

Annales Bac 2010

Tout en
couleurs

Sujets et corrigés

Maths

Obligatoire et spécialité

T_{le}S

22 sujets complets/109 exercices
sur tout le programme,
avec tous les **conseils de méthode**
et les **corrigés détaillés**
pour réussir le bac !



GRATUIT ! Sujets corrigés en plus à télécharger.

hachette

inclus
sujets du
BAC 2009

Annales Bac 2010

Mouly

Sujets et corrigés

Maths

Obligatoire et spécialité

T^{le}S

Sandrine Bodini-Lefranc

Professeur agrégé de Mathématiques
Professeur en classes préparatoires PSI

Sandrine Dubois

Professeur certifié de Mathématiques
Professeur en lycée



Pour Hachette Éducation, le principe est d'utiliser des papiers composés de fibres naturelles, renouvelables, recyclables, fabriquées à partir de bois issus de forêts qui adoptent un système d'aménagement durable.

En outre, Hachette Éducation attend de ses fournisseurs de papier qu'ils s'inscrivent dans une démarche de certification environnementale reconnue.

Conception graphique de la couverture : Alain Vambacas

Ligne graphique de l'intérieur : Jehanne Marie Husson

Réalisation

Schémas : Rémi Picard

Mise en pages : Laser Graphie

www.hachette-education.com

ISBN : 978-2-01-169944-2

© Hachette-Livre 2009, 43 quai de Grenelle, 75905 Paris cedex 15.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

AVANT-PROPOS

Ces annales ont été préparées pour permettre un entraînement continu tout au long de l'année de terminale S. Elles sont conçues pour vous aider à acquérir la rigueur nécessaire, non seulement à la réussite à l'épreuve de mathématiques du Baccalauréat, mais aussi à la poursuite sans encombre d'études supérieures.

Nous souhaitons que cet ouvrage soit le compagnon indispensable de votre préparation au Baccalauréat et qu'il vous soit particulièrement utile lors de vos révisions de contrôle ou de bacs blancs. Pour ce faire, il vous propose :

Une aide pour votre préparation

Des **Conseils généraux** (page 16) vous indiquent une méthode de travail à suivre durant l'année de terminale. Vous y trouverez aussi des recommandations très utiles pour gérer au mieux le jour de l'épreuve.

Une thématique détaillée

Un **Tableau des sujets par thèmes du programme** (page 12) vous permet de choisir les exercices à travailler en fonction de l'avancée de vos connaissances en cours d'année scolaire. Chaque grande partie du programme y est répertoriée.

Des sujets complets

Nous avons réuni **22 sujets complets** et récents du baccalauréat (soit **plus de 100 exercices**) qui comprennent presque tous l'exercice de spécialité. Ces sujets ont été retenus en fonction des critères suivants :

- Le programme de mathématiques de terminale S (aussi bien l'enseignement obligatoire que l'enseignement de spécialité) est largement couvert.
- Une même notion est abordée plusieurs fois afin de la voir sous différents angles et, par conséquent, de mieux l'assimiler.
- Des exercices de toute nature sont proposés, qu'il s'agisse :
 - d'exercices de type standard : une seule partie du cours y est abordée (le barycentre, par exemple) ;
 - d'exercices de type mixte : plusieurs thèmes y sont mélangés (les nombres complexes et les suites, par exemple) ;
 - d'exercices de type Q.C.M. ;
 - ou de problèmes concrets faisant appel à d'autres disciplines (*physique* ou *sciences de la vie et de la terre*).

De plus, pour chaque exercice, une durée estimée de résolution figure au début du sujet. Ce minutage est établi en fonction du nombre de points attribués à l'épreuve. Vous pouvez ainsi vérifier que vous avez le niveau d'entraînement et la rapidité nécessaires le jour de l'épreuve.

... et intégralement corrigés

- Tous les **sujets** sont **entièrement corrigés**. Les Q.C.M. pour lesquels le candidat n'a généralement pas à justifier ses réponses le sont aussi et, ce, de manière approfondie.
- Les corrigés sont rédigés dans un style rigoureux qui illustre le niveau que vous devez atteindre pour élaborer un raisonnement scientifique correct.
- Ces corrigés contiennent aussi de nombreux rappels de cours et de méthode (qui apparaissent dans des encadrés sur fond de couleur) : ceux-ci doivent vous aider à synthétiser votre cours et à compléter vos fiches (voir page 16, **Conseils généraux**).

Nous souhaitons vivement que ce livre réponde à votre attente et participe à votre réussite en terminale S, au baccalauréat et après !

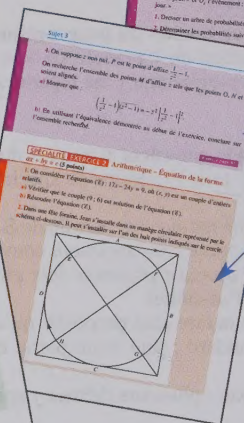
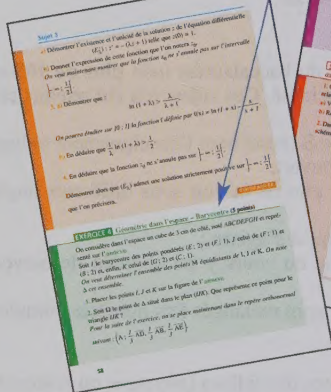
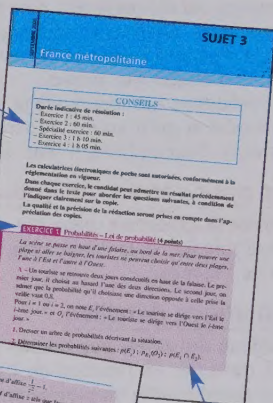
Bon courage...

Les auteurs

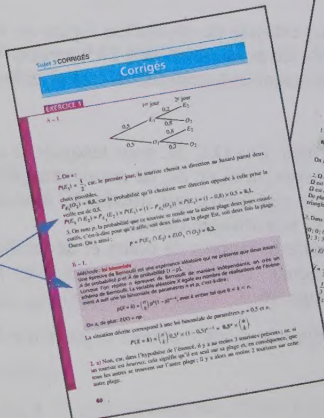
MODE D'EMPLOI

Le temps de réalisation
conseillé pour
chaque exercice.

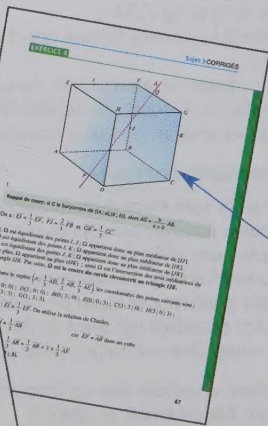
Détail du thème principal
et des sous-thèmes abordés
dans chaque exercice.



Une couleur
particulière
pour chaque
thème du
programme.



Corrigés
détaillés,
et complétés
de rappels
de cours et
de conseils,
sur fond
coloré.



Schémas
en couleurs.

SOMMAIRE

Avant-propos	3
Tableau des sujets.....	12

Se préparer à l'épreuve du Bac

Présentation de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat.....	15
Conseils généraux.....	16

S'entraîner sur les sujets d'écrit

Les sujets de 2009 sont présentés et corrigés à partir de la page 348.

SUJET 1 Amérique du Sud – Novembre 2008.....	21
EXERCICE 1 : Nombres complexes – Transformations géométriques, Lieux géométriques.....	21
EXERCICE 2 : Géométrie dans l'espace – Produit scalaire.....	22
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Géométrie dans l'espace	23
EXERCICE 3 : Analyse – Fonction logarithme népérien, Croissance comparée, Limites.....	24
EXERCICE 4 : Analyse – Équations différentielles, Fonction exponentielle	25
Corrigés	26

SUJET 2 Nouvelle-Calédonie – Novembre 2008.....	37
EXERCICE 1 : Géométrie dans l'espace – Produit scalaire.....	37
EXERCICE 2 : Nombres complexes – Forme trigonométrique, Interprétation géométrique.....	38
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Nombres complexes	39
EXERCICE 3 : Probabilités – Variables aléatoires, Loi binomiale	40
EXERCICE 4 : Analyse – Intégration, Fonctions.....	41
EXERCICE 5 : Analyse – Fonctions, Suites.....	42
Corrigés	43

SUJET 3 France métropolitaine – Juin 2008	54
EXERCICE 1 : Analyse – Logarithme népérien, Intégration	54

EXERCICE 2 : Géométrie dans l'espace – Barycentre	55
EXERCICE 3 : Probabilités – Conditionnement, Loi continue, Intégration	56
EXERCICE 4 : Nombres complexes – Le plan complexe, Lieux géométriques	57
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 4 : Nombres complexes – Similitudes	57
Corrigés	58
SUJET 4 Asie – Juin 2008	67
EXERCICE 1 : Géométrie dans l'espace	67
EXERCICE 2 : Probabilités – Suites, Récurrence, Convergence	68
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Arithmétique – Congruence, Équation de la forme $ax + by = c$	69
EXERCICE 3 : Nombres complexes – Lieux géométriques	72
EXERCICE 4 : Analyse – Fonction exponentielle, Intégration par parties	72
Corrigés	75
SUJET 5 Liban – Juin 2008	90
EXERCICE 1 : Probabilités – Conditionnement	90
EXERCICE 2 : Nombres complexes, Géométrie dans l'espace	91
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Nombres complexes, Arithmétique, Géométrie dans l'espace	92
EXERCICE 3 : Analyse – Fonction logarithme népérien, Suites	94
EXERCICE 4 : Analyse – Fonction exponentielle, Intégration	95
Corrigés	96
SUJET 6 La Réunion – Juin 2008	108
EXERCICE 1 : Probabilités – Loi binomiale, Probabilité conditionnelle	108
EXERCICE 2 : Analyse – Intégration	109
EXERCICE 3 : Analyse – Suites	111
EXERCICE 4 : Nombres complexes – Transformations géométriques, Forme trigonométrique	111
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 4 : Nombres complexes, Arithmétique	112
Corrigés	113
SUJET 7 Pondichéry – Avril 2008	123
EXERCICE 1 : Analyse – Intégration	123
EXERCICE 2 : Nombres complexes – Lieux géométriques, Transformations géométriques	124
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Nombres complexes – Géométrie, Similitudes	125

EXERCICE 3 : Géométrie dans l'espace – Barycentre	126
EXERCICE 4 : Analyse – Équations différentielles, Suites, Fonction exponentielle	127
Corrigés	128
SUJET 8 Nouvelle-Calédonie – Novembre 2007	143
EXERCICE 1 : Nombres complexes – Formes algébriques et trigonométriques, Lieux géométriques	143
EXERCICE 2 : Probabilités – Loi binomiale, Loi exponentielle	144
EXERCICE 3 : Analyse – Tangente, Théorème des gendarmes	145
EXERCICE 4 : Géométrie dans l'espace – Distance, Représentation paramétrique d'une droite	147
Corrigés	148
SUJET 9 France métropolitaine – Septembre 2007	159
EXERCICE 1 : Analyse – Fonctions, Dérivation	159
EXERCICE 2 : Analyse – Suites	160
EXERCICE 3 : Nombres complexes – Le plan complexe, Forme algébrique, trigonométrie et exponentielle	161
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 3 : Arithmétique – Congruence	162
EXERCICE 4 : Analyse – Équations différentielles	162
Corrigés	163
SUJET 10 France métropolitaine – Juin 2007	171
EXERCICE 1 : Géométrie dans l'espace – Représentation paramétrique d'une droite, Distance	171
EXERCICE 2 : Analyse – Intégration, Fonction exponentielle	172
EXERCICE 3 : Nombres complexes – Résolution algébrique, Transformations géométriques	172
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 3 : Nombres complexes – Similitudes	173
EXERCICE 4 : Probabilités – Loi de probabilité, Conditionnement	174
EXERCICE 5 : Analyse – Suites, Fonction logarithme népérien	175
Corrigés	176
SUJET 11 Pondichéry – Avril 2007	189
EXERCICE 1 : Géométrie dans l'espace – Barycentre	189
EXERCICE 2 : Nombres complexes – Lieux géométriques	190
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Nombres complexes – Similitudes	191
EXERCICE 3 : Analyse – Fonction logarithme népérien, Intégration, Suites	191

SOMMAIRE

EXERCICE 4 : Probabilités – Fonction exponentielle	192
Corrigés	193
SUJET 12 Nouvelle-Calédonie – Novembre 2006	207
EXERCICE 1 : Probabilités – Loi binomiale, Probabilités conditionnelles	207
EXERCICE 2 : Nombres complexes – Résolution algébrique, Interprétation géométrique	208
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Nombres complexes – Géométrie	208
EXERCICE 3 : Analyse – Suites	209
EXERCICE 4 : Géométrie dans l'espace – Barycentre	210
Corrigés	212
SUJET 13 Amérique du Sud – Novembre 2006	224
EXERCICE 1 : Géométrie dans l'espace – Distance, Représentation paramétrique	224
EXERCICE 2 : Nombres complexes – Interprétation géométrique	225
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Arithmétique – Équation de la forme $ax + by = c$	226
EXERCICE 3 : Probabilités – Loi binomiale	227
EXERCICE 4 : Analyse – Fonction logarithme népérien, Suites	228
Corrigés	229
SUJET 14 France métropolitaine – Septembre 2006	240
EXERCICE 1 : Probabilités – Loi de probabilité	240
EXERCICE 2 : Nombres complexes – Interprétation géométrique	241
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Arithmétique – Équation de la forme $ax + by = c$	242
EXERCICE 3 : Analyse – Équations différentielles, Fonction logarithme népérien	243
EXERCICE 4 : Géométrie dans l'espace – Barycentre	244
Corrigés	246
SUJET 15 Polynésie française – Septembre 2006	256
EXERCICE 1 : Nombres complexes – Interprétation géométrique, Transformation géométrique	256
EXERCICE 2 : Probabilités – Conditionnement	257
EXERCICE 3 : Analyse – Fonction exponentielle, Intégration	258
EXERCICE 4 : Géométrie dans l'espace – Produit scalaire, Barycentre ..	259
Corrigés	259

SUJET 16	France métropolitaine – Juin 2006	268
EXERCICE 1 :	Géométrie dans l'espace – Barycentre.....	268
EXERCICE 2 :	Analyse – Fonction exponentielle, Intégration	269
EXERCICE 3 :	Nombres complexes – Lieux géométriques	269
SPECIALITÉ – EXERCICE 3 :	Arithmétique – Théorème de Gauss.....	270
EXERCICE 4 :	Probabilités – Conditionnement.....	271
Corrigés		272
SUJET 17	Pondichéry – Avril 2006	283
EXERCICE 1 :	Analyse – Fonctions, Suites	283
EXERCICE 2 :	Nombres complexes – Suites	284
SPECIALITÉ – EXERCICE 2 :	Nombres complexes – Similitudes	285
EXERCICE 3 :	Géométrie dans l'espace – Produit scalaire	286
EXERCICE 4 :	Analyse, Probabilités – Équations différentielles.....	287
Corrigés		288
SUJET 18	France métropolitaine – Septembre 2005.....	301
EXERCICE 1 :	Analyse – Fonction exponentielle, Équations différentielles	301
EXERCICE 2 :	Nombres complexes – Analyse	302
SPECIALITÉ – EXERCICE 2 :	Arithmétique, Similitudes.....	304
EXERCICE 3 :	Géométrie dans l'espace – Barycentre	305
EXERCICE 4 :	Probabilités – Loi de probabilité	305
Corrigés		307
SUJET 19	France métropolitaine – Juin 2005	318
EXERCICE 1 :	Analyse – Suites	318
EXERCICE 2 :	Nombres complexes – Transformations géométriques	319
EXERCICE 3 :	Probabilités – Conditionnement, Loi de probabilité	320
EXERCICE 4 :	Analyse – Fonction exponentielle, Équations différentielles.....	321
Corrigés		322
SUJET 20	Nouvelle-Calédonie – Novembre 2004.....	333
EXERCICE 1 :	Nombres complexes – Résolution algébrique, Transformations géométriques	333
EXERCICE 2 :	Géométrie dans l'espace – Barycentre	334

SOMMAIRE

EXERCICE 3 : Analyse – Fonction exponentielle, Croissance comparée..	335
EXERCICE 4 : Analyse – Suites, Fonctions.....	336
Corrigés	336

SUJET 21 Pondichéry – Avril 2009..... 348

EXERCICE 1 : Analyse – Fonction exponentielle, Suites, Intégration.....	348
EXERCICE 2 : Nombres complexes – Transformations géométriques, Lieux géométriques.....	349
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Nombres complexes – Arithmétique.....	350
EXERCICE 3 : Géométrie dans l'espace – Barycentre.....	351
EXERCICE 4 : Probabilités – Loi binomiale, Probabilité conditionnelle..	351
Corrigés	352

SUJET 22 France – Juin 2009..... 362

EXERCICE 1 : Analyse – Suites	362
EXERCICE 2 : Analyse – Fonction exponentielle, Fonction logarithme népérien, Croissance comparée, Intégration	363
EXERCICE 3 : Probabilités – Variables aléatoires, Indépendance, Loi de probabilité.....	364
EXERCICE 4 : Nombres complexes – Le plan complexe, Transformations géométriques, Lieux géométriques.....	365
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 4 : Arithmétique.....	367
Corrigés	367

S'entraîner sur les sujets d'oral

ORAL Sujet 1..... 379

EXERCICE 1 : Nombres complexes – Lieux géométriques	379
EXERCICE 2 : Analyse – Intégration par parties	379
EXERCICE 3 : Probabilités – Probabilité conditionnelle.....	379
Corrigés	380

ORAL Sujet 2..... 383

EXERCICE 1 : Nombres complexes	383
EXERCICE 2 : Analyse – Suites, Intégration	383
EXERCICE 3 : Analyse – Interprétation graphique.....	383
Corrigés	385

ORAL	Sujet 3 (spécialité)	388
EXERCICE 1 :	Analyse – Fonction exponentielle	388
EXERCICE 2 :	Probabilités	388
EXERCICE 3 :	Nombres complexes – Similitudes	388
Corrigés		389

ORAL	Sujet 4 (spécialité)	391
EXERCICE 1 :	Analyse – Fonction exponentielle	391
EXERCICE 2 :	Géométrie dans l'espace – Barycentre	391
EXERCICE 3 :	Arithmétique – Équation de la forme $ax + by = c$	391
Corrigés		392

Épreuve pratique

ÉPREUVE PRATIQUE	Sujet 1	395
ÉPREUVE PRATIQUE	Sujet 2	397
ÉPREUVE PRATIQUE	Sujet 3	399
ÉPREUVE PRATIQUE	Sujet 4	402

Annexe

Formulaire	407
-------------------------	-----

TABLEAU DES SUJETS PAR THÈMES DU PROGRAMME

Les nombres dans les carrés bleus correspondent aux numéros de sujets, ceux à la couleur aux numéros d'exercices.

THÈMES ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE		SUJETS																					
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ANALYSE	Suites																						
	Variations					2	3							3	4						4	1	1
	Limites		5		2	3				2				3	3	4		3	1, 2		4	1	1
	Théorème des gendarmes																						
	Récurrance				2	3	3	4		2				3							1	4	1
Fonctions	Suites adjacentes				2	3				2													
	Suites majorées, minorées				2	3				2													
	Convergence		5		2	3		4		2				3	3	4		1, 3		1	4	1	1
	Tangente					3	2		3									1	2	1, 2	3	1	2
	Limites		3, 4	4, 5		4	1, 4	2								2		4	2	4	3	1	2
Équations différentielles	Asymptote																						
	Théorème des valeurs intermédiaires																						
	Dérivation		3, 4	4		4	3	2		1							1	2	1, 2		3	1	2
	Equation $f(x) = m$																						
Fonction exponentielle																							
Fonction logarithme népérien																							
Fonction puissance																							
Croissance comparée																							
Intégration																							
Intégration par parties																							

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe	1	2	4	3	3															2	4
Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle	1	2		3	2	2	1	3						3	2	2				2	4
4Résolution algébrique			4						3	2										1	
Transformations géométriques	1	2			2	3	2		2	2			1					2	1	2	4
Interprétation géométrique	1	2		3	2	3					2	2	2	1	3	2	2	2	1	2	4
Lieux géométriques			4	3	3	2	1		2					3		2	2	1	2	4	

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Produit scalaire	2	1			2		3								1						
Application	2	1	2				4	1			1			4		3	3			3	
Distance	2	1	2	1							1					1	3	3		3	
Équation cartésienne	2	1	2	1																	
Barycentre										1	4		4						2	3	
Application							3														
Représentation paramétrique d'une droite	2		2	1				4	1	1	4	1		4	1	3			2		
Intersection dans l'espace	2		2	1	2		3				4	1		4		3			2		

PROBABILITÉS

Conditionnement	3	3	2	1	1						1	3		2		4	4	3		4	
Probabilité conditionnelle	3																				
Variables aléatoires	3			1	1														4	3	
Indépendance					1																
Formules des probabilités totales	3		2	1	1		2	4			3				4	4			4		
Loi de probabilité	3		2																4	3	
Combinatoire	3		2		1																
Binôme de Newton																					
Loi binomiale	3				1		2	4	4	1	3	1				4	3		4	3	
Loi continue																					
Loi uniforme																					
Loi exponentielle			3				2														

ARITHMÉTIQUE												
Nombres premiers				2	2	4		3				4
PGCD, PPCM				2								
Théorème de Bézout							4		3			
Théorème de Gauss				2	2	4	4		3			4
Équation de la forme $ax + by = c$				2	2	4	4		2	2		4
Divisibilité					2	4		3		3		2
												4
NOMBRES COMPLEXES - GÉOMÉTRIE												
Similitudes		2	4		2	4	2		3	2	2	2
Isométries												
GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE	2				2							

PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES AU BACCALAURÉAT

Le déroulement de l'épreuve

Le premier groupe : une épreuve écrite de 4 heures

Lors de cette épreuve écrite sont évaluées les compétences suivantes :

- la rigueur du raisonnement ;
- la clarté et la précision de la rédaction ;
- le choix des méthodes de démonstration utilisées : il arrive fréquemment que, pour certaines questions, plusieurs démonstrations soient possibles. Le temps imparti pour la résolution étant calculé en fonction de la méthode la plus courte, si vous ne choisissez pas celle-là, vous êtes pénalisé ;
- la bonne application des mathématiques à des problèmes concrets choisis dans différents domaines (*physique, économie, biologie, etc.*) ;
- la connaissance des résultats de cours : pour certains exercices, le sujet peut comprendre une question de cours, une démonstration. On peut, par exemple, vous demander de démontrer que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ou d'utiliser le schéma de démonstration de cette limite pour obtenir la valeur

d'une autre limite.

Épreuve écrite	
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité	Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité
2 à 4 exercices communs à tous les candidats (environ 15 points)	
+ un exercice portant sur le programme d'enseignement obligatoire (environ 5 points)	+ un exercice portant sur le programme d'enseignement de spécialité (environ 5 points)
Coefficient : 7	Coefficient : 9

Le deuxième groupe : l'épreuve orale de rattrapage

■ Tout candidat qui n'est pas admis à l'issue des épreuves du premier groupe est autorisé à passer les épreuves orales du deuxième groupe si sa moyenne est supérieure à 8/20. Il doit alors choisir deux matières parmi toutes celles faisant l'objet d'épreuves écrites.

■ Dans le cas où son choix se porterait sur l'épreuve orale de mathématiques :

- celle-ci dure 20 minutes après une préparation de 20 minutes également ;
- la note de l'épreuve orale de mathématiques remplace celle de l'épreuve écrite si elle lui est supérieure.

CONSEILS GÉNÉRAUX

Le travail durant l'année scolaire

Du bon sens

- Il vous faut absolument travailler de manière régulière pendant toute l'année, non seulement pour affronter l'épreuve de mathématiques en toute sérénité, mais aussi pour pouvoir aborder les études supérieures avec les connaissances et, surtout, le recul nécessaires à l'approfondissement des notions vues en terminale S.
- Il est impératif d'apprendre son cours et les démonstrations afférentes, l'un des exercices du baccalauréat pouvant porter dessus.

... et de la méthode

Des fiches de cours

Si vous avez du mal à vous retrouver dans votre cours, vous devez vous astreindre à faire des fiches de cours dans lesquelles vous ferez figurer :

- Les définitions : c'est le vocabulaire de base qui vous permet de comprendre les questions et les consignes des exercices.
- Les théorèmes et les formules en soulignant particulièrement les hypothèses : celles-ci vous indiquent si vous pouvez ou non utiliser un théorème. La vérification de ces hypothèses est évaluée dans la rigueur et la précision de la rédaction.
- Les démonstrations : il vous faut dégager l'articulation ou le schéma de démonstration (en philosophie, cela s'appelle le plan) et, une fois cette articulation comprise et apprise, il est beaucoup plus simple de combler les « trous » plutôt que d'essayer d'apprendre la démonstration ligne par ligne.

Des fiches de méthode

Si vous avez du mal à synthétiser votre cours, vous devez faire des fiches de méthode.

Exemple : les différentes méthodes pour démontrer la croissance d'une fonction

Sur cette fiche, vous allez regrouper toutes les manières possibles de déterminer les variations d'une fonction : définition, fonctions associées (avec la composée), dérivation.

