

ABC
du **BAC**

Réussite
L'essentiel
pour le Bac

Maths

2^{de}

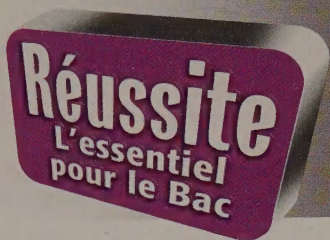
Nouveau
programme

- ✓ **L'essentiel** du cours
- ✓ **Méthodes** claires et efficaces
- ✓ **Exercices** variés
- ✓ **Corrigés** détaillés

Compléments numériques sur
www.abcbac.com

 **Nathan**

ABC du **BAC**



Mathématiques

2^{de}

Jean-Luc Dianoux

Muriel Dorembus

Le papier de cet ouvrage est composé de fibres naturelles, renouvelables, recyclables et fabriquées à partir de bois provenant de forêts gérées de manière responsable et durable.

 **Nathan**

Réalisation éditoriale : Roselyne Messenger
Édition : Marielle Muret-Baudoin
Conception graphique intérieur : Élise Launay
Couverture : Marc & Yvette
Compositeur : Scientech Livre

© Nathan 2010 – 25, avenue Pierre de Coubertin, 75 013 Paris
ISBN : 978-2-09-188 168-3

Mode d'emploi

Un ouvrage synthétique pour réviser et progresser avec méthode!

L'essentiel

Méthode

Exercices

Corrigés

- Le cours est structuré en **doubles-pages** , pour faciliter les révisions. Il comporte les éléments indispensables pour assimiler les nouvelles connaissances.
- Chaque double-page comporte des **exercices résolus** , commentés en marge, qui constituent une préparation à la résolution d'exercices plus difficiles.

Méthode

L'essentiel

Exercices

Corrigés

- Cette double page présente de manière simple la résolution de questions classiques qu'il est indispensable de maîtriser. Ces **fiches-méthode** s'appuient sur des exercices et présentent la **démarche à suivre** de manière très détaillée.

Exercices

L'essentiel

Méthode

Corrigés

- Nombreux et variés** , les exercices proposés permettent de couvrir l'ensemble des thèmes abordés dans le chapitre.
- Ils sont classés en **deux rubriques** : Exercices d'application et Exercices d'entraînement.

Corrigés

L'essentiel

Méthode

Exercices

- Les corrigés, **entièrement rédigés** , sont très détaillés et présentent toutes les étapes du raisonnement et des calculs.
- Ils sont accompagnés de commentaires : **conseils, remarques, astuces pour gagner des points...**

Annexes

- Un index des notions.



Des compléments sur Internet :
exercices, podcasts, tests...

Sommaire

Mode d'emploi	3
---------------------	---

PARTIE I • Fonctions

CHAPITRE 1	Ensembles de nombres : notations et raisonnement	8
1.	Les ensembles de nombres	8
2.	Les intervalles	10
Méthode	Savoir reconnaître les différents ensembles de nombres	12
Méthode	Savoir représenter des intersections et des réunions d'intervalles	13
Exercices		14
Corrigés		18
CHAPITRE 2	Comportement global d'une fonction. Lectures graphiques	24
1.	Notion de fonction. Ensemble de définition	24
2.	Représentation graphique d'une fonction	26
3.	Résolution graphique d'équations et d'inéquations	28
4.	Sens de variation d'une fonction	30
5.	Minimum, maximum d'une fonction	32
Méthode	Savoir résoudre graphiquement une équation ou une inéquation	34
Méthode	Savoir dresser un tableau de variation à partir d'une courbe représentative	35
Exercices		36
Corrigés		48
CHAPITRE 3	Utilisation des fonctions de référence. Trigonométrie	60
1.	Fonctions linéaires et affines	60
2.	Fonctions carré et inverse	62
3.	Développement d'un produit : transformation d'un produit en somme	64
4.	Factorisation d'une somme : transformation d'une somme en produit	66
5.	Équations et inéquations	68
6.	Fonction polynôme de degré 2 ; fonction homographique	70
7.	Trigonométrie	72
Méthode	Savoir résoudre une équation du premier degré à une inconnue	74
Méthode	Savoir résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue	75
Exercices		76
Corrigés		92

PARTIE II • Géométrie

CHAPITRE 4	Géométrie. Équations de droites	118
1.	Voir et calculer dans l'espace	118
2.	Positions relatives dans l'espace	120
3.	Configurations usuelles du plan	122
4.	Repérage de points dans le plan	124
5.	Équations de droites	126
6.	Système d'équations linéaires : résolution graphique	128
7.	Parallélisme et perpendicularité de deux droites	130
	Méthode <i>Savoir calculer dans l'espace</i>	132
	Méthode <i>Savoir lire le coefficient directeur d'une droite</i>	133
	Exercices	134
	Corrigés	138
CHAPITRE 5	Vecteurs	148
1.	Vecteurs du plan	148
2.	Opérations sur les vecteurs	150
3.	Coordonnées d'un vecteur	152
4.	Colinéarité de deux vecteurs	154
	Méthode <i>Savoir utiliser les vecteurs en géométrie</i>	156
	Méthode <i>Savoir montrer que deux droites sont ou ne sont pas parallèles</i>	157
	Exercices	158
	Corrigés	162

PARTIE III • Statistiques et probabilités

CHAPITRE 6	Statistiques	172
1.	Organisation des données d'une série statistique	172
2.	Représentations graphiques d'une série statistique quantitative	174
3.	Médiane et quartiles	176
4.	Moyenne et écart-type	178
	Méthode <i>Savoir calculer une fréquence</i>	180
	Méthode <i>Savoir calculer des fréquences cumulées</i>	181
	Exercices	182
	Corrigés	191

CHAPITRE 7	Probabilités. Échantillonnage	202
1.	Expérience aléatoire et simulation	202
2.	Modèle probabiliste	204
3.	Représentations ensemblistes d'événements	206
4.	Probabilité d'un événement	208
5.	Probabilité d'un événement : utilisation d'un tableau	210
6.	Probabilité d'un événement : utilisation d'un arbre	212
7.	Probabilité des événements $A \cap B$ et $A \cup B$	214
8.	Notion d'échantillon – Simulation	216
9.	Intervalle de fluctuation	218
Méthode	<i>Savoir utiliser les symboles $\cap$ et $\cup$</i>	220
Méthode	<i>Savoir utiliser les formules et les probabilités</i>	221
Exercices		222
Corrigés		230

PARTIE IV • Algorithmique

CHAPITRE 8	Algorithmes	242
1.	Description d'un algorithme	242
2.	Boucle et itérateur	244
3.	Instruction conditionnelle	246
Méthode	<i>Savoir interpréter un algorithme comportant une boucle</i>	248
Méthode	<i>Savoir interpréter un algorithme comportant une instruction conditionnelle</i>	249
Exercices		250
Corrigés		256

Index	265
--------------	-----

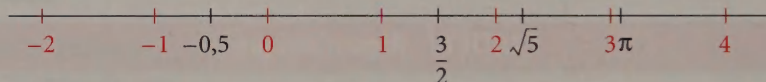
Ensembles de nombres : notations et raisonnement

1 Les ensembles de nombres

1 Définition

L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons.

On représente cet ensemble par une droite graduée :



2 Les différents ensembles de nombres

● L'ensemble des **nombres entiers naturels** est $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots\}$.

● L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est :

$$\mathbb{Z} = \{\dots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dots\}.$$

● L'ensemble des **nombres décimaux** $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres dont l'écriture décimale comporte un nombre fini de chiffres après la virgule.

Ils s'écrivent aussi sous la forme $a \times 10^p$, où a et p sont des nombres entiers relatifs.

● L'ensemble des **nombres rationnels** $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers relatifs ($q \neq 0$).

Remarque : On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Le symbole $\subset$
se lit « inclus dans »

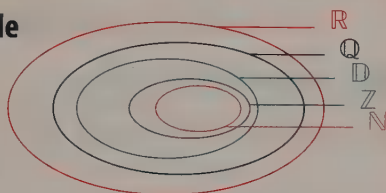
EXERCICE RÉSOLU

Placer un nombre dans son ensemble

ÉNONCÉ

Placer chaque élément de la liste de nombres ci-dessous dans l'ensemble qui lui correspond :

$$-\frac{6}{5}; \frac{6}{17}; 0,333...; 8; 4,3; -\frac{5}{11}; -3; 128; -\frac{3}{8}; \sqrt{3}.$$



CORRIGÉ

8 et 128 sont des nombres entiers naturels ;
-3 est un nombre entier relatif.

$-\frac{6}{5}$, $-\frac{3}{8}$ et 4,3 sont des nombres décimaux, car :

$$-\frac{6}{5} = -1,2; -\frac{3}{8} = -0,375.$$

$0,333...$, $\frac{6}{17}$ et $-\frac{5}{11}$ sont des nombres rationnels, car $0,333...$ est un nombre dont le nombre de chiffres après la virgule est illimité et périodique.

$\frac{6}{17}$ et $-\frac{5}{11}$ sont de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers, et lors de la division, leur nombre de chiffres après la virgule est illimité.

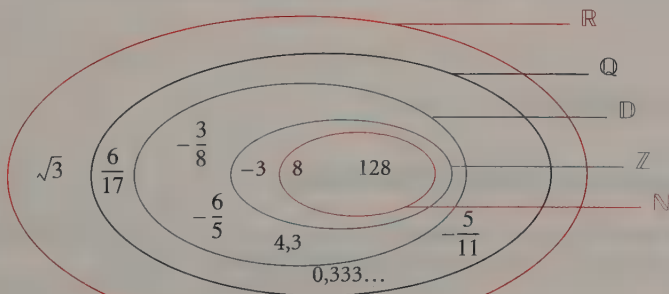
$\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel car $\sqrt{3} = 1,732\ 050\ 808...$

Méthode

On justifie que $-\frac{6}{5}$, $-\frac{3}{8}$ et 4,3 sont des nombres décimaux.

Méthode

On justifie que $0,333...$, $\frac{6}{17}$ et $-\frac{5}{11}$ ne sont pas des nombres décimaux.



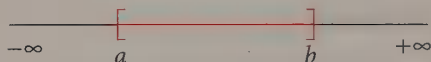
2 Les intervalles

1 Écriture des intervalles

Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

● L'ensemble des nombres réels x vérifiant la double inégalité $a \leq x \leq b$ est l'intervalle fermé $[a ; b]$ d'extrémités a et b , où a et b sont les bornes de l'intervalle.

Il est représenté sur un axe par un segment :



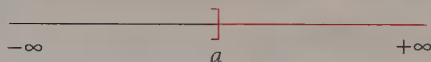
● L'ensemble des nombres réels x vérifiant la double inégalité $a < x < b$ est l'intervalle ouvert $]a ; b[$ d'extrémités a et b , où a et b sont les bornes de l'intervalle.

Il est représenté sur un axe par un segment :



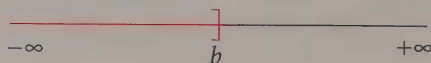
● L'ensemble des nombres réels x vérifiant l'inégalité $x > a$ est l'intervalle ouvert en a noté $]a ; +\infty[$.

Il est représenté sur un axe par une demi-droite :



● L'ensemble des nombres réels x vérifiant l'inégalité $x \leq b$ est l'intervalle fermé en b noté $] -\infty ; b]$.

Il est représenté sur un axe par une demi-droite :



Remarque : $\mathbb{R}$ est l'intervalle $] -\infty ; +\infty[$.

2 Intersection et réunion d'intervalles

● L'**intersection** de deux intervalles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à la fois aux deux intervalles.

● La **réunion** de deux intervalles A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à l'un ou l'autre des deux intervalles.

EXERCICE RÉSOLU

▶ Déterminer des intersections et des réunions d'intervalles

ÉNONCÉ

1. Représenter sur la droite des réels les intervalles suivants :

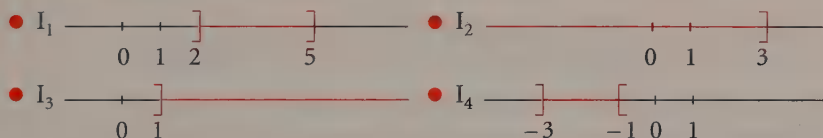
$$\bullet I_1 =]2; 5]; \quad \bullet I_2 =]-\infty; 3]; \quad \bullet I_3 =]1; +\infty[; \quad \bullet I_4 =]-3; -1[.$$

2. Déterminer les intervalles :

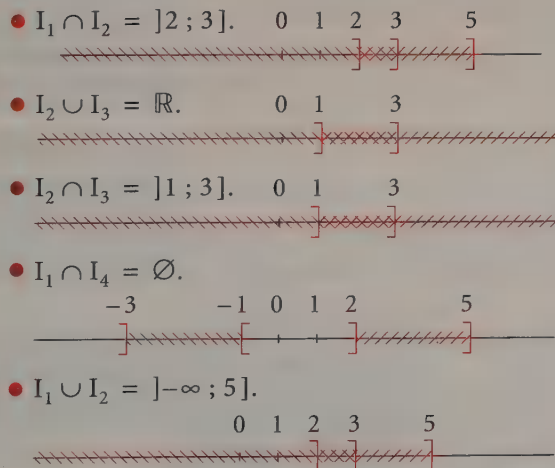
$$\bullet I_1 \cap I_2; \quad \bullet I_2 \cup I_3; \quad \bullet I_2 \cap I_3; \quad \bullet I_1 \cap I_4; \quad \bullet I_1 \cup I_2.$$

CORRIGÉ

1. On représente chacun des intervalles séparément :



2. Pour chaque cas, on représente les intervalles sur une même droite ; on hachure dans un sens le premier intervalle, puis dans l'autre sens le deuxième intervalle. Pour une intersection, on choisit les points sur la droite qui sont hachurés deux fois. Pour une réunion, on choisit les points sur la droite qui sont hachurés au moins une fois.



Conseil

Les hachures dans un sens, puis dans l'autre permettent de visualiser l'intersection ou la réunion.

→ Savoir reconnaître les différents ensembles de nombres

ÉNONCÉ

Placer chacun des nombres suivants dans l'ensemble auquel il appartient ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) : $\sqrt{2}$; $-\frac{2}{3}$; 17; 2,6; $-\frac{3}{4}$; -5; 3^2 ; $\frac{2}{5}$; 2π ; $\frac{20}{4}$; $\frac{1}{13}$; $-\frac{\sqrt{16}}{2}$.

MÉTHODE

Rechercher le plus petit ensemble auquel le nombre appartient. Pour cela :

1. Repérer les nombres entiers positifs et les placer dans l'ensemble $\mathbb{N}$.
2. Repérer les nombres entiers négatifs et les placer dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.
3. Repérer les nombres décimaux et les placer dans l'ensemble $\mathbb{D}$.
4. Repérer les nombres rationnels et les placer dans l'ensemble $\mathbb{Q}$.
5. Repérer les nombres irrationnels et les placer dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ

1. 17; $3^2 = 9$ et $\frac{20}{4} = 5$ sont des nombres entiers positifs.

2. -5 et $-\frac{\sqrt{16}}{2} = -2$ sont des nombres entiers négatifs.

3. 2,6; $-\frac{3}{4} = -0,75$ et $\frac{2}{5} = 0,4$ sont des nombres décimaux.

4. $-\frac{2}{3} = -0,666\ 666\dots$ et $\frac{1}{13} = 0,076\ 923\ 0\dots$ sont des nombres rationnels.

5. $\sqrt{2}$ et 2π sont des nombres irrationnels.

Piège à éviter

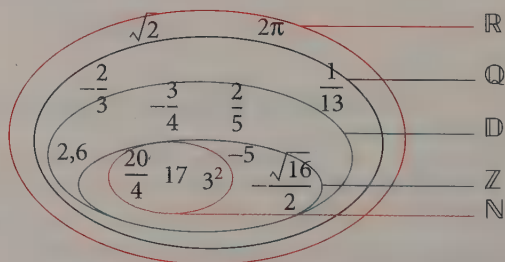
Un nombre décimal comporte un nombre fini de chiffres après la virgule.

Piège à éviter

Tout nombre décimal est un nombre rationnel mais tout nombre rationnel n'est pas un nombre décimal.

Réflexe à avoir

Il ne faut pas oublier que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



→ Savoir représenter des intersections et des réunions d'intervalles

ÉNONCÉ

On donne : $I_1 =]-3 ; +\infty[$, $I_2 =]-\infty ; 0]$,

$$I_3 = I_1 \cap I_2 \text{ et } I_4 = I_1 \cup I_2.$$

1. Représenter sur la droite des réels l'intervalle I_3 .
En déduire l'ensemble des nombres réels appartenant à I_3 .
2. Représenter sur la droite des réels l'intervalle I_4 .
En déduire l'ensemble des nombres réels appartenant à I_4 .

Piège à éviter

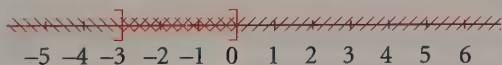
Il ne faut pas confondre les symboles $\cap$ (intersection) et $\cup$ (union).

MÉTHODE

1. Représenter l'**intersection** de deux intervalles en suivant les instructions :
 - représenter les deux intervalles sur une même droite graduée ;
 - hachurer dans un sens l'ensemble des nombres appartenant au 1^{er} intervalle et hachurer dans l'autre sens l'ensemble des nombres appartenant au 2^e intervalle :
→ l'intersection des deux intervalles est l'ensemble des nombres réels qui sont **hachurés deux fois**.
2. Représenter la **réunion** de deux intervalles en suivant les instructions :
 - représenter les deux intervalles sur une même droite graduée ;
 - hachurer dans un sens l'ensemble des nombres appartenant au 1^{er} intervalle et hachurer dans l'autre sens l'ensemble des nombres appartenant au 2^e intervalle :
→ la réunion des deux intervalles est l'ensemble des nombres réels qui sont **hachurés au moins une fois**.

CORRIGÉ

On hachure les ensembles I_1 et I_2 :



1. On a donc :
 $I_3 =]-3 ; 0]$.

Réflexe à avoir
 $I_1 \cap I_2$ correspond à l'ensemble des nombres qui appartiennent **à la fois** à I_1 et à I_2 . Ils sont hachurés deux fois sur la droite.

2. On a donc :
 $I_4 = \mathbb{R}$.

Réflexe à avoir
 $I_1 \cup I_2$ correspond à l'ensemble des nombres qui appartiennent à I_1 ou à I_2 **ou** à I_1 et I_2 . Ils sont hachurés **au moins une fois** sur la droite.

→ QCM



un nombre $\in \mathbb{A}$
un ensemble
un ensemble $\mathbb{A}$
 C ds un ensemble B .

1 Utiliser la notation « $\in$ » 5/5

Choisissez la réponse exacte (déterminer, pour chaque cas, le plus petit ensemble auquel appartient le nombre).

1. $-2 \in$: a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{D}$ d) $\mathbb{Q}$ e) $\mathbb{R}$.
 2. $10,5 \in$: a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{D}$ d) $\mathbb{Q}$ e) $\mathbb{R}$.
 3. $-\frac{5}{4} \in$: a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{D}$ d) $\mathbb{Q}$ e) $\mathbb{R}$.
 4. $\frac{1}{3} \in$: a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{D}$ d) $\mathbb{Q}$ e) $\mathbb{R}$.
 5. $-\sqrt{7} \in$: a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{D}$ d) $\mathbb{Q}$ e) $\mathbb{R}$.

2 Utiliser la notation « $\subset$ » 6/6

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$.
 2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
 3. $\mathbb{D} \subset \mathbb{N}$.
 4. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$.
 5. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$.
 6. $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
 7. $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$.
 8. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3 Utiliser les notations « $\in$ » et « $\subset$ » 6/6

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

1. $0 \in \mathbb{Z}$.
 2. $4,2 \subset \mathbb{D}$.
 3. $\mathbb{R} \in 2,5$.
 4. $\mathbb{N} \in \mathbb{D}$.
 5. $-\frac{3}{7} \in \mathbb{R}$.
 6. $1 \subset \mathbb{D}$.

→ Exercices d'application



4 Utiliser les notations « $\cap$ » et « $\cup$ » 4/6

On considère les ensembles de nombres $A = \{-1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ et $B = \{1 ; 1,1 ; 1,2\}$.
 Écrire les ensembles de nombres suivants.

1. $A \cap B$.
 2. $A \cap \mathbb{N}$.
 3. $A \cap \mathbb{Z}$.
 4. $B \cap \mathbb{N}$.
 5. $B \cap \mathbb{R}$.
 6. $A \cup B$.

5 Utiliser les notations « $\subset$ », « $\cap$ » et « $\cup$ »

On considère les ensembles de nombres $A = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0\}$, $B = \{2,1 ; 2,2 ; 2,3\}$ et $C = \{-1\}$.

Écrire les ensembles de nombres suivants.

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $A \cap B$. | 2. $A \cap C$. | 3. $B \cap C$. | 4. $A \cap \mathbb{N}$. |
| 5. $B \cap \mathbb{Z}$. | 6. $C \cap \mathbb{Q}$. | 7. $A \cap \mathbb{R}$. | 8. $A \cup C$. |
| 9. $B \cup C$. | 10. $A \cup B$. | | |

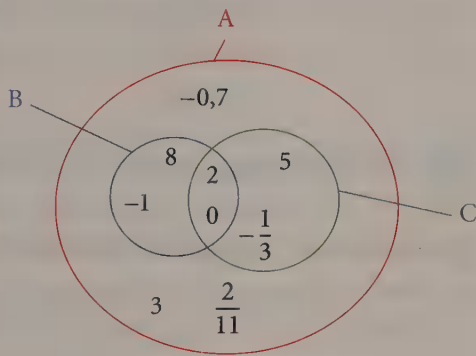
6 Écrire des ensembles de nombres

10/12

On considère les ensembles de nombres A, B et C représentés ci-dessous.

Écrire les ensembles de nombres suivants.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. A, B et C. | 2. $A \cap B$. |
| 3. $A \cap C$. | 4. $B \cap C$. |
| 5. $A \cap \mathbb{N}$. | 6. $A \cap \mathbb{D}$. |
| 7. $B \cap \mathbb{Z}$. | 8. $C \cap \mathbb{Q}$. |
| 9. $A \cap B \cap C$. | 10. $A \cup C$. |
| 11. $B \cup C$. | 12. $A \cup B$. |



7 Utiliser la notation « $\in$ »

6/6

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| 1. $-2 \in]-2; 5]$. | 2. $3 \in [0; +\infty[$. |
| 3. $1,6 \in]-\infty; 1]$. | 4. $0 \in]-\infty; 0]$. |
| 5. $-1 \in [-3; 3]$. | 6. $\sqrt{2} \in [0; 3]$. |

8 Utiliser la notation « $\subset$ »

1. Représenter sur la droite des réels chacun des intervalles suivants. ✓
 $I_1 = [0; +\infty[$; $I_2 = [-1; +\infty[$; $I_3 = [1; 2]$; $I_4 = [0; 2[$; $I_5 =]-3; 4[$; $I_6 = [-3; 5]$.

2. Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

3/3

- a) $I_1 \subset I_2$; b) $I_3 \subset I_4$; c) $I_5 \subset I_6$.

9 Utiliser les notations « $\cap$ » et « $\cup$ »

1. Représenter sur la droite des réels chacun des intervalles suivants.

$I_1 = [-1; +\infty[$; $I_2 =]1; 6[$; $I_3 =]-\infty; 0]$; $I_4 = [-3; 1]$. ✓

2. Déterminer chacun des intervalles suivants.

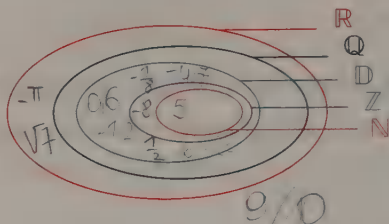
3/4

- a) $I_1 \cap I_2$; b) $I_3 \cap I_4$; c) $I_2 \cup I_3$; d) $I_1 \cup I_4$.

10 Utiliser la notation « $\in$ »

Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes, puis placer chaque nombre dans l'ensemble qui lui correspond.

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $0,6 \in \mathbb{N}$. | 2. $-1,2 \in \mathbb{Z}$. |
| 3. $5 \in \mathbb{N}$. | 4. $-8 \in \mathbb{D}$. |
| 5. $-\frac{1}{8} \in \mathbb{D}$. | 6. $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$. |
| 7. $-4,7 \in \mathbb{Q}$. | 8. $-6,325 \in \mathbb{R}$. |
| 9. $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$. | 10. $-\pi \in \mathbb{R}$. |



9/10

→ Exercices d'entraînement



11 Représenter l'ensemble des solutions d'une inéquation

4/4

Traduire, pour chaque cas, l'inégalité ou la double inégalité par un intervalle, puis représenter l'ensemble de ces nombres réels sur une droite graduée.

- | | |
|------------------------|----------------------|
| 1. $x \leq -3$. | 2. $x > -6$. |
| 3. $0 \leq x \leq 4$. | 4. $-3 < x \leq 0$. |

12 Intersection et réunion d'intervalles

4/4

Traduire, pour chaque cas, l'inégalité ou la double inégalité par une intersection ou une réunion d'intervalles, puis représenter l'ensemble de ces nombres réels sur une droite graduée.

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| 1. $x \leq 0$ et $x > -1$. | 2. $-1 \leq x \leq 3$ et $x \geq 3$. |
| 3. $x \leq -1$ ou $x > 4$. | 4. $3 < x \leq 5$ ou $x > 2$. |

13 Formuler la négation d'une proposition

2,5/3

Pour chaque proposition A, écrire sa négation $\bar{A}$ et en déduire si c'est la proposition A qui est vraie ou si c'est sa négation $\bar{A}$.

1. A : « Tous les nombres entiers relatifs sont positifs ». ✓
2. A : « Tous les nombres réels élevés au carré sont positifs ou nuls ». ✓
3. A : « Il existe au moins un nombre entier strictement négatif ». ~

14 Formuler la négation d'une proposition 3/3

Pour chaque proposition A , écrire sa négation $\bar{A}$ et en déduire si c'est la proposition A qui est vraie ou si c'est sa négation $\bar{A}$.

1. A : « Tous les multiples de 5 sont pairs ».
2. A : « Il existe au moins un multiple de 3 qui n'est pas impair ».
3. A : « 6 est un multiple de 2 et de 3 ».

15 Distinguer l'implication, la réciproque et la contraposée 6/9

1. Répondre par Vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes.
 - a) « Pour tous nombres réels a et b , si $a = b$, alors $a^2 = b^2$ ».
 - b) « Pour tous nombres réels a et b , si $a^2 = b^2$, alors $a = b$ ».
 - c) « Pour tous nombres réels a , b et c , si $a \leq b$, alors $ac \leq bc$ ».
2. Écrire la réciproque de chacune des affirmations de la question 1.
3. Écrire la contraposée de chacune des affirmations de la question 1.

16 Équivalence

Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ?

implication et réciproque
vraies 2/2

1. Proposition A : $a^2 = b^2$; proposition B : $a = b$ ou $a = -b$.
2. Lorsque a et b sont deux nombres réels non nuls de même signe :
proposition A : $a < b$; proposition B : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

17 Utiliser le contre-exemple

Montrer à l'aide d'un contre-exemple que chaque proposition suivante est fausse.

1. « Pour tout nombre réel x , $x^2 \geq x$ ».
2. « Pour tous nombres réels a et b , si $a^2 = b^2$, alors $a = b$ ».
3. « Pour tous nombres réels a et b non nuls, si $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ».
4. « $x > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4$ ».
5. « La réunion de deux intervalles est un intervalle ».

18 Utiliser le raisonnement par disjonction des cas

Montrer à l'aide d'un raisonnement par disjonction des cas que la proposition suivante est vraie : « Pour tout nombre entier naturel n , $n(n+1)$ est divisible par 2. »

→ QCM

1. b) 2. c) 3. c) 4. d) 5. e)

2. 1. Vrai. 2. Vrai.
3. Faux. 4. Faux.
5. Faux. 6. Vrai.
7. Faux. 8. Vrai.

3. 1. Vrai. 2. Faux, $4,2 \in \mathbb{D}$.
3. Faux, $2,5 \in \mathbb{R}$. 4. Faux, $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$.
5. Vrai. 6. Faux, $1 \in \mathbb{D}$.

Piège à éviter

On dit qu'un nombre « appartient à » un ensemble ($2,1 \in \mathbb{D}$), mais qu'un ensemble A est « inclus » dans un ensemble B ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$).

→ Exercices d'application

4. 1. $A \cap B = \{1\}$. 2. $A \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2\}$.
3. $A \cap \mathbb{Z} = A$. 4. $B \cap \mathbb{N} = \{1\}$.
5. $B \cap \mathbb{R} = B$. 6. $A \cup B = \{-1; 0; 1; 1,1; 1,2; 2\}$.

5. 1. $A \cap B = \{ \}$. 2. $A \cap C = \{-1\}$.
3. $B \cap C = \{ \}$. 4. $A \cap \mathbb{N} = \{0\}$.
5. $B \cap \mathbb{Z} = \{ \}$. 6. $C \cap \mathbb{Q} = C$.
7. $A \cap \mathbb{R} = A$. 8. $A \cup C = A$.
9. $B \cup C = \{-1; 2,1; 2,2; 2,3\}$.
10. $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 2,1; 2,2; 2,3\}$.

6. 1. $A = \{-1; -0,7; -\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{11}; 2; 3; 5; 8\}$,
 $B = \{-1; 0; 2; 8\}$ et $C = \{-\frac{1}{3}; 0; 2; 5\}$.

Rappel

L'intersection

de deux ensembles ou de deux intervalles A et B est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à A et à B.

Rappel

La réunion

de deux ensembles ou de deux intervalles A et B est l'ensemble des nombres qui appartiennent à A ou à B ou à A et B.

2. $A \cap B = B$.

3. $A \cap C = C$.

4. $B \cap C = \{0; 2\}$.

5. $A \cap \mathbb{N} = \{0; 2; 3; 5; 8\}$.

6. $A \cap \mathbb{D} = \{-1; -0,7; 0; 2; 3; 5; 8\}$.

7. $B \cap \mathbb{Z} = B$.

8. $C \cap \mathbb{Q} = C$.

9. $A \cap B \cap C = B \cap C = \{0; 2\}$.

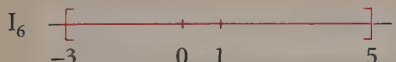
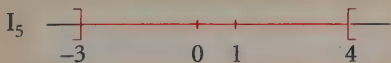
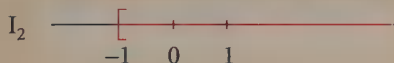
10. $A \cup C = A$.

11. $B \cup C = \{-1; -\frac{1}{3}; 0; 2; 5; 8\}$.

12. $A \cup B = A$.

- 7 1. Faux. 2. Vrai. 3. Faux.
 4. Vrai. 5. Vrai. 6. Vrai.

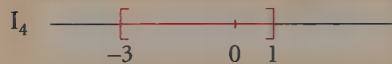
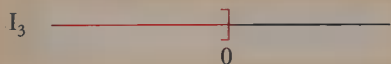
- 8 1. Représentation de chacun des intervalles.



Piège à éviter
 Pour un intervalle
 de la forme $[a; b[$,
 a appartient à l'intervalle,
 mais b n'appartient pas
 à l'intervalle.

2. a) Vrai ; b) Faux ; c) Vrai.

9 1. Représentation de chacun des intervalles.



2.

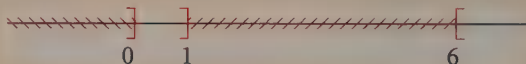
a) $I_1 \cap I_2 = I_2$.



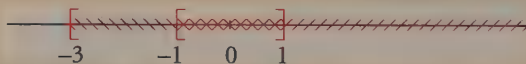
b) $I_3 \cap I_4 = [-3; 0]$.



c) $I_2 \cup I_3 =]-\infty; 0] \cup]1; 6]$.



d) $I_1 \cup I_4 = [-3; +\infty[$.



10 1. Faux.

2. Faux.

3. Vrai.

4. Vrai.

5. Vrai.

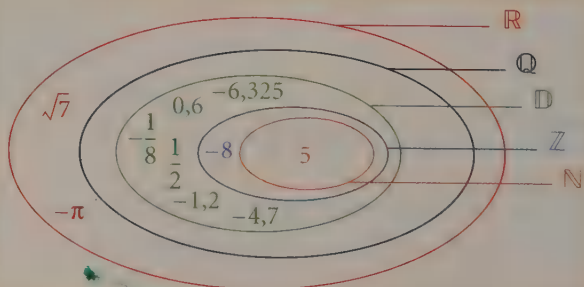
6. Vrai.

7. Vrai.

8. Vrai.

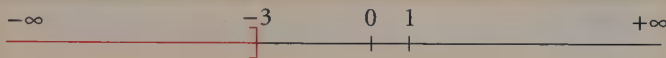
9. Faux.

10. Vrai.

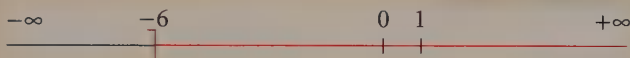


→ Exercices d'entraînement

11 1. Ce sont les nombres réels x inférieurs ou égaux à -3 , ce qui correspond à l'intervalle $]-\infty ; -3]$.



2. Ce sont les nombres réels x strictement supérieurs à -6 ce qui correspond à l'intervalle $] -6 ; +\infty[$.

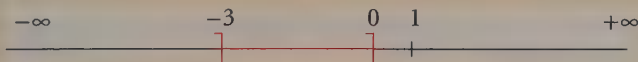


3. Ce sont les nombres réels x compris entre 0 et 4 inclus, ce qui correspond à l'intervalle $[0 ; 4]$.



4. Ce sont les nombres réels x compris entre -3 et 0 .

-3 exclu et 0 inclus, ce qui correspond à l'intervalle $] -3 ; 0]$.



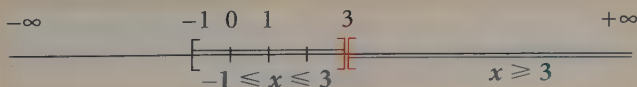
12 1. L'ensemble des nombres réels cherchés correspond à une intersection d'intervalles qui s'écrit : $] -\infty ; 0] \cap] -1 ; +\infty[$, soit $]-1 ; 0]$.

Représentation des solutions :



2. L'ensemble des nombres réels cherchés correspond à une intersection d'intervalles qui s'écrit : $[-1 ; 3] \cap [3 ; +\infty[$, soit $\{3\}$.

Représentation des solutions :



L'astuce du prof !

On peut remplacer les hachures par des couleurs différentes pour chacun des ensembles.

Gagnez des points !

La qualité du schéma permet au correcteur de visualiser rapidement le raisonnement.

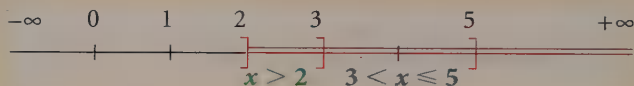
3. L'ensemble des nombres réels cherchés correspond à une réunion d'intervalles qui s'écrit $] -\infty ; -1] \cup] 4 ; +\infty [$.

Représentation des solutions :



4. L'ensemble des nombres réels cherchés correspond à une réunion d'intervalles qui s'écrit $] 3 ; 5] \cup] 2 ; +\infty [$, soit $] 2 ; +\infty [$.

Représentation des solutions :



13 1. $\bar{A}$: « Il existe au moins un nombre entier relatif négatif ».

La proposition $\bar{A}$ est vraie.

2. $\bar{A}$: « Il existe au moins un nombre réel élevé au carré qui est strictement négatif ».

La proposition A est vraie.

3. $\bar{A}$: « Tous les nombres entiers sont positifs ou nuls ».

La proposition A est vraie.

Remarque

La négation d'une proposition commençant par « pour tous les nombres réels » est « il existe au moins un nombre réel ».

14 1. $\bar{A}$: « Il existe au moins un multiple de 5 qui est impair ».

La proposition $\bar{A}$ est vraie.

2. $\bar{A}$: « Tous les multiples de 3 sont impairs ».

La proposition A est vraie.

3. $\bar{A}$: « 6 n'est pas un multiple de 2 ou n'est pas un multiple de 3 ».

La proposition A est vraie.

Remarque

La négation de « A et B » dans une proposition est « non A ou non B ».

15 1. a) Vrai. b) Faux. c) Faux.

2. a) « Pour tous nombres réels a et b , si $a^2 = b^2$, alors $a = b$ ».

b) « Pour tous nombres réels a et b , si $a = b$, alors $a^2 = b^2$ ».

c) « Pour tous nombres réels a , b et c , si $ac \leq bc$, alors $a \leq b$ ».

3. a) « Pour tous nombres réels a et b , si $a^2 \neq b^2$, alors $a \neq b$ ».

b) « Pour tous nombres réels a et b , si $a \neq b$, alors $a^2 \neq b^2$ ».

c) « Pour tous nombres réels a , b et c , si $ac > bc$, alors $a > b$ ».

16 1. Vrai. 2. Vrai.

17 1. En choisissant $x = 0,5$, on a $0,5^2 = 0,25$, c'est-à-dire $0,5^2 < 0,5$.

2. En choisissant $a = 2$ et $b = -2$, on a $2^2 = (-2)^2$, mais $2 \neq -2$.

3. En choisissant $a = -4$ et $b = 2$, on a $-\frac{1}{4} = -0,25$ et $\frac{1}{2} = 0,5$, soit $-\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

4. En choisissant $a = -3$, on a $(-3)^2 = 9 > 4$, mais $-3 < 2$.

5. En choisissant deux intervalles I_1 et I_2 tels que $I_1 = [0 ; 1]$ et $I_2 = [2 ; 3]$, $I_1 \cup I_2 = [0 ; 1] \cup [2 ; 3]$ qui n'est pas un intervalle.

18 ● Cas 1 : si n est un nombre entier naturel pair, alors n est un multiple de 2 et on peut écrire $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}$). Pour $n = 2p$, alors $n(n+1) = 2p \times (n+1)$, soit $n(n+1) = 2[p \times (n+1)]$, donc $n(n+1)$ est divisible par 2.

● Cas 2 : si n est un nombre entier naturel impair, on peut écrire $n = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{N}$). Pour $n = 2p + 1$, alors $n(n+1) = n \times (2p + 1 + 1) = n \times (2p + 2) = 2n \times (p + 1) = 2[n \times (p + 1)]$, donc $n(n+1)$ est divisible par 2.

Rappel

Soit A et B deux propositions.

- Une implication est une proposition construite de la façon suivante :

« si A, alors B ».

On la note $A \Rightarrow B$.

- La réciproque de « si A, alors B » est « si B, alors A ».

- La contraposée de « si A, alors B » est « si non B, alors non A ».

Rappel

Soit A et B

deux propositions.

Une équivalence est une proposition pour

laquelle l'implication et la réciproque sont vraies.

On la note $A \Leftrightarrow B$.

L'astuce du prof !

Pour démontrer qu'une proposition est fausse, il suffit de trouver un exemple qui ne convient pas.

Rappel

Le raisonnement par disjonction des cas consiste à démontrer une proposition en distinguant plusieurs cas.

1 Notion de fonction. Ensemble de définition

1 Définition d'une fonction

- Soit I une partie de $\mathbb{R}$.

Une fonction définie sur I est un « dispositif mathématique » qui à chaque valeur x de I associe un unique nombre réel noté $f(x)$.

$f(x)$ est appelé l'**image** de x par f .

$f(x)$ a pour **antécédent** x par la fonction f .

Exemple : Il ne faut pas confondre $f(x)$ et f :

- f est la fonction ;
- $f(x)$ est un nombre réel, c'est l'image de x par la fonction f .

• Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3$.

L'image de 3 par f , notée $f(3)$, est successivement égale à :

$$f(3) = -2 \times 3^2 + 3; \quad f(3) = -2 \times 9 + 3;$$

$$f(3) = -18 + 3; \quad f(3) = -15.$$

On dit que -15 est l'image de 3 par f ou que 3 est un antécédent de -15 par f .

2 Ensemble de définition d'une fonction

- La partie I de $\mathbb{R}$ sur laquelle est définie la fonction s'appelle ensemble de définition de cette fonction.

x prend ses valeurs dans cet ensemble.

• Exemple

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 2[\cup] 2 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

La fonction f n'est pas définie pour $x = 2$, car la valeur 2 annule le dénominateur.

Le dénominateur d'un quotient n'est jamais nul.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Calculer des images

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

Déterminer les images par f des nombres réels $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -1$.

CORRIGÉ

• Pour $x_1 = \frac{1}{2}$, on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \frac{1}{8} - 2 \times \frac{1}{4} + 3;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{2}{4} + 3 = \frac{1}{8} - \frac{4}{8} + \frac{24}{8} = \frac{21}{8}$$

• Pour $x_2 = -1$, on a :

$$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 3 = -1 - 2 \times 1 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0.$$

L'image de $\frac{1}{2}$ par f est $\frac{21}{8}$ et l'image de -1 par f est 0 .

Méthode

On calcule $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(-1)$.

2 Calculer des antécédents

ÉNONCÉ

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3$.

Déterminer, s'ils existent, les antécédents par g des nombres réels suivants :

$y_1 = 1$, $y_2 = -5$ et $y_3 = -3$.

CORRIGÉ

• Pour $y_1 = 1$, on résout l'équation $x^2 - 3 = 1$ successivement équivalente à :

$$x^2 = 4; x = \sqrt{4} \text{ ou } x = -\sqrt{4}; x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

• Pour $y_2 = -5$, on résout l'équation :

$$x^2 - 3 = -5, \text{ soit } x^2 = -2. \text{ Cette équation n'a pas de solution réelle.}$$

• Pour $y_3 = -3$, on résout l'équation $x^2 - 3 = -3$ successivement équivalente à $x^2 = 3 - 3$; $x^2 = 0$; $x = 0$. Les antécédents de 1 par g sont -2 et 2 ; -5 n'a pas d'antécédent par g et l'antécédent de -3 par g est 0 .

Conseil

On résout les équations

$$g(x) = 1, g(x) = -5 \text{ et}$$

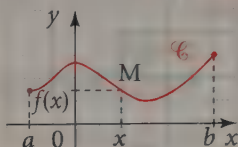
$$g(x) = -3.$$

2 Représentation graphique d'une fonction

- Soit f une fonction définie sur $I = [a; b]$.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$x \in I \text{ et } y = f(x).$$



• Exemple

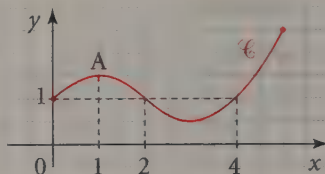
Soit f une fonction définie sur $[0; 5]$ dont on donne la représentation graphique dans le plan rapporté à un repère.

On peut lire sur le graphique :

- $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ appartient à $\mathcal{C}$ ou encore $f(1) = \frac{3}{2}$:

l'image de 1 par f est $\frac{3}{2}$.

- $f(0) = 1$, $f(2) = 1$ et $f(4) = 1$; 1 a pour antécédents par f : 0, 2 et 4.



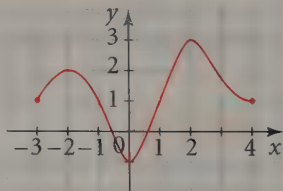
EXERCICES RÉSOLUS

1 Lire sur un graphique

ÉNONCÉ

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-3; 4]$ dans le plan rapporté à un repère.

1. Déterminer graphiquement $f(-2)$ et $f(2)$.
2. Déterminer graphiquement les antécédents de 1 par f .



CORRIGÉ

1. L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse -2 est 2. Donc $f(-2) = 2$.

Conseil

On se positionne en -2 sur l'axe des abscisses et on cherche le point de la courbe d'abscisse -2 ; on lit alors son ordonnée $f(-2)$.

L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 2 est 3. Donc $f(2) = 3$.

2. Il existe quatre points de la courbe dont l'ordonnée est 1. Leurs abscisses respectives sont -3 ; -1 ; 1 et 4.

Ainsi 1 a quatre antécédents par f : -3 ; -1 ; 1 et 4.

Conseil

On se positionne en 1 sur l'axe des ordonnées et on cherche les points de la courbe d'ordonnée 1. On lit alors leurs abscisses.

Méthode

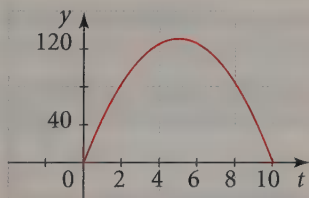
Pour faire cette lecture graphique, on peut tracer la droite d'équation $y = 1$.

2 Résoudre graphiquement un problème

ÉNONCÉ

À l'instant $t = 0$, on lance un projectile à partir du sol. La hauteur y (en m) du projectile en fonction du temps t (en s) est donnée par la courbe.

1. Quelle est la hauteur atteinte par le projectile au bout de 2 s ?
2. Au bout de combien de temps le projectile retombe-t-il au sol ?
3. Entre quels instants la hauteur du projectile est-elle au moins égale à 80 m ?



CORRIGÉ

1. L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 2 est 80. Au bout de 2 s, le projectile atteint une hauteur de **80 m**.

2. Il y a deux points de la courbe dont l'ordonnée est nulle.

Ces points ont pour abscisses 0 et 10.

Or le point de coordonnées $(0; 0)$ correspond au lancement du projectile, donc le projectile retombe au sol **au bout de 10 s**.

3. Tous les points dont l'abscisse est comprise entre 2 et 8 ont une ordonnée supérieure ou égale à 80. Ainsi le projectile aura atteint une hauteur supérieure ou égale à 80 m **entre les instants $t = 2$ et $t = 8$** .

Conseil

Lire sur la courbe l'ordonnée du point d'abscisse 2.

Conseil

Lire sur la courbe le point d'ordonnée égale à 0.

Conseil

Lire sur la courbe les abscisses des points dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 80.

3 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

1 Résolution graphique d'une équation

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y = 0$.

2 Résolution graphique d'une inéquation

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$ revient à déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ situés au-dessus de la droite d'équation $y = 0$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$ revient à déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ situés au-dessous de la droite d'équation $y = 0$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Résoudre graphiquement des équations

ÉNONCÉ

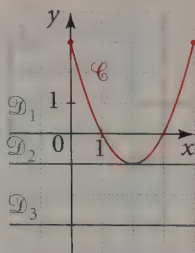
Dans le plan rapporté à un repère, on considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ et les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ d'équations respectives $y = 0$, $y = -1$ et $y = -3$.

Résoudre graphiquement les équations :

$$f(x) = 0, f(x) = -1 \text{ et } f(x) = -3.$$

CORRIGÉ

- La courbe $\mathcal{C}$ coupe la droite $\mathcal{D}_1$ aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = 3$. Donc les solutions sont 1 et 3.



Méthode

On résout graphiquement sur $[0 ; 4]$ l'équation $f(x) = 0$ en déterminant les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}_1$.

- La courbe $\mathcal{C}$ coupe la droite $\mathcal{D}_2$ au point d'abscisse $x = 2$. La solution est 2.
- La courbe $\mathcal{C}$ ne coupe pas la droite $\mathcal{D}_3$. Donc il n'y a pas de solution.

2 Résoudre graphiquement une inéquation

ÉNONCÉ

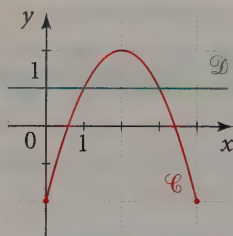
Dans le plan rapporté à un repère, on considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$.

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1$.

CORRIGÉ

La courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessous de la droite d'équation $y = 1$ pour $x \in [0 ; 1[\cup]3 ; 4]$.

Donc l'ensemble des solutions est $[0 ; 1[\cup]3 ; 4]$.



Méthode

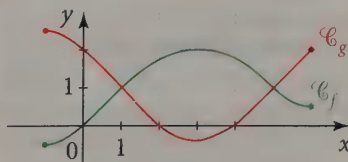
On résout graphiquement $f(x) < 1$ sur $[0 ; 4]$ en déterminant les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés au-dessous de $\mathcal{D}$.

3 Résoudre graphiquement une équation et des inéquations

ÉNONCÉ

Dans le plan rapporté à un repère, on considère les fonctions f et g définies sur $[-1 ; 6]$ et leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ et les inéquations $f(x) < g(x)$ et $f(x) > g(x)$.



CORRIGÉ

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent aux points d'abscisse $x = 1$ et $x = 5$. Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont 1 et 5.

$\mathcal{C}_f$ est située au-dessous de $\mathcal{C}_g$ pour $x \in [-1 ; 1[\cup]5 ; 6]$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est $[-1 ; 1[\cup]5 ; 6]$.

$\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_g$ pour $x \in]1 ; 5[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $]1 ; 5[$.

Méthode

On résout graphiquement sur $[-1 ; 6]$:

- $f(x) = g(x)$ en déterminant les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$;
- $f(x) < g(x)$ en déterminant les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessous de $\mathcal{C}_g$;
- $f(x) > g(x)$ en déterminant les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

4 Sens de variation d'une fonction

1 Définition et propriétés

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a ; b]$.

On dit que f est strictement **croissante** sur I lorsque pour tout nombre réel x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a :

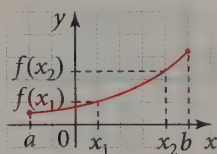
$$f(x_1) < f(x_2).$$

On dit que f est strictement **décroissante** sur I lorsque pour tout nombre réel x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a :

$$f(x_1) > f(x_2).$$

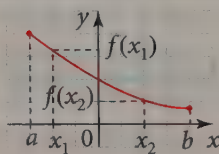
On dit que f est **constante** sur I lorsque pour tout nombre réel x de I , on a :

$$f(x) = k ; k \in \mathbb{R}.$$



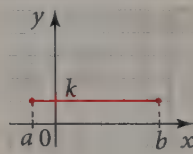
f est strictement croissante sur I .

La courbe « monte » sur I .



f est strictement décroissante sur I .

La courbe « descend » sur I .



f est constante sur I .

La courbe est

« horizontale » sur I .

- Une fonction strictement croissante sur I conserve l'ordre : si deux nombres réels de I sont rangés dans un certain ordre, leurs images sont rangées dans le même ordre.
- Une fonction strictement décroissante sur I renverse l'ordre : si deux nombres réels de I sont rangés dans un certain ordre, leurs images sont rangées dans l'ordre contraire.

2 Tableau de variation

Le sens de variation d'une fonction se résume dans un tableau de variation : on détermine les intervalles sur lesquels la fonction est strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

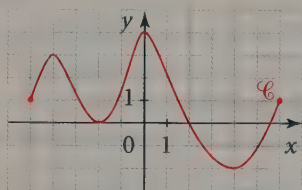
EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer le sens de variation d'une fonction

ÉNONCÉ

On donne la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $[-5; 6]$.

Déterminer le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.



CORRIGÉ

- La courbe $\mathcal{C}$ monte sur les intervalles $[-5; -4]$; $[-2; 0]$ et $[4; 6]$.

La courbe $\mathcal{C}$ descend sur les intervalles $[-4; -2]$ et $[0; 4]$.

- f est strictement croissante sur $[-5; -4]$; $[-2; 0]$ et $[4; 6]$.

f est strictement décroissante sur $[-4; -2]$ et $[0; 4]$.

