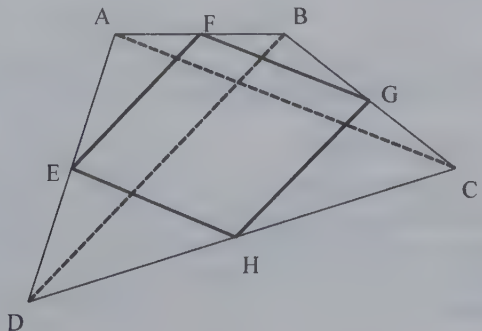
- Les côtés opposés sont de même longueur : $AB = DC$ et $AD = BC$.
- Les diagonales se coupent en leur milieu : I est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.
- Les angles opposés sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ et $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$.
- Les angles consécutifs sont supplémentaires.
- I est un centre de symétrie appelé **centre** du parallélogramme.

Exercice :

Montrer qu'en joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, on obtient un parallélogramme.

Solution :

Cette propriété a été découverte par Pierre Varignon, mathématicien français du XVIII^e siècle (voir photo ci-dessous).



E, F, G et H sont les milieux respectifs de $[AD], [AB], [BC], [DC]$.

Dans le triangle ABD , F est le milieu de $[AB]$ et E est le milieu de $[AD]$ donc, d'après un corollaire du théorème de Thalès, (EF) est parallèle à (BD) .

Dans le triangle BCD , G est le milieu de $[BC]$ et H est le milieu de $[DC]$ donc (GH) est parallèle à (BD) .

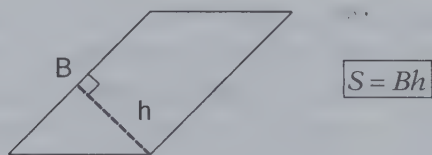
On en déduit que (EF) est parallèle à (GH) .

On procède de même dans les triangles ABC et ADC pour montrer que (EH) est parallèle à (FG) .

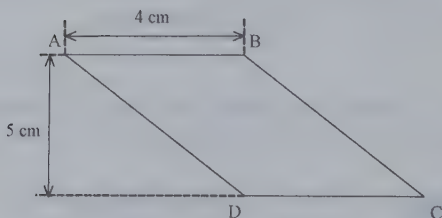
Finalement, les côtés opposés du quadrilatère $EFGH$ sont parallèles donc $EFGH$ est un parallélogramme.

L'aire d'un parallélogramme

L'aire d'un parallélogramme égale le produit de la hauteur par la base.



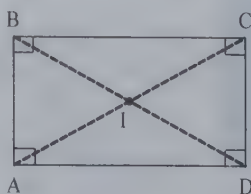
Exemple :



L'aire du parallélogramme est $S = 5 \times 4 = 20 \text{ cm}^2$.

4. Le rectangle

Un **rectangle** est un parallélogramme dont les côtés consécutifs sont deux à deux perpendiculaires.



$$(AB) \perp (BC)$$

$$(BC) \perp (CD)$$

$$(CD) \perp (DA)$$

$$(DA) \perp (AB)$$

Propriétés

Si $ABCD$ est un rectangle alors :

- Les quatre angles du rectangle sont droits :

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ.$$

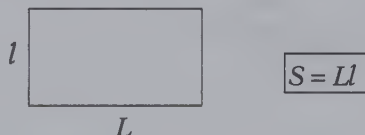
- Les diagonales ont la même longueur :

$$AC = BD.$$

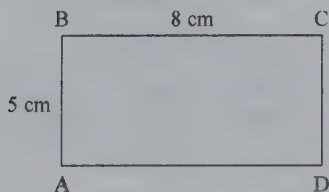
- Le rectangle possède deux axes de symétrie : les médiatrices des côtés.

L'aire d'un rectangle

L'aire d'un rectangle égale le produit de la longueur par la largeur.



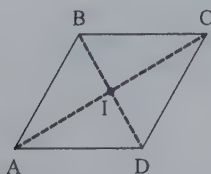
Exemple :



L'aire du rectangle est $S = 5 \times 8 = 40\text{cm}^2$.

5. Le losange

Un **losange** est un parallélogramme dont les quatre côtés ont la même longueur.



$$AB = BC = CD = DA$$

Propriétés

Si $ABCD$ est un losange alors :

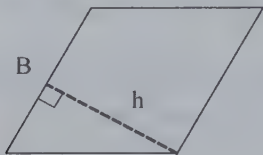
- Les diagonales sont perpendiculaires :

$$(AC) \perp (BD)$$

- Le losange possède deux axes de symétrie : les diagonales.

L'aire d'un losange

L'aire d'un losange égale le produit d'un côté par la hauteur.



$$S = Bh$$

Exemple :

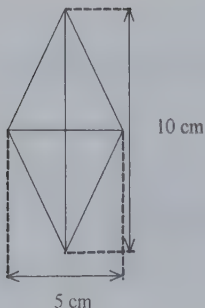


L'aire du losange est :

$$S = 5 \times 6 = \boxed{30 \text{ cm}^2}$$

Autre formule : L'aire d'un losange égale le demi-produit des deux diagonales.

Exemple :



L'aire du losange est :

$$S = \frac{1}{2} dD = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25 \text{ cm}^2$$

6. Le carré

Le **carré** est un rectangle et un losange.



Le carré possède toutes les propriétés du rectangle et du losange.

L'aire d'un carré

L'aire d'un carré égale le carré d'un côté.



$$S = c^2$$

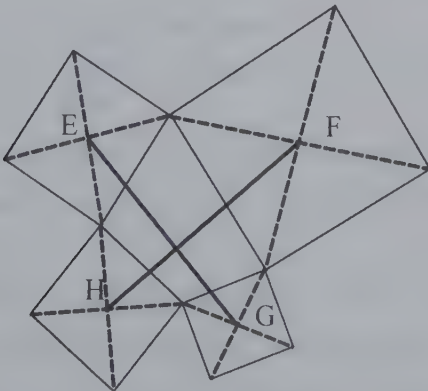
c

Exemple :

L'aire d'un carré de côté 4 cm est $S = 16\text{cm}^2$.

Une curiosité

Si on construit quatre carrés sur les côtés d'un quadrilatère quelconque alors, en notant E , F , G et H les centres des carrés, on a : (EG) est perpendiculaire à (FH) et $EG = FH$.



IV

Les polygones

Nombre de côtés	Polygones
3	Triangle
4	Quadrilatère
5	Pentagone
6	Hexagone
7	Heptagone
8	Octogone
9	Ennéagone
10	Décagone

Les polygones réguliers

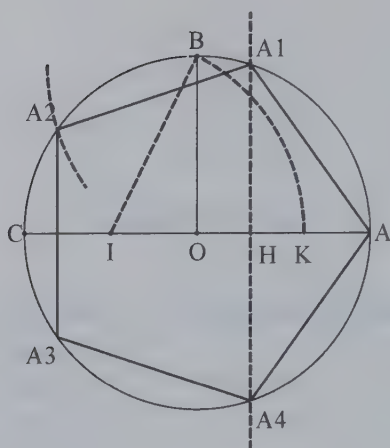
Un polygone régulier est un polygone convexe dont les côtés ont la même longueur et dont les angles sont égaux.

Le polygone régulier à trois côtés est un triangle équilatéral.

Le polygone régulier à quatre côtés est un carré.

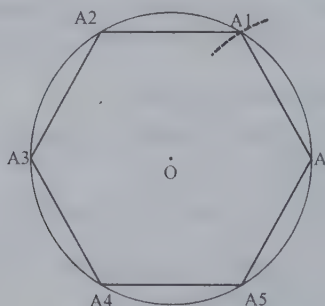
Construction du pentagone régulier

- On trace un cercle (C) de centre O puis deux rayons $[OA]$ et $[OB]$ perpendiculaires.
- $[AC]$ est un diamètre et I est le milieu de $[OC]$.
- Tracer le cercle de centre I et de rayon $[IB]$. Il coupe $[OA]$ en K . Soit H le milieu de $[OK]$.
- La perpendiculaire à (AC) passant par H coupe le cercle (C) en A_1 .
- $[AA_1]$ est un côté du pentagone. Le cercle de centre A_1 et de rayon $[AA_1]$ recoupe (C) en A_2 . On obtient les autres points avec le même procédé.