Vous procédez de même pour tous les grands thèmes du programme. Dès que vous résolvez un exercice, vous devez vérifier si la méthode utilisée a été référencée.

Ces fiches vont vous aider à progresser assez rapidement, car :

- Elles permettent de dégager des schémas de démonstration selon les questions posées. Vous allez vous apercevoir que les exercices obéissent, pour leur très grande majorité, à la même logique. Ce sont vos fiches méthodes qui vont vous permettre de comprendre cette logique.
- Vous allez aussi réaliser que, sous des formes différentes, c'est souvent la même méthode qui est utilisée : selon que le cadre de l'exercice est analytique, algébrique, graphique ou géométrique, le vocabulaire n'est pas le même, mais la méthode de résolution reste identique.

Comment aborder un exercice durant l'année ?

Un moment clé : la lecture de l'énoncé

- Lisez attentivement tout l'énoncé. Celui-ci peut contenir des résultats intermédiaires susceptibles de vous indiquer dans quel esprit l'exercice a été écrit et, donc, de vous guider vers la méthode la plus judicieuse à employer.
- Surlignez toutes les hypothèses de l'exercice. C'est à partir de celles-ci que vous pourrez bâtir une démonstration à l'aide de théorèmes les vérifiant.

Une résolution en plusieurs étapes

- La résolution d'un exercice ne se fait pas d'une traite, mais en plusieurs phases :
 - prenez les questions une par une ;
 - résolvez celles que vous savez faire et, dans un premier temps, admettez les autres pour pouvoir avancer dans votre exercice ;
 - puis, après avoir réfléchi sur chaque question, changez de couleur de stylo (en utilisant, par exemple, un stylo vert) ; prenez vos fiches ou votre cours, et essayez de résoudre les questions manquantes ;
 - une fois votre travail terminé, lisez la correction de votre exercice en complétant si nécessaire votre rédaction avec un stylo de couleur différente, par exemple rouge. Au moindre doute sur la formulation ou si votre démonstration est différente de celle de la correction, demandez à votre professeur de mathématiques de vous expliquer le point litigieux. Ne vous contentez pas d'une lecture passive qui consisterait en une simple vérification des résultats.
- La différence de couleur de stylo va vous permettre de cibler vos problèmes :*
- *Si vous avez peu de vert ou de rouge : il vous faut juste un peu d'entraînement.*
 - *Si vous avez beaucoup de vert, il vous faut alors absolument approfondir la notion étudiée et apprendre votre cours.*
 - *Si vous avez beaucoup de rouge : soit vous avez un problème de rédaction (les hypothèses ne sont pas vérifiées), soit vous n'avez pas bien compris ou appris votre cours. Demandez alors de l'aide à votre professeur.*

Le jour de l'épreuve

Pour bien débiter

- Lisez attentivement la totalité du sujet avec un crayon à papier afin de marquer, dans la marge, la méthode que vous allez utiliser pour chaque question.
- Cette étape est indispensable pour deux raisons : la première, pour trier les questions et être certain de pouvoir traiter toutes les questions que vous savez faire dans le temps imparti ; la seconde, pour pouvoir vous raccrocher à vos annotations si vous veniez à paniquer pendant l'épreuve.*
- Si vous perdez pied dès le début d'épreuve, commencez par les graphiques. Il s'agit généralement de questions que l'on sait traiter ; cela vous permet de vous concentrer à nouveau et de reprendre confiance en vous.
- Ne négligez surtout pas les graphiques ! Ils peuvent représenter un nombre de points non négligeable. Tracez-les avec soin.
- Attention : respectez les unités graphiques quand elles sont imposées.**

Des recommandations pratiques à ne pas négliger

- Utilisez la même numérotation que celle de l'énoncé.
- Prenez une feuille par exercice : cela vous permettra de reprendre ultérieurement une question plus facilement et plus lisiblement pour le correcteur.
- Écrivez proprement en évitant les fautes d'orthographe.
- Utilisez les notations de l'énoncé et, si vous en introduisez d'autres, explicitez-les.
- N'oubliez pas votre matériel : calculatrice, matériel de géométrie, crayon, gomme, stylos, etc.
- Gérez correctement votre temps : un exercice sur 5 points doit être fait en plus ou moins une heure.
- Conservez au moins 5 minutes pour la relecture attentive de votre production et surlignez vos résultats.

Pour conclure

Plus généralement, l'épreuve du bac S est une épreuve d'endurance et elle doit donc se préparer comme telle :

- Une bonne hygiène de vie est nécessaire avant l'épreuve : des repas équilibrés à heures fixes, de bonnes nuits de sommeil et un peu de sport pour « s'oxygéner » le cerveau.
- Si les méthodes de travail ont été respectées toute l'année, il n'y a aucune raison de passer ses nuits à réviser ; vous pouvez simplement relire vos fiches pour vous tranquilliser.
- Le jour de l'épreuve :
 - prenez un bon petit déjeuner ;
 - apportez des boissons : n'oubliez pas que l'épreuve se déroule en été ! Buvez de petites gorgées tout au long des quatre heures. Si vous commencez à avoir soif, c'est déjà trop tard ! Cela signifie que vous commencez à vous déshydrater et, par conséquent, à vous déconcentrer ;
 - apportez éventuellement à manger en privilégiant des aliments à assimilation rapide et en évitant ce qui fait du bruit (papier de bonbons, chips, ...) !

L'épreuve orale de rattrapage

- L'épreuve orale de rattrapage en mathématiques se déroule en deux temps :
 - un temps de préparation : 20 minutes ;
 - un temps de passage : 20 minutes

La note obtenue à l'oral de rattrapage remplace celle de l'écrit et elle est donc affectée des coefficients de l'écrit : 7 pour les non-spécialistes et 9 pour ceux ayant choisi l'enseignement de spécialité.

■ Cet oral est composé d'au moins deux exercices portant sur différentes parties du programme et sur des compétences essentielles que vous devez avoir acquises ; les lycéens ayant suivi l'enseignement de spécialité auront à traiter un exercice de spécialité.

Le déroulement de l'épreuve

- Un dialogue s'instaure entre vous et l'examineur durant l'oral. L'examineur peut ainsi :
 - évaluer vos compétences,
 - juger de votre connaissance du cours et des formules,
 - vous aider à rattraper une erreur de calcul ou de raisonnement durant l'épreuve afin de vous permettre de poursuivre l'exercice.

Une fois les exercices évalués, l'examineur vous pose des questions directes, qui demandent des réponses tout aussi directes. Tous les domaines du programme peuvent être abordés.

■ Des Q.C.M. sont également susceptibles d'être posés à l'oral ; en revanche, contrairement à l'écrit, une justification de vos réponses peut être demandée.

Quelques conseils

■ Vous ne devez pas tout rédiger sur votre brouillon, mais apporter toutes les justifications nécessaires à l'examineur lors de votre oral.

■ Il est évidemment indispensable de bien connaître votre cours !

■ Si vous ne savez pas répondre à une question, dites-le. L'examineur la reformulera ou vous donnera une indication. Mais si vous répondez n'importe quoi, vous laisserez une très mauvaise impression.

■ N'oubliez pas de dire « bonjour » et « au revoir » à l'examineur avec le sourire, même s'il vous en coûte après une épreuve ratée.

■ L'épreuve orale de rattrapage a lieu au mois juillet et, même s'il fait très chaud, ayez une tenue correcte : les vêtements trop décontractés sont à proscrire.

■ N'oubliez pas de vous munir d'une bouteille d'eau et de quelque chose à manger ; en effet, vous avez deux matières à passer à l'oral et vous pouvez être amené(e) à attendre un certain temps entre les deux épreuves.

L'épreuve pratique

■ Pendant l'année scolaire 2008-2009, l'épreuve pratique de mathématiques n'en était encore qu'au stade de l'expérimentation. Pour le moment, sa notation ne figure que sur le livret scolaire du candidat au baccalauréat.

■ Cette épreuve pourrait se généraliser pour le baccalauréat 2010. Elle serait alors intégrée de la façon suivante : lors de l'épreuve pratique, une note sur 20 serait attribuée, note qui serait par la suite ramenée sur 4.

La note finale de mathématiques se calculerait donc à partir de deux notes : celle de l'écrit sur 16 et celle de l'épreuve pratique sur 4.

■ L'organisation de l'épreuve se ferait selon les modalités suivantes

- le ministère de l'Éducation nationale mettrait une banque de sujets, mise à jour tous les ans, à la disposition des enseignants ;
- les enseignants devraient alors choisir un certain nombre de sujets ;
- les élèves passeraient par groupe de quatre avec un ou deux examinateurs ;
- ils auraient à leur disposition un ordinateur contenant au moins deux logiciels : un tableur et un logiciel de géométrie dynamique ; la calculatrice serait autorisée ;
- l'épreuve durerait une heure ;
- une production écrite serait demandée.

Attention ! Il est indispensable de s'informer auprès de son professeur pour savoir si cette épreuve est obligatoire ou pas pour le baccalauréat 2010.

Vous trouverez dans cet ouvrage quatre sujets qui vous permettront de vous familiariser avec cette épreuve pratique.

Amérique du Sud

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 60 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 35 min.
- Exercice 4 : 1 h 25 min.

EXERCICE 1 Nombres complexes – Transformations géométriques,
Lieux géométriques (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1 + 2i$, $b = 1 + 3i$, $c = 4i$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A .
2. Soit I le milieu de $[BC]$ et z_I son affixe.
- a) Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\frac{z - z_I}{z - a}$ soit un réel ?
- b) Déterminer l'unique réel x tel que $\frac{x - z_I}{x - a}$ soit un réel.
- c) Soit $z_{\vec{AI}}$ l'affixe du vecteur $\vec{AI}$; donner une forme trigonométrique de $z_{\vec{AI}}$.
3. a) Soit G le point d'affixe -3 . Montrer qu'il existe deux rotations de centre G , dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.
- b) Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'écriture complexe de r_1 .

4. Soit A', B' et C' les images respectives de A, B , et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.

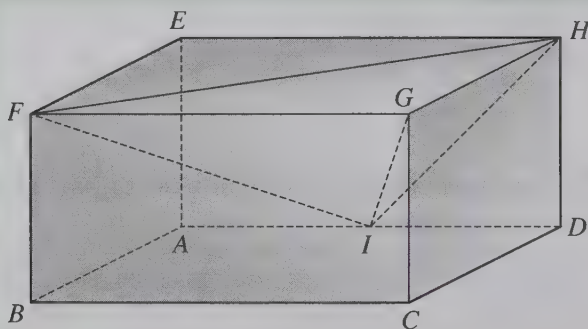
Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ?
En déduire que $b' = \overline{c'}$.

Corrigé page 26

EXERCICE 2 Géométrie dans l'espace – Produit scalaire (5 points)

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que : $AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$.

On appelle I le milieu de $[AD]$.



L'espace est muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F , G , H .

2. a) Montrer que le volume V du tétraèdre $GFIH$ est égal à $\frac{1}{3}$.

b) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I .

En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH) .

3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2 ; 1 ; -1)$.

a) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH) .

b) En déduire une équation cartésienne du plan (FIH) .

c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH) .

4. a) La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

b) Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH) .

5. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.

Soit Γ la sphère de centre G passant par K .

Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?

(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection.)

Corrigé page 27

SPECIALITÉ EXERCICE 2 Géométrie dans l'espace (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées $(0; 0; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(1; 1; 0)$, et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -t' \\ z = -2. \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D' .

1. Une équation de S

a) Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite D .

Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x; y; z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D . Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\frac{-x+y}{2}; \frac{x-y}{2}; 2-z\right)$.

En déduire MH^2 en fonction de x, y et z .

Soit K le projeté orthogonal de M sur D' . Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.

c) Montrer qu'un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à S si, et seulement si, $z = -\frac{1}{4}xy$.

2. Étude de la surface S d'équation $z = -\frac{1}{4}xy$

a) On coupe S par le plan (xOy) . Déterminer la section obtenue.

b) On coupe S par un plan P parallèle au plan (xOy) .

Quelle est la nature de la section obtenue ?

c) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.

On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$.

Quelle est la nature de la section obtenue ?

Corrigé page 30

EXERCICE 3 Analyse – Fonction logarithme népérien, Croissance comparée, Limites (3 points)

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, positive sur $[1; +\infty[$, et vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln 1 = 0 ; \\ \text{pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y, \ln(xy) = \ln x + \ln y ; \\ \text{pour tout réel strictement positif } x, [\ln(x)]' = \frac{1}{x} ; \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{array} \right.$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

a) Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$.

b) En déduire le signe de f , puis que, pour tout $x > 1$:

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}.$$

c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant la question **1.**, déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n .

Corrigé page 32

EXERCICE 4 Analyse – Équations différentielles, Fonction exponentielle (7 points)

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' + y = 0 \quad (E),$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x + 1) \quad (E').$$

a) Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$$

soit solution de (E') .

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que g est solution de l'équation (E') si, et seulement si, $g - f$ est solution de l'équation (E) .

Résoudre l'équation (E') .

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x).$$

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h .

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.

a) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Γ .

b) Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Corrigé page 33

Corrigés

EXERCICE 1

1. On a : $AB = |b - a| = |(1 + 3i) - (-1 + 2i)| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$;

$AC = |c - a| = |4i - (-1 + 2i)| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Ainsi, le triangle ABC est isocèle en A .

2. a) $\frac{z - z_I}{z - a}$ est un réel équivaut à $\text{mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IM}) = \begin{cases} 0 & (\text{mod } 2\pi) \\ \text{ou} \\ \pi & (\text{mod } 2\pi) \end{cases}$ et $M \neq A$,

équivaut à $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MI}) = \begin{cases} 0 & (\text{mod } 2\pi) \\ \text{ou} \\ \pi & (\text{mod } 2\pi) \end{cases}$ et $M \neq A$,

équivaut à M appartient à la droite (AI) privée de A .

L'ensemble des points M recherchés est la droite (AI) privée de A .

b) L'unique réel x tel que $\frac{x - z_I}{x - a}$ soit un réel est l'abscisse du point d'intersection de la droite (AI) avec l'axe des abscisses.

L'affixe du point I est : $\frac{b + c}{2} = \frac{(1 + 3i) + 4i}{2} = \frac{1 + 7i}{2}$.

L'équation de la droite (AI) est de la forme : $y = mx + p$,

avec $m = \frac{\frac{7}{2} - 2}{\frac{1}{2} - (-1)} = 1$, d'où $(AI) : y = x + p$.

A appartient à cette droite et ses coordonnées vérifient donc l'équation ; on obtient $p = 3$.
Finalement, $(AI) : y = x + 3$.

Comme on cherche le point d'intersection entre (AI) et l'axe des abscisses, on résout le système : $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$, ce qui donne $x = -3$.

c) $z_{AI} = z_I - a = \frac{1 + 7i}{2} - (-1 + 2i) = \frac{3}{2}(1 + i)$
 $= \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right).$

3. a) G a pour affixe -3 , donc $\begin{cases} G \text{ appartient à la droite } (AI) \text{ d'après la question 2. b) } \\ \text{et} \\ G \text{ appartient à l'axe des abscisses.} \end{cases}$

Par suite, il existe bien deux rotations de centre G qui transforment la droite (AI) en l'axe des abscisses.

La première rotation a pour mesure d'angle :

$$\begin{aligned}\text{mes}(\overrightarrow{AI}; \vec{u}) &= -\text{mes}(\vec{u}; \overrightarrow{AI}) \pmod{2\pi} \\ &= -\arg z_{\overrightarrow{AI}} \pmod{2\pi} \\ &= -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

La seconde rotation a pour mesure d'angle :

$$\begin{aligned}\text{mes}(\overrightarrow{AI}; -\vec{u}) &= \pi - \text{mes}(\vec{u}; \overrightarrow{AI}) \pmod{2\pi} \\ &= \pi - \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \\ &= \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

b)

Méthode : si A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par la rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ , alors :

$$z_{A'} - z_\Omega = (z_A - z_\Omega) e^{i\theta}.$$

Soit M le point d'affixe z et M' d'affixe z' son image par r_1 , on a :

$$z' - z_G = e^{-i\frac{\pi}{4}} (z - z_G),$$

$$\text{puis } z' = e^{-i\frac{\pi}{4}} (z + 3) - 3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (z + 3) - 3,$$

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ est l'écriture complexe de la rotation } r_1.$$

4. L'axe de symétrie du triangle ABC est la droite (AI) , car le triangle ABC est isocèle en A et, par conséquent, la hauteur issue de A est confondue avec la médiane issue de A .

Or, r_1 transforme la droite (AI) en l'axe des réels d'après la question 3. a) ; l'axe des réels est donc l'axe de symétrie du triangle $A'B'C'$ car une rotation conserve les longueurs.

Par suite, B' est le symétrique de C' par rapport à l'axe des réels et on a donc $b' = \overline{c'}$ par interprétation graphique du nombre conjugué.

EXERCICE 2

$$1. \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}, \text{ donc } F(1; 0; 1).$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE}, \text{ donc } G(1; 2; 1).$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE}, \text{ donc } H(0; 2; 1).$$

$$2. a) V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur du tétraèdre}}{3}$$

$$= \frac{\text{aire de } FGH \times AE}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{FG \times GH}{2} \times AE \quad \text{car le triangle } FGH \text{ est rectangle en } G$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \bullet \text{ On a } IF^2 &= (x_F - x_I)^2 + (y_F - y_I)^2 + (z_F - z_I)^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3, \\ IH^2 &= (x_H - x_I)^2 + (y_H - y_I)^2 + (z_H - z_I)^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2, \\ FH^2 &= (x_H - x_F)^2 + (y_H - y_F)^2 + (z_H - z_F)^2 = (-1)^2 + 2^2 + 0^2 = 5. \end{aligned}$$

On remarque que $FH^2 = IH^2 + IF^2$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en conclut que **le triangle FIH est rectangle en I** .

• Soit K le projeté orthogonal de G sur le plan (FIH) , alors on a $GK = d$,

$$\text{et } V = \frac{1}{3} \times \text{aire de } FIH \times GK = \frac{1}{3} \times \frac{IF \times IH}{2} \times d = \frac{\sqrt{6}}{6} d.$$

$$\text{D'où, en identifiant : } \frac{\sqrt{6}}{6} d = \frac{1}{3} \Leftrightarrow d = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

3. a)

Méthode : on va montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

$$\overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} x_H - x_F \\ y_H - y_F \\ z_H - z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{FH} = 2 \times (-1) + 1 \times 2 + (-1) \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont donc orthogonaux.

$$\overrightarrow{FI} \begin{pmatrix} x_I - x_F \\ y_I - y_F \\ z_I - z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{FI} = 2 \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{FI}$ sont donc orthogonaux.

Par suite, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FIH) , $\vec{n}$ est donc un **vecteur normal au plan (FIH)** .

b)

Rappel de cours :

pour $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul, $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan P admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal au plan } (FIH).$$

En conséquence, une équation cartésienne du plan (FIH) est de la forme :

$$2x + y - z + k = 0.$$

I est un point du plan (FIH) et ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$2x_I + y_I - z_I + k = 0 \Leftrightarrow 2 \times 0 + 1 - 0 + k = 0 \Leftrightarrow 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

En conclusion, **une équation du plan (FIH) est : $2x + y - z - 1 = 0$** .

c)

Rappel de cours : dans un repère orthonormal, la distance du point $A(\alpha; \beta; \gamma)$ au plan P d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est égale à :

$$\frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

On a $d = \frac{|2 \times 1 + 2 - 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. a)

Méthode : si un vecteur est normal à un plan, il est alors colinéaire à tout vecteur normal de ce plan.

On a $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\vec{n}$ si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\vec{n}$,

d'où $\begin{cases} 1 = 2k \\ 2 = k \\ 1 = -k \end{cases}$, ce qui est impossible.

Ainsi, la droite (AG) n'est pas perpendiculaire au plan (FIH).

b)

Rappel de cours : soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ passant par le point A de

coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$; une équation paramétrique de (d) est alors :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

La droite (AG) est caractérisée par l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = t + x_A \\ y = 2t + y_A \\ z = t + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ donc } \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

c) Les coordonnées du point K vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 2t - t - 1 = 0 \\ x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

On en déduit les coordonnées de K $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

5. Γ est une sphère de centre G et de rayon $R = GK$.

$$\text{On a } GK = \sqrt{(x_K - x_G)^2 + (y_K - y_G)^2 + (z_K - z_G)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{6} > d.$$

On constate que le rayon de la sphère de centre G est supérieur à la distance de G au plan (FIH) .

Par suite, l'intersection entre le plan (FIH) et la sphère Γ est un cercle.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

1. a)

Rappel de cours : soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$; une équation paramétrique de (d) est alors :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

D' a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = t' \\ y = -t' \\ z = -2 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$; un vecteur directeur de D' est donc

$$\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 0 = 0$; $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont deux vecteurs orthogonaux.

En conséquence, les droites D et D' sont orthogonales.

Cherchons à présent un point d'intersection entre D et D' .

Une représentation paramétrique de D est $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Il n'y a pas de point d'intersection entre D et D' car, sinon, sa cote vaudrait à la fois 2 et -2 .

Les droites D et D' ne sont donc pas coplanaires.

Finalement, les droites D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b) • Une représentation paramétrique de D est $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

• Soit $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, un vecteur orthogonal à $\vec{u}$, car $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ainsi, $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et on a $\overrightarrow{MH} = k\vec{v}$, où k est un réel. D'où :

$$\begin{cases} x_H - x = k \\ y_H - y = -k \\ z_H - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = k + x \\ y_H = -k + y \\ z_H = z. \end{cases}$$

De plus, H est un point de D , donc $\begin{cases} x_H = t \\ y_H = t \\ z_H = 2 \end{cases}$, pour un $t \in \mathbb{R}$.

Par identification des coordonnées, on obtient : $\begin{cases} k + x = t \\ -k + y = t \\ z_H = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{y-x}{2} \\ t = \frac{x+y}{2} \\ z_H = 2. \end{cases}$

On remplace et on trouve que les coordonnées de H sont $\left(\frac{x+y}{2}; \frac{x+y}{2}; 2\right)$.

Finalement, $\overline{MH} = \begin{pmatrix} x_H - x \\ y_H - y \\ z_H - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \\ 2-z \end{pmatrix}$.

• On a $MH^2 = \left(\frac{-x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + (2-z)^2$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 2xy + y^2) + \frac{1}{4}(x^2 - 2xy + y^2) + (2-z)^2,$$

soit $MH^2 = \frac{(x-y)^2}{2} + (2-z)^2$.

c) $M(x; y; z)$ appartient à S

équivalent à $MH = MK$,

équivalent à $MH^2 = MK^2$, car des distances sont toujours positives

équivalent à $\frac{(x-y)^2}{2} + (2-z)^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$,

équivalent à $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{2} + 4 - 4z + z^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} + 4 + 4z + z^2$,

équivalent à $-2xy = 8z$,

équivalent à $z = -\frac{1}{4}xy$.

2. a) Le plan (xOy) est caractérisé par la condition $z = 0$.

$$z = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}xy = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

La section obtenue est donc la réunion de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

b) On a : $z = k$, avec $k \neq 0 \Leftrightarrow xy = k$, $k \neq 0 \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$, car, comme $k \neq 0$, on a $x \neq 0$.

Par suite, la nature de la section est une hyperbole.

c) Un point $M(x; y; z)$ appartient à la section si, et seulement si, ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = -\frac{1}{4}xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = \frac{1}{4}x^2. \end{cases}$$

Ainsi, dans le plan d'équation $x + y = 0$, la section est une parabole.

EXERCICE 3

1. a) On a $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\text{et } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}.$$

On a $2x > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$; le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $\sqrt{x} - 2$.

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4,$$

$$\sqrt{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4, \text{ car la fonction carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Ainsi : $f'(x) > 0$ sur $]4; +\infty[$,

$$f'(x) < 0 \text{ sur }]0; 4[,$$

$$f'(x) = 0 \text{ pour } x = 4.$$

f est donc strictement décroissante sur $]0; 4[$ et strictement croissante sur $]4; +\infty[$.

Par suite, f admet un minimum en 4.

b) f admet un minimum en 4 qui vaut $f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$, car $\ln 2 \approx 0,69$ et ainsi $1 - \ln 2 > 0$.

Par conséquent, $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

d'où $\sqrt{x} - \ln x > 0$, pour tout $x > 1$

$$\ln x < \sqrt{x},$$

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}, \quad \text{car } x > 1.$$

De plus, on a $\ln x > \ln 1$ car $\ln$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
 $\ln x > 0$,

$$\frac{\ln x}{x} > 0, \quad \text{car } x > 1.$$

Ainsi, pour tout $x > 1$, on a $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$.

c) On a $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, pour tout $x > 1$,

donc : $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, pour tout $x > 1$, d'après la question 1. b)

$$\text{or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Finalement, d'après le théorème des gendarmes, **on en conclut que** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2.

Rappel de cours : théorème des limites de fonctions composées

Soient f, g deux fonctions et a, b, c désignant des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

$$\text{On a } f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} = n \frac{\ln x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

$$\text{Or, } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{n}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}} = 0 \text{ d'après le théorème de limite de fonctions composées et la question 1.}$$

$$\text{Finalement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

EXERCICE 4

$$1. 2y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y.$$

Les solutions de (E) sont de la forme : $f_k(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$, avec k réel quelconque.