Méthode

On détermine les intervalles sur lesquels $\mathcal{C}$ « monte » ou « descend », et on écrit alors son sens de variation.

x	-5	-4	-2	0	4	6
$f(x)$	1	3	0	4	-2	1

2 Tracer une courbe

ÉNONCÉ

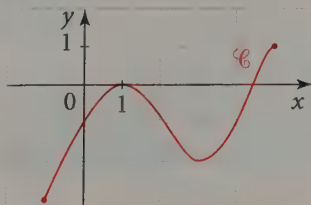
Tracer, dans un repère orthonormal du plan, une représentation graphique $\mathcal{C}$ correspondant au tableau de variation et au tableau de valeurs suivant :

x	-1	1	3	5
$f(x)$	-3	0	-2	1

x	0	2	4	4,5
$f(x)$	-1	-0,8	-1	0

CORRIGÉ

Le tableau de variation permet de placer les points de coordonnées : $(-1; -3)$; $(1; 0)$; $(3; -2)$ et $(5; 1)$.



Conseil

On se positionne sur le point de coordonnées $(-1; -3)$ et on joint harmonieusement tous les points en respectant le sens de variation indiqué dans le tableau de variation.

5 Minimum, maximum d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un nombre réel appartenant à I .

- f admet un **minimum** en x_0 si pour tout nombre réel x de I , on a $f(x) \geq f(x_0)$.
- f admet un **maximum** en x_0 si pour tout nombre réel x de I , on a $f(x) \leq f(x_0)$.
- **Remarques**

f peut ne pas avoir de minimum ou de maximum.

Le même nombre $f(x_0)$ peut être minimum (ou maximum) pour plusieurs valeurs de x_0 .

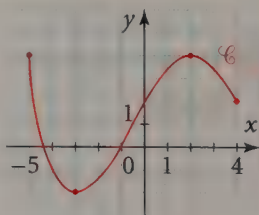
EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer des extremums

ÉNONCÉ

Soit f une fonction définie sur $[-5 ; 4]$, dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan rapporté à un repère.

1. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[0 ; 4]$.
2. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-5 ; 4]$.



CORRIGÉ

1. • Sur l'intervalle $[0 ; 4]$, l'ordonnée du point le plus « haut » de la courbe est $f(2) = 4$. Ainsi pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f(x) \leq 4$, donc f admet un maximum égal à 4, en $x = 2$.

• Sur l'intervalle $[0 ; 4]$, l'ordonnée du point le plus « bas » de la courbe est $f(0) = f(4) = 2$. Ainsi pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f(x) \geq 2$, donc f admet un minimum égal à 2, en $x = 0$ et $x = 4$.

2. • Sur l'intervalle $[-5 ; 4]$, l'ordonnée du point le plus « haut » de la courbe est $f(-5) = f(2) = 4$. Ainsi pour tout $x \in [-5 ; 4]$, $f(x) \leq 4$, donc f admet un maximum égal à 4, en $x = -5$ et $x = 2$.

Méthode

Pour déterminer le maximum (ou le minimum), lire l'ordonnée du ou des points les plus « hauts » (ou les plus « bas ») de la courbe, pour les abscisses appartenant à l'intervalle indiqué.

• Sur l'intervalle $[-5 ; 4]$, l'ordonnée du point le plus « bas » de la courbe est $f(-3) = -2$. Ainsi pour tout $x \in [-5 ; 4]$, $f(x) \geq -2$, donc f admet un minimum égal à -2 , en $x = -3$.

2 Déterminer des extremums

ÉNONCÉ

Soit f une fonction définie sur $[-3 ; 5]$, dont on donne le tableau de variation :

x	-3	-1	0	2	5
$f(x)$	4	-3	1	1	0

Diagramme de variation : une flèche descendante de 4 à -3, une flèche ascendante de -3 à 1, une flèche horizontale de 1 à 1, et une flèche descendante de 1 à 0.

Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-3 ; 5]$.

CORRIGÉ

Toutes les valeurs de $f(x)$ sont supérieures ou égales à -3 et inférieures ou égales à 4 : f présente un minimum égal à -3 , en $x = -1$, et un maximum égal à 4 , en $x = -3$.

Conseil

On détermine, si elles existent, la plus petite et la plus grande des valeurs réelles inscrites aux extrémités des flèches du tableau.

3 Utiliser l'extremum

ÉNONCÉ

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que pour tout nombre réel x , $f(x) > 0$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$		1	

Diagramme de variation : une flèche descendante vers 1 et une flèche ascendante à partir de 1.

CORRIGÉ

Toutes les valeurs de $f(x)$ sont supérieures ou égales à 1 : f présente un minimum égal à 1 , en $x = 3$.

On a donc, pour tout nombre réel x , $f(x) \geq 1$.
Or $1 > 0$ donc, pour tout nombre réel x , $f(x) > 0$.

Rappel

C'est la définition du minimum qui permet de répondre à la question.

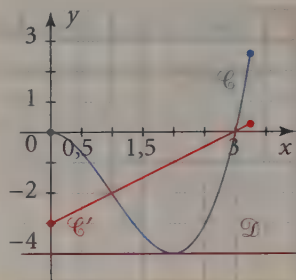
→ Savoir résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

ÉNONCÉ

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[0 ; 3,25]$.

$\mathcal{D}$ est la droite d'équation $y = -4$.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -4$.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.



MÉTHODE

1. Pour résoudre l'équation $f(x) = k$ (k est un nombre réel) :
 - repérer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y = k$;
 - lire les abscisses de ces points : ce sont les solutions de l'équation.
2. Pour résoudre l'équation $f(x) = g(x)$:
 - repérer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$;
 - lire les abscisses de ces points : ce sont les solutions de l'équation.
3. Pour résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$:
 - repérer les points de $\mathcal{C}$ situés au-dessous de ceux de $\mathcal{C}'$;
 - lire les abscisses de ces points : c'est l'ensemble des solutions de l'inéquation.

CORRIGÉ

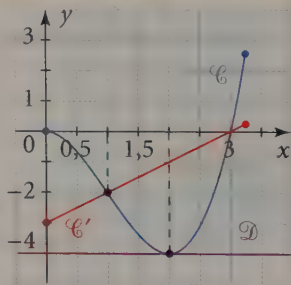
1. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont un point d'intersection qui a pour abscisse 2.

La solution de l'équation $f(x) = -4$ est 2.

2. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont deux points d'intersection qui ont pour abscisses 1 et 3.

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont 1 et 3.

3. On repère les points de $\mathcal{C}$ situés au-dessous de $\mathcal{C}'$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est l'ensemble des abscisses de ces points, soit $]1 ; 3[$.



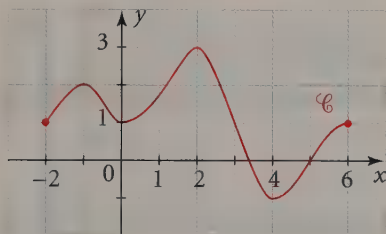
Réflexes à avoir

Faire apparaître les tracés utiles à la lecture sur la figure (ici en vert).

→ Savoir dresser un tableau de variation à partir d'une courbe représentative

ÉNONCÉ

On donne un tracé de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $[-2; 6]$.
Dresser le tableau de variation de f .



MÉTHODE

1. Chercher :

- les intervalles sur lesquels $\mathcal{C}$ monte : f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles ;
- les intervalles sur lesquels $\mathcal{C}$ descend : f est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.

2. Dresser le tableau de variation de f en notant les valeurs de x pour lesquelles f change de sens de variation.

CORRIGÉ

1. • La courbe monte sur les intervalles $[-2; -1]$, $[0; 2]$ et $[4; 6]$.

Donc f est strictement croissante sur $[-2; -1]$, $[0; 2]$ et $[4; 6]$.

• La courbe descend sur les intervalles $[-1; 0]$ et $[2; 4]$.

Donc f est strictement décroissante sur $[-1; 0]$ et $[2; 4]$.

2. Tableau de variation de f :

x	-2	-1	0	2	4	6
$f(x)$	1	2	1	3	-1	1

Piège à éviter

On dit qu'une courbe monte ou descend sur un intervalle, mais que la fonction est strictement croissante ou décroissante sur un intervalle.

➔ Exercices d'application



1 Calculs d'images et d'antécédents

Soit f la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. Déterminer les images par f des nombres réels x suivants :

$$x = 0; \quad x = -\frac{1}{2}; \quad x = 3 \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{4}.$$

2. Déterminer les antécédents de 1 par f .

2 Fonction définie à partir d'un tableau de valeurs

On donne un tableau de valeurs d'une fonction f définie sur $[-5 ; 2]$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	11,5	7	3,5	1	-0,5	-1	-0,5	1

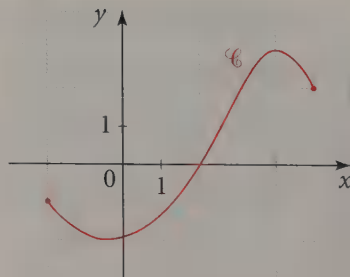
1. Déterminer l'image par f des nombres réels suivants : $-5 ; -1 ; 1$.

2. Déterminer l'antécédent de 7 par f .

3. Déterminer les antécédents de 1 par f .

3 Détermination graphique d'images et d'antécédents

On donne la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère, d'une fonction f définie sur $[-2 ; 5]$.



1. Déterminer graphiquement l'image de -2 par f .
2. Déterminer $f(2)$ et $f(5)$.
3. Déterminer les antécédents éventuels de 0 et -3 par f .
4. Déterminer le nombre réel a tel que $f(a) = 3$.

Lectures graphiques

Une étude montre que la distance de freinage (en m) d'une voiture de marque M, en fonction de la vitesse (en km/h), est donnée par la fonction :

$$d(v) = 0,006v^2; 0 \leq v \leq 200.$$

1. Tracer, sur une calculatrice, la courbe d'équation $y = 0,006x^2$.
2. Déterminer la vitesse à partir de laquelle la distance de freinage est supérieure à 60 m.

Résolution graphique d'une équation de la forme $f(x) = k$

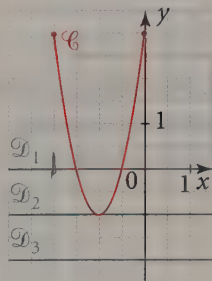
Dans le plan rapporté à un repère, on donne la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction g définie sur $[-2; 0]$.

Sur ce graphique, on a tracé les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ d'équations respectives :

$$y = 0, y = -1 \text{ et } y = -2$$

Résoudre graphiquement sur $[-2; 0]$ les équations :

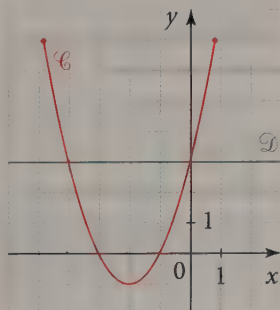
$$g(x) = 0, g(x) = -1 \text{ et } g(x) = -2.$$



Résolution graphique d'une inéquation de la forme $f(x) < k$

Dans le plan rapporté à un repère, on donne la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction g définie sur $[-5; 1]$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3$.

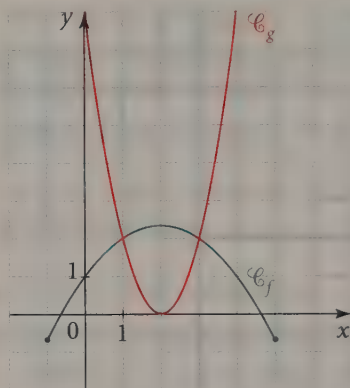
Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq 3$.



7 Résolution graphique d'une inéquation de la forme $f(x) < g(x)$

Dans le plan rapporté à un repère, on considère les fonctions f et g définies sur $[-1; 5]$ et leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ et les inéquations $f(x) < g(x)$ et $f(x) > g(x)$.



8 Détermination du sens de variation d'une fonction définie à partir d'un tableau de variation

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-10; 10]$.

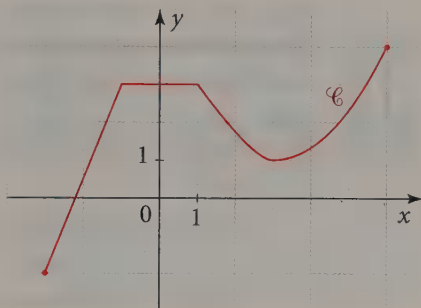
x	-10	-8	0	2	10
$f(x)$	4		1		2
		↘	↗	↘	↗
			0		-3

Compléter les phrases suivantes.

- f est strictement croissante sur $[2; 10]$.
- f est strictement croissante sur $[-10; -8]$.
- L'image de -8 par f est 0.
- $f(0) =$ 1.
- 2 est l'image de -3 par f .
- 2 est l'image de 10 par f .
- $f(\dots) = 4$.

9 Détermination du sens de variation d'une fonction définie par une courbe

On donne la représentation graphique $\mathcal{C}$, dans le plan rapporté à un repère, d'une fonction f définie sur $[-3; 6]$.



1. Déterminer le sens de variation de f .
2. Dresser le tableau de variation de f .

10 Tracé d'une courbe représentative d'une fonction à partir de son tableau de variation

Soit une fonction f correspondant au tableau de variation et au tableau de valeurs suivants :

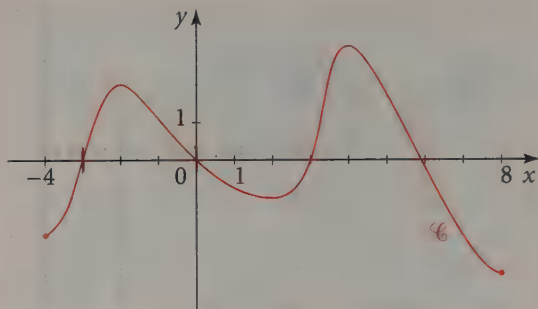
x	-2	-1	1	2	4	5,5	7
$f(x)$	3	1	1	-1	4	2	3

x	-1,5	2,5	3	4,5
$f(x)$	2	0	1,8	3

Tracer, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, une représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction f .

11 Détermination des extremums d'une fonction

Soit f une fonction définie sur $[-4; 8]$, dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan rapporté à un repère.



Déterminer le maximum et le minimum de f sur les intervalles suivants :

1. $[-3; 0]$; 2. $[0; 2]$; 3. $[0; 3]$; 4. $[-4; 8]$.

12 Détermination des extremums

Soit f une fonction définie sur $[-4; 3]$, dont on donne le tableau de variation.

x	-4	-2	0	1	3
$f(x)$		5	-1	5	0

Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-4; 3]$.

13 Détermination du signe d'une fonction

On donne le tableau de variation d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$		-5	

1. Déterminer le maximum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et en déduire que, pour tout nombre réel x , $g(x) < 0$.

2. Résoudre l'inéquation $g(x) > -0,5$.

→ Exercices d'entraînement



14 Formuler la négation d'une proposition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Pour chaque proposition A , écrire sa négation $\bar{A}$.

1. A : « Pour tout nombre réel x , $f(x) > 2$ ».
2. A : « Il existe au moins un nombre réel x tel que $f(x) \leq 0$ ».
3. A : « f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ».
4. A : « f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ».
5. A : « $f(x_0)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ ».
6. A : « $f(x_1)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$ ».

15 Calcul d'images

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1.$$

Compléter le tableau suivant :

x	-5	-1	$-\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{1}{3}$	10
$f(x)$							

16 Calculs d'images et d'antécédents

Soit g la fonction définie sur $] -\infty ; 2[\cup] 2 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x+4}{-x+2}.$$

1. Déterminer : $g(-10)$; $g(-6)$; $g(2,01)$; $g(1,99)$; $g(0)$ et $g(3)$.
2. Déterminer l'antécédent de 0 par g .

17 Tableau de valeurs de fonctions

Soit f et g les fonctions définies sur $[0 ; 10]$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x) = x^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$g(x) = 4x + 32$	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72

2. Vérifier que pour $x = 8$, f et g ont la même image. Quelle est sa valeur ?

18 Tableau de valeurs de fonctions

On donne un tableau de valeurs des fonctions f et g définies sur $[-5 ; 5]$.

x	-5	-4,5	-2,5	-0,5	0	0,5	2,5	3,5	5
$f(x)$	26	21,25	7,25	1,25	1	1,25	7,25	13,25	26
$g(x)$	16	14,5	8,5	2,5	1	-0,5	-6,5	-9,5	-14

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses ; les corriger si elles sont fausses.

- $f(-4,5) = 21,25$.
- L'image de 2,5 par g est 7,5.
- $f(0) = g(0)$.
- 3,5 est un antécédent de -10,5 par g .
- 1,25 est un antécédent de -0,5 par f .
- 0,5 est un antécédent de 1,5 par g .
- L'image de -0,5 par g est 1,25.
- 2,5 est un antécédent de 8,5 par g .

19 Lectures graphiques

Soit h la fonction définie sur $] -\infty ; -3[\cup] -3 ; +\infty [$ par :

$$h(x) = \frac{2}{x+3}.$$

1. Tracer, avec une calculatrice, la courbe représentative de h .
2. À l'aide du graphique ou par le calcul, déterminer :
 - a) L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse -1 .
 - b) L'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 6 .
 - c) Les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est négative.
 - d) Les ordonnées des points de la courbe dont l'abscisse est positive.
 - e) L'antécédent de 0 par h .
 - f) L'image de 0 par h .

(Les réponses seront graphiques ou numériques selon la lisibilité de la courbe sur la calculatrice.)

20 Utilisation du langage mathématique

Traduire les énoncés suivants en utilisant les symboles des fonctions.

1. L'image de -2 par f est 3 .
2. -3 a pour image 0 par g .
3. Les antécédents de -1 par f sont 2 et 4 .
4. La courbe représentative de h passe par les points $A(-1; 3)$ et $B(0; 1)$.
5. La courbe représentative de f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -2 .
6. La courbe représentative de g coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -3 et 0 .
7. La courbe représentative de f est située au-dessus de l'axe des abscisses pour tout nombre réel x strictement positif.

21 Calculs d'antécédents

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Déterminer l'antécédent de -1 par f .

22 Calcul d'antécédents

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 2x - 4$.

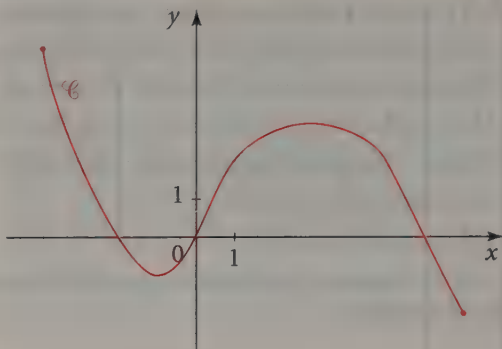
1. Développer l'expression $(x + 3)(x - 1)$.
2. En déduire les antécédents de -1 par g .

23 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la fonction f définie sur $[-4; 7]$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

Résoudre graphiquement sur $[-4; 7]$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $f(x) = -2$.
2. $f(x) = 0$.
3. $f(x) = 2$.
4. $f(x) \geq 2$.
5. $f(x) < 0$.

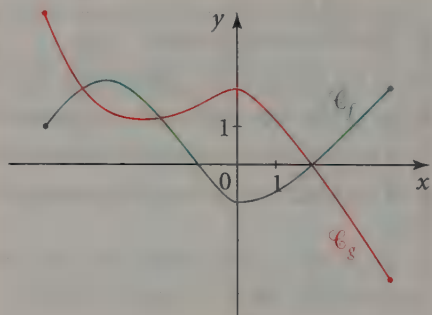


24 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Dans le plan rapporté à un repère, on considère les fonctions f et g définies sur $[-5; 4]$ et leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Résoudre graphiquement sur $[-5; 4]$ les équations et inéquations suivantes :

1. $f(x) = 0$.
2. $g(x) = 0$.
3. $f(x) = g(x)$.
4. $f(x) > g(x)$.
5. $g(x) > f(x)$.



25 Tracé de la courbe représentative d'une fonction

Tracer, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, une courbe représentative de la fonction f sachant que :

- f est définie sur $[-2; 8]$;
- f est strictement décroissante sur les intervalles $[-2; 0]$ et $[3; 8]$;
- f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 3]$;
- $f(0) = 0$; $f(5) = 0$; $f(-2) = 2$;
- le maximum de f est atteint en $x = 3$ et vaut 4;
- le minimum de f est atteint en $x = 8$ et vaut -2 .

26 Maximum et minimum d'une fonction

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-5 ; 5]$.

x	-5	-1	2	5
$f(x)$	0	-3	3	-6

1. Déterminer les maximum et minimum de la fonction f et les valeurs de x pour lesquels ils sont atteints.

2. Comparer les nombres suivants :

a) $f(-4)$ et $f(-3)$;

b) $f(0)$ et $f(1)$;

c) $f(-0,5)$ et $f(1)$;

d) $f(3)$ et $f(4,5)$.

27 Étude d'une fonction définie à partir de son tableau de variation

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[2 ; 8]$.

x	2	4	8
$f(x)$	-1	3	0

1. Décrire avec un vocabulaire adapté le sens de variation de f .

2. Déterminer l'image par f de chacun des nombres : 2 ; 4 ; 8.

3. Déterminer le maximum de f sur $[2 ; 8]$.

4. Tracer une représentation graphique de f correspondant au tableau de variation.

28 Étude d'une fonction définie à partir de son tableau de variation

On donne le tableau de variation d'une fonction g définie sur $[0 ; 12]$.

x	0	10	12
$g(x)$	2	-1	0

1. Décrire en langage usuel le sens de variation de g .
2. Que représente $g(10)$ pour la fonction g ?
3. Laquelle des deux affirmations suivantes est vraie ?

Pour tout x de $[0 ; 12]$, $g(x) \geq -1$.

Pour tout x de $[0 ; 12]$, $g(x) \leq -1$.

29 Étude graphique d'une fonction

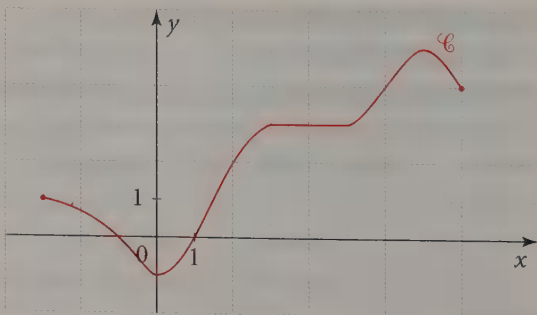
Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

1. Tracer sur une calculatrice, la courbe représentative de f .
2. Dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les maximum et minimum de f .

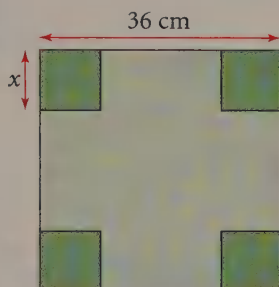
30 Sens de variation d'une fonction

Déterminer le sens de variation et dresser le tableau de variation de la fonction g définie sur $[-3 ; 8]$, dont on donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan rapporté à un repère.



E1 Étude d'une fonction

Une entreprise fabrique des boîtes. Pour cela, elle dispose de cartons carrés de 36 cm de côtés dans lesquels sont découpés, à chaque coin, un carré de x cm de côté. Après pliage des côtés, on obtient la boîte.



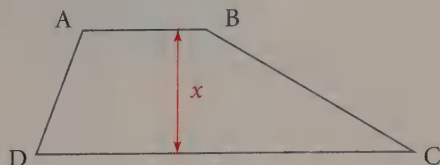
1. Quelles sont les valeurs que peut prendre x ?
2. Déterminer en fonction de x le volume de la boîte.
3. On définit ainsi une fonction V qui, à tout nombre réel x déterminé à la question 1, associe le volume de la boîte.
 - a) Définir la fonction V .
 - b) Tracer la courbe représentative de la fonction V sur votre calculatrice.
 - c) Déterminer la valeur x pour laquelle le volume de la boîte est maximal.

E2 Étude d'une fonction

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = 0,5x^2 + 5x.$$

1. Déterminer l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 8.
2. Déterminer l'antécédent de 12 par f .
3. On considère le trapèze ABCD :



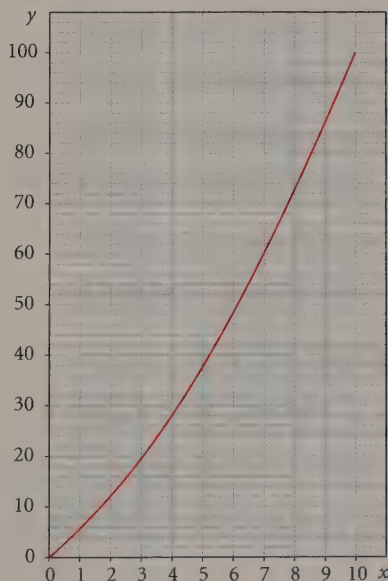
$$AB = x \text{ cm}, CD = 10 \text{ cm}, 0 \leq x \leq 10$$

- a) Déterminer l'aire $\mathcal{A}(x)$ du trapèze ABCD en fonction de x .

- b) Calculer l'aire du trapèze pour $x = 8$ cm.

- c) Déterminer la valeur de x si l'aire du trapèze est égale à 12 cm^2 .

- d) À partir de quelle valeur de x , l'aire du trapèze est-elle supérieure à 48 cm^2 ?



→ Exercices d'application

1. $f(0) = \frac{2 \times 0 + 1}{0 + 1}$; $f(0) = 1$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{-\frac{1}{2} + 1}; \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$f(3) = \frac{2 \times 3 + 1}{3 + 1}; \quad f(3) = \frac{7}{4}.$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{4} + 1}{\frac{1}{4} + 1}; \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}};$$

$$\text{d'où } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{5}; \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{5}.$$

Les images par f de 0 ; $-\frac{1}{2}$; 3 et $\frac{1}{4}$ sont respectivement 1 ; 0 ; $\frac{7}{4}$ et $\frac{6}{5}$.

2. On résout l'équation $f(x) = 1$.

Cette équation est successivement équivalente à :

$$\frac{2x + 1}{x + 1} = 1; \quad 2x + 1 = x + 1; \quad x = 0.$$

L'antécédent de 1 par f est 0 .

2. $f(-5) = 11,5$; $f(-1) = -0,5$; $f(1) = -0,5$.

2. L'antécédent de 7 par f est -4 .

3. Les antécédents de 1 par f sont -2 et 2 .

3. L'image de -2 par f est $f(-2)$, soit -1 .

2. $f(2) = 0$; $f(5) = 2$.

3. L'antécédent de 0 par f est 2 .
 -3 n'a pas d'antécédent par f .

4. a est l'antécédent de 3 par f , soit $a = 4$.

Remarque

On peut vérifier les calculs avec la calculatrice.

Rappel

Chercher l'image d'un nombre réel revient à effectuer un calcul ;
 chercher un antécédent revient à résoudre une équation.

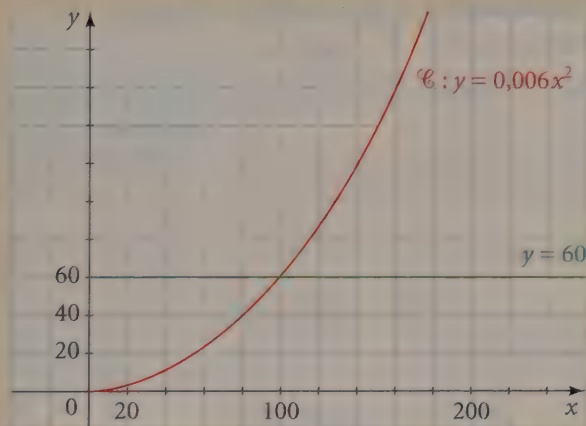
Rappel

Un nombre réel peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents par une fonction.

4 1. Graphique ci-après.

2. On trace la droite d'équation $y = 60$. La valeur cherchée est celle à partir de laquelle la courbe est au-dessus de la droite. On lit $x = 100$.

La distance de freinage est supérieure à 60 m à partir de 100 km/h.



Piège à éviter
Il faut bien choisir la fenêtre de tracé sur la calculatrice.

5 • Résolution de l'équation $g(x) = 0$

La courbe $\mathcal{C}$ coupe la droite $\mathcal{D}_1$ aux points d'abscisses :

$x = -\frac{3}{2}$ et $x = -\frac{1}{2}$. Donc les solutions sont $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

• Résolution de l'équation $g(x) = -1$

La courbe $\mathcal{C}$ coupe la droite $\mathcal{D}_2$ au point d'abscisse $x = -1$.

Donc la solution est -1 .

• Résolution de l'équation $g(x) = -2$.

La courbe $\mathcal{C}$ ne coupe pas la droite $\mathcal{D}_3$. Donc il n'y a pas de solution.

6 La courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessous de la droite d'équation $y = 3$ pour $x \in]-4 ; 0[$ et coupe la droite d'équation $y = 3$ pour $x = -4$ et $x = 0$.

Donc l'ensemble des solutions est $[-4 ; 0]$.

7 Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = 3$.

Les solutions sont **1** et **3**.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ pour $x \in [-1 ; 1[\cup]3 ; 5]$.

L'ensemble des solutions est $[-1 ; 1[\cup]3 ; 5]$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ pour $x \in]1 ; 3[$.

L'ensemble des solutions est $]1 ; 3[$.

- 8 ● f est strictement **croissante** sur $[2 ; 10]$.
- f est strictement **décroissante** sur $[-10 ; -8]$.
- L'image de -8 par f est **0**.
- $f(0) = 1$.
- 2 est **un antécédent** de -3 par f .
- 2 est **l'image** de 10 par f .
- $f(-10) = 4$.

Piège à éviter

Il faut bien faire la distinction entre image et antécédent.

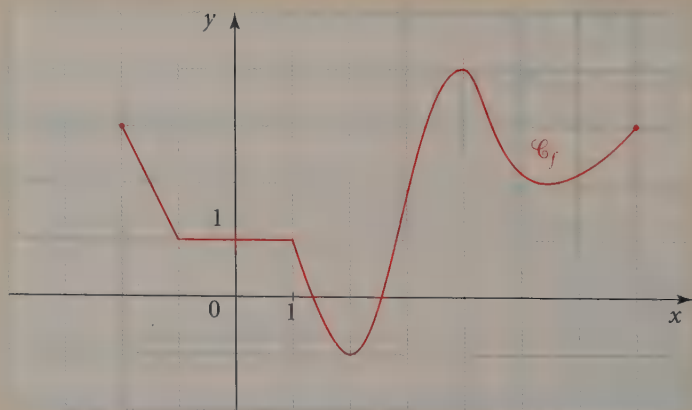
9 1. Sens de variation de f :

- f est strictement croissante sur $[-3 ; -1]$ et sur $[3 ; 6]$;
- f est constante sur $[-1 ; 1]$;
- f est strictement décroissante sur $[1 ; 3]$.

2. Tableau de variation de f .

x	-3	-1	1	3	6
$f(x)$	-2	3	3	1	4

10 Tracé de $\mathcal{C}_f$ en prenant en compte les données fournies par le tableau de variation et le tableau de valeurs.



11 1. Sur $[-3 ; 0]$: f admet un maximum égal à 2, en $x = -2$ et un minimum égal à 0, en $x = -3$ et $x = 0$.

2. Sur $[0 ; 2]$: f admet un maximum égal à 0, en $x = 0$ et un minimum égal à -1 , en $x = 2$.

3. Sur $[0 ; 3]$: f admet un maximum égal à 0, en $x = 0$ et $x = 3$ et un minimum égal à -1 , en $x = 2$.

4. Sur $[-4 ; 8]$: f admet un maximum égal à 3, en $x = 4$ et un minimum égal à -3 , en $x = 8$.

12 Pour tout $x \in [-4 ; 3]$, $f(x) \leq 5$ et $f(x) \geq -1$. Ainsi, f présente un maximum égal à 5, en $x = -2$ et $x = 1$; f présente un minimum égal à -1 en $x = 0$.

13 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq -5$, donc g présente un maximum égal à -5 en $x = -1$.

Or, $-5 < 0$; donc, **pour tout nombre réel x , $g(x) < 0$** .

2. Pour tout nombre réel x , on a $g(x) \leq -5$, donc l'inéquation $g(x) > -0,5$ n'a pas de solution.

→ Exercices d'entraînement

14 1. $\bar{A}$: « Il existe au moins un nombre réel x tel que $f(x) \leq 2$ ».

2. $\bar{A}$: « Pour tout nombre réel x , $f(x) > 0$ ».

3. $\bar{A}$: « Il existe au moins deux nombres réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$ ».

4. $\bar{A}$: « Il existe au moins deux nombres réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$ ».

5. $\bar{A}$: « Il existe au moins un nombre réel x tel que $f(x) < f(x_0)$ ».

6. $\bar{A}$: « Il existe au moins un nombre réel x tel que $f(x) > f(x_1)$ ».

Piège à éviter

Dans la notion de « contraire », il faut éviter le lieu commun qui consiste à penser que le contraire de « grand » est « petit »...

15

x	-5	-1	$-\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{1}{3}$	10
$f(x)$	191	7	$\frac{25}{8}$	1	-5	$\frac{5}{27}$	-829

16 1. $g(-10) = \frac{2(-10) + 4}{10 + 2}$; $g(-10) = -\frac{4}{3}$.

$g(-6) = \frac{2(-6) + 4}{6 + 2}$; $g(-6) = -1$.

$g(2,01) = \frac{2 \times 2,01 + 4}{-2,01 + 2}$; d'où $g(2,01) = \frac{8,02}{-0,01}$; $g(2,01) = -802$.

$g(1,99) = \frac{2 \times 1,99 + 4}{-1,99 + 2}$; d'où $g(1,99) = \frac{7,98}{0,01}$; $g(1,99) = 798$.

$g(0) = \frac{2 \times 0 + 4}{-0 + 2}$; $g(0) = 2$. $g(3) = \frac{2 \times 3 + 4}{-3 + 2}$; $g(3) = -10$.

2. On résout l'équation $\frac{2x + 4}{-x + 2} = 0$; elle est équivalente à :

$$2x + 4 = 0, \text{ soit } x = -2.$$

L'antécédent de 0 par g est -2 .

Rappel

Chercher un antécédent revient à résoudre une équation.

17 1. Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x) = x^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$g(x) = 4x + 32$	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72

2. $f(8) = g(8)$, donc f et g ont la même image ; sa valeur est 64.

18 1. Vrai.

2. Faux, l'image de 2,5 par g est $-6,5$.

3. Vrai.

4. Faux, 3,5 est un antécédent de $-9,5$ par g .

5. Faux, 1,25 est l'image de $-0,5$ par f .

6. Faux, $-0,5$ est un antécédent de 2,5 par g .

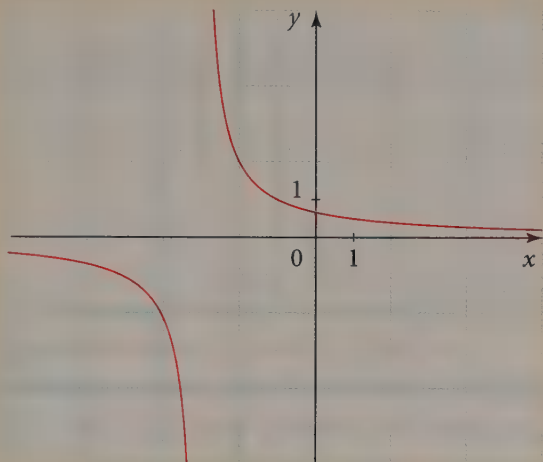
7. Faux, l'image de $-0,5$ par g est 2,5.

8. Vrai.

Rappel

Si $f(a) = b$, alors b est l'image de a par f et a est un antécédent de b par f .

19 1.



2. a) On peut répondre à cette question graphiquement ou numériquement.

L'ordonnée du point de la courbe d'abscisse -1 est $h(-1)$. On a $h(-1) = 1$.

b) Réponse numérique : l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 6 est l'antécédent de 6 par h .

On résout l'équation $\frac{2}{x+3} = 6$, successivement équivalente à :

$$2 = 6(x+3), \text{ soit } 2 = 6x + 18; 6x = -16; x = \frac{-16}{6}, \text{ soit } x = -\frac{8}{3}.$$

c) Réponse graphique : on détermine les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de l'axe des abscisses. On lit : $x < -3$.

d) Réponse graphique : on détermine les ordonnées des points de la courbe dont l'abscisse est positive ($x \geq 0$).

$$\text{On a : } h(0) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{On lit : } 0 < y \leq \frac{2}{3}.$$

Remarque

On peut retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'inéquation

$$\frac{2}{x+3} < 0.$$

e) Réponse graphique : la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses, donc 0 n'a pas d'antécédent par h .

f) Réponse numérique : $h(0) = \frac{2}{3}$; l'image de 0 par h est $\frac{2}{3}$.

20 1. $f(-2) = 3$.

2. $g(-3) = 0$.

3. $f(2) = -1$ et $f(4) = -1$.

4. $h(-1) = 3$ et $h(0) = 1$.

5. $f(0) = -2$.

6. $g(-3) = 0$ et $g(0) = 0$.

7. $f(x) > 0$ pour $x > 0$.

Piège à éviter

Il ne faut pas confondre strictement positive et strictement croissante.

21 On résout l'équation $f(x) = -1$.

Cette équation est successivement équivalente à :

$$x^2 - 6x + 8 = -1, \text{ soit } x^2 - 6x + 9 = 0; (x-3)^2 = 0,$$

$$\text{soit } x = 3.$$

L'antécédent de -1 par f est 3.

Rappel

Il faut bien connaître les identités remarquables.

22 1. $(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$.

2. On résout l'équation $x^2 + 2x - 4 = -1$. Cette équation est successivement équivalente à : $x^2 + 2x - 3 = 0$; $(x+3)(x-1) = 0$

$$x+3 = 0 \text{ ou } x-1 = 0, \text{ soit } x = -3 \text{ ou } x = 1.$$

Les antécédents de -1 par g sont -3 et 1 .

23 1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -2$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y = -2$.

On trace la droite d'équation $y = -2$, parallèle à l'axe des abscisses. On lit : $x = 7$. Donc, la solution est 7.

2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses. On lit : $x = -2$, $x = 0$ et $x = 6$. Donc les solutions sont -2 ; 0 et 6 .

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y = 2$.

On trace la droite d'équation $y = 2$, parallèle à l'axe des abscisses.

On lit : $x = -3$, $x = 1$ et $x = 5$. Donc les solutions sont -3 ; 1 et 5 .

4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 2$ revient à déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés sur ou au-dessus de la droite d'équation $y = 2$.

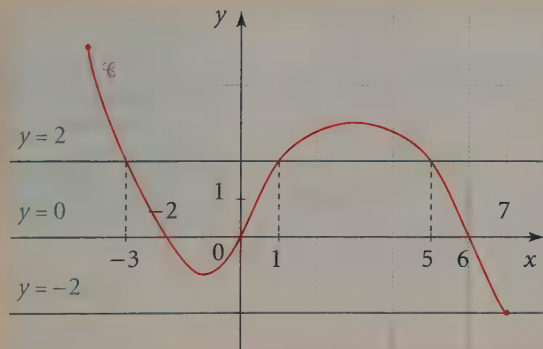
On lit : $x \in [-4 ; -3] \cup [1 ; 5]$.

Donc l'ensemble des solutions est $[-4 ; -3] \cup [1 ; 5]$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés au-dessous de la droite d'équation $y = 0$.

On lit : $x \in]-2 ; 0[\cup]6 ; 7]$.

Donc l'ensemble des solutions est $]-2 ; 0[\cup]6 ; 7]$.



Gagnez des points !

On ajoute sur le graphique le tracé des droites permettant la lecture des solutions.

24 1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 0$.

On lit : $x = -1$ et $x = 2$. Donc, les solutions sont -1 et 2 .

2. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 0$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et de la droite d'équation $y = 0$.

On lit : $x = 2$. Donc, la solution est 2 .

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

On lit : $x = -4$, $x = -2$ et $x = 2$. Donc, les solutions sont -4 , -2 et 2 .

4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$ revient à déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

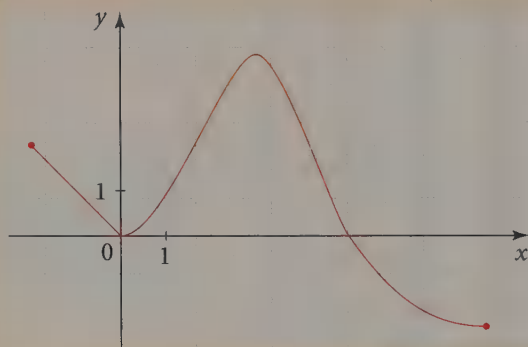
On lit : $x \in]-4 ; -2[\cup]2 ; 4]$.

Donc, l'ensemble des solutions est $]-4 ; -2[\cup]2 ; 4]$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) > f(x)$ revient à déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ situés au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

On lit : $x \in [-5 ; -4[\cup]-2 ; 2[$.

Donc, l'ensemble des solutions est $[-5 ; -4[\cup]-2 ; 2[$.



Rappel

Le maximum est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe.

Le minimum est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe.

26 1. f admet un minimum égal à -6 en $x = 5$.

f admet un maximum égal à 3 en $x = 2$.

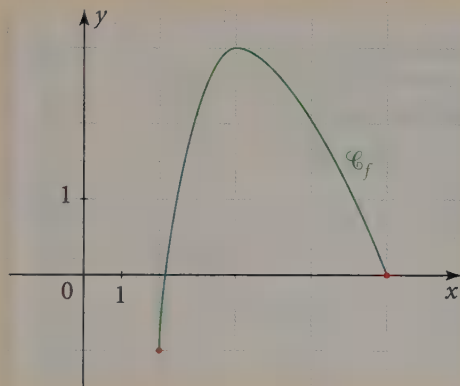
2. a) f est strictement décroissante sur $[-5 ; -1]$; $-4 < -3$, donc $f(-4) > f(-3)$.

b) f est strictement croissante sur $[-1 ; 2]$; $0 < 1$, donc $f(0) < f(1)$.

c) f est strictement croissante sur $[-1 ; 2]$; $-0,5 < 1$, donc $f(-0,5) < f(1)$.

d) f est strictement décroissante sur $[2 ; 5]$; $3 < 4,5$, donc $f(3) > f(4,5)$.

- 27 1. f est strictement **croissante** sur $[2 ; 4]$ et strictement **décroissante** sur $[4 ; 8]$.
 2. $f(2) = -1 ; f(4) = 3$ et $f(8) = 0$.
 3. Le maximum de f sur $[2 ; 8]$ est 3.
 4.



- 28 1. g est strictement décroissante sur $[0 ; 10]$ et strictement croissante sur $[10 ; 12]$.
 2. $g(10)$ est le minimum de g sur $[0 ; 12]$.
 3. La 1^{re} affirmation est vraie : pour tout x de $[0 ; 12]$, $g(x) \geq -1$.

Remarque
 -1 est le minimum
 de g sur $[0 ; 12]$.

- 29 1. Travail à faire avec une calculatrice.
 2. Tableau de variation de f sur $[-3 ; 3]$:

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	-17	3	-1	19

- 3.** Le minimum de f sur $[-3 ; 3]$ est -17 , atteint pour $x = -3$.
Le maximum de f sur $[-3 ; 3]$ est 19 , atteint pour $x = 3$.

- 30** g est strictement décroissante sur l'intervalle $[-3 ; 0]$.
 g est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
 g est constante sur l'intervalle $[3 ; 5]$.
 g est strictement croissante sur l'intervalle $[5 ; 7]$.
 g est strictement décroissante sur l'intervalle $[7 ; 8]$.

x	-3	0	3	5	7	8
$g(x)$	1	-1	3	3	5	4

- 31** **1.** $0 < x < 18$.

- 2.** La hauteur de la boîte est x .

Un côté du fond de la boîte est $36 - 2x$.

Le volume V d'un parallélépipède rectangle est :

$$V = (\text{côté})^2 \times \text{hauteur}.$$

Numériquement :

$$V = x(36 - 2x)^2, \text{ soit } V = x(1\,296 - 144x + 4x^2)$$

$$V = 4x^3 - 144x^2 + 1\,296x.$$

- 3. a)** V est la fonction définie sur $]0 ; 18[$ par :

$$V(x) = 4x^3 - 144x^2 + 1\,296x.$$

- b)** On obtient le tracé de la courbe à l'aide d'une calculatrice graphique.

- c)** La fonction V admet un maximum sur $]0 ; 18[$ en $x = 6$.

Le volume de la boîte est donc maximal pour $x = 6$ cm.

3.2 1. L'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 8 est 72.

2. L'antécédent de 12 par f est 2.

3.a) L'aire du trapèze

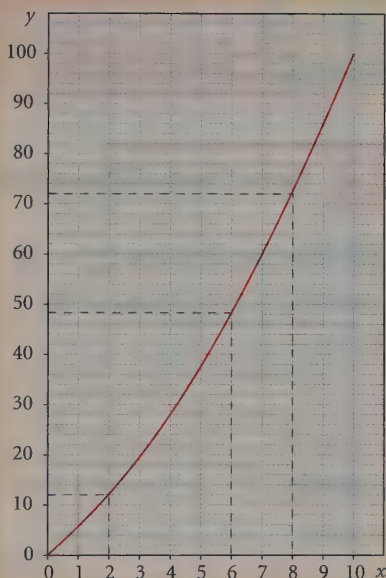
$$\text{est } \mathcal{A}(x) = \frac{(10+x) \times x}{2},$$

$$\text{soit } \mathcal{A}(x) = 5x + \frac{x^2}{2} = f(x).$$

b) $\mathcal{A}(8) = 72$; si $x = 8$ cm, l'aire du trapèze est égale à 72 cm^2 (cf. **1.**).

c) Si l'aire du trapèze est 12 cm^2 , alors : $x = 2$ cm (cf. **2.**).

d) L'aire du trapèze est supérieure à 48 cm^2 lorsque x est supérieur à 6 cm.



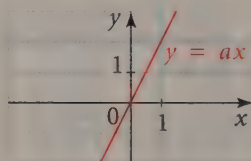
1 Fonctions linéaires et affines

1 Fonction linéaire : $x \mapsto ax$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

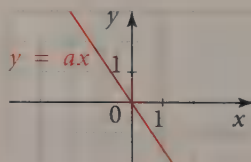
• $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ax	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de ax	$-$	0	$+$



• $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ax	$+\infty$	0	$-\infty$
signe de ax	$+$	0	$-$



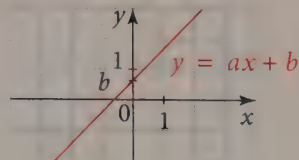
2 Fonction affine : $x \mapsto ax + b$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

• $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $ax + b$	$-$	0	$+$

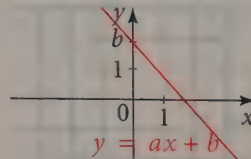
$a > 0 ; b \neq 0$



• $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$+\infty$	0	$-\infty$
signe de $ax + b$	$+$	0	$-$

$a < 0 ; b \neq 0$



EXERCICES RÉSOLUS

1 Résoudre une inéquation

ÉNONCÉ

Résoudre l'inéquation $6x - 1 > 3x + 2$.

CORRIGÉ

$$6x - 1 - 3x > 3x + 2 - 3x, \text{ soit } 3x - 1 > 2.$$

$$3x - 1 + 1 > 2 + 1, \text{ soit } 3x > 3.$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{3}{3}, \text{ soit } x > 1.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $6x - 1 > 3x + 2$ est l'ensemble de tous les nombres réels strictement supérieurs à 1 : $]1 ; +\infty[$.

Conseil

On regroupe tous les termes en x dans un membre et tous les termes constants dans l'autre membre.

2 Comparer graphiquement deux fonctions

ÉNONCÉ

Dans le plan rapporté à un repère, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 2$ et $g(x) = 3$.

Comparer graphiquement les fonctions f et g .

CORRIGÉ

On trace les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives $y = 5x - 2$ et $y = 3$.

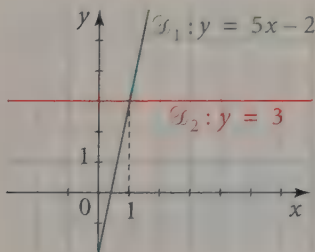
● L'abscisse du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est 1 ; pour $x = 1$, $f(x) = g(x)$.

● $\mathcal{D}_1$ est située au-dessus de $\mathcal{D}_2$ pour $x \in]1 ; +\infty[$, soit $f(x) > g(x)$.

● $\mathcal{D}_1$ est située au-dessous de $\mathcal{D}_2$ pour $x \in]-\infty ; 1[$, soit $f(x) < g(x)$.

Méthode

Comparer graphiquement deux fonctions revient à étudier la position de l'une par rapport à l'autre.



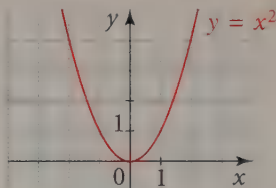
2 Fonctions carré et inverse

1 Fonction carré : $x \mapsto x^2$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$
signe de x^2	$-$	0	$+$

La courbe est une **parabole**.

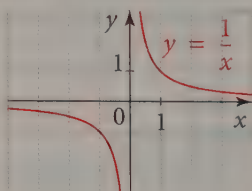


2 Fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$

Cette fonction est définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$+\infty$	0
signe de $\frac{1}{x}$	$-$		$+$

La courbe est une **hyperbole**.



EXERCICE RÉSOLU

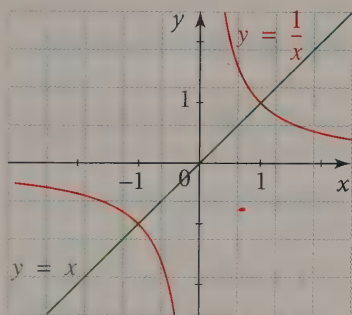
► Résoudre une équation et une inéquation

ÉNONCÉ

1. Résoudre graphiquement l'équation $\frac{1}{x} = x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 1$.

CORRIGÉ

1.



Les solutions de l'équation $\frac{1}{x} = x$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite. On lit : -1 et 1 .

2. $x^2 > 1$ équivaut à $x^2 - 1 > 0$, soit :
 $(x - 1)(x + 1) > 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	
$x^2-1=(x-1)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 1$ est :

$$]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$

Méthode

On trace la courbe d'équation

$$y = \frac{1}{x} \text{ et la droite d'équation}$$

$y = x$ dans un repère bien choisi, puis on détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.

Conseil

On étudie le signe de $x^2 - 1$ à l'aide d'un tableau.

Conseil

On peut vérifier graphiquement ce résultat.

3 Développement d'un produit : transformation d'un produit en somme

On considère quatre nombres réels a, b, c et d .

1 Développer une expression

Pour développer une expression algébrique, on peut :

- appliquer les règles de distributivité :

$$a(b + c) = ab + ac \text{ et } (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

- utiliser les identités remarquables :

$$\begin{aligned} & \bullet (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; & \bullet (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \\ & \bullet (a - b)(a + b) = a^2 - b^2. \end{aligned}$$

2 Règle des parenthèses

$$\begin{aligned} & \bullet a + (-b) = a - b. & \bullet a + (b + c) = a + b + c. \\ & \bullet a - (b + c) = a - b - c. & \bullet a - (b - c) = a - b + c. \end{aligned}$$

3 Règle des signes

$$\bullet a \times (-b) = -ab. \quad \bullet (-a) \times b = -ab. \quad \bullet (-a) \times (-b) = ab.$$

EXERCICE RÉSOLU

▶ Développer pour résoudre une équation et une inéquation

ÉNONCÉ

Soit $A(x) = (2x - 1)^2 - (3 - x)(5x - 1) - (3x - 2)(3x + 2)$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. l'équation $A(x) = 6$;
2. l'inéquation $A(x) \geq -10x - 7$.