Construction de l'hexagone régulier

- On trace un cercle (C) de centre O puis un rayon $[OA]$.
- Le cercle de centre A et de rayon $[OA]$ coupe (C) en A_1 .
- $[AA_1]$ est un côté de l'hexagone régulier. Le cercle de centre A_1 et de rayon $[AA_1]$ recoupe (C) en A_2 . On obtient les autres points avec le même procédé.

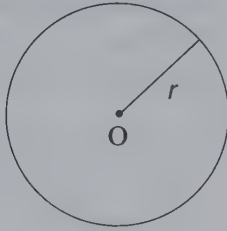


V

Le cercle

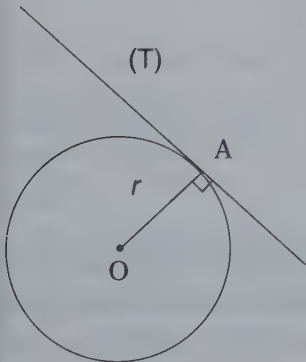
Définition

Le **cercle** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points du plan dont la distance au point O égale r .



La tangente en un point au cercle

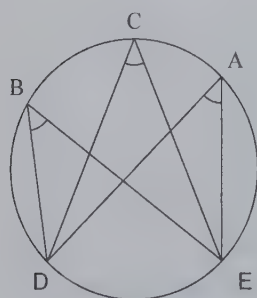
Soit (C) un cercle de centre O . La **tangente** en A au cercle (C) est la droite perpendiculaire à (OA) et passant par le point A .



$$(T) \perp (OA).$$

(T) n'a qu'un seul point commun avec le cercle.

Théorème de l'angle inscrit

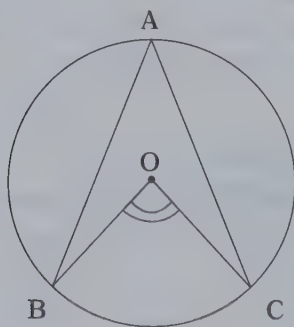


Deux **angles inscrits** qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Les angles $\widehat{DBE}$, $\widehat{DCE}$ et $\widehat{DAE}$ sont inscrits et interceptent le même arc de cercle $\widehat{DE}$; ils ont donc la même mesure.

Théorème de l'angle au centre

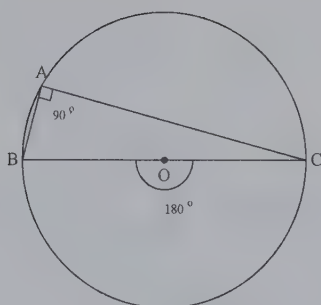
La mesure de l'angle inscrit égale la moitié de la mesure de l'**angle au centre** interceptant le même arc.



Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$ interceptent le même arc de cercle, $\widehat{BAC}$ est inscrit et $\widehat{BOC}$ est un angle au centre, on a donc $\boxed{\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}}$.

Cas particulier :

Si A appartient au cercle de diamètre $[BC]$ alors le triangle ABC est rectangle en A. Réciproquement, le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse.

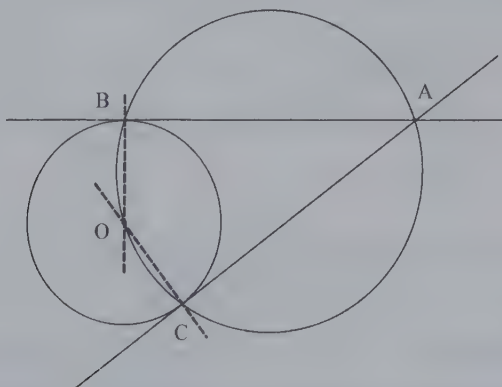


Une application :

On considère un cercle (C) de centre O et un point A extérieur au cercle. Construire deux tangentes au cercle passant par le point A .

Il suffit de construire (C') le cercle de diamètre $[OA]$. Il coupe (C) en deux points B et C .

B appartient au cercle de diamètre $[OA]$ donc l'angle $\widehat{OBA}$ est droit. De même, on montre que l'angle $\widehat{OCA}$ est droit. Les deux tangentes sont donc (BA) et (CA) .

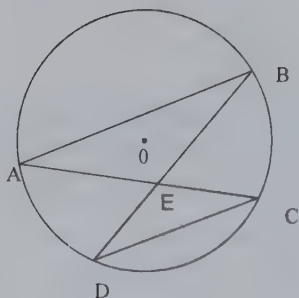


Exercice :

On considère un cercle de centre O .

A , B , C et D sont quatre points du cercle tels que (AB) et (DC) sont parallèles. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E . Démontrer que EDC et EAB sont isocèles en E .

Solution :



Les droites (AB) et (DC) sont parallèles, coupées par la sécante (BD) et les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC}$ sont alternes-internes donc $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (1).

Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ACD}$ sont inscrits et interceptent le même arc $\widehat{AD}$ donc $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (2). D'après (1) et (2), on a $\widehat{BDC} = \widehat{ACD}$. On peut affirmer que le triangle EDC est isocèle en E .

On procède de la même manière avec le triangle EAB .

Circonférence d'un cercle

La circonférence d'un cercle de rayon r (ou de diamètre D) est

$$\boxed{L = 2\pi r} \text{ ou } \boxed{L = \pi D}.$$

Exemple :

La circonférence d'un cercle de rayon 10 cm est

$$L = 2 \times \pi \times 10 \approx 62,8 \text{ cm.}$$

L'aire d'un disque

L'aire d'un disque de rayon r (ou de diamètre D) est $\boxed{S = \pi r^2}$ ou

$$\boxed{S = \pi \frac{D^2}{4}}.$$

Exemple :

L'aire d'un disque de rayon 10 cm est $S = \pi \times 10^2 \approx 314 \text{ cm}^2$.

VI

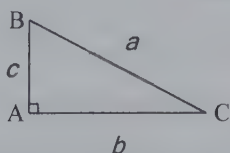
Le théorème de Pythagore



Pythagore de Samos est un mathématicien et philosophe grec du VI^e siècle avant J.-C.

1. Énoncé du théorème de Pythagore

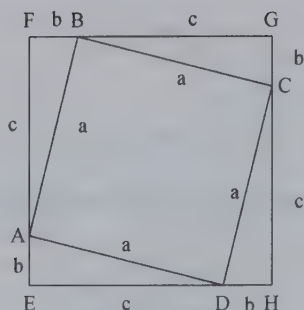
Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Autrement dit : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égale la somme des carrés des deux autres côtés.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Une démonstration du théorème

On considère un carré $EFGH$. On place sur les côtés du carré les points A , B , C et D (voir figure ci-dessous). L'aire du carré $EFGH$ est $(b+c)^2$. On montre facilement que $ABCD$ est un carré d'aire égale à a^2 . Les triangles rectangles EAD , AFB , BCG et DHC ont une aire égale à $\frac{1}{2}bc$.



L'aire de $EFGH$ ôté de l'aire des quatre triangles égale l'aire de $ABCD$ donc $(b+c)^2 - 4 \times \frac{1}{2}bc = a^2$ d'où $b^2 + 2bc + c^2 - 2bc = a^2$ soit $b^2 + c^2 = a^2$.

Exercice :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB=3$ et $BC=5$. Calculer AC .

Solution :

Le triangle ABC est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc $25 = 9 + AC^2$ d'où $AC^2 = 16$ soit $AC = 4$.

Exercice :

Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB=8$, $BC=5$ et $AC=6$. Montrer que le triangle n'est pas rectangle.

Solution :

$AB^2 = 64$, $BC^2 = 25$ et $AC^2 = 36$. Aucun carré n'égale la somme des deux autres donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ne peut pas être rectangle.

2. La réciproque du théorème de Pythagore

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A .

Exercice :

Soit ABC un triangle tel que $AC = 12$, $AB = 16$ et $BC = 20$. Montrer que ABC est un triangle rectangle.

Solution :

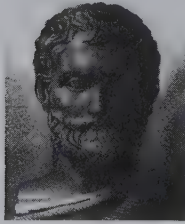
On a $AC^2 = 144$, $AB^2 = 256$ et $BC^2 = 400$.

$BC^2 = AC^2 + AB^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en A .