2. a)

Rappel de cours : dérivation

- Dérivation du produit de deux fonctions : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; uv est alors dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Dérivée de la fonction e^u : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ; e^u est alors dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est solution de } (E') \Leftrightarrow 2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(x+1).$$

$$\text{Or, on a } f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(mx^2 + px) + e^{-\frac{1}{2}x}(2mx + p)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}mx^2 + \left(2m - \frac{p}{2}\right)x + p \right).$$

Par suite,

$$f \text{ est solution de } (E') \Leftrightarrow 2e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}mx^2 + \left(2m - \frac{p}{2} \right)x + p \right) + e^{-\frac{1}{2}x}(mx^2 + px) = e^{-\frac{1}{2}x}(x+1)$$

$$\Leftrightarrow -mx^2 + (4m - p)x + 2p + mx^2 + px = x + 1 \quad \text{car } e^{-\frac{1}{2}x} \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4mx + 2p = x + 1.$$

Par identification de polynômes, on obtient : $\begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) • $g - f$ est solution de $(E) \Leftrightarrow 2(g - f)' + (g - f) = 0$,

$$\Leftrightarrow 2g' + g = 2f' + f,$$

$$\Leftrightarrow 2g'(x) + g(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(x+1), \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}$$

car f est solution de (E')

$\Leftrightarrow g$ est solution de (E') .

• $g - f$ est solution de $(E) \Leftrightarrow (g - f)(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$, pour tout x de $\mathbb{R}$ et avec k réel

d'après la question 1.

$$\Leftrightarrow g(x) = f(x) + ke^{-\frac{1}{2}x}, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, \text{ avec } k \text{ réel.}$$

Or, g est solution de (E') ; **les solutions de (E') sont donc de la forme :**

$$x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right) + ke^{-\frac{1}{2}x}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } k \text{ réel, d'après la question 2. a).}$$

3.

Méthode : Attention ! À cette question, on vous demande les variations de la fonction h et non le tableau de variations ; autrement dit, il faut les décrire à l'aide d'une phrase. De plus, il faut faire attention au fait que les variations d'une fonction s'étudient sur des intervalles et non sur une réunion d'intervalles. Il est faux d'écrire qu'une fonction f est croissante sur $I \cup J$ si la réunion n'est pas un intervalle.

On a $h(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} (x^2 + 2x)$.

$x \mapsto -\frac{x}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine, donc $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto x^2 + 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme de degré 2.

Ainsi, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} (x^2 + 2x) + e^{-\frac{x}{2}} (2x + 2) \right) = \frac{1}{8} e^{-\frac{x}{2}} (-x^2 + 2x + 4).$$

$\frac{1}{8} e^{-\frac{x}{2}} > 0$ sur $\mathbb{R}$, car une exponentielle est toujours positive.

Le signe de h' ne dépend donc que du signe de $-x^2 + 2x + 4$. Calculons le discriminant.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 20 > 0, \text{ il y a donc deux racines réelles :}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{-2} = 1 + \sqrt{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1 - \sqrt{5}.$$

Ainsi, $-x^2 + 2x + 4$ est du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur, d'où :

$$h'(x) > 0 \text{ sur }]1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}[,$$

$$h'(x) < 0 \text{ sur }]-\infty; 1 - \sqrt{5}[\cup]1 + \sqrt{5}; +\infty[,$$

$$h'(x) = 0 \text{ en } 1 - \sqrt{5} \text{ et en } 1 + \sqrt{5}.$$

En conclusion, **h est strictement croissante sur $[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$ et h est strictement décroissante sur $] -\infty; 1 - \sqrt{5}]$ et sur $[1 + \sqrt{5}; +\infty[$.**

4.

Rappel de cours : théorème des limites des fonctions composées

Soient f, g deux fonctions et a, b, c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

- Calculons la limite de h en $-\infty$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty, \text{ d'après le théorème des limites de fonctions composées.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

Finalement, **$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$** , par produit.

- Calculons la limite de h en $+\infty$. On a :

$$h(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} (x^2 + 2x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x}{e^2}} + \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{e^2}},$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{array} \right\}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{e^2}} = 0, \text{ d'après le théorème des limites de fonctions}$$

composées et les croissances comparées.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \end{array} \right\}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x}{e^2}} = 0, \text{ d'après le théorème}$$

des limites de fonctions composées et les croissances comparées.

Finalement, **$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$** , par somme.

5. a) Étudions le signe de $h(x) - e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} (x^2 + 2x - 4)$.

On a $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Le signe de $h(x) - e^{-\frac{x}{2}}$ ne dépend donc que du signe de $x^2 + 2x - 4$. Calculons le discriminant.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 20 > 0, \text{ d'où :}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} = -1 - \sqrt{5} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -1 + \sqrt{5}.$$

$x^2 + 2x + 4$ est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.

$$h(x) - e^{-\frac{x}{2}} > 0 \text{ sur }]-\infty; -1 - \sqrt{5}[\cup]-1 + \sqrt{5}; +\infty[,$$

$$h(x) - e^{-\frac{x}{2}} < 0 \text{ sur }]-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}[,$$

$$h(x) - e^{-\frac{x}{2}} = 0 \text{ en } -1 - \sqrt{5} \text{ et en } -1 + \sqrt{5}.$$

Par suite :

$$h(x) > e^{-\frac{x}{2}} \text{ sur }]-\infty; -1 - \sqrt{5}[\cup]-1 + \sqrt{5}; +\infty[,$$

$$h(x) < e^{-\frac{x}{2}} \text{ sur }]-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}[,$$

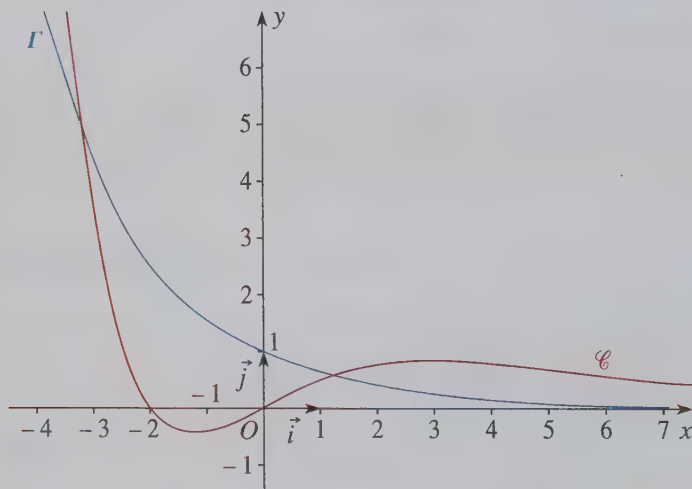
$$h(x) = e^{-\frac{x}{2}} \text{ en } -1 - \sqrt{5} \text{ et en } -1 + \sqrt{5}.$$

Finalement :

$\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ sur $]-\infty; -1 - \sqrt{5}[\cup]-1 + \sqrt{5}; +\infty[$;

$\mathcal{C}$ est au-dessous de Γ sur $[-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}]$.

b)



Nouvelle-Calédonie

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 35 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 50 min.
- Exercice 4 : 60 min.
- Exercice 5 : 35 min.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Géométrie dans l'espace – Produit scalaire (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(3; -2; 1)$$

$$B(5; 2; -3)$$

$$C(6; -2; -2)$$

$$D(4; 3; 2).$$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.
2. a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
b) En déduire une équation du plan (ABC) .
c) Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.
3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ en unités de volume.

Corrigé page 43

EXERCICE 2 Nombres complexes – Forme trigonométrique, Interprétation géométrique (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$, ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que $OH < OK$. On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K .

a) Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

b) Calculer la longueur OA . En déduire les longueurs OK et OH .

c) Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que

$$z_K = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_H = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui, à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-4}{z}.$$

2. a) Déterminer et placer les points images de B et C par f .

b) On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f .

3. a) Montrer que, pour tout point M distinct de O , on a :

$$OM \times OM' = 4.$$

b) Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

4. Soient K' et H' , les images respectives de K et H par f .

a) Calculer OK' et OH' .

b) Démontrer que :

$$z_{K'} = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_{H'} = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

c) Expliquer comment construire les points K' et H' en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H .

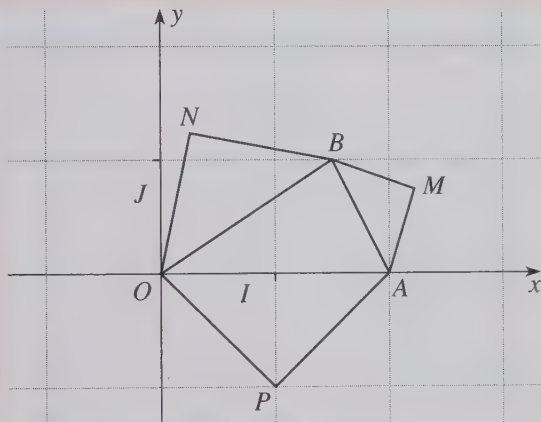
Réaliser la construction.

Corrigé page 45

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Nombres complexes (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B .

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N .

On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. À l'aide des transformations

- Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2 .
- Déterminer l'image du point M , puis celle du point I par la transformation r .
- Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
- Quelle est l'image du point O par r ?
- En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes

- Donner les écritures complexes de s_1 et s_2 . On utilisera les résultats de la question 1. a).

b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N .

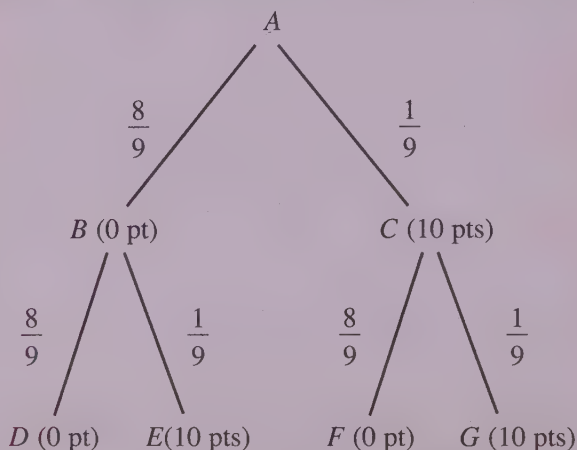
c) Donner, sans justification, l'affixe z_P du point P , puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

Corrige page 47

EXERCICE 3 Probabilités – Variables aléatoires, Loi binomiale

(4 points)

Un joueur lance une bille qui part de A , puis emprunte obligatoirement l'une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D , E , F et G .



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passée par un nœud.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille.

On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie, c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D , E , F ou G .

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance de X .

c) Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

2. Le joueur effectue huit parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.

On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.

a) Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties.

On donnera le résultat arrondi au millième.

b) Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie.

On donnera le résultat arrondi au millième.

Corrigé page 49

EXERCICE 4 Analyse – Intégration, Fonctions (5 points)

Partie A

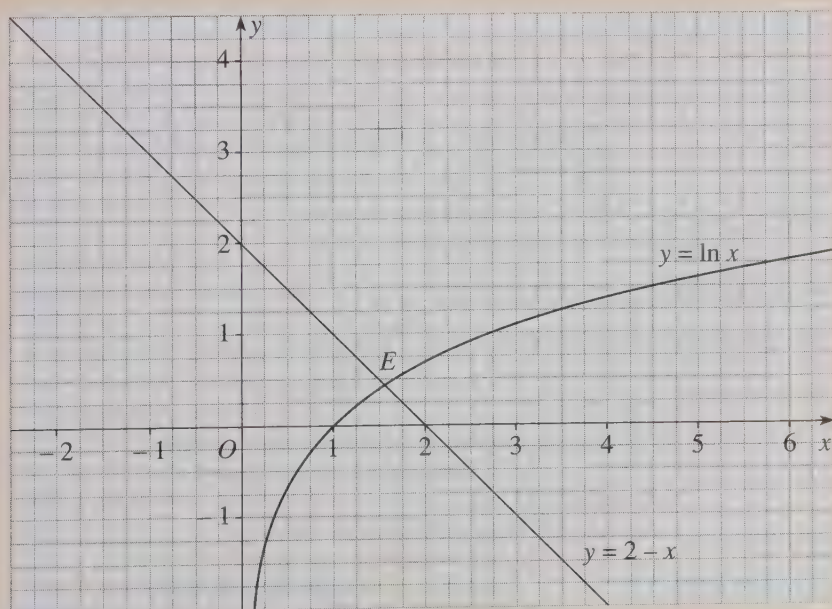
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - 2 + x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f , puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



On considère, sur le graphique de la page précédente, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $\ln$, ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2 - x$. On note E le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

On considère l'aire en unités d'aire, notée $\mathcal{A}$, de la partie du plan située au-dessus de l'axe des abscisses et en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

1. Déterminer les coordonnées du point E .

2. Soit $I = \int_1^\alpha \ln x \, dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de I .

b) Calculer I , en fonction de α , à l'aide d'une intégration par parties.

c) Montrer que I peut aussi s'écrire $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.

3. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de α .

EXERCICE 5 Analyse – Fonctions, Suites (3 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

1. Restitution organisée de connaissances

La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} g'(x) = g(x), & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Démontrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{n} \left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right].$$

1. Démontrer que $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$, puis en déduire que :

$$u_n = (e - 1) f\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. En déduire, en utilisant aussi la **Partie A**, que la suite (u_n) converge vers $e - 1$.

Corrige page 52

Corrigés

EXERCICE 1

1.

Rappel de cours : distance entre deux points de l'espace

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

• Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même, on obtient } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3k \\ 4 = 0k \\ -4 = -3k \end{cases}, \text{ ce qui est impossible.}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et, par suite, **les points A, B et C ne sont pas alignés.**

$$\bullet \text{ On a } AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \sqrt{9 + 0 + 9} = 3\sqrt{2},$$

$$\text{et } BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} = 3\sqrt{2}.$$

Ainsi, le triangle ABC est isocèle en C.

$$\text{De plus, } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times 1 + 0 \times (-4) + (-3) \times 1 = 0, \text{ car } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le triangle ABC est donc rectangle en C.

On en conclut que **le triangle ABC est isocèle rectangle en C.**

2. a)

Méthode : un vecteur est normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$$\text{On a } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 2 + 1 \times 4 + 2 \times (-4) = 4 + 4 - 8 = 0,$$

$$\text{et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 3 + 1 \times 0 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = 0.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (d'après la question 1.), le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) .

$$\text{b) } M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \times 2 + (y+2) \times 1 + (z-1) \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + 2z - 6 = 0.$$

Le plan (ABC) a donc pour équation $2x + y + 2z - 6 = 0$.

c)

Rappel de cours : dans un repère orthonormal, la distance du point $A(\alpha; \beta; \gamma)$ au plan P d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est égale à :

$$\frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$\text{dist}(D, (ABC)) = \frac{|2x_D + y_D + 2z_D - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{|9|}{\sqrt{9}}$$

$$= 3.$$

La distance de D au plan (ABC) vaut 3.

3.

Rappel de cours : volume d'un tétraèdre

$$\frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

$$\text{On a } V = \frac{1}{3} \times A_{ABC} \times \text{dist}(D, (ABC))$$

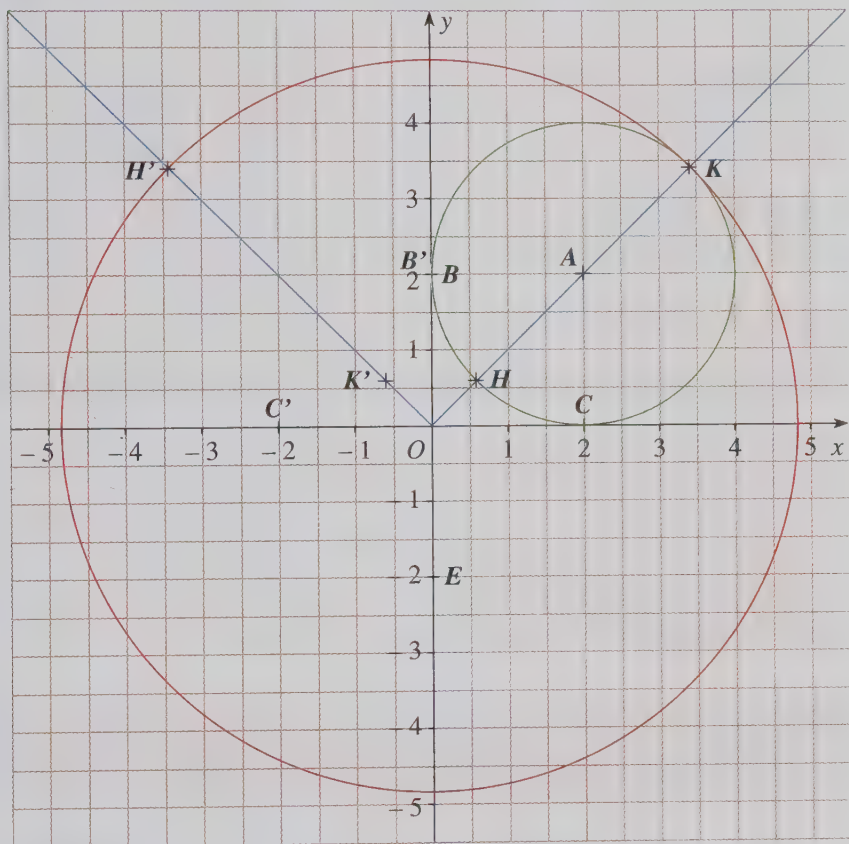
$$= \frac{1}{3} \times \frac{AC \times BC}{2} \times 3 \text{ car le triangle } ABC \text{ est rectangle en } C.$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} \times 3$$

$$= 9 \text{ unités de volume.}$$

EXERCICE 2

1. a)



b) • On a $OA = |z_A| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

• O, H et A sont alignés dans cet ordre, donc $OH = OA - AH = 2\sqrt{2} - 2$, car H appartient au cercle de centre A et de rayon 2.

• De même, O, A et K sont alignés dans cet ordre, donc $OK = OA + AK = 2\sqrt{2} + 2$, car K appartient au cercle de centre A et de rayon 2.

c) • On a $z_A = 2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Un argument de z_A est donc $\frac{\pi}{4}$ et, ainsi, $\text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

D'autre part, on a $|z_K| = OK = 2\sqrt{2} + 2$.

Comme $A \in [OK]$, $\text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OK}) = \text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) \pmod{2\pi}$

$$= \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi};$$

on en déduit que $z_K = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

• De même, $|z_H| = OH = 2\sqrt{2} - 2$. Comme $H \in [OA]$, $\text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = \text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) \pmod{2\pi}$

$$= \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi};$$

on en déduit que $z_H = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. a) Soient B' et C' , les images respectives de B et C .

$$z_{B'} = -\frac{4}{z_B} = -\frac{4}{2i} = -\frac{4i}{2i^2} = 2i, \text{ donc } B' = B.$$

$$z_{C'} = -\frac{4}{z_C} = -\frac{4}{2} = -2, \text{ donc } C' \text{ a pour affixe } -2; \text{ c'est le symétrique de } C \text{ par}$$

rapport à l'axe des ordonnées.

b) Pour trouver les points invariants, il faut résoudre l'équation $z' = z$.

$$z' = z \text{ équivaut à } -\frac{4}{z} = z,$$

$$\text{équivaut à } z^2 = -4 = (2i)^2, \text{ car } z \neq 0$$

$$\text{équivaut à } z = -2i \text{ ou } z = 2i.$$

Les points invariants sont les points B d'affixe $2i$ et E d'affixe $-2i$.

3. a)

Rappel de cours : soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

$$|zz'| = |z||z'| \text{ et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

$$OM' \times OM = |z'| \times |z| = \left| -\frac{4}{z} \right| \times |z| = \frac{4}{|z|} \times |z| = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \arg(z') &= \arg\left(-\frac{4}{z}\right) \pmod{2\pi} \quad \text{car } z \text{ et } z' \text{ sont non nuls} \\ &= \arg(-4) - \arg(z) \pmod{2\pi} \\ &= \pi - \arg(z) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

4. a) • D'après la question 3. a), on a $OH' \times OH = 4$, d'où :

$$OH' = \frac{4}{OH} = \frac{4}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{4(2\sqrt{2} + 2)}{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = \frac{4(2\sqrt{2} + 2)}{4} = 2\sqrt{2} + 2 = OK.$$

• De même, $OK' \times OK = 4$, d'où

$$OK' = \frac{4}{OK} = \frac{4}{2\sqrt{2} + 2} = \frac{4(2\sqrt{2} - 2)}{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = \frac{4(2\sqrt{2} - 2)}{4} = 2\sqrt{2} - 2 = OH.$$

b) On raisonne de manière analogue à la question 1. c).

• On a $OH' = OK$, donc $|z_{H'}| = |z_K| = 2\sqrt{2} + 2$.

D'après la question 3. b), on sait que :

$$\arg(z_{H'}) = \pi - \arg(z_H) \pmod{2\pi}$$

$$= \pi - \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

$$= \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

$$\text{Donc, } z_{H'} = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

• De même, $OK' = OH$, donc $|z_{K'}| = |z_H| = 2\sqrt{2} - 2$.

D'après la question 3. b), on sait que :

$$\arg(z_{K'}) = \pi - \arg(z_K) \pmod{2\pi}$$

$$= \pi - \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

$$= \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

$$\text{Finalement, } z_{K'} = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

c) On a $OH' = OK$, donc H' appartient au cercle de centre O passant par K .

De plus, $\arg(z_{H'}) = \pi - \arg(z_H) = \pi - \arg(z_K) \pmod{2\pi}$; par conséquent, H' est le symétrique de K par rapport à l'axe des ordonnées. À la règle et au compas, on construit ce point.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

1. a) • Le triangle AMB est rectangle isocèle direct en M ,

$$\text{d'où } \text{mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

De plus, en utilisant le théorème de Pythagore, on a, $AM^2 + BM^2 = AB^2$,
soit $2AM^2 = AB^2$, puis $AB = \sqrt{2}AM$.

Comme B est l'image de M par la similitude s_1 , on en déduit que son angle vaut $\frac{\pi}{4}$ et

son rapport $\sqrt{2}$.

• De même, le triangle BNO est rectangle isocèle direct en N ,

$$\text{d'où } \text{mes}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

En utilisant le théorème de Pythagore, on a $ON^2 + NB^2 = OB^2$,

$$\text{soit } 2ON^2 = OB^2, \text{ puis } ON = \frac{1}{\sqrt{2}} OB.$$

Comme N est l'image de B par la similitude s_2 , on en déduit que son angle vaut $\frac{\pi}{4}$ et son rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) • On a $r(M) = s_2 \circ s_1(M) = s_2(s_1(M)) = s_2(B) = N$.

• APO est un triangle rectangle isocèle en P , et I est le milieu du segment $[OA]$, donc $\text{mes}(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AP}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ et $AP = \sqrt{2}AI$. Ainsi, P est l'image de I par s_1 .

De plus, on a $\text{mes}(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OI}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ et $OI = \frac{1}{\sqrt{2}} OP$. Ainsi, l'image de P par s_2 est I .

On en déduit que : $r(I) = s_2 \circ s_1(I) = s_2(s_1(I)) = s_2(P) = I$.

c)

Rappel de cours : la composée de deux similitudes directes est une similitude directe dont le rapport est le produit des deux rapports, et dont l'angle est la somme des angles des deux similitudes.

On déduit de la question **1. a)** que r est une similitude de rapport $\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ et d'angle

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Comme I est invariant par r (question **1. b)**), on peut affirmer que r est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Le triangle OIP est rectangle isocèle direct en I , ainsi $r(O) = P$.

e) On a $r(O) = P$ et $r(M) = N$; l'image de la droite (OM) est donc la droite (PN) par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2.