CORRIGÉ

$$(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2;$$

$$(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1.$$

$$(3x-2)(3x+2) = (3x)^2 - 2^2;$$

$$(3x-2)(3x+2) = 9x^2 - 4.$$

$$(3-x)(5x-1) = 3 \times 5x + 3 \times (-1) - x \times 5x - x \times (-1);$$

$$(3-x)(5x-1) = 15x - 3 - 5x^2 + x;$$

$$(3-x)(5x-1) = -5x^2 + 16x - 3.$$

$$\text{On a donc } A(x) = 4x^2 - 4x + 1 - (-5x^2 + 16x - 3) - (9x^2 - 4).$$

$$\text{Soit } A(x) = 4x^2 - 4x + 1 + 5x^2 - 16x + 3 - 9x^2 + 4$$

$$A(x) = -20x + 8.$$

1. On résout alors l'équation $A(x) = 6$.

L'équation $A(x) = 6$ est successivement équivalente à :

$$-20x + 8 = 6; -20x = 6 - 8; -20x = -2; x = \frac{-2}{-20}; x = \frac{1}{10}.$$

La solution de l'équation est $\frac{1}{10}$.

2. On résout l'inéquation $A(x) \geq -10x - 7$.

L'inéquation $A(x) \geq -10x - 7$ est successivement équivalente à :

$$-20x + 8 \geq -10x - 7; -20x + 10x \geq -8 - 7; -10x \geq -15;$$

$$\text{alors } x \leq \frac{-15}{-10}, \text{ soit } x \leq \frac{5 \times 3}{5 \times 2}, \text{ soit } x \leq \frac{3}{2}.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation sont les nombres réels inférieurs ou égaux à $\frac{3}{2}$, ce qui correspond à la demi-droite en couleur, soit :

$$\left] -\infty; \frac{3}{2} \right].$$

Méthode

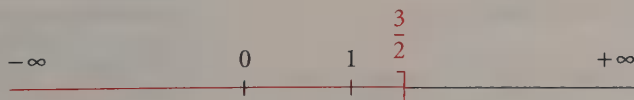
Développer $(2x-1)^2$ et $(3x-2)(3x+2)$ à l'aide des identités remarquables, puis $(3-x)(5x-1)$ en utilisant les règles de la distributivité.

Conseil

Donner l'expression développée, réduite et ordonnée de $A(x)$.

Conseil

Représenter l'ensemble des solutions de l'inéquation sur une droite graduée.



4 Factorisation d'une somme : transformation d'une somme en produit

On considère quatre nombres réels a, b, c et d .

1. Pour factoriser une expression algébrique, on peut :

- chercher un facteur commun apparent : $ac + bc = c(a + b)$;
- utiliser les identités remarquables :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 ;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 ;$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) ;$$

- combiner les deux en écrivant une expression sous la forme $A(x) \times B(x)$.

2. La factorisation permet de résoudre des équations et des inéquations pour lesquelles on applique la règle du produit de facteurs :

$$A(x) \times B(x) = 0 \text{ équivaut à } A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0.$$

EXERCICE RÉSOLU

▶ Factoriser pour résoudre une équation ou une inéquation

ÉNONCÉ

Soit $A(x) = 3(x - 1) + (x^2 - 1) + (x + 2)(1 - x)$.

Soit $B(x) = (2 - x)[1 - (2 - x)^2]$ et $C(x) = 4x^2 + 12x + 9$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $A(x) > -2$ et les équations $B(x) = 0$ et $C(x) = 0$.

CORRIGÉ

$(x - 1)$ est un facteur commun car :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \text{ et}$$

$$(x + 2)(1 - x) = -(x + 2)(x - 1).$$

On a alors :

$$A(x) = 3(x - 1) + (x - 1)(x + 1) - (x + 2)(x - 1).$$

$$\text{Soit } A(x) = (x - 1)[3 + (x + 1) - (x + 2)] ;$$

$$A(x) = (x - 1)(3 + x + 1 - x - 2) ; A(x) = 2(x - 1).$$

Méthode

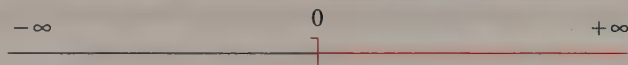
Écrire $A(x)$ de façon à faire apparaître un facteur commun, puis factoriser $A(x)$. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $A(x) > -2$ et représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

L'inéquation $A(x) > -2$ est successivement équivalente à :

$$2(x-1) > -2; \quad x-1 > \frac{-2}{2};$$

$$x-1 > -1; \text{ soit } x > 0.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation sont les nombres réels strictement supérieurs à 0, ce qui correspond à la demi-droite en couleur, soit $]0; +\infty[$.



$1 - (2-x)^2$ est la différence de deux carrés :

$$1 - (2-x)^2 = [1 - (2-x)][1 + (2-x)];$$

$$1 - (2-x)^2 = (1-2+x)(1+2-x);$$

$$1 - (2-x)^2 = (x-1)(3-x).$$

On a donc : $B(x) = (2-x)(x-1)(3-x)$.

L'équation $B(x) = 0$ est successivement équivalente

$$(2-x)(x-1)(3-x) = 0;$$

$$2-x=0 \text{ ou } x-1=0 \text{ ou } 3-x=0;$$

$$x=2 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=3.$$

Les solutions sont 1, 2 et 3.

En posant $a^2 = 4x^2$ et $b^2 = 9$,

soit $a^2 = (2x)^2$ et $b^2 = 3^2$, on obtient :

$$a = 2x \text{ et } b = 3.$$

$C(x)$ est alors de la forme $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

En effet :

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2;$$

$$(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9;$$

$$(2x+3)^2 = C(x).$$

L'équation $C(x) = 0$ est successivement équivalente à :

$$(2x+3)^2 = 0; \quad 2x+3 = 0; \quad x = -\frac{3}{2}.$$

La solution est $-\frac{3}{2}$.

Méthode

Montrer que $1 - (2-x)^2$ peut s'écrire comme la différence de deux carrés, puis factoriser $B(x)$ à l'aide d'une identité remarquable. En déduire les solutions de l'équation $B(x) = 0$.

Méthode

En posant $a^2 = 4x^2$ et $b^2 = 9$, identifier les valeurs de a et de b , puis montrer que $C(x)$ est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$. En déduire une factorisation de $C(x)$. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $C(x) = 0$.

5 Équations et inéquations

1 Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation revient à déterminer tous les nombres réels x qui vérifient l'égalité. Ces nombres réels sont appelés les **solutions** de l'équation.

● **Équation du premier degré de la forme $ax + b = 0$ ($a \neq 0$)**

L'équation $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) d'inconnue x a pour unique solution le nombre réel $-\frac{b}{a}$.

● **Équation du second degré de la forme $x^2 = a$**

- Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions réelles : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, alors l'équation possède une solution réelle : 0.
- Si $a < 0$, alors l'équation ne possède aucune solution réelle.

● **Équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)**

On factorise, si possible, l'expression à l'aide d'une identité remarquable pour obtenir un produit de facteurs du premier degré.

● **Autres formes d'équations**

Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.

- $A(x) \times B(x) = 0$ équivaut à $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$.
- $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ équivaut à $A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$.

2 Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation revient à déterminer tous les nombres réels x qui vérifient l'inégalité.

● **Signe de $ax + b$ ($a \neq 0$)**

- Si $a > 0$, alors $ax + b > 0$

équivaut à $x > -\frac{b}{a}$.

- Si $a < 0$, alors $ax + b > 0$

équivaut à $x < -\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

● Détermination algébrique du signe d'un produit ou d'un quotient

Pour résoudre une inéquation de degré supérieur à 1, il est nécessaire que l'expression soit ramenée à un produit ou quotient de facteurs du premier degré.

Règle des signes : Soit a et b deux nombres réels, non nuls.

Si a et b sont de mêmes signes, alors $a \times b$ et $\frac{a}{b}$ sont positifs.

Si a et b sont de signes contraires, alors $a \times b$ et $\frac{a}{b}$ sont négatifs.

EXERCICE RÉSOLU

► Étudier le signe d'une expression

ÉNONCÉ

Étudier le signe de $f(x) = (x-2)^2 - 9 - (x+1)(2x-3)$

CORRIGÉ

● $(x-2)^2 - 9$ est la différence de deux carrés.

$$(x-2)^2 - 3^2 = (x-2-3)(x-2+3) = (x-5)(x+1).$$

$$\bullet f(x) = (x-5)(x+1) - (x+1)(2x-3) = (x+1)[(x-5) - (2x-3)];$$

$$f(x) = (x+1)(x-5-2x+3); \quad f(x) = (x+1)(-x-2).$$

● On résout l'équation $f(x) = 0$, successivement équivalente à :

$$(x+1)(-x-2) = 0; \quad x+1 = 0 \text{ ou } -x-2 = 0; \quad x = -1 \text{ ou } x = -2.$$

● On établit le tableau de signe, puis on conclut :

Conseil

Factoriser $(x-2)^2 - 9$ à l'aide d'une identité remarquable.

	$x \in]-\infty; -2[$		$x \in]-2; -1[$		$x \in]-1; +\infty[$	
x	$-\infty$	-2			-1	$+\infty$
$x+1$	-		-		0	+
$-x-2$	+	0	-			-
$f(x) = (x+1)(-x-2)$	-	0	+		0	-
$f(x) < 0$		$f(x) > 0$		$f(x) < 0$		

● Pour $x \in]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$, $f(x) < 0$.

● Pour $x \in]-2; -1[$, $f(x) > 0$.

● Pour $x = -2$ et $x = -1$, $f(x) = 0$.

6 Fonction polynôme de degré 2 ; fonction homographique

1 Fonction polynôme de degré 2

Soit a , b et c des nombres réels.

• Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole** d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Cette parabole admet un **axe de symétrie** qui est la droite verticale d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

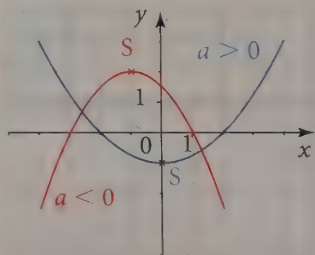
• Une parabole est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

• Le sommet S d'une parabole est le point dont l'ordonnée est le minimum de la fonction polynôme si $a > 0$ ou le maximum de la fonction polynôme si $a < 0$.

L'abscisse du sommet S est $-\frac{b}{2a}$.

• Sens de variation et courbe représentative.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)	$-\infty$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$-\infty$
$ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)	$+\infty$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$+\infty$



2 Fonction homographique

Soit a , b , d des nombres réels et c un nombre réel non nul.

Une fonction homographique f est le quotient de deux fonctions polynôme de degré 1. Elle est de la forme $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ avec $c \neq 0$.

Son ensemble de définition est donc $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$.

EXERCICE RÉSOLU

► Utiliser des propriétés d'une fonction polynôme de degré 2

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 7]$ par $f(x) = x^2 - 5x + 2$.

1. **a)** La parabole représentative de f est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?
- b)** Quelle est l'abscisse du sommet de cette parabole ?
2. Déterminer le sens de variation de f sur $[-2 ; 7]$.
3. **a)** Dresser le tableau de variation de f .
- b)** Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole ?
- c)** Quelle est la valeur du minimum de f ?

CORRIGÉ

1. **a)** Comme $a > 0$ ($a = 1$), la parabole est tournée vers le haut.

b) Comme $a = 1$ et $b = -5$, l'abscisse du sommet de cette parabole est $x = \frac{5}{2} = 2,5$.

2. Comme $a > 0$, f est strictement décroissante sur $[-2 ; 2,5]$ et f est strictement croissante sur $[2,5 ; 7]$.

3. **a)**

x	-2	2,5	7
$f(x)$	16	-4,25	16

$$f(-2) = (-2)^2 - 5 \times (-2) + 2 = 4 + 10 + 2 = 16.$$

$$f(2,5) = 2,5^2 - 5 \times 2,5 + 2 = 6,25 - 12,5 + 2 = -4,25.$$

$$f(7) = 7^2 - 5 \times 7 + 2 = 49 - 35 + 2 = 16.$$

b) Les coordonnées du sommet de la parabole sont $(2,5 ; -4,25)$.

c) f admet un minimum égal à $-4,25$.

Rappel

On détermine le signe de a .

Méthode

On détermine les valeurs de a et de b , puis on calcule $-\frac{b}{2a}$.

Méthode

On utilise le signe de a et l'abscisse du sommet de la parabole.

Méthode

On calcule $f(-2)$, $f(2,5)$, $f(7)$, puis on utilise la réponse de la question 2.

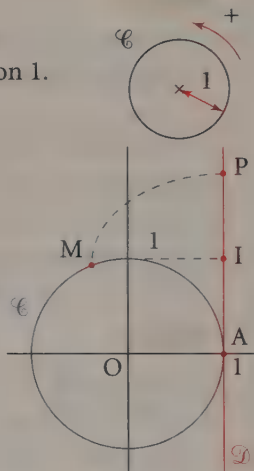
7 Trigonométrie

1 Le cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est un cercle orienté de rayon 1.

2 Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique

- $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique ; $\mathcal{D}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ en A, graduée à l'aide du repère (A ; I).
- Soit x un nombre réel et P le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse x .
- En enroulant $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{C}$, on fait coïncider P avec un point M sur le cercle. Cet enroulement permet :
 - d'associer à chaque nombre réel un point M sur le cercle ;
 - de repérer tout point M du cercle par un nombre réel.

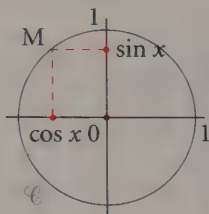


3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

$\mathcal{C}$ est un cercle trigonométrique.

Soit M le point de $\mathcal{C}$ associé au nombre réel x .

- Le **cosinus du nombre réel x** , noté $\cos x$, est l'abscisse de M.
- Le **sinus du nombre réel x** , noté $\sin x$, est l'ordonnée de M.



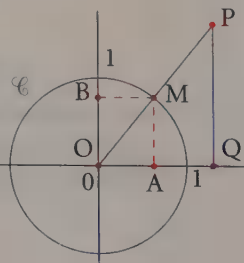
4 Lien entre les cosinus et sinus d'un angle aigu et les cosinus et sinus d'un nombre réel

$\mathcal{C}$ est un cercle trigonométrique. Le triangle OPQ est rectangle en Q. Soit M le point de $\mathcal{C}$ associé au nombre réel x .

$$\bullet \cos \widehat{QOP} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OA}{OM} = OA = \cos x \text{ (car } OM = 1 \text{)}.$$

$$\bullet \sin \widehat{QOP} = \frac{PQ}{OP} = \frac{AM}{OM} = \frac{OB}{OM} = OB = \sin x$$

(car $OM = 1$).



EXERCICE RÉSOLU

► Déterminer des valeurs remarquables de cosinus et de sinus

ÉNONCÉ

ABO est un triangle rectangle isocèle en B.

M est le point d'intersection du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ et du segment $[OA]$.

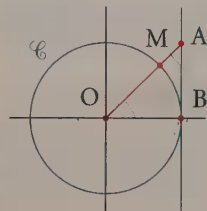
1. Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$?

2. Calculer la longueur OA.

3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos \widehat{AOB}$ et $\sin \widehat{AOB}$ en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

4. Déterminer la valeur exacte de l'arc $\widehat{BM}$.

5. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$.



CORRIGÉ

1. ABO est un triangle isocèle en B, donc les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{OAB}$ sont égaux.

Ainsi, $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$.

2. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAB, on a $OA^2 = OB^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$; soit $OA = \sqrt{2}$.

3. En appliquant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle :

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \widehat{AOB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. La longueur du cercle est égale à $2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$.

On est dans une situation de proportionnalité :

Angle en degrés	360	45
Longueur	2π	$\widehat{BM}$

La longueur de l'arc $\widehat{BM}$ est

$$\text{donc égale à : } \frac{2\pi \times 45}{360} = \frac{\pi}{4}.$$

5. Le point M est le point du cercle associé au nombre réel $\frac{\pi}{4}$.

$$\text{On en déduit : } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

→ Savoir résoudre une équation du premier degré à une inconnue

ÉNONCÉ

Résoudre les équations suivantes :

a) $4x + 1 - x + 2 = 0$;

b) $-3(x + 2) + 3 = 2(2x - 3) - x$.

MÉTHODE

a et b sont deux nombres réels donnés.

Ramener les équations à une équation de la forme $ax = b$.

1. Développer et réduire chaque membre.

2. Regrouper tous les termes en « x » dans le même membre et tous les termes constants dans l'autre membre.

CORRIGÉ

a) Pour résoudre l'équation $4x + 1 - x + 2 = 0$.

1. On réduit le membre de gauche de l'équation :

l'équation $4x - x + 1 + 2 = 0$ est équivalente à $3x + 3 = 0$.

2. On regroupe tous les termes en « x » dans le même membre :

l'équation $3x + 3 = 0$ est successivement équivalente à :

$$3x = -3; x = -\frac{3}{3}; x = -1.$$

La solution de l'équation est -1 .

b) Pour résoudre l'équation

$$-3(x + 2) + 3 = 2(2x - 3) - x.$$

1. On développe et on réduit chaque membre de l'équation :

l'équation $-3(x + 2) + 3 = 2(2x - 3) - x$ est successivement équivalente à :

$$-3x - 6 + 3 = 4x - 6 - x; \quad -3x - 3 = 3x - 6.$$

2. On regroupe tous les termes en « x » dans le même membre :

l'équation $-3x - 3 = 3x - 6$ est successivement équivalente à :

$$-3x - 3x = -6 + 3; \quad -6x = -3; \quad x = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}.$$

La solution de l'équation est $\frac{1}{2}$.

Piège à éviter

On ajoute -3 aux deux membres de l'équation.

Piège à éviter

On divise par 3 les deux membres de l'équation.

Réflexe à avoir

Ne pas oublier de conclure par une phrase.

→ Savoir résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue

ÉNONCÉ

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $3x + 3 < x + 1$;

b) $-5x + 2 \geq x$.

MÉTHODE

a et b sont deux nombres réels donnés.

Ramener l'inéquation à une inéquation de la forme $ax < b$ ou $ax \leq b$ ou $ax > b$ ou $ax \geq b$ en regroupant tous les termes en « x » dans le même membre et tous les termes constants dans l'autre membre.

CORRIGÉ

a) Pour résoudre l'inéquation $3x + 3 < x + 1$, **on regroupe tous les termes en « x » dans le même membre.** L'inéquation est successivement équivalente à :

$$3x - x < 1 - 3 ;$$

$$2x < -2 ;$$

$$x < \frac{-2}{2} ;$$

$$x < -1.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $] -\infty ; -1[$.

b) Pour résoudre l'inéquation $-5x + 2 \geq x$, **on regroupe tous les termes en « x » dans le même membre.**

L'inéquation est successivement équivalente à :

$$-5x - x \geq -2 ; -6x \geq -2 ;$$

$$x \leq \frac{-2}{-6} ; x \leq \frac{2}{6} ; x \leq \frac{1}{3}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle

$$\left] -\infty ; \frac{1}{3} \right].$$

Piège à éviter

Lorsqu'on ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres de l'inégalité, l'inégalité ne change pas de sens.

Piège à éviter

Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres de l'inégalité par un même nombre strictement positif (ici 2), l'inégalité ne change pas de sens.

Piège à éviter

Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres de l'inégalité par un même nombre strictement négatif (ici -6), l'inégalité change de sens.

Réflexe à avoir

Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation sous la forme d'un intervalle.

→ Exercices d'application



1 Utiliser les identités remarquables pour développer une expression

Développer, réduire et ordonner :

$$M(x) = (5 - 2x)^2 + \left[\frac{1}{3}(x + 3)\right]^2 - (2 - 3x)(2 + 3x).$$

2 Utiliser les identités remarquables pour factoriser une expression

Factoriser $C(x)$ et $D(x)$:

$$C(x) = 4(2 - 3x)^2 - 25(2x + 1)^2 \text{ et } D(x) = 4x^2 - 12x + 9.$$

3 Construire un tableau de signe

Étudier le signe de $g(x) = 2x(5 - x)$.

4 Développer une expression algébrique

Soit $A(x) = x + (2x - 1)^2 + 4(x - 1)(2 - x)$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 6x + 5$ et l'inéquation $A(x) \geq 10x - 3$.

5 Factoriser une expression algébrique

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $A(x) < -5$ et les équations :

$$B(x) = 0 \text{ et } C(x) = 0.$$

On donne :

$$A(x) = -6(2x - 3) + 2(x - 1)(3 - 2x) + 4x^2 - 9;$$

$$B(x) = 4(1 - x) - (1 - x)^3 \text{ et } C(x) = 9x^2 - 12x + 4.$$

6 Équations du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $4x + 7 = 3x + 5$;

b) $-3x + 1 = 4 - 3x$;

c) $-1 + 6x = 4x - 1$.

7 Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 = 16$;

b) $x^2 = 0$;

c) $x^2 = -5$;

d) $x^2 = 8$.

8 Inéquations du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-5 < x + 3$;

b) $-2x - 4 \geq -3x + 2$;

c) $2x + 6 \leq 7x - 9$.

9 Inéquations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x^2 > 9$;

b) $x^2 \leq 4$.

10 Résolutions graphique et algébrique d'une inéquation

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

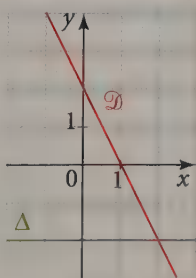
$$y = -2x + 2,$$

et la droite Δ d'équation $y = -2$.

1. Résoudre graphiquement l'inéquation :

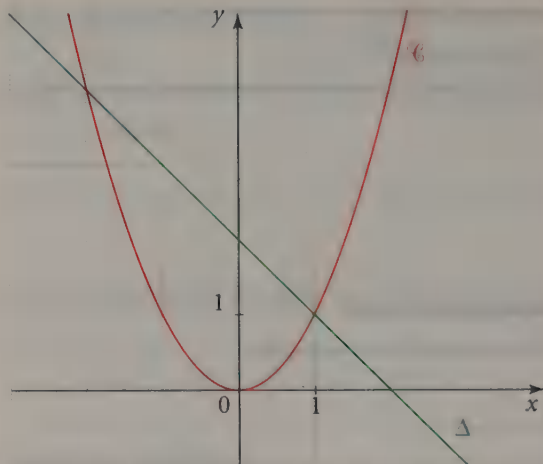
$$-2x + 2 < -2.$$

2. Retrouver ce résultat par le calcul.



11 Comparaison graphique et algébrique de fonctions

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et la droite Δ d'équation $y = -x + 2$.



1. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq -x + 2$.

2. Montrer que :

$$f(x) + x - 2 = (x + 2)(x - 1),$$

puis retrouver par le calcul les résultats de la question 1.

12 Utiliser les identités remarquables

Développer les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable.

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 1. $(4 - x)^2$. | 2. $(-7x - 3)^2$. |
| 3. $(x^2 - y^2)^2$. | 4. $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$. |
| 5. $(x + 1 - \sqrt{2})^2$. | 6. $(7 - 2x)(7 + 2x)$. |
| 7. $(2x^2 - 5)(2x^2 + 5)$. | 8. $(x - y + 1)(x - y - 1)$. |
| 9. $(x - y + 2)(x + y - 2)$. | |

13 Utiliser les identités remarquables

Factoriser les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable.

1. $36 - 4x^2$.
2. $(2x - 3)^2 - (1 - 3x)^2$.
3. $x^2 - 10x + 25$.
4. $4x^2 + 28x + 49$.

14 Transformer une expression algébrique

1. Développer $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

2. En déduire une expression factorisée de $x^2 - 7x + 10$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation de $x^2 - 7x + 10 = 0$.

15 Transformer une expression algébrique

1. Montrer que pour tout $x \neq -2$, on a $3 - \frac{1}{x+2} = \frac{3x+5}{x+2}$.

2. Montrer que pour tout $x \neq 1$, on a $2 + \frac{3}{1-x} = \frac{-2x+5}{1-x}$.

3. Montrer que pour tout $x \neq 3$, on a $1 + \frac{2}{x-3} = \frac{x-1}{x-3}$.

16 Compléter un tableau de signe

On considère la fonction f définie sur $[-3; 1[\cup]1; 10]$ par $f(x) = \frac{x-5}{1-x}$.

Compléter le tableau de signe de $f(x)$:

x	-3	10
$x - 5$		
$1 - x$		
$f(x) = \frac{x-5}{1-x}$		

17 Compléter un tableau de signe

On considère la fonction g définie sur $[-5; -1[\cup]-1; 0]$ par $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

Compléter le tableau de signe de $g(x)$:

x	-5	0
$x + 2$		
$x + 1$		
$g(x) = \frac{x+2}{x+1}$		

18 Propriétés d'une fonction polynôme de degré 2

Soit f la fonction définie sur $[-2; 4]$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$.

- La parabole représentative de f est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?
- Quelle est l'abscisse du sommet de cette parabole ?
- Déterminer le sens de variation de f sur $[-2; 4]$.
- Dresser le tableau de variation de f .
- Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole ?
- Quelle est la valeur du maximum de f ?

19 Tracer la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2

Soit f la fonction définie sur $[-4; 1]$ par $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

- Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5
$f(x)$						

- La parabole représentative de f est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?
- Quelle est l'abscisse du sommet de cette parabole ?
- Quel est l'axe de symétrie de cette parabole ?
- Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse ; 1 cm pour 1 unité en ordonnée), placer les 6 points obtenus à la question 1.
- Dans le repère précédent, tracer la droite verticale d'équation $x = -1,5$.
- En déduire la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f .

20 Tracer la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2

Soit f la fonction définie sur $[1; 5]$ par $f(x) = -0,5x^2 + 3x - 5$.

- Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$					

- La parabole représentative de f est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ?
- Quelle est l'abscisse du sommet de cette parabole ?
- Quel est l'axe de symétrie de cette parabole ?

3. a) Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 unité en abscisse ; 2 cm pour 1 unité en ordonnée), placer les 5 points obtenus à la question 1.

b) Dans le repère précédent, tracer l'axe de symétrie de cette parabole.

c) En déduire une représentation graphique $\mathcal{C}$ de f .

21 Ensemble de définition d'une fonction homographique

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \frac{2x+2}{3x+12}$.

2. $g(x) = \frac{-7x}{x+2}$.

3. $h(x) = \frac{x-4}{5-x}$.

22 Cosinus et sinus de nombres réels

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points P, Q, R, S et T associés respectivement aux nombres réels 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , 2π et $-\pi$.

2. En déduire les valeurs des cosinus et sinus de ces cinq nombres réels.

23 Cosinus et sinus de nombres réels

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points P, Q, R, S et T associés respectivement aux nombres réels 0 , $-\frac{\pi}{2}$, -2π , $\frac{3}{2}\pi$, et -4π .

2. En déduire les valeurs des cosinus et sinus de ces cinq nombres réels.

24 Cosinus et sinus de nombres réels

1. Tracer un cercle trigonométrique.

2. Colorier en couleur l'arc de cercle correspondant aux points M associés aux nombres réels x tels que $\cos x < 0$ et $\sin x < 0$.

25 Cosinus et sinus de nombres réels

1. Tracer un cercle trigonométrique.

2. Colorier en couleur l'arc de cercle correspondant aux points M associés aux nombres réels x tels que $\cos x > 0$ et $\sin x < 0$.

26 Cosinus et sinus d'un nombre réel

1. Placer sur le cercle trigonométrique le point P associé au nombre réel x tel que :

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Calculer $(\cos x)^2 + (\sin x)^2$.

Retrouver ce résultat à l'aide du graphique.

27 Distinguer « et » et « ou »

Soit a et b deux nombres réels.

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes.

- $a \times b = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$.
- $a \times b = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$.
- $a^2 + b^2 = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$.
- $a^2 + b^2 = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$.

Exercices d'entraînement**28 Résolution d'inéquations**

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Résoudre sur $]0 ; +\infty[$, l'inéquation $f(x) < 2$.

29 Résolution d'équations

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

30 Transformation d'écriture

- Développer $2(x-1)^2 + 3$.
- $2(x-1)^2 + 3$ est-elle une autre écriture de $2x^2 - 4x + 5$?
- En déduire que l'équation $2x^2 - 4x + 5 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

31 Comparaison de fonctions

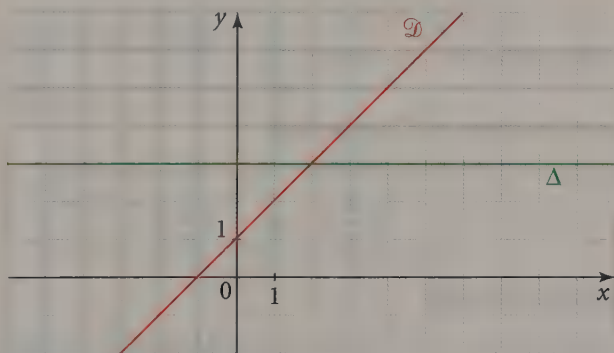
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 \text{ et } g(x) = 5x + 3.$$

1. Développer $(x - 3)(2x + 1)$.
2. Comparer les fonction f et g .

32 Résolution d'une inéquation

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Résoudre graphiquement l'inéquation $x + 1 \leq 3$.
2. Retrouver ce résultat par le calcul.

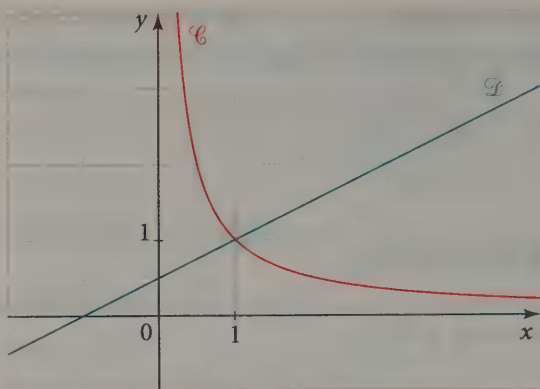
33 Comparaison de fonctions

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

et la droite $\mathcal{D}$ représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$



Comparer graphiquement les fonctions f et g .

34 Résolution d'équations et d'inéquations

Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

- a) $\frac{1}{x} < -1$; b) $x^2 = 2x - 1$; c) $\frac{1}{x} = -x$; d) $\frac{1}{x} \leq x$; e) $x^2 < 4$.

35 Comparaison de fonctions

Dans le plan rapporté à un repère, on considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2.$$

Et la droite $\mathcal{D}$ représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x + 6.$$

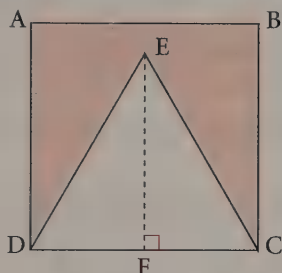
1. Tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
2. Comparer graphiquement les fonctions f et g .
3. Développer $(x + 2)(x - 3)$, puis retrouver les résultats de la question précédente par le calcul.

36 Mise en équation d'un problème

On considère un carré ABCD de côté x (en cm) et EDC un triangle isocèle en E tel que $EF = 4$ (en cm); $x \geq 4$.

1. Développer $(x + 2)(x - 4)$.
2. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_1$ du carré ABCD en fonction de x .

3. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_2$ du triangle EDC en fonction de x .
4. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire $\mathcal{A}$ de la partie coloriée est de 8 cm^2 .



37 Application à la géométrie

1. Résoudre graphiquement l'équation :

$$x^2 = 4,5x - 4,5.$$

2. Soit ABCD un rectangle dont le périmètre est égal à 9 cm .

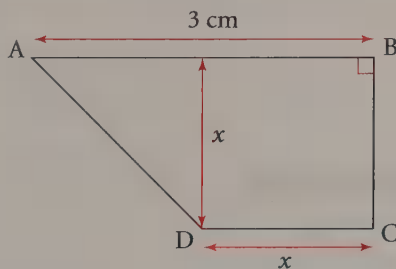
On pose $AB = x$ et $BC = y$.

Déterminer, en fonction de x , l'aire $f(x)$ du rectangle.

3. Déterminer les dimensions du rectangle ABCD dont l'aire est égale à $4,5 \text{ cm}^2$.

38 Application à la géométrie

Déterminer graphiquement la longueur x en cm pour que l'aire du trapèze soit égale à 5 cm^2 .



39 Comparaison de fonctions affines et linéaires

Un vidéo club propose à ses clients trois formules de location de DVD :

- formule ① : abonnement annuel 60 €, location d'un DVD 1,50 € ;
- formule ② : abonnement annuel 30 €, location d'un DVD 2 € ;
- formule ③ : pas d'abonnement, location d'un DVD 3 €.

Soit x le nombre annuel de DVD loués et y l'argent dépensé pour la location de ces x DVD.

1. Exprimer y en fonction de x pour chacune des formules.
2. Représenter sur le même graphique les droites d'équations :

$$y = 1,5x + 60 ; \quad y = 2x + 30 ; \quad y = 3x.$$

3. Déterminer graphiquement pour une année donnée, la formule la plus intéressante pour un client, en fonction du nombre de DVD loués.

40 Résolution d'un problème de géométrie

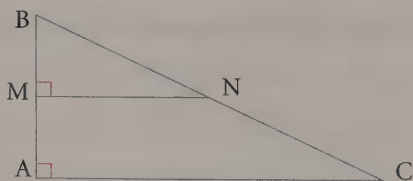
ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$$AB = 5 \text{ cm et } AC = 10 \text{ cm.}$$

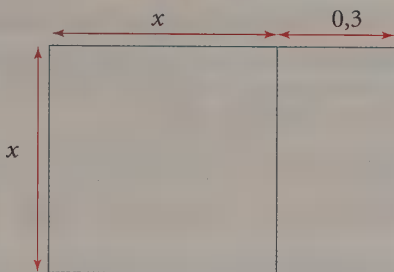
Soit M un point du segment [AB] ; on pose $BM = x$.

N est le point du segment [BC] tel que (MN) et (AC) sont parallèles.

Déterminer x pour que l'aire du triangle BMN soit égale à $20,25 \text{ cm}^2$.

**41 Mise en équation d'un problème**

On considère le rectangle ci-après.



1. a) Exprimer l'aire de ce rectangle en fonction de x .

b) Montrer que pour tout x , $x^2 + 0,3x - 1,8 = (x + 0,15)^2 - 1,35^2$.
En déduire une expression factorisée de $x^2 + 0,3x - 1,8$.

c) Résoudre l'équation $x^2 + 0,3x - 1,8 = 0$.

2. Le rectangle précédent représente une pièce de tissu dans laquelle on confectionne une jupe longue.

Les dimensions sont exprimées en mètres et l'aire de cette pièce est égale à $1,80 \text{ m}^2$.

a) L'une des solutions de l'équation du second degré représente la largeur de la pièce de tissu. Quelle est cette largeur ?

b) Calculer la longueur et vérifier que l'aire vaut bien $1,80 \text{ m}^2$.

42 Utilisation d'un tableur

1. Soit la fonction f définie sur $[15 ; 90]$ par $f(x) = \frac{270}{x} - 0,48x + 44,5$.

a) Représenter à l'aide d'un tableur la courbe représentative de f . Pour cela, ouvrir une feuille de calcul.

– Écrire x dans la cellule A1 et $f(x)$ dans la cellule B1.

– Entrer 15 dans la cellule A2 et 16 dans la cellule A3 ; sélectionner ces deux cellules, puis tirer la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la cellule A77.

– Entrer la formule $= 270/A2 - 0,48 * A2 + 44,5$ dans la cellule B2, puis copier cette formule vers le bas jusqu'à la cellule B77.

– Sélectionner les cellules A1 à B77 ; ouvrir l'assistant graphique ; dans la boîte de dialogue « Type de graphique », choisir « Nuages de points », puis le sous-type de graphique « Nuage de points reliés par une courbe sans marquage de données » ; cliquer sur « Terminer ».

b) Déterminer graphiquement $f(60)$ arrondie à l'unité.

c) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 32$ arrondie à l'unité.

2. Une société d'électroménager met sur le marché un nouveau modèle de lave-linge à programmation « hybride ». Un sélecteur informe la carte électronique de la température choisie par le consommateur.

La résistance, en $k\Omega$, du capteur de température de cet appareil est donnée par

$$R = \frac{270}{\theta} - 0,48\theta + 44,5, \text{ où } \theta \text{ est la température comprise entre } 15^\circ\text{C et } 90^\circ\text{C}.$$

Utiliser les résultats du 1. pour répondre aux questions suivantes.

a) Quelle est la résistance correspondant à une température de 60°C ?

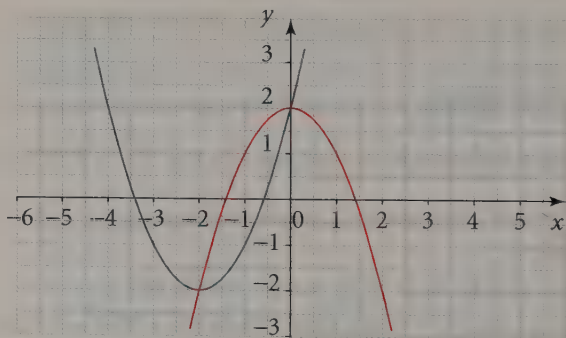
b) Quelle est la température correspondant à une résistance de $32 k\Omega$?

43 Résoudre graphiquement équation et inéquation

On donne un tracé des paraboles représentatives des fonctions f (en rouge) et g (en bleu).

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$.



44 Étudier le signe d'une fonction homographique

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2-x}{2x+4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .

2. Étudier le signe de $f(x)$ sur D .

45 Étudier une fonction polynôme de degré 2

1. Soit la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 20.$$

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

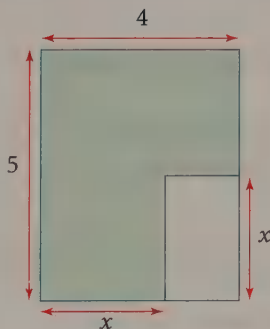
b) Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse pour 1 et 1 cm en ordonnée pour 1).

c) Tracer, dans le même repère, la droite horizontale d'équation $y = 17$.

d) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 17$.

2. L'entreprise Prim'Jet se propose de réaliser un logo représentant la lettre P schématisée, dans une pièce métallique rectangulaire d'épaisseur 5 mm.

Dans la figure suivante, la partie colorée représente la zone où le matériau doit être déposé. Les cotes sont exprimées en cm et $0 \leq x \leq 4$.



a) Exprimer l'aire de la partie coloriée en fonction de x .

b) Vérifier que l'aire est donnée par la fonction f de la question 1.

3. Utiliser les résultats de la question 1. pour répondre aux questions suivantes.

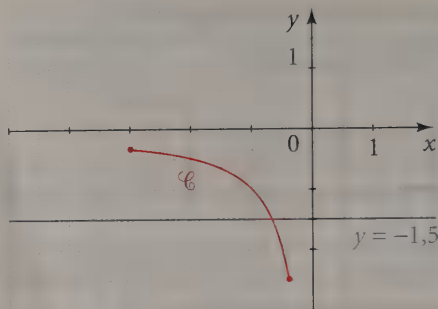
a) Quelle est la cote x pour laquelle la surface à traiter est minimale ?

b) L'entreprise qui a commandé les pièces propose de réaliser un logo dont l'aire est égale à 17 cm^2 . Quelles sont les cotes x correspondantes ?

46 Déterminer un encadrement de la solution d'une équation

On donne un tracé de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur

$[-3 ; -0,4]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et de la droite d'équation $y = -1,5$.



On se propose de résoudre l'équation $f(x) = -1,5$.

1. À l'aide du graphique, donner un encadrement de la solution x_0 de cette équation par deux nombres entiers consécutifs :

$$\dots\dots < x_0 < \dots\dots$$

2. Établir un tableau de valeurs pour déterminer un encadrement de la solution x_0 de cette équation à 0,1 près.

Pour cela, utiliser la calculatrice ou le tableur.

a) Avec la calculatrice, faire afficher le tableau.

- Entrer l'expression de $f(x)$.
- Entrer -1 comme valeur minimum, $-0,4$ comme valeur maximum et $0,1$ comme pas entre deux valeurs de x .

b) Avec le tableur, ouvrir une feuille de calcul.

- Écrire x dans la cellule A1 et $f(x)$ dans la cellule B1.
- Entrer la valeur -1 dans la cellule A2, la valeur $-0,9$ dans la cellule A3, sélectionner les cellules A2 et A3, puis tirer la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la valeur $-0,4$.
- Entrer la formule $=1/A2$ dans la cellule B2, puis faire glisser cette formule vers le bas à l'aide de la poignée de remplissage.

47 Valeurs remarquables de cosinus et de sinus

$\mathcal{C}$ est un cercle trigonométrique et OAB est un triangle équilatéral.

(BI) est la médiatrice de $[OA]$.

1. Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$?

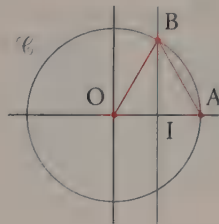
2. Quelle est la longueur OI ?

En déduire la longueur BI .

3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos \widehat{AOB}$ et $\sin \widehat{AOB}$ en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

4. Déterminer la valeur exacte de l'arc $\widehat{AB}$.

5. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{3}$ et $\sin \frac{\pi}{3}$.



→ Exercices d'application

- ① • En posant $a = 5$ et $b = 2x$:

$$(5 - 2x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 2x + (2x)^2.$$

Soit $(5 - 2x)^2 = 25 - 20x + 4x^2$.

- En posant $a = x$ et $b = 3$:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2.$$

Soit $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

On a donc $\left[\frac{1}{3}(x + 3)\right]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (x + 3)^2 = \frac{1}{9}(x^2 + 6x + 9)$;

$$\left[\frac{1}{3}(x + 3)\right]^2 = \frac{1}{9}x^2 + \frac{6}{9}x + \frac{9}{9}; \quad \left[\frac{1}{3}(x + 3)\right]^2 = \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 1.$$

- En posant $a = 2$ et $b = 3x$, $(2 - 3x)(2 + 3x) = 2^2 - (3x)^2$.

Soit $(2 - 3x)(2 + 3x) = 4 - 9x^2$.

On a donc

$$M(x) = 25 - 20x + 4x^2 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 - 4 + 9x^2.$$

Soit $M(x) = 4x^2 + 9x^2 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 20x + 1 - 4 + 25$.

$$M(x) = \frac{118}{9}x^2 - \frac{58}{3}x + 22.$$

- ② • $C(x) = 2^2(2 - 3x)^2 - 5^2(2x + 1)^2$;

$$C(x) = [2(2 - 3x)]^2 - [5(2x + 1)]^2.$$

$[2(2 - 3x)]^2 - [5(2x + 1)]^2$ est la différence de deux carrés.

On a donc :

$$C(x) = [2(2 - 3x) - 5(2x + 1)] \times [2(2 - 3x) + 5(2x + 1)];$$

$$C(x) = (4 - 6x - 10x - 5)(4 - 6x + 10x + 5);$$

$$C(x) = (-16x - 1)(4x + 9).$$

- En posant $a^2 = 4x^2$ et $b^2 = 9$ soit $a^2 = (2x)^2$ et $b^2 = 3^2$, on obtient :

$$a = 2x \text{ et } b = 3.$$

$D(x)$ est alors de la forme $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

En effet : $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$; $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.

$$D(x) = (2x - 3)^2.$$

Remarque

$(5 - 2x)^2$ est de la forme $(a - b)^2$.

Remarque

$(2 - 3x)(2 + 3x)$
est de la forme
 $(a - b)(a + b)$.

Remarque

$C(x)$ est de la forme
 $a^2 - b^2$.

3 • $g(x) = 0$ équivaut successivement à :

$$2x(5-x) = 0; 2x = 0 \text{ ou } 5-x = 0; x = 0 \text{ ou } x = 5.$$

• Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$	
$2x$	-	0	+	+	
$5-x$	+	+	0	-	
$g(x) = 2x(5-x)$	-	0	+	0	-

L'astuce du prof !

Pour faire un tableau de signe, il faut avoir une forme factorisée.

• Signe de $g(x)$:

Pour $x \in]-\infty; 0[\cup]5; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Pour $x \in]0; 5[$, $g(x) > 0$.

Pour $x = 0$ et $x = 5$, $g(x) = 0$.

4 • Développons $A(x)$:

$$A(x) = x + 4x^2 - 4x + 1 + 4(2x - x^2 - 2 + x);$$

$$A(x) = x + 4x^2 - 4x + 1 + 4(3x - x^2 - 2);$$

$$A(x) = x + 4x^2 - 4x + 1 + 12x - 4x^2 - 8;$$

$$A(x) = 9x - 7.$$

• Résolvons l'équation $A(x) = 6x + 5$.

L'équation $A(x) = 6x + 5$ est successivement équivalente à :

$$9x - 7 = 6x + 5; 9x - 6x = 7 + 5;$$

$$3x = 12; x = 4.$$

La solution est 4.

• Résolvons l'inéquation $A(x) \geq 10x - 3$.

L'inéquation $A(x) \geq 10x - 3$ est successivement équivalente à :

$$9x - 7 \geq 10x - 3; -x \geq 4; x \leq -4.$$

L'ensemble des solutions est $]-\infty; -4]$.

5 • $(2x - 3)$ est un facteur commun car :

$$4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3) \text{ et } 2(x - 1)(3 - 2x) = -2(x - 1)(2x - 3).$$

On a alors :

$$A(x) = -6(2x - 3) - 2(x - 1)(2x - 3) + (2x - 3)(2x + 3);$$

$$A(x) = (2x - 3)[-6 - 2(x - 1) + (2x + 3)];$$

$$A(x) = (2x - 3)(-6 - 2x + 2 + 2x + 3);$$

$$A(x) = -(2x - 3).$$

L'inéquation $A(x) < -5$ est successivement équivalente à :

$$-(2x-3) < -5; \quad -2x+3 < -5; \quad -2x < -8; \quad 2x > 8; \quad x > 4.$$

L'ensemble des solutions est $]4; +\infty[$.

Représentation des solutions :



● $(1-x)$ est un facteur commun apparent et :

$$B(x) = (1-x)[4 - (1-x)^2].$$

$4 - (1-x)^2$ est la différence de deux carrés :

$$2^2 - (1-x)^2 = [2 - (1-x)][2 + (1-x)];$$

$$2^2 - (1-x)^2 = (2-1+x)(2+1-x);$$

$$2^2 - (1-x)^2 = (1+x)(3-x).$$

On a donc : $B(x) = (1-x)(1+x)(3-x)$.

L'équation $B(x) = 0$ est successivement équivalente à :

$$(1-x)(1+x)(3-x) = 0; \quad 1-x=0 \text{ ou } 1+x=0 \text{ ou } 3-x=0;$$

$$x=1 \text{ ou } x=-1 \text{ ou } x=3.$$

Les solutions sont **-1, 1 et 3**.

● En posant $a^2 = 9x^2$ et $b^2 = 4$, soit $a^2 = (3x)^2$ et $b^2 = 2^2$,

on obtient $a = 3x$ et $b = 2$.

$C(x)$ est alors de la forme $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

En effet :

$$(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2;$$

$$(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4;$$

$$(3x-2)^2 = C(x).$$

L'équation $C(x) = 0$ est successivement équivalente à :

$$(3x-2)^2 = 0; \quad 3x-2=0; \quad x = \frac{2}{3}.$$

La solution est $\frac{2}{3}$.

⑥ a) Cette équation est équivalente à $4x-3x = 5-7$, soit $x = -2$.

La solution de cette équation est **-2**.

b) Cette équation est équivalente à $-3x+3x = 4-1$, soit $0 = 3$.

Cette équation ne possède **pas de solution**.

c) Cette équation est successivement équivalente à :

$$6x-4x = -1+1;$$

$$2x = 0;$$

$$x = 0.$$

La solution de cette équation est **0**.

7 a) L'équation $x^2 = 16$ est équivalente à :

$$x = \sqrt{16} \text{ ou } x = -\sqrt{16}. \text{ Or } \sqrt{16} = 4.$$

Les solutions de l'équation $x^2 = 16$ sont **4** et **-4**.

b) L'équation $x^2 = 0$ est équivalente à $x = 0$.

La solution de l'équation $x^2 = 0$ est **0**.

c) Comme $-5 < 0$, l'équation $x^2 = -5$ n'admet **aucune solution réelle**.

d) L'équation $x^2 = 8$ est équivalente à :

$$x = \sqrt{8} \text{ ou } x = -\sqrt{8}$$

$$\text{soit } x = 2\sqrt{2} \text{ ou } x = -2\sqrt{2} \text{ car } \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}.$$

Les solutions de l'équation $x^2 = 8$ sont **$2\sqrt{2}$** et **$-2\sqrt{2}$** .

8 a) L'inéquation $-5 < x + 3$ est successivement équivalente à :

$$x + 3 > -5;$$

$$x > -5 - 3; \quad x > -8.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle **$] -8 ; +\infty[$** .

b) L'inéquation $-2x - 4 \geq -3x + 2$ est équivalente à :

$$-2x + 3x \geq 2 + 4, \text{ soit } x \geq 6.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle **$[6 ; +\infty[$** .

c) L'inéquation $2x + 6 \leq 7x - 9$ est successivement équivalente à :

$$2x - 7x \leq -9 - 6;$$

$$-5x \leq -15;$$

$$x \geq \frac{-15}{-5};$$

$$x \geq \frac{15}{5}, \text{ soit } x \geq 3.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle **$[3 ; +\infty[$** .

9 a) $x^2 > 9$ équivaut à :

$$x^2 - 9 > 0, \text{ soit } (x - 3)(x + 3) > 0.$$

Remarque

- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, la solution de l'équation $x^2 = a$ est 0.
- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$		
$x-3$		-	-	0	+	
$x+3$		-	0	+	+	
$x^2-9=(x-3)(x+3)$		+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 9$ est :
 $]-\infty ; -3[\cup]3 ; +\infty[.$

b) $x^2 \leq 4$ équivaut à :

$$x^2 - 4 \leq 0, \text{ soit } (x-2)(x+2) \leq 0.$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$x-2$		-	-	0	+	
$x+2$		-	0	+	+	
$x^2-4=(x-2)(x+2)$		+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leq 4$ est :
 $[-2 ; 2].$

10 1. La droite $\mathcal{D}$ est située au-dessous de la droite Δ pour $x \in]2 ; +\infty[$, donc : l'ensemble des solutions est $]2 ; +\infty[.$

2. L'inéquation $-2x + 2 < -2$ est équivalente à :

$$-2x < -2 - 2, \text{ soit } -2x < -4;$$

$$x > \frac{-4}{-2}, \text{ soit } x > 2.$$

Remarque

Il faut faire le lien entre l'aspect graphique et l'aspect numérique.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $]2 ; +\infty[$, ce qui vérifie le résultat précédent.