VII

Le théorème de Thalès



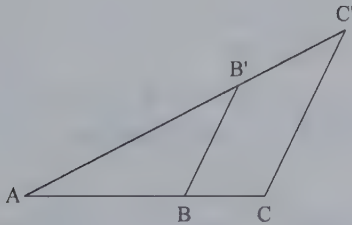
*Thalès de Milet est un mathématicien grec
du VI^e siècle avant J.-C.*

1. Énoncé du théorème de Thalès

Si ABB' et ACC' sont deux triangles tels que A, B, C sont alignés, A, B', C' sont alignés et (BB') est parallèle à (CC') alors

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}.$$

a. Situation 1

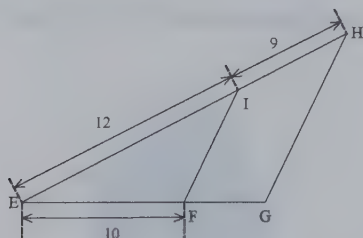


Si $(BB') \parallel (CC')$ alors $\boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}}$

Corollaire

Dans un triangle ABC la parallèle à (BC) passant par le milieu de $[AB]$ coupe $[AC]$ en son milieu.

Exercice :



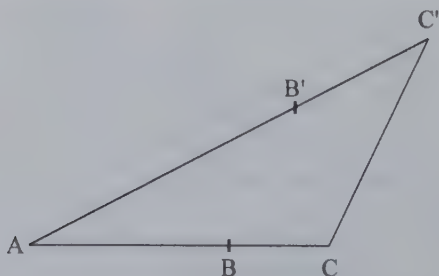
Hypothèses : $EF = 10$ cm, $EI = 12$ cm, $IH = 9$ cm et $(FI) \parallel (GH)$.
Calculer EG .

Solution :

I est un point du segment $[EH]$ donc $EH = EI + IH$ soit $EH = 21$ cm.

E, F, G sont alignés, E, I, H sont alignés et (FI) est parallèle à (GH) donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{EF}{EG} = \frac{EI}{EH}$. On obtient alors $\frac{10}{EG} = \frac{12}{21}$ donc $EG = \frac{10 \times 21}{12} = 17,5$ cm.

Exercice :



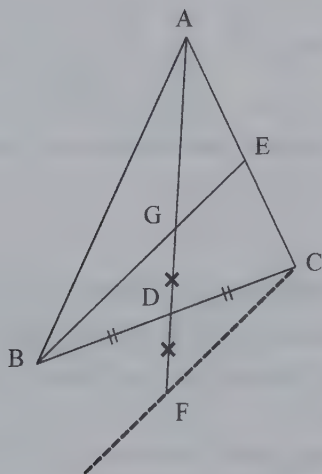
On donne : $AB = 9$ cm, $BC = 5$ cm, $AB' = 11$ cm, $B'C' = 7$ cm.

Les droites (BB') et (CC') sont-elles parallèles ?

Solution :

Si les droites (BB') et (CC') sont parallèles alors, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$. Or, $\frac{AB}{AC} = \frac{9}{14}$ et $\frac{AB'}{AC'} = \frac{11}{18}$.

Comme $\frac{9}{14} \neq \frac{11}{18}$, les droites (BC) et $(B'C')$ ne sont pas parallèles.

Une utilisation du théorème de Thalès

Montrons que le centre de gravité d'un triangle se situe aux deux tiers de la médiane.

Soit G le centre de gravité du triangle ABC , E le milieu de $[AC]$ et D le milieu de $[BC]$. Soit F le symétrique de G par rapport à D .

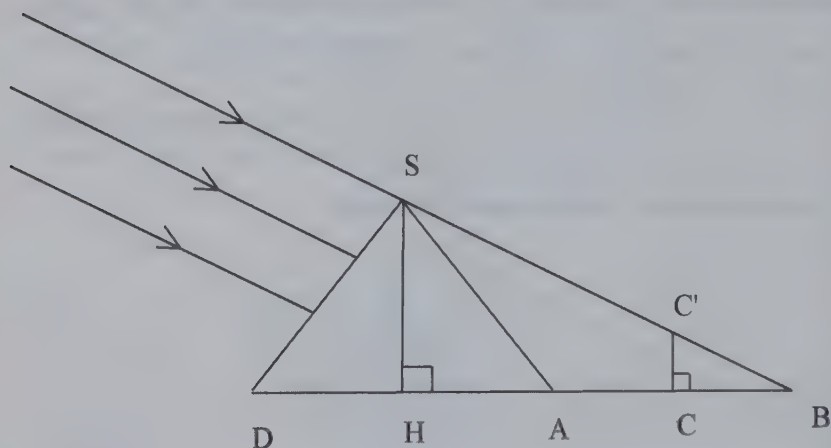
D est le milieu de $[BC]$ et D est le milieu de $[GF]$ donc le quadrilatère $BGCF$ est un parallélogramme. Ainsi la droite (GE) est parallèle à (FC) .

Comme E est le milieu de $[AC]$, on en déduit que G est le milieu de $[AF]$ (corollaire du théorème de Thalès).

$$AG + GD = AD \text{ or } AG = GF = 2GD \text{ donc } 3GD = AD \text{ soit } GD = \frac{1}{3}AD$$

ou $\boxed{AG = \frac{2}{3}AD}.$

Calcul de la hauteur de la pyramide de Gizeh



L'ombre de la pyramide a pour longueur AB .

On place verticalement un bâton de 1 m, symbolisé par le segment $[CC']$, en sorte que l'ombre du bâton se termine en B , comme l'ombre de la pyramide.

On obtient les longueurs suivantes : $AD = 232$ m , $AB = 73$ m , $CB = 1,3$ m et $CC' = 1$ m.

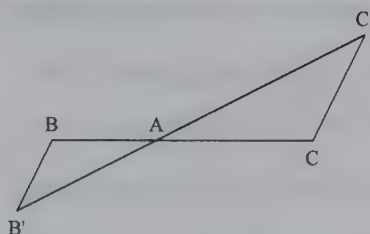
La pyramide de Gizeh est à base carrée donc $AH = \frac{1}{2}AD = 116$ m.

On en déduit $BH = AH + AB = 189$ m.

(CC') et (SH) sont perpendiculaires à (DB) donc (CC') et (SH) sont parallèles.

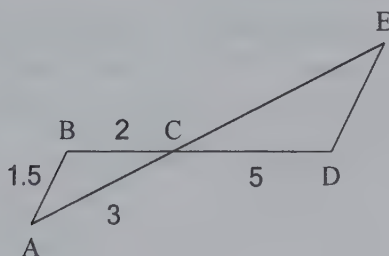
Le théorème de Thalès donne alors $\frac{BC'}{BS} = \frac{BC}{BH} = \frac{CC'}{SH}$ donc en particulier $\frac{BC}{BH} = \frac{CC'}{SH}$ soit $\frac{1,3}{189} = \frac{1}{SH}$ d'où $SH = \frac{189}{1,3}$ donc $\boxed{SH \approx 145 \text{ m}}$.

b. Situation 2



Si $(BB') \parallel (CC')$ alors $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}$.

Exercice :



Hypothèses : Les droites (AB) et (DE) sont parallèles. $AB = 1,5$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 3$ cm, $CD = 5$ cm. Calculer CE et ED .

Solution :

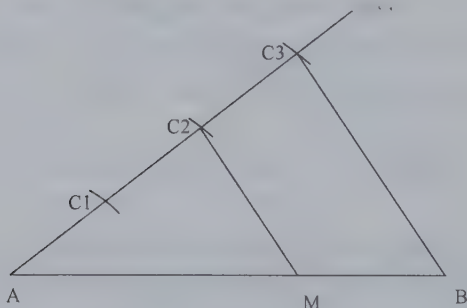
A, C, E sont alignés, B, C, D sont alignés et les droites (AB) et (DE) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès, on a $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{ED}$. Ainsi $\frac{3}{CE} = \frac{2}{5}$ soit $CE = \frac{15}{2} = 7,5$ cm et $\frac{1,5}{ED} = \frac{2}{5}$ soit $ED = 3,75$ cm.

Une application :

Prendre une fraction d'un segment à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée

Construire les deux tiers d'un segment $[AB]$.

- On trace une demi-droite d'origine A .
- Sur cette demi-droite, on place un point C_1 arbitraire.
- À l'aide d'un compas, on place C_2 puis C_3 sur la demi-droite tels que $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$.
- On mène par C_2 une parallèle à (BC_3) qui coupe $[AB]$ en M . On peut, par exemple, construire le quatrième sommet D du parallélogramme BC_3C_2D .
- Le théorème de Thalès donne alors $AM = \frac{2}{3}AB$.