Méthode : si A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par la rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ , alors :

$$z_{A'} - z_\Omega = (z_A - z_\Omega)e^{i\theta}.$$

a) • s_1 est la similitude de centre A , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$,

$$\text{d'où : } s_1(z) - z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_A),$$

$$\text{puis } s_1(z) = z_A + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_A) = 2 + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z - 2) = 2 + (1 + i)z - 2 - 2i,$$

$$\text{ainsi : } s_1(z) = (1 + i)z - 2i.$$

• s_2 est la similitude de centre O , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\text{d'où : } s_2(z) - z_O = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - z_O),$$

$$\text{puis } s_2(z) = z_O + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - z_O) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) z,$$

$$\text{ainsi : } s_2(z) = \frac{1}{2} (1 + i) z.$$

b) • On a $s_1(z_M) = z_B$, donc $(1 + i)z_M - 2i = \frac{3}{2} + i$, puis $(1 + i)z_M = \frac{3}{2} + 3i$.

$$\text{Finalement, } z_M = \frac{\left(\frac{3}{2} + 3i\right)}{(1 + i)} = \frac{\left(\frac{3}{2} + 3i\right)}{(1 + i)} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{\left(\frac{3}{2} + 3i\right)(1 - i)}{2} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} i.$$

• On a $s_2(z_B) = z_N$, donc $z_N = \frac{1}{2} (1 + i) \left(\frac{3}{2} + i \right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} i$.

c) On lit sur la figure que P a pour affixe $z_P = 1 - i$.

$$z_{\overrightarrow{OM}} = z_M = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} i,$$

$$z_{\overrightarrow{PN}} = z_N - z_P = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} i - 1 + i = -\frac{3}{4} + \frac{9}{4} i = i \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4} i \right) = i z_{\overrightarrow{OM}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \arg(z_{\overrightarrow{PN}}) &= \arg(i z_{\overrightarrow{OM}}) \pmod{2\pi} \\ &= \arg(i) + \arg(z_{\overrightarrow{OM}}) \pmod{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} + \arg(z_{\overrightarrow{OM}}) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

En conclusion, les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3

1. a) En suivant chaque branche de l'arbre pondéré, on remarque que X peut prendre les valeurs 0, 10, 20.

$$p(X = 0) = p(ABD) = \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{64}{81};$$

$$p(X = 10) = p(ABE) + p(ACF) = \frac{8}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{81};$$

$$p(X = 20) = p(ACG) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}.$$

Par suite, la loi de probabilité de X est :

$X = x_i$	0	10	20
p_i	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{1}{81}$

b)

Rappel de cours : soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$. L'espérance mathématique de X vaut :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 p_i x_i = \frac{64}{81} \times 0 + \frac{16}{81} \times 10 + \frac{1}{81} \times 20 = \frac{180}{81} = \frac{20}{9}.$$

$$c) p(AC/X = 10) = \frac{p(AC \cap (X = 10))}{p(X = 10)} = \frac{p(ACF)}{p(X = 10)} = \frac{\frac{1}{9} \times \frac{8}{9}}{\frac{16}{81}} = \frac{1}{2}.$$

2. a)

Méthode : loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A de probabilité p et $\bar{A}$ de probabilité $(1 - p)$.

Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de réalisations de l'événement A suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de parties gagnées. Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = p(X = 20) = \frac{1}{81}$.

$$p(Y = 2) = \binom{8}{2} p^2 (1 - p)^{8-2} = \frac{8!}{6! \times 2!} \left(\frac{1}{81}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^6 = \frac{7 \times 8}{2} \left(\frac{1}{81}\right)^2 \left(\frac{80}{81}\right)^6 \approx 0,004.$$

$$b) \text{ On a } p(Y \geq 1) = 1 - p(Y < 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{8}{0} p^0 (1 - p)^8 = 1 - \left(\frac{80}{81}\right)^8 \approx 0,095.$$

EXERCICE 4

Partie A

$$1. \bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-2 + x) = -2 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

On a $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}$.

$f'(x) > 0$ si, et seulement si, $x+1 > 0$, car $x > 0$
si, et seulement si, $x > -1$.

Finalement, pour tout x dans $]0; +\infty[$, on a $f'(x) > 0$.

Autre méthode possible : $\ln$ est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto x-2$ est une fonction affine strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0; +\infty[$.

Voici son tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f		$-\infty \rightarrow +\infty$

3. f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$; 0 est compris entre $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

Le résultat donné par la calculatrice est $f(1,83) < 0$ et $f(1,84) > 0$.

D'où : $f(1,83) < f(\alpha) < f(1,84)$.

Comme f est croissante, on en déduit que $1,83 < \alpha < 1,84$.

Partie B

1. Soit $E(x; y)$ le point d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$.

L'abscisse de E vérifie : $\ln x = 2 - x$. D'après la **partie A**, la seule solution est α .

On a $y = \ln \alpha = 2 - \alpha$. D'où $E(\alpha; 2 - \alpha)$.

2. a) La fonction $\ln$ est continue et positive sur l'intervalle $[1; \alpha]$. I représente donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = \alpha$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$.

b)

Rappel de cours : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ telles que u' et v' le sont aussi. On a alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$, alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$.

Les fonctions u , u' , v et v' sont dérivables sur $[1; \alpha]$; on peut donc intégrer par parties, on a :

$$I = \int_1^\alpha u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_1^\alpha - \int_1^\alpha u'(x)v(x) dx,$$

$$I = [x \ln x]_1^\alpha - \int_1^\alpha dx = \alpha \ln \alpha - 0 - [x]_1^\alpha.$$

Finalement, $I = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$.

c) α vérifie $\ln \alpha = 2 - \alpha$.

Donc $I = \alpha(2 - \alpha) - \alpha + 1 = -\alpha^2 + \alpha + 1$.

3. Comme le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ a pour abscisse α , avec $1 < \alpha < 2$, on a :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^\alpha \ln x dx + \int_\alpha^2 (2-x) dx, \\ &= I + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_\alpha^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= -\alpha^2 + \alpha + 1 + 4 - 2 - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2} \\ &= -\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + 3 \text{ unités d'aire.} \end{aligned}$$

EXERCICE 5

Partie A

1. La limite demandée s'interprète comme la limite d'un taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h - 0} = g'(0) && \text{car } g \text{ est dérivable pour tout } h \text{ de } \mathbb{R} \\ &= g(0) && \text{car } g'(x) = g(x), \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \\ &= 1 && \text{par hypothèse.} \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{e^x - 1}{x} \right)} = 1 \quad \text{d'après la question précédente et par limite d'un quotient.}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty \quad \begin{aligned} &\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ &\text{d'après les croissances comparées.} \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = 0$$

par limite d'un inverse.

Partie B

1.

Rappel de cours : la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison q est :

$$\sum_{k=p}^n u_k = \begin{cases} u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n - p + 1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } 1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} &= 1 + e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \dots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}, \end{aligned}$$

car c'est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{n}} \neq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } u_n &= \frac{1}{n} \left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e - 1) \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \\ &= (e - 1) f\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

2.

Rappel de cours : théorème des limites de fonctions composées

Soient f, g deux fonctions et a, b, c désignant des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

$$\text{On a } \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \text{ d'après le théorème sur les limites de fonctions composées.}$$

$$\text{On en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = (e - 1) \times 1 = e - 1.$$

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 60 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 60 min.
- Spécialité exercice 4 : 60 min.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 Analyse – Logarithme népérien, Intégration (5 points)

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données en fin d'énoncé représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.

1. On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan grisée.

On note $I = \int_1^e \ln x \, dx$ et $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$.

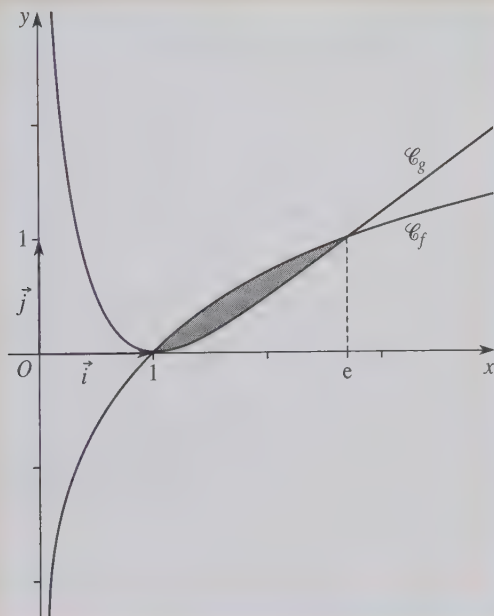
a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I .

- b) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $J = e - 2I$.
 c) En déduire J .
 d) Donner la valeur de A .

2. Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

Pour x appartenant à l'intervalle $[1; e]$, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ de même abscisse.

Pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maximale ? Calculer la valeur maximale de MN .



Corrigé page 58

EXERCICE 2 Géométrie dans l'espace – Barycentre (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 1; 0)$, $B(1; 2; 1)$ et $C(3; -1; 2)$.

1. a) Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
 b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite $(\mathcal{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC) , (P) et (Q) ?

4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$.

Corrigé page 60.

EXERCICE 3 Probabilités – Conditionnement, Loi continue, Intégration (5 points)

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout $t \geq 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances

a) Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.

b) Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que, pour tout réel $s \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geq 0$.

2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0,000\,26$.

a) Calculer $P(X \leq 1\,000)$ et $P(X > 1\,000)$.

b) Sachant que l'événement $(X > 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2\,000)$.

c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Corrigé page 62.

EXERCICE 4 Nombres complexes – Le plan complexe, Lieux géométriques (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1 + i, 3 - i$ et 2 .

À tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.

Le point M' est appelé l'image de M .

1. Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.

2. Calculer les affixes des points A' et B' , images respectives des points A et B . Que remarque-t-on ?

3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5 .

4. a) Vérifier que, pour tout nombre complexe z , on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.

b) En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ et, lorsque z est différent de 2 , une relation entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

c) Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 2 ?

5. Soient E le point d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E .

a) Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{IE})$.

b) Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{JE'})$.

c) Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.

Corrigé page 63

SPÉCIALITÉ EXERCICE 4 Nombres complexes – Similitudes (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$.

1. On considère la droite (d) d'équation $4x + 3y = 1$.

Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k + 1; -4k - 1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2; 3)$.

3. Soit s la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2}{3}i z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$.

Déterminer l'image de A par s , puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s .

4. On note B_1 l'image de B par s et, pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s .

a) Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n .

b) À partir de quel entier n le point B_n appartient-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A , B_1 et B_n sont alignés.

Corrigé page 64

Corrigés

EXERCICE 1

1. a) On a $F(x) = x \ln x - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$,

et $F'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$;

F est une donc primitive de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où : $I = \int_1^e \ln x \, dx = F(e) - F(1) = (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1$, car $\begin{cases} \ln e = 1 \\ \ln 1 = 0. \end{cases}$

b)

Rappel de cours : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ et u' , v' continues sur $[a; b]$. On a alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

On doit calculer $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$.

Posons $u(x) = (\ln x)^2$ $u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$;

$v'(x) = 1$ $v(x) = x$ (à une constante près) ;

avec u, v dérivables sur $[1 ; e]$ et u', v' continues sur $[1 ; e]$.

On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties ; on obtient :

$$J = [(\ln x)^2 \times x]_1^e - \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} \times x \, dx = e - 0 - 2 \int_1^e \ln x \, dx = e - 2I.$$

Autre méthode :

Elle permet d'obtenir directement la réponse à la question 1. b).

On a $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx = \int_1^e \ln x \times \ln x \, dx$.

Posons $u(x) = \ln x$ $u'(x) = \frac{1}{x}$;

$v'(x) = \ln x$ $v(x) = x \ln x - x$ (à une constante près) ;

avec u, v dérivables sur $[1 ; e]$ et u', v' continues sur $[1 ; e]$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$J = [\ln x \times (x \ln x - x)]_1^e - \int_1^e (\ln x - 1) \, dx = 0 - [x \ln x - x - x]_1^e = -(-e + 2) = e - 2 = e - 2I,$$

car $I = 1$.

c) On a $J = e - 2$, car $I = 1$.

d)) Sur $[1 ; e]$, on a $0 \leq \ln x \leq 1$, d'où $0 \leq (\ln x)^2 \leq \ln x$, puis $f(x) \geq g(x)$ sur $[1 ; e]$ et donc $f(x) - g(x) \geq 0$ sur $[1 ; e]$.

f est continue sur $[1 ; e]$
 comme fonction de référence
 g est continue sur $[1 ; e]$
 comme composée de deux fonctions continues

} donc $f - g$ est continue sur $[1 ; e]$.

Ainsi, $A = \int_1^e (f(x) - g(x)) \, dx = \int_1^e \ln x \, dx - \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$ par linéarité de l'intégrale
 $= I - J = 1 - (e - 2) = 3 - e$ unités d'aire.

2. On a $M(x ; f(x))$ et $N(x ; g(x))$.

Comme $f(x) \geq g(x)$ sur $[1 ; e]$, d'après la question 1. d),

on a $MN = f(x) - g(x) = \ln x - (\ln x)^2$.

Posons h la fonction définie sur $[1 ; e]$ par $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$.

h est dérivable sur $[1 ; e]$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $[1 ; e]$,

et $h'(x) = \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{1 - 2 \ln x}{x}$.

On a $x > 0$ sur $[1 ; e]$; le signe de $h'(x)$ ne dépend donc que du signe de $1 - 2 \ln x$.

$$1 - 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \quad \text{car} \begin{cases} e^{\ln x} = x, x \in \mathbb{R}_+^* \\ e^a = e^b \Leftrightarrow a = b, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels.} \end{cases}$$

$$1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	1	$\sqrt{e}$	e
$h'(x)$	+	0	-
h	0	$\frac{1}{4}$	0

D'après le tableau de variations, on voit que h admet un maximum en $\sqrt{e}$ qui vaut $\frac{1}{4}$.

En conclusion, la valeur maximum de MN est $\frac{1}{4}$ (unité graphique).

EXERCICE 2

1. a) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles ; par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et **les points A, B et C ne sont donc pas alignés.**

b) Pour démontrer que le plan (ABC) admet l'équation $2x + y - z - 3 = 0$ pour équation cartésienne, il suffit de vérifier que les coordonnées de A, B et C vérifient cette équation car A, B et C ne sont pas alignés :

$$2x_A + y_A - z_A - 3 = 2 \times 1 + 1 - 0 - 3 = 3 - 3 = 0 ;$$

$$2x_B + y_B - z_B - 3 = 2 \times 1 + 2 - 1 - 3 = 4 - 4 = 0 ;$$

$$2x_C + y_C - z_C - 3 = 2 \times 3 + (-1) - 2 - 3 = 6 - 6 = 0.$$

Les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation cartésienne proposée.

Le plan (ABC) a bien pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2. $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P) et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Q).

Or, les coordonnées de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas proportionnelles ; $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires et **les plans (P) et (Q) sont sécants en une droite notée (D).**

$$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + z + 4 \\ 2(-2y + z + 4) + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + z + 4 \\ -y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y + z + 4 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Posons $z = t$, avec $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ est une représentation paramétrique de } (\mathcal{D}).$$

3. Trouver les points d'intersections des plans (ABC) , (P) et (Q) équivaut à trouver les points d'intersection entre $(\mathcal{D})$ et (ABC) , car $(\mathcal{D})$ est l'intersection des plans (P) et (Q) .

On résout donc le système suivant :

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } 2(t - 2) + 3 - t - 3 = 0, \text{ puis } t = 4.$$

En remplaçant dans les équations de x , y et z , on obtient : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4. \end{cases}$

Pour conclure, l'intersection des trois plans (ABC) , (P) et (Q) est un point de coordonnées $(2 ; 3 ; 4)$.

4.

Méthode : cette question est une question ouverte, c'est-à-dire que la démarche scientifique est valorisée. Vous devez énoncer les idées et les réflexions que vous avez eues ; celles-ci seront prises en compte dans la notation même si cela ne vous a pas permis de conclure.

La distance de A à $(\mathcal{D})$ est la longueur AH , où H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

D'après la question 2., un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

H appartient à la droite $(\mathcal{D})$; ses coordonnées sont donc de la forme $(t - 2 ; 3 ; t)$,

$$\text{d'où } \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} t - 3 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

De plus, le point H vérifie : $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (t - 3) \times 1 + 2 \times 0 + t \times 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$;

$$\text{ainsi, } \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 3 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} ;$$

$$\text{on en déduit } AH = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

EXERCICE 3

1. a) $R(t) = P(X > t)$

$$= 1 - P(X \leq t)$$

$$= 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= 1 - \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t$$

$$= e^{-\lambda t}$$

car $e^0 = 1$.

b) $P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P((X > t) \cap (X > t+s))}{P(X > t)}$

$$= \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)}$$

car $t+s > t$ ($s \geq 0$)

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}.$$

Ainsi, $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas de $t \geq 0$.

2. a) $P(X \leq 1\,000) = \int_0^{1\,000} 0,000\,26 e^{-0,000\,26 x} dx$

$$= \left[-e^{-0,000\,26 x} \right]_0^{1\,000}$$

$$= -e^{-0,26} + 1 \approx 0,23.$$

$$P(X > 1\,000) = 1 - P(X \leq 1\,000) = e^{-0,26} \approx 0,77.$$

b) On cherche $P_{X>1\,000}(X > 2\,000) = e^{-0,000\,26 \times 1\,000}$

$$= e^{-0,26} \approx 0,77$$

d'après la question 1. b) avec $\begin{cases} \lambda = 0,000\,26 \\ t = 1\,000 \\ s = 1\,000. \end{cases}$

c) On cherche $P_{X>2\,000}(X \leq 3\,000) = 1 - P_{X>2\,000}(X > 3\,000)$

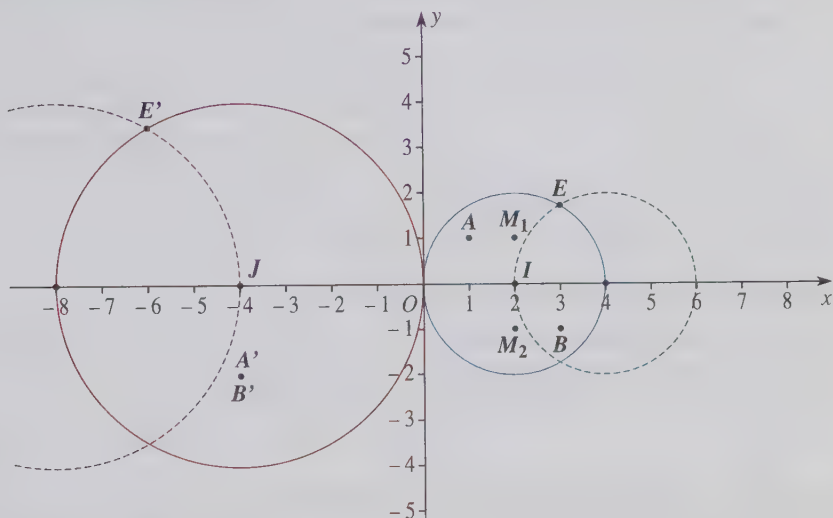
$$= 1 - e^{-0,26} \approx 0,23$$

d'après la question 1. b), avec $\begin{cases} \lambda = 0,000\,26 \\ t = 2\,000 \\ s = 1\,000. \end{cases}$

On pouvait prévoir ce résultat, car la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

EXERCICE 4

1.



L'échelle de l'énoncé n'est pas respectée.

$$2. z_{A'} = z_A^2 - 4z_A = (1+i)^2 - 4(1+i) = -4 - 2i.$$

$$z_{B'} = z_B^2 - 4z_B = (3-i)^2 - 4(3-i) = -4 - 2i.$$

On remarque que A et B ont la même image.

3.

Méthode : résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

On vérifie d'abord que cette expression n'est pas une identité remarquable.

Si tel n'est pas le cas, on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

• Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

On résout l'équation $-5 = z^2 - 4z$, soit $z^2 - 4z + 5 = 0$.

On a $\Delta = -4 < 0$; l'équation admet donc deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{4 - i\sqrt{4}}{2} = 2 - i \text{ ou } z_2 = \overline{z_1} = 2 + i.$$

Ainsi, les points M_1 et M_2 qui ont pour image -5 ont pour affixes respectives $2 + i$ et $2 - i$.

4. a) $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$.

b) $|z' + 4| = |(z - 2)^2| = |z - 2|^2$ car $|z^n| = |z|^n$, pour tout complexe z et n entier naturel ;
 $\arg(z' + 4) = \arg((z - 2)^2) = 2 \arg(z - 2) \pmod{2\pi}$

car $\arg z^n = n \arg z \pmod{2\pi}$, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

c) $M(z)$ décrit le cercle de centre I et de rayon $\Leftrightarrow IM = 2$

$\Leftrightarrow |z - 2| = 2$

$\Leftrightarrow |z - 2|^2 = 4$ car $|z - 2| \geq 0$

$\Leftrightarrow |z' + 4| = 4$ d'après la question 4. b)

$\Leftrightarrow M'(z')$ décrit le cercle de centre

J d'affixe -4 et de rayon 4 .

5. a) • $IE = |z_E - z_I| = |2e^{i\frac{\pi}{3}}| = 2$ car $\begin{cases} |zz'| = |z| \times |z'|, \text{ pour tous } z \text{ et } z' \text{ de } \mathbb{C} \\ |e^{i\theta}| = 1, \text{ pour tout réel } \theta. \end{cases}$

• $\text{mes}(\vec{u}; \overrightarrow{IE}) = \arg(z_E - z_I) = \arg\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

b) • $JE' = 4$ d'après la question 4. c) (car $IE = 2$ et, par suite, E appartient au cercle de centre I et de rayon 2 ; son image est donc sur le cercle de centre J et de rayon 4).

• E' a pour affixe $z_{E'} = (z_E - 2)^2 - 4$ d'après la question 4. a)

$z_{E'} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} - 4$

car $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, pour tout θ réel et n entier

$\text{mes}(\vec{u}; \overrightarrow{JE'}) = \arg(z_{E'} - z_J) = \arg\left(4e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

c) Voir construction (question 1.).

SPECIALITÉ EXERCICE 2

1.

Rappel de cours : pour résoudre une équation du type $ax + by = c$, avec a, b, c, x et y entiers relatifs, et a et b premiers entre eux :

- on cherche une solution $(x_0; y_0)$ particulière ;
- on se ramène à la résolution de $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$;
- puis on utilise le théorème de Gauss.

Remarque : (d) a pour équation $4x + 3y = 1$. Il est clair que le point $A(1; -1)$ est un point de (d).

On résout l'équation : $4x + 3y = 1$.

Or, $(1; -1)$ est une solution particulière de cette équation (voir la remarque ci-dessus).

On a : $4x + 3y = 1$,

$$4x + 3y = 4 \times 1 + 3 \times (-1),$$

$$4(x - 1) = 3(-y - 1).$$

3 et 4 étant des nombres premiers entre eux, $x - 1$ est un multiple de 3, d'après le théorème de Gauss.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 1 = 3k$, d'où $x = 3k + 1$.

$4 \times 3k = 3(-y - 1)$, donc $y = -4k - 1$.

Les points $M_k(3k+1; -4k-1)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sont bien à coordonnées entières et vérifient l'équation de (d).

2. Le rapport de la similitude de centre A qui transforme B et M_{-1} est :

$$\rho = \frac{AM_{-1}}{AB} = \frac{|z_{-1} - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left| \frac{z_{-1} - z_A}{z_B - z_A} \right|.$$

L'angle de la similitude de centre A qui transforme B et M_{-1} est :

$$\theta = \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM_{-1}}) = \arg \frac{z_{-1} - z_A}{z_B - z_A} \pmod{2\pi}.$$

$$\frac{z_{-1} - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-2+3i) - (1-i)}{(7+\frac{7}{2}i) - (1-i)} = \frac{-3+4i}{6+\frac{9}{2}i} = \frac{-6+8i}{12+9i} = \frac{(-6+8i)(12-9i)}{225} = \frac{150}{225}i = \frac{2}{3}i;$$

$$\text{d'où } \rho = \left| \frac{z_{-1} - z_A}{z_B - z_A} \right| = \left| \frac{2}{3}i \right| = \frac{2}{3}$$

$$\text{et } \theta = \arg \frac{z_{-1} - z_A}{z_B - z_A} = \arg \left(\frac{2}{3}i \right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

3.

Méthode : l'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme :

$z' = az + b$, avec a et b nombres complexes et $a \neq 0$.

- L'angle de la similitude est donné par un argument de a .
- Le rapport est donné par le module de a .
- Le centre de la similitude est obtenu en cherchant les points fixes.

$$s(A) \text{ a pour affixe } z' = \frac{2}{3}i z_A + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i = \frac{2}{3}i(1-i) + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i = 1-i.$$

On constate que l'image de A par s est A .

s a pour équation complexe $z' = \frac{2}{3}i z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$: ceci est l'écriture d'une similitude directe.

Le rapport de s est donné par $\left| \frac{2}{3}i \right| = \frac{2}{3}$ et l'angle de s est $\arg \left(\frac{2}{3}i \right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

En conclusion, s est la similitude de centre A , de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$4. a) [AB_{n+1}] \text{ est l'image de } [AB_n] \text{ car } \begin{cases} s(A) = A \\ s(B_n) = B_{n+1} \\ \text{l'image d'un segment par une similitude} \\ \text{est un segment.} \end{cases}$$

Donc : $AB_{n+1} = \frac{2}{3} AB_n$ car le rapport de la similitude s est $\frac{2}{3}$.

b) On sait que $AB_{n+1} = \frac{2}{3} AB_n$ d'après la question 4. a).

Ainsi, la suite (AB_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

et de premier terme $AB = |z_B - z_A| = \frac{15}{2}$,

d'où : $AB_n = \frac{15}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

B_n appartient au disque de centre A et de rayon $10^{-2} \Leftrightarrow AB_n \leq 10^{-2}$; on a ainsi :

$$\frac{15}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{750}$$

$$\ln \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \ln \left(\frac{1}{750}\right) \quad \text{car } \ln \text{ est une fonction strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$n \ln \left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln \left(\frac{1}{750}\right) \quad \text{car } \ln x^n = n \ln x, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}_+^* \text{ et } n \text{ entier naturel}$$

$$n \geq \frac{\ln \left(\frac{1}{750}\right)}{\ln \left(\frac{2}{3}\right)} \approx 16,33 \quad \text{car } \ln \left(\frac{2}{3}\right) < 0 \text{ puisque } \ln x < 0, \text{ pour tout } x \text{ de }]0 ; 1[.$$

En conclusion : $n = 17$ est l'entier à partir duquel le point B_n appartient au disque de centre A et de rayon 10^{-2} .

c) L'angle de la similitude s est $\frac{\pi}{2}$; par suite, $s \circ s$ est une similitude directe de centre

A et d'angle π .