11 1. La courbe $\mathcal{C}$ est située sur et au-dessus de la droite Δ pour :

$$x \in]-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty[.$$

2. L'inéquation $f(x) \geq -x + 2$ s'écrit :

$$x^2 \geq -x + 2, \text{ soit } x^2 + x - 2 \geq 0.$$

$$\text{Or } (x+2)(x-1) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2.$$

Ainsi, il s'agit de résoudre l'inéquation $(x+2)(x-1) \geq 0$.

● $(x+2)(x-1) = 0$ équivaut à :

$$x+2 = 0 \text{ ou } x-1 = 0, \text{ soit } x = -2 \text{ ou } x = 1.$$

● Tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$
$x-1$		$-$	$-$	0
x^2+x-2		$+$	0	$-$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+x-2 \geq 0$ est bien l'intervalle $]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$.

12 1. $(4-x)^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times x + x^2;$

$$(4-x)^2 = x^2 - 8x + 16.$$

2. En posant $a = -7x$ et $b = -3$, $(-7x-3)^2$ est de la forme $(a+b)^2$.

$$(-7x-3)^2 = (-7x)^2 + 2 \times (-7x) \times (-3) + (-3)^2;$$

$$(-7x-3)^2 = 49x^2 + 42x + 9.$$

On peut aussi poser $a = -7x$ et $b = 3$;

$(-7x-3)^2$ est alors de la forme $(a-b)^2$;

ou remarquer que $(-7x-3)^2 = [-(7x+3)]^2$, soit $(-1)^2(7x+3)^2 = (7x+3)^2$.

3. En posant $a = x^2$ et $b = y^2$, $(x^2-y^2)^2$ est de la forme $(a-b)^2$.

$$(x^2-y^2)^2 = (x^2)^2 - 2 \times x^2 \times y^2 + (y^2)^2, \text{ soit } (x^2-y^2)^2 = x^{2 \times 2} - 2x^2y^2 + y^{2 \times 2};$$

$$(x^2-y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4.$$

4. $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2;$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 2 + 2\sqrt{2 \times 5} + 5;$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 7 + 2\sqrt{10}.$$

5. En posant $a = x+1$ et $b = \sqrt{2}$, $(x+1-\sqrt{2})^2$ est de la forme $(a-b)^2$.

$$(x+1-\sqrt{2})^2 = (x+1)^2 - 2 \times (x+1) \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2;$$

$$(x+1-\sqrt{2})^2 = (x^2+2x+1) - 2\sqrt{2}(x+1) + 2;$$

$$(x+1-\sqrt{2})^2 = x^2+2x-2\sqrt{2}x+1-2\sqrt{2}+2;$$

$$(x+1-\sqrt{2})^2 = x^2+2(1-\sqrt{2})x+3-2\sqrt{2}.$$

On peut aussi poser $a = x$ et $b = 1-\sqrt{2}$;

$(x + 1 - \sqrt{2})^2$ est alors de la forme $(a + b)^2$.

$$6. (7 - 2x)(7 + 2x) = 7^2 - (2x)^2;$$

$$(7 - 2x)(7 + 2x) = 49 - 4x^2.$$

$$7. (2x^2 - 5)(2x^2 + 5) = (2x^2)^2 - 5^2;$$

$$(2x^2 - 5)(2x^2 + 5) = 4x^4 - 25.$$

8. En posant $a = x - y$ et $b = 1$, $(x - y + 1)(x - y - 1)$ est de la forme $(a + b)(a - b)$.

$$(x - y + 1)(x - y - 1) = (x - y)^2 - 1^2;$$

$$(x - y + 1)(x - y - 1) = x^2 - 2xy + y^2 - 1.$$

9. En posant $a = x$ et $b = y - 2$, $(x - y + 2)(x + y - 2)$ est de la forme $(a - b)(a + b)$.

$$(x - y + 2)(x + y - 2) = x^2 - (y - 2)^2;$$

$$(x - y + 2)(x + y - 2) = x^2 - (y^2 - 2 \times 2y + 2^2);$$

$$(x - y + 2)(x + y - 2) = x^2 - y^2 + 4y - 4.$$

$$13. 1. 36 - 4x^2 = 6^2 - (2x)^2; 36 - 4x^2 = (6 - 2x)(6 + 2x).$$

$$2. (2x - 3)^2 - (1 - 3x)^2 = (2x - 3 + 1 - 3x)(2x - 3 - 1 + 3x);$$

$$(2x - 3)^2 - (1 - 3x)^2 = (-x - 2)(5x - 4).$$

3. En posant $a = x$ et $b = 5$, $x^2 - 10x + 25$ est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$.

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2.$$

4. En posant $a = 2x$ et $b = 7$, $4x^2 + 28x + 49$ est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$.

$$4x^2 + 28x + 49 = (2x + 7)^2.$$

$$14. 1. \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = x^2 - 2 \times \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = x^2 - 7x + \frac{49}{4} - \frac{9}{4} = x^2 - 7x + 10.$$

$$2. x^2 - 7x + 10 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right)$$

$$x^2 - 7x + 10 = \left(x - \frac{10}{2}\right)\left(x - \frac{4}{2}\right)$$

$$= (x - 5)(x - 2).$$

3. $x^2 - 7x + 10 = 0$ équivaut successivement à $(x - 5)(x - 2) = 0$; $x - 5 = 0$ ou $x - 2 = 0$; $x = 5$ ou $x = 2$.

Les solutions de l'équation sont 2 et 5.

15 1. Pour tout $x \neq -2$, on a :

$$3 - \frac{1}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} - \frac{1}{x+2} = \frac{3x+6-1}{x+2} = \frac{3x+5}{x+2}.$$

2. Pour tout $x \neq 1$, on a :

$$2 + \frac{3}{1-x} = \frac{2(1-x)}{1-x} + \frac{3}{1-x} = \frac{2-2x+3}{1-x} = \frac{-2x+5}{1-x}.$$

3. Pour tout $x \neq 3$, on a :

$$1 + \frac{2}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{2}{x-3} = \frac{x-3+2}{x-3} = \frac{x-1}{x-3}.$$

16 ● Pour déterminer le signe de $x-5$, on résout l'équation $x-5=0$, puis l'inéquation $x-5 > 0$.

$x-5=0$ équivaut à $x=5$.

$x-5 > 0$ équivaut à $x > 5$.

● De la même manière, $1-x=0$ équivaut à $x=1$ et $1-x > 0$ équivaut à $1 > x$, soit $x < 1$.

● La valeur qui annule le dénominateur de $f(x)$ est 1 (double barre dans le tableau) : f n'est pas définie en 1.

● On reporte ces résultats dans un tableau :

x	-3	1	5	10	
$x-5$	-	-	0	+	
$1-x$	+	0	-	-	
$f(x) = \frac{x-5}{1-x}$	-		+	0	-

Rappel

La double barre signifie que f n'est pas définie en 1 ; on dit aussi que 1 est une valeur « interdite ».

17 ● Pour déterminer le signe de $x+2$, on résout l'équation $x+2=0$, puis l'inéquation $x+2 > 0$.

$x+2=0$ équivaut à $x=-2$.

$x+2 > 0$ équivaut à $x > -2$.

● De la même manière, $x+1=0$ équivaut à $x=-1$ et $x+1 > 0$ équivaut à $x > -1$.

● La valeur qui annule le dénominateur de $g(x)$ est -1 (double barre dans le tableau) : g n'est pas définie en -1.

● On reporte ces résultats dans un tableau :

x	-5	-2	-1	0
$x+2$	-	0	+	+
$x+1$	-		-	0
$g(x) = \frac{x+2}{x+1}$	+	0	-	+

18 1. a) Comme $a < 0$ ($a = -2$), la parabole est tournée vers le bas.

b) Comme $a = -2$ et $b = 4$, l'abscisse du sommet de cette parabole est :

$$x = \frac{-4}{-4} = 1.$$

2. Comme $a < 0$, f est strictement croissante sur $[-2; 1]$ et f est strictement décroissante sur $[1; 4]$.

3. a) Tableau de variation de f .

x	-2	1	4
$f(x)$	-13	5	-13

$f(-2) = -13$
 $f(1) = 5$
 $f(4) = -13$

b) Les coordonnées du sommet de la parabole sont $(1; 5)$.

c) Le maximum de f est 5.

Remarque

On lit dans le tableau de variation que 5 est le maximum de f sur $[-2; 4]$.

19 1. Tableau de valeurs.

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5
$f(x)$	6	3,75	2	0,75	0	-0,25

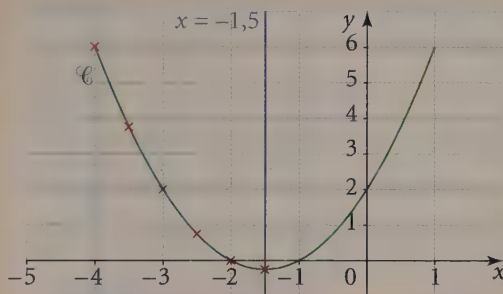
2. a) Comme $a > 0$ ($a = 1$), la parabole est tournée vers le haut.

b) Comme $a = 1$ et $b = 3$, l'abscisse du sommet de cette parabole est :

$$x = \frac{-3}{2} = -1,5.$$

c) L'axe de symétrie de cette parabole est la droite d'équation $x = -1,5$.

3. a), b) et c) Le tracé de la courbe représentative de f sur $[-1,5; 1]$ s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = -1,5$.



20 1. Tableau de valeurs.

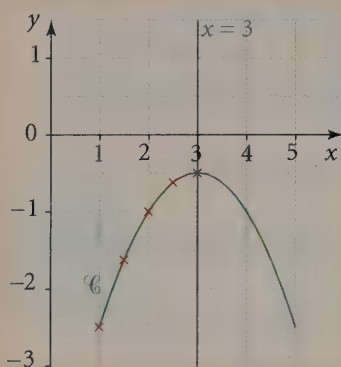
x	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	-2,5	-1,625	-1	-0,625	-0,5

2. a) Comme $a < 0$ ($a = -0,5$), la parabole est tournée vers le bas.

b) Comme $a = -0,5$ et $b = 3$, l'abscisse du sommet de cette parabole est $x = \frac{-3}{-1} = 3$.

c) L'axe de symétrie de cette parabole est la droite d'équation $x = 3$.

3. a), b) et c)



21 1. On résout l'équation $3x + 12 = 0$ successivement équivalente à :

$$3x = -12; \quad x = -\frac{12}{3}; \quad x = -4.$$

f est définie pour tout nombre réel $x \neq -4$.

Ainsi, l'ensemble de définition de f est :

$$]-\infty; -4[\cup]-4; +\infty[.$$

2. On résout l'équation $x + 2 = 0$ équivalente à $x = -2$.

f est définie pour tout nombre réel $x \neq -2$.

Ainsi, l'ensemble de définition de f est $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$.

3. On résout l'équation $5 - x = 0$ équivalente à $x = 5$.

Rappel

Le dénominateur ne doit pas être nul.

f est définie pour tout nombre réel $x \neq 5$.

Ainsi, l'ensemble de définition de f est $]-\infty; 5[\cup]5; +\infty[$.

22 1. La longueur du cercle trigonométrique est 2π .

Ainsi, $\frac{\pi}{2}$ est la longueur du quart de cercle trigonométrique et π celle du demi cercle trigonométrique.

On obtient ainsi les points P, Q, R, S et T associés respectivement aux nombres réels $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, -\pi$ par enroulement de la droite des réels autour du cercle.

2. $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$;

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ et } \sin \frac{\pi}{2} = 1;$$

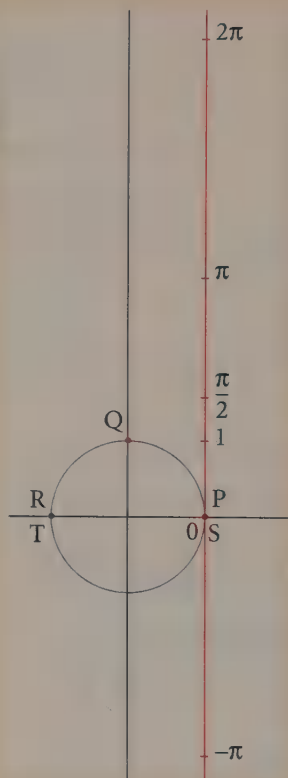
$$\cos \pi = -1 \text{ et } \sin \pi = 0;$$

$$\cos 2\pi = 1 \text{ et } \sin 2\pi = 0;$$

$$\cos(-\pi) = -1 \text{ et } \sin(-\pi) = 0.$$

Gagnez des points !

Il faut connaître par cœur les valeurs remarquables du cercle trigonométrique.



23 1. La longueur du cercle trigonométrique est 2π .

Ainsi, $\frac{\pi}{2}$ est la longueur d'un quart de cercle,

2π la longueur d'un cercle, $\frac{3}{2}\pi$ la longueur de $\frac{3}{4}$ de tour et 4π la longueur de deux tours.

On obtient ainsi les points P, Q, R, S et T associés respectivement aux nombres réels $0, -\frac{\pi}{2}, -2\pi, \frac{3}{2}\pi$, et -4π par enroulement de la droite des nombres réels autour du cercle.

2. $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$;

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1;$$

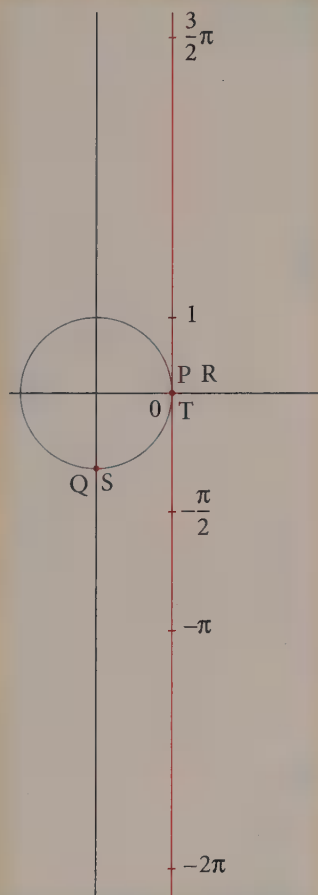
$$\cos(-2\pi) = 1 \text{ et } \sin(-2\pi) = 0;$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \text{ et } \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1;$$

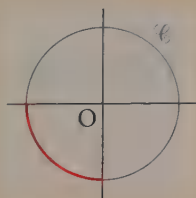
$$\cos(-4\pi) = 1 \text{ et } \sin(-4\pi) = 0.$$

Rappel

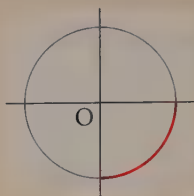
La longueur d'un cercle étant $2\pi R$, la longueur du cercle trigonométrique est 2π car $R = 1$.



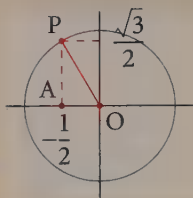
24 1. et 2.



25 1. et 2.



26 1.



$$2. (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

À l'aide du graphique, le théorème de Pythagore appliqué au rectangle OPA, rectangle en A permet d'écrire $OA^2 + AP^2 = OP^2$.

Or, $OA^2 = (\cos x)^2$; $AP^2 = (\sin x)^2$ et $OP^2 = 1$ (rayon du cercle).

Ainsi, $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

Gagnez des points !
Formule à connaître
par cœur.

27 1. Vrai.

2. Faux.

3. Faux.

4. Vrai.

→ Exercices d'entraînement

28 Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, l'inéquation $f(x) < 2$ est équivalente à :

$$\frac{1}{x} < 2, \text{ soit } \frac{1}{2} < x, \text{ c'est-à-dire } x > \frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 2$ est $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$.

29 L'équation $f(x) = 1$ est équivalente à :

$$x^2 - 4x + 5 = 1, \text{ soit } x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Or $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times 2x + 2^2$.

Ainsi, en utilisant l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, on obtient :

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$

Or $(x - 2)^2 = 0$ équivaut à :

$$x - 2 = 0, \text{ soit } x = 2.$$

La solution de l'équation $f(x) = 1$ est 2.

30 1. $2(x - 1)^2 + 3 = 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = 2x^2 - 4x + 2 + 3 = 2x^2 - 4x + 5$.

2. Oui.

3. Pour tout nombre réel x , $2(x - 1)^2 \geq 0$, donc $2(x - 1)^2 + 3 > 0$.

Ainsi, pour tout nombre réel x , $2(x - 1)^2 + 3 \neq 0$ et l'équation $2x^2 - 4x + 5 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

31 1. $(x - 3)(2x + 1) = 2x^2 + x - 6x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$.

2. On étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \bullet f(x) - g(x) &= 2x^2 - (5x + 3) \\ &= 2x^2 - 5x - 3 \\ &= (x - 3)(2x + 1). \end{aligned}$$

• L'équation $(x - 3)(2x + 1) = 0$ est équivalente à :

$$x - 3 = 0 \text{ ou } 2x + 1 = 0,$$

soit $x = 3$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

• Tableau de signe

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$x-3$	-	-	0	+	
$2x+1$	-	0	+	+	
$f(x)-g(x)$	+	0	-	0	+

• Pour $x \in]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]3 ; +\infty[$, $f(x) - g(x) > 0$, soit $f(x) > g(x)$.

Pour $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$, $f(x) - g(x) = 0$, soit $f(x) = g(x)$.

Pour $x \in \left] -\frac{1}{2}; 3 \right[$, $f(x) - g(x) < 0$, soit $f(x) < g(x)$.

32 1. La droite $\mathcal{D}$ est située sur ou au-dessous de la droite Δ pour $x \in]-\infty; 2]$.

2. L'inéquation $x + 1 \leq 3$ est équivalente à :

$$x \leq 3 - 1, \text{ soit } x \leq 2.$$

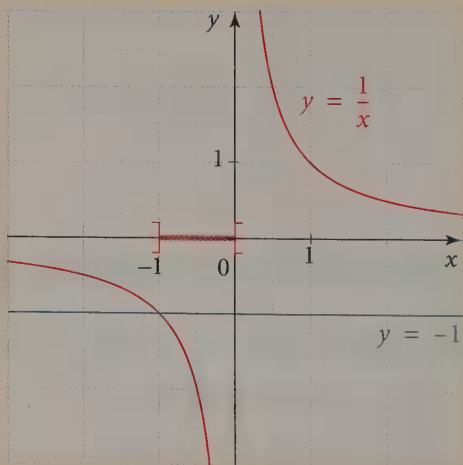
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x + 1 \leq 3$ est $]-\infty; 2]$.

33 • Pour $x \in]0; 1[$, $\mathcal{C}$ est située au-dessus de $\mathcal{D}$, donc $f(x) > g(x)$.

• Pour $x = 1$, $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{D}$, donc $f(x) = g(x)$.

• Pour $x \in]1; +\infty[$, $\mathcal{C}$ est située au-dessous de $\mathcal{D}$, donc $f(x) < g(x)$.

34 a) Inéquation $\frac{1}{x} < -1$

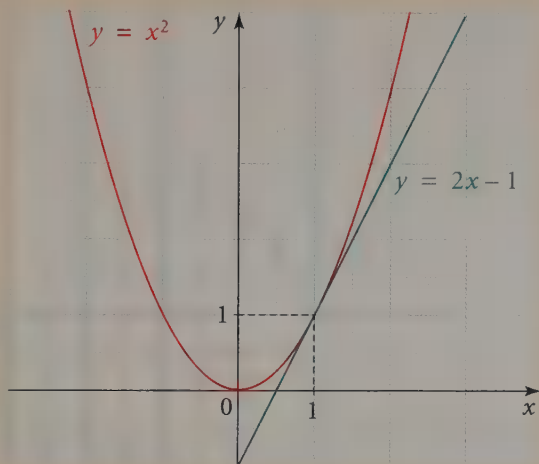


Piège à éviter
Pour comparer graphiquement les fonctions f et g , on détermine les positions relatives de leur représentation graphique.

Les solutions sont les abscisses des points de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ situés au-dessous de la droite d'équation $y = -1$.

On lit : $]-1; 0[$.

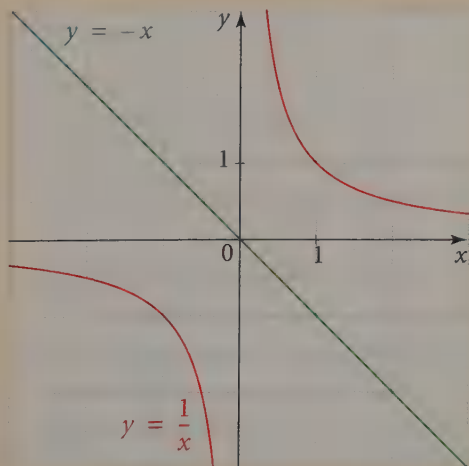
b) Équation $x^2 = 2x - 1$



Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = 2x - 1$.

On lit : 1.

c) Équation $\frac{1}{x} = -x$



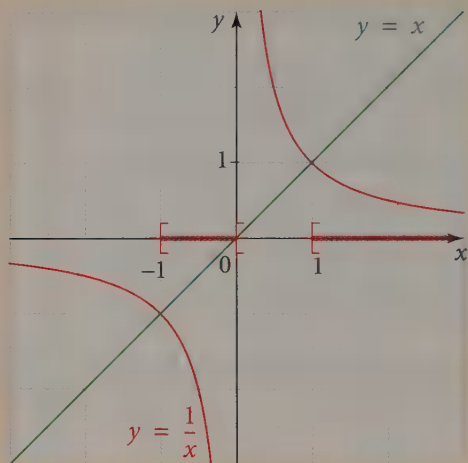
Gagnez des points !

Il faut connaître par cœur les courbes représentatives des fonctions usuelles.

La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ et la droite d'équation $y = -x$ ne se coupent pas.

Il n'y a pas de solution.

d) Inéquation $\frac{1}{x} \leq x$



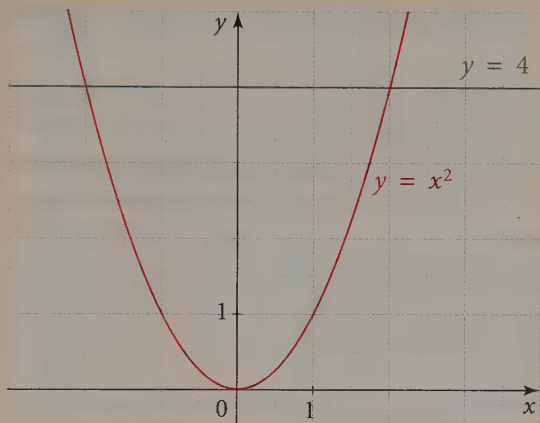
L'astuce du prof!

Toutes les informations nécessaires à la lecture graphique figurent sur le dessin.

Les solutions sont les abscisses des points de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ situés au-dessous ou sur la droite d'équation $y = x$.

On lit : $[-1 ; 0[\cup [1 ; +\infty[$.

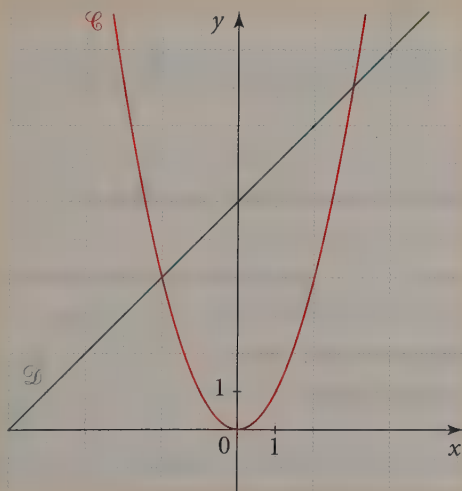
e) Inéquation $x^2 < 4$



Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe d'équation $y = x^2$ situés au-dessous de la droite d'équation $y = 4$.

On lit : $] -2 ; 2[$.

35 1. Tracés des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.



2. Pour $x \in]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$, $\mathcal{C}$ est située au-dessus de $\mathcal{D}$, donc :

$$f(x) > g(x).$$

Pour $x = -2$ et $x = 3$, $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{D}$, donc $f(x) = g(x)$.

Pour $x \in]-2; 3[$, $\mathcal{C}$ est située au-dessous de $\mathcal{D}$, donc $f(x) < g(x)$.

3. $(x+2)(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$.

On étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

• $f(x) - g(x) = x^2 - (x+6) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$.

• L'équation $f(x) - g(x) = 0$ équivaut successivement à :

$(x+2)(x-3) = 0$; $x+2 = 0$ ou $x-3 = 0$, soit $x = -2$ ou $x = 3$.

• Tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x+2$		-	0	+
$x-3$	-	-	0	+
$f(x) - g(x) = (x+2)(x-3)$	+	0	-	0

• Pour $x \in]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$, $f(x) - g(x) > 0$, soit $f(x) > g(x)$.

Cela signifie que la courbe représentative de f est située au-dessus de celle de g sur ces deux intervalles.

• Pour $x = -2$ et $x = 3$, $f(x) - g(x) = 0$, soit $f(x) = g(x)$.

Cela signifie que les courbes représentatives des fonctions f et g se coupent aux points d'abscisses -2 et 3 .

• Pour $x \in]-2; 3[$, $f(x) - g(x) < 0$, soit $f(x) < g(x)$.

Cela signifie que la courbe représentative de f est située au-dessous de celle de g sur cet intervalle.

36 1. $(x+2)(x-4) = x^2 - 4x + 2x - 8$; $(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$.

2. $\mathcal{A}_1 = DC^2$; $\mathcal{A}_1 = x^2$.

3. $\mathcal{A}_2 = \frac{DC \times EF}{2}$; $\mathcal{A}_2 = \frac{x \times 4}{2}$; $\mathcal{A}_2 = 2x$.

4. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$, donc $\mathcal{A} = x^2 - 2x$.

L'équation $\mathcal{A} = 8$ est équivalente à : $x^2 - 2x = 8$,
soit $x^2 - 2x - 8 = 0$.

On sait que $(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$, donc

l'équation $\mathcal{A} = 8$ est successivement équivalente à :

$$(x+2)(x-4) = 0;$$

$$x+2 = 0 \text{ ou } x-4 = 0, \text{ soit } x = -2 \text{ ou } x = 4.$$

Remarque

Pour résoudre l'équation
 $x^2 - 2x - 8 = 0$, il faut
utiliser la formule
factorisée de l'expression
 $x^2 - 2x - 8$.

On ne retient que la solution positive 4.

Pour que l'aire soit égale à 8 cm^2 , il faut que le côté du carré soit de 4 cm.

37 1. On trace la courbe d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 4,5x - 4,5$.

Tracés ci-contre.

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite. On lit 1,5 et 3.

2. On exprime y en fonction de x en utilisant la condition sur le périmètre :

$$(AB + BC) \times 2 = 9.$$

Alors $(x + y) \times 2 = 9$;

$$(x + y) = 4,5; y = 4,5 - x.$$

On en déduit $f(x)$: $f(x) = x \times y$.

Or $y = 4,5 - x$.

Donc $f(x) = x(4,5 - x)$,

$$\text{soit } f(x) = 4,5x - x^2.$$

3. On résout l'équation $f(x) = 4,5$.

On a l'équation : $4,5x - x^2 = 4,5$,

$$\text{soit } x^2 = 4,5x - 4,5.$$

On a résolu cette équation à la question 1.

Les solutions sont 1,5 et 3.

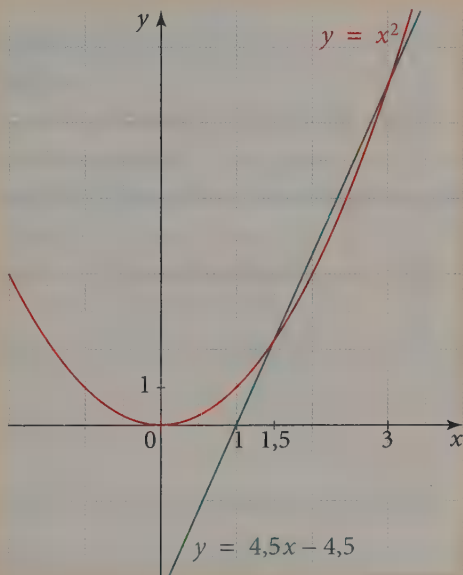
Si $x = 1,5$, alors $y = 4,5 - 1,5$, soit $y = 3$.

Si $x = 3$, alors $y = 4,5 - 3$, soit $y = 1,5$.

Le rectangle cherché a pour dimension :

AB = 1,5 cm et BC = 3 cm

ou AB = 3 cm et BC = 1,5 cm.



38 L'aire du trapèze est : $\frac{(x+3) \times x}{2}$.

Pour que cette aire soit égale à 5 cm^2 ,

on résout l'équation $\frac{(x+3)x}{2} = 5$.

Cette équation est équivalente à :

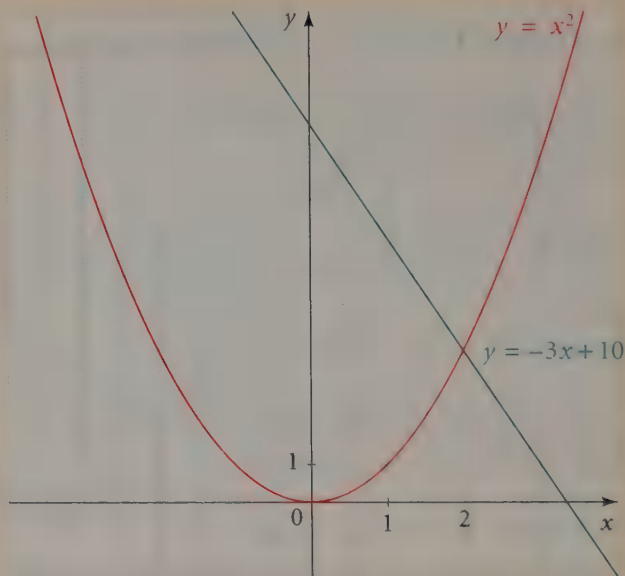
$$x^2 + 3x = 10, \text{ soit } x^2 = -3x + 10.$$

Rappel

Aire du trapèze :

$$\frac{(b+B) \times h}{2}.$$

On résout graphiquement cette équation en traçant la courbe d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = -3x + 10$.



Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = -3x + 10$.

La solution positive est donc 2.

L'aire du trapèze est donc égale à 5 cm^2 pour $x = 2 \text{ cm}$.

Piège à éviter
Une longueur est positive.

39 1. Soit x le nombre annuel de DVD loués et y l'argent dépensé pour la location de ces x DVD. On a d'après l'énoncé :

- formule ① : $y = 60 + 1,5x$;
- formule ② : $y = 30 + 2x$;
- formule ③ : $y = 3x$.

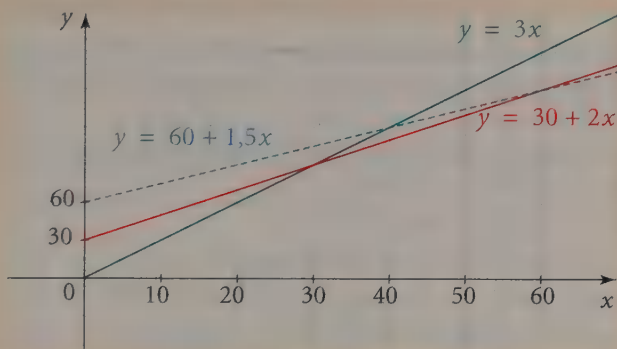
2. Soit f_1 , f_2 et f_3 les fonctions associées respectivement aux formules ①, ② et ③ :

$$f_1(x) = 60 + 1,5x ;$$

$$f_2(x) = 30 + 2x ;$$

$$f_3(x) = 3x.$$

Tracé des courbes représentatives des fonctions f_1 , f_2 et f_3 :



3. Pour $0 \leq x < 30$, la droite d'équation $y = 3x$ est située au-dessous des deux autres droites.

Pour $30 < x < 60$, la droite d'équation $y = 30 + 2x$ est située au-dessous des deux autres droites.

Pour $x > 60$, la droite d'équation $y = 60 + 1,5x$ est située au-dessous des deux autres droites.

Conclusion :

- Pour un nombre annuel de DVD inférieur à 30, la formule ③ est la plus avantageuse.
- Pour un nombre annuel de DVD compris entre 30 et 60, la formule ② est la plus avantageuse.
- Au-delà de 60 DVD loués annuellement, c'est la formule ① qui est la plus avantageuse.

40 Les droites sécantes (BA) et (BC) sont coupées par les parallèles (MN) et (AC). Le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}, \text{ soit } \frac{x}{5} = \frac{MN}{10}.$$

$$MN = \frac{10x}{5}, \text{ soit } MN = 2x \quad (0 \leq x \leq 5).$$

Remarque

Il faut reconnaître une situation de « Thalès ».

$$\text{L'aire du triangle BMN est égale à : } \frac{BM \times MN}{2}, \text{ soit } \frac{x \times 2x}{2} = x^2.$$

On résout donc l'équation $x^2 = 20,25$.

La solution positive de cette équation est $x = 4,5$.

Pour que l'aire du triangle BMN soit égale à $20,25 \text{ cm}^2$, il faut choisir $x = 4,5 \text{ cm}$.

41 1. a) L'aire du rectangle est $x(x + 0,3)$.

b) $(x + 0,15)^2 - 1,35^2 = x^2 + 2 \times 0,15x + 0,15^2 - 1,35^2 = x^2 + 0,3x + 0,0225 - 1,8225$;

$(x + 0,15)^2 - 1,35^2 = x^2 + 0,3x - 1,8$.

Une expression factorisée de $x^2 + 0,3x - 1,8$ est $(x + 0,15 - 1,35)(x + 0,15 + 1,35)$, soit $(x - 1,2)(x + 1,5)$.

c) L'équation $x^2 + 0,3x - 1,8 = 0$ équivaut successivement à $(x - 1,2)(x + 1,5) = 0$; $x - 1,2 = 0$ ou $x + 1,5 = 0$; $x = 1,2$ ou $x = -1,5$.

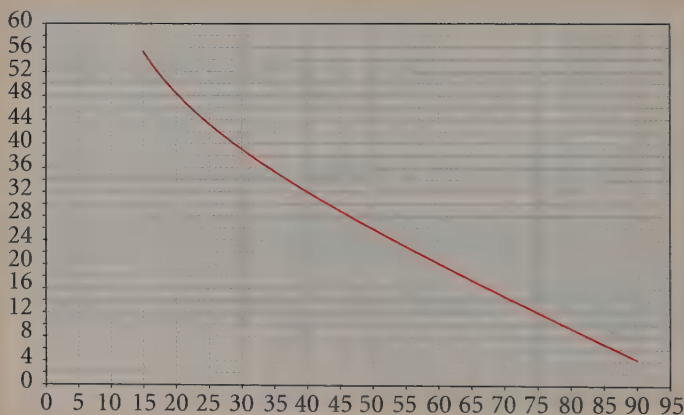
Les solutions de l'équation sont 1,2 et -1,5.

2. a) Il s'agit de la solution positive de l'équation.

La largeur de la pièce de tissu est donc 1,2 m.

b) La longueur de la pièce de tissu est $1,2 + 0,3 = 1,5$ m et l'aire est $1,2 \times 1,5 = 1,8 \text{ m}^2$.

42 1. a) Tracé de la courbe sur tableur.



b) Pour $x = 60$, on lit $y = 20$, donc $f(60) = 20$.

c) Pour $y = 32$, on lit $x = 40$, donc la solution de l'équation $f(x) = 32$ est 40.

2. a) La résistance correspondant à une température de 60°C est 20 k Ω .

b) La température correspondant à une résistance de 32 k Ω est 40°C .

43 1. Les courbes représentatives des fonctions f et g se coupent aux points d'abscisses $x = -2$ et $x = 0$.

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont -2 et 0.

2. La courbe représentative de la fonction f est située au-dessus de la courbe représentative de la fonction g pour $x \in]-2; 0[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $] -2; 0[$.

44 1. On résout l'équation $2x + 4 = 0$ successivement équivalente à $2x = -4$;
 $x = -\frac{4}{2}$; $x = -2$.

f est définie pour tout nombre réel $x \neq -2$.

Ainsi, l'ensemble de définition de f est :

$$D =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[.$$

2. ● $f(x) = 0$ équivaut à $2 - x = 0$, soit $x = 2$.

● Tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$2 - x$		+	+	0 -
$2x + 4$	-	0	+	+
$f(x) = \frac{2-x}{2x+4}$	-		+	0 -

● Signe de $f(x)$:

Pour $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, $f(x) < 0$.

Pour $x \in]-2; 2[$, $f(x) > 0$.

Pour $x = 2$, $f(x) = 0$.

45 1. a) ● Comme $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

De plus $a = 1$ et $b = -4$, le minimum de f est donc atteint pour $x = \frac{4}{2} = 2$.

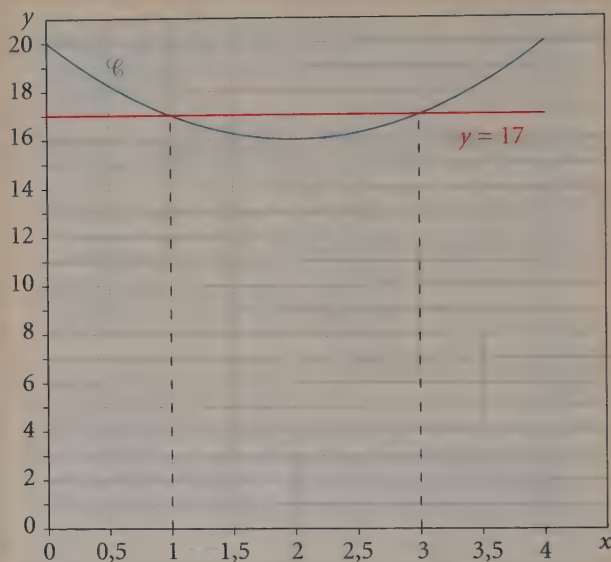
f est donc strictement décroissante $[0; 2]$ et strictement croissante $[2; 4]$.

● $f(0) = 20$, $f(2) = 16$ et $f(4) = 20$.

● Tableau de variation de f .

x	0	2	4
$f(x)$	20	16	20

b) et c) Représentations graphiques.



d) La courbe représentative de f coupe la droite d'équation $y = 17$ aux points d'abscisses 1 et 3.

Les solutions de l'équation $f(x) = 17$ sont 1 et 3.

2. a) $4 \times 5 - x(4 - x) = x^2 - 4x + 20$.

b) L'aire est bien donnée par la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 20$.

3. a) D'après le tableau de variation, f admet un minimum égal à 16, atteint pour $x = 2$.

La cote x pour laquelle la surface à traiter est minimale est donc égale à 2 cm.

b) Les solutions de l'équation $f(x) = 17$ sont 1 et 3. On a donc deux possibilités pour la cote x : 1 cm ou 3 cm.

46 1. On lit sur la figure : $-1 < x_0 < 0$.

2. On obtient avec le tableau de valeurs : $-0,7 < x_0 < -0,6$.

47 1. OAB est un triangle équilatéral, donc les 3 angles sont égaux. Ainsi, $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

2. ● OAB est un triangle équilatéral, donc les côtés sont égaux à 1 et I est le milieu de [OA]. (Propriété du triangle équilatéral.)

$$\text{Ainsi, } OI = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}.$$

● OIB est un triangle rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore $OI^2 + IB^2 = OB^2$,

$$\text{soit } IB^2 = OB^2 - OI^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Ainsi, } BI = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. En appliquant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle :

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OI}{OB} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \widehat{AOB} = \frac{IB}{OB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. La longueur du cercle est égale à $2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$.

On est dans une situation de proportionnalité :

Angle en degrés	360	60
Longueur	2π	$\widehat{AB}$

Remarque

On utilise un tableau de proportionnalité.

La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est donc égale à : $\frac{2\pi \times 60}{360} = \frac{\pi}{3}$.

5. Le point B est le point du cercle associé au nombre réel $\frac{\pi}{3}$.

On en déduit : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1 Voir et calculer dans l'espace

1 Règles de base

- Tous les théorèmes de géométrie plane sont applicables à chaque plan de l'espace.
- Par trois points non alignés passe un seul plan.
- Toute droite qui passe par deux points distincts d'un plan est contenue dans ce plan.

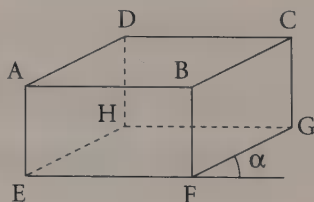
Un plan est donc déterminé par :

- Trois points non alignés.
- Une droite et un point extérieur à cette droite.
- Deux droites sécantes.

2 La perspective cavalière

Dans la représentation en perspective cavalière :

- Les droites parallèles sont représentées par des droites parallèles.
- Les rapports de longueurs des segments à supports parallèles sont conservés.
- Dans le plan frontal, les distances et les angles sont conservés.
- α est appelé angle de fuite.



EXERCICES RÉSOLUS

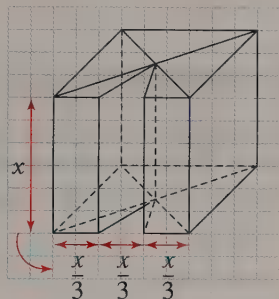
1 Dessiner dans l'espace

ÉNONCÉ

Un cube possédant une encoche est dessiné en perspective cavalière.

Ce cube est tourné d'un quart de tour vers la droite.

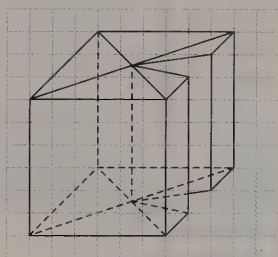
Dessiner, dans cette nouvelle position, le cube en perspective cavalière.



CORRIGÉ

Il faut « visualiser » le cube dans sa nouvelle position. « Voir » dans l'espace n'est pas toujours simple, on peut s'aider d'objets de la vie courante (boîte d'allumettes, emballage...).

Il faut repérer les arêtes qui ne sont pas visibles pour les représenter en pointillés.



2 Calculer dans l'espace

ÉNONCÉ

ABCDEFGH est un cube d'arête 5 cm. Déterminer la mesure de [DF].

CORRIGÉ

Le quadrilatère DBFH est un rectangle, car les droites (DH) et (BF) sont parallèles, les droites (DB) et (HF) sont parallèles et les droites (HD) et (DB) sont perpendiculaires.

[DF] est une diagonale de ce rectangle.

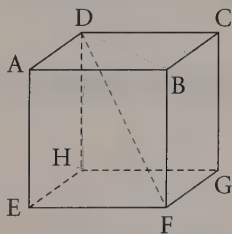
On calcule d'abord HF en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle HEF rectangle en E :

$$HF^2 = EF^2 + EH^2, \text{ donc } HF^2 = 5^2 + 5^2 = 50.$$

$$\text{Ainsi } HF = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm.}$$

On calcule DF en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle DHF rectangle en H : $DF^2 = HF^2 + HD^2$, soit $DF^2 = (5\sqrt{2})^2 + 5^2$.

$$\text{Ainsi, } DF^2 = 50 + 25 = 75. \text{ Soit } DF = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ cm.}$$

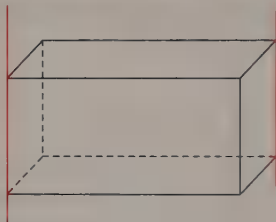
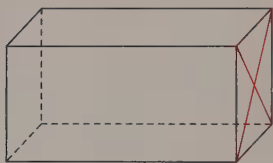


2 Positions relatives dans l'espace

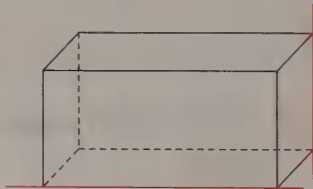
1 Positions relatives de deux droites

- Si deux droites sont contenues dans un même plan, alors elles sont coplanaires. Dans ce cas, elles sont soit sécantes soit parallèles.

On peut illustrer ces situations en observant le parallélépipède rectangle :

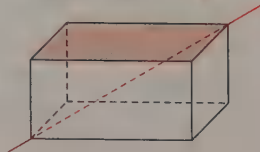
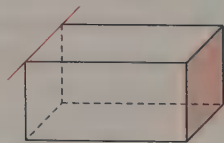
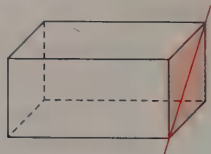


- Elles sont non coplanaires s'il n'existe aucun plan les contenant.



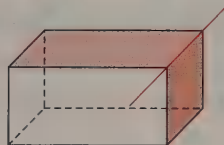
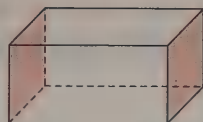
2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

- La droite est incluse dans le plan.
- La droite et le plan n'ont aucun point commun.
- La droite et le plan ont un seul point commun.



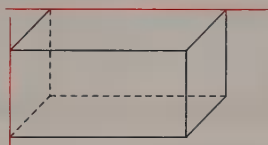
3 Positions relatives de deux plans

- Les deux plans sont confondus.
- Les deux plans n'ont aucun point commun.
- Les deux plans sont sécants ; leur intersection est une droite.



4 Droites orthogonales

Deux droites sont orthogonales quand leurs parallèles menées par un point quelconque sont perpendiculaires.



5 Droites et plans perpendiculaires

Une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$ sont orthogonaux quand la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$.

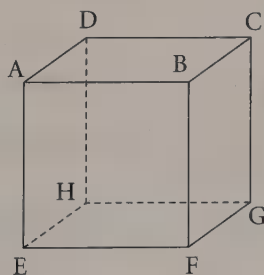
EXERCICE RÉSOLU

► Voir dans l'espace

ÉNONCÉ

ABCDEFGH est un cube.

Quelles sont les positions relatives des droites (DF) et (BH) ?



CORRIGÉ

Le quadrilatère DBFH est un rectangle.

Les droites (DF) et (BH) sont deux droites du plan (DBFH).

Les droites (DF) et (BH) sont sécantes en un point O milieu de [DF] et [BH].

Conseil

On cherche un plan contenant ces deux droites.

3 Configurations usuelles du plan

1 Théorème de Pythagore

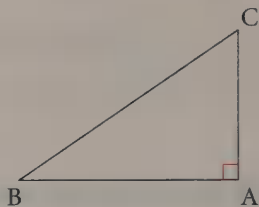
• Théorème

Soit ABC un triangle rectangle en A.

On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

• Réciproque

Si ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle est rectangle en A.

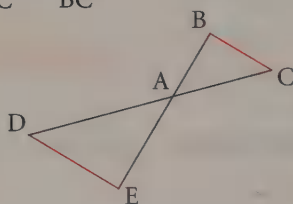
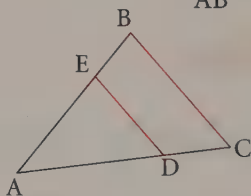


2 Théorème de Thalès appliqué au triangle

• Théorème

Les droites sécantes (AB) et (AC) sont coupées par les droites parallèles (ED) et (BC). Sur les droites (AB) et (AC) sécantes en A, les points A, E, B et A, D, C sont alignés dans le même ordre.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}.$$



• Réciproque

Soit ABC et AED deux triangles tels que A, E, B et A, D, C soient alignés dans le même ordre.

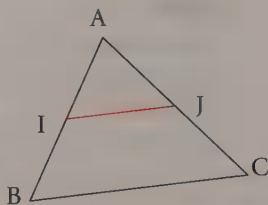
Si $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$, alors les droites (ED) et (BC) sont parallèles.

3 Théorème des milieux dans le triangle

Soit ABC un triangle.

Si I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC], alors (IJ) et (BC) sont parallèles :

$$IJ = \frac{1}{2} BC.$$



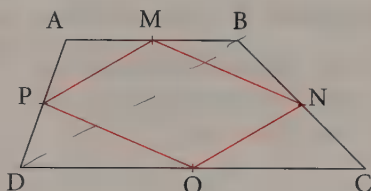
EXERCICE RÉSOLU

► Utiliser le théorème des milieux

ÉNONCÉ

ABCD est un trapèze ; M, N, O et P sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].

Déterminer la nature du quadrilatère MNOP.



CORRIGÉ

• Les mots-clés sont « milieux des côtés » ; ce qui fait penser au théorème des milieux dans le triangle. Dans le triangle ABD, M est le milieu de [AB], P est le milieu de [AD], donc d'après le théorème des milieux dans le triangle, on en déduit que les droites (MP) et (BD) sont parallèles et que :

$$MP = \frac{1}{2} BD.$$

De même, dans le triangle CBD, N est le milieu de [BC], O est le milieu de [CD], donc (NO) est parallèle à (BD) et $NO = \frac{1}{2} BD$.

On a donc :

- (MP) parallèle à (BD) et $MP = \frac{1}{2} BD$;
- (NO) parallèle à (BD) et $NO = \frac{1}{2} BD$.

On en déduit que les droites (MP) et (NO) sont parallèles et que $MP = NO$. Deux côtés opposés du quadrilatère MNOP sont parallèles et de même longueur ; le quadrilatère MNOP est donc un parallélogramme.

Conseil

On repère les mots-clés de l'énoncé en observant la figure.

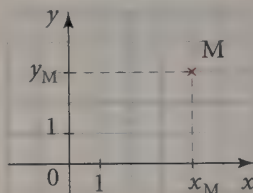
4 Repérage de points dans le plan

1 Repère orthonormé

Trois points (O ; I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet O définissent un repère orthonormé du plan.

2 Coordonnées d'un point

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les coordonnées d'un point M sont l'abscisse x_M et l'ordonnée y_M de M. On note $M(x_M ; y_M)$.



3 Distance de deux points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

La distance de A à B, notée AB, est égale à $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

4 Milieu d'un segment

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan.

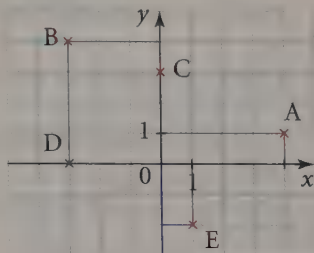
Les coordonnées du milieu I de [AB] sont : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Lire les coordonnées de points

ÉNONCÉ

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer, par lecture graphique, les coordonnées des points A, B, C, D et E.



CORRIGÉ

$A(4; 1)$; $B(-3; 4)$; $C(0; 3)$; $D(-3; 0)$ et $E(1; -2)$.

Rappel

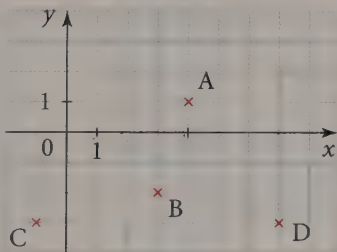
On lit l'abscisse, puis l'ordonnée des points.

2 Déterminer la distance de deux points, le milieu d'un segment

ÉNONCÉ

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.
2. Déterminer les coordonnées du milieu I de [BC].
3. Calculer BC, BD et CD. Quelle est la nature du triangle BCD ?

$A(4, 1)$ $B(3, -2)$
 $C(-1, -3)$ $D(7, -3)$



CORRIGÉ

1. On lit les coordonnées des points A, B, C et D.
 $A(4; 1)$; $B(3; -2)$; $C(-1; -3)$ et $D(7; -3)$.
2. Les coordonnées du point I milieu de [BC] sont :

Conseil

Utiliser les formules du cours.

$$I\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right); \text{ soit } I\left(\frac{3 + (-1)}{2}; \frac{(-2) + (-3)}{2}\right); I\left(1; -\frac{5}{2}\right).$$

$$3. BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-3 - (-2))^2}$$

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(7 - 3)^2 + (-3 - (-2))^2}$$

$$BD = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (-3 - (-3))^2}$$

$$CD = \sqrt{8^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8.$$

On a $BC = BD$, donc le triangle BCD est isocèle en B.