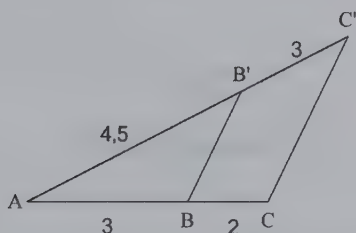


2. La réciproque du théorème de Thalès

Si les points A, B, C sont alignés dans cet ordre, si A, B', C' sont alignés dans cet ordre et si $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$ alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

Corollaire

La droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

Exercice :

$$AB = 3, BC = 2, AB' = 4,5, B'C' = 3.$$

Montrer que (BB') est parallèle à (CC') .

Solution :

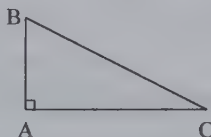
$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} \text{ et } \frac{AB'}{AC'} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \text{ donc } \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}.$$

De plus A, B, C sont alignés et A', B', C' sont alignés dans le même ordre donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(BB') \parallel (CC')$.

VIII

La trigonométrie

Les lignes trigonométriques d'un angle sont les rapports des longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle.



Définitions

Dans le triangle rectangle ABC , le côté **opposé** à l'angle $\widehat{ABC}$ est le côté $[AC]$ et le côté **adjacent** est le côté $[AB]$.

- Le **sinus** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le rapport $\frac{AC}{BC}$.

On écrit $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$.

Pour mémoire : $\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$.

- Le **cosinus** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le rapport $\frac{AB}{BC}$. On écrit

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}.$$

Pour mémoire : $\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$.

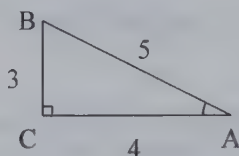
- La **tangente** de l'angle $\widehat{ABC}$ est le rapport $\frac{AC}{AB}$. On écrit

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}.$$

Pour mémoire : $\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

Remarque : on obtient de même $\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}$, $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$ et $\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$.

Exercice :



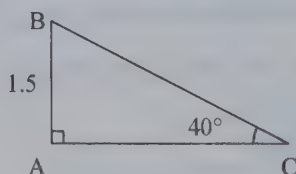
Calculer $\sin \hat{A}$, $\cos \hat{A}$ et $\tan \hat{A}$.

Solution :

Le triangle ABC est rectangle en C .

$$\sin \hat{A} = \frac{3}{5} = \boxed{0,6}, \quad \cos \hat{A} = \frac{4}{5} = \boxed{0,8}, \quad \tan \hat{A} = \frac{3}{4} = \boxed{0,75}.$$

Exercice :



$AB = 1,5$, $\widehat{BCA} = 40^\circ$. Calculer BC et AC .

Solution :

Le triangle ABC est rectangle en A . $\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$ donc $\sin 40^\circ = \frac{1,5}{BC}$ d'où $BC = \frac{1,5}{\sin 40^\circ}$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\sin 40^\circ \approx 0,64$. Finalement, $BC \approx 2,3$.

$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}, \quad \tan 40^\circ = \frac{1,5}{AC} \text{ d'où } AC = \frac{1,5}{\tan(40^\circ)}.$$

À l'aide de la calculatrice, $\tan 40^\circ \approx 0,84$ d'où $AC \approx 1,8$.

Théorèmes

- Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont compris entre 0 et 1.
- Si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont complémentaires alors $\sin \hat{A} = \cos \hat{B}$ et $\cos \hat{A} = \sin \hat{B}$.

Autrement dit :

$$\boxed{\sin(90^\circ - \hat{A}) = \cos \hat{A}} \text{ et } \boxed{\cos(90^\circ - \hat{A}) = \sin \hat{A}}.$$

- $\boxed{\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}}.$
- $\boxed{(\sin \hat{A})^2 + (\cos \hat{A})^2 = 1}.$

On écrit aussi $\boxed{\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1}.$

Exercice :

Sachant que $\hat{A}$ est un angle aigu tel que $\cos \hat{A} = 0,8$, calculer $\sin \hat{A}$.

Solution :

On sait que $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$.

On remplace $\cos \hat{A}$ par 0,8 donc $0,8^2 + \sin^2 \hat{A} = 1$. On obtient alors $\sin^2 \hat{A} = 1 - 0,64 = 0,36$.

On en déduit que $\sin \hat{A} = \sqrt{0,36}$ soit $\boxed{\sin \hat{A} = 0,6}.$

Les lignes trigonométriques d'angles particuliers

	0°	30°	45°	60°	90°
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

Remarque : 30° et 60° sont deux angles complémentaires donc on retrouve les relations $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ et $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$.

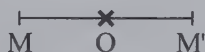
IX

Les transformations

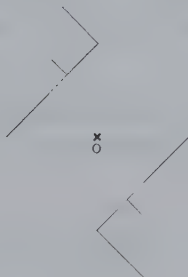
1. Les symétries centrales

Définition

On dit que M' est l'image de M par la **symétrie centrale** de centre O lorsque O est le milieu de $[MM']$.



Propriétés



Une symétrie centrale :

- Conserve les distances, les angles, les milieux, les aires, l'alignement.
- Transforme une droite en une droite parallèle, un segment en un segment.
- Conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Définition

Une figure admet O comme **centre de symétrie** lorsqu'elle est invariante par la symétrie centrale de centre O .

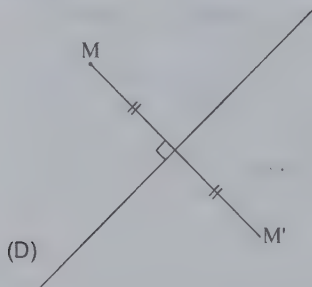
Exemples :

- Un parallélogramme admet son centre comme centre de symétrie.
- Un cercle admet son centre comme centre de symétrie.
- Une droite admet une infinité de centres de symétrie.
- Un segment admet son milieu comme centre de symétrie.

2. Les symétries axiales

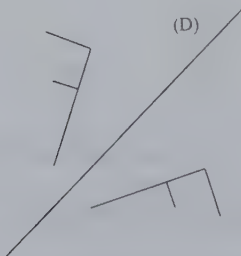
Définition

On dit que M' est l'image de M par la **symétrie axiale** d'axe (D) lorsque (D) est la médiatrice de $[MM']$. Si M est sur la droite (D) alors M' égale M .



(D) est la médiatrice du segment $[MM']$.

Propriétés



Une symétrie axiale :

- Conserve les distances, les angles, les milieux, les aires, l'alignement.
- Transforme une droite en une droite, un segment en un segment.
- Conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Définition

Une figure admet (D) comme **axe de symétrie** lorsqu'elle est invariante par la symétrie axiale d'axe (D) .

Exemples :

- Un rectangle admet les médiatrices de ses côtés comme axe de symétrie.
- Un cercle admet une infinité d'axes de symétrie (toute droite passant par le centre du cercle).
- Une droite admet une infinité d'axes de symétrie (toute droite qui lui est perpendiculaire et elle-même).
- Un segment admet sa médiatrice comme axe de symétrie et la droite qui le supporte.

3. Les rotations

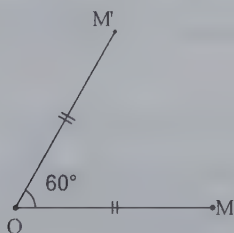
Définition

Une **rotation** est définie par un point O appelé centre de la rotation, un angle θ appelé angle de la rotation et un sens de rotation. Par convention, en mathématiques, le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On dit que M' est l'image de M par la rotation de centre O , d'angle θ et de sens positif lorsque : $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \theta$.

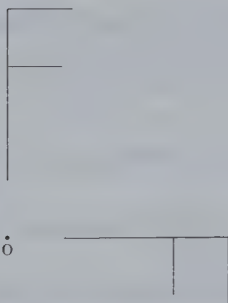
Exemple :

M' est l'image de M par la rotation de centre O , d'angle 60° et de sens positif.



$$OM = OM' \text{ et } \widehat{MOM'} = 60^\circ$$

Propriétés



Une rotation :

- Conserve les distances, les angles, les milieux, les aires, l'alignement.
- Transforme une droite en une droite, un segment en un segment.
- Conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

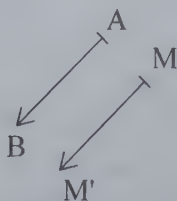
Remarques :

- Si l'angle de la rotation est 180° alors la rotation de centre O est la symétrie centrale de centre O .
- Si l'angle de la rotation est 90° alors la rotation de centre O s'appelle un quart de tour de centre O .