Ainsi, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{(B_{n+2}AB_n)}$ est π . Les points B_{n+2} , A et B_n sont donc alignés, pour tout entier naturel n .

On en déduit que A , B_1 et B_n sont alignés, pour tout n impair.

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 50 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 50 min.
- Exercice 4 : 1 h 20 min.

L'usage des calculatrices est autorisé conformément à la réglementation en vigueur.

2 feuilles de papier millimétré sont mises à la disposition des candidats.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Géométrie dans l'espace (4 points)

A - Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :

- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
- L'écriture $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$; signifie que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ n'ont aucun point commun.

1. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ vérifient : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$.

2. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont tels que :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset \text{ et } \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset.$$

3. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ vérifient : $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$.

4. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{D}$ vérifient : $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

II - Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonormal de l'espace, on considère les trois plans suivants :

- $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$,
- $\mathcal{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- $\mathcal{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants, puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ .

2. En déduire la nature de l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

Corrigé page 78

EXERCICE 2 Probabilités – Suites, Récurrence, Convergence (5 points)

On considère plusieurs sacs de billes $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n, \dots$ tels que :

- le premier, $\mathcal{S}_1$, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
- chacun des suivants, $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \dots, \mathcal{S}_n, \dots$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille dans $\mathcal{S}_1$;
- on place la bille tirée de $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_2$, puis on tire au hasard une bille dans $\mathcal{S}_2$;
- on place la bille tirée de $\mathcal{S}_2$ dans $\mathcal{S}_3$, puis on tire au hasard une bille dans $\mathcal{S}_3$;
- etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'événement : « la bille tirée dans $\mathcal{S}_n$ est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

a) D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$, $p_{\bar{E}_1}(E_2)$.
En déduire la valeur de $p(E_2)$.

b) À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + \frac{2}{5}, \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

b) Démontrer que (u_n) est croissante.

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3. Évolution des probabilités $p(E_n)$

a) À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.

b) Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0,499\,99 \leq p(E_n) \leq 0,5$?

Corrigé page 76

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Arithmétique – Congruence, Équation de la forme $ax + by = c$ (5 points)

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées $(x; y)$ sont des entiers vérifiant les conditions :

$$0 \leq x \leq a \text{ et } 0 \leq y \leq b.$$

On note $R_{a,b}$ ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur l'**annexe** en fin d'énoncé.

Représenter graphiquement les points $M(x; y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2 \pmod{3}$ et $y \equiv 1 \pmod{3}$, sur le **graphique 1** de l'**annexe** ;

2. $x + y \equiv 1 \pmod{3}$, sur le **graphique 2** de l'**annexe** ;

3. $x \equiv y \pmod{3}$, sur le **graphique 3** de l'**annexe**.

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x; y)$ pour laquelle le point $M(x; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau

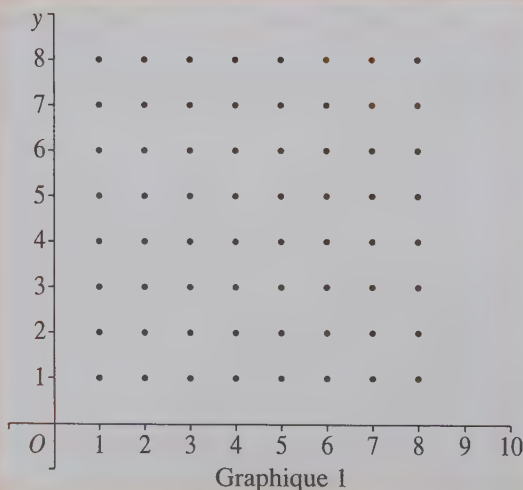
Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[OA]$ du réseau $R_{a,b}$, avec $O(0; 0)$ et $A(a; b)$.

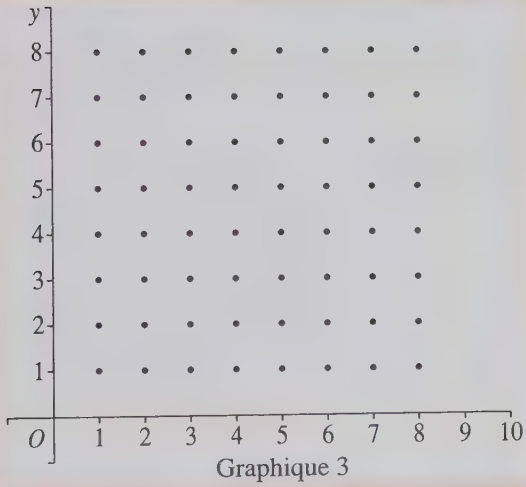
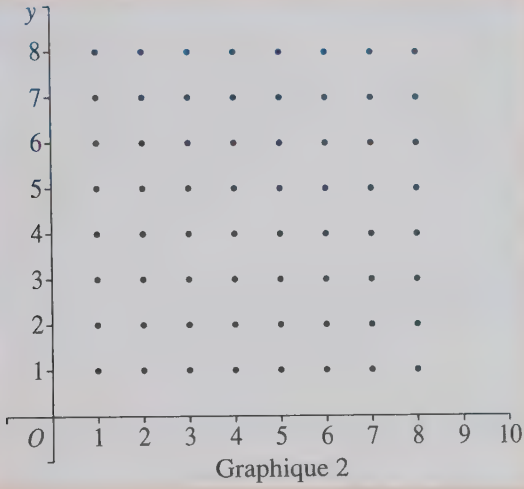
1. Démontrer que les points du segment $[OA]$ sont caractérisés par les conditions :

$$0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; ay = bx.$$

2. Démontrer que, si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[OA]$ appartenant au réseau $R_{a,b}$.
 3. Démontrer que, si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[OA]$ contient au moins un autre point du réseau.
- (On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)

Annexe





Corrige page 86

EXERCICE 3 Nombres complexes – Lieux géométriques (4 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour le dessin : $\|\vec{u}\| = 4 \text{ cm}$.

M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z .

A - Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z' , puis une relation entre les arguments de z et z' .
2. Démontrer que les points O , M et M' sont alignés.
3. Démontrer que, pour tout nombre complexe z non nul, on a l'égalité :

$$\overline{z' + 1} = \frac{1}{z} (z - 1).$$

B - Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1 .

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z - 1| = 1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$?
2. Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'affixe z , distinct du point O .
 - a) Démontrer que $|z' + 1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
 - b) Est-il vrai que, si z' vérifie l'égalité : $|z' + 1| = |z'|$, alors z vérifie l'égalité : $|z - 1| = 1$?
3. Tracer l'ensemble $\mathcal{C}$ sur une figure. Si M est un point de $\mathcal{C}$, décrire et réaliser la construction du point M' .

Corrigé page 83

EXERCICE 4 Analyse – Fonction exponentielle, Intégration par parties (7 points)**A – Restitution organisée de connaissances**

On suppose connu le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0.$$

E - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On prendra 2 cm pour unité graphique.

1. Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.

2. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k , on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + 1)e^{kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la **partie B**, car on a :

$$f_{-1} = f \text{ et } \mathcal{C}_{-1} = \mathcal{C}.$$

1. a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.

Vérifier que, pour tout entier k , ces points appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_k$.

2. Étudier, suivant les valeurs du réel x , le signe de l'expression :

$$(x + 1)(e^x - 1).$$

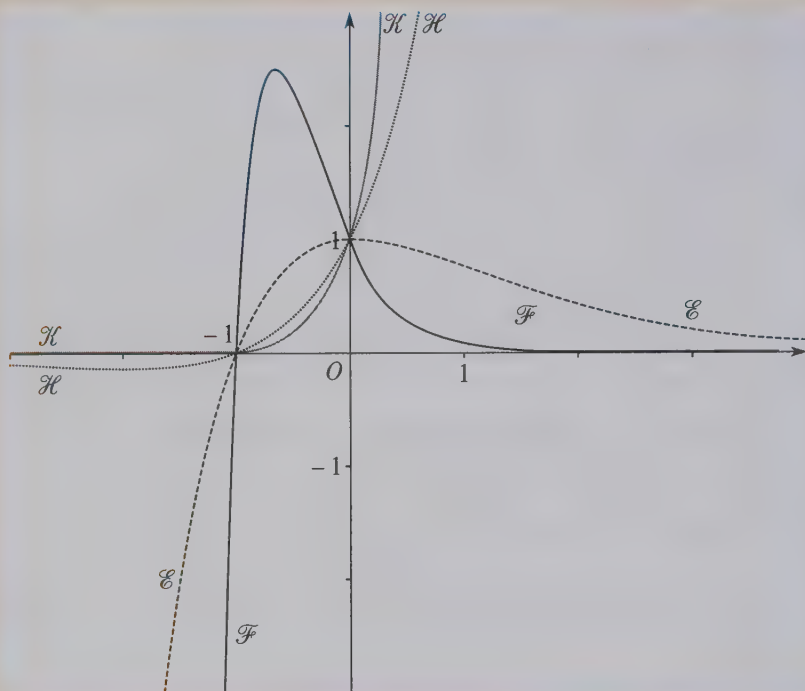
En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.

3. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.

En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k . (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

4. Le graphique de la page suivante représente quatre courbes $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$, et $\mathcal{I}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k , parmi les entiers -1 , -3 , 1 et 2 .

Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



D - Calcul d'une aire plane

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est celle définie dans la **partie B**.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer le nombre :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(t) \, dt.$$

2. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat.

Corrigé page 185

Corrigés

EXERCICE 1

Partie A

1. Proposition 1 : faux.

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ deux plans strictement parallèles, et $\mathcal{P}_2$ un plan perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$. On a bien $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$, et pourtant $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$.

2. Proposition 2 : faux.

L'exemple précédent fonctionne, car $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$, pourtant on a $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$.

3. Proposition 3 : Vrai.

On a $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont donc parallèles disjoints.

Comme $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans sécants, car $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont disjoints. Ainsi, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants car, si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre.

Finalement, $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$.

4. Proposition 4 : faux.

Prenons $\mathcal{P}_1$ parallèle à $\mathcal{P}_2$ et d une droite incluse dans $\mathcal{P}_1$.

On a donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ et $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$, alors $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Partie B

1.

Rappel de cours : pour $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul, $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne

d'un plan $\mathcal{P}$ admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal.

• $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$

et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_2$.

$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires car, sinon, on aurait $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$,

donc $\begin{cases} 1 = 2k \\ 1 = k \\ -1 = k \end{cases}$, ce qui est impossible.

Par suite, les deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

• On cherche à résoudre $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ y = -2(-y + z) - z + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ y = 3z - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z + 3 \\ y = 3z - 3 \\ z = z. \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = 3t - 3 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est une représentation paramétrique de la droite Δ .

2. $M(x; y; z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ si, et seulement si, $M(x; y; z) \in \Delta \cap \mathcal{P}_3$

si, et seulement si, $M(x; y; z)$ vérifie le système $\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = 3t - 3 \\ z = t \\ x + 2y - 4z + 3 = 0. \end{cases}$

On a $(-2t + 3) + 2(3t - 3) - 4t + 3 = -2t + 3 + 6t - 6 - 4t + 3 = 0$, pour tout réel t .

On constate que tous les points de Δ vérifient l'équation du plan $\mathcal{P}_3$.

Ainsi, l'intersection des plans $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ est la droite Δ .

EXERCICE 2

1. a) • E_1 est l'événement : « la bille tirée dans S_1 est verte ».

Dans S_1 , il y a 3 billes jaunes et deux vertes, donc $p(E_1) = \frac{2}{5}$.

• L'événement E_2 sachant que E_1 est réalisé est : « la bille tirée dans S_2 est verte sachant que la bille tirée dans S_1 est aussi verte ». En conséquence, dans S_2 , il y a 2 billes jaunes et 3 vertes.

D'où $p_{E_1}(E_2) = \frac{3}{5}$.

• L'événement E_2 sachant que $\bar{E}_1$ est réalisé est : « la bille tirée dans S_2 est verte sachant que la bille tirée dans S_1 est jaune ». Ainsi, dans S_2 , il y a 3 billes jaunes et 2 vertes.

D'où $p_{\bar{E}_1}(E_2) = \frac{2}{5}$.

Rappel de cours : formule des probabilités totales

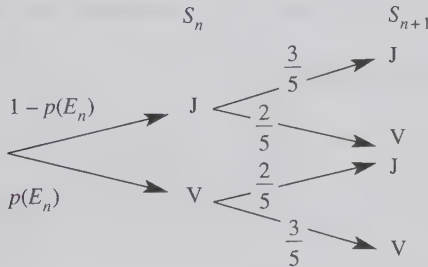
Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ formant une partition de l'univers. Soit A un événement ; on a :

$$p(A) = p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A) + \dots + p(B_n \cap A).$$

• E_1 et $\bar{E}_1$ forment une partition de l'univers. On a :

$$\begin{aligned}
 p(E_2) &= p(E_1 \cap E_2) + p(\bar{E}_1 \cap E_2) \\
 &= p_{E_1}(E_2) \times p(E_1) + p_{\bar{E}_1}(E_2) \times p(\bar{E}_1) \\
 &= p_{E_1}(E_2) \times p(E_1) + p_{\bar{E}_1}(E_2) \times (1 - p(E_1)) \\
 &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) \\
 &= \frac{12}{25}.
 \end{aligned}$$

b)



E_n et $\bar{E}_n$ forment une partition de l'univers. On a :

$$\begin{aligned}
 p(E_{n+1}) &= p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \bar{E}_n) \\
 &= p_{E_n}(E_{n+1}) \times p(E_n) + p_{\bar{E}_n}(E_{n+1}) \times (1 - p(E_n)) \\
 &= \frac{3}{5} \times p(E_n) + \frac{2}{5} (1 - p(E_n)) \\
 &= \frac{2}{5} + \frac{1}{5} p(E_n).
 \end{aligned}$$

2. a)

Rappel de cours : démonstration par récurrence

- On pose une propriété P_n .
- On initialise la récurrence en montrant que cette propriété est bien vraie au premier rang de la suite.
- On montre ensuite l'hérédité de la propriété.

Soit P_n , la propriété « $u_n \leq \frac{1}{2}$ », pour tout entier naturel $n \geq 1$.

- Initialisation : pour $n = 1$, $u_1 = \frac{2}{5} \leq \frac{1}{2}$.

Donc P_1 est vraie.

- Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour n entier naturel non nul fixé et montrons que P_{n+1} est alors vérifiée.

On a $u_n \leq \frac{1}{2}$, par hypothèse de récurrence

$$\text{et } \frac{1}{5} u_n + \frac{2}{5} \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5},$$

$$\text{soit } \frac{1}{5} u_n + \frac{2}{5} \leq \frac{5}{10},$$

$$\text{d'où } u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Donc la propriété P_n est héréditaire.

Finalement, on a montré par récurrence que $u_n \leq \frac{1}{2}$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

En conclusion, la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

b) Raisonnons par récurrence.

Soit P_n , la propriété « $u_n \leq u_{n+1}$ », pour tout entier naturel $n \geq 1$.

• Initialisation : pour $n = 1$, $u_1 = \frac{2}{5}$ et $u_2 = \frac{1}{5} \times u_1 + \frac{2}{5} = \frac{2}{25} + \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$, d'où $u_1 \leq u_2$.

Donc P_1 est vraie.

• Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour n entier naturel non nul fixé et montrons que P_{n+1} est alors vérifiée.

On a $u_n \leq u_{n+1}$, par hypothèse de récurrence

$$\frac{1}{5} u_n \leq \frac{1}{5} u_{n+1},$$

$$\frac{1}{5} u_n + \frac{2}{5} \leq \frac{1}{5} u_{n+1} + \frac{2}{5},$$

$$\text{soit } u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

Donc la propriété P_n est héréditaire.

Finalement, on a montré par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout entier naturel n .

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

c) La suite (u_n) est une suite croissante et majorée ; par conséquent, la suite (u_n) est convergente vers le réel l .

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + \frac{2}{5}, \text{ pour tout entier naturel } n \geq 1,$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \frac{1}{5} \times \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) + \frac{2}{5},$$

$$\text{soit } l = \frac{1}{5} \times l + \frac{2}{5},$$

$$\text{puis } \frac{4}{5} l = \frac{2}{5},$$

$$\text{et enfin } l = \frac{1}{2}.$$

3. a) D'après les questions précédentes, on a $u_n = p(E_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(E_n) = \frac{1}{2}$.

b) Posons $v_n = p(E_n) - \frac{1}{2} = u_n - \frac{1}{2}$. On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5} u_n + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5} u_n - \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \left(u_n - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{5} v_n,$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$

et de raison $\frac{1}{5}$.

$$\text{On a donc } v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \times v_1 = -\frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1},$$

$$\text{d'où } p(E_n) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1},$$

$$\text{puis } p(E_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

On cherche n tel que : $0,499\ 99 \leq p(E_n) \leq 0,5$.

$$0,499\ 99 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \leq 0,5,$$

$$-0,000\ 01 \leq -\frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \leq 0,$$

$$0 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \leq 0,000\ 1,$$

$$0 \leq 5^{1-n} \leq 0,000\ 1,$$

$$0 \leq e^{(1-n) \ln 5} \leq 0,000\ 1,$$

$$(1-n) \ln 5 \leq \ln 0,000\ 1 = \ln 10^{-4} = -4 \ln 10,$$

$$1-n \leq \frac{-4 \ln 10}{\ln 5}, \quad \text{car } \ln 5 > 0$$

$$-n \leq -1 - \frac{4 \ln 10}{\ln 5},$$

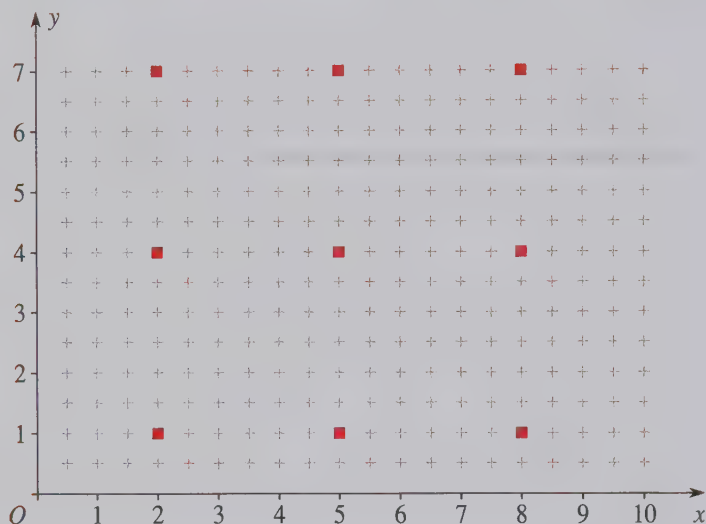
$$n \geq \frac{\ln 5 + 4 \ln 10}{\ln 5} \approx 6,72.$$

À partir de $n = 7$, $p(E_n)$ est compris entre 0,499 99 et 0,5.

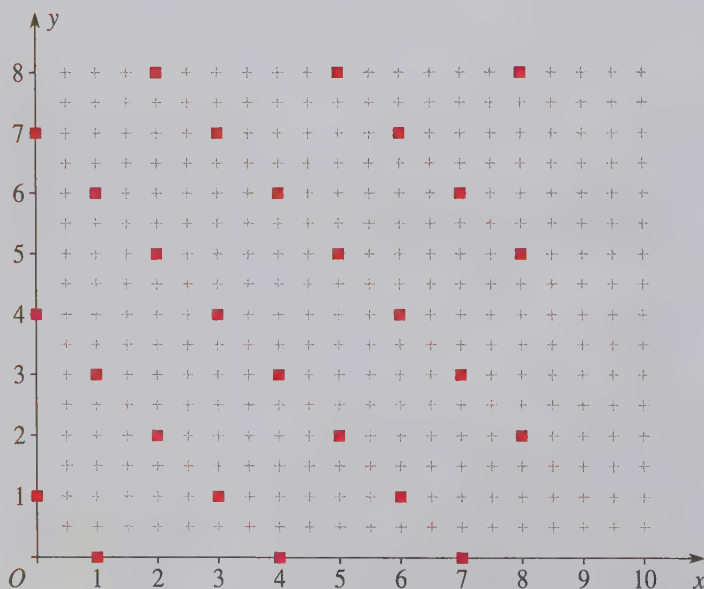
SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

Partie A

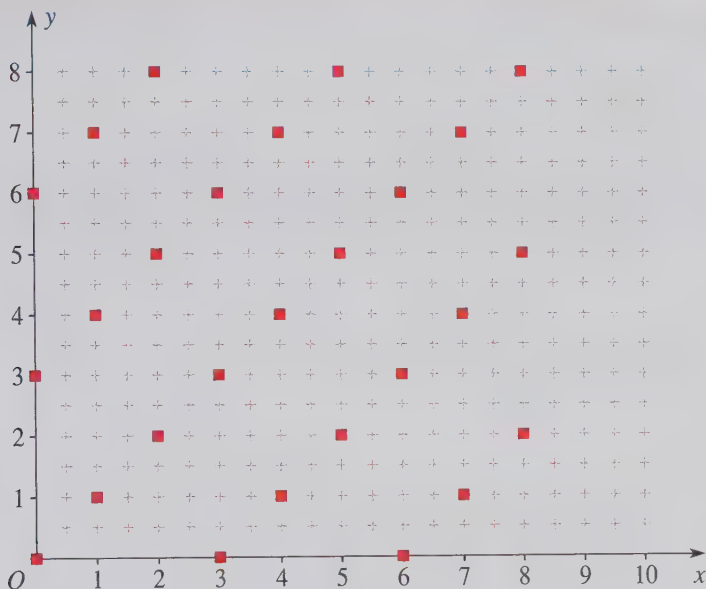
1.



2.



3.



Partie B

1.

Rappel de cours : pour résoudre une équation du type $ax + by = c$, avec a, b, c, x et y entiers relatifs, et a et b premiers entre eux :

- on cherche une solution $(x_0; y_0)$ particulière;
- on se ramène à la résolution de $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$;
- puis on utilise le théorème de Gauss.

On a $7 \times (-1) - 4 \times (-2) = -7 + 8 = 1$.

Le couple $(-1; -2)$ est donc solution de l'équation (E) : $7x - 4y = 1$.

2. On a :
$$\begin{cases} 7 \times (-1) - 4 \times (-2) = 1 \\ 7x - 4y = 1. \end{cases}$$

On fait la différence entre les deux lignes, d'où :

$$7(x + 1) - 4(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 7(x + 1) = 4(y + 2) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 7 \text{ divise } 4(y + 2) \\ 7 \text{ et } 4 \text{ sont premiers entre eux} \end{array} \right\} \text{, par suite, } 7 \text{ divise } y + 2, \text{ d'après le théorème de Gauss.}$$

Ainsi, il existe un entier relatif k tel que $y + 2 = 7k \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 7k - 2$.

On reporte dans (1) et on obtient $7(x + 1) = 4 \times 7k \Leftrightarrow x + 1 = 4k \Leftrightarrow x = 4k - 1$.

Finalement, les couples solutions sont de la forme $(4k - 1; 7k - 2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Inversement, un couple de la forme $(4k - 1; 7k - 2)$ vérifie l'équation proposée, car $7(4k - 1) - 4(7k - 2) = 1$.

Pour conclure, l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E) est de la forme $(4k - 1 ; 7k - 2)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 3. (x; y) \text{ appartient à } R_{4,7} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 4k - 1 \leq 4 \\ 0 \leq 7k - 2 \leq 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 4k \leq 5 \\ 2 \leq 7k \leq 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow k = 1. \end{aligned}$$

Pour $k = 1$, la solution est $(4 \times 1 - 1 ; 7 \times 1 - 2)$, soit $(3 ; 5)$.

Finalement, il n'y a qu'un seul point $M(3 ; 5)$ qui appartient au réseau $R_{4,7}$.

Partie C

$$\begin{aligned} 1. M(x; y) \in [OA] &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \in [0 ; 1] \text{ tel que } \overline{OM} = k\overline{OA} \\ &\Leftrightarrow x = ka \text{ et } y = kb \text{ et } k \in [0 ; 1] \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq a \text{ et } 0 \leq y \leq b \text{ et } x = ka \text{ et } y = kb \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq a \text{ et } 0 \leq y \leq b \text{ et } k = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq a \text{ et } 0 \leq y \leq b \text{ et } ay = bx. \end{aligned}$$

2. D'après la question C-1., on a $ay = bx$.

Ainsi, $\left. \begin{array}{l} a \text{ divise } bx \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{array} \right\}$ donc a divise x , d'après le théorème de Gauss.

De plus, on a $0 \leq x \leq a$, ce qui implique que $x = 0$ ou $x = a$.

De même, $\left. \begin{array}{l} b \text{ divise } ay \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{array} \right\}$ donc b divise y , d'après le théorème de Gauss.

De plus, on a $0 \leq y \leq b$, ce qui implique que $y = 0$ ou $y = b$.

Comme $ay = bx$, si $x = 0$, alors $y = 0$;

si $x = a$, alors $y = b$.