5 Équations de droites

1 Équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

→ Équation réduite d'une droite $\mathcal{D}$ de la forme $y = mx + p$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation réduite $y = mx + p$.

Le nombre réel m est appelé coefficient directeur de $\mathcal{D}$. Si $m > 0$, alors la droite « monte » ; si $m < 0$, alors la droite « descend ».

Le nombre réel p est appelé ordonnée à l'origine ; $\mathcal{D}$ passe par le point de coordonnées $(0 ; p)$.

→ Calcul du coefficient directeur

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$ non verticale.

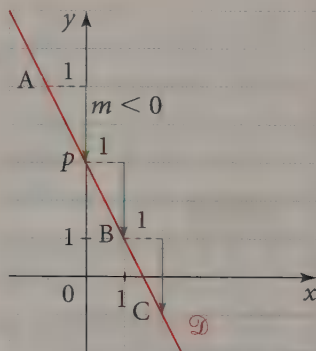
Le coefficient directeur m de $\mathcal{D}$ est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

→ Coordonnées d'un point de la droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite $y = mx + p$

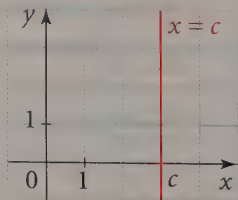
Un point $A(x_A ; y_A)$ est un point de $\mathcal{D}$ lorsque ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. On peut alors écrire :

$$y_A = mx_A + p.$$



2 Équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé une droite $\mathcal{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation : $x = c ; c \in \mathbb{R}$.



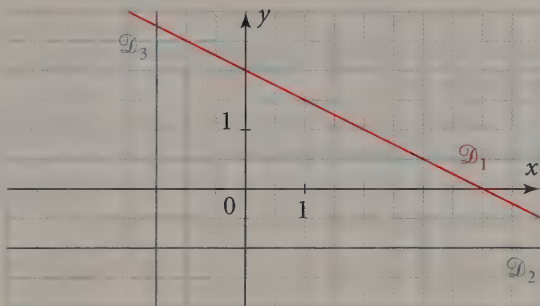
EXERCICE RÉSOLU

► Déterminer une équation de droite

ÉNONCÉ

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer :

1. les équations des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$;
2. l'équation de la droite passant par les points A(3 ; 1) et B(-1 ; -8).



CORRIGÉ

1. ● Le coefficient directeur de $\mathcal{D}_1$ est égal à $-0,5$, son ordonnée à l'origine est égale à 2 , donc l'équation réduite de $\mathcal{D}_1$ est $y = -0,5x + 2$.

● $\mathcal{D}_2$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par $(0 ; -1)$, donc son équation est $y = -1$.

● $\mathcal{D}_3$ est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par $\left(-\frac{3}{2} ; 0\right)$, donc son équation est $x = -\frac{3}{2}$.

2. Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \text{ soit } m = \frac{-8 - 1}{-1 - 3} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}.$$

Son équation réduite est de la forme $y = \frac{9}{4}x + p$; or A étant un point de (AB), on peut écrire : $1 = \frac{9}{4} \times 3 + p$, soit $1 = \frac{27}{4} + p$.

$$\text{Ainsi } p = 1 - \frac{27}{4} = \frac{-23}{4} \text{ et (AB) : } y = \frac{9}{4}x - \frac{23}{4}.$$

Conseil

On lit sur le graphique les valeurs de m et de p .

6 Système d'équations linéaires : résolution graphique

1 Système d'équations linéaires : résolution graphique

On considère le système
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

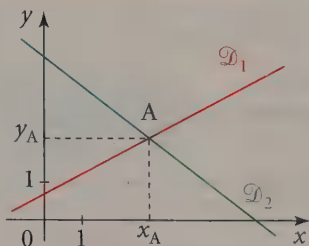
où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels donnés.

Résoudre un tel système revient à déterminer tous les couples $(x; y)$ qui vérifient les deux égalités considérées.

On écrit les deux équations sous la forme $y = mx + p$, puis on trace les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ correspondant à ces deux équations.

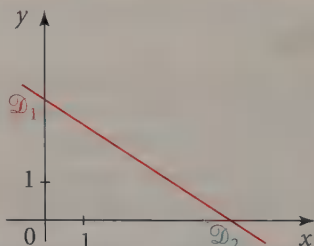
Résoudre un tel système revient à déterminer les coordonnées du point d'intersection (s'il existe) des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Lorsque les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont :

a) Sécantes en un point $A(x_A; y_A)$



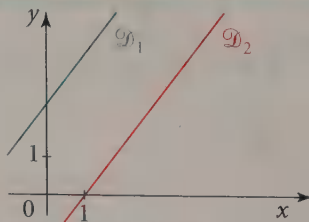
Le système admet un unique couple solution : $(x_A; y_A)$.

b) Confondues



Le système admet une infinité de couples solutions : les couples $(x; y)$ vérifiant l'une des équations des droites.

c) Strictement parallèles



Le système n'admet pas de solution.

EXERCICE RÉSOLU

► Résoudre graphiquement un système

ÉNONCÉ

On donne les représentations graphiques des droites d'équations :

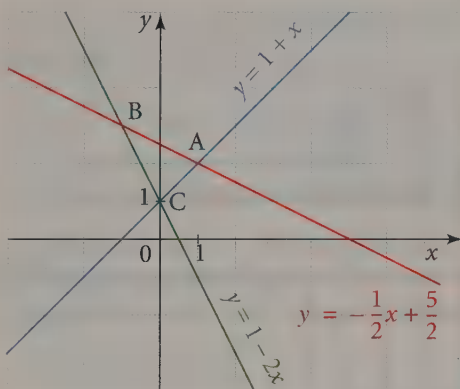
$$y = 1 + x; y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \text{ et } y = 1 - 2x.$$

À l'aide du graphique, résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} -x + y = 1 \\ \frac{1}{2}x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} \frac{1}{2}x + y = \frac{5}{2} \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$



ÉNONCÉ

$$(S_1) \text{ est équivalent à : } \begin{cases} y = 1 + x \\ y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \end{cases} \text{ Le point}$$

d'intersection de ces deux droites est le point A(1 ; 2), donc (S_1) a pour solution le couple (1 ; 2).

(S_2) est équivalent à : $\begin{cases} y = 1 + x \\ y = 1 - 2x \end{cases}$. Le point d'intersection de ces deux droites est le point C(0 ; 1), donc (S_2) a pour solution le couple (0 ; 1).

(S_3) est équivalent à : $\begin{cases} y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \\ y = 1 - 2x \end{cases}$. Le point d'intersection de ces deux

droites est le point B(-1 ; 3), donc (S_3) a pour solution le couple (-1 ; 3).

Méthode

On lit sur le graphique les coordonnées des points d'intersection des droites associées à chaque équation des systèmes.

7 Parallélisme et perpendicularité de deux droites

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites d'équations réduites respectives :

$$y = mx + p \text{ et } y = m'x + p',$$

dans le plan rapporté à un repère.

1 Droites parallèles

Deux droites non verticales sont parallèles lorsque leurs coefficients directeurs sont égaux.

$\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$ équivaut à $m = m'$.

2 Droites perpendiculaires

Si le plan est rapporté à un repère **orthonormé**, alors deux droites non parallèles aux axes sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1 .

$\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$ équivaut à $m \times m' = -1$.

3 Exemple

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On considère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ d'équations réduites respectives :

$$\mathcal{D}_1 : y = 2x - 1; \quad \mathcal{D}_2 : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2};$$

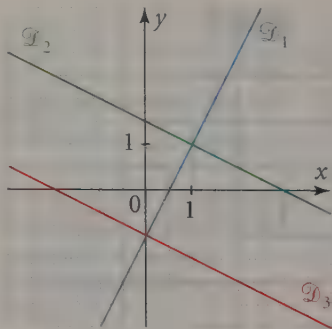
$$\mathcal{D}_3 : y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

• Les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ ont le même coefficient directeur $\left(m = -\frac{1}{2}\right)$: elles sont parallèles.

• Le repère est orthonormé. Le coefficient directeur de $\mathcal{D}_1$ est 2, le coefficient directeur de $\mathcal{D}_2$ est $-\frac{1}{2}$; on a $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires.

De plus $\mathcal{D}_3$ est parallèle à $\mathcal{D}_2$, donc $\mathcal{D}_3$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$; on peut vérifier que le produit de leur coefficient directeur est égal à -1 .



EXERCICE RÉSOLU

► Déterminer le parallélisme et l'orthogonalité

ÉNONCÉ

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(2; -1)$, $B(2; 3)$, $C(0; 5)$ et les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations réduites respectives : $y = -x - 1$ et $y = x + 1$.

1. Que peut-on dire de la droite (AB) ? Montrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et (CB) sont parallèles, puis que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires.
2. Tracer ces droites.

CORRIGÉ

1. (AB) passe par les points A et B de même abscisse : $x_A = x_B = 2$. La droite (AB) a donc pour équation : $x = 2$.

Elle est parallèle à l'axe des ordonnées.

● (BC) est une droite dont l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$. Soit m le coefficient directeur de (BC) :

$$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}; m = \frac{5 - 3}{0 - 2} = -1. \text{ (BC) s'écrit alors : } y = -x + p.$$

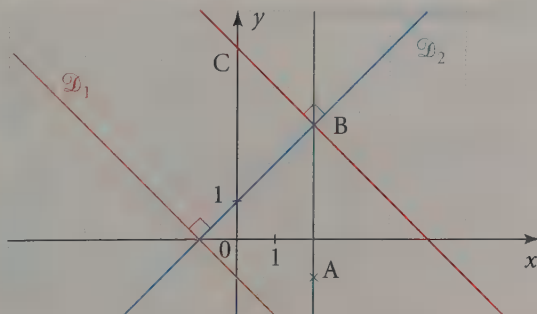
$C \in (BC)$, donc $y_C = -x_C + p$ équivaut à $5 = 0 + p$; $p = 5$.

La droite (BC) a pour équation réduite $y = -x + 5$.

● Les coefficients directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et (BC) sont égaux et valent -1 , donc les droites $\mathcal{D}_1$ et (BC) sont parallèles.

● Le produit des coefficients directeurs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est égal à -1 , donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires.

2.



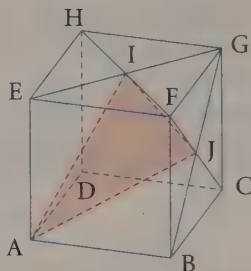
Rappel

On détermine les équations des droites (AB) et (BC).

→ Savoir calculer dans l'espace

ÉNONCÉ

ABCDEFGH est un cube d'arête 6 cm. Calculer IJ.



MÉTHODE

1. Repérer une figure du plan qui contient le segment [IJ].
2. Appliquer les théorèmes de géométrie plane.

CORRIGÉ

1. On considère le triangle EGB. I est le milieu de [EG] et J est le milieu de [BG].

On reconnaît la configuration du théorème des milieux du triangle :

$$(IJ) \parallel (EB) \quad \text{et} \quad IJ = \frac{1}{2}EB.$$

2. [EB] est l'hypoténuse du triangle rectangle ABE, rectangle en A. En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$EB^2 = AE^2 + AB^2;$$

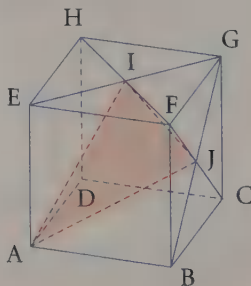
$$EB^2 = 6^2 + 6^2 = 72,$$

$$\text{soit } EB = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Ainsi,

$$IJ = \frac{1}{2}EB = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$



Remarque

Le triangle EGB est équilatéral.

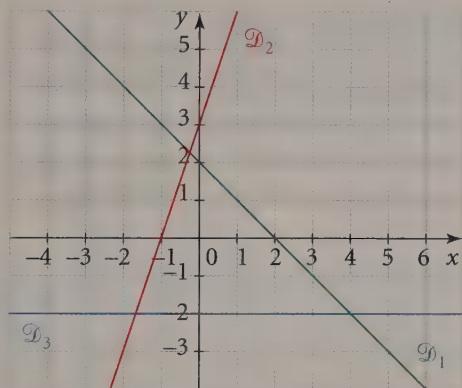
Remarque

ABFE est un carré ;
le triangle EAB est un triangle rectangle en A.

→ Savoir lire le coefficient directeur d'une droite

ÉNONCÉ

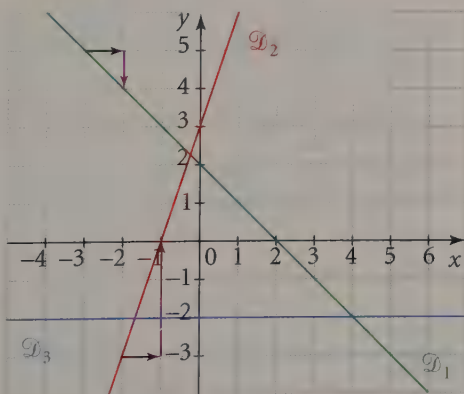
Déterminer graphiquement le coefficient directeur de chacune des droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.



MÉTHODE

1. Se positionner sur un point de la droite (à coordonnées entières si possible).
2. Se déplacer horizontalement d'une unité vers la droite.
3. Lire le coefficient directeur qui est égal au nombre d'unités verticales nécessaires pour atteindre la droite ; le coefficient directeur est positif si on se déplace vers le haut, il est négatif si on se déplace vers le bas.

CORRIGÉ



Rappel

Le coefficient directeur d'une droite horizontale est égal à 0.

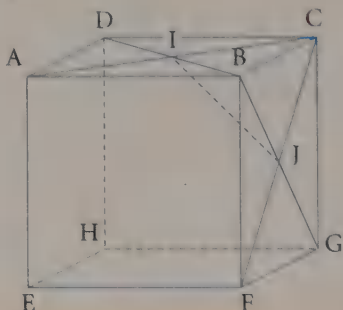
On obtient par lecture graphique : le coefficient directeur de $\mathcal{D}_1$ est -1 ; celui de $\mathcal{D}_2$ est 3 ; celui de $\mathcal{D}_3$ est 0 .

→ Exercices d'application



1 Calculs dans l'espace

ABCDEFGH est un cube d'arête 10 cm ; I et J sont les centres des faces ABCD et BFGC. Calculer IJ, puis EJ.



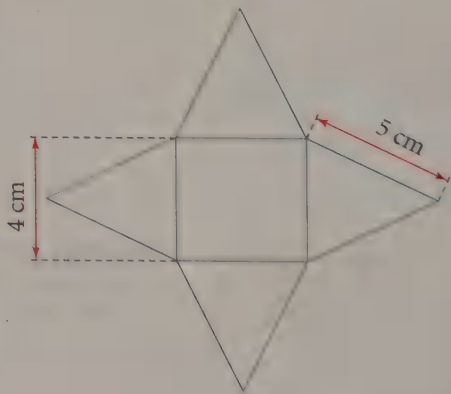
2 Volume dans l'espace

Le dessin représente le patron d'une pyramide régulière à base carrée. Calculer le volume de la pyramide arrondi à 1 cm^3 .

Volume de la pyramide : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} h$.

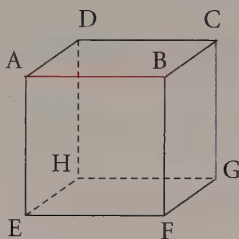
$\mathcal{B}$: aire de la base.

h : hauteur.



3 Positions relatives dans l'espace

Soit le cube ABCDEFGH.



Compléter les tableaux dans chaque question.

1. La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan $\mathcal{P}$?

$\mathcal{D}$	(AE)	(DC)	(HG)	(AE)	(DB)	(DH)	(AC)
$\mathcal{P}$	(DGC)	(CBF)	(ABD)	(DBF)	(EFG)	(EFG)	(FGH)
oui/non							

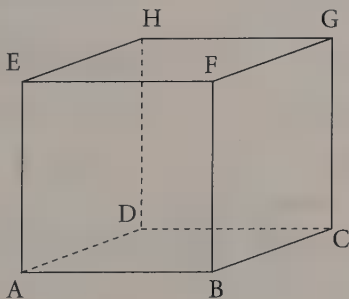
2. La droite $\mathcal{D}$ est-elle perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$?

$\mathcal{D}$	(AB)	(FG)	(CF)	(HF)	(CG)
$\mathcal{P}$	(BCG)	(HDC)	(EFG)	(EAD)	(ABD)
oui/non					

4 Calculs dans l'espace

Soit un cube d'arête 5 cm.

Calculer l'aire du triangle ACG.



5 Équations de droites

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point $A(-2; 1)$ et la droite Δ d'équation réduite $y = -2x + 1$.

Déterminer les équations réduites des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passant par A et telles que Δ soit parallèle à $\mathcal{D}_1$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$.

6 Système d'équations

Résoudre numériquement et graphiquement le système (S) :

$$(S) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

→ Exercices d'entraînement



7 Problème et système

Un distributeur de boissons contient exactement 19 euros en pièces de 0,50 euro et de 0,20 euro.

Déterminer le nombre de pièces de chaque sorte sachant que le distributeur contient 62 pièces.

8 Avec la géométrie

Déterminer les dimensions d'un panneau rectangulaire sachant que :

- si on diminue sa largeur de 5 cm et si on augmente sa longueur de 8 cm, son aire augmente de $0,83 \text{ dm}^2$;
- si on augmente sa largeur de 1 cm et si on diminue sa longueur de 4 cm, son aire diminue de $1,63 \text{ dm}^2$.

9 Équations de droites

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Déterminer, pour chaque cas, une équation de la droite, puis la tracer.

1. $\mathcal{D}_1$ passe par les points de coordonnées $(2; -2)$ et $(-1; 7)$.

2. $\mathcal{D}_2$ passe par le point de coordonnées $(2 ; 4)$ et a pour coefficient directeur $\frac{5}{2}$.
3. $\mathcal{D}_3$ passe par le point de coordonnées $(2 ; 3)$ et est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$.
4. $\mathcal{D}_4$ passe par le point de coordonnées $(0 ; 2)$ et est perpendiculaire à la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + 3$.

10 Médianes d'un triangle

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(-4 ; -3)$, $B(-1 ; 2)$ et $C(2 ; 1)$.

1. Déterminer une équation des droites (AB) , (AC) et (BC) .
2. Calculer les coordonnées des points A' , B' et C' , milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
3. Déterminer une équation de chacune des médianes du triangle ABC .
4. Montrer que ces trois médianes se coupent en un point G et déterminer ses coordonnées.

11 Avec la géométrie

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère trois points M , N et P .

1. Déterminer les coordonnées des points M , N et P sachant que :
 - la droite (MN) a pour équation réduite $y = 3x + 8$;
 - la droite (MP) a pour équation réduite $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$;
 - le point N a pour abscisse -1 ;
 - les droites (OM) et (PN) sont parallèles.
2. Montrer que le quadrilatère $MNPO$ est un parallélogramme.

→ Exercices d'application

1 • On considère le triangle ACF.

I est le milieu de [AC] et J le milieu de [FC].

On applique le théorème des milieux des côtés d'un triangle.

On a alors : $IJ = \frac{1}{2}AF$.

On calcule AF en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle

AEF : $AF^2 = AE^2 + EF^2$, avec $AE = EF = 10$.

$AF^2 = 200$; $AF = 10\sqrt{2}$ cm, d'où $IJ = 5\sqrt{2}$ cm.

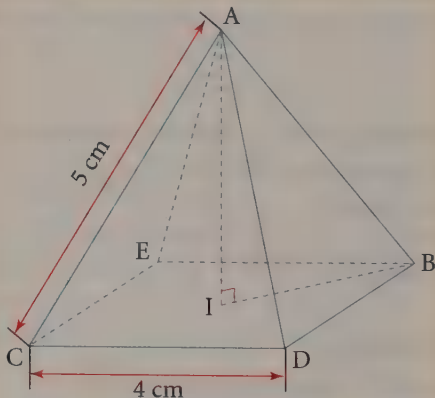
• On considère le triangle EFJ rectangle en F.

On a : $EJ^2 = EF^2 + FJ^2$.

Or $FJ = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}AF = 5\sqrt{2}$ cm, donc $EJ^2 = 10^2 + (5\sqrt{2})^2$.

Ainsi, $EJ^2 = 100 + 50 = 150$ et $EJ = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$ cm.

2



Remarque

On se place dans le triangle AIB rectangle en I.

Il faut calculer la longueur AI, hauteur de la pyramide.

Le triangle AIB est rectangle en I. On a $AB = 5$ cm et $IB = \frac{1}{2}BC$.

BCD est un triangle rectangle en D, donc d'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = CD^2 + DB^2$; $BC^2 = 4^2 + 4^2$; $BC^2 = 32$.

Soit $BC = 4\sqrt{2}$ cm, d'où $IB = 2\sqrt{2}$ cm.

On utilise maintenant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AIB :

$$AB^2 = AI^2 + IB^2 ;$$

soit $AI^2 = AB^2 - IB^2$, soit aussi $AI^2 = 25 - 8 = 17$. D'où $AI = \sqrt{17}$ cm.

L'aire de la base est égale à l'aire du carré CDBE, soit 16 cm^2 .

Ainsi, le volume de la pyramide est :

$$V = \frac{1}{3} \times 16 \times \sqrt{17}, \text{ soit } V \approx 22 \text{ cm}^3 \text{ arrondi à l'unité.}$$

3 1.

$\mathcal{D}$	(AE)	(DC)	(HG)	(AE)	(DB)	(DH)	(AC)
$\mathcal{P}$	(DGC)	(CBF)	(ABD)	(DBF)	(EFG)	(EFG)	(FGH)
oui/non	oui	non	oui	oui	oui	non	oui

2.

$\mathcal{D}$	(AB)	(FG)	(CF)	(HF)	(CG)
$\mathcal{P}$	(BCG)	(HDC)	(EFG)	(EAD)	(ABD)
oui/non	oui	oui	non	non	oui

Remarque

Dans l'espace, il est nécessaire de connaître les règles qui régissent les relations entre les points, les droites et les plans.

4 ACG est un triangle rectangle en C.

L'aire du triangle ACG est : $\frac{AC \times GC}{2}$.

● Calcul de AC : dans le triangle rectangle ABC, on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 ; AC^2 = 5^2 + 5^2 = 50, \text{ soit } AC = 5\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$\text{D'où } \mathcal{A}_{ACG} = \frac{5\sqrt{2} \times 5}{2}, \text{ donc } \mathcal{A}_{ACG} = \frac{25\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2.$$

5 ● $\mathcal{D}_1$ est une droite dont l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$. Les droites Δ et $\mathcal{D}_1$ sont parallèles donc $m = -2$.

La droite $\mathcal{D}_1$ s'écrit alors : $y = -2x + p$.

Rappel

Deux droites parallèles ont des coefficients directeurs égaux.

Le point $A \in \mathcal{D}_1$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite : $y_A = -2x_A + p$. Ce qui équivaut à : $1 = -2 \times (-2) + p$; $p = -3$.

La droite $\mathcal{D}_1$ a pour équation réduite $y = -2x - 3$.

● $\mathcal{D}_2$ est une droite dont l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$.

Les droites Δ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires donc : $-2 \times m = -1$;

$$\text{soit } m = \frac{1}{2}.$$

La droite $\mathcal{D}_2$ s'écrit alors : $y = \frac{1}{2}x + p$.

Le point $A \in \mathcal{D}_2$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite :

$$y_A = \frac{1}{2}x_A + p \text{ qui équivaut à : } 1 = \frac{1}{2} \times (-2) + p ; p = 2.$$

La droite $\mathcal{D}_2$ a pour équation réduite $y = \frac{1}{2}x + 2$.

6 ● Résolution numérique par la méthode de combinaison linéaire

En multipliant la première équation par -2 , on obtient :

$$\begin{cases} -4x - 2y = -8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$-x = -1 ; \text{ soit } x = 1.$$

En remplaçant x par 1 dans la seconde équation, on obtient ;

$$3 \times 1 + 2y = 7 ; \quad 2y = 7 - 3 ; \quad y = 2.$$

Le couple $(1 ; 2)$ est solution de (S).

On peut aussi utiliser la méthode de substitution en exprimant y en fonction de x dans la première équation. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

● Résolution graphique

$$2x + y = 4 \text{ équivaut à : } y = -2x + 4. \quad 3x + 2y = 7 \text{ équivaut à : } y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont pour équations réduites respectives :

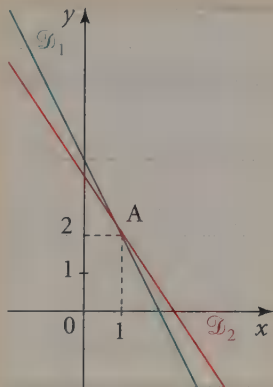
$$y = -2x + 4 \text{ et } y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Rappel

Le produit des coefficients directeurs de deux droites perpendiculaires est égal à -1 .

On trace les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de sorte que : $\mathcal{D}_1$ passe par les points $(2 ; 0)$ et $(0 ; 4)$; $\mathcal{D}_2$ passe par les points $(3 ; -1)$ et $(-1 ; 5)$.

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes au point $A(1 ; 2)$.



Remarque

Résoudre graphiquement un système revient à déterminer les coordonnées, s'ils existent, du ou des points d'intersection des droites associées aux équations du système.

→ Exercices d'entraînement

7 Le nombre x représente le nombre de pièces de 0,50 euro et le nombre y le nombre de pièces de 0,20 euro.

Le distributeur contient en tout 62 pièces : $x + y = 62$.

Le distributeur contient 19 euros dont x pièces de 0,50 euro et y pièces de 0,20 euro : $0,5x + 0,2y = 19$.

On obtient le système :
$$\begin{cases} x + y = 62 \\ 0,5x + 0,2y = 19 \end{cases}$$

On résout ce système par la méthode de substitution.

$$\begin{cases} x + y = 62 \\ 0,5x + 0,2y = 19 \end{cases}$$
 équivaut successivement à :

$$\begin{cases} x = 62 - y \\ 5x + 2y = 190 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 62 - y \\ 5(62 - y) + 2y = 190 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x = 62 - y \\ 310 - 5y + 2y = 190 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 62 - y \\ 3y = 120 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x = 62 - 40 \\ y = 40 \end{cases}; \begin{cases} x = 22 \\ y = 40 \end{cases}.$$

Le distributeur contient 22 pièces de 0,50 euro et 40 pièces de 0,20 euro.

On désigne par x la largeur du panneau et par y sa longueur.
On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} (x - 5) \times (y + 8) = xy + 83 \\ (x + 1) \times (y - 4) = xy - 163 \end{cases}$$

équivalent à :
$$\begin{cases} xy + 8x - 5y - 40 = xy + 83 \\ xy - 4x + y - 4 = xy - 163 \end{cases},$$

soit
$$\begin{cases} 8x - 5y = 123 \\ -4x + y = -159 \end{cases}.$$

En multipliant la seconde équation par 5, on obtient :
$$\begin{cases} 8x - 5y = 123 \\ -20x + 5y = -795 \end{cases}.$$

En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$-12x = -672, \text{ soit } x = 56.$$

En remplaçant x par 56 dans la première équation, on obtient :

$$8 \times 56 - 5y = 123, \text{ puis } 448 - 5y = 123;$$

$$-5y = -325, \text{ soit } y = 65.$$

Le couple (56 ; 65) est solution du système.

Le panneau a une largeur de 56 cm et une longueur de 65 cm.

1. $\mathcal{D}_1$ est une droite dont l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$.
Le coefficient directeur de $\mathcal{D}_1$ est :

$$m = \frac{7+2}{-1-2} = -3.$$

$$(2; -2) \in \mathcal{D}_1 : -2 = -3 \times 2 + p \text{ équivaut à } p = 4.$$

La droite $\mathcal{D}_1$ a pour équation $y = -3x + 4$.

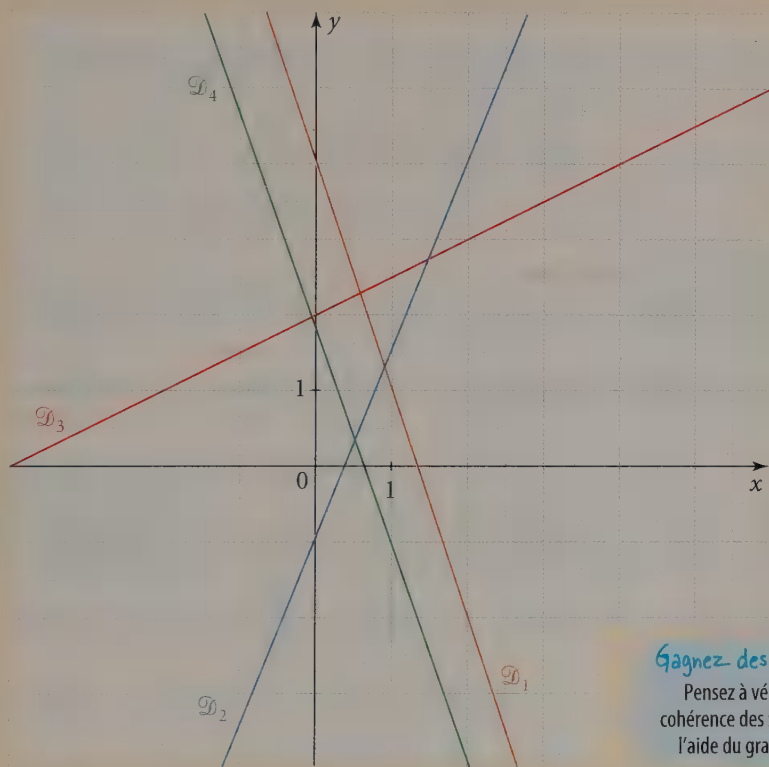
Piège à éviter

La mise en équations du problème est la partie la plus difficile.

Remarque

Il est nécessaire d'harmoniser les unités.

Représentation graphique



Gagnez des points !

Pensez à vérifier la cohérence des résultats à l'aide du graphique.

2. $\mathcal{D}_2$ est une droite dont l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$.

Le coefficient directeur de $\mathcal{D}_2$ est $m = \frac{5}{2}$.

$(2; 4) \in \mathcal{D}_2$: $4 = 2 \times \frac{5}{2} + p$ équivaut à $p = -1$.

La droite $\mathcal{D}_2$ a pour équation $y = \frac{5}{2}x - 1$.

3. $\mathcal{D}_3$ est une droite dont l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$.

Le coefficient directeur de $\mathcal{D}_3$ est $m = \frac{1}{2}$.

$(2; 3) \in \mathcal{D}_3$: $3 = 2 \times \frac{1}{2} + p$ équivaut à $p = 2$.

La droite $\mathcal{D}_3$ a pour équation $y = \frac{1}{2}x + 2$.

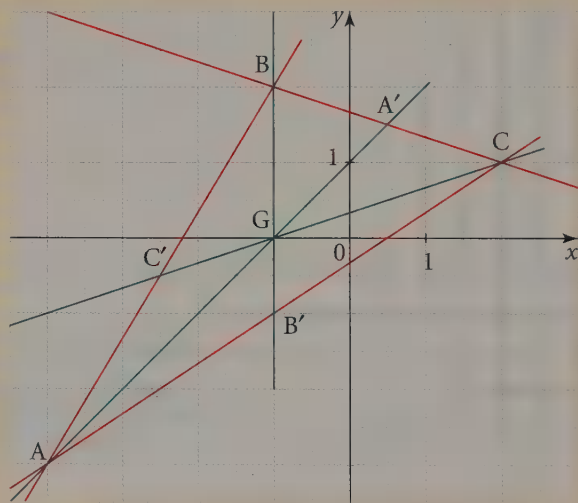
4. $\mathcal{D}_4$ est une droite dont l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$.

Le coefficient directeur de $\mathcal{D}_4$ est tel que : $m \times \frac{1}{3} = -1$, soit $m = -3$.

$(0; 2) \in \mathcal{D}_4$: $2 = 0 \times (-3) + p$ équivaut à $p = 2$.

La droite $\mathcal{D}_4$ a pour équation $y = -3x + 2$.

10 Représentation graphique



Rappel

La médiane passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.

1. Comme $x_A \neq x_B \neq x_C$, les droites (AB), (AC) et (BC) sont de la forme $y = mx + p$.

● Le coefficient directeur de (AB) est : $m = \frac{2+3}{-1+4}$, soit $m = \frac{5}{3}$.

$B(-1; 2) \in (AB)$: $2 = -1 \times \frac{5}{3} + p$ équivaut à $p = \frac{11}{3}$.

La droite (AB) a pour équation réduite $y = \frac{5}{3}x + \frac{11}{3}$.

● Le coefficient directeur de (AC) est : $m = \frac{1+3}{2+4}$, soit $m = \frac{2}{3}$.

$C(2; 1) \in (AC)$: $1 = 2 \times \frac{2}{3} + p$ équivaut à $p = -\frac{1}{3}$.

La droite (AC) a pour équation réduite $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

● Le coefficient directeur de (BC) est : $m = \frac{1-2}{2+1}$, soit $m = -\frac{1}{3}$.

$C(2; 1) \in (BC)$: $1 = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + p$ équivaut $p = \frac{5}{3}$.

La droite (BC) a pour équation réduite $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

2. A' est le milieu du segment [BC] donc $A'\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

B' est le milieu du segment [AC] donc $B'(-1; -1)$.

C' est le milieu du segment [AB] donc $C'\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

3. Équations des médianes (AA'), (BB') et (CC') du triangle ABC.

Comme $x_A \neq x_{A'}$ et $x_C \neq x_{C'}$, les droites (AA') et (CC') sont de la forme $y = mx + p$. Comme $x_B = x_{B'}$, la droite (BB') est de la forme $x = c$.

● Le coefficient directeur de (AA') est :

$$m = \frac{\frac{3}{2} + 3}{\frac{1}{2} + 4}, \text{ soit } m = 1.$$

$A(-4; -3) \in (AA')$: $-3 = -4 \times 1 + p$ équivaut à $p = 1$.

La droite (AA') a pour équation réduite $y = x + 1$.

● Le coefficient directeur de (CC') est : $m = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{-\frac{5}{2} - 2}$, soit $m = \frac{1}{3}$.

$C(2; 1) \in (CC')$: $1 = 2 \times \frac{1}{3} + p$ équivaut à $p = \frac{1}{3}$.

La droite (CC') a pour équation réduite $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

● La droite (BB') a pour équation $x = -1$.

Remarque

N'oubliez pas que les coordonnées du milieu A' de [BC] sont :

$$A'\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right).$$

Rappel

N'oubliez pas que la médiane d'un triangle est la droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

4. Pour trouver le point d'intersection G de ces trois médianes, on résout le système suivant :

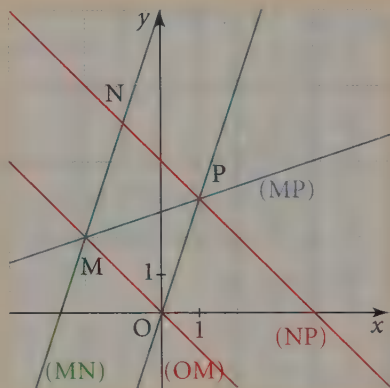
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = x + 1 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + 1 \\ y = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Les trois médianes sont sécantes au point $G(-1 ; 0)$.

Remarque

Rappelez-vous que le point de concours des médianes d'un triangle s'appelle le centre de gravité du triangle.

11 Représentation graphique :



1. ● M est le point d'intersection des droites (MN) et (MP).

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} y = 3x + 8 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$\frac{8}{3}x + \frac{16}{3} = 0, \text{ soit } x = -2.$$

En remplaçant x par -2 dans la première équation, on obtient :

$$y = -6 + 8, \text{ soit } y = 2.$$

Les droites (MN) et (MP) sont sécantes au point $M(-2 ; 2)$.

● $N(-1 ; y) \in (MN) : y = 3 \times (-1) + 8 = 5.$

Le point N a pour coordonnées $(-1 ; 5)$.

- On détermine une équation de (OM).

Comme $x_M \neq x_O$, la droite (OM) est de la forme $y = mx + p$.

Le coefficient directeur de (OM) est $m = \frac{2-0}{-2-0} = -1$.

$O(0; 0) \in (OM) : p = 0$.

La droite (OM) a pour équation réduite $y = -x$.

- Les droites (OM) et (PN) sont parallèles, donc l'équation réduite de (PN) est de la forme : $y = -x + p$.

De plus $N(-1; 5) \in (PN) : 5 = 1 + p$; soit $p = 4$.

La droite (PN) a pour équation réduite $y = -x + 4$.

P est le point d'intersection des droites (PN) et (MP).

On doit donc résoudre le système :
$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre les deux équations, on obtient :

$$-\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0, \text{ soit } x = 1.$$

En remplaçant x par 1 dans la première équation, on obtient :

$$y = -1 + 4 = 3.$$

Les droites (PN) et (MP) sont sécantes au point $P(1; 3)$.

- 2.** MNPO est un parallélogramme lorsque les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont égaux. On

a : $\overrightarrow{OM}(-2; 2)$ et $\overrightarrow{PN}(-2; 2)$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PN}$, donc MNPO est un parallélogramme.

Remarque

Voir la méthode du chapitre 5.

1 Vecteurs du plan

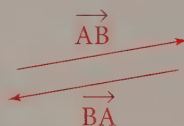
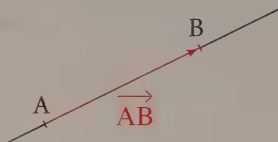
1 Définition d'un vecteur

- À deux points A et B, on peut associer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par une direction, un sens et une longueur.
- La **direction** de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB).
- Le **sens** de $\overrightarrow{AB}$ est de A vers B.
- La **longueur** de $\overrightarrow{AB}$ est la distance AB.
- Lorsque les points A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur nul**.

Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

- Deux **vecteurs opposés** ont la même direction, la même longueur mais des sens contraires.

- Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.



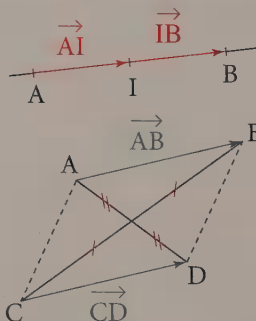
2 Vecteurs égaux

- Deux **vecteurs égaux** ont la même direction, le même sens et la même longueur.
- Le point I est le milieu du segment [AB] lorsque

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \text{ ou } \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

- Lorsque les points A, B, C et D ne sont pas alignés, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- (2) ABDC est un parallélogramme.
- (3) Les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.



EXERCICE RÉSOLU

Placer des points

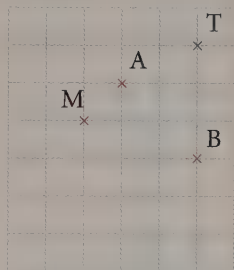
ÉNONCÉ

Soit A, B, M, T quatre points distincts. Placer les points C, D, E, F, G, H tels que :

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AF}; \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG};$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{AH}.$$



CORRIGÉ

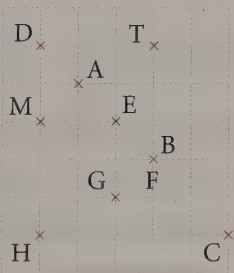
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens et $AC = 2AB$.

Le point C est sur la droite (AB).

$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires et

$AD = \frac{1}{2}AB$. Le point D est sur la droite (AB).

$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont opposés : $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont de sens contraires, $AE = AD$ et le point E est sur la droite (AD).



D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}$.

Les points B et F sont confondus.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ ont la même origine. On applique la règle du parallélogramme : on place le point G de sorte que ABGM soit un parallélogramme.

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{TB}$ n'ont pas la même origine.

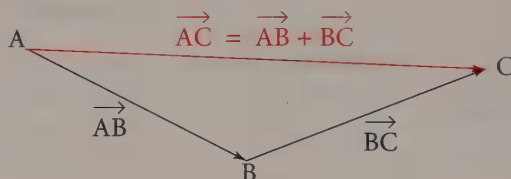
On place H tel que $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{TB}$.

2 Opérations sur les vecteurs

Soit A, B et C trois points distincts et k un nombre réel non nul.

1 Somme de deux vecteurs

- Lorsque l'extrémité du premier vecteur et l'origine du second vecteur sont identiques, on applique la **relation de Chasles** : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

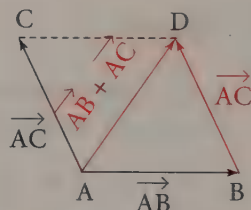


- Lorsque deux vecteurs ont la même origine, on applique la **règle du parallélogramme** :

- Pour représenter la somme $\vec{AB} + \vec{AC}$

On place le point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

On a alors $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ ou encore $\vec{AC} + \vec{AB} = \vec{AD}$.

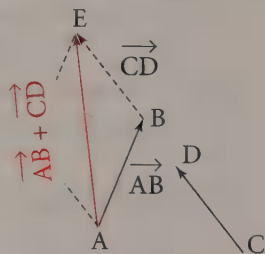


- Pour représenter la somme $\vec{AB} + \vec{CD}$

On place le point E tel que $\vec{CD} = \vec{BE}$.

On applique la relation de Chasles :

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BE} ; \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AE}.$$

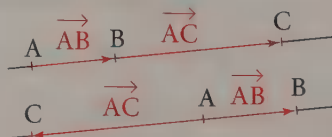


2 Produit d'un vecteur par un nombre réel non nul

Le produit du vecteur $\vec{AB}$ par le nombre réel k est le vecteur $\vec{AC}$ tel que $\vec{AC} = k\vec{AB}$.

- Si $k > 0$, alors $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ sont de même sens.

- Si $k < 0$, alors $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ sont de sens contraires.



EXERCICE RÉSOLU

► Représenter des vecteurs

ÉNONCÉ

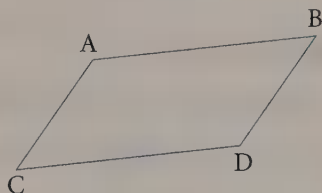
Soit $ABDC$ un parallélogramme non aplati.

Déterminer et représenter les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$

et $\vec{w}$ tels que :

$$\vec{u} = \vec{AB} + \vec{BD}; \quad \vec{v} = \vec{AB} + \vec{DB};$$

$$\vec{w} = \vec{CA} + \vec{BA}.$$



CORRIGÉ

- D'après la relation de Chasles :

$$\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}, \text{ soit } \vec{u} = \vec{AD}.$$

- Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DB}$ n'ont pas la même origine.

On place le point E tel que $\vec{BE} = \vec{DB}$.

On a alors : $\vec{AB} + \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{BE}$.

Soit en appliquant la relation de Chasles :

$$\vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}, \text{ soit } \vec{v} = \vec{AE}.$$

- On a $\vec{CA} = \vec{BE}$. Les vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{BA}$ ont la même origine.

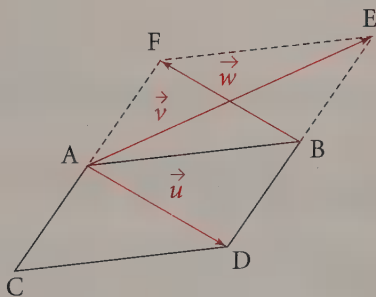
On applique la règle du parallélogramme : on place le point F de sorte que $BEFA$ soit un parallélogramme.

On a alors :

$$\vec{BE} + \vec{BA} = \vec{BF}, \text{ soit } \vec{w} = \vec{BF}.$$

Conseil

On utilise la relation de Chasles et la règle du parallélogramme.



3 Coordonnées d'un vecteur

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Soit deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

1 Définitions

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

→ Coordonnées de l'opposé d'un vecteur et de la somme de deux vecteurs

Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x; y)$, alors le vecteur opposé $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(-x; -y)$.

Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$.

→ Coordonnées du milieu d'un segment

Les coordonnées du milieu I de [AB] sont :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

→ Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel k

Si $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de coordonnées $(x; y)$, alors $k\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de coordonnées $(kx; ky)$.

2 Égalité de deux vecteurs

$\overrightarrow{AB}(x; y) = \overrightarrow{CD}(x'; y')$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.

EXERCICE RÉSOLU

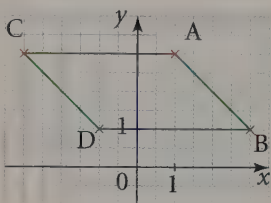
Lire les coordonnées d'un vecteur

ÉNONCÉ

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le parallélogramme ABDC.

Déterminer par lecture graphique les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$\vec{u} = \vec{AB}$; $\vec{v} = \vec{BC}$; $\vec{w} = \vec{AB} + \vec{AC}$.



CORRIGÉ

• Soit $(x; y)$ les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Pour aller du point A au point B, on se déplace :

- horizontalement de deux unités vers la droite, donc $x = 2$;
- verticalement de deux unités vers le bas, donc $y = -2$.

On a ainsi : $\vec{u}(2; -2)$.

• Soit $(x; y)$ les coordonnées du vecteur $\vec{v}$.

Pour aller du point B au point C, on se déplace :

- horizontalement de six unités vers la gauche, donc $x = -6$;
- verticalement de deux unités vers le haut, donc $y = 2$.

On a ainsi : $\vec{v}(-6; 2)$.

• ABDC est un parallélogramme donc les vecteurs $\vec{BD}$ et $\vec{AC}$ sont égaux.

On a alors : $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD}$; soit en appliquant la relation de

Chasles : $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.

On a ainsi : $\vec{w} = \vec{AD}$.

• Soit $(x; y)$ les coordonnées du vecteur $\vec{w}$.

Pour aller du point A au point D, on se déplace :

- horizontalement de deux unités vers la gauche, donc $x = -2$;
- verticalement de deux unités vers le bas, donc $y = -2$.

On a ainsi : $\vec{w}(-2; -2)$.

4 Colinéarité de deux vecteurs

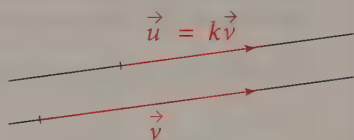
Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

1 Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Il existe donc un nombre réel k tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v}.$$



2 Conditions de colinéarité

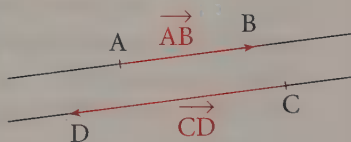
Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires équivaut à :

$$xy' - x'y = 0.$$

3 Vecteurs colinéaires et droites parallèles

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan.

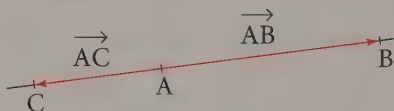
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles lorsque les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.



4 Vecteurs colinéaires et points alignés

Soit A, B et C trois points distincts du plan.

Les points A, B et C sont alignés lorsque les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.



Remarque : lorsqu'on peut former deux vecteurs colinéaires à partir de trois points, cela signifie que ces trois points sont alignés.

EXERCICE RÉSOLU

Justifier l'alignement de trois points

ÉNONCÉ

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points : $A(2; 1)$, $B(4; 3)$ et $C(0; -2)$.

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

CORRIGÉ

Méthode

On place les points sur une figure, on calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, puis on applique la condition de colinéarité.

Représentation graphique

Calcul des coordonnées du vecteur $\vec{AB}$:

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A);$$

$$\vec{AB}(4 - 2; 3 - 1), \text{ soit } \vec{AB}(2; 2).$$

Calcul des coordonnées du vecteur $\vec{AC}$:

$$\vec{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A);$$

$$\vec{AC}(0 - 2; -2 - 1), \text{ soit } \vec{AC}(-2; -3).$$

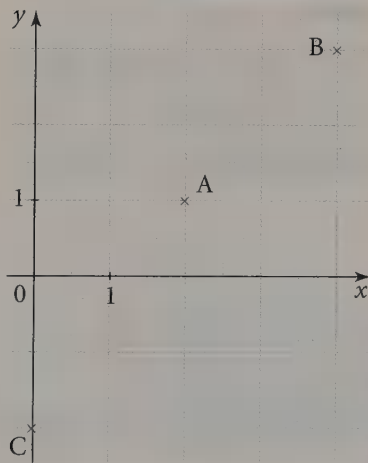
Condition de colinéarité :

Si $\vec{AB}(x; y)$ et $\vec{AC}(x'; y')$ sont colinéaires, alors $xy' - x'y = 0$.

Comme $\vec{AB}(2; 2)$ et $\vec{AC}(-2; -3)$ alors :

$$xy' - x'y = 2 \times (-3) - (-2) \times 2 = -6 + 4 = -2. \quad xy' - x'y \neq 0.$$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.



Remarque

Sur la figure, les points A, B et C semblaient alignés.

→ Savoir utiliser les vecteurs en géométrie

ÉNONCÉ

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On considère les points $A(-2; -1)$; $B(1; 2)$; $C(5; 1)$ et $D(2; -3)$.

Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ?

MÉTHODE

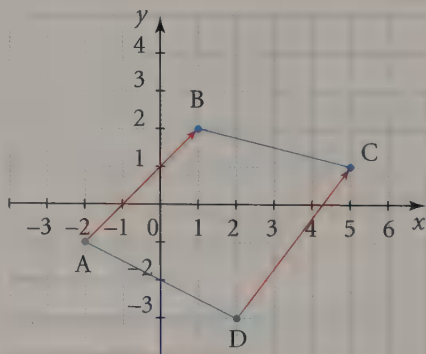
1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ (ou $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$).
2. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou si $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$), alors conclure que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme ; sinon ABCD n'est pas un parallélogramme.

CORRIGÉ

1. On a :

$\overrightarrow{AB}(1 - (-2); 2 - (-1))$, soit $\overrightarrow{AB}(3; 3)$ et $\overrightarrow{DC}(5 - 2; 1 - (-3))$, soit $\overrightarrow{DC}(3; 4)$.

2. Comme $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$; on en conclut que le quadrilatère ABCD n'est pas un parallélogramme.



Remarque

On peut constater graphiquement que le quadrilatère n'est pas un parallélogramme ...
Montrer que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$ permet de le démontrer.

→ Savoir montrer que deux droites sont ou ne sont pas parallèles

ÉNONCÉ

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On considère les points $A(2; 0)$; $B(-2; -2)$; $C(1; -3)$ et $D(3; -2)$.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

MÉTHODE

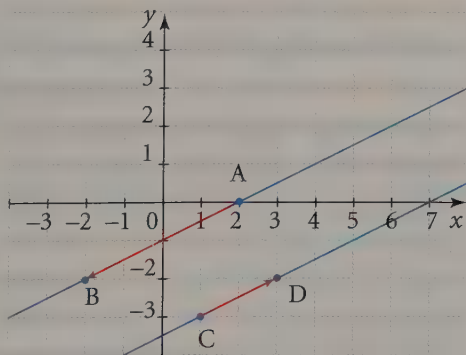
1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors conclure que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ; sinon elles ne le sont pas.