4. Les translations

Définition

On dit que M' est l'image de M par la **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ lorsque $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Autrement dit $MM'BA$ est un parallélogramme.



Propriétés



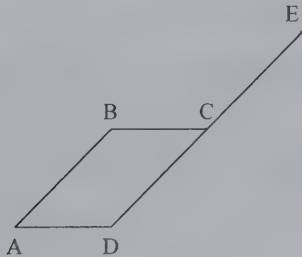
Une translation :

- Conserve les distances, les angles, les milieux, les aires, l'alignement.
- Transforme une droite en une droite parallèle, un segment en un segment.
- Conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Exercice :

$ABCD$ est un parallélogramme et E est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Démontrer que C est le milieu de $[ED]$.

Solution :



E est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$. De plus, $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On en déduit que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$ et donc que C est le milieu de $[DE]$.

X

La géométrie analytique

1. Repère d'une droite

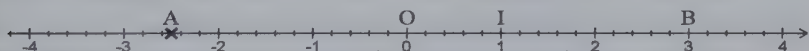
Définition

Une **droite graduée** est une droite sur laquelle on a choisi un point O appelé origine, un point I et un sens de parcours sur la droite.

(O, I) est un **repère** de la droite, O a pour **abscisse** 0 et I a pour abscisse 1.

Chaque point de la droite est alors repéré par un nombre et inversement à chaque nombre correspond un point de la droite.

Exemple :



A a pour abscisse $-2,5$, B a pour abscisse 3.

Exercice :

1. Placer les points A , B et C d'abscisses respectives, dans le repère (O, I) , -2 , 2 et -1 .

2. Lire les abscisses des points A , B , C , O et I dans le repère (I, C) .

Solution :



Dans le repère (I, C) , I a pour abscisse 0 et C a pour abscisse 1. Le sens positif est de I vers C .



A a pour abscisse 1,5 et B a pour abscisse $-0,5$.

2. Repère d'un plan

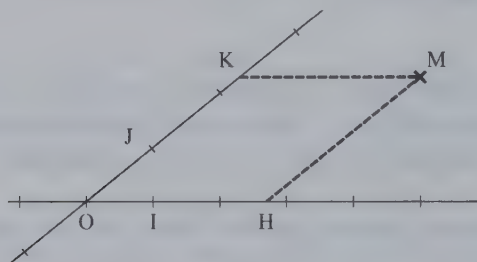
Définition

Deux droites graduées sécantes déterminent un repère d'un plan (O, I, J) .

La droite (OI) est appelée : **axe des abscisses**.

La droite (OJ) est appelée : **axe des ordonnées**.

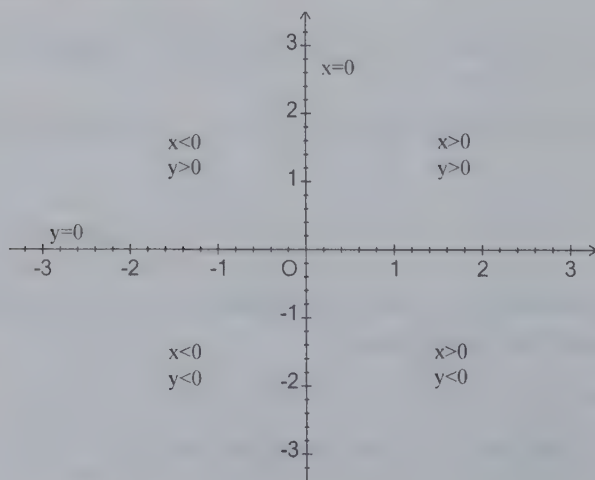
Chaque point M du plan est repéré par un couple (x, y) de **coordonnées** : x est l'**abscisse** et y est l'**ordonnée**.



La parallèle à (OJ) passant par M coupe l'axe des abscisses en H . L'abscisse de M est l'abscisse de H sur la droite (OI) .

La parallèle à (OI) passant par M coupe l'axe des ordonnées en K . L'ordonnée de M est l'abscisse de K sur la droite (OJ) .

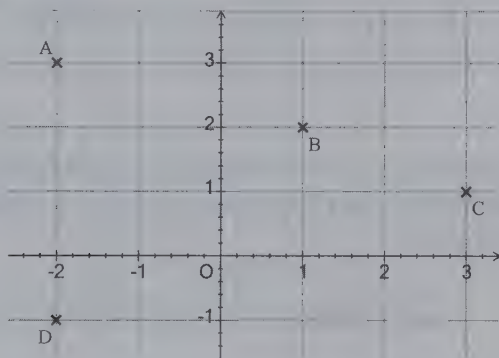
Tout point du plan se situe sur l'un des axes ou à l'intérieur de l'un des quatre quadrants.



Définitions

- (O, I, J) est un **repère orthogonal** lorsque $(OI) \perp (OJ)$.
- (O, I, J) est un **repère orthonormal** ou **orthonormé** lorsque $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ = 1$.

Exemple :



A a pour coordonnées $(-2, 3)$, B a pour coordonnées $(1, 2)$, C a pour coordonnées $(3, 1)$ et D a pour coordonnées $(-2, -1)$.

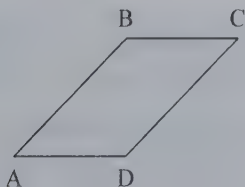
Exercice :

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Déterminer les coordonnées des quatre sommets dans le repère (A, D, B) .

Déterminer les coordonnées des quatre sommets dans le repère (D, A, C) .

Solution :



Points	Coordonnées dans le repère (A,D,B)	Coordonnées dans le repère (D,A,C)
A	(0,0)	(1,0)
B	(0,1)	(1,1)
C	(1,1)	(0,1)
D	(1,0)	(0,0)

Théorème

Soit (O,I,J) un repère orthonormal, A et B deux points du plan de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) . La **distance** AB est donnée par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple :

$A(-1,1)$, $B(1,-1)$ et $C(3,1)$.

Calculons les distances AB , AC et BC .

$$AB = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{8} \text{ donc } AB^2 = 8.$$

$$AC = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - 1)^2} = 4 \text{ donc } AC^2 = 16.$$

$$BC = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{8} \text{ donc } BC^2 = 8.$$

$AB = BC$ donc le triangle ABC est isocèle en B . De plus, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc ABC est rectangle en B . Finalement, ABC est un triangle rectangle et isocèle en B .

Théorème

Soit (O,I,J) un repère du plan, A et B les points de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) . Le point I milieu de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Exercice :

$A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(4,1)$ et $D(3,-1)$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution :

Déterminons les coordonnées du milieu I de $[AC]$.

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}, \quad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Déterminons les coordonnées du milieu de $[BD]$.

$$\frac{x_B + x_D}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}, \quad \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3-1}{2} = 1.$$

On retrouve les coordonnées de I . Les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu donc $ABCD$ est un parallélogramme.

3. Les équations de droites

On munit le plan d'un repère (O, I, J) . Déterminer une équation d'une courbe consiste à trouver une relation entre les coordonnées x et y d'un point M pour que celui-ci appartienne à cette courbe.

Théorème

- L'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $\boxed{x = p}$ où p est un nombre fixé est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- L'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $\boxed{y = ax + b}$ où a et b sont des nombres fixés est une droite.
- Inversement, toute droite du plan a une équation du type $x = p$ ou $y = ax + b$.

Exemples :

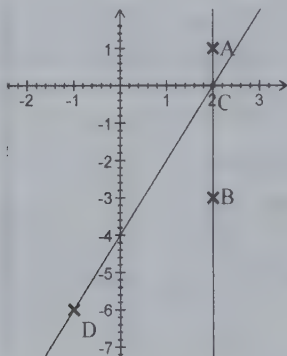
- La droite passant par les points $A(2,1)$ et $B(2,-3)$ a pour équation $x = 2$.
- La droite passant par les points $C(2,0)$ et $D(-1,-6)$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ($x_D \neq x_C$) donc a une équation du type $y = ax + b$.