Finalement, les points $O(0 ; 0)$ et $A(a ; b)$ sont les seuls points du segment $[OA]$ appartenant au réseau $R_{a,b}$.

$$3. \text{ Soit } d = \text{PGCD}(a ; b), \text{ alors } \begin{cases} a = da', \text{ avec } 0 < a' \leq a \\ b = db', \text{ avec } 0 < b' \leq b. \end{cases}$$

On a donc l'égalité suivante : $d = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ entraîne $a'b = ab'$.

Ainsi, le point de coordonnées $(a' ; b')$ appartient au segment $[OA]$.

Ce qui permet de conclure qu'il existe au moins un autre point du réseau sur le segment $[OA]$.

EXERCICE 3**Partie A**

1.

Rappel de cours : soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ et } \arg \left(\frac{z}{z'} \right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

M est un point d'affixe non nul ; on a donc $z \neq 0$ et $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$.

$$\bullet |z'| = \left| -\frac{1}{\bar{z}} \right| = \frac{|-1|}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \arg z' &= \arg \left(-\frac{1}{\bar{z}} \right) \pmod{2\pi} \\ &= \arg(-1) - \arg(\bar{z}) \pmod{2\pi} \\ &= \pi + \arg(z) \pmod{2\pi} \quad \text{car } \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

2. D'après la question A-1., on a : $\arg z' = \pi + \arg(z) \pmod{2\pi}$.

On a donc mes $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \text{mes}(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) + \pi \pmod{2\pi}$.

On en déduit que **les points O , M et M' sont alignés.**

$$\begin{aligned} \text{3. Pour } z \neq 0, \text{ on a } \frac{1}{z}(z-1) &= 1 - \frac{1}{z} \\ &= 1 - \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}} \right)} \quad \text{car } \bar{\bar{z}} = z \\ &= 1 - \overline{\left(-\frac{1}{z'} \right)} \quad \text{car } z' = -\frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow \bar{z} = -\frac{1}{z'} \\ &= 1 - \overline{(-z')} \\ &= 1 + \overline{z'} \\ &= \overline{1 + z'} \\ &= \overline{1 + z'}. \end{aligned}$$

Partie B

1. Soit M d'affixe z .

$|z-1| = 1 \Leftrightarrow AM = 1 \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

En conséquence, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon 1.

2. a) D'après la question A-3., on a : $\overline{1+z'} = \frac{1}{z}(z-1)$, donc :

$$|\overline{1+z'}| = \left| \frac{1}{z} (z-1) \right|$$

$$|z' + 1| = \left| \frac{1}{z} \right| \times |z-1|$$

$$|z' + 1| = \left| \frac{1}{z} \right| \quad \text{car } M \in \mathcal{C}, \text{ donc } |z-1| = 1.$$

$$|z' + 1| = \left| -\frac{1}{\bar{z}} \right|$$

$$|z' + 1| = |z'|.$$

Ainsi, on a $BM' = OM'$; M' appartient à la médiatrice du segment $[OB]$.

b) Cela est vrai car :

$$|z' + 1| = |z'| \Leftrightarrow \left| -\frac{1}{\bar{z}} + 1 \right| = \left| -\frac{1}{\bar{z}} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{1}{\bar{z}} \right|$$

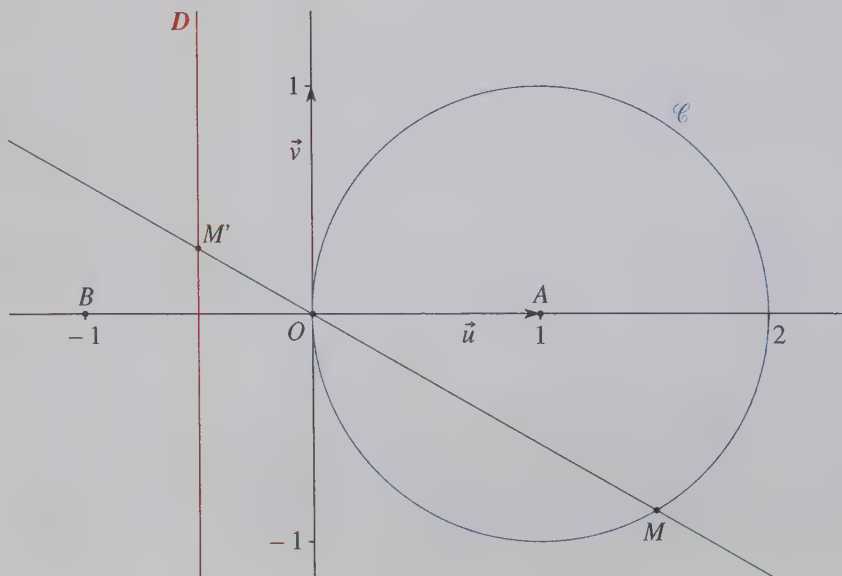
$$\Leftrightarrow \frac{|\bar{z}-1|}{|\bar{z}|} = \frac{|1|}{|\bar{z}|}$$

$$\Leftrightarrow |\bar{z}-1| = 1$$

$$\Leftrightarrow |\bar{z}-\bar{1}| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-1| = 1.$$

3.



D'après la question A-2., on sait que M' appartient à la droite (OM) . De plus, si M , distinct de O , appartient à $\mathcal{C}$, M' appartient à D médiatrice de $[OB]$ d'après la question B-2.a), M' se trouve donc à l'intersection des droites D et (OM) .

EXERCICE 4

Partie A

On a $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.

Partie B

1.

Méthode : étude de fonction

Une telle étude comprend les étapes suivantes :

- ensemble de définition de la fonction,
- limites aux bornes de cet ensemble de définition,
- dérivabilité de la fonction,
- calcul de la dérivée,
- étude du signe de la dérivée,
- sens de variation de la fonction,
- tableau de variations avec calcul des extrema.

- On a $f(x) = (x+1)e^{-x}$. f est définie sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
 - On va donc chercher les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- $f(x) = (x+1)e^{-x} = xe^{-x} + e^{-x}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ par somme.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{ par produit.}$$

Rappel de cours : dérivation

- Dérivation du produit de deux fonctions : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; uv est alors dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Dérivée de la fonction e^u : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ; e^u est alors dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-e^{-x}) = -xe^{-x}$.

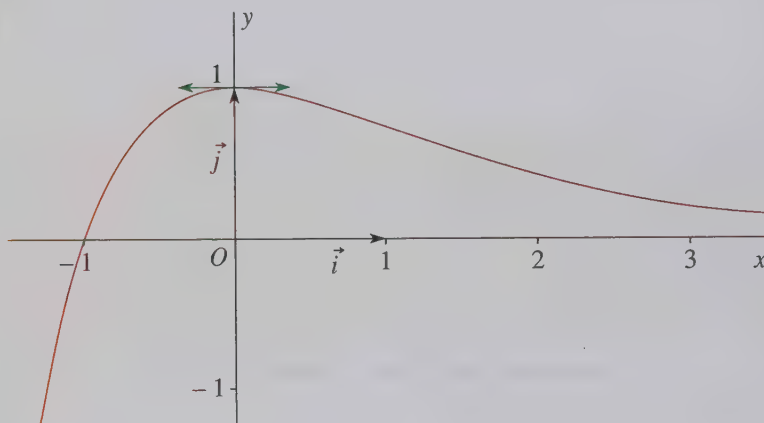
On a $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$; le signe de f' ne dépend par conséquent que du signe de $-x$.

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$,
 $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
 $f'(x) = 0$ en 0.

- Par suite, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
- Le maximum est atteint en 0 et vaut $f(0) = 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty \nearrow 1 \searrow 0$		

2.



Partie C

1. a) $f_0(x) = x + 1$, car $e^0 = 1$. Ainsi, f_0 est une fonction affine.

b) Les abscisses des points d'intersections des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ vérifient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 f_0(x) &= f_1(x) \Leftrightarrow x + 1 = (x + 1)e^x \\
 &\Leftrightarrow (x + 1)(1 - e^x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ ou } 1 - e^x = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } e^x = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \ln 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Il y a deux points d'intersection de coordonnées $(-1; 0)$ et $(0; 1)$.

On remarque que, pour tout k entier relatif,

$$f_k(-1) = (-1 + 1)e^{-k} = 0 \text{ et } f_k(0) = (0 + 1)e^{k \times 0} = 1.$$

Par suite, les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(-1; 0)$ appartiennent à toutes les courbes $\mathcal{C}_k$, pour tout k entier relatif.

2. • Étudions le signe de l'expression $(x+1)(e^x-1)$. On a :

$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$$

$$\text{car } \begin{cases} \text{pour tous réels strictement positifs } a \text{ et } b, a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b \\ \ln e^a = a, \text{ pour tout réel } a \end{cases}$$

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln 1 = 0$$

$$\text{car } \begin{cases} \ln \text{ est une fonction strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \ln e^a = a, \text{ pour tout réel } a. \end{cases}$$

On peut construire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
e^x-1	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(e^x-1)$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi :

$$(x+1)(e^x-1) > 0 \text{ sur }]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[,$$

$$(x+1)(e^x-1) < 0 \text{ sur }]-1; 0[,$$

$$(x+1)(e^x-1) = 0 \text{ en } -1 \text{ et en } 0.$$

• Étudions le signe de la différence $f_k(x) - f_{k+1}(x)$. On a :

$$f_k(x) - f_{k+1}(x) = (x+1)e^{kx}(x) - (x+1)e^{(k+1)x} = (x+1)e^{kx}(e^x-1), \text{ car } e^{a+b} = e^a \times e^b,$$

pour tous réels a et b .

Or, $e^{kx} > 0$, pour tout réel x et tout entier relatif k .

Le signe de $f_k(x) - f_{k+1}(x)$ ne dépend donc que du signe de $(x+1)(e^x-1)$.

Ainsi :

$$f_k(x) - f_{k+1}(x) \geq 0 \text{ sur }]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[,$$

$$f_k(x) - f_{k+1}(x) \leq 0 \text{ sur }]-1; 0].$$

Donc :

$$f_k(x) \geq f_{k+1}(x) \text{ sur }]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[,$$

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \text{ sur }]-1; 0].$$

Pour conclure :

$\mathcal{C}_k$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{k+1}$ sur $]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$ et $\mathcal{C}_k$ est en dessous de $\mathcal{C}_{k+1}$ sur $]-1; 0]$.

3.

Rappel de cours : dérivation

• Dérivation du produit de deux fonctions : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; uv est alors dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

• Dérivée de la fonction e^u : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ; e^u est alors dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

$x \mapsto kx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine, donc $x \mapsto e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a $f'_k(x) = 1 \times e^{kx} + (x+1)k \times e^{kx} = (kx + k + 1)e^{kx}$, pour tout réel x et tout entier relatif non nul k .

$e^{kx} > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout entier relatif non nul k ; en conséquence, le signe de $f'_k(x)$ ne dépend que du signe de $kx + k + 1$.

• Si $k > 0$:

$$kx + k + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-k-1}{k} \quad \text{car } k \neq 0$$

$$kx + k + 1 > 0 \Leftrightarrow kx > -k-1 \Leftrightarrow x > \frac{-k-1}{k} \quad \text{car } k > 0 \text{ et on ne change pas le sens de l'inégalité.}$$

Ainsi, pour $k > 0$:

$$f'_k(x) > 0 \text{ sur } \left] \frac{-k-1}{k}; +\infty \right[,$$

$$f'_k(x) < 0 \text{ sur } \left] -\infty; \frac{-k-1}{k} \right[,$$

$$f'_k(x) = 0 \text{ en } \frac{-k-1}{k}.$$

Pour conclure, si $k > 0$, f_k est strictement croissante sur $\left[\frac{-k-1}{k}; +\infty \right[$ et f_k est strictement décroissante sur $\left] -\infty; \frac{-k-1}{k} \right]$.

• Si $k < 0$:

$$kx + k + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-k-1}{k} \quad \text{car } k \neq 0$$

$$kx + k + 1 > 0 \Leftrightarrow kx > -k-1 \Leftrightarrow x < \frac{-k-1}{k} \quad \text{car } k < 0 \text{ et on change le sens de l'inégalité.}$$

Ainsi, pour $k < 0$:

$$f'_k(x) > 0 \text{ sur } \left] -\infty; \frac{-k-1}{k} \right[,$$

$$f'_k(x) < 0 \text{ sur } \left] \frac{-k-1}{k}; +\infty \right[,$$

$$f'_k(x) = 0 \text{ en } \frac{-k-1}{k}.$$

Pour conclure, si $k < 0$, f_k est strictement croissante sur $\left] -\infty; \frac{-k-1}{k} \right]$ et f_k est strictement décroissante sur $\left[\frac{-k-1}{k}; +\infty \right[$.

4. D'après la question B-1., $\mathcal{C}_{-1}$ admet un maximum en 0 qui vaut 1, la seule courbe correspondant à cette information est $\mathcal{E}$.

$\mathcal{C}_{-3}$ est croissante sur $]-\infty; -\frac{2}{3}]$, la courbe correspondant à cette information est $\mathcal{F}$.

D'après la question 2., on a : $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{k+1}$ sur $]-\infty; -1]$ et, par suite, $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_2$ sur $]-\infty; -1]$. Ainsi, $\mathcal{C}_1$ est la courbe $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}_2$ est la courbe $\mathcal{I}$.

Partie D

1.

Rappel de cours : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ telles que u' et v' le sont aussi. On a alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

$$\text{On a } A(\lambda) = \int_0^\lambda f(t) \, dt = \int_0^\lambda (t+1)e^{-t} \, dt.$$

Posons :

$$u(t) = t+1, \text{ d'où } u'(t) = 1,$$

$$v'(t) = e^{-t}, \text{ d'où } v(t) = -e^{-t}, \text{ à une constante près.}$$

u, v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et u', v' sont continues sur $\mathbb{R}$, car dérivables sur $\mathbb{R}$.

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= [-(t+1)e^{-t}]_0^\lambda - \int_0^\lambda -e^{-t} \, dt \\ &= 1 - (\lambda+1)e^{-\lambda} + \int_0^\lambda e^{-t} \, dt \\ &= 1 - (\lambda+1)e^{-\lambda} + [-e^{-t}]_0^\lambda \\ &= 2 - (\lambda+2)e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

2. Comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0$, on obtient que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = 2.$$

Sur $[0; \lambda]$, avec $\lambda > 0$, on a $f(t) > 0$, comme produit de deux nombres strictement positifs sur cet intervalle.

De plus, f est dérivable sur $[0; \lambda]$; par conséquent, $A(\lambda)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

La limite recherchée représente l'aire délimitée entre la courbe et les axes des abscisses et des ordonnées.

CONSEILS**Durée indicative de résolution :**

- Exercice 1 : 50 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 1 h 10 min.
- Exercice 4 : 60 min.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Probabilités – Conditionnement (4 points)

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.

Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A , sinon il tire au hasard une boule de l'urne B .

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ».

Montrer que $p(R) = 0,15$.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la **partie A**, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit x un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x - 2$ et -4 .

1. Déterminer la loi de probabilité de G .
2. Exprimer l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G en fonction de x .
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G) \geq 0$?

Corrigé page 96

EXERCICE 2 Nombres complexes, Géométrie dans l'espace (5 points)

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$.

Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que

$$\left| \frac{z}{1-z} \right| = 1.$$

Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».

3. Soit r la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1 + i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ ».

4. On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$.

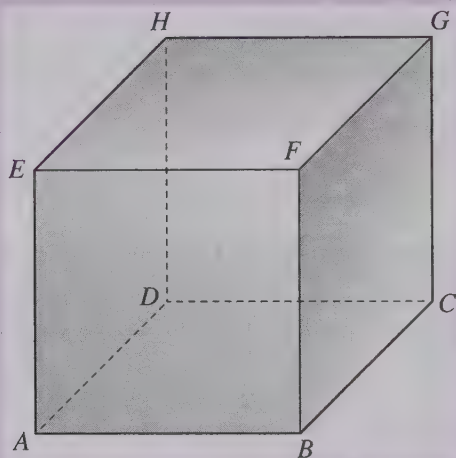
Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Partie B

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, représenté ci-dessous.

Proposition 5 : « le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) ».

Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ».



Corrigé page 98

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Nombres complexes, Arithmétique, Géométrie dans l'espace (5 points)

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe :

$$z \mapsto \frac{3}{2} (1 - i) z + 4 - 2i.$$

Proposition 1 : « $f = r \circ h$, où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2 - 2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :

Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».

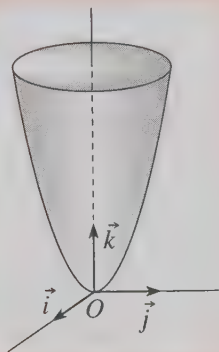
Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.

Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14; 11k + 28)$, où $k \in \mathbb{Z}$ ».

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La surface Σ ci-contre a pour équation $z = x^2 + y^2$.



Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel : soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$, où $0 \leq a \leq b \leq 9$. V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k) dk$, où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$, où $k \in [a; b]$.

Corrigé page 100

EXERCICE 3 Analyse – Fonction logarithme népérien, Suites

(6 points)

Partie A – Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$

« Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A . »

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2.$$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en **annexe** en fin d'énoncé. Cette **annexe** sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique de l'**annexe**.
Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la courbe (C) est située au-dessus de la droite (T) .

Partie C

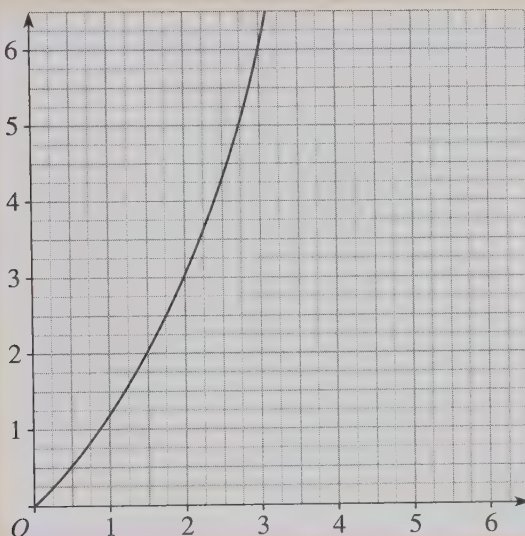
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1, \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique de l'**annexe**).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?
3. a) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$.
b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
c) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
d) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Annexe

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur.



Corrigé page 102

EXERCICE 4 Analyse – Fonction exponentielle, Intégration (5 points)

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$.

On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$1 + e^{-2}$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Partie A

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variations, tracer une courbe (C) susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

2. a) Interpréter graphiquement $g(2)$.

b) Montrer que $0 \leq g(2) \leq 2,5$.

3. a) Soit x un réel supérieur à 2.

Montrer que $\int_2^x f(t) dt \geq x - 2$.

En déduire que $g(x) \geq x - 2$.

b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$.

Partie II

On admet que, pour tout réel t , $f(t) = (t - 1)e^{-t} + 1$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\int_0^x (t - 1)e^{-t} dt$.

2. En déduire que, pour tout réel x , $g(x) = x(1 - e^{-x})$.

3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Corrige page 105

Corrigés

EXERCICE 1

Partie A

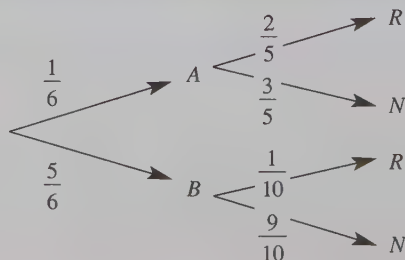
1.

Rappel de cours : formule des probabilités totales

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ formant une partition de l'univers. Soit A un événement ; on a :

$$p(A) = p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A) + \dots + p(B_n \cap A).$$

On a l'arbre suivant :



A et B forment une partition de l'univers ; ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(R) &= p(A \cap R) + p(B \cap R) = p_A(R) \times p(A) + p_B(R) \times p(B) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \\ &= 0,15. \end{aligned}$$

2. Il faut comparer $p_R(A)$ à $p_R(B)$. On a :

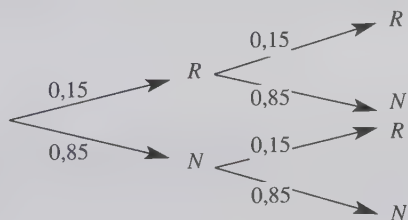
$$\begin{aligned} p_R(A) &= \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{15} \times \frac{20}{3} = \frac{4}{9} ; \\ p_R(B) &= \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{5}{6}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{12} \times \frac{20}{3} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

On constate que $p_R(A) < p_R(B)$.

La probabilité que la boule rouge provienne de A est inférieure à celle qu'elle provienne de B .

Partie B

1. Comme on répète l'épreuve deux fois dans des conditions identiques et indépendantes, on a :



La probabilité d'avoir deux boules rouges est égale à : $0,15 \times 0,15 = 0,022\ 5$.

La probabilité d'avoir une boule rouge et une noire est égale à : $2 \times 0,15 \times 0,85 = 0,255$.

La probabilité d'avoir deux boules noires est égale à : $0,85 \times 0,85 = 0,722\ 5$.

Par suite, la loi de probabilité est :

x_i	$2x$	$x - 2$	-4
$P(G) = g_i$	0,022 5	0,255	0,722 5

On vérifie que : $\sum g_i = 1$.

2.

Rappel de cours : soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$. L'espérance mathématique de X vaut :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

$$E(G) = \sum_{i=1}^3 g_i x_i = 2x \times 0,022\,5 + (x-2) \times 0,255 - 4 \times 0,722\,5 = \mathbf{0,3x - 3,4}.$$

$$3. E(G) \geq 0 \Leftrightarrow 0,3x - 3,4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3,4}{0,3} \approx 11,333\,3.$$

Comme $x \in \mathbb{N}$, il faut que le gain soit au moins de **12 €**.

EXERCICE 2

Partie A

1. Proposition 1 : faux.

Rappel de cours : z est complexe non nul et n un entier naturel non nul, on a alors :
 $\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi}$.

z a pour argument $\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$,

donc z^{100} a un argument égal à $100 \times \frac{\pi}{3} = \frac{100\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Or, $\frac{100\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$, donc z^{100} a un argument égal à $\frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$ et non égal à 0 ou $\pi \pmod{2\pi}$.

2. Proposition 2 : faux.

Rappel de cours : soient z et z' deux nombres complexes tels que $z' \neq 0$. On a :

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

$$M \in (E) \Leftrightarrow \left| \frac{z}{1-z} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z|}{|1-z|} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = |1-z| \text{ car } z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow OM = AM, \text{ où } A \text{ est le point d'affixe } 1$$

$$\Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [OA].$$

Ainsi, (E) est la médiatrice de $[OA]$.

De plus, les points O et A appartiennent à l'axe des réels ; (E) est donc perpendiculaire à l'axe des réels et non parallèle.

3. Proposition 3 : vrai.

Méthode : si A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par la rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ , alors, on a :

$$z_{A'} - z_\Omega = (z_A - z_\Omega)e^{i\theta}.$$

Soit O' , d'affixe $z_{O'}$, l'image de O par la rotation r ; on a :

$$z_{O'} - z_K = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_K)$$

$$z_{O'} = -i(-1 - i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3} = i - \sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}).$$

4. Proposition 4 : vrai.

Méthode : **résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**

On vérifie d'abord que cette expression n'est pas une identité remarquable.

Si tel n'est pas le cas, on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

• Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

$$\text{On a } z^2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4 \\ &= -4 \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \\ &= -4 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right), \quad \text{car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \text{ pour tout } x \text{ réel.}\end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta < 0$. Par suite, l'équation admet deux solutions complexes qui sont conjuguées l'une de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sqrt{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right);$$

$$\text{et } z_2 = \overline{z_1} = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right), \quad \text{car } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0.$$

On a :

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 + \left(-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1} = 1;$$

$$|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1| = 1.$$

On en conclut que cette équation admet deux solutions complexes de modules égaux à 1.

Partie B

Proposition 5 : vrai.

Méthode : pour montrer qu'un vecteur est normal à un plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Choisissons un repère $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$; ce repère est orthonormal car $ABCDEFGH$ est un cube.

Dans ce repère, on a $D(0 ; 0 ; 0)$, $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 1 ; 0)$, $E(1 ; 0 ; 1)$ et $G(0 ; 1 ; 1)$.

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \left. \begin{aligned} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DB} &= (-1) \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0 \\ \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DE} &= (-1) \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{donc } \overrightarrow{AG} \text{ est un vecteur orthogonal à } \\ &\overrightarrow{DB} \text{ et à } \overrightarrow{DE}. \end{aligned}$$

Par suite, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) .
Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE) .

Proposition 6 : vrai.

Comme $ABCDEFGH$ est un cube, les plans (AED) et (AEB) sont perpendiculaires.

De plus, la droite (EB) appartient au plan (AEB) et la droite (ED) appartient au plan (AED) . Ces droites appartiennent donc à deux plans perpendiculaires de l'espace ; ces droites (EB) et (ED) sont orthogonales.

Comme ces droites ont un point commun, le point E , on peut conclure que les droites (EB) et (ED) sont bien perpendiculaires.

Autre méthode : on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$, et on montre que ces vecteurs sont orthogonaux en calculant leur produit scalaire.