CORRIGÉ

1. On a :

$\overrightarrow{AB}(-2 - 2; -2 - 0)$, soit $\overrightarrow{AB}(-4; -2)$ et $\overrightarrow{CD}(3 - 1; -2 - (-3))$, soit $\overrightarrow{CD}(2; 1)$.

2. On a $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires ; on en conclut que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Remarque

La colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ permet de justifier que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

→ Exercices d'application



1 Relations vectorielles

Soit ABC un triangle rectangle en A. Construire les points D, E, F, G, H et I définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= -\overrightarrow{AC}; & \overrightarrow{DE} &= 2\overrightarrow{BC}; & \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}; & \overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}; \\ \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AH}; & \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BA} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

2 Déterminer des vecteurs

Soit ABCD un losange.

Déterminer et représenter les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}; \quad \vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}; \quad \vec{w} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}.$$

→ Exercices d'entraînement



3 Relation de Chasles

Soit A, B, C, D quatre points quelconques.

Écrire les sommes suivantes sous la forme d'un seul vecteur :

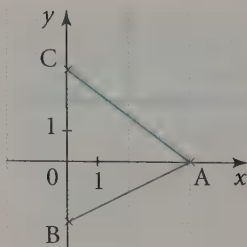
a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$;

b) $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$;

c) $\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$.

4 Lectures graphiques

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le triangle ABC.



Déterminer par lecture graphique les coordonnées des vecteurs $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ tels que :

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB}; \quad \vec{t} = \overrightarrow{AC}; \quad \vec{u} = \overrightarrow{BC};$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{CB}; \quad \vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}; \quad \vec{z} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}.$$

5 Relation vectorielle

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(-3; 2)$, $B(0; -1)$, $C(6; -1)$ et $D(x; y)$.

Déterminer les coordonnées du point D défini par :

$$\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

6 Points alignés

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $E(1; 5)$, $F(-1; 2)$ et $G(2; y)$.

Déterminer le nombre réel y pour que les points E, F et G soient alignés.

7 Milieu d'un segment

Soit A, B, C trois points du plan non alignés.

1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
2. Placer le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.
3. Dédire de la construction que A est le milieu de [DE].

8 Points alignés

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(2; 3), \quad B(-1; 1), \quad C(0; -1), \quad D(-1; -3) \quad \text{et} \quad E(1; -3).$$

Déterminer, pour chaque cas, si les trois points suivants sont alignés.

1. A, C et D.
2. A, B et E.
3. E, B et C.

9 Vecteurs colinéaires

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}(6; -4), \quad \vec{v}(3; y) \quad \text{et} \quad \vec{w}(x+1; 2).$$

Déterminer les nombres réels x et y sachant que :

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;

les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

10 Droites parallèles

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(-1 ; 4) \text{ et } B(1 ; -1)$$

et les vecteurs $\overrightarrow{AE}(-2 ; 3 - y)$ et $\overrightarrow{CD}(x + 2 ; 10)$.

Déterminer les nombres réels x et y sachant que :

1. les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
2. les points A, B et E sont alignés.

11 Distances dans le plan

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(1 ; 1) ; B(-2 ; -1) \text{ et } C(3 ; -2).$$

1. Placer les points A, B et C sur une figure.
2. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

12 Configurations du plan

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(3 ; 1) \text{ et } B(5 ; -1).$$

1. Placer les points A et B sur une figure.
2. Déterminer les coordonnées du point C symétrique de O par rapport à A.
3. Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un parallélogramme.
4. Déterminer les coordonnées du point M telles que $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$.
5. Déterminer les coordonnées du point N telles que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CD}$.

13 Configurations du plan

Soit un triangle ABC quelconque. Traduire par une relation vectorielle les phrases suivantes, puis placer les points D, E, F, G et H sur une figure.

1. D est le symétrique de B par rapport à A.
2. C est le milieu du segment [BE].
3. F est l'image de B dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

- 4. BDGF est un parallélogramme.
- 5. H est le centre du parallélogramme ADGC.

14 Relations vectorielles

Soit A, B, C trois points du plan non alignés.

- 1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
- 2. Placer le point E tel que $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
- 3. Dédire de la construction que CEDB est un parallélogramme.

→ Exercices d'application

① • On place D de sorte que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient opposés.

• $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont la même direction, le même sens et $DE = 2BC$.

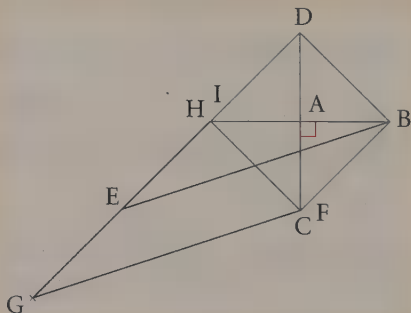
• D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}$. Les points C et F sont confondus.

• Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ ont la même origine. On applique la règle du parallélogramme : on place le point G de sorte que BEGF (ou BEGC) soit un parallélogramme.

• Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BD}$ n'ont pas la même origine. On place le point H tel que $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$.

• Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés. Les points I et H sont confondus.



② • D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$, soit $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.

• Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont la même origine. On applique la règle du parallélogramme : on place le point E de sorte que ABCE soit un parallélogramme, soit $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$.

On a alors : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE}$, soit $\vec{v} = \overrightarrow{BE}$.

Les points E et D sont confondus.

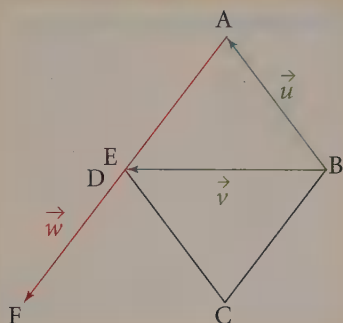
• $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ n'ont pas la même origine.

On place le point F de sorte que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BC}$.

On a alors : $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$;

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF}$, soit $\vec{w} = \overrightarrow{AF}$.



→ Exercices d'entraînement

3 a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$.

Rappel
 $-\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB}$.

b)
$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} &= 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \\ &= 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \\ &= 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \\ &= 2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \\ &= (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= \overrightarrow{DD} + \overrightarrow{CB} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Rappel
 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

c)
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Rappel
Pour tout point M du plan,
 $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

4 Représentation graphique :

- On lit : $\vec{s}(-4; -2)$; $\vec{t}(-4; 3)$;
 $\vec{u}(0; 5)$; $\vec{v}(0; -5)$.

- $\vec{w} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ont la même origine. On applique la règle du parallélogramme : on place le point D de sorte que ABDC soit un parallélogramme.

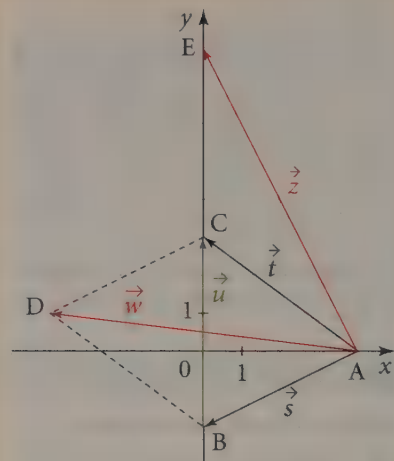
On a alors : $\vec{w} = \vec{AD}$.

On lit : $\vec{w}(-8; 1)$.

- $\vec{z} = \vec{AC} + \vec{BC}$.

Les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$ n'ont pas la même origine.

On place le point E tel que $\vec{BC} = \vec{CE}$. On a alors : $\vec{z} = \vec{AE}$. On lit : $\vec{z}(-4; 8)$.



- 5 • Les coordonnées des vecteurs $\vec{AC}$, $-\frac{1}{3}\vec{AC}$ et $\vec{CB}$ sont :

$$\vec{AC}(9; -3), \quad -\frac{1}{3}\vec{AC}(-3; 1) \quad \text{et} \quad \vec{CB}(-6; 0).$$

Les coordonnées du vecteur $-\frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{CB}$ sont alors $(-9; 1)$.

- Les coordonnées du vecteur $\vec{CD}$ sont : $(x - 6; y + 1)$.

- L'égalité $\vec{CD} = -\frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{CB}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x - 6 \\ y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x-6 = -9 \\ y+1 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 6-9 \\ y = -1+1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Le point D a pour coordonnées $(-3; 0)$.

6 Représentation graphique :

- Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont :

$$\overrightarrow{EF}(-2; -3) \text{ et } \overrightarrow{EG}(1; y-5).$$

- Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, équivaut à :

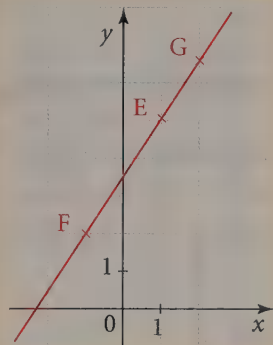
$$-2(y-5) - 1 \times (-3) = 0;$$

$$-2y + 10 + 3 = 0;$$

$$-2y + 13 = 0;$$

$$-2y = -13, \text{ soit } y = \frac{13}{2}.$$

Pour $G(2; \frac{13}{2})$, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires et les points E, F et G sont alignés.



Remarque

Les points E, F, G sont alignés, car on peut former deux vecteurs colinéaires

$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ avec ces trois points.

7 1. On applique la règle du parallélogramme : on place le point D tel que CADB soit un parallélogramme.

2. $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.

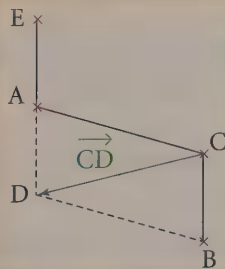
On place le point E de sorte que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$.

3. On sait d'après la question 1. que CADB est un parallélogramme. On a donc la relation : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$.

On sait d'après la question 2. que : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$.

Des égalités $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$, on déduit :

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$. Ainsi, l'égalité $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$ signifie que A est le milieu de [DE].



- 8** 1. On étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AC}(-2; -4) \text{ et } \overrightarrow{AD}(-3; -6).$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$.

Or, $xy' - x'y = -2 \times (-6) + 4 \times (-3)$; $xy' - x'y = 12 - 12$.

Soit $xy' - x'y = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont donc colinéaires et les points A, C et D sont alignés.

2. On étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$:

$$\overrightarrow{AB}(-3; -2) \text{ et } \overrightarrow{BE}(2; -4).$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$.

Or, $xy' - x'y = -3 \times (-4) + 2 \times 2$; $xy' - x'y = 12 + 4$.

Soit $xy' - x'y = 16$.

Comme $xy' - x'y \neq 0$, **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et E ne sont pas alignés.**

3. On étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BE}$:

$$\overrightarrow{CB}(-1; 2) \text{ et } \overrightarrow{BE}(2; -4).$$

On remarque que $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{CB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont donc colinéaires et les points E, B et C sont alignés.

- 9** 1. Pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, il faut déterminer le nombre réel y tel que :

$$6y - 3 \times (-4) = 0.$$

Cette équation est équivalente à :

$$6y + 12 = 0, \text{ soit } y = -2.$$

Pour $\vec{v}(3; -2)$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires, il faut déterminer le nombre réel x tel que $6 \times 2 + 4 \times (x + 1) = 0$.

Rappel

La colinéarité des vecteurs

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ permet de montrer l'alignement des points A, C et D.

Cette équation est successivement équivalente à :

$$12 + 4x + 4 = 0 ;$$

$$16 + 4x = 0 ;$$

$$x = -4.$$

Le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(-4 + 1 ; 2)$, soit $(-3 ; 2)$.

Pour $\vec{w}(-3 ; 2)$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

10 1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

On a : $\vec{AB}(2 ; -5)$ et on sait que $\vec{CD}(x + 2 ; 10)$.

On détermine alors le nombre réel x tel que :

$$2 \times 10 + 5(x + 2) = 0.$$

Cette équation est successivement équivalente à :

$$20 + 5x + 10 = 0 ;$$

$$30 + 5x = 0 ;$$

$$x = -6.$$

Le vecteur $\vec{CD}$ a pour coordonnées $(-6 + 2 ; 10)$; soit $(-4 ; 10)$.

Pour $\vec{CD}(-4 ; 10)$, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Remarque

Voir la fiche Méthode.

2. Les points A, B et E sont alignés équivaut à

les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires.

On sait que : $\vec{AB}(2 ; -5)$ et $\vec{AE}(-2 ; 3 - y)$.

On détermine alors le nombre réel y tel que :

$$2 \times (3 - y) + 2 \times (-5) = 0.$$

Cette équation est successivement équivalente à :

$$6 - 2y - 10 = 0 ;$$

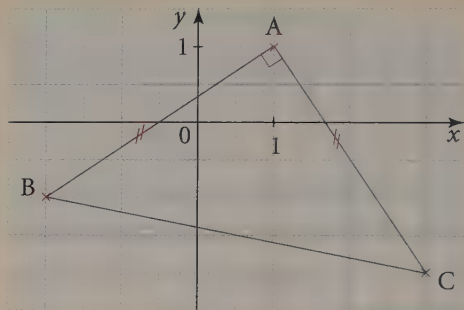
$$-2y - 4 = 0 ;$$

$$2y = -4, \text{ soit } y = -2.$$

Le vecteur $\vec{AE}$ a pour coordonnées $(-2 ; 3 + 2)$; soit $(-2 ; 5)$.

Pour $\vec{AE}(-2 ; 5)$, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires et les points A, B et E sont alignés.

11 1. Représentation graphique :



2. Calcul des distances AB, BC et AC :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} ;$$

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} ;$$

$$AB = \sqrt{9 + 4},$$

soit $AB = \sqrt{13}$.

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} ;$$

$$BC = \sqrt{5^2 + (-1)^2} ;$$

$$BC = \sqrt{25 + 1},$$

soit $BC = \sqrt{26}$.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} ;$$

$$AC = \sqrt{2^2 + (-3)^2} ;$$

$$AC = \sqrt{4 + 9},$$

soit $AC = \sqrt{13}$.

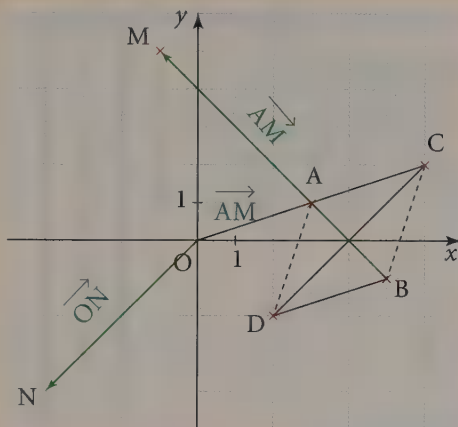
Les distances AB et AC sont égales donc le triangle ABC est isocèle en A.

De plus $AB^2 = 13$, $AC^2 = 13$ et $BC^2 = 26$.

Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

12 1. Représentation graphique



2. Le point C est le symétrique de O par rapport à A ; cela signifie que le point A est le milieu du segment [OC].

On a donc $x_A = \frac{x_O + x_C}{2}$ et $y_A = \frac{y_O + y_C}{2}$.

Or, $O(0; 0)$ et $A(3; 1)$, donc $x_C = 2x_A$ et $y_C = 2y_A$.

Le point C a pour coordonnées (6 ; 2).

3. Si ACBD est un parallélogramme, alors les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont égaux :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}.$$

On a $\overrightarrow{DB}(5 - x_D; -1 - y_D)$ et $\overrightarrow{AC}(3; 1)$.

Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ équivaut à :

$$\begin{cases} 5 - x_D = 3 \\ -1 - y_D = 1 \end{cases} ; \begin{cases} 5 - 3 = x_D \\ -1 - 1 = y_D \end{cases} ; \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = -2 \end{cases}.$$

Le point D a pour coordonnées (2 ; -2).

4. On a $\overrightarrow{AM}(x_M - 3; y_M - 1)$ et $\overrightarrow{AB}(2; -2)$; soit $-2\overrightarrow{AB}(-4; 4)$.

Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées : $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$ équivaut à :

$$\begin{cases} x_M - 3 = -4 \\ y_M - 1 = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_M = 3 - 4 \\ y_M = 1 + 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = 5 \end{cases}.$$

Le point M a pour coordonnées $(-1; 5)$.

5. On a $\overrightarrow{ON}(x_N; y_N)$ et $\overrightarrow{CD}(-4; -4)$.

Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées, donc le point N a les mêmes coordonnées que le vecteur $\overrightarrow{CD}$, soit $N(-4; -4)$.

13 1. On peut écrire par exemple :

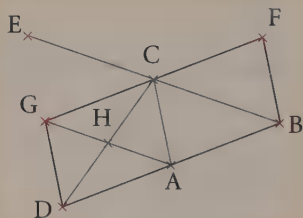
$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} \text{ ou } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \text{ ou } \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DA}.$$

2. On peut écrire par exemple :

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CB} \text{ ou } \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} \text{ ou } \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EC}.$$

3. On peut écrire par exemple :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF} \text{ ou } \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}.$$



4. On peut écrire par exemple :

$$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DB} \text{ ou } \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{BF}.$$

5. On peut écrire par exemple : $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{HD}$ ou $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HA}$.

→ Exercices d'entraînement

14 1. On place le point D tel que ACDB soit un parallélogramme.

2. $\vec{CE} + \vec{CA} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{CE} = \vec{AC}$. On place le point E tel que C soit le milieu de [AE].

3. On sait d'après 1. que $\vec{AC} = \vec{BD}$.

On sait d'après 2. que $\vec{AC} = \vec{CE}$.

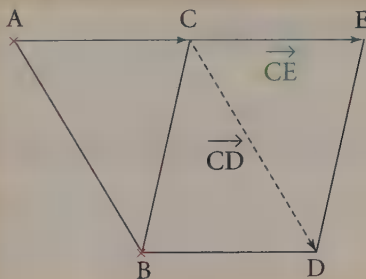
Des égalités $\vec{AC} = \vec{BD}$ et $\vec{AC} = \vec{CE}$,

on déduit : $\vec{BD} = \vec{CE}$.

Or, l'égalité $\vec{BD} = \vec{CE}$ signifie que CEDB est un parallélogramme.

Remarque

L'égalité $\vec{BD} = \vec{CE}$ permet de déterminer la nature du quadrilatère CEDB.



1 Organisation des données d'une série statistique

1 Vocabulaire

- La **population** est un ensemble faisant l'objet d'une étude statistique.
- Un élément de la population est un **individu** ou une **unité statistique**.
- On observe des **caractères** qui prennent différentes **valeurs**.

Un caractère est **quantitatif** si ses valeurs s'expriment par un nombre, sinon, il est **qualitatif**.

Un caractère quantitatif est **continu** s'il peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle (ou classe). L'**amplitude d'une classe** $[a ; b[$ est $b - a$.

2 Effectif et fréquence

- L'**effectif** n_i est le nombre d'individus de la population dont le caractère prend une valeur donnée.
- L'**effectif total** est le nombre d'individus de la population. Il est noté N .
- La **fréquence** f_i d'une valeur du caractère est le rapport : $\frac{n_i}{N}$.

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_p	Total
Effectif n_i	n_1	n_2	...	n_p	$n_1 + n_2 + \dots + n_p = N$
Fréquence f_i	$f_1 = \frac{n_1}{N}$	$f_2 = \frac{n_2}{N}$	...	$f_p = \frac{n_p}{N}$	$f_1 + f_2 + \dots + f_p = 1$

3 Effectifs et fréquences cumulés

- On obtient l'**effectif cumulé croissant** de la valeur x_i en ajoutant à l'effectif n_i qui lui correspond l'effectif des valeurs précédentes.

Le dernier effectif cumulé croissant est toujours égal à l'effectif total N .

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	...	n_p
Effectif cumulé croissant	n_1	$n_1 + n_2$	...	$n_1 + n_2 + \dots + n_p = N$

- On obtient de la même façon la **fréquence cumulée croissante**. La dernière fréquence cumulée croissante est toujours égale à 1.

EXERCICE RÉSOLU

Construire un tableau statistique et calculer une fréquence

ÉNONCÉ

Les notes de mathématiques de 20 élèves sont les suivantes : 06-10-18-08-14-12-10-06-15-13-10-08-09-12-15-06-14-14-12-18.

Regrouper ces résultats dans un tableau, puis déterminer la série statistique des fréquences.

Méthode

On identifie le caractère observé, on place les différentes valeurs du caractère dans l'ordre croissant dans un tableau, puis on compte l'effectif de chaque valeur.

CORRIGÉ

Note x_i	06	08	09	10	12
Effectif n_i	3	2	1	3	3
Fréquence f_i	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{2}{20} = 0,10$	$\frac{1}{20} = 0,05$	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{3}{20} = 0,15$

Note x_i	13	14	15	18	Total
Effectif n_i	1	3	2	2	$N = 20$
Fréquence f_i	$\frac{1}{20} = 0,05$	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{2}{20} = 0,10$	$\frac{2}{20} = 0,10$	1

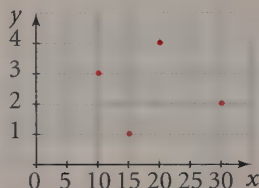
2 Représentations graphiques d'une série statistique quantitative

1 Nuage de points

Il est utilisé pour représenter les valeurs de deux caractères quantitatifs.

Exemple :

Valeurs du caractère x_i	10	15	20	30
Valeurs du caractère y_i	3	1	4	2

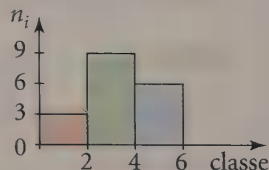


2 Histogramme

- Il est utilisé pour représenter un caractère quantitatif dont les valeurs sont regroupées en classes.
- Les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes.

Exemple :

Classe	$[0 ; 2[$	$[2 ; 4[$	$[4 ; 6[$
Effectif n_i	3	9	6



Remarque : dans cet exemple, les classes ont la même amplitude.

3 Courbe des fréquences cumulées

- Elle est utilisée pour représenter les fréquences cumulées croissantes d'un caractère quantitatif.

EXERCICE RÉSOLU

▶ Représenter la courbe des fréquences cumulées d'une série statistique

ÉNONCÉ

La répartition du poids (en kg) de 70 élèves de seconde est la suivante.

Poids	[40 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100]
Fréquence f_i	0,28	0,36	0,21	0,15

Représenter la courbe des fréquences cumulées.

CORRIGÉ

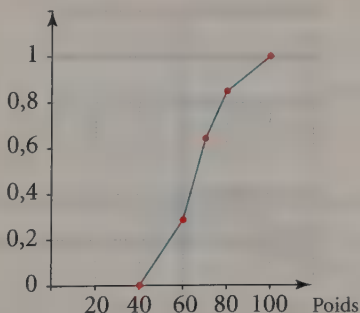
Poids	[40 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 100]
Fréquence cumulée croissante	0,28	0,64	0,85	1

Bornes de droite des classes

Abscisse	40	60	70	80	100
Ordonnée	0	0,28	0,64	0,85	1

Fréquences cumulées croissantes

Fréquence cumulée croissante



Méthode

On place les points qui ont pour abscisses les bornes de droites des classes et pour ordonnées les fréquences cumulées croissantes. Le 1^{er} point a pour abscisse la borne de gauche de la 1^{re} classe et pour ordonnée 0.

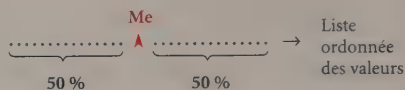
On joint ces points par des segments.

3 Médiane et quartiles

Pour une série à caractère quantitatif, la **médiane** est un nombre qui caractérise une « **position** » des valeurs du caractère ; les **quartiles** sont deux nombres qui caractérisent une « **dispersion** » des valeurs du caractère.

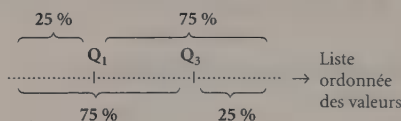
1 Médiane

Pour un caractère dont les valeurs sont rangées en ordre croissant, la **médiane** est une valeur qui partage la population en deux groupes d'effectifs à peu près égaux.



2 Quartiles

- Le premier quartile Q_1 est une valeur qui partage la population, dont les valeurs du caractère sont rangées en ordre croissant, en deux groupes : le 1^{er} groupe représente à peu près 25 % de l'effectif total et le 2nd groupe à peu près 75 %.
- Le troisième quartile Q_3 est une valeur qui partage la population, dont les valeurs du caractère sont rangées en ordre croissant, en deux groupes : le 1^{er} groupe représente à peu près 75 % de l'effectif total et le 2nd groupe à peu près 25 %.



3 Utilisation de la calculatrice ou du tableur

Pour obtenir la médiane et les quartiles, on utilise une calculatrice ou un tableur.

- Avec une calculatrice de **modèle CASIO** :

Dans le menu, on choisit **STAT** et on tape **[EXE]** : on entre les valeurs x_i dans List 1 et les effectifs n_i dans List 2.

On sélectionne **CALC** et **SET**, puis sur la ligne 1 Var X : , on sélectionne List 1 ; sur la ligne 1 Var Freq : , on sélectionne List 2 (ou 1 si la série est donnée sous forme d'une liste de valeurs).

On termine par **[EXE]** 1 VAR et on cherche sur l'écran la médiane Med, le 1^{er} quartile Q_1 et le 3^e quartile Q_3 .

- Avec une calculatrice de **modèle TEXAS INSTRUMENTS** :

On tape **stats** et **entrer** pour sélectionner **1:Edit** : on entre les valeurs x_i dans L1 et les effectifs n_i dans L2.

On tape **stats**, ► (**CALC**), puis **entrer** pour sélectionner **1: 1 - Var Stats** ; puis **2nde** **1**, **2nde** **2** (ou seulement **2nde** **1** si la série est donnée sous forme d'une liste de valeurs).

On termine par **entrer** et on cherche sur l'écran la médiane **Med**, le 1^{er} quartile **Q₁** et le 3^e quartile **Q₃**.

- Avec un tableur (logiciel **Excel**), on utilise les formules :

=MEDIANE(... : ...) pour obtenir la médiane, **=QUARTILE(... : ... ; 1)** pour obtenir le 1^{er} quartile et **=QUARTILE(... : ... ; 3)** pour obtenir le 3^e quartile.

EXERCICE RÉSOLU

► Déterminer la médiane et les quartiles avec une calculatrice

ÉNONCÉ

Une enquête relative au lancement d'un nouveau produit et portant sur 150 clients a donné les résultats suivants.

Nombre de litres consommés dans le mois x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de clients n_i	30	25	32	20	24	19

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, la médiane, puis les premier et troisième quartiles.
2. Interpréter par une phrase chacun de ces résultats

CORRIGÉ

1. La calculatrice affiche : **Med** = 3, **Q₁** = 2 et **Q₃** = 5.
2. Cela signifie, pour le mois considéré, qu'environ 50 % des clients ont consommé un nombre de litres inférieur ou égal à 3, environ 25 % des clients ont consommé un nombre de litres inférieur ou égal à 2 et environ 75 % des clients ont consommé un nombre de litres inférieur ou égal à 5.

4 Moyenne

1 Définition et formule

- La **moyenne** est un nombre qui caractérise une « **position** » des valeurs du caractère d'une série statistique à caractère quantitatif.
- On note $x_1, x_2, \dots, x_p$, les différentes valeurs prises par un caractère quantitatif ; $n_1, n_2, \dots, n_p$, les effectifs respectifs de ces valeurs et N l'effectif total.
- La **moyenne** $\bar{x}$ est définie par
$$\bar{x} = \frac{x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + \dots + x_p \times n_p}{N}.$$

2 Utilisation de la calculatrice pour obtenir la moyenne

- Avec une calculatrice de **modèle CASIO** :

Dans le menu, on choisit **STAT** et on tape **[EXE]** : on entre les valeurs x_i dans List 1 et les effectifs n_i dans List 2.

On sélectionne **CALC** et **SET**, puis sur la ligne **1 Var X :**, on sélectionne **List 1** ; sur la ligne **1 Var Freq :**, on sélectionne **List 2** (ou **1** si la série est donnée sous forme d'une liste de valeurs).

On termine par **[EXE]** **1 VAR** et on cherche sur l'écran la moyenne $\bar{x}$.

- Avec une calculatrice de **modèle TEXAS INSTRUMENTS** :

On tape **stats** et **[entrer]** pour sélectionner **1:Edit** : on entre les valeurs x_i dans L1 et les effectifs n_i dans L2.

On tape **stats**, ► (**CALC**), puis **[entrer]** pour sélectionner **1: 1 - Var Stats :**, puis **[2nde] [1]**, ►, **[2nde] [2]** (ou seulement **[2nde] [1]** si la série est donnée sous forme d'une liste de valeurs). On termine par **[entrer]** et on cherche la moyenne $\bar{x}$.

Attention : si les valeurs sont regroupées en classes, de la forme $[a_i ; b_i[$, on entre dans la liste 1 de la calculatrice le **centre des classes** x_i avec la formule $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$.

3 Utilisation du tableur pour obtenir la moyenne

Avec un tableur (logiciel **Excel**), on utilise la formule **=MOYENNE(... ; ...)**.

EXERCICE RÉSOLU

► Déterminer la moyenne avec une calculatrice ou un tableur

ÉNONCÉ

Le tableau statistique suivant indique l'âge de 10 salariés d'une entreprise.

Âge	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65]
Centre des classes				
Effectifs n_i	1	4	3	2

1. Compléter le tableau précédent.
2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, la moyenne de cette série.
3. Déterminer, à l'aide d'un tableur, la moyenne de cette série.
4. Interpréter par une phrase ce résultat.

Conseil

On entre les centres des classes dans la liste 1 de la calculatrice et les effectifs dans la liste 2.

CORRIGÉ

1. Calcul du centre des classes.

Âge	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65]
Centre des classes	$\frac{25 + 35}{2} = 30$	$\frac{35 + 45}{2} = 40$	$\frac{45 + 55}{2} = 50$	$\frac{55 + 65}{2} = 60$
Effectifs n_i	1	4	3	2

2. La calculatrice affiche : $\bar{x} = 46$.
3. On obtient la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F
1	30	40	50	60		46
2		40	50	60		
3		40	50			
4		40				

4. Cela signifie que la moyenne des âges des salariés de l'entreprise est 46 ans.

Conseil

On entre les centres des classes dans les cellules A1 à D1, puis on répète ces valeurs à l'aide de la poignée de remplissage pour obtenir les effectifs en colonnes.

On entre par exemple dans la cellule F1 la formule

`=MOYENNE(A1:D4)`

→ Savoir calculer une fréquence

ÉNONCÉ

Lors d'une course cycliste, on a relevé la vitesse moyenne, en km/h, des 80 participants.

Vitesse (en km/h) x_i	36	37	38	39	40
Nombre de participants n_i	12	24	19	21	4

Déterminer la série statistique des fréquences (résultats arrondis à 0,01 près).

MÉTHODE

Pour calculer les fréquences :

1. Ajouter une ligne ou une colonne supplémentaire au tableau, notée f_i .
2. Compléter la ligne ou la colonne du tableau à l'aide de la formule $f_i = \frac{n_i}{N}$, où N est l'effectif total.

CORRIGÉ

1. On ajoute une colonne supplémentaire au tableau.
2. On calcule la fréquence de chaque valeur du caractère.

Vitesse (en km/h) x_i	Nombre de participants n_i	Fréquence f_i
36	12	$\frac{12}{80} = 0,15$
37	24	$\frac{24}{80} = 0,30$
38	19	$\frac{19}{80} \approx 0,24$
39	21	$\frac{21}{80} \approx 0,26$
40	4	$\frac{4}{80} \approx 0,05$
Total	80	1

Piège à éviter

Le calcul ne tombe pas juste ; le résultat est arrondi à 0,01 près.

Réflexes à avoir

On vérifie que la somme des fréquences est égale à 1.

→ Savoir calculer des fréquences cumulées

ÉNONCÉ

Le tableau statistique indique la répartition de l'âge des 30 habitants d'un immeuble.

Âge (en années)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80]
Nombre d'habitants	3	9	12	6

Déterminer la série statistique des fréquences cumulées.

MÉTHODE

Pour calculer la fréquence cumulée croissante d'une valeur x_i , ajouter la fréquence des valeurs précédentes.

Valeur x_i	Fréquence f_i	Fréquence cumulée croissante
x_1	f_1	f_1
x_2	f_2	$f_1 + f_2$
x_3	f_3	$f_1 + f_2 + f_3$
...	...	$f_1 + f_2 + f_3 + \dots$
Total	$f_1 + f_2 + f_3 + \dots = 1$	-

CORRIGÉ

Calcul des fréquences cumulées croissantes.

Âge (en années)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80]
Nombre d'habitants	3	9	12	6
Fréquence	0,1	0,3	0,4	0,2
Fréquence cumulée	0,1	$0,1 + 0,3 = 0,4$	$0,4 + 0,4 = 0,8$	$0,8 + 0,2 = 1$

Réflexe à avoir !

On calcule d'abord les fréquences. (Il est possible aussi de calculer les fréquences cumulées croissantes directement à partir des effectifs cumulés.)

Réflexe à avoir !

On vérifie que la dernière fréquence cumulée croissante du tableau est bien égale à 1.

→ Exercices d'application



1 Calculer une fréquence

Compléter le tableau suivant.

Valeurs x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i
1	20	
2	50	
3	30	
4	100	
	$N =$	

2 Calculer une fréquence

Le tableau indique le temps d'attente, en minutes, à un carrefour pour 122 véhicules.

Classe	Effectif n_i	Fréquence f_i arrondie à 0,001
[0 ; 5[	3	
[5 ; 10[	12	
[10 ; 15[	55	
[15 ; 20[	7	
[20 ; 25]	45	
Total	$N =$	

3 Calculer des fréquences et des fréquences cumulées

Compléter le tableau suivant.

Classe	Effectif n_i	Fréquence f_i	Fréquence cumulée croissante
[0 ; 2[	1		
[2 ; 6[	15		
[6 ; 12[	45		
[12 ; 30[	16		
[30 ; 60]	3		
	$N =$		

4 Calculer des effectifs cumulés

Compléter le tableau suivant.

Classe	Effectif n_i	Effectif cumulé croissant
[0 ; 50[	8	
[50 ; 60[	26	
[60 ; 100[	30	
[100 ; 110[	28	
[110 ; 200]	10	
	$N =$	

5 Représenter une série statistique par un nuage de points

Le tableau suivant indique les notes sur 20 obtenues en français (variable y) et en mathématiques (variable x) par un groupe de 10 étudiants.

Note de mathématiques x_i	8	10	12	11	11	9	12	5	4	8
Note de français y_i	9	9	10	9	8	7	11	6	4	7

Représenter le nuage de points de la série statistique $(x ; y)$.

6 Représenter une série statistique par un histogramme

Le relevé journalier des retraits, en euros, effectués par 500 clients de moins de 25 ans à un guichet de la poste a donné les résultats suivants.

Classe des prix	Effectif n_i
[10 ; 20[	80
[20 ; 30[	320
[30 ; 40[	60
[40 ; 50]	40

Représenter cette série statistique par un histogramme.

7 Représenter une série statistique par un histogramme

Le relevé de la taille, en cm, de 20 élèves a fourni les résultats suivants :

172 ; 169 ; 177 ; 171 ; 179 ; 169 ; 176 ; 180 ; 170 ; 173 ; 169 ; 172 ; 175 ; 182 ; 174 ; 177 ; 181 ; 179 ; 170 ; 172.

1. Regrouper ces données en 5 classes d'amplitude 3 en complétant le tableau suivant.

Classe des tailles	Effectif n_i
[169 ; 172[	
[; 175[	
[175 ; [	
[; [	
[181 ; 184]	
Total	

2. Représenter cette série statistique par un histogramme.

8 Tracer la courbe des fréquences cumulées

Un sondage est réalisé auprès de 300 élèves sur le nombre de films vus en salles de cinéma dans une année.

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Nombre de films x_i	Nombre d'élèves n_i	Fréquence f_i	Fréquence cumulée croissante
1	120		
2	90		
3	45		
4	30		
5	15		
	$N = 300$		

1. Compléter le tableau précédent.

2. Tracer la courbe des fréquences cumulées.

9 Tracer la courbe des fréquences cumulées

On relève la longueur, en mm, de 160 pièces métalliques sur une chaîne de production.

Les résultats sont représentés dans le tableau suivant.

Longueur (en mm)	Fréquence f_i	Fréquence cumulée croissante
[10 ; 20[	0,15	
[20 ; 30[	0,30	
[30 ; 40[	0,40	
[40 ; 50[	0,10	
[50 ; 60]	0,05	1
	1	

1. Compléter le tableau précédent.
2. Tracer la courbe des fréquences cumulées.

10 Déterminer la médiane et les quartiles

Le tableau statistique suivant présente la répartition des prix d'une marque de pulls dans différents points de vente.

Prix (en euros) x_i	20	30	35	40	45
Nombre de magasins n_i	1	7	11	8	4

Déterminer avec une calculatrice ou un tableur la médiane et les quartiles de cette série statistique.

Interpréter par une phrase chacun des résultats obtenus.

11 Déterminer la médiane et les quartiles

Une enquête réalisée auprès d'un groupe de personnes indique leur durée d'écoute quotidienne de la radio.

Durée (en min)	[0 ; 30[	[30 ; 60[	[60 ; 90[	[90 ; 150]
Centre des classes x_i				
Nombre de personnes n_i	64	100	164	86

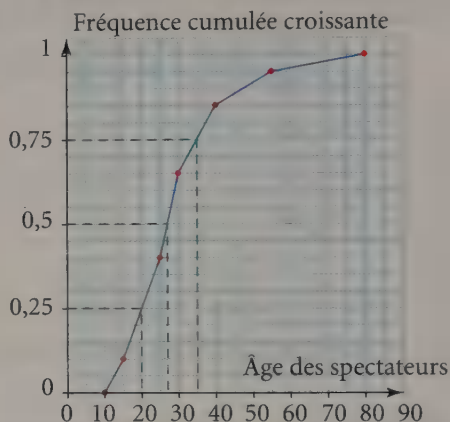
1. Compléter le tableau précédent.

2. Déterminer avec une calculatrice la médiane et les quartiles de cette série statistique. Interpréter par une phrase chacun des résultats obtenus.

12 Déterminer graphiquement la médiane et les quartiles

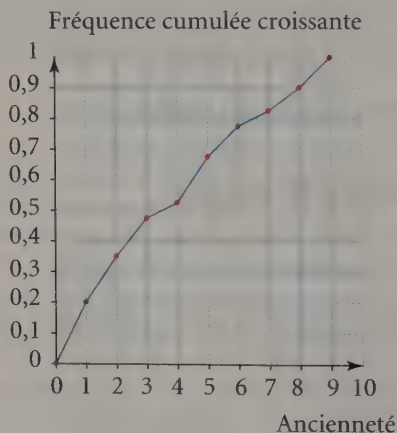
La courbe des fréquences cumulées illustre la répartition des âges des spectateurs présents lors d'un tournoi de tennis.

Lire la valeur de la médiane et des quartiles (indiquer leurs positions sur l'axe des abscisses).



13 Déterminer graphiquement la médiane et les quartiles

La courbe des fréquences cumulées illustre la répartition de 40 salariés d'une entreprise en fonction de leur ancienneté (en années).



Placer les fréquences 0,25 ; 0,5 et 0,75 sur l'axe des ordonnées et en déduire une valeur approchée à 0,1 près de la médiane et des quartiles (indiquer leurs positions sur l'axe des abscisses).

14 Déterminer la moyenne

On a demandé à un groupe de 60 lycéens le temps hebdomadaire passé devant la télévision.

Les résultats en heures sont les suivants.

Nombre d'heures devant la TV	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de lycéens	4	2	2	3	3	1	1	10

Nombre d'heures devant la TV	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre de lycéens	0	5	2	10	4	5	3	5

- Déterminer avec une calculatrice ou un tableur la moyenne de cette série statistique.
- Interpréter par une phrase le résultat obtenu.

15 Déterminer la moyenne

Le tableau des fréquences suivant indique le nombre de jours d'absences des élèves d'une classe de seconde un trimestre donné.

Nombre de jours d'absences x_i	1	3	4	5	7	8	9	10
Fréquence f_i	0,05	0,05	0,1	0,15	0,15	0,25	0,2	0,05

- Déterminer avec une calculatrice la moyenne de cette série statistique.
- Interpréter par une phrase le résultat obtenu.

16 Déterminer la moyenne

Le tableau suivant présente le relevé du temps d'attente, en minutes, de 55 skieurs à un télésiège au pied d'une piste.

Durée (en min)	[1 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 11[	[11 ; 13[	[13 ; 15]
Centre des classes x_i							
Nombre de skieurs n_i	10	9	7	14	8	5	2



1. Compléter le tableau précédent.
2. Déterminer avec une calculatrice ou un tableur la moyenne de cette série statistique.
3. Interpréter par une phrase le résultat obtenu.



Exercices d'entraînement



17 Caractéristiques d'une série statistique

Voici les notes d'évaluation de fin de trimestre en mathématiques obtenues par 25 élèves d'une classe de seconde :

14 ; 12 ; 14 ; 06 ; 06 ; 11 ; 07 ; 10 ; 08 ; 06 ; 02 ; 10 ; 09 ; 11 ; 06 ; 14 ; 11 ; 03 ; 02 ; 11 ; 11 ; 11 ; 03 ; 04 ; 11.

Déterminer avec une calculatrice ou un tableur la moyenne, la médiane et les quartiles de cette série statistique.

18 Comparer deux séries statistiques par le couple (médiane ; quartiles)

Les tailles, en cm, de 26 filles et de 26 garçons d'un club sportif sont les suivantes.

Filles :

165	166	167	168	169	170	171	172	175	180
166	168	165	166	168	166	167	168	169	171
172	166	170	169	166	170				

Garçons :

170	172	175	172	178	181	179	183	182	187
181	179	185	177	183	188	192	183	192	186
188	191	190	188	185	188				

1. Déterminer, avec une calculatrice ou un tableur, la médiane, le premier et le troisième quartile de la série des tailles des filles.
2. Déterminer, avec une calculatrice ou un tableur, la médiane, le premier et le troisième quartile de la série des tailles des garçons.
3. Comparer les deux séries statistiques.

19 Comparer deux séries statistiques à l'aide de la courbe des fréquences cumulées

On interroge deux groupes de lycéens sur le montant de l'argent de poche dont ils disposent chaque mois.

Les résultats sont les suivants.

Groupe 1 :

Somme (en €)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30]
Effectif n_i	8	20	15	11	6	10

Groupe 2 :

Somme (en €)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30]
Effectif n_i	5	14	22	16	6	7

1. Compléter les tableaux suivants.

Groupe 1 :

Somme (en €)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30]
Effectif n_i	8	20	15	11	6	10
Fréquence f_i arrondie à 0,01						
Fréquence cumulée croissante						

Groupe 2 :

Somme (en €)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30]
Effectif n_i	5	14	22	16	6	7
Fréquence f_i arrondie à 0,01						
Fréquence cumulée croissante						

2. Tracer, pour chaque groupe, la courbe des fréquences cumulées (échelle : 1 cm pour 2 € en abscisse et 1 cm pour 0,1 en ordonnée).

Indiquer, sur l'axe des abscisses de chaque graphique, la position de la médiane et des quartiles.

3. Comparer les deux séries statistiques.

→ Exercices d'application

1

Valeurs x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i
1	20	0,10
2	50	0,25
3	30	0,15
4	100	0,50
	$N = 200$	1

2

Classe	Effectif n_i	Fréquence f_i arrondie à 0,001
$[0 ; 5[$	3	0,025
$[5 ; 10[$	12	0,098
$[10 ; 15[$	55	0,451
$[15 ; 20[$	7	0,057
$[20 ; 25]$	45	0,369
Total	$N = 122$	1

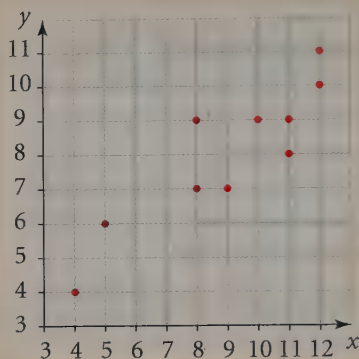
3

Classe	Effectif n_i	Fréquence f_i	Fréquence cumulée croissante
$[0 ; 2[$	1	0,012 5	0,012 5
$[2 ; 6[$	15	0,187 5	0,2
$[6 ; 12[$	45	0,562 5	0,762 5
$[12 ; 30[$	16	0,2	0,962 5
$[30 ; 60]$	3	0,037 5	1
	$N = 80$	1	

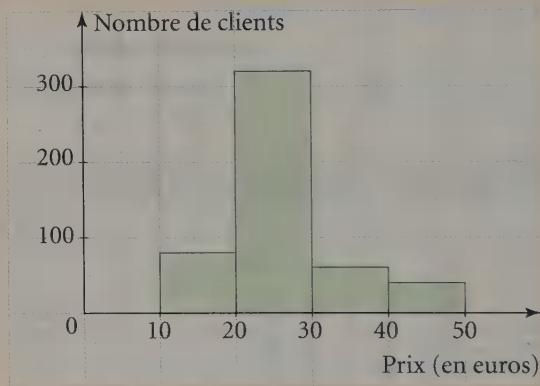
4

Classe	Effectif n_i	Effectif cumulé croissant
$[0 ; 50[$	8	8
$[50 ; 60[$	26	34
$[60 ; 100[$	30	64
$[100 ; 110[$	28	92
$[110 ; 200]$	10	102
	$N = 102$	

5 Nuage de points :



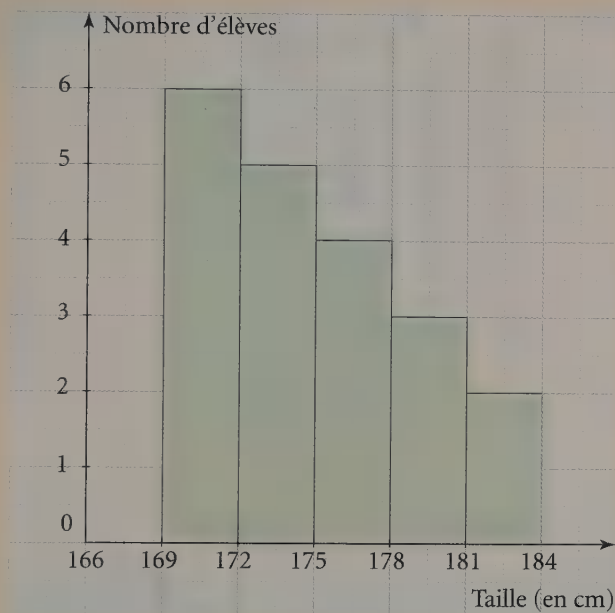
6 Histogramme.



7 1. Tableau statistique.

Classe des tailles	Effectif n_i
[169 ; 172[	6
[172 ; 175[	5
[175 ; 178[	4
[178 ; 181[	3
[181 ; 184]	2
Total	20

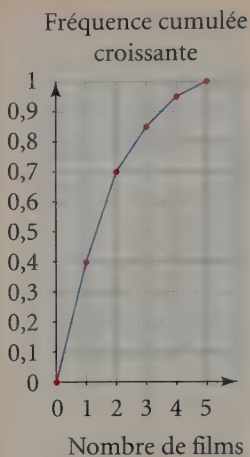
2. Histogramme.



8 1. Tableau statistique.

Nombre de films x_i	Nombre d'élèves n_i	Fréquence f_i	Fréquence cumulée croissante
1	120	0,4	0,4
2	90	0,3	0,7
3	45	0,15	0,85
4	30	0,1	0,95
5	15	0,05	1
$N = 300$		1	

2. Tracé de la courbe des fréquences cumulées.



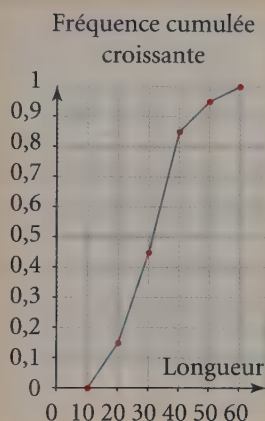
Remarque

L'ordonnée du dernier point est 1.

9 1. Tableau statistique.

Longueur (en mm)	Fréquence f_i	Fréquence cumulée croissante
[10 ; 20[	0,15	0,15
[20 ; 30[	0,30	0,45
[30 ; 40[	0,40	0,85
[40 ; 50[	0,10	0,95
[50 ; 60]	0,05	1
	1	

2. Tracé de la courbe des fréquences cumulées.



10 ● La calculatrice affiche : $\text{Med} = 35$, $Q_1 = 30$ et $Q_3 = 40$.

- Avec un tableur : on entre, par exemple, la formule `=MEDIANE(A1:E11)` dans la cellule G1, la formule `=QUARTILE(A1:E11;1)` dans la cellule G2 et la formule `=QUARTILE(A1:E11;3)` dans la cellule G3.

On obtient la feuille de calcul suivante.

Remarque

La calculatrice et le tableur ne sont pas programmés de la même manière, d'où certaines différences de résultats.

	A	B	C	D	E	F	G
1	20	30	35	40	45		35
2		30	35	40	45		32,5
3		30	35	40	45		40
4		30	35	40	45		
5		30	35	40			
6		30	35	40			
7		30	35	40			
8			35	40			
9			35				
10			35				
11			35				

Cela signifie qu'environ 50 % des magasins vendent cette marque de pulls à un prix inférieur ou égal à 35 €, environ 25 % des magasins vendent cette marque de pulls à un prix inférieur ou égal à 32,50 € et environ 75 % des magasins vendent cette marque de pulls à un prix inférieur ou égal à 40 €.

11 1. Tableau statistique :

Durée (en min)	[0 ; 30[	[30 ; 60[	[60 ; 90[	[90 ; 150]
Centre des classes x_i	15	45	75	120
Nombre de personnes n_i	64	100	164	86

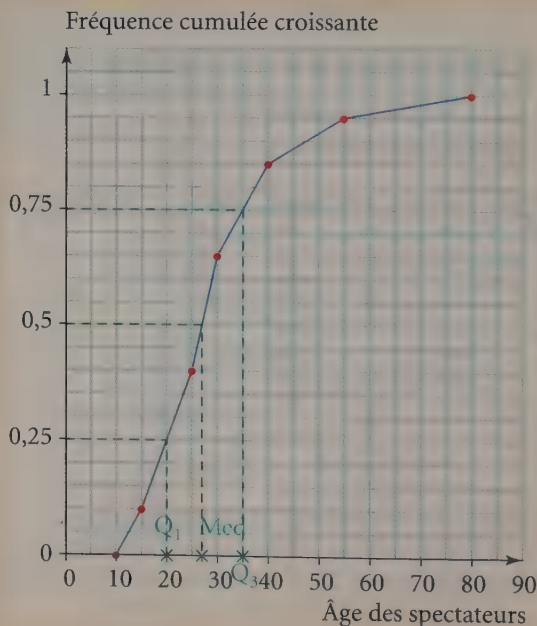
2. La calculatrice affiche : $\text{Med} = 75$, $Q_1 = 45$ et $Q_3 = 75$.

Cela signifie qu'environ 50 % des personnes écoutent chaque jour la radio au plus 1 h 15, environ 25 % des personnes écoutent chaque jour la radio au plus 45 minutes et environ 75 % des personnes écoutent chaque jour la radio au plus 1 h 15.