Les coordonnées de C et D vérifient l'équation donc

$$\begin{cases} 0 = a \times 2 + b \\ -6 = a \times (-1) + b \end{cases}$$

Réolvons le système : $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + b = -6 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ -a - 2a = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$$



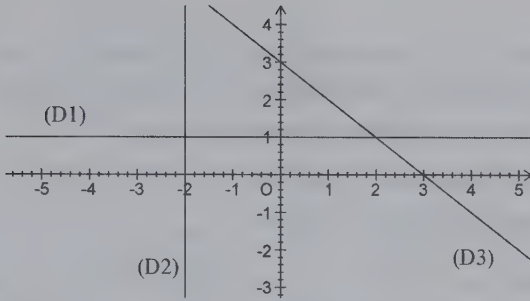
Une équation de la droite (CD) est $y = 2x - 4$.

Exercice :

On considère les droites $(D1)$, $(D2)$ et $(D3)$ d'équations respectives $y = 1$, $x = -2$ et $y = -x + 3$. Donner deux points de chacune des droites. Puis tracer ces droites.

Solution :

- $A(2,1)$ et $B(5,1)$ appartiennent à la droite $(D1)$.
- $C(-2,-3)$ et $D(-2,1)$ appartiennent à la droite $(D2)$.
- $E(3,0)$ et $F(0,3)$ appartiennent à la droite $(D3)$.



Exercice :

Soit $A(3,2)$, $B(3,5)$, $C(0,3)$ et $D(-3,3)$.

Déterminer une équation des droites (AB) , (AC) et (CD) .

Solution :

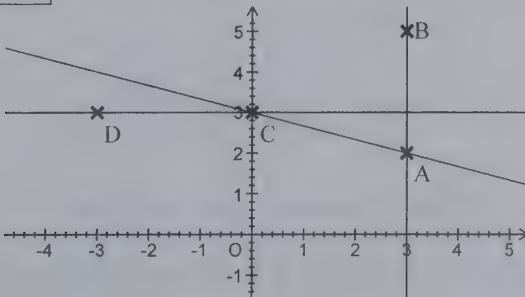
- A et B ont la même abscisse, 3, donc une équation de la droite (AB) est $\boxed{x=3}$.
- Une équation de la droite (AC) est du type $y=ax+b$.
Les coordonnées de A et C vérifient cette équation donc

$$\begin{cases} 2=3a+b \\ 3=b \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=3 \end{cases}.$$

Une équation de la droite (AC) est donc :

$$\boxed{y=-\frac{1}{3}x+3}.$$

- C et D ont la même ordonnée, 3, une équation de la droite (CD) est donc $\boxed{y=3}$.



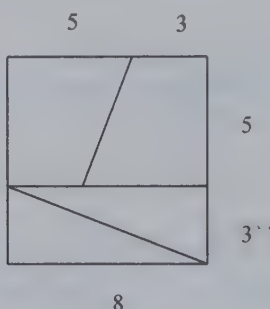
Définition

Si la droite (D) a une équation de la forme $y = ax + b$ alors a s'appelle **le coefficient directeur** ou la pente de la droite (D) .

- Si $a = 0$ alors la droite est « horizontale ».
- Si $a > 0$ alors la droite « monte ».
- Si $a < 0$ alors la droite « descend ».

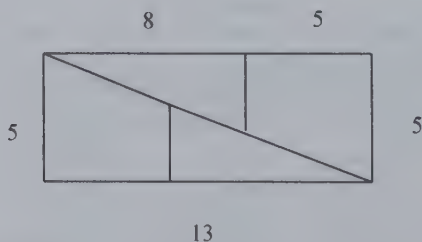
Une illusion

On considère le carré suivant :



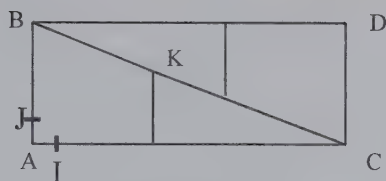
L'aire du carré est $8 \times 8 = 64$.

Il est constitué de deux trapèzes identiques et de deux triangles rectangles identiques que l'on réorganise de façon à obtenir le rectangle suivant :



L'aire du rectangle est $5 \times 13 = 65$.

On ne retrouve pas 64. Il y a donc un problème ! Que s'est-il passé ?



Plaçons-nous dans le repère (A, I, J) . Les points B , K et C ont pour coordonnées respectives $(0,5)$, $(5,3)$ et $(13,0)$. Une équation de la droite (BC) est du type $y = ax + b$. Les coordonnées de B et C vérifient cette équation donc

$$\begin{cases} 5 = b \\ 0 = 13a + b \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = -\frac{5}{13} \\ b = 5 \end{cases}. \text{ Une équation de}$$

la droite (BC) est $y = -\frac{5}{13}x + 5$. Les coordonnées de K vérifient-elles cette équation ?

$$-\frac{5}{13} \times x_K + 5 = -\frac{5}{13} \times 5 + 5 = \frac{40}{13} \text{ et } y_K \neq \frac{40}{13} \text{ donc le point } K \text{ n'appartient pas à la droite } (BC).$$

Conclusion : les points B , K et C ne sont pas alignés.

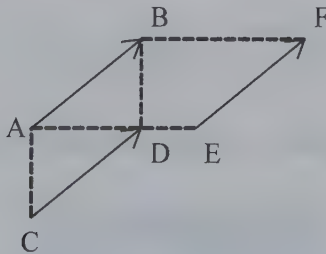
XI

Les vecteurs

1. Les généralités

Définition

On appelle **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ l'ensemble des couples (C,D) tels que $ABCD$ soit un parallélogramme.



(A,B) , (C,D) et (E,F) sont des représentants du même vecteur $\vec{u}$.

$$\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}}.$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour **origine** A et pour **extrémité** B .

Cas particulier : on appelle vecteur nul, noté $\vec{0}$, l'ensemble des couples du type (A,A) .

Un vecteur non nul est défini par :

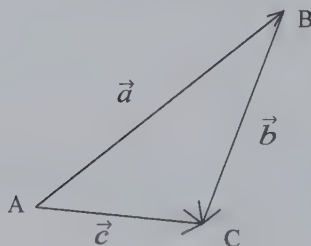
- Une **direction** (un ensemble de droites parallèles : (AB) , (CD) , (EF) , ...).
- Une longueur (la longueur des segments $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$, ...); on l'appelle **norme** du vecteur.
- Un **sens** (de A vers B , de C vers D , de E vers F , ...).

2. La somme de deux vecteurs

Définition

Étant donné trois points A , B et C , on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Cette égalité s'appelle **la relation de Chasles**.

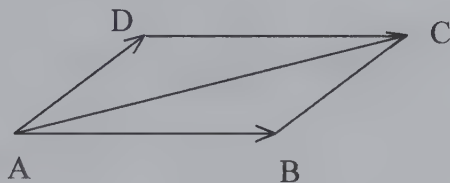


Michel Chasles est un mathématicien suisse du XIX^e siècle.

Exercice :

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Calculer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Solution :



$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. En appliquant la relation de Chasles, on obtient $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}}$.

XII

La géométrie dans l'espace

1. Les polyèdres

Définition

Un **polyèdre** est un solide limité par des portions de plan polygonales, appelées faces. Les segments délimitant les faces sont appelés les arêtes du polyèdre.

Remarques :

- Une arête est un segment ayant pour extrémités deux sommets adjacents d'un polyèdre.
- Un polyèdre possède au moins 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes. Le plus petit polyèdre est le tétraèdre.

Exemples :

Nom du polyèdre	Nombre de faces
Tétraèdre	4
Hexaèdre	6
Octaèdre	8
Dodécaèdre	12
Icosaèdre	20

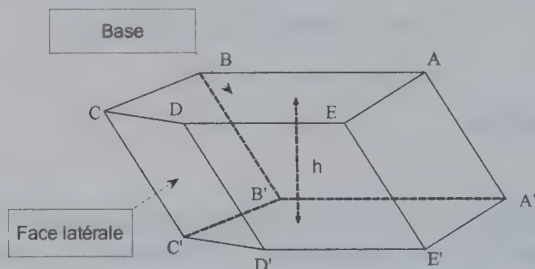
Définition

Un polyèdre est dit convexe lorsqu'il est situé du même côté du plan déterminé par chaque face.

2. Les prismes

Définition

Le **prisme** est un polyèdre tel que les faces latérales sont des parallélogrammes et les deux bases des polygones isométriques situés dans des plans parallèles.