SPECIALITÉ EXERCICE 2

1. Proposition 1 : vrai.

Méthode : au brouillon, on vérifie que Ω d'affixe $-2 - 2i$ est bien un point invariant de f ; si ce n'est pas le cas, vous pouvez directement dire que la proposition est fausse, sinon il faut transformer l'écriture de l'expression complexe. Ici, Ω est bien un point invariant de f .

Rappel de cours : écriture complexe d'une similitude

Si A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par la similitude de centre Ω d'affixe z_Ω , de rapport k et d'angle θ , alors, on a :

$$z_{A'} - z_\Omega = (z_A - z_\Omega) k e^{i\theta}.$$

On a
$$\begin{cases} z' = \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i \\ z_{\Omega} = \frac{3}{2}(1-i)z_{\Omega} + 4 - 2i, \text{ car } \Omega \text{ est un point invariant de } f. \end{cases}$$

Par différence des deux équations, on obtient :

$$z' - z_{\Omega} = \frac{3}{2}(1-i)(z - z_{\Omega}).$$

Or, $1-i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

D'où $z' - z_{\Omega} = \frac{3}{2} \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z - z_{\Omega}).$

f est donc une similitude de centre Ω , de rapport $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

On en déduit f est bien la composée, dans n'importe quel ordre, d'une homothétie de centre Ω et de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec une rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2. Proposition 2 : faux.

Méthode : il suffit de prendre un contre-exemple.

Pour $n = 1$, on a $5^7 + 2^4 = 78\,141$.

Or $78\,141$ n'est pas divisible par 5 puisque son chiffre des unités n'est ni 0, ni 5.

Proposition 3 : vrai.

Méthode : on peut élever à la puissance n (avec n entier naturel non nul) les termes de part et d'autre d'une congruence :

$$\text{si } a \equiv b[p], \text{ alors } a^n \equiv b^n[p].$$

On a $5^6 = 15\,625 \equiv 1[7]$, donc $5^{6n} \equiv 1^n[7] \equiv 1[7]$, puis $5^{6n+1} = 5^{6n} \times 5 \equiv 5[7]$,

et $2^3 = 8 \equiv 1[7]$, donc $2^{3n} \equiv 1^n[7] \equiv 1[7]$, puis $2^{3n+1} = 2^{3n} \times 2 \equiv 2[7]$.

Par suite, $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 5 + 2[7] \equiv 7[7] \equiv 0[7]$.

On en déduit que $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est bien divisible par 7.

3. Proposition 4 : vrai.

Rappel de cours : pour résoudre une équation du type $ax + by = c$, avec a, b, c, x et y entiers relatifs, et a et b premiers entre eux :

- on cherche une solution $(x_0; y_0)$ particulière ;
- on se ramène à la résolution de $a(x - x_0) = b(y - y_0)$;
- puis on utilise le théorème de Gauss.

Le point de coordonnées $(14; 28)$ est une solution particulière de l'équation $11x - 5y = 14$, car $11 \times 14 - 5 \times 28 = 154 - 140 = 14$.

On a :
$$\begin{cases} 11x - 5y = 14 \\ 11 \times 14 - 5 \times 28 = 14. \end{cases}$$

Par différence des deux équations, on obtient :

$$11(x - 14) - 5(y - 28) = 0 \Leftrightarrow 11(x - 14) = 5(y - 28).$$

Donc 5 divise $11(x - 14)$.

Puis 5 divise $(x - 14)$, d'après le théorème de Gauss, car 5 et 11 sont premiers entre eux.

Ainsi, il existe un entier relatif k tel que $x - 14 = 5k$.

D'où : il existe un entier relatif k tel que $x = 14 + 5k$.

On remplace dans la première équation :

$$11(14 + 5k) - 5y = 14, \text{ d'où } y = 11k + 28.$$

4. Proposition 5 : faux.

Les coordonnées des points de la section de la surface Σ avec le plan d'équation $x = \lambda$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ z = \lambda^2 + y^2. \end{cases}$$

Ceci définit une parabole et non une hyperbole.

Proposition 6 : vrai.

$S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$, avec $k \geq 0$; par conséquent, $S(k)$ est l'aire d'un disque de rayon $\sqrt{k}$.

D'où $S(k) = \pi(\sqrt{k})^2 = \pi k$. Ainsi, on a :

$$V_1 = \int_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}} \pi k \, dk = \left[\frac{\pi k^2}{2} \right]_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi \left(9 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{2} - 0 = \frac{81\pi}{4} ;$$

$$V_2 = \int_{\frac{9\sqrt{2}}{2}}^9 \pi k \, dk = \left[\frac{\pi k^2}{2} \right]_{\frac{9\sqrt{2}}{2}}^9 = \frac{81\pi}{2} - \frac{81\pi}{4} = \frac{81\pi}{4}.$$

Finalement : $V_1 = V_2$.

EXERCICE 3

Partie A

On suppose que (u_n) est une suite croissante et non majorée.

Soit A un réel quelconque.

La suite (u_n) n'est pas majorée ; A n'est donc pas un majorant de cette suite, ce qui signifie qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

De plus, la suite (u_n) étant croissante, tous les termes de la suite à partir du rang n_0 sont supérieurs à A . Ainsi, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Partie B

1.

Méthode : Attention ! À cette question, on vous demande les variations de la fonction f et non le tableau de variations ; autrement dit, il faut décrire les variations à l'aide d'une phrase.

$x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
 $x + 1 \geq 1 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$

} ainsi $x \mapsto \ln(x + 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$
 comme composée de fonctions dérivables.

$x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme polynôme de degré 2.

Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

On a $f'(x) = \frac{1}{x+1} + x > 0$, car $x \in \mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{x+1} > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}_+$.

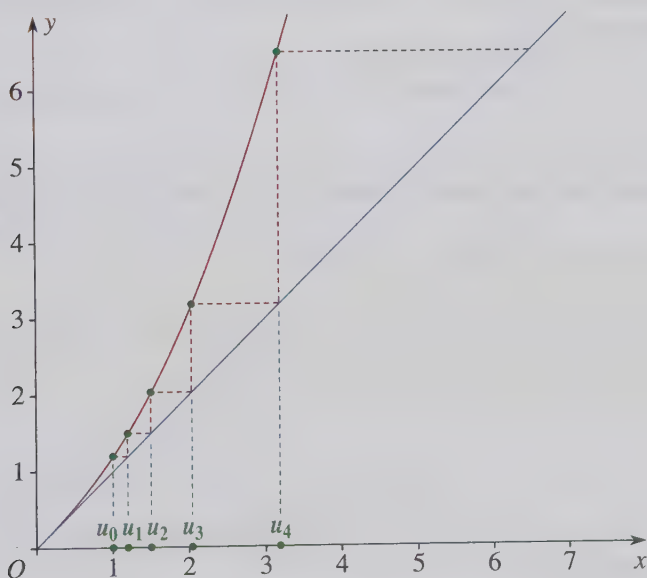
On en conclut que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. On a montré à la question B-1. que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$; f est donc dérivable en 0 et la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse 0 de la forme :
 $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = x$.

3. Voir ci-après.

Partie C

1.



2. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

3. a)

Rappel de cours : démonstration par récurrence

- On pose une propriété P_n .
- On initialise la récurrence en montrant que cette propriété est bien vraie au premier rang de la suite.
- On montre ensuite l'hérédité de la propriété.

Soit P_n , la propriété : « $u_n \geq 1$ », pour tout n de $\mathbb{N}$.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \geq 1$.

Donc la propriété P_0 est vraie.

- Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour un entier n fixé et vérifions qu'alors P_{n+1} est vérifiée. On a :

$$u_n \geq 1, \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$f(u_n) \geq f(1), \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ d'après la question B-1.}$$

$$f(u_n) \geq 1, \quad \text{car } f(1) = \ln 2 + \frac{1}{2} \approx 1,19, \text{ donc } f(1) > 1.$$

$$u_{n+1} \geq 1, \quad \text{car } f(u_n) = u_{n+1}.$$

Donc la propriété P_n est héréditaire.

Finalement, on a montré par récurrence que **$u_n \geq 1$, pour tout n entier naturel.**

b) Soit P_n , la propriété : « $u_{n+1} \geq u_n$ », pour tout n de $\mathbb{N}$.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_1 = f(u_0) = f(1) = \ln 2 + \frac{1}{2} > 1 = u_0$.

Donc la propriété P_0 est vraie.

- Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour un entier n fixé et vérifions qu'alors P_{n+1} est vérifiée. On a :

$$u_{n+1} \geq u_n, \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n), \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ d'après la question B-1.}$$

$$u_{n+2} \geq u_{n+1}.$$

Donc la propriété P_n est héréditaire.

Finalement, on a montré par récurrence que **$u_{n+1} \geq u_n$, pour tout n entier naturel.**

c)

Méthode : on utilise un raisonnement par absurde.

Supposons que la suite (u_n) soit majorée.

(u_n) est alors une suite croissante majorée ; elle converge donc vers un réel l .

$$\text{Or, } \left. \begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+, \text{ car } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \text{ d'où } f(l) = l.$$

$$\text{De plus, } \left\{ \begin{array}{l} f(x) > x, \text{ pour tout } x > 0, \text{ car on a supposé que (C) était au-dessus} \\ \quad \quad \quad \text{de sa tangente sur } \mathbb{R}_+^* \\ l \neq 0, \text{ car } l \geq 1, \text{ puisque } u_n \geq 1, \text{ pour tout entier naturel } n \end{array} \right.$$

ceci contredit l'égalité $f(l) = l$.

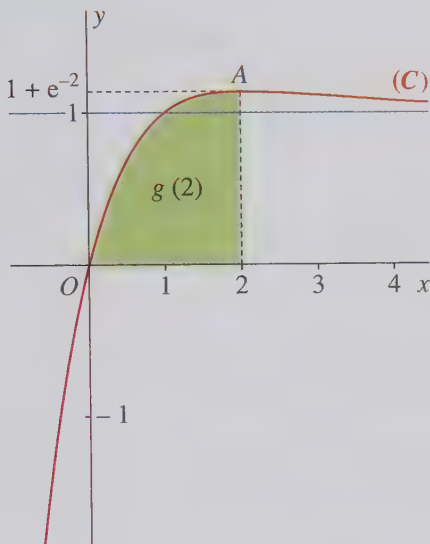
En conséquence, **la suite (u_n) n'est pas majorée.**

d) La suite est croissante et non majorée, donc (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 4

Partie A

1.



2. a) Comme f est dérivable sur $[0 ; 2]$ et $f(x) \geq 0$ sur $[0 ; 2]$ (d'après le tableau de variations), $g(2)$ représente donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

b)

Rappel de cours : soient f et g deux fonctions continues sur $[a ; b]$. Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a ; b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

On a :

$$0 \leq f(t) \leq 1 + e^{-2}$$

$$\int_0^2 0 \, dt \leq \int_0^2 f(t) \, dt \leq \int_0^2 (1 + e^{-2}) \, dt$$

$$0 \leq \int_0^2 f(t) \, dt \leq [(1 + e^{-2})t]_0^2$$

$$0 \leq \int_0^2 f(t) \, dt \leq 2(1 + e^{-2}) \approx 2,271 \leq 2,5.$$

Finalement : $0 \leq g(2) \leq 2,5$.

3. a) D'après le tableau de variations, on a $f(x) > 1$, pour tout $x \geq 2$.

$$\int_2^x f(t) dt \geq \int_2^x 1 dt$$

$$\int_2^x f(t) dt \geq x - 2, \quad \text{pour tout } x \geq 2$$

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$= \int_0^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \quad \text{d'après la relation de Chasles}$$

$$= g(2) + \int_2^x f(t) dt \geq g(2) + x - 2 \geq x - 2, \quad \text{car } g(2) \geq 0, \text{ pour tout } x \geq 2.$$

b) On a $g(x) \geq x - 2$, pour tout $x \geq 2$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, d'après le théorème de comparaison.

4. Par définition, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Or, d'après le tableau de variations, on a :

$f(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$,

$f(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$,

$f(x) = 0$.

Par suite, g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Partie B

1.

Rappel de cours : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ telles que u' et v' le sont aussi. On a alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

$$\text{On a } I = \int_0^x (t-1)e^{-t} dt.$$

$$\text{Posons } \begin{aligned} u(t) &= t-1, & \text{d'où } u'(t) &= 1, \\ v'(t) &= e^{-t}, & \text{d'où } v(t) &= -e^{-t}, \text{ à une constante près,} \end{aligned}$$

avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$, et u' et v' continues sur $\mathbb{R}$, car dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } I &= [-(t-1)e^{-t}]_0^x - \int_0^x -e^{-t} dt \\ &= (1-x)e^{-x} + (0-1)e^{-0} + [-e^{-t}]_0^x \\ &= (1-x)e^{-x} - 1 + (-e^{-x} + e^0) \\ &= -xe^{-x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad g(x) &= \int_0^x f(t) \, dt \\
 &= \int_0^x ((t-1)e^{-t} + 1) \, dt \\
 &= \int_0^x (t-1)e^{-t} \, dt + \int_0^x 1 \, dt \\
 &= -xe^{-x} + x \\
 &= x(1 - e^{-x}).
 \end{aligned}$$

$$3. \text{ On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty, \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } e^x > 0 \text{ sur } \mathbb{R},$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^{-x} = -\infty,$$

$$\text{puis } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

La Réunion

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 60 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 60 min.
- Spécialité exercice 4 : 60 min.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 Probabilités – Loi binomiale, Probabilité conditionnelle
(5 points)

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise, huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;

B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;

C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut. On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement : « le stylo présente un défaut », et E l'événement : « le stylo est accepté ».

a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0,022$ à 10^{-3} près.

3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1. b).

1. b).

Quel commentaire peut-on faire ?

Corrigé page 113

EXERCICE 2 Analyse – Intégration (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Sa courbe représentative ($\mathcal{C}$), construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variations sont donnés en annexe en fin d'énoncé.

1. Le tableau de variations de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition, ainsi que l'extremum. Énoncer, puis démontrer ces propriétés.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Sujet 6

Existe-t-il des tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui, donner leur équation.

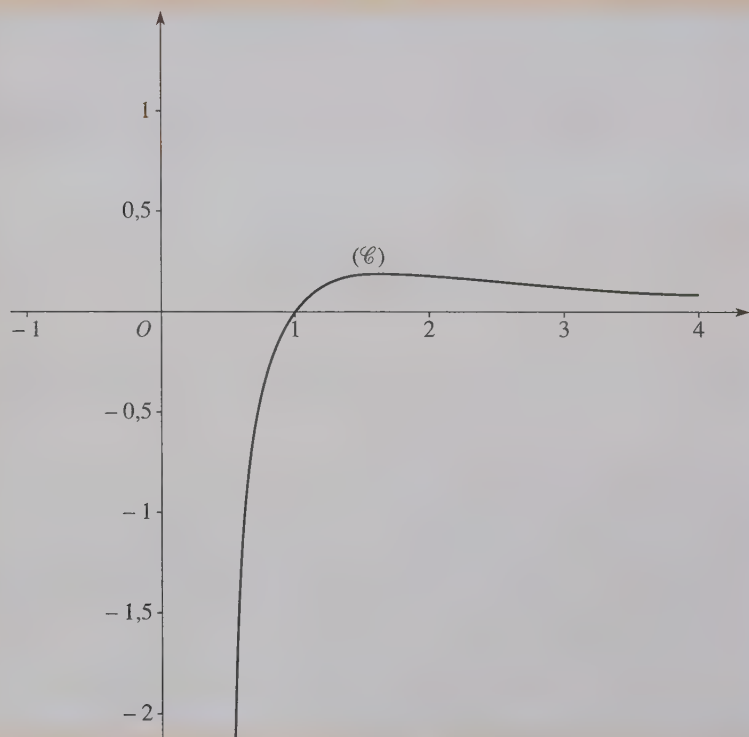
Partie II

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; \infty[$ par :

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt.$$

1. a) Que représente f pour la fonction g ?
b) En déduire le sens de variations de g sur $]0; \infty[$.
2. Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $g(x) = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}$.
b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Annexe



x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

Corrigé page 114

EXERCICE 3 Analyse – Suites (5 points)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \text{ et, pour tout entier } n \geq 1, u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1. a) Calculer u_1 .

b) Les valeurs de $u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à : 45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.

À partir de ces données, conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.

Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = 4n^2 + 12n + 5.$$

4. Valider la conjecture émise à la question 1. b).

Corrigé page 117

EXERCICE 4 Nombres complexes – Transformations géométriques, Forme trigonométrique (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère le point A de $(\mathcal{C})$ d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. a) Justifier que $(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC . Construire les points A , B et C sur la feuille de papier millimétré.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2 .

a) Compléter la figure en plaçant les points P , Q et R images respectives des points A , B et C par h .

b) Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4. Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

a) Donner l'écriture complexe de h .

b) Calculer $z_A + z_B + z_C$.

En déduire que A est le milieu du segment $[QR]$.

c) Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle $(\mathcal{C})$?

Corrigé page 118

SPÉCIALITÉ EXERCICE 4 Nombres complexes, Arithmétique (5 points)

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A , B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = i$. s_1 désigne la symétrie d'axe (AB) .

a) Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe

$$z' \text{ telle que } z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)\bar{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right).$$

b) En déduire l'affixe de C' , symétrique de C par rapport à (AB) .

c) Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x + 3y = 1$.

d) Vérifier que le point C' appartient à $(\mathcal{D})$.

2. a) Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω .

b) On désigne par s_2 la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$.

Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.

- c) Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f .
 d) Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

- a) Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation :

$$4x + 3y = 1.$$

- b) Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

Corrigé page 120

Corrigés

EXERCICE 1

1. a)

Méthode : **loi binomiale**

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A de probabilité p et $\bar{A}$ de probabilité $(1 - p)$.

Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de réalisations de l'événement A suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

On a, de plus : $E(X) = np$.

D'après l'énoncé, il s'agit ici d'une loi binomiale de paramètres :

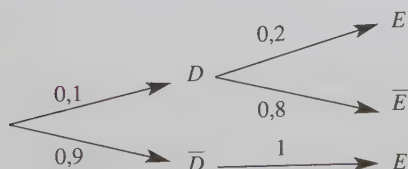
$$n = 8 \text{ et } p = p(D) = 0,1.$$

$$b) p(A) = p(X = 0) = \binom{8}{0} p^0 (1 - p)^8 = 0,9^8 \approx 0,43.$$

$$p(B) = p(X \geq 1) = 1 - p(A) = 1 - 0,9^8 \approx 0,57.$$

$$p(C) = p(X = 2) = \binom{8}{2} p^2 (1 - p)^6 = \frac{8!}{2!6!} \times 0,1^2 \times 0,9^6 \approx 0,15.$$

2. a)



b)

Rappel de cours : formule des probabilités totales

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ formant une partition de l'univers. Soit A un événement; on a :

$$p(A) = p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A) + \dots + p(B_n \cap A).$$

D et $\bar{D}$ forment une partition de l'univers. On a :

$$p(E) = p(D \cap E) + p(\bar{D} \cap E) = 0,1 \times 0,2 + 0,9 \times 1 = \mathbf{0,92}.$$

$$c) p(D/E) = \frac{p(D \cap E)}{p(E)} = \frac{0,1 \times 0,2}{0,92} = \frac{0,02}{0,92} \approx \mathbf{0,022 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

3. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés après le contrôle parmi les stylos acceptés. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p' = p(D/E) = \frac{0,02}{0,92} \approx 0,022$ à 10^{-3} près.

La probabilité demandée correspond donc au calcul de $p(Y = 0)$. On a :

$$p(Y = 0) = \binom{8}{0} p'^0 (1 - p')^8 = \left(1 - \frac{0,02}{0,92}\right)^8 \approx \mathbf{0,84}.$$

Le résultat obtenu est presque deux fois plus élevé que la probabilité $p(A)$: ainsi, on a, par ce procédé, multiplié par deux les chances d'obtenir un stylo sans défaut.

EXERCICE 2

Partie A

1. D'après le tableau de variations, on constate que la fonction est croissante sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$,

puis décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$: elle admet donc un maximum en $e^{\frac{1}{2}}$ qui vaut $\frac{1}{2e}$.

D'autre part, les limites de la fonction sont $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Démontrons maintenant ces résultats.

$$\text{On a } f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

• La fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ et dérivable sur cet intervalle comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\text{Calculons sa dérivée : } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln x > 0 \quad \text{car } x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \quad \text{car } x > 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$, puis décroissante sur

$[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$: elle admet donc un maximum en $e^{\frac{1}{2}}$. De plus, $f(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{\ln(e^{\frac{1}{2}})}{(e^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{1}{2e}$.

• Limite en 0 : $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{array} \right\}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

• Limite en $+\infty$: $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ en utilisant les croissances comparées.

2.

Rappel de cours : équation d'une tangente

Soit f une fonction définie et dérivable en a . La courbe représentative de f admet alors en a une tangente dont l'équation est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Soit $a \in]0 ; +\infty[$. La courbe représentative de f admet en a une tangente T_a dont l'équation est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

L'origine du repère appartient à T_a si, et seulement si, $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$,

si, et seulement si, $f'(a) = \frac{f(a)}{a}$ car $a \neq 0$

si, et seulement si, $\frac{1 - 2 \ln a}{a^3} = \frac{\ln a}{a^3}$,

si, et seulement si, $3 \ln a = 1$,

si, et seulement si, $a = e^{\frac{1}{3}}$.

Alors $T_{e^{1/3}}$ a pour équation $y = f'(a)x = \frac{1 - 2 \ln(e^{\frac{1}{3}})}{(e^{\frac{1}{3}})^3} x = \frac{1 - \frac{2}{3}}{e} x = \frac{1}{3e} x$, car cette droite

passse par l'origine du repère.

En conséquence, il n'y a qu'une tangente à la courbe passant par l'origine du repère ; il s'agit de la tangente en $a = e^{\frac{1}{3}}$ d'équation $y = \frac{1}{3e} x$.

Partie B

1. a) La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$; la fonction g représente donc l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en 1. On a ainsi $g' = f$.

b) D'après le tableau de variations de l'annexe, la fonction $g' = f$ est négative sur $]0 ; 1]$ et positive sur $[1 ; +\infty[$. On en déduit que la fonction g est décroissante sur $]0 ; 1]$, puis croissante sur $[1 ; +\infty[$.

2. • Comme la fonction f est continue et positive sur $[1 ; +\infty[$, $g(3)$ représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$, et la courbe de la fonction f .

$$\bullet \text{ On a : } g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-f)(t) dt.$$

Comme la fonction $(-f)$ est continue et positive sur $]0 ; 1]$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$ représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$, et la courbe de la fonction f .

3. a)

Rappel de cours : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$ telles que u' et v' le sont aussi. On a alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = \ln t, \\ v'(t) = \frac{1}{t^2}. \end{cases} \text{ Alors } \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t}, \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases} \text{ à une constante près.}$$

Les fonctions u, v sont dérivables et u', v' sont continues. Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt \\ &= \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0 \text{ par croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{x} = 0,$$

$$\text{puis } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

EXERCICE 3

1. a) On a $u_1 = (1 + 2)u_0 + 6 = 3 \times 5 + 6 = 21$.

b) On remplit le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_i	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96

On conjecture ainsi que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 8 et de premier terme 16, soit $d_n = 16 + 8n$.

2.

Rappel de cours : somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite arithmétique de raison r . On a alors :

$$S = \sum_{k=p}^n u_k = \frac{u_p + u_n}{2} \times \text{nombre de termes.}$$

Attention, la somme doit comporter n termes ; elle va donc de $k = 0$ à $k = n - 1$;

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} \times n \\ &= \frac{16 + 16 + 8(n-1)}{2} \\ &= (16 + 4n - 4)n \\ &= 4n^2 + 12n. \end{aligned}$$

3.

Rappel de cours : démonstration par récurrence

- On pose une propriété P_n .
- On initialise la récurrence en montrant que cette propriété est bien vraie au premier rang de la suite.
- On montre ensuite l'hérédité de la propriété.

Soit P_n , la propriété : « $u_n = 4n^2 + 12n + 5$ », définie pour $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 5 = 4 \times 0^2 + 12 \times 0 + 5$.

Donc la propriété P_0 est vraie.

- Hérédité : supposons qu'il existe un entier n pour lequel P_n est vraie. Montrons qu'alors P_{n+1} est vraie. On a :

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)u_n + \frac{6}{n+1} = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)(4n^2 + 12n + 5) + \frac{6}{n+1},$$

par hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{(n+3)(4n^2 + 12n + 5) + 6}{n+1} = \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21}{n+1},$$

$$\text{or, } 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5 = 4n^2 + 20n + 21,$$

$$\text{puis } [4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5](n+1) = 4n^3 + 24n^2 + 41n + 21,$$

$$\text{d'où } u_{n+1} = \frac{[4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5](n+1)}{n+1} = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5.$$

Donc la propriété P_{n+1} est vraie.

On a ainsi montré par récurrence que P_n est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculons d_n .

$$d_n = u_{n+1} - u_n = (4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5) - (4n^2 + 12n + 5).$$

$$d_n = 4n^2 + 20n + 21 - 4n^2 - 12n - 5 = 8n + 16.$$

La conjecture faite à la question 1. b) est validée.

EXERCICE 4

1.