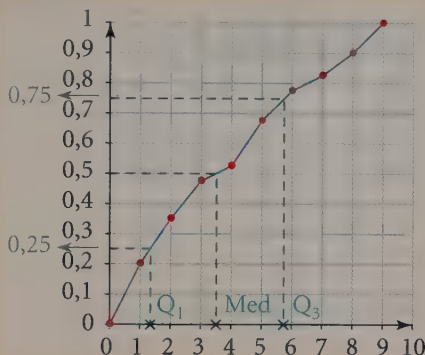
Remarque
Il faut être capable
d'interpréter les valeurs
trouvées.

12 On lit : $\text{Med} = 27$, $Q_1 = 20$ et $Q_3 = 35$.

- Med est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5.
- Q_1 est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,25.
- Q_3 est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,75.



- 13 On lit : $\text{Med} = 3,5$, $Q_1 = 1,4$ et $Q_3 = 5,7$.



- 14 1. ● La calculatrice affiche : $\bar{x} = 11,55$.

● Avec un tableur : on entre, par exemple, la formule `=MOYENNE(A1:P10)` dans la cellule R1. On obtient la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	3	4	5	6	7	8	9	10		12	13	14	15	16	17	18		11,55
2	3	4	5	6	7			10		12	13	14	15	16	17	18		
3	3			6	7			10		12		14	15	16	17	18		
4	3							10		12		14	15	16		18		
5								10		12		14		16		18		
6								10				14						
7								10				14						
8								10				14						
9								10				14						
10								10				14						

2. Le temps hebdomadaire moyen passé devant la télévision est environ 11 h 30.

- 15 1. On a $\bar{x} = 6,7$.

Rappel

$$\bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots$$

2. Cela signifie que le nombre moyen de jours d'absences est environ 6,7.

16 1. Tableau statistique.

Durée (en min)	[1 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 11[	[11 ; 13[	[13 ; 15]
Centre des classes x_i	2	4	6	8	10	12	14
Nombre de skieurs n_i	10	9	7	14	8	5	2

2. ● La calculatrice affiche : $\bar{x} \approx 6,9$.

● Avec un tableur : on entre, par exemple, la formule

= MOYENNE(A1:G14) dans la cellule I1.

On obtient la feuille de calcul suivante.

◇	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	2	4	6	8	10	12	14		6,87272727
2	2	4	6	8	10	12	14		
3	2	4	6	8	10	12			
4	2	4	6	8	10	12			
5	2	4	6	8	10	12			
6	2	4	6	8	10				
7	2	4	6	8	10				
8	2	4		8	10				
9	2	4		8					
10	2			8					
11				8					
12				8					
13				8					
14				8					

3. Cela signifie que le temps d'attente moyen des skieurs est environ 6,9 minutes, soit 6 min 54 s.

→ Exercices d'entraînement

17 ● La calculatrice affiche : $\bar{x} = 8,52$, $\text{Med} = 10$, $Q_1 = 6$ et $Q_3 = 11$.

● Avec le tableur, on obtient la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D
1	14		Moyenne	8,52
2	12		Médiane	10
3	14		Premier quartile	6
4	6		Troisième quartile	11
5	6			
6	11			
7	7			
8	10			
9	8			
10	6			
11	2			
12	10			
13	9			
14	11			
15	6			
16	14			
17	11			
18	3			
19	2			
20	11			
21	11			
22	11			
23	3			
24	4			
25	11			

18 1. La calculatrice ou le tableur affiche : $\text{Med} = 168$, $Q_1 = 166$, $Q_3 = 170$.

2. La calculatrice ou le tableur affiche : $\text{Med} = 183$, $Q_1 = 179$, $Q_3 = 188$.

3. La taille médiane des filles est plus petite que celle des garçons.

L'écart entre le premier et le troisième quartile est plus petit pour les filles que pour les garçons, ce qui traduit une plus grande dispersion des tailles des garçons.

19 1. Tableaux statistiques.

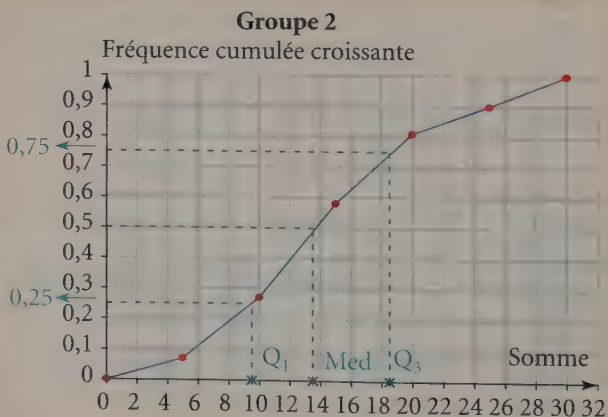
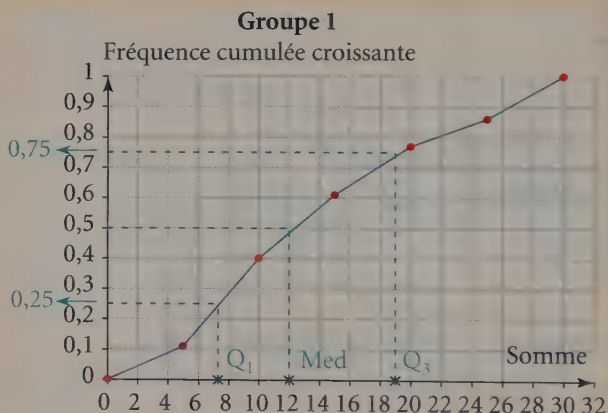
Groupe 1 :

Somme (en €)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30]
Effectif n_i	8	20	15	11	6	10
Fréquence f_i arrondie à 0,01	0,11	0,29	0,21	0,16	0,09	0,14
Fréquences cumulées croissantes	0,11	0,4	0,61	0,77	0,86	1

Groupe 2 :

Somme (en €)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30]
Effectif n_i	5	14	22	16	6	7
Fréquence f_i arrondie à 0,01	0,07	0,20	0,31	0,23	0,09	0,1
Fréquences cumulées croissantes	0,07	0,27	0,58	0,81	0,9	1

2. Courbes des fréquences cumulées.



3. Le montant médian de l'argent de poche du groupe 1 est inférieur à celui du groupe 2.

L'écart entre le premier et le troisième quartile est plus grand pour le groupe 1 que pour le groupe 2, ce qui traduit une plus grande dispersion des montants pour le groupe 1.

1 Expérience aléatoire et simulation

1 Expérience aléatoire et simulation

- On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne connaît pas le résultat à l'avance (par exemple, le lancer d'un dé).
- La réalisation pratique d'une expérience aléatoire n'est pas toujours possible. Aussi on effectue une **simulation** de cette expérience afin de fournir une série de résultats. On peut ainsi concevoir une expérience aléatoire à partir d'une série statistique.

2 Distribution des fréquences

Les résultats d'une expérience aléatoire peuvent se résumer par la donnée des fréquences de chacun des résultats possibles.

La répartition ainsi obtenue s'appelle la **distribution des fréquences**. On représente, en général, cette distribution par un diagramme en bâtons.

3 Fluctuation d'échantillonnage

- La fluctuation d'échantillonnage exprime le fait qu'entre plusieurs séries d'expériences identiques la distribution des fréquences varie.

EXERCICE RÉSOLU

► Utiliser un diagramme en bâtons

ÉNONCÉ

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher. Ces boules sont numérotées 1-2-3-4-5. L'expérience consiste à tirer une boule, puis à la remettre dans l'urne. Cette expérience est effectuée plusieurs fois par 4 élèves d'une classe de Seconde.

Représenter pour chaque cas le diagramme en bâtons des fréquences et comparer les fréquences pour chaque échantillon.

n°	1	2	3	4	5
Effectif	3	2	4	0	6

Élève A : 15 tirages

n°	1	2	3	4	5
Effectif	4	6	3	4	3

Élève B : 20 tirages

n°	1	2	3	4	5
Effectif	2	4	5	6	3

Élève C : 20 tirages

n°	1	2	3	4	5
Effectif	16	20	18	26	20

Élève D : 100 tirages

CORRIGÉ

i	1	2	3	4	5
f_i	0,2	0,13	0,27	0	0,4

Élève A

i	1	2	3	4	5
f_i	0,2	0,3	0,15	0,2	0,15

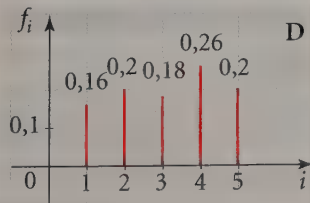
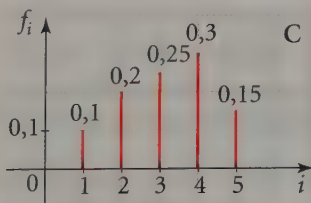
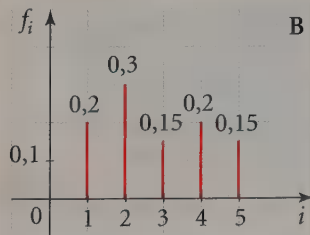
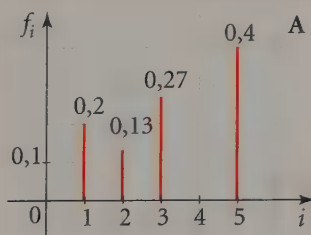
Élève B

i	1	2	3	4	5
f_i	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15

Élève C

i	1	2	3	4	5
f_i	0,16	0,2	0,18	0,26	0,2

Élève D



Les fréquences obtenues pour chaque échantillon fluctuent.

C'est la variation des distributions des fréquences qui permet de comprendre la notion de fluctuation d'échantillonnage.

2 Modèle probabiliste

1 Fréquence d'un événement

- La **fréquence** d'un événement est égale à :

$$\frac{\text{nombre de fois où l'événement est réalisé}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$$

- Quand on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, les fréquences de réalisation d'un événement se stabilisent autour d'une certaine valeur. Cette valeur est la **probabilité** de l'événement considéré.

2 Fréquence statistique et probabilité

Si les probabilités tirent leur origine de tentatives de modélisation mathématique du hasard (aléa), elles sont surtout utiles pour essayer de généraliser les observations recueillies à partir de données statistiques, particulièrement lorsque l'étude exhaustive de la population considérée ne peut être réalisée.

À la fréquence d'un événement déterminée par l'étude de l'échantillon, on associera sa probabilité lors d'une expérience aléatoire.

EXERCICE RÉSOLU

▶ Appréhender une probabilité

ÉNONCÉ

L'expérience consiste à lancer deux fois de suite un jeton sur lequel sont inscrits 1 sur une face et 0 sur l'autre face.

On fait ensuite la somme des chiffres obtenus sur la face visible après chaque lancer ; trois résultats sont possibles : 0 ; 1 et 2.

On appelle A l'événement : « la somme obtenue est 0 ».

L'expérience est répétée 200 fois.

Les résultats sont les suivants :

Nombre de fois où est répétée l'expérience	10	20	30	50	80	100	130	150	180	200
Nombre de fois où la somme est égale à 0	4	9	10	15	17	28	32	34	46	49

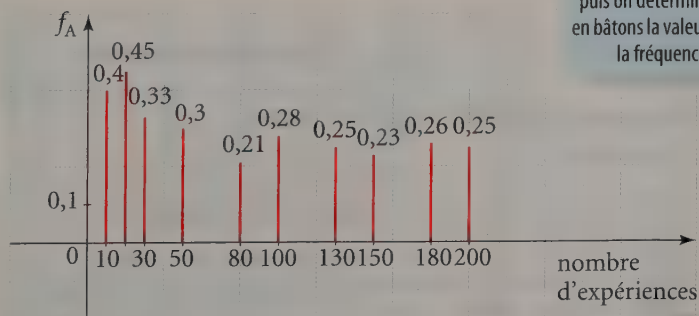
- Déterminer, pour chaque série d'expériences, la fréquence f_A de l'événement A.
- Représenter graphiquement la fréquence d'apparition de l'événement A en fonction du nombre de fois où est répétée l'expérience.
- Quelle est la probabilité de l'événement A ?

CORRIGÉ

1.

Nombre de fois où est répétée l'expérience	10	20	30	50	80	100	130	150	180	200
f_A	0,4	0,45	0,33	0,3	0,21	0,28	0,25	0,23	0,26	0,25

2. Diagramme en bâtons :



Méthode

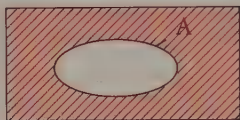
On utilise la formule :

$$f_A = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de fois où est réalisée l'expérience}}$$
 puis on détermine à partir du diagramme en bâtons la valeur vers laquelle se stabilise la fréquence de l'événement A.

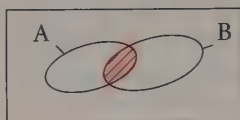
- Lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois la fréquence de l'événement A se stabilise vers 0,25. Il y a 25 % de chances d'obtenir une somme égale à 0 quand on lance deux fois de suite le jeton. Ainsi, $p(A) = 0,25$.

3 Représentations ensemblistes d'événements

Les événements d'un univers peuvent se représenter à l'aide d'ensembles. Cette représentation permet de visualiser une situation et apporte un support pratique à la comptabilisation du nombre d'issues d'un événement.

Univers Ω  $\bar{A}$

(issues qui ne sont pas dans A).

Univers Ω  $A \cap B$

(issues qui sont dans A et B).

Univers Ω  $A \cup B$

(issues qui sont dans A ou B).

Propriétés : $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$.

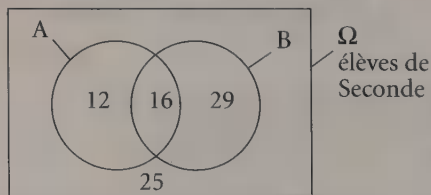
EXERCICES RÉSOLUS

1 Lire un diagramme

ÉNONCÉ

On a interrogé les 82 élèves de Seconde d'un lycée sur leurs activités extrascolaires (musique et sport).

On modélise les réponses par le diagramme suivant :



A : ensemble des élèves qui pratiquent régulièrement un sport.

B : ensemble des élèves qui jouent d'un instrument de musique.

1. Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent régulièrement un sport.
2. Déterminer le nombre d'élèves qui jouent d'un instrument de musique.

3. Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent régulièrement un sport ou qui jouent d'un instrument de musique.

CORRIGÉ

1. 16 correspond au nombre d'élèves qui pratiquent régulièrement un sport et qui jouent d'un instrument de musique.

Il y a $12 + 16 = 28$ élèves qui pratiquent régulièrement un sport.

2. Il y a $16 + 29 = 45$ élèves qui jouent d'un instrument de musique.

3. Il y a $12 + 16 + 29 = 57$ élèves qui pratiquent régulièrement un sport ou qui jouent d'un instrument de musique.

Conseil

On réfléchit à la signification du nombre 16 sur le diagramme.

2 Modéliser une situation par un diagramme

ÉNONCÉ

Un club de vacances propose deux activités nautiques à ses clients : voile et planche à voile.

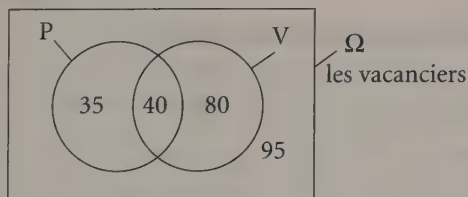
Parmi les 250 vacanciers du mois de juillet, 75 font de la planche à voile, 120 font de la voile et 40 font les deux sports.

1. Représenter la situation par un diagramme.

2. Déterminer le nombre de vacanciers qui ne pratiquent aucune activité.

CORRIGÉ

1.



Méthode

On place d'abord dans le diagramme le nombre de vacanciers qui pratiquent les deux activités.

P : ensemble des vacanciers qui pratiquent la planche à voile.

V : ensemble des vacanciers qui pratiquent la voile.

- On place les 40 vacanciers qui pratiquent les deux activités.
 - $75 - 40 = 35$ vacanciers ne pratiquent que la planche à voile.
 - $120 - 40 = 80$ vacanciers ne pratiquent que la voile.
 - $250 - (35 + 40 + 80) = 95$ vacanciers ne pratiquent aucune activité.
2. 95 vacanciers ne pratiquent aucune activité.

4 Probabilité d'un événement

1 Vocabulaire

- L'univers est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire, il est noté Ω .
- Les résultats possibles d'une d'expérience aléatoire sont appelés événements élémentaires.
- Un événement est un ensemble d'événements élémentaires.

2 Calcul des probabilités

- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- Il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être obtenus.

Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre d'événements élémentaires constituant A}}{\text{Nombre d'événements élémentaires de l'univers}}$$

EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer une probabilité sur un tirage de cartes

ÉNONCÉ

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.

On définit les événements suivants :

A : « La carte tirée est un roi » ;

B : « La carte tirée est rouge » ;

C : « La carte tirée est un cœur ».

Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

CORRIGÉ

- On tire une carte « au hasard », on est donc dans une situation d'équiprobabilité.

Méthode

Déterminer le nombre d'événements élémentaires constituant chaque événement, puis appliquer la formule d'équiprobabilité.

- L'expérience aléatoire est constituée de 52 événements élémentaires (chacune des cartes du jeu).
- Il y a 4 rois dans le jeu ; l'événement A est constitué de ces 4 événements élémentaires.

$$\text{Donc } p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

- Il y a 26 cartes rouges ; l'événement B est constitué de ces 26 événements élémentaires, donc $p(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

- Il y a 13 cœurs ; l'événement C est constitué de ces 13 événements élémentaires, donc $p(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

2 Déterminer une probabilité sur un tirage de boules d'une urne

ÉNONCÉ

Une urne contient six boules rouges numérotées de 1 à 6, quatre boules vertes numérotées de 1 à 4 et cinq boules blanches numérotées de 1 à 5.

On tire au hasard une boule de l'urne.

Déterminer la probabilité des événements suivants.

A : « La boule tirée est blanche ».

B : « La boule tirée est numérotée 5 ».

C : « La boule tirée à un numéro pair ».

CORRIGÉ

- On tire « au hasard » une boule de l'urne, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.
- L'expérience aléatoire est constituée des 15 boules de l'urne.

- Il y a 5 boules blanches, donc $p(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Il y a 2 boules numérotées 5, donc $p(B) = \frac{2}{15}$.

Il y a 7 boules portant un numéro pair, donc $p(C) = \frac{7}{15}$.

Méthode

Déterminer le nombre total d'événements élémentaires, puis le nombre d'événements élémentaires de chaque événement ; appliquer alors la formule d'équiprobabilité.

5 Probabilité d'un événement : utilisation d'un tableau

● Pour calculer la probabilité d'un événement, il faut déterminer le nombre d'événements élémentaires de l'expérience aléatoire et le nombre d'événements élémentaires constituant l'événement.

Le tableau à double entrée peut être un outil pratique à ce dénombrement.

● **Exemple :** on lance deux fois de suite un dé à six faces ; on obtient ainsi un couple $(a ; b)$ où :

- a est le chiffre apparu avec le premier lancer ;
- b est le chiffre apparu avec le deuxième lancer.

On détermine les événements élémentaires de l'expérience aléatoire à l'aide d'un tableau.

1 ^{er} lancer \ 2 ^e lancer	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

L'expérience aléatoire comporte 36 événements élémentaires.

EXERCICE RÉSOLU

► Utiliser un tableau

ÉNONCÉ

Dans une foire, un forain propose le jeu suivant.

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on fait tourner une roue portant les numéros 0, 1, 2, 3. On obtient ainsi un couple $(a; b)$ où :

- le nombre a est lu sur la face supérieure du dé ;
- le nombre b est indiqué par la roue.

On suppose que tous les couples $(a; b)$ ont la même probabilité d'être obtenus. Le résultat du jeu est le nombre $a \times b$.

1. Déterminer les événements élémentaires de cette expérience aléatoire à l'aide d'un tableau.

2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

A : « Le résultat du jeu est un nombre qui appartient à l'intervalle $[5; 9]$ ».

B : « Le résultat du jeu a été obtenu à partir d'un numéro impair sur la roue ».

CORRIGÉ

1.

$b \backslash a$	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	1 ◦	2 ◦	3 ◦	4 ◦	5 ×	6 ×
2	2	4	6 ×	8 ×	10 ×	12 ×
3	◦ 3	◦ 6 ×	◦ 9 ×	◦ 12 ×	◦ 15 ×	◦ 18 ×

L'expérience aléatoire compte 24 événements élémentaires.

Conseil

On crée un tableau à double entrée dans lequel on va pouvoir compter les événements élémentaires de l'expérience et les événements élémentaires constituant les événements A et B.

2. • On dénombre 11 événements élémentaires constituant A (marqués dans le tableau par une ×).

$$\text{On a donc } p(A) = \frac{11}{24}.$$

• On dénombre 12 événements élémentaires constituant B (marqués dans le tableau par un ◦).

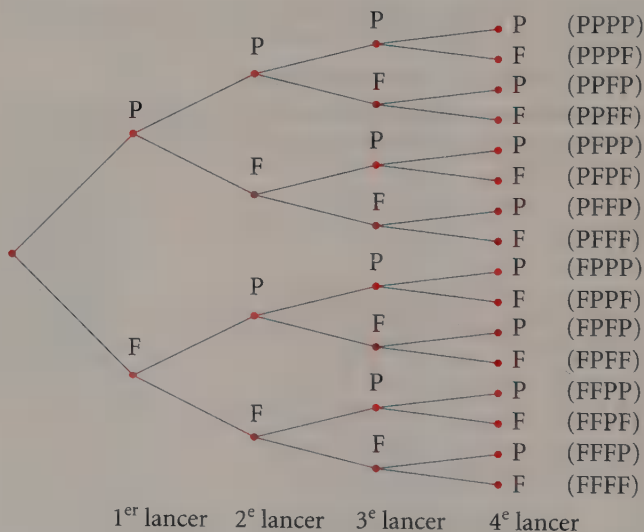
$$\text{On a donc } p(B) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

6 Probabilité d'un événement : utilisation d'un arbre

● Dans le cas d'une expérience aléatoire mettant en œuvre des choix successifs, le tableau et les diagrammes ne peuvent rendre compte de la situation.

Il faut utiliser un arbre pour dénombrer et déterminer les événements élémentaires de l'expérience aléatoire.

● **Exemple :** on lance 4 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On détermine les événements élémentaires à l'aide d'un arbre.



L'expérience compte 16 événements élémentaires.

EXERCICE RÉSOLU

► Utiliser un arbre

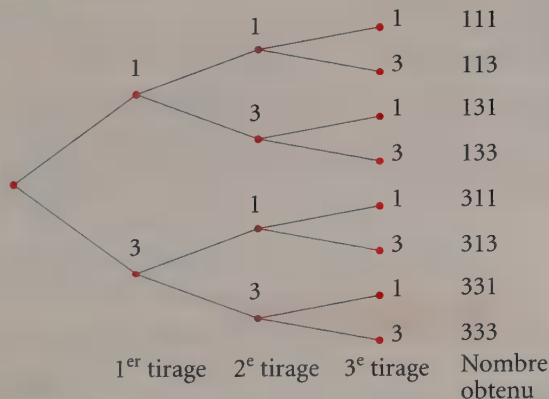
ÉNONCÉ

Une urne contient deux boules indiscernables au toucher, numérotées 1 et 3. On effectue trois tirages successifs d'une boule avec remise et on obtient ainsi un nombre à trois chiffres en notant dans l'ordre les trois numéros obtenus.

1. Déterminer les événements élémentaires de cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité des événements suivants.
 A : « Le nombre obtenu est supérieur à 120 ».
 B : « Le nombre obtenu est un multiple de 3 ».
 C : « Le nombre obtenu est compris entre 132 et 315 ».

CORRIGÉ

1.



Méthode

Déterminer à l'aide d'un arbre les événements élémentaires de l'expérience aléatoire, puis compter les événements élémentaires constituant A et B.

L'expérience aléatoire compte 8 événements élémentaires.

2. Six nombres sont supérieurs à 120 : 131, 133, 311, 313, 331 et 333.

$$\text{Ainsi, } p(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Deux nombres sont des multiples de 3 : 111 et 333.

$$\text{Ainsi, } p(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

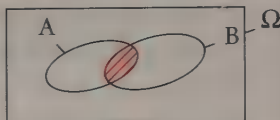
Trois nombres sont compris entre 132 et 315 : 133, 311 et 313.

$$\text{Ainsi, } p(C) = \frac{3}{8}.$$

7 Probabilité des événements $A \cap B$ et $A \cup B$

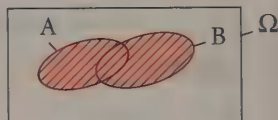
1 Événement $A \cap B$

L'événement $A \cap B$ est constitué des issues qui sont à la fois dans A et dans B.



2 Événement $A \cup B$

L'événement $A \cup B$ est constitué de toutes les issues qui sont dans l'un au moins des événements A, B.



3 Probabilité de $A \cap B$ et $A \cup B$

A et B étant deux événements : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

Remarque : Si $A \cap B = \emptyset$ c'est-à-dire si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
En effet, si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cap B) = 0$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Utiliser les formules

ÉNONCÉ

Une entreprise produit des pièces d'un même modèle. Ces pièces peuvent présenter deux types de défaut : le défaut A et le défaut B.

- 6 % des pièces présentent le défaut A (événement A),
- 4 % des pièces présentent le défaut B (événement B),
- 2,5 % des pièces présentent les deux défauts.

On choisit une pièce au hasard dans la production de l'entreprise.

Déterminer la probabilité de l'événement E : « la pièce choisie présente l'un au moins des deux défauts ».

CORRIGÉ

D'après l'énoncé, on a : $p(A) = \frac{6}{100} = 0,06$ et $p(B) = \frac{4}{100} = 0,04$
 2,5 % des pièces présentent les deux défauts, donc :

$$p(A \cap B) = \frac{2,5}{100} = 0,025.$$

L'événement E correspond à $A \cup B$, soit $E = A \cup B$.

Or, $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$, donc :

$$\begin{aligned} p(E) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0,06 + 0,04 - 0,025 = 0,075. \end{aligned}$$

Rappel

Exprimez E en fonction de A et B.

2 Utiliser les formules**ÉNONCÉ**

Une étude sur le comportement de lycéens a donné les résultats suivants.

	Garçons	Filles	Total
Fumeurs réguliers	80	80	160
Fumeurs occasionnels	40	40	80
Non fumeurs	80	60	140
Total	200	180	380

On choisit au hasard un lycéen.

1. Calculer la probabilité des événements suivants.

A : « Le lycéen est non fumeur », B : « Le lycéen est une fille ».

2. Définir les événements $A \cap B$ et $A \cup B$, puis calculer leur probabilité.

CORRIGÉ

1. Parmi les 380 lycéens, 140 sont non fumeurs, donc $p(A) = \frac{140}{380} = \frac{7}{19}$.

Parmi les 380 lycéens, 180 sont des filles, donc $p(B) = \frac{180}{380} = \frac{9}{19}$.

2. • $A \cap B$: « le lycéen est une fille qui ne fume pas ».

$$p(A \cap B) = \frac{60}{380} = \frac{3}{19}.$$

• $A \cup B$: « le lycéen ne fume pas ou est une fille ».

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{7}{19} + \frac{9}{19} - \frac{3}{19} = \frac{13}{19}.$$

8 Notion d'échantillon – Simulation

1 Échantillon

- Un échantillon de taille n est l'ensemble des résultats obtenus en répétant n fois une même expérience aléatoire.
- Lorsque l'on observe la fréquence d'un résultat possible d'une expérience aléatoire sur plusieurs échantillons de même taille, on s'aperçoit qu'elle fluctue selon les échantillons.

2 Simulations

On effectue des simulations sur calculatrice ou sur tableur afin de produire des données et de créer des échantillons parfaitement aléatoires.

$=ALEA()$ permet d'obtenir un nombre décimal aléatoire dans l'intervalle $[0 ; 1[$.

$=n * ALEA()$ permet d'obtenir un nombre décimal aléatoire dans l'intervalle $[0 ; n[$.

$=ENT(n * ALEA())$ permet d'obtenir un nombre entier aléatoire dans l'intervalle $[0 ; n[$.

$=ENT(ALEA()+p)$, où p est un nombre réel de l'intervalle $[0 ; 1]$, permet d'obtenir le nombre 1 avec la probabilité p .

EXERCICES RÉSOLUS

1 Créer un échantillon sur tableur

ÉNONCÉ

Pour chacun des cas suivants, déterminer la nature et la taille de l'échantillon créé à l'aide d'un tableur.

1. On entre la formule $=ENT(6 * ALEA()+1)$ dans la cellule A1 ; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A30.
2. On entre la formule $=ENT(2 * ALEA())$ dans la cellule A1 ; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A50.
3. On entre la formule $=3 * ALEA()+2$ dans la cellule A1 ;

on recopie cette formule jusqu'à la cellule A15.

4. On entre la formule $\text{=ENT}(\text{ALEA}()+0,8)$ dans la cellule A1 ;
on recopie cette formule jusqu'à la cellule A10.

CORRIGÉ

1. La formule $\text{=ENT}(6*\text{ALEA}()+1)$ permet d'obtenir un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 6.

On crée donc un échantillon aléatoire de taille 30 de nombres entiers compris entre 1 et 6.

2. La formule $\text{=ENT}(2*\text{ALEA}())$ permet d'obtenir un nombre entier aléatoire égal à 0 ou 1.

On crée donc un échantillon aléatoire de taille 50 composé des nombres entiers 0 ou 1.

3. La formule $\text{=3*ALEA}()+2$ permet d'obtenir un nombre décimal aléatoire compris dans l'intervalle $[2 ; 5[$.

On crée donc un échantillon aléatoire de taille 15 de nombres décimaux compris dans l'intervalle $[2 ; 5[$.

4. La formule $\text{=ENT}(\text{ALEA}()+0,8)$ permet d'obtenir les nombres 0 ou 1, 1 étant obtenu avec une probabilité de 0,8 et 0 avec une probabilité de 0,2 ; l'échantillon ainsi créé est de taille 10.

Méthode

Procéder pas à pas en déterminant ce que l'on obtient avec la formule $\text{ALEA}()$, puis $6*\text{ALEA}()$, puis $6*\text{ALEA}()+1$ et enfin $\text{ENT}(6*\text{ALEA}()+1)$.

2 Simuler un échantillon aléatoire

ÉNONCÉ

Le taux de réussite au bac est de 82 %.

Quelle formule doit-on entrer sur tableur pour simuler un échantillon de 60 lycéens passant le bac ?

CORRIGÉ

On entre dans la cellule A1 la formule $\text{=ENT}(\text{ALEA}()+0,82)$;

on recopie cette formule jusqu'à la cellule A60.

Méthode

Déterminer la formule qui permet d'obtenir 0 ou 1, le 1 étant obtenu avec une probabilité de 0,82.

9 Intervalle de fluctuation

On considère une population dont la fréquence p relative à la valeur d'un caractère est connue.

On extrait un échantillon de cette population de taille $n \geq 25$; on montre que la fréquence observée f sur l'échantillon est une bonne approximation de p .

f appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ dans au moins 95 % des cas.

Conséquences :

- La probabilité que la fréquence de l'échantillon soit dans l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ étant au moins égale à 95 % permet de juger de la pertinence de certaines observations.
- De façon analogue, pour un risque de 5 %, on a une très bonne approximation de l'intervalle de fluctuation de p par l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer un intervalle de fluctuation

ÉNONCÉ

Un sondage est effectué auprès de 1 200 personnes ; 630 déclarent vouloir voter pour M. Ikse.

Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de la population qui est prête à voter pour M. Ikse. Interpréter le résultat.

CORRIGÉ

La fréquence f observée sur l'échantillon est égale à $\frac{630}{1\,200}$, soit 0,525.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$\left[0,525 - \frac{1}{\sqrt{630}} ; 0,525 + \frac{1}{\sqrt{630}} \right] \approx [0,49 ; 0,56].$$

Conseil

Appliquer la formule de l'intervalle de fluctuation après avoir calculé f .

Ce qui signifie qu'il y a 95 % de chances pour que l'intervalle $[0,49 ; 0,56]$ contienne le pourcentage de gens prêts à voter pour M. Ikse.

2 Exploiter un résultat d'échantillonnage

ÉNONCÉ

Le pourcentage de réussite au bac dans une région de France est 78,5 %.
On s'intéresse aux 150 élèves d'un lycée de cette région : 108 ont obtenu leur bac.

1. Calculer la fréquence observée f de réussite au bac pour ce lycée.
2. Calculer l'intervalle de fluctuation pour l'échantillon des 150 élèves.
3. L'écart observé est-il significatif ?

CORRIGÉ

1. La fréquence observée est : $f = \frac{108}{150} = 0,72$.

Ainsi 72 % des élèves du lycée ont obtenu leur bac.

2. L'intervalle de fluctuation est :

$$\left[0,785 - \frac{1}{\sqrt{150}} ; 0,785 + \frac{1}{\sqrt{150}} \right] \approx [0,70 ; 0,87].$$

Il y a donc 95 % de chances pour que la fréquence observée appartienne à l'intervalle $[0,70 ; 0,87]$.

3. $f = 0,72$ et $0,72 \in [0,70 ; 0,87]$;
l'écart n'est donc pas significatif.

Méthode

Déterminer si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation.

→ Savoir utiliser les symboles $\cap$ et $\cup$

ÉNONCÉ

Une usine d'horlogerie fabrique des montres. À la sortie de la chaîne de fabrication, elles peuvent présenter un défaut mécanique ou un défaut esthétique.

On choisit au hasard une montre ; on note M l'événement « la montre a un défaut mécanique », et E l'événement « la montre a un défaut esthétique ».

1. Exprimer, en fonction de M et de E , l'événement A : « la montre a un défaut mécanique et un défaut esthétique ».
2. Exprimer, en fonction de M et de E , l'événement B : « la montre a au moins un des deux défauts ».
3. Exprimer, en fonction de M et de E , l'événement C : « la montre n'a aucun défaut ».

MÉTHODE

Il faut repérer dans l'énoncé le vocabulaire associé à l'intersection, à l'union ou à la notion de contraire :

- le symbole $\cap$ désigne l'intersection, il correspond au « et » ;
- le symbole $\cup$ désigne la réunion, il correspond au « ou inclusif », c'est-à-dire : ou l'un, ou l'autre ou les deux ;
- le contraire de la réunion de deux événements est l'intersection de leur contraire, c'est-à-dire le contraire de « X ou Y » est « ni X , ni Y ».

CORRIGÉ

1. L'ensemble A est constitué des montres qui ont les deux défauts, mécanique et esthétique. On a donc : $A = M \cap E$.

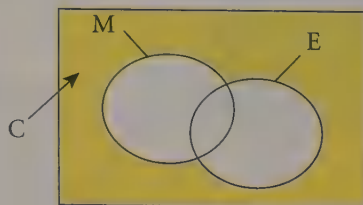
2. L'ensemble B est constitué des montres qui ont soit le défaut mécanique, soit le défaut esthétique, soit les deux défauts. On a donc : $B = M \cup E$.

3. L'ensemble C est constitué des montres qui n'ont ni le défaut mécanique, ni le défaut esthétique, c'est l'événement contraire de B .

On a donc : $C = \bar{B} = \overline{M \cup E}$, ou encore $C = \bar{M} \cap \bar{E}$.

Rappel

L'expression « au moins » est caractéristique de l'union.



➔ Savoir utiliser les formules de probabilité

ÉNONCÉ

Une usine d'horlogerie fabrique des montres. À la sortie de la chaîne de fabrication, elles peuvent présenter un défaut mécanique ou un défaut esthétique.

On choisit au hasard une montre ; on note M l'événement « la montre a un défaut mécanique », et E l'événement « la montre a un défaut esthétique ».

On admet que $p(M) = 0,03$; $p(E) = 0,06$ et $p(M \cap E) = 0,02$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

1. « La montre n'a pas de défaut esthétique ».
2. « La montre a au moins un des deux défauts ».
3. « La montre n'a aucun défaut ».

MÉTHODE

1. Exprimer les événements cherchés en fonction des événements connus (ici : M et E).

2. Calculer les probabilités à l'aide des formules donnant :

- la probabilité de l'événement contraire d'un événement A : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$;
- la probabilité de la réunion de deux événements A et B :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

CORRIGÉ

1. L'événement « la montre n'a pas de défaut esthétique » est l'événement contraire de E , soit l'événement $\bar{E}$.

On a donc $p(\bar{E}) = 1 - p(E) = 1 - 0,06 = 0,94$.

2. L'événement « la montre a au moins un des deux défauts » est la réunion des événements M et E , soit l'événement $M \cup E$.

On a donc
$$p(M \cup E) = p(M) + p(E) - p(M \cap E) = 0,03 + 0,06 - 0,02 = 0,07.$$

3. L'événement « la montre n'a aucun défaut » est l'événement contraire de $M \cup E$, soit l'événement $\overline{M \cup E}$.

On a donc

$$p(\overline{M \cup E}) = 1 - p(M \cup E) = 1 - 0,07 = 0,93.$$

Remarque

La notion d'union au sens inclusif n'est pas facile à manipuler. Il faut identifier les situations qui traduisent « l'union », et appliquer la formule :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Piège à éviter

La notion de contraire est assez subtile :

Le contraire de « avoir au moins un défaut » est « n'avoir aucun défaut » ; on applique alors :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

➔ Exercices d'application



1 Distribution des fréquences

Jean jette 20 fois un dé : le numéro 1 apparaît deux fois, le numéro 2 quatre fois, le numéro 3 six fois, le numéro 4 zéro fois, les numéros 5 et 6 quatre fois chacun.

Pauline jette 30 fois ce même dé : le numéro 1 apparaît huit fois ainsi que le numéro 4, le numéro 2 et le numéro 3 quatre fois chacun, le numéro 5 une fois et le numéro 6 cinq fois.

Isabelle jette 60 fois ce dé et obtient : les numéros 1 et 3 dans 18 % des cas, le 2 dans 20 % des cas, le 4 dans 21 % des cas, le 5 dans 11 % des cas et le 6 dans 12 % des cas.

1. Regrouper ces résultats dans trois tableaux distincts.

2. Déterminer pour chacune des trois séries la distribution des fréquences à l'aide d'un diagramme en bâtons. Conclure.

2 Modèle probabiliste

On lance simultanément un jeton dont les faces sont marquées 2 et 5 et un dé ordinaire dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On fait ensuite la somme des chiffres obtenus sur leur face visible.

On appelle B l'événement : « la somme est un multiple de 3 ».

L'expérience est répétée 300 fois. Les résultats sont les suivants :

Nombre d'expériences	10	20	30	40	50	100	150	200	250	300
Nombre de fois où la somme est un multiple de 3	8	10	12	17	19	39	48	64	83	100

Déterminer la probabilité de l'événement B.

Interpréter le résultat en pourcentage de chances d'obtenir un multiple de 3.

1 Fréquences et probabilités

On considère un dé ordinaire dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Ce dé est abîmé et la probabilité d'apparition de chaque numéro n'est plus $\frac{1}{6}$.

Plusieurs personnes lancent ce dé et notent le numéro apparu sur sa face supérieure, on obtient alors un échantillon de 1 000 lancers.

Numéro	1	2	3	4	5	6
Nombre d'apparitions	210	120	180	220	150	120

1. Déterminer la fréquence d'apparition de chaque numéro.

2. On prend pour probabilité de chaque face la fréquence obtenue.

On appelle A l'événement « obtenir un multiple de 2 » et B l'événement « obtenir un chiffre inférieur à 3 ».

Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

4 Fréquences et probabilités

Une urne contient 4 boules indiscernables au toucher, numérotées de 0 à 3.

On prend au hasard deux boules de l'urne, on note le produit des numéros sortis, puis on les remet dans l'urne.

On simule à l'aide d'un tableur un échantillon de taille 1 000 de cette expérience. Les fréquences obtenues pour chacune des issues sont données dans le tableau suivant.

Issues (produit des numéros)	0	2	3	6
Fréquences (arrondies à 0,01)	0,50	0,17	0,16	0,17

On prend pour probabilité de chaque issue sa fréquence.

On appelle A l'événement « obtenir l'issue 0 ou l'issue 3 » et B l'événement « obtenir une issue inférieure à 4 »

Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

5 Événement contraire : vocabulaire

À la sortie de la chaîne de fabrication, une machine est susceptible de présenter deux types de défaut : le défaut A, le défaut B. On choisit une machine au hasard.

1. Quel est le contraire de l'événement « La machine n'a aucun défaut » ?

2. Quel est le contraire de l'événement « La machine a le défaut A et le défaut B » ?

6 Vocabulaire des événements

Une pièce détachée peut présenter deux types de défaut : électrique, mécanique.

On en choisit une au hasard dans un lot ; on considère les événements :

E : « La pièce a le défaut électrique » ; M : « La pièce a le défaut mécanique ».

Exprimer en fonction de E et de M les événements suivants :

1. « La pièce n'a pas le défaut mécanique ».
2. « La pièce a le défaut électrique et le défaut mécanique ».
3. « La pièce a au moins un des deux défauts ».
4. « La pièce n'a aucun des deux défauts ».

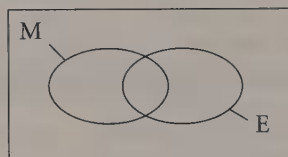
7 Représentation ensembliste d'événements

La situation familiale des 80 enseignants d'un lycée est la suivante :

40 sont mariés, 24 ont des enfants et 18 sont mariés et ont des enfants.

On choisit au hasard un enseignant de ce lycée.

1. Compléter le diagramme suivant.



Enseignants
du lycée

M : ensemble des enseignants mariés.

E : ensemble des enseignants
ayant des enfants.

2. Calculer la probabilité des événements suivants.

A : « L'enseignant est marié ou a un enfant ».

B : « L'enseignant n'est pas marié et n'a pas d'enfants ».

Quelle remarque peut-on faire sur les événements A et B ?

8 Probabilité d'événements

Une urne contient 12 boules de couleurs différentes, indiscernables au toucher. Parmi les boules : deux sont bleues et valent 2 points ; quatre sont rouges et valent un point et six sont vertes et valent 3 points.

On tire au hasard une boule de l'urne.

Calculer la probabilité des événements suivants.

A : « la boule tirée est rouge ».

B : « on obtient au plus 2 points ».

C : « la boule tirée est bleue ou vaut 3 points ».

D : « la boule tirée est rouge ou vaut plus de 2 points ».

● Probabilité d'événements

Un dé fantaisiste comporte 7 faces numérotées de 1 à 7. Chaque face a la même probabilité d'être obtenue. On lance le dé et on lit le chiffre indiqué sur la face supérieure.

On considère les événements suivants.

A : « on obtient un chiffre inférieur à 4 » ;

B : « on obtient un chiffre impair » ;

C : « on obtient un chiffre pair ».

Calculer la probabilité des événements suivants :

A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{C}$.

10 Utilisation d'un tableau

Dans un établissement scolaire de 2 000 élèves, on sait que :

- 40 % sont des filles ;
- 15 % des filles sont internes ;
- 60 % des élèves, parmi lesquels 760 garçons, sont externes ;
- la moitié des demi-pensionnaires sont des filles.

1. Compléter le tableau suivant.

	Internes	Demi-pensionnaires	Externes	Total
Filles				
Garçons				
Total				2 000

2. On choisit, au hasard, un élève pour représenter l'établissement. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « L'élève choisi est une fille » ;

B : « L'élève choisi est interne » ;

C : « L'élève choisi est une fille interne » ;

D : « L'élève choisi est interne ou est une fille ».

11 Utilisation d'un arbre

Benoît sait que le congélateur de la cuisine renferme cinq bâtons de crème glacée, de parfums différents (vanille, chocolat, pistache, café, praliné).

Gourmand et insomniaque, il décide de se lever en pleine nuit, sans allumer la lumière, et de prendre, à tâtons et successivement, deux bâtons dans le congélateur. Tous les choix sont équiprobables.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de couples différents de bâtons qu'il peut ainsi obtenir.
2. Ses parfums préférés sont vanille et café.
Calculer la probabilité qu'il obtienne :
 - a) le bâton à la vanille, puis le bâton au café ;
 - b) les bâtons de ses parfums préférés dans un ordre quelconque ;
 - c) un seul de ses parfums préférés ;
 - d) aucun de ses parfums préférés.

12 Intersection et réunion

On considère deux événements A et B tels que $p(A) = 0,6$ et $p(A \cup B) = 0,84$.
Calculer $p(B)$ sachant que $A \cap B = \emptyset$.

13 Intersection et réunion

On considère deux événements A et B tels que $p(A) = 0,35$, $p(B) = 0,75$ et $p(A \cup B) = 0,8$.
Calculer $p(A \cap B)$.

14 Intersection et réunion

Lors de la dernière journée d'un championnat international d'athlétisme, les athlètes sont encouragés par 75 000 spectateurs.

70 % des spectateurs sont français et 30 % sont étrangers.

De plus, 85 % des spectateurs étrangers et 25 % des spectateurs français possèdent une licence d'athlétisme.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un tableau.
2. On choisit une personne au hasard parmi les spectateurs.
On note les événements suivants :
 - F : « le spectateur est français » ;
 - L : « le spectateur possède une licence d'athlétisme ».
 - a) Calculer $p(F)$ et $p(L)$.
 - b) Calculer $p(F \cap L)$; en déduire $p(F \cup L)$.

15 Simulation d'échantillons

Déterminer la nature et la taille de l'échantillon créé avec un tableur pour chacun des cas suivants.

1. On entre la formule $= \text{ENT}(3 * \text{ALEA}())$ dans la cellule A1, puis on recopie cette formule jusqu'à la cellule A10.
2. On entre la formule $= \text{ENT}(5 * \text{ALEA}() + 1)$ dans la cellule A1, puis on recopie cette formule jusqu'à la cellule A30.

16 Simulation d'échantillons

Pour chaque cas, expliquer la démarche qui permet d'obtenir sur tableur l'échantillon demandé.

1. Échantillon de 20 nombres entiers aléatoires compris entre 0 et 10 (inclus).
2. Échantillon de 10 nombres entiers aléatoires compris entre 1 et 10 (inclus).
3. Échantillon de 100 nombres entiers aléatoires compris entre 10 et 20 (inclus).

17 Simulation d'un échantillon sur une population connue

1. Quelle formule doit-on entrer, sur un tableur, pour simuler un échantillon de taille 100 dans une population contenant 30 % de fumeurs ?
2. On estime à 12 % le nombre d'adolescents jouant d'un instrument de musique. Quelle formule doit-on entrer, sur un tableur, pour simuler un échantillon de 100 adolescents relatif au fait de jouer d'un instrument de musique ?

18 Intervalle de fluctuation

Une enquête a montré que 72 % des étudiants sont non fumeurs.

On prélève, dans cette population, des échantillons de taille 200.

Calculer l'intervalle de fluctuation pour lequel la fréquence f d'étudiants non fumeurs est observée avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

19 Intervalle de fluctuation

Un centre de formation affirme que 75 % de ses apprentis trouvent un emploi dans les trois mois.

On interroge au hasard 80 personnes ayant suivi la formation ; 52 ont trouvé un emploi dans les trois mois.

1. Calculer la fréquence observée f d'apprentis ayant trouvé un emploi dans les trois mois.

2. Calculer l'intervalle de fluctuation pour l'échantillon de 80 personnes.
3. L'écart observé est-il significatif ?

→ Exercices d'entraînement



20 Calcul de probabilités avec un tableau

Le personnel d'une entreprise est constitué de 180 femmes et de 200 hommes. Afin d'appliquer la loi anti-tabac, on réalise une étude dans l'entreprise, sur le comportement des employés face au tabac.

Les résultats de l'étude indiquent que :

- parmi les hommes, la moitié fume régulièrement et 20 % des femmes sont des fumeurs occasionnels ;
- une femme sur trois fume régulièrement ;
- autant d'hommes que de femmes fument occasionnellement.

1. Représenter la situation à l'aide d'un tableau.

2. On choisit au hasard une personne de l'entreprise. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.

a) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « la personne choisie est un fumeur occasionnel » ;

B : « la personne choisie est un homme ».

b) Définir, à l'aide d'une phrase, l'événement $A \cap B$, puis calculer sa probabilité.

c) Définir, à l'aide d'une phrase, l'événement $A \cup B$, puis calculer sa probabilité.

21 Calcul de probabilités avec un arbre

Un couple a le projet d'avoir quatre enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront à chaque fois autant de chance d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux.

1. En utilisant un arbre, déterminer toutes les issues.

2. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « ils auront quatre garçons » ;

B : « ils auront quatre enfants de même sexe » ;

C : « ils auront au plus deux garçons » ;

D : « ils auront au moins une fille ».

22 Calcul de probabilités avec un diagramme

Une entreprise compte 300 salariés. Parmi les salariés, 20 % se sont fait vacciner contre la grippe.

Durant l'hiver, 10 % du personnel a eu la grippe et parmi eux, 20 % étaient vaccinés.

1. Faire un diagramme illustrant la situation.

2. On choisit au hasard une personne de l'entreprise ; toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.

a) Calculer la probabilité des événements.

A : « la personne choisie a eu la grippe ».

B : « la personne choisie était vaccinée ».

b) Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.

23 Simulation d'échantillons

Une urne contient 30 % de boules rouges et 70 % de boules blanches.

On prélève au hasard une boule de l'urne, chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

On simule le tirage d'une boule de l'urne sur tableur en entrant dans la cellule A1 la formule =ENT(ALEA()+0,3) ; on recopie ensuite cette formule jusqu'à la cellule A100.

1. Quels sont les résultats possibles que l'on obtient dans la cellule A1 ?

2. Quelle est la probabilité de voir afficher la valeur 1 dans la cellule A1 ?

3. Quelle est la taille de l'échantillon obtenu ?

4. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule A102 pour calculer la fréquence f des boules rouges observées sur cet échantillon ?

5. Que se passe-t-il lorsque l'on appuie sur la touche F9 du clavier ?

6. a) Simuler, en appuyant 30 fois sur la touche F9, le prélèvement de 30 échantillons de taille 100 ; noter au fur et à mesure les différents résultats obtenus dans la cellule A102.

b) Calculer le pourcentage d'échantillons dont la fréquence f appartient à l'intervalle $[0,2 ; 0,5]$.

→ Exercices d'application

1.

n°	1	2	3	4	5	6
Effectifs	2	4	6	0	4	4
Fréquences	0,1	0,2	0,3	0	0,2	0,2

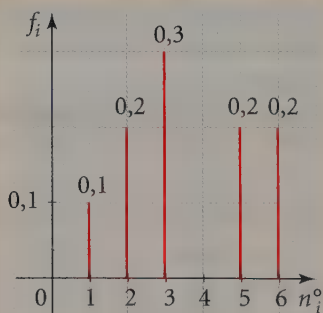
Jean

n°	1	2	3	4	5	6
Effectifs	8	4	4	8	1	5
Fréquences	0,27	0,13	0,13	0,27	0,03	0,17

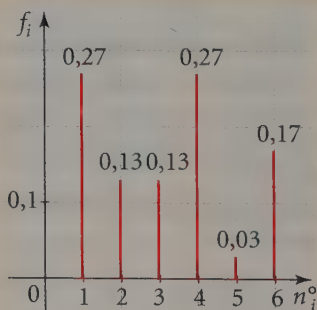
Pauline

n°	1	2	3	4	5	6
Fréquences	0,18	0,2	0,18	0,21	0,11	0,12

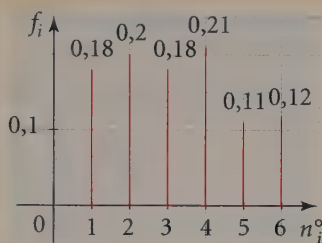
Isabelle



Jean



Pauline



Isabelle

Conclusion : les fréquences obtenues pour chaque personne fluctuent.