Définitions

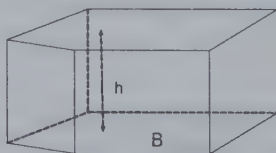
- $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$, ... sont appelés les **arêtes latérales**.
- La **hauteur** h d'un prisme est la distance entre les deux plans de base.

Nom de la base	Nom du prisme
Triangle	Prisme triangulaire
Quadrilatère	Prisme quadrangulaire
Pentagone	Prisme pentagonal
Hexagone	Prisme hexagonal

Définition

Un prisme est **droit** lorsque ses arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases.

Les faces latérales sont alors des rectangles.

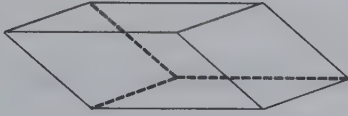


Définition

Un **prisme régulier** est un prisme droit dont la base est un polygone régulier.

Définition

- Le **parallélépipède** est un prisme dont les bases sont des parallélogrammes.

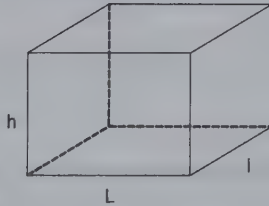


Remarques :

- Un parallélépipède est un prisme quadrangulaire particulier.
- Un parallélépipède est un hexaèdre dont les six faces sont des parallélogrammes.

Définition

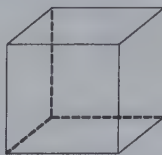
Le **parallélépipède rectangle** est un prisme droit dont les bases sont des rectangles.



On appelle dimensions d'un parallélépipède rectangle les longueurs de trois arêtes contiguës.

Définition

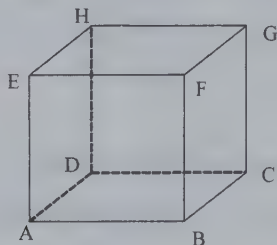
Le **cube** est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré et la hauteur égale un côté du carré.



Exercice :

Calculer la grande diagonale d'un cube de côté c .

Solution :



ABC est un triangle rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ soit $AC^2 = 2a^2$.

ACG est un triangle rectangle en C donc d'après le théorème de Pythagore, $AG^2 = AC^2 + GC^2$ soit $AG^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$.

On obtient $\boxed{AG = a\sqrt{3}}$.

Volume d'un prisme

Le **volume d'un prisme** a pour mesure le produit de l'aire de la base par la hauteur.

Exercice :

Calculer le volume d'un prisme de hauteur 5 cm dont la base est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 2 cm.

Solution :

L'aire du triangle rectangle est $S = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$ donc le volume du prisme est $V = 5 \times 3 = \boxed{15 \text{ cm}^3}$.

Théorème

Le **volume d'un parallélépipède** rectangle a pour mesure le produit des trois dimensions.

Exercice :

Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle de dimensions 6 cm, 8 cm et 10 cm.

Solution :

Le volume du parallélépipède rectangle est :

$$V = 6 \times 8 \times 10 = \boxed{480 \text{ cm}^3}.$$

Théorème

Le **volume d'un cube** a pour mesure le cube de son côté.

Exercice :

Calculer le volume d'un cube de côté 8 cm.

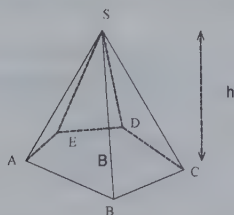
Solution :

Le volume du cube est : $V = 8^3 = \boxed{512 \text{ cm}^3}$.

3. Les pyramides

Définition

La **pyramide** est un solide dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des triangles ayant pour bases les côtés de ce polygone, et pour sommet commun un point extérieur au plan du polygone.



Définitions

- Le polygone $ABCDE$ s'appelle la **base** de la pyramide.
- Le point S est le **sommet** de la pyramide.

- Les arêtes qui joignent le sommet de la pyramide aux sommets de la base s'appellent les **arêtes latérales**.
- La hauteur h de la pyramide est la distance de son sommet au plan de la base.

Nom de la base	Nom de la pyramide
Triangle	Pyramide triangulaire
Quadrilatère	Pyramide quadrangulaire
Pentagone	Pyramide pentagonale
Hexagone	Pyramide hexagonale

Remarque : Une pyramide triangulaire s'appelle aussi un **tétraèdre**.

Définition

- Une pyramide est **régulière** lorsque la base est un polygone régulier de centre O et que O est le projeté orthogonal du sommet de la pyramide sur le plan de base.
- La hauteur d'une des faces latérales (triangles isocèles) s'appelle l'**apothème**.

Théorème

Le **volume d'une pyramide** égale le tiers du produit de l'aire de sa base par la hauteur.

Exercice :

Calculer le volume d'une pyramide régulière quadrangulaire dont les côtés de la base mesurent 6 cm et de hauteur 5 cm.

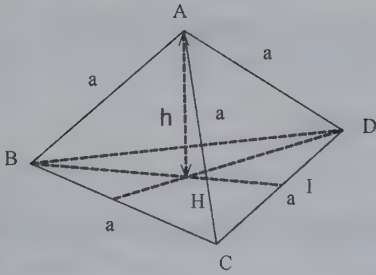
Solution :

La base est un carré dont l'aire est $S = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$ donc le volume de la pyramide est $V = \frac{1}{3} \times 5 \times 36 = \boxed{60 \text{ cm}^3}$.

Exercice :

Calculer le volume d'un tétraèdre régulier de côté a .

Solution :



BCD est un triangle équilatéral de côté a .

Sa hauteur est $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc l'aire du triangle équilatéral est

$$S = \frac{a \times a \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \boxed{a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

(BI) est une médiane donc $BH = \frac{2}{3}BI$ d'où $BH = \frac{2}{3} \times a \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Le triangle ABH est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AH^2 + BH^2$ donc $AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$. Ainsi,

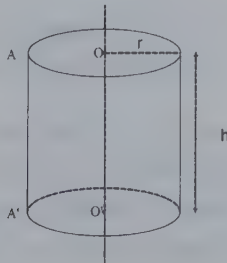
$$AH = \boxed{a\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

On peut déterminer le volume $V = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times a\sqrt{\frac{2}{3}}}{3}$ soit $V = \boxed{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}.$

4. Les cylindres de révolution

Définition

Le **cylindre de révolution** est un solide engendré par la révolution d'un rectangle tournant autour d'un de ses côtés.



Définitions

- Les **bases** du cylindre sont deux cercles de même rayon r .
- La **hauteur** du cylindre est $h = OO'$.
- $[AA']$ est une **génératrice** du cylindre.

Le volume d'un cylindre

Le **volume d'un cylindre** de révolution égale le produit de l'aire de sa base par la hauteur.

$$V = \pi r^2 h$$

Exercice :

Calculer le volume d'un cylindre de révolution de rayon 2 cm et de hauteur 5 cm.

Solution :

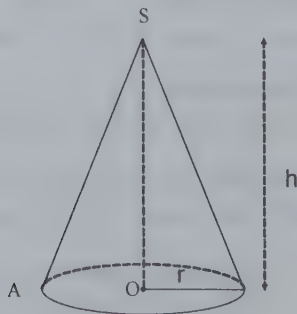
Le volume du cylindre est :

$$V = \pi \times 2^2 \times 5 \approx \boxed{62,8 \text{ cm}^3}.$$

5. Les cônes de révolution

Définition

Le **cône de révolution** est un solide engendré par la révolution d'un triangle rectangle tournant autour d'un des côtés de l'angle droit.



Définitions

- La **base** du cône est un disque de rayon r .
- La **hauteur** du cylindre est $h = SO$.
- $[SA]$ est une **génératrice** du cylindre.

Le volume d'un cône

Le **volume d'un cône** de révolution égale le tiers du produit de l'aire de sa base par la hauteur.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Exercice :

Calculer le volume d'un cône de révolution de rayon 3 cm et de hauteur 5 cm.

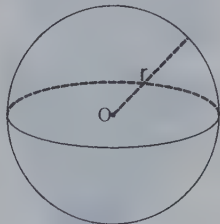
Solution :

Le volume du cône est $V = \frac{\pi \times 3^2 \times 5}{3} \approx \boxed{4,71 \text{ cm}^3}.$

6. La sphère

Définition

La sphère (boule) de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à la distance r du point O .



Théorème

Le volume d'une sphère égale les quatre tiers du produit de π par le cube du rayon.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

L'aire de la sphère égale $4\pi r^2$.

Exercice :

Calculer le volume d'une sphère de rayon 3 cm.

Solution :

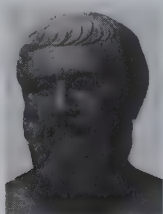
Le volume de la sphère est $V = \frac{4\pi \times 3^3}{3} \approx \boxed{113 \text{ cm}^3}.$

7. Les solides de Platon

Définition

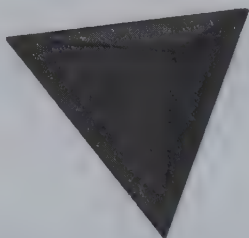
Un **polyèdre régulier** est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers et les espaces angulaires compris entre les faces issues d'un même sommet sont égaux.

Il n'existe que cinq polyèdres réguliers que l'on appelle **les solides de Platon**.



Platon (427 av. J.-C. – 348 av. J.-C.)

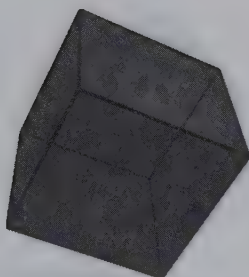
Le tétraèdre régulier



Le tétraèdre régulier est un polyèdre régulier dont les faces sont constituées de 4 triangles équilatéraux.

Il possède quatre sommets et six arêtes.

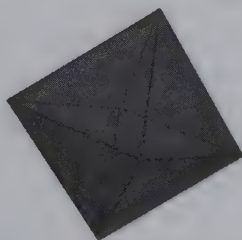
Le cube



Le cube est un polyèdre régulier dont les faces sont constituées de 6 carrés.

Il possède huit sommets et douze arêtes.

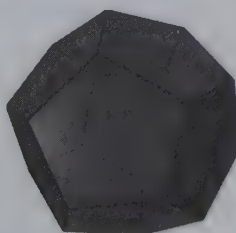
L'octaèdre



L'octaèdre régulier est un polyèdre régulier dont les faces sont constituées de 8 triangles équilatéraux.

Il possède six sommets et douze arêtes.

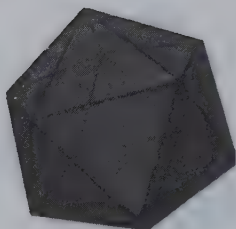
Le dodécaèdre



Le dodécaèdre régulier est un polyèdre régulier dont les faces sont constituées de 12 pentagones réguliers.

Il possède vingt sommets et trente arêtes.

L'icosaèdre



L'icosaèdre régulier est un polyèdre régulier dont les faces sont constituées de 20 triangles équilatéraux.

Il possède douze sommets et trente arêtes.

XIII

Compléments sur les mesures

1. Les mesures des longueurs

Noms	Symboles	Valeurs en <i>m</i>
Kilomètre	km	1 000 m
Hectomètre	hm	100 m
Décamètre	dam	10 m
Mètre	m	1 m
Décimètre	dm	0,1 m
Centimètre	cm	0,01 m
Millimètre	mm	0,001 m
Micron	μ	0,000001 m

Autres unités de longueurs

- L'angström (symbole $\text{\AA}$) : $1\text{\AA} = 10^{-10}\text{m}$.
- L'année-lumière (symbole a.l.) :
 $1\text{a.l.} = 9,461 \times 10^{15}\text{m}$.

2. Les mesures des surfaces

Noms	Symboles	Valeurs en m^2
Kilomètre carré	km^2	1 000 000 m^2
Hectomètre carré	hm^2	10000 m^2
Décamètre carré	dam^2	100 m^2
Mètre carré	m^2	1 m^2
Décimètre carré	dm^2	0,01 m^2
Centimètre carré	cm^2	0,0001 m^2
Millimètre carré	mm^2	0,000001 m^2

Autres unités de mesures des surfaces

La superficie d'un terrain se mesure avec une unité appelée **are** qui vaut 100 m^2 .

Noms	Symboles	Valeurs en m^2
Hectare	ha	10000 m^2
Are	a	100 m^2
Centiare	ca	1 m^2

Exercice :

Un terrain a la forme d'un trapèze de dimensions $B = 250 \text{ m}$, $b = 100 \text{ m}$ et $h = 50 \text{ m}$. Calculer sa superficie en ares puis en hectares.

Solution :

L'aire du trapèze est :

$$S = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(250+100) \times 50}{2} = 8750 \text{ m}^2.$$

Finalement, après conversion :

$$S = 87,5 \text{ a} = 0,875 \text{ ha}.$$

3. Les mesures des volumes

Noms	Symboles	Valeurs en m^3
Mètre cube	m^3	1 m^3
Décimètre cube	dm^3	$0,001 \text{ m}^3$
Centimètre cube	cm^3	$0,000001 \text{ m}^3$
Millimètre cube	mm^3	$0,000000001 \text{ m}^3$

Autres unités de volume

Mesure d'un volume de bois : **stère** (symbole st) :

$$1 \text{ st} = 1 \text{ m}^3.$$

Mesures d'un volume de liquide

Noms	Symboles	Valeurs en m^3
Hectolitre	hl	$0,1 \text{ m}^3$
Décalitre	dal	$0,01 \text{ m}^3$
Litre	l	$0,001 \text{ m}^3$
Décilitre	dl	$0,0001 \text{ m}^3$

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 \text{ ou } 1000 \text{ l} = 1 \text{ m}^3$$

Exercice :

Combien de litres de fuel une cuve cubique de 3 m peut-elle contenir ?

Solution :

Le volume d'un cube de côté 3 m est $V = 27 \text{ m}^3$.

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$ donc la cuve peut contenir 27000 l .

XIV

Le flocon de Von Koch



Le flocon de Von Koch a été imaginé par le mathématicien allemand *Helge Von Koch* en 1904.

C'est une courbe très particulière. Elle est composée d'une infinité de segments qui confèrent à la courbe une longueur infinie mais le flocon délimite une surface d'aire finie.

Construction du flocon

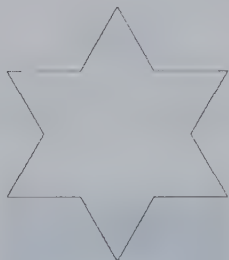
Étape 0

On part d'un triangle équilatéral.



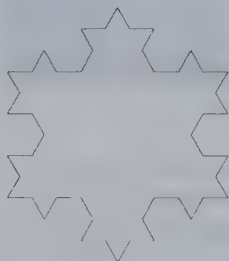
Étape 1

On divise chaque côté du triangle équilatéral de façon à obtenir la figure suivante.



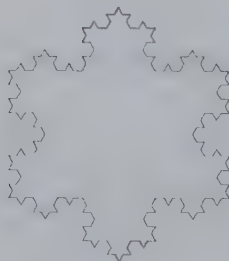
Étape 2

On itère le procédé. On divise chaque côté du polygone de façon à obtenir la figure suivante.



Étape 3

On divise chaque côté du polygone de façon à obtenir la figure suivante.



On continue indéfiniment le procédé. On obtient alors une figure fractale dont le périmètre est infini et l'aire est finie mais il est nécessaire d'aller au lycée pour comprendre le calcul...

Librio

771

Composition Nord Compo
Achevé d'imprimer en France par Aubin
en juin 2006 pour le compte de E.J.L.
87, quai Panhard-et-Levassor, 75013 Paris
Dépôt légal juin 2006

Diffusion France et étranger : Flammarion

Alain Gastineau

La géométrie

Mémo

La série Mémo propose des ouvrages de référence inédits, complets et accessibles, pour apprendre, comprendre ou se perfectionner dans les grands domaines du savoir. Rédigés par des spécialistes, ils permettent de mémoriser les règles et formules essentielles... et parfois de s'amuser aussi !

Librio

2€

Droite et cercle d'Euler, quadrilatères convexes, polygones réguliers, théorèmes de Pythagore, trigonométrie, calculs vectoriels... Ce guide de la géométrie arrondit les angles les plus obtus !

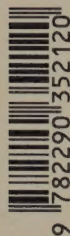
Définitions, propriétés, théorèmes, exemples et exercices, cet ouvrage est une synthèse simple pour apprendre ou réviser depuis la sixième.

Alain Gastineau est professeur agrégé de mathématiques et enseigne au lycée et en classes préparatoires.

JA 0923

ISBN 2-290-35212-8

Prix France 2€



9 782290 352120

www.librio.net

KS-306-856



Illustré