2

Nombre d'expériences	10	20	30	40	50	100	150	200	250	300
Fréquence d'apparition d'un multiple de 3	0,8	0,5	0,4	0,425	0,38	0,39	0,32	0,32	0,33	0,33

Lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois la fréquence de l'événement B se stabilise autour de **0,33**. La probabilité de l'événement B est égale à **0,33**. Il y a **33 % de chances d'obtenir un multiple de 3 lors d'une expérience**.

3 1.

Numéro	1	2	3	4	5	6
Nombre d'apparitions	210	120	180	220	150	120
Fréquence	0,21	0,12	0,18	0,22	0,15	0,12

2. La fréquence d'apparition de la face 1 est $p_1 = 0,21$,

la fréquence d'apparition de la face 2 est $p_2 = 0,12$,

la fréquence d'apparition de la face 3 est $p_3 = 0,18$,

la fréquence d'apparition de la face 4 est $p_4 = 0,22$,

la fréquence d'apparition de la face 5 est $p_5 = 0,15$,

la fréquence d'apparition de la face 6 est $p_6 = 0,12$.

● La fréquence d'apparition d'un multiple de 2 est donc :

$$p_2 + p_4 + p_6 = 0,12 + 0,22 + 0,12 = 0,46. \text{ Ainsi, } p(A) = 0,46.$$

● La fréquence d'apparition d'un chiffre inférieur à 3 est donc :

$$p_1 + p_2 = 0,21 + 0,12 = 0,33. \text{ Ainsi, } p(B) = 0,33.$$

4 • La probabilité de l'événement A est la somme des fréquences des issues 0 et 3, soit $p(A) = 0,50 + 0,16 = 0,66$.

• La probabilité de l'événement B est la somme des fréquences des issues 0, 2 et 3, soit $p(B) = 0,50 + 0,17 + 0,16 = 0,83$.

5 1. Le contraire de l'événement « la machine n'a aucun défaut » est : « la machine a au moins un défaut ».

2. Le contraire de l'événement « la machine a le défaut A et le défaut B » est : « la machine a au plus un défaut ».

Rappel

Le contraire de « n'avoir aucun défaut » est « avoir 1 seul défaut ou les 2 défauts ».

Rappel

Le contraire de « d'avoir les 2 défauts » est « d'avoir 0 défaut ou 1 seul défaut ».

6 1. « La pièce n'a pas le défaut mécanique » est l'événement $\bar{M}$.

2. « La pièce a le défaut électrique et le défaut mécanique » est l'événement $E \cap M$.

3. « La pièce a au moins un des deux défauts » est l'événement $E \cup M$.

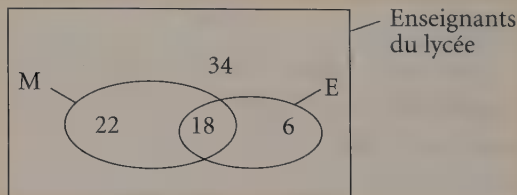
4. « La pièce n'a aucun des deux défauts » est l'événement $\bar{E} \cap \bar{M}$ ou encore $\overline{E \cup M}$.

Remarque

Pour tous événements A et B :

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

7 1.



2. • Sur les 80 enseignants, 46 sont mariés ou ont un enfant, donc

$$p(A) = \frac{46}{80} = 0,575.$$

• Sur les 80 enseignants, 34 ne sont pas mariés et n'ont pas d'enfants, donc

$$p(B) = \frac{34}{80} = 0,425.$$

- A et B sont des événements contraires.

8 • Sur les 12 boules, 4 sont rouges, donc $p(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

• Sur les 12 boules, 6 boules (4 sont rouges et 2 bleues) valent 1 ou 2 points, $p(B) = \frac{6}{12} = 0,5$.

• Sur les 12 boules, 8 boules sont bleues ou valent 3 points, $p(C) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

• Sur les 12 boules, 6 boules sont rouges ou valent au plus 2 points, $p(D) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

9 • $p(A) = \frac{3}{7}$.

• Il y a 4 chiffres impairs, donc $p(B) = \frac{4}{7}$.

• Il y a 3 chiffres pairs, donc $p(C) = \frac{3}{7}$.

• $A \cap B$: « on obtient un chiffre impair inférieur à 4 », soit les chiffres 1 et 3, donc $p(A \cap B) = \frac{2}{7}$.

• $A \cap C$: « on obtient un chiffre pair inférieur à 4 », soit le chiffre 2, donc $p(A \cap C) = \frac{1}{7}$.

• $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{4}{7}$.

• $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = \frac{3}{7}$.

• $p(\bar{C}) = 1 - p(C) = \frac{4}{7}$.

• $\bar{A} \cap \bar{B}$: « on n'obtient ni un chiffre inférieur à 4, ni un chiffre impair », soit les chiffres 4 et 6, donc $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{2}{7}$.

$$\bullet p(\overline{A \cap C}) = 1 - p(A \cap C) = \frac{6}{7}.$$

10 1. Données de l'énoncé :

- Parmi les 2 000 élèves, 40 % sont des filles, soit $2\,000 \times \frac{40}{100} = 800$ filles.
- Parmi les filles, 15 % sont internes, soit $800 \times \frac{15}{100} = 120$ filles internes.
- 60 % des élèves sont externes, soit $2\,000 \times \frac{60}{100} = 1\,200$ externes.
- 760 garçons sont externes.
- La moitié des demi-pensionnaires sont des filles, soit le même nombre de garçons demi-pensionnaires.

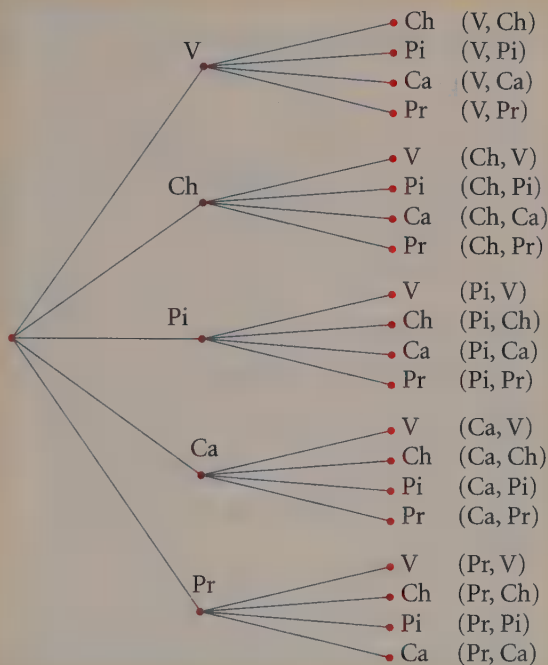
On peut alors compléter le tableau :

	Internes	Demi-pensionnaires	Externes	Total
Filles	120	$800 - 120 - 440 = 240$	$1\,200 - 760 = 440$	800
Garçons	$320 - 120 = 200$	240	760	$2\,000 - 800 = 1\,200$
Total	$2\,000 - 480 - 1\,200 = 320$	480	1 200	2 000

- 2. • Parmi les 2 000 élèves, 800 sont des filles, donc $p(A) = \frac{800}{2\,000} = 0,4$.
- Parmi les 2 000 élèves, 320 sont internes, donc $p(B) = \frac{320}{2\,000} = 0,16$.
- Parmi les 2 000 élèves, 120 sont des filles internes, donc $p(C) = \frac{120}{2\,000} = 0,06$.
- On remarque que $D = A \cup B$,
donc $p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
Or, $C = A \cap B$, donc $p(D) = 0,4 + 0,16 - 0,06 = 0,5$.

Remarque
Le « ou » mathématique
est un « ou » inclusif.

11 1. Arbre des possibilités.



On peut obtenir 20 couples possibles.

2. a) Sur les 20 couples possibles, 1 correspond au couple (vanille, café), donc :

$$p = \frac{1}{20} = 0,05.$$

b) Sur les 20 couples possibles, 2 correspondent au cas demandé (vanille, café) et (café, vanille), donc $p = \frac{2}{20} = 0,1$.

c) Sur les 20 couples possibles, 12 contiennent 1 seul des parfums préférés de Benoît, donc $p = \frac{12}{20} = 0,6$.

d) Sur les 20 couples possibles, 7 ne contiennent aucun de ses parfums préférés, donc $p = \frac{7}{20} = 0,35$.

12 On sait que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ car
 $A \cap B = \emptyset$.

$$\begin{aligned}\text{On a donc } p(B) &= p(A \cup B) - p(A) = 0,84 - 0,6 \\ &= 0,24.\end{aligned}$$

Remarque

A et B sont dits incompatibles.

13 On sait que $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

$$\begin{aligned}\text{On a donc } p(A \cap B) &= p(A) + p(B) - p(A \cup B) \\ &= 0,35 + 0,75 - 0,8 = 0,3.\end{aligned}$$

L'astuce du prof !

Le « et » en probabilité renvoie à la notion d'intersection ; le « au moins » à la notion d'union.

14 1. ● Parmi les 75 000 spectateurs, 70 % sont français,

$$\text{soit } 75\,000 \times \frac{70}{100} = 52\,500 \text{ spectateurs français et}$$

$$75\,000 - 52\,500 = 22\,500 \text{ spectateurs étrangers.}$$

● 85 % des spectateurs étrangers possèdent une licence, soit

$$22\,500 \times \frac{85}{100} = 19\,125 \text{ personnes.}$$

● 25 % des spectateurs français possèdent une licence, soit

$$52\,500 \times \frac{25}{100} = 13\,125 \text{ personnes.}$$

On peut alors modéliser la situation dans un tableau :

	Spectateurs français	Spectateurs étrangers	Total
Licenciés	13 125	19 125	$13\,125 + 19\,125 = 32\,250$
Non licenciés	$52\,500 - 13\,125 = 39\,375$	$22\,500 - 19\,125 = 3\,375$	$39\,375 + 3\,375 = 42\,750$
Total	52 500	22 500	75 000

2.a) ● Sur les 75 000 spectateurs, 52 500 sont français, donc $p(F) = \frac{52\,500}{75\,000} = 0,7$.

● Sur les 75 000 spectateurs, 32 250 possèdent une licence, donc

$$p(L) = \frac{32\,250}{75\,000} = 0,43.$$

b) Sur les 75 000 spectateurs, 13 125 sont français et possèdent une licence, donc

$$p(F \cap L) = \frac{13\,125}{75\,000} = 0,175.$$

$$\text{On a } p(F \cup L) = p(F) + p(L) - p(F \cap L),$$

$$\text{donc } p(F \cup L) = 0,7 + 0,43 - 0,175 = 0,955.$$

15 1. On obtient un échantillon de taille 10 de nombres entiers aléatoires compris entre 0 et 2 inclus.

2. On obtient un échantillon de taille 30 de nombres entiers aléatoires compris entre 1 et 5 inclus.

16 1. On entre dans la cellule A1 la formule
 $=\text{ENT}(11*\text{ALEA}())$; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A20.

2. On entre dans la cellule A1 la formule
 $=\text{ENT}(10*\text{ALEA}()+1)$; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A10.

3. On entre dans la cellule A1 la formule
 $=\text{ENT}(11*\text{ALEA}()+10)$; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A100.

17 1. On entre la formule $=\text{ENT}(\text{ALEA}()+0,3)$ dans la cellule A1 ; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A100.

1 s'affiche si la personne est fumeur, 0 sinon.

2. On entre la formule $=\text{ENT}(\text{ALEA}()+0,12)$ dans la cellule A1 ; on recopie cette formule jusqu'à la cellule A100.

1 s'affiche si l'adolescent joue d'un instrument, 0 sinon.

18 L'intervalle de fluctuation est $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, soit

$$\left[0,72 - \frac{1}{\sqrt{200}} ; 0,72 + \frac{1}{\sqrt{200}} \right] \approx [0,65 ; 0,79].$$

Cela signifie que la probabilité que cet intervalle contienne le pourcentage de non fumeurs de l'échantillon est supérieure ou égale à 95 %.

19 1. La fréquence observée f d'apprentis ayant trouvé un emploi dans les 3 mois est $f = \frac{52}{80} = 0,65$.

2. L'intervalle de fluctuation est $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, soit

$$\left[0,75 - \frac{1}{\sqrt{80}} ; 0,75 + \frac{1}{\sqrt{80}} \right] \approx [0,64 ; 0,86].$$

Remarque

La formule

$=\text{ENT}(\text{ALEA}()+p)$ où p est un nombre réel de $[0 ; 1]$, permet d'obtenir le nombre 0 avec la probabilité $1-p$ et le nombre 1 avec la probabilité p .

Ce qui signifie que la probabilité que cet intervalle contienne le pourcentage d'apprentis de l'échantillon ayant trouvé un emploi dans les 3 mois est supérieure ou égale à 95 %.

3. f appartient à l'intervalle de fluctuation, il n'y a donc pas de différence significative au niveau 95 %.

→ Exercices d'entraînement

20 1. ● L'entreprise compte 180 femmes et 200 hommes.

● La moitié des hommes fument régulièrement, soit $\frac{200}{2} = 100$ hommes ;

20 % des femmes fument occasionnellement, soit $180 \times \frac{20}{100} = 36$ femmes.

● Une femme sur trois fume régulièrement, soit $\frac{180}{3} = 60$ femmes.

● Autant d'hommes que de femmes fument occasionnellement, soit 36 femmes.

● On peut alors modéliser la situation dans un tableau.

	Ne fument pas	Fument occasionnellement	Fument régulièrement	Total
Hommes	$200 - 100 - 36 = 64$	36	100	200
Femmes	$180 - 36 - 60 = 84$	36	60	180
Total	$64 + 84 = 148$	$36 + 36 = 72$	$100 + 60 = 160$	$200 + 180 = 380$

2. a) ● Parmi les 380 personnes, 72 sont fumeurs occasionnels ; donc

$$p(A) = \frac{72}{380} = \frac{18}{95} \approx 0,19.$$

● Parmi les 380 personnes, 200 sont des hommes ; donc

$$p(B) = \frac{200}{380} = \frac{10}{19} \approx 0,53.$$

b) $A \cap B$: « La personne choisie est un homme fumeur occasionnel ».

On compte 36 hommes qui fument occasionnellement,

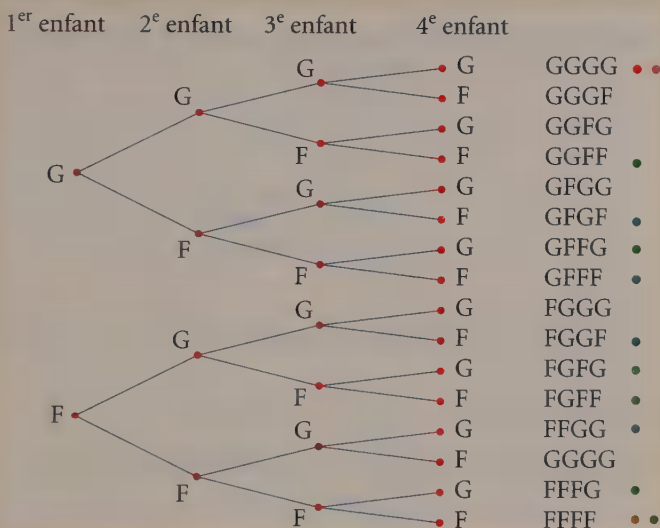
$$\text{donc } p(A \cap B) = \frac{36}{380} = \frac{9}{95} \approx 0,09.$$

c) $A \cup B$: « La personne choisie est un homme ou est fumeur occasionnel ».

On sait que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$,

$$\text{donc } p(A \cup B) = \frac{72}{380} + \frac{200}{380} - \frac{36}{380} = \frac{236}{380} = \frac{59}{95} \approx 0,62.$$

21 1. Arbre des possibilités.



On compte 16 issues possibles.

2. ● Sur les 16 issues possibles, un cas est favorable à l'événement A, donc

$$p(A) = \frac{1}{16} = 0,0625 \text{ (point rouge de l'arbre).}$$

● Sur les 16 issues possibles, deux cas sont favorables à l'événement B, donc

$$p(B) = \frac{2}{16} = 0,125 \text{ (points oranges de l'arbre).}$$

● Sur les 16 issues possibles, dix cas sont favorables à l'événement C, donc

$$p(C) = \frac{10}{16} = 0,625 \text{ (points verts de l'arbre).}$$

● Sur les 16 issues possibles, quinze cas sont favorables à l'événement D, donc

$$p(D) = \frac{15}{16} = 0,9375 \text{ (toutes les issues sauf GGGG).}$$

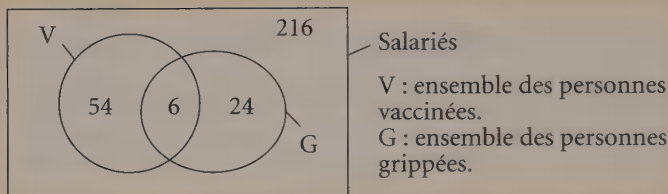
22 1. ● Parmi les 300 salariés, 20 % se sont fait vacciner, soit

$$300 \times \frac{20}{100} = 60 \text{ personnes.}$$

● 10 % du personnel a eu la grippe, soit $300 \times \frac{10}{100} = 30$ personnes ;

parmi ces 30 personnes, 20 % étaient vaccinées, soit $30 \times \frac{20}{100} = 6$ personnes.

● On peut illustrer la situation avec un diagramme.



2. a) ● Sur les 300 salariés, 30 ont eu la grippe, donc $p(A) = \frac{30}{300} = 0,1$.

● Sur les 300 salariés, 60 étaient vaccinés, donc $p(B) = \frac{60}{300} = 0,2$.

b) ● Sur les 300 salariés, 6 ont eu la grippe et étaient vaccinés, donc

$$p(A \cap B) = \frac{6}{300} = 0,02.$$

● On sait que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, donc

$$p(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,02 = 0,28.$$

23 1. La formule =ALEA() permet d'obtenir un nombre décimal aléatoire dans l'intervalle $[0 ; 1[$;

la formule =ALEA()+0,3 permet d'obtenir un nombre décimal aléatoire dans l'intervalle $[0,3 ; 1,3[$ et la formule =ENT(ALEA() + 0,3) permet d'obtenir la partie entière de ce nombre.

On obtient ainsi les nombres entiers 0 ou 1.

2. La probabilité d'obtenir 1 est égale à 0,3.

3. On obtient un échantillon de taille 100.

Le chiffre 0 représente une boule blanche et le chiffre 1 une boule rouge.

4. On compte le nombre de boule rouges obtenues, puis on divise ce résultat par 100.

La formule est : $=NB.SI(A1:A100;1)/100$ (on peut aussi entrer la formule $=SOMME(A1:A100)/100$ puisque l'on compte le nombre de 1 dans la plage A1:A100).

5. En appuyant sur la touche F9 du clavier, on obtient un autre échantillon de taille 100.

6. a) b) Les résultats fluctuent selon les échantillons. Cependant la probabilité que la fréquence f soit dans l'intervalle de fluctuation $[0,2 ; 0,5]$ est supérieure ou égale à 95 %.

1 Description d'un algorithme

1 Définition

Un algorithme décrit une succession d'instructions.

2 Description

Un algorithme est organisé en plusieurs parties :

la déclaration des variables ; un début ; des instructions : la description d'opérations à exécuter ; une fin.

3 Les instructions élémentaires

● **Affectation d'une instruction** : cela consiste à attribuer une valeur à une variable avec le symbole « $\leftarrow$ ».

● **Entrées / sorties** : l'entrée permet à l'utilisateur de rentrer des valeurs au clavier pour être utilisées par le programme, on utilise l'action **Lire** ; la sortie permet de communiquer avec l'utilisateur, on utilise l'action **Écrire**.

Exemple : écrire un algorithme qui demande un nombre X à l'utilisateur, puis calculer $X + 5$ et afficher le résultat à l'écran.

Algorithme :

Description :

Variables X, Y : nombres réels

déclaration des variables.

Début

début du programme.

Écrire « entrez le nombre X : »

le programme reproduit la phrase écrite entre guillemets.

Lire X

le programme attend la frappe d'une valeur au clavier.

$Y \leftarrow X + 5$

le programme calcule la valeur de $X + 5$ et affecte ce résultat à la variable Y .

Écrire Y

la valeur de Y est affichée à l'écran.

Fin

fin du programme.

EXERCICE RÉSOLU

► Interpréter un algorithme

ÉNONCÉ

1. Décrire l'algorithme suivant. Que produit-il ?

Variables X, c : nombres réels

Début

Écrire « entrez votre nombre : »

Lire X

$c \leftarrow X * X$

Écrire « son carré est : », c

Fin

2. Quel est le résultat produit pour les valeurs 5 ; 1,5 et - 7 de X ?

CORRIGÉ

1. Le programme calcule et affiche le carré du nombre entré par l'utilisateur.

2. Pour $X = 5$, on obtient 25 ; pour $X = 1,5$, on obtient 2,25 et pour $X = -7$, on obtient 49.

Rappel

« * » est l'opérateur de multiplication.

ÉNONCÉ

Soit l'algorithme :

Variables X, Y, P : nombres réels

Début

Écrire « Entrez X : »

Lire X

Écrire « Entrez Y : »

Lire Y

$P \leftarrow 2 * X / (Y^2 + 1)$

Écrire P

Fin

Quel est le résultat produit par l'algorithme pour $X = 3$ et $Y = -1$?

CORRIGÉ

Pour $X = 3$ et $Y = -1$,
on obtient $(2 \times 3) \div ((-1)^2 + 1) = 3$.

Rappel

« / » est l'opérateur de division et
« ^ » est l'opérateur de puissance.

2 Boucle et itérateur

1 Structure Répéter ... Jusqu'à ...

- Cette structure décrit une action répétée jusqu'à ce qu'une condition soit respectée.

Exemple : L'algorithme suivant affiche la table de multiplication par 8.

Début

$n \leftarrow 1$

Répéter

Écrire « $8 \times$ », n , « = », $8 * n$

$n \leftarrow n + 1$

Jusqu'à $n = 11$

Fin

2 Structure Tant que ... Faire ...

- Cette structure est exécutée répétitivement tant qu'une condition est vraie.

Exemple : L'algorithme suivant affiche la table de multiplication par 8.

Début

$n \leftarrow 1$

Tant que $n \leq 10$

Faire

Écrire « $8 \times$ », n , « = », $8 * n$

$n \leftarrow n + 1$

FinFaire

Fin

3 Structure Pour ... Faire ...

- Cette structure est exécutée répétitivement un certain nombre de fois.

Exemple : L'algorithme suivant affiche la table de multiplication par 8.

Début

Pour $n \leftarrow 1$ **Jusqu'à** 10

Faire

Écrire « $8 \times$ », n , « = », $8 * n$

FinFaire

Fin

EXERCICE RÉSOLU

► Interpréter un algorithme

ÉNONCÉ

Décrire l'algorithme suivant. Que produit-il pour $x = 10$?

Variables x, y : nombres réels

c : caractère

Début

Répéter

Écrire « Entrez la valeur de x »

Lire x

$y \leftarrow x^2x + 2x - 1$

Écrire y

Écrire « Un autre calcul ? Non, touche N ; Oui, touche O »

Lire c

Jusqu'à $c = \text{« N »}$

Fin

Méthode

Décrire, pas à pas, chaque étape de la boucle.

CORRIGÉ

Répéter

Écrire « Entrez la valeur de x »

Lire x

$y \leftarrow x^2x + 2x - 1$

Écrire y

Écrire « Un autre calcul ? »

Lire c

Jusqu'à $c = \text{« N »}$

début de la boucle

le programme écrit cette phrase

l'utilisateur entre une valeur de x au clavier

le programme calcule $x^2 + 2x - 1$

le programme affiche le résultat

le programme écrit cette phrase

l'utilisateur entre sa réponse

si la réponse est N, la boucle s'arrête ;

si la réponse est O, la boucle reprend

Cet algorithme affiche la valeur 119 pour $x = 10$.

3 Instruction conditionnelle

1 Structure Si ... Alors ...

- On teste une condition pour déterminer si une ou plusieurs actions doivent être exécutées.

Exemple : L'algorithme suivant affiche la racine carrée d'un nombre s'il est positif.

Variables x, y : nombres réels

Début

Écrire « Entrez votre nombre »

Lire x

Si $x \geq 0$ **Alors**

$y \leftarrow \text{RacineCarrée}(x)$

Écrire « Sa racine carrée est : », y

FinSi

Fin

2 Structure Si ... Alors ... Sinon ...

- On teste une condition pour déterminer quelles actions doivent être effectuées.

Exemple : L'algorithme suivant affiche la racine carrée d'un nombre s'il est positif, sinon il affiche un message d'erreur.

Variables x, y : nombres réels

Début

Écrire « Entrez votre nombre »

Lire x

Si $x < 0$ **Alors**

Écrire « Ce nombre est négatif »

Sinon

$y \leftarrow \text{racineCarrée}(x)$

Écrire « Sa racine carrée est : », y

FinSi

Fin

EXERCICE RÉSOLU

► Interpréter un algorithme

ÉNONCÉ

Décrire l'algorithme suivant. Que produit-il pour $x = -10,5$?

Variable x : nombre réel

Début

Écrire « Entrez un nombre non nul »

Lire x

Si $x > 0$ **Alors**

Écrire « Ce nombre est positif »

Sinon

Écrire « Ce nombre est négatif »

FinSi

Fin

Conseil

Repérer la structure conditionnelle.

CORRIGÉ

Écrire « Entrez un nombre non nul » *le programme écrit cette phrase*

Lire x *l'utilisateur entre une valeur de x*

Si $x > 0$ **Alors** *la condition est évaluée par le programme*

Écrire « Ce nombre est positif » *cette condition est exécutée si vrai*

Sinon

Écrire « Ce nombre est négatif » *cette condition est exécutée si faux*

FinSi

Fin

Le programme demande un nombre à l'utilisateur et lui dit si ce nombre est positif ou s'il est négatif (zéro ayant été exclu).

Pour $x = -10,5$, le programme affiche : Ce nombre est négatif.

➔ Savoir interpréter un algorithme comportant une boucle

ÉNONCÉ

Décrire l'algorithme suivant. Que produit-il ?

Variables x, y : nombres réels

Début

$x \leftarrow 1$

Répéter

$y \leftarrow x * x$

Écrire y

$x \leftarrow x + 1$

Jusqu'à $x = 7$

Fin

MÉTHODE

1. Repérer l'affectation de la variable x .
2. Repérer la boucle par ses mots-clés et décrire son action.
3. Conclure.

CORRIGÉ

1. La valeur initiale de x est 1.

Répéter

$y \leftarrow x * x$

Écrire y

$x \leftarrow x + 1$

Début de la boucle

On affecte à y la valeur $1 \times 1 = 1$

La valeur obtenue de y est écrite à l'écran

x est affecté de la valeur $1 + 1 = 2$

L'action décrite par la boucle se répète :

On affecte à y la valeur $x \times x = 2 \times 2 = 4$

La valeur obtenue de y est écrite à l'écran

x est affecté de la valeur $x + 1 = 2 + 1 = 3$

L'action décrite par la boucle se répète

L'action décrite par la boucle prend fin lorsque $x = 7$

Jusqu'à $x = 7$

L'algorithme produit l'affichage des nombres :

1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 et 36.

Piège à éviter

L'action n'est pas exécutée pour $x = 7$.

→ Savoir interpréter un algorithme comportant une instruction conditionnelle

ÉNONCÉ

Décrire l'algorithme suivant.

Que produit-il pour $x = 5$ et $y = 10$? pour $x = 7$ et $y = 6$? pour $x = -5$ et $y = -4$?

Variables x, y, z : nombres réels

Début

Écrire « Entrez la valeur de x : »

Lire x

Écrire « Entrez la valeur de y : »

Lire y

Si $x > y$ Alors

$z \leftarrow x^2$

Écrire z

Sinon

$z \leftarrow y^2$

Écrire z

FinSi

Fin

MÉTHODE

1. Interpréter les instructions de début de programme.
2. Repérer les mots-clés de la structure conditionnelle et interpréter la condition testée.

CORRIGÉ

Le programme demande à l'utilisateur deux nombres x et y .

Si $x > y$, alors le programme affiche x^2 , sinon il affiche y^2 ;
le programme affiche donc le carré du plus grand des deux nombres.

1. Pour $x = 5$ et $y = 10$, le programme calcule 10^2 et affiche 100.
2. Pour $x = 7$ et $y = 6$, le programme calcule 7^2 et affiche 49.
3. Pour $x = -5$ et $y = -4$, le programme calcule $(-4)^2$ et affiche 16.

Remarque

Le contraire de $x > y$
est $x \leq y$.

→ Exercices d'application



1 Interpréter un algorithme de calculs

Quel est le résultat produit par chacun des deux algorithmes suivants pour $X = 6$?

a) Variables X, Y, Z : nombres réels

Début

$Y \leftarrow -1$

Lire X

$Z \leftarrow 2 * X + Y$

Écrire Z

Fin

b) Variables X, Y, Z : nombres réels

Début

$Y \leftarrow 3$

Lire X

$Z \leftarrow X^2 - Y + 3$

Écrire Z

Fin

2 Interpréter un algorithme de calculs

Quel est le résultat produit par chacun des deux algorithmes suivants pour $X = -5$, puis pour $X = 1,5$?

a) Variables X, Y, Z : nombres réels

Début

Lire X

$Y \leftarrow 2$

$Z \leftarrow 4 * X + 2 * Y$

Écrire Z

Fin

b) Variables X, Y, Z : nombres réels

Début

$Y \leftarrow 1$

Lire X

$Z \leftarrow X^2 - 3 * Y - 5$

Écrire Z

Fin

3 Interpréter un algorithme

Quelles seront les valeurs de X, Y et Z après exécution du programme suivant ?

Variables X, Y, Z : nombres entiers

Début

$X \leftarrow 4$

$Y \leftarrow 10$

$Z \leftarrow X + Y$

$X \leftarrow 8$

$Y \leftarrow X + Z$

Fin

4 Interpréter un algorithme

Quelles seront les valeurs de X et Y après exécution du programme suivant ?

Variables X, Y : nombres entiers

Début

$X \leftarrow 8$

$Y \leftarrow 3$

$X \leftarrow Y$

$Y \leftarrow X$

Fin

5 Interpréter un algorithme

1. Quelles seront les valeurs de X et de Y après exécution du programme suivant ?
2. De manière générale, que produit cet algorithme pour toute valeur de X et de Y ?

Variables X, Y, Z : nombres entiers

Début

$X \leftarrow 8$

$Y \leftarrow 3$

$Z \leftarrow X$

$X \leftarrow Y$

$Y \leftarrow Z$

Fin

6 Écrire un algorithme en géométrie

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur la largeur et la longueur d'un rectangle (en mètres), puis qui calcule et affiche le périmètre et l'aire de ce rectangle.

7 Écrire un algorithme de calculs

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur la valeur de deux nombres A et B, puis qui calcule et affiche la somme de leur carré.

8 Écrire un algorithme en statistiques

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur deux nombres, puis qui calcule et affiche la moyenne de ces deux nombres.

9 Interpréter un algorithme comportant une instruction conditionnelle

Quel est le résultat produit par l'algorithme suivant pour $x = 2$?

Variable x : nombre réel

Début

Écrire « Quelle est la valeur de x ? »

Lire x

Répéter

Écrire x

$x \leftarrow x + 3$

Jusqu'à $x = 17$

Fin

10 Interpréter un algorithme comportant une boucle

Quel est le résultat produit par l'algorithme suivant pour $x = 6$?

Variable x : nombre réel

Début

Écrire « Quelle est la valeur de x ? »

Lire x

Répéter

Écrire x

$x \leftarrow x + 10$

Jusqu'à $x > 50$

Fin

11 Interpréter un algorithme comportant une boucle

Quel est le résultat produit par l'algorithme suivant pour $x = 6$?

Variable x : nombre réel

Début

Écrire « Quelle est la valeur de x ? »

Lire x

Tant que $x < 50$

Faire

Écrire x

$x \leftarrow x + 10$

FinFaire

Fin

12 Interpréter un algorithme donnant un tableau de valeurs d'une fonction

1. Décrire l'algorithme suivant.

Variables bg, bd, x, y : nombres entiers

Début

Écrire « Borne de gauche ? »

Lire bg

Écrire « Borne de droite ? »

Lire bd

Pour x $\leftarrow$ bg **Jusqu'à** bd

Faire

y $\leftarrow$ $x^2 + x + 1$

Écrire y

FinFaire

Fin

2. Quel est le résultat produit par cet algorithme pour bg = 4 et bd = 10 ?

13 Écrire un algorithme comportant une boucle

Écrire un algorithme qui demande un nombre entier à l'utilisateur, puis qui affiche les vingt nombres suivants.

14 Écrire un algorithme comportant une boucle

Écrire un algorithme qui demande un nombre entier à l'utilisateur, puis qui affiche la somme de ce nombre avec le nombre suivant ; le programme demande alors à l'utilisateur s'il veut continuer.

15 Interpréter un algorithme comportant une condition

Décrire l'algorithme suivant.

Variable A : nombre réel

Début

Écrire « Quel âge avez-vous ? »

Lire A

Si A < 18 **Alors**

Écrire « Vous êtes mineur »

Sinon

Écrire « Vous êtes majeur »

FinSi

Fin

16 Interpréter un algorithme comportant une condition

1. Décrire l'algorithme ci-dessous.
2. Que produit-il pour $x = 5$? pour $x = 20$?

Variables x, y : nombres réels

Début

Écrire « Entrez votre nombre : $x =$ »

Lire x

Si $x < 10$ **Alors**

$y \leftarrow x + 10$

Écrire y

Sinon

$y \leftarrow x - 10$

Écrire y

FinSi

Fin

17 Écrire un algorithme de calculs

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur deux nombres A et B , puis si B est non nul, affiche le quotient de A par B .

18 Écrire un algorithme de calculs

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur :

- le prix, en euros, d'un article ;
- si cet article est soldé.

Si l'article est soldé, le programme affiche le prix à payer avec une réduction de 50 %.

→ Exercices d'entraînement



19 Interpréter un algorithme en statistiques

Que produit l'algorithme suivant ?

Variables n , cpt : nombres entiers

x , S , M : nombres réels

Début

Écrire « Combien de notes avez-vous ? »

Lire n

$S \leftarrow 0$

Pour $cpt \leftarrow 1$ **Jusqu'à** n

Faire

Écrire « Entrez vos notes »

Lire x

$S \leftarrow S + x$

FinFaire

$M \leftarrow S/n$

Écrire « Le résultat est », M

Fin

20 Écrire un algorithme de calculs numériques

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur un nombre entier positif N , puis qui calcule le nombre $S = 1 + 2 + 3 + \dots + N$.

21 Écrire un algorithme de résolution d'une équation du premier degré

Écrire un algorithme qui demande les coefficients a et b de l'équation $ax + b = 0$, puis qui affiche la solution de cette équation.

22 Écrire un algorithme d'étude du signe d'une expression du premier degré

Écrire un algorithme qui donne le signe de $ax + b$ en fonction de x après avoir demandé à l'utilisateur les coefficients a et b (ne considérer que le cas $a \neq 0$).

➔ Exercices d'application

1 a) On affecte la valeur -1 à la variable Y ; l'utilisateur entre 6 au clavier ; le programme calcule $2 \times 6 - 1$ et affecte ce résultat à la variable Z qui est affichée. Le programme affiche ainsi la valeur 11.

b) On affecte la valeur 3 à la variable Y ; l'utilisateur entre la valeur 6 au clavier ; le programme calcule $6^2 - 6 + 3$ et affecte cette valeur à la variable Z qui est affichée.

Le programme affiche ainsi la valeur 33.

2 a) La valeur de X est entrée au clavier, on affecte la valeur 2 à la variable Y .

Le programme calcule et affiche la valeur affectée à Z .

Pour $X = -5$, $Z = 4 \times (-5) + 2 \times 2 = -16$.

Pour $X = 1,5$, $Z = 4 \times 1,5 + 2 \times 2 = 10$.

b) On affecte la valeur 1 à la variable Y . La valeur de X est entrée au clavier.

Le programme calcule et affiche la valeur affectée à Z .

Pour $X = -5$, $Z = (-5)^2 - 3 \times 1 - 5 = 17$.

Pour $X = 1,5$, $Z = 1,5^2 - 3 \times 1 - 5 = -5,75$.

3 *Description :*

$X \leftarrow 4$	On affecte la valeur 4 à la variable X , soit $X = 4$
$Y \leftarrow 10$	On affecte la valeur 10 à la variable Y , soit $Y = 10$
$Z \leftarrow X + Y$	On affecte la valeur $10 + 4 = 14$ à la variable Z , soit $Z = 10 + 4 = 14$
$X \leftarrow 8$	On affecte la valeur 8 à la variable X , soit $X = 8$
$Y \leftarrow X + Z$	On affecte la valeur $8 + 14 = 22$ à la variable Y , soit $Y = 8 + 14 = 22$

À la fin du programme, on a $X = 8$, $Y = 22$ et $Z = 14$.

4 *Valeurs des variables :*

$X \leftarrow 8$	$X = 8$
$Y \leftarrow 3$	$Y = 3$
$X \leftarrow Y$	On affecte à X la valeur de Y , soit $X = 3$
$Y \leftarrow X$	On affecte à Y la valeur de X , soit $Y = 3$

À la fin du programme, on a $X = Y = 3$.

5

Valeurs des variables :

1. $X \leftarrow 8$ $X = 8$
 $Y \leftarrow 3$ $Y = 3$
 $Z \leftarrow X$ On affecte à Z la valeur de X, soit $Z = 8$
 $X \leftarrow Y$ On affecte à X la valeur de Y, soit $X = 3$
 $Y \leftarrow Z$ On affecte à Y la valeur de Z, soit $Y = 8$

À la fin du programme, on a $X = 3$ et $Y = 8$.

2. Ce programme échange les valeurs de X et de Y.

Remarque

Algorithme intéressant pour comprendre la notion d'affectation.

6

Variables l, L, P, A : nombres réels

Début

Écrire « Entrez la largeur du rectangle en mètres »
 Lire l
 Écrire « Entrez la longueur du rectangle en mètres »
 Lire L
 $P \leftarrow 2 * (l + L)$
 $A \leftarrow l * L$
 Écrire « Le périmètre du rectangle est égal à : », P, « m »
 Écrire « L'aire du rectangle est égale à : », A, « m² »

Fin

Remarque

Bien noter le rôle des guillemets et des virgules.

7

Variables A, B, S : nombres réels

Début

Écrire « Entrez la valeur de A »
 Lire A
 Écrire « Entrez la valeur de B »
 Lire B
 $S \leftarrow A^2 + B^2$
 Écrire « A² + B² = », S

Fin

8

Variables X,Y,M : nombres réels**Début**

Écrire « Entrez le premier nombre »

Lire X

Écrire « Entrez le deuxième nombre »

Lire Y

 $M \leftarrow 0,5 * (X + Y)$

Écrire « La moyenne de ces deux nombres est : », M

Fin**Remarque**

On affecte à la variable M le résultat du calcul, puis l'action « Écrire M » affiche le résultat.

9

*Description :***Variable** x : nombre réel**Début**

Écrire « Quelle est la valeur de x ? »

Lire x

*L'utilisateur saisit la valeur de x***Répéter***Début de la boucle*

Écrire x

La boucle affiche la valeur de x, puis ajoute 3 à x ; elle s'arrête au moment où x prend la valeur 17

 $x \leftarrow x + 3$ **Jusqu'à** x = 17**Fin**

Pour x = 2, le programme affiche : 2 , 5 , 8 , 11, puis 14.

10

*Description :***Variable** x : nombre réel**Début**

Écrire « Quelle est la valeur de x ? »

Lire x

*L'utilisateur saisit la valeur de x***Répéter***Début de la boucle*

Écrire x

La boucle affiche la valeur de x, puis ajoute $x \leftarrow x + 10$ *10 à cette valeur ; elle s'arrête au moment***Jusqu'à** x > 50*où x > 50***Fin**

Pour x = 6, le programme affiche : 6 , 16 , 26, 36 et 46.

Rappel

Dans la boucle Répéter ... jusqu'à ..., il faut bien observer à quel instant la condition d'arrêt est évaluée dans la répétition.

11

Description :

Variable x : nombre réel

Début

Écrire « Quelle est la valeur de x ? »Lire x L'utilisateur saisit la valeur de x Tant que $x < 50$ Début de la boucle

Faire

Écrire x Le programme affiche la valeur de x , $x \leftarrow x + 10$ puis ajoute 10 à cette valeur.FinFaire La boucle s'arrête dès que $x \geq 50$

Fin

Pour $x = 6$, le programme affiche : 6, 16, 26, 36, puis 46.

Rappel

Le vocabulaire
Faire ... FinFaire
permet de repérer le corps
de la boucle.

12 1.

Description :

Variables bg, bd, x, y : nombres entiers

Début

Écrire « Borne de gauche ? »

Lire bg L'utilisateur saisit la valeur
de la borne de gauche

Écrire « Borne de droite ? »

Lire bd L'utilisateur saisit la valeur
de la borne de droitePour $x \leftarrow bg$ Jusqu'à bd

Faire Début de la boucle

 $y \leftarrow x^2 + x + 1$ Le programme calcule et affiche les valeurs deÉcrire y $x^2 + x + 1$ de $x = bg$ jusqu'à $x = bd$, avec un pas de 1.

FinFaire Fin de la boucle

Fin

2. Pour $bg = 4$ et $bd = 10$, le programme affiche : 21, 31, 43, 57, 73, 91 et 111.

Remarque

On utilise la boucle
Pour ... Jusqu'à ...
lorsque le nombre
d'exécutions de la boucle
est connu.

13

Variables N, x : nombres entiers**Début**

Écrire « Entrez votre nombre entier : »

Lire N

Écrire « Les vingt nombres suivants sont : »

Pour $x \leftarrow N + 1$ **Jusqu'à** $N + 20$ **Faire**Écrire x **FinFaire****Fin**

14

Variables N, M : nombres entiers

rep : caractère

Début**Répéter**

Écrire « Entrez votre nombre entier : »

Lire N $M \leftarrow N + N + 1$ Écrire « la somme de votre nombre et du suivant est : », M

Écrire « Voulez-vous effectuer un autre calcul ? Non, touche N ; Oui, touche O »

Lire rep

Jusqu'à rep = « N »**Fin****Remarque**Ne pas confondre les
instructions « Lire » et
« Écrire ».

15 Le programme demande à l'utilisateur son âge, puis l'informe s'il est majeur ou s'il est mineur.

16 1. Le programme demande la valeur d'un nombre x à l'utilisateur.

Si $x < 10$, le programme affiche la valeur de $x + 10$; si $x \geq 10$, le programme affiche la valeur de $x - 10$.

2. Pour $x = 5$, la valeur 15 est affichée ; pour $x = 20$, la valeur 10 est affichée.

17

Variables A,B,Q : nombres réels**Début**

Écrire « Entrez la valeur de A »

Lire A

Écrire « Entrez la valeur de B »

Lire B

Si B = 0 **Alors**

Écrire « Le quotient de A par B n'est pas possible »

Sinon

Q ← A/B

Écrire « Le quotient de A par B est égal à : », Q

FinSi**Fin**

18

Variables P,PF : nombres réels

Rep : caractère

Début

Écrire « Quel est le prix de l'article ? »

Lire P

Écrire « Cet article est-il soldé ? Non, touche N ; Oui, touche O »

Lire Rep

Si Rep = « O » **Alors**

PF ← -0,5 * P

Écrire « Vous devez payer : », PF, « euros »

Sinon

Écrire « Vous devez payer : », P, « euros »

FinSi**Fin****Rappel**

Le vocabulaire

Si ... FinSi ... permet
de repérer le corps
de la condition.

→ Exercices d'entraînement

19

Description :

Variables n, cpt : nombres entiers x, S, M : nombres réels

Début

Écrire « Combien de notes avez-vous ? »

Lire n *L'utilisateur entre le nombre de notes* $S \leftarrow 0$ *La variable est initialisée***Pour** $cpt \leftarrow 1$ **Jusqu'à** n *Création d'un compteur pour la boucle***Faire***Début de la boucle*

Écrire « Entrez vos notes »

Lire x *On saisit une à une les notes* $S \leftarrow S + x$ *On ajoute chaque note à la variable S***FinFaire***Fin de la boucle* $M \leftarrow S/n$ *Calcul de la somme des notes divisée par le nombre de notes*Écrire « Le résultat est », M *Affichage de M*

Fin

Le programme calcule et affiche la moyenne des notes que l'utilisateur a saisi.

20

Variables N, S, cpt : nombres entiers

Début

Écrire « Entrez un nombre entier positif N »Lire N $S \leftarrow 0$ **Pour** $cpt \leftarrow 1$ **Jusqu'à** N **Faire** $S \leftarrow S + cpt$ **FinFaire**Écrire « $1+2+3+\dots+N=$ », S

Fin

Piège à éviter

Pour une variable dont l'affectation sera modifiée au cours du programme, il ne faut pas oublier de l'initialiser.

21**Variables** A,B,S : nombres réels**Début**Écrire « Entrez le coefficient a : »

Lire A

Écrire « Entrez le coefficient b : »

Lire B

Si A = 0 **Alors****Si** B = 0 **Alors**

Écrire « Tous les nombres sont solutions »

Sinon

Écrire « L'équation n'a pas de solution »

FinSi**Sinon**

S ← - B/A

Écrire « La solution de l'équation est $x =$ », S**FinSi****Fin****22****Variables** A,B,rac : nombres réels**Début**Écrire « Entrez le coefficient a non nul : »

Lire A

Écrire « Entrez le coefficient b : »

Lire B

rac ← - B/A

Si A > 0 **Alors**Écrire « $ax + b$ est positif si $x \geq$ », rac, « et $ax + b$ est négatif si $x \leq$ », rac**Sinon**Écrire « $ax + b$ est négatif si $x \geq$ », rac, « et $ax + b$ est positif si $x \leq$ », rac**FinSi****Fin**

Index

A

abscisse d'un point	124
algorithmes	242
• boucle et itérateur	244
• description	242
• instruction conditionnelle	256
• instructions élémentaires	242
angle	
• de fuite	118
• orienté	72
antécédent par une fonction	24

C

caractère	172
• qualitatif	172
• quantitatif	172
cercle trigonométrique	72
coefficient directeur	
d'une droite	126
colinéarité de vecteurs	154
coordonnées	
• du milieu d'un segment	124
• d'un point	124
• d'un point d'une droite	126
• d'un vecteur	152
cosinus d'un nombre réel	72
courbe	
• des fréquences cumulées	174
• représentative d'une fonction	26

D

développer une expression	64
diagramme en bâtons	205
direction d'un vecteur	148
distribution des fréquences	202

droites

• confondues (dans l'espace)	120
• confondues (dans le plan)	128
• coplanaires	120
• orthogonales dans l'espace	121
• parallèles	154
• parallèles dans le plan	128, 130
• parallèles dans l'espace	120
• perpendiculaires dans le plan	130
• sécantes	128

E

échantillon	218
effectif	
• cumulé	172
• d'une population	172
• total d'une population	172
ensemble de définition	24
équation	
• (résolution graphique)	28
• $ax + b = 0$	68
• d'une droite	126
• réduite d'une droite	126
• $x^2 = a$	68

événement

• $\bar{A}$	206
• $A \cap B$	206, 214
• $A \cup B$	206, 214

expérience aléatoire

	202
--	-----

F

factoriser une expression	66
fluctuation d'échantillonnage	202
fonction	24
• affine	60

• carré	62
• constante	30
• croissante	30
• de référence	59
• décroissante	30
• homographique	70
• inverse	62
• linéaire	60
• polynôme de degré 2	70
fréquence	172
• d'un événement	204
• cumulée	172

H-I

histogramme	174
identités remarquables	64
image d'un nombre (par une fonction)	24
individu	172
inéquation	
• (résolution graphique)	28
• $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$	68
intersection d'intervalles	10
intervalle de fluctuation	218
intervalles	10

L-M-N

longueur d'un vecteur	148
maximum d'une fonction	32
médiane	176
milieu d'un segment	148
minimum d'une fonction	32
moyenne	178
nombre	
• décimal	8
• entier naturel	8

• entier relatif	8
• premier	10
• rationnel	8
• réel	8
nuage de points	174

O-P-Q

ordonnée d'un point	124
parabole	70
perspective cavalière	118
plans	
• confondus	121
• sécants	121
points alignés	154
population	172
probabilité	206
• d'un événement 208, 210, 212, 214	
produit d'un vecteur par un nombre réel	150
quartiles	176

R

règle	
• des parenthèses	64
• des signes	64
• du parallélogramme	150
relation de Chasles	150
repère	
• du plan	124
• orthonormé	124
représentation graphique	
• d'une fonction	26
• d'une série statistique	174
résolution graphique (de systèmes d'équations)	128
réunion d'intervalles	10

S

sens de variation d'une fonction	30
sens d'un vecteur	148
série statistique	172
simulation	202, 216

sinus d'un nombre réel	72
somme de vecteurs	150
systèmes d'équations linéaires	128

T

tableau de signe (de $ax + b$)	68
tableau de variation d'une fonction	30
théorème	
• de Pythagore	122
• de Thalès	122
• des milieux	122
translation	148
trigonométrie	72

V

vecteur(s)	
• colinéaires	154
• du plan	148
• égaux	148, 152
• nul	148
• opposés	148

Imprimé en France par Loire Offset Titoulet à Saint-Etienne
Dépôt légal : janvier 2011 - N° d'éditeur 1074896



Pour réviser toute l'année
et progresser à son rythme !

- **Réviser** toutes les **notions** du programme.
- **Progresser** plus vite avec des **méthodes** efficaces et des **clés** pour acquérir les bons réflexes.
- **Éclaircir** les points-clés grâce aux **rubriques d'aide** : Gagnez des points !, L'astuce du prof, Piège à éviter,...
- **Entraînez-vous** à l'aide d'**exercices** variés de difficulté croissante et de leurs **corrigés** commentés.

Testé et approuvé
par les élèves

« On se situe facilement dans le livre. On sait direct où regarder. »

Adrien, 15 ans

« Avec les couleurs, on va directement à l'essentiel,
à ce dont on a besoin. »

Clara, 15 ans

« Les choses importantes sont encadrées :
les conseils, les méthodes, ... »

Alice, 15 ans

ABC du Bac : une gamme complète pour réussir

Réussite

- Mathématiques 2^{de}
- Physique-Chimie 2^{de}
- Histoire-Géographie 2^{de}
- SVT 2^{de}
- Français 2^{de}
- Anglais 2^{de}

KO-626-3

11,30 €

ISBN : 978-2-09-183163-3



9 782091 881683



Compléments numériques sur
www.abcbac.com

Nathan