Méthode : A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par la rotation de centre O et d'angle θ ; on a alors :

$$z_{A'} = z_A e^{i\theta}.$$

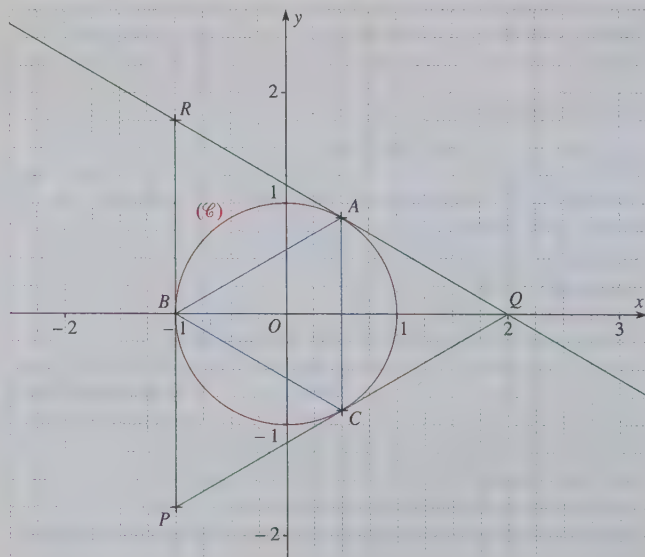
• B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

$$\text{On a ainsi } z_B = e^{\frac{2i\pi}{3}} z_A = e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{3i\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1.$$

• C est l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

$$\text{On a ainsi } z_C = e^{\frac{2i\pi}{3}} z_B = e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{i\pi} = e^{\frac{5i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

2. a) On a $|z_A| = |e^{\frac{i\pi}{3}}| = 1$, $|z_B| = 1$ et $|z_C| = |e^{-\frac{i\pi}{3}}| = 1$; les trois points A , B et C sont donc sur le cercle $(\mathcal{C})$. On en déduit que $(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC .



b)

Rappel de cours : pour tout complexe z , $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.

On remarque que $z_C = \bar{z}_A$; par suite, les points A et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Comme le point B appartient à l'axe des abscisses, le triangle ABC est isocèle en B et $BA = BC$.

Par ailleurs, on a $z_A - z_C = z_A - \bar{z}_A = 2i\operatorname{Im}(e^{\frac{i\pi}{3}}) = 2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = i\sqrt{3}$,

d'où $AC = |z_A - z_C| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$,

et $z_A - z_B = e^{\frac{i\pi}{3}} + 1 = e^{\frac{i\pi}{6}} e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{\frac{i\pi}{6}} e^{-\frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{6}} (e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{6}}) = e^{\frac{i\pi}{6}} (e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{6}})$,

$z_A - z_B = e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2\operatorname{Re}(e^{\frac{i\pi}{6}}) = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}$,

ainsi $AB = |z_A - z_B| = |\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}| = \sqrt{3}$.

Finalement, $AB = AC$ et le triangle ABC est équilatéral.

3. a) Voir figure page précédente.

b) On a $\left. \begin{array}{l} h(A) = P \\ h(B) = Q \\ h(C) = R \end{array} \right\}$, le triangle ABC a donc pour image le triangle PQR par l'homothétie h .

Comme ABC est équilatéral, PQR l'est également, car une homothétie conserve les angles.

4. a)

Méthode : A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par l'homothétie de centre O et de rapport k ; on a alors :

$$z_{A'} = kz_A.$$

h est l'homothétie de centre O et de rapport -2 ; son écriture complexe est :

$$h(z) = -2z.$$

b) • $z_A + z_B + z_C = e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 + e^{-\frac{i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$,

$$z_A + z_B + z_C = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

finalemt $z_A = -z_B - z_C$.

• Or, comme Q et R sont les images respectives de B et C , on a $z_Q = -2z_B$ et $z_R = -2z_C$.

$$\text{D'où } z_A = \frac{z_Q + z_R}{2}.$$

Ainsi, le point A est le milieu du segment $[QR]$.

c) A est le milieu du segment $[QR]$ et PQR est un triangle équilatéral ; en conséquence, (AP) est une médiane et une hauteur du segment $[QR]$.

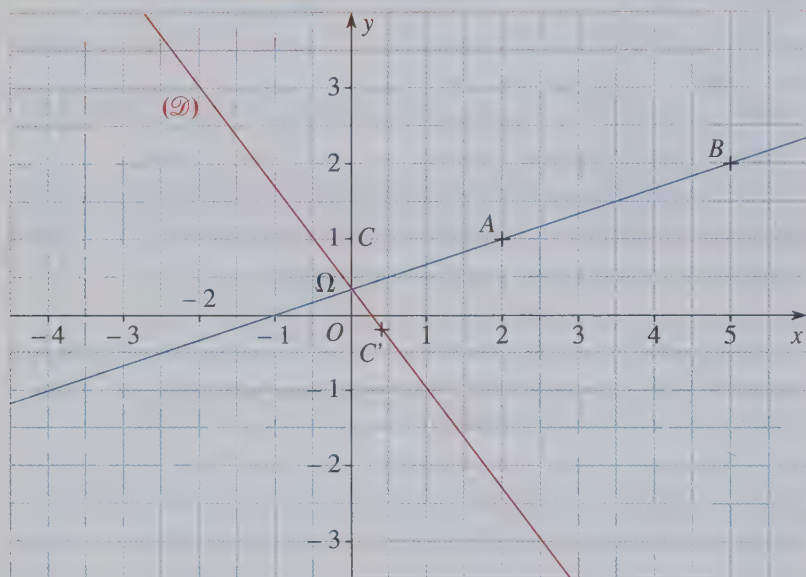
Ainsi : $(AP) \perp (QR)$.

Or, $O \in (AP)$, car $h(A) = P$.

D'où $(OA) \perp (QR)$, avec $A \in (QR)$ et $A \in (\mathcal{C})$.

On en déduit que la droite (QR) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A .

SPÉCIALITÉ EXERCICE 4



1. a)

Méthode : écriture complexe d'une similitude indirecte

Si M' , d'affixe z' , est l'image de M , d'affixe z , par une similitude indirecte, alors :

$$z = a\bar{z} + b, \text{ avec } a, b \text{ complexes et } a \text{ non nul.}$$

Une symétrie axiale est une similitude indirecte. Ainsi, s_1 a pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $s_1(A) = A$ et $s_1(B) = B$.

$$\begin{cases} s_1(A) = A \\ s_1(B) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2 - i) + b = 2 + i & (1) \\ a(5 - 2i) + b = 5 + 2i & (2) \end{cases}$$

$$\text{On soustrait (1) à (2) et on obtient : } a(3 - i) = 3 + i \Leftrightarrow a = \frac{3 + i}{3 - i} = \frac{(3 + i)^2}{9 + 1} = \frac{4 + 3i}{5}.$$

Puis en remplaçant dans (1), on en déduit :

$$b = 2 + i - \frac{(4 + 3i)(2 - i)}{5} = \frac{10 + 5i - 8 + 4i - 6i - 3}{5} = \frac{-1 + 3i}{5}.$$

L'écriture complexe de s_1 est ainsi : $z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)\bar{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } z_{C'} &= \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)\bar{z}_C + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right) = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)(-i) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right) \\ &= -\frac{4}{5}i + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i. \end{aligned}$$

c) Soit $z = x + iy$, avec x et y réels. z' est imaginaire pur si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z') = 0$.

$$\text{Or, on a } z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)(x - iy) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right) = \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{1}{5}\right) + i\left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{3}{5}\right).$$

Par suite, z' est imaginaire pur si, et seulement si, $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{1}{5} = 0$,

si, et seulement si, $4x + 3y = 1$.

L'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x + 3y = 1$.

$$\text{d) } z_{C'} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i, \text{ donc } x_{C'} = \frac{2}{5} \text{ et } y_{C'} = -\frac{1}{5}.$$

On reporte dans l'équation de $(\mathcal{D})$ $4x_{C'} + 3y_{C'} = 4 \times \frac{2}{5} + 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{5} = 1$; **le point C' appartient bien à la droite $(\mathcal{D})$.**

2. a) Cherchons l'équation de la droite (AB) sous la forme $y = ax + b$.

On a $A \in (AB)$ et $B \in (AB)$, ce qui donne le système suivant $\begin{cases} 2a + b = 1, \\ 5a + b = 2. \end{cases}$

Par soustraction des deux équations, on obtient $3a = 1$, donc $a = \frac{1}{3}$.

Puis, on en déduit $b = 1 - 2a = \frac{1}{3}$.

La droite (AB) a ainsi pour équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (AB) \cap (\mathcal{D}) \quad & \text{si, et seulement si, } \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ 4x + 3y = 1, \end{cases} \\ & \text{si, et seulement si, } \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ 4x + x + 1 = 1, \end{cases} \\ & \text{si, et seulement si, } \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Les droites (AB) et $(\mathcal{D})$ sont sécantes en un point Ω d'affixe $\omega = \frac{1}{3}i$.

b) Une symétrie axiale est une similitude indirecte. **La transformation f est la composée de deux similitudes indirectes, chacune de rapport -1 ; il s'agit donc d'une similitude directe, de rapport $(-1) \times (-1) = 1$.**

$$c) \left. \begin{array}{l} s_1(C) = C' \\ s_2(C') = C' \text{ car } C' \in (\mathcal{D}) \end{array} \right\} \text{ donc } f(C) = C'.$$

$$\left. \begin{array}{l} s_1(\Omega) = \Omega \text{ car } \Omega \in (AB) \\ s_2(\Omega) = \Omega \text{ car } \Omega \in (\mathcal{D}) \end{array} \right\} \text{ donc } f(\Omega) = \Omega.$$

d) D'après la question 2. b), f est une similitude directe de rapport 1 et, d'après la question 2. c), le point Ω est invariant. Il s'agit donc d'une rotation de centre Ω .

3. a)

Rappel de cours : pour résoudre une équation du type $ax + by = c$, avec a, b, c, x et y entiers relatifs, et a et b premiers entre eux :

- on cherche une solution $(x_0; y_0)$ particulière;
- on se ramène à la résolution de $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$;
- puis on utilise le théorème de Gauss.

Recherchons une solution particulière de l'équation $4x + 3y = 1$.

On remarque que $4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1$. Le couple $(1; -1)$ est donc une solution particulière de l'équation.

$$\text{On a } \begin{cases} 4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1, \\ 4x + 3y = 1. \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $4(x - 1) + 3(y + 1) = 0$, puis $4(1 - x) = 3(y + 1)$.

4 divise $3(y + 1)$; or, 4 et 3 sont premiers entre eux. Ainsi, d'après le théorème de Gauss, 4 divise $(y + 1)$ et $y = 4k - 1$, où $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant dans $4x + 3y = 1$, on en déduit que $x = 1 - 3k$.

Les solutions de l'équation $4x + 3y = 1$ sont donc les couples de la forme :

$$(1 - 3k; 4k - 1), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Les points M de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières sont exactement les points dont les coordonnées correspondent à la question précédente ; ils ont donc des coordonnées de la forme $(1 - 3k; 4k - 1)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{On a } OM = \sqrt{(1 - 3k)^2 + (4k - 1)^2} = \sqrt{25k^2 - 14k + 2}.$$

$$\text{D'où } OM \leq 9 \text{ équivaut à } 25k^2 - 14k + 2 \leq 81,$$

$$\text{équivaut à } 25k^2 - 14k - 79 \leq 0.$$

Les racines de l'équation $25k^2 - 14k - 79 = 0$ sont :

$$k_1 = \frac{14 - 2\sqrt{2\,024}}{50} = \frac{7 - \sqrt{2\,024}}{25} \approx -1,52 \text{ et } k_2 = \frac{7 + \sqrt{2\,024}}{25} \approx 2,08,$$

$$\text{car } \Delta = 8\,096 = (2\sqrt{2\,024})^2.$$

$$\text{Par suite, } OM \leq 9 \text{ équivaut à } k \in [k_1; k_2],$$

$$\text{équivaut à } k \in \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Il y a donc quatre points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance à l'origine est inférieure à 9 :

pour $k = -1$, on obtient le point $M(4; -5)$;

pour $k = 0$, on obtient le point $N(1; -1)$;

pour $k = 1$, on obtient le point $P(-2; 3)$;

pour $k = 2$, on obtient le point $Q(-5; 7)$.

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 45 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 1 h 15 min.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Analyse – Intégration (4 points)

1. Soit f la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par $H(x) = \int_1^x f(t) dt$.

- a) Justifier que f et H sont bien définies sur $[1 ; +\infty[$.
- b) Quelle relation existe-t-il entre H et f ?
- c) Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

- a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

- b) En déduire que $\int_1^3 f(x) \, dx = 3 \ln \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) \, dx$.
- c) Montrer que, si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln \left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln \left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.
- d) En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) \, dx$, puis de $\int_1^3 f(x) \, dx$.

Compte rendu 128

EXERCICE 2 Nombres complexes – Lieux géométriques, Transformations géométriques (5 points)

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

- a) Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A , z_B et z_C trois points A , B et C .

Alors $\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA}$ et $\arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi}$.

- b) Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :

$z = e^{i\theta}$ si, et seulement si, $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

- a) Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A , z_B , z_C et z_D .
- b) Comment construire à la règle et au compas les points A , B , C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$?
- c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

a) Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

b) Donner l'écriture complexe de r .

c) Déterminer l'affixe du point E .

Corrigé page 130

SPECIALITÉ EXERCICE 2 Nombres complexes – Géométrie, Similitudes (5 points)

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si, et seulement si, f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : On se place dans le plan complexe. Démontrer que, si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B' , alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$, $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1. a) Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D .

b) Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).

c) Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de g .

- b) Construire à la règle et au compas les images respectives E , F et J par g des points A , C et O .
- c) Que constate-t-on concernant ces points E , F et J ? Le démontrer.

Corrigé page 133

EXERCICE 3 Géométrie dans l'espace – Barycentre (4 points)

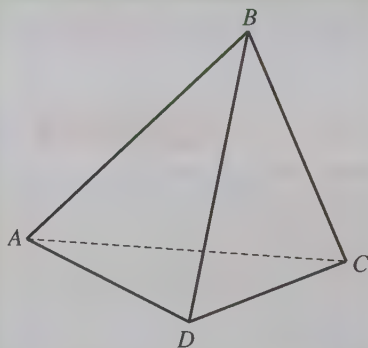
On considère un tétraèdre $ABCD$.

On note I , J , K , L , M , N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

On désigne par G l'isobarycentre des points A , B , C et D .

1. Montrer que les droites (IJ) , (KL) et (MN) sont concourantes en G .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équilatéral, car ses faces sont isométriques.)



2. a) Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b) En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN) .

b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB) . Montrer, de même, que (IJ) est orthogonale à la droite (CD) .

c) Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

Corrigé page 136

EXERCICE 4 Analyse – Équations différentielles, Suites, Fonction exponentielle (7 points)

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n .

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x)$.

a) Étudier les variations de f sur $[0 ; 20]$.

b) En déduire que, pour tout $x \in [0 ; 10]$, $f(x) \in [0 ; 10]$.

c) On donne en annexe en fin d'énoncé la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x . On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E) : y' = \frac{1}{20} y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

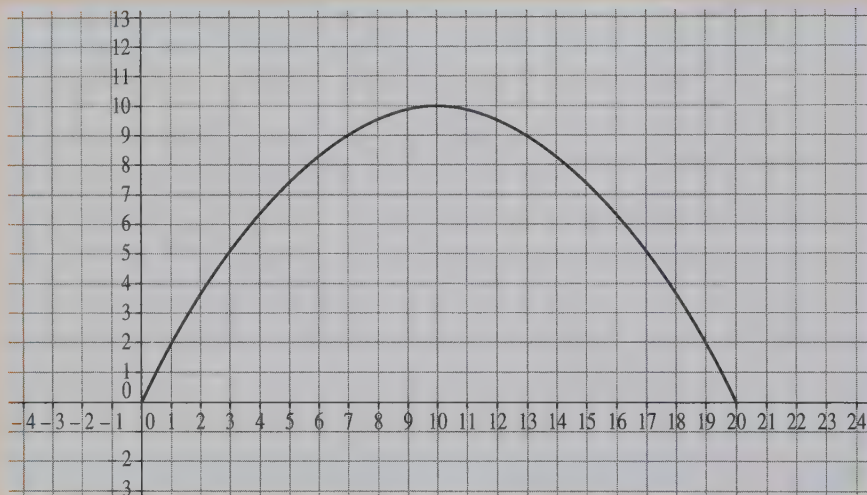
a) Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) : z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}.$$

b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E) .

2. Montrer que g est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.
3. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Annexe



Corrigé page 138

Corrigés

EXERCICE 1

1. a) • On a $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ sur $I = [1 ; +\infty[$.

$x \mapsto x$ est définie sur I ; $x \mapsto e^x - 1$ est définie sur I comme somme de fonctions définies sur I .

Par ailleurs, $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$; ainsi, $e^x - 1 \neq 0$ sur I .

On en déduit que f est définie sur I comme quotient de deux fonctions définies sur I dont le dénominateur est non nul sur I .

• $x \mapsto x$ continue sur I comme fonction affine
 $x \mapsto e^x - 1$ continue sur I , car $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ } donc f est continue sur I ;
 $e^x - 1 \neq 0$ sur I } par suite, H est définie sur I .

b) On a ainsi $H'(x) = f(x)$, pour tout x de I ; on en déduit que H est la primitive de f sur I qui s'annule en 1.

$$\begin{aligned} \text{c) } e^x - 1 > 0 &\Leftrightarrow e^x > 1 \\ &\Leftrightarrow x > \ln 1 && \text{car } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow x > 0. \end{aligned}$$

On constate que $f(x) > 0$ sur I ; ainsi, $H(3)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

$$2. \text{ a) } \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}, \text{ car } \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

b)

Rappel de cours : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ telles que u' et v' continues sur $[a; b]$. On a alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

$$\text{D'après la question précédente : } \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

$$\text{Soit } u(x) = x, \quad \text{alors } u'(x) = 1;$$

$$v'(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}, \quad \text{alors } v(x) = \ln |1 - e^{-x}| = \ln (1 - e^{-x}) \text{ (à une constante près)};$$

$$\text{car } \begin{cases} \text{une primitive de } v' = \frac{g'}{g} \text{ est de la forme } \ln |g|; \\ 1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0, \text{ donc } |1 - e^{-x}| = 1 - e^{-x} \text{ sur } I. \end{cases}$$

u et v sont dérivables sur I ; u' et v' sont continues sur I .

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent, } \int_1^3 f(x) dx &= [x \ln (1 - e^{-x})]_1^3 - \int_1^3 \ln (1 - e^{-x}) dx \\ &= 3 \ln (1 - e^{-3}) - \ln (1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln (1 - e^{-x}) dx \\ &= 3 \ln \left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln (1 - e^{-x}) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 1 \leq x \leq 3 &\Leftrightarrow -3 \leq -x \leq -1 \\ &\Leftrightarrow e^{-3} \leq e^{-x} \leq e^{-1} && \text{car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{e} \leq -e^{-x} \leq -\frac{1}{e^3} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - \frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \quad \text{car} \quad \begin{cases} \ln \text{ est strictement} \\ \text{croissante sur } \mathbb{R}_+^*; \\ 1 - \frac{1}{e} > 0. \end{cases}$$

d)

Méthode : $\mathcal{F}$ est une fonction continue sur un intervalle I ; m et M sont deux réels et a, b sont deux réels de l'intervalle I tels que $a \leq b$.

$$\text{Si } m \leq \mathcal{F} \leq M \text{ sur } [a; b], \text{ alors } m(b-a) \leq \int_a^b \mathcal{F}(x) \, dx \leq M(b-a).$$

• On a $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$ sur $[1; 3]$, d'après la question 2. c)

$$\text{d'où : } 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) \, dx \leq 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

• D'après la question 2. b), $\int_1^3 f(x) \, dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) \, dx$

d'où, en remplaçant dans la relation précédente :

$$-2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \leq - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) \, dx \leq -2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\text{puis, } \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 f(x) \, dx \leq 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

EXERCICE 2

Partie A

r est la rotation de centre Ω et d'angle α .

$$\text{Si } M \neq \Omega, M' = r(M) \text{ équivaut à } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \pmod{2\pi}, \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha \pmod{2\pi}, \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha \pmod{2\pi}, \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha \pmod{2\pi}, \end{cases}$$

$$\text{car } \frac{|z|}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right|, \text{ pour tous } z, z' \text{ de } \mathbb{C} \text{ et } z' \neq 0;$$

$$\text{équivaut à } \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}.$$

Si $M = \Omega$, $M' = r(M)$ équivaut à $M' = \Omega$ équivaut à $z' = \omega$.

En conclusion, tout point M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' , avec $z' = e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$.

Partie B

1. a) • $z_A = -\sqrt{3} - i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right)$,

donc : $\begin{cases} |z_A| = 2 ; \\ \arg z_A = -\frac{5\pi}{6} \end{cases} \pmod{2\pi}.$

• $z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$,

donc : $\begin{cases} |z_B| = 2 ; \\ \arg z_B = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \pmod{2\pi}.$

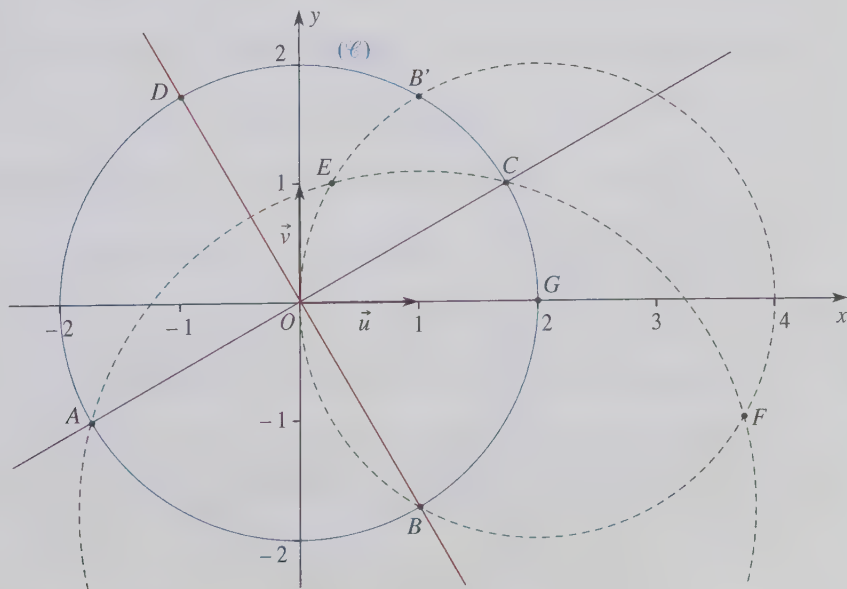
• $z_C = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$,

donc : $\begin{cases} |z_C| = 2 ; \\ \arg z_C = \frac{\pi}{6} \end{cases} \pmod{2\pi}.$

• $z_D = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$,

donc : $\begin{cases} |z_D| = 2 ; \\ \arg z_D = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \pmod{2\pi}.$

b)



L'échelle de l'énoncé n'est pas respectée.

Comme $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$, les points A, B, C et D appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2.

Soit G le point de coordonnées $(2; 0)$.

On trace le cercle de centre G et de rayon 2 ; ce cercle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points, dont l'un est B , car les triangles OBG et $OB'G$ sont équilatéraux et, ainsi, les angles

$\widehat{BOG}$ et $\widehat{B'OG}$ valent $\frac{\pi}{3}$, donc B est en dessous de l'axe des abscisses.

D est le symétrique de B par rapport à O ; on trace donc la droite (OB) et le deuxième point d'intersection avec $\mathcal{C}$ est ce point D .

Comme $\arg z_C = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$, C est le point d'intersection entre la bissectrice de l'angle $\widehat{GOB'}$ et $\mathcal{C}$.

A est le symétrique de C par rapport à O .

c) On a $z_B - z_A = (1 - i\sqrt{3}) - (-\sqrt{3} - i) = (1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3}) = (\sqrt{3} + i) - (-1 + i\sqrt{3}) = z_C - z_D$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $ABCD$ est donc un parallélogramme.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} &= \frac{(1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3}) + i(-1 - \sqrt{3})} = \frac{((1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3}))((1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}))}{(1 - \sqrt{3})^2 + (-1 - \sqrt{3})^2} \\ &= \frac{-2 + i(1 + \sqrt{3})^2 + i(1 - \sqrt{3})^2 + 2}{8} = \frac{8i}{8} = i. \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{|z_B - z_A|}{|z_B - z_C|} = \left| \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} \right| = |i| = 1, \text{ donc } AB = BC.$$

$ABCD$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux, c'est donc un losange.

$$\text{De plus, } \arg(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}) = \arg \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Ainsi, $ABCD$ est un losange ayant un angle droit ; par conséquent, **$ABCD$ est un carré.**

2. a) $ABCD$ est un carré, donc $BA = BC$ $\left\{ \begin{array}{l} E = r(A), \text{ donc } BA = BE \\ F = r(C), \text{ donc } BC = BF \end{array} \right. \}$ d'où $BA = BC = BE = BF$ et, ainsi, A, C, E et F appartiennent au cercle de centre B passant par A .

De plus, l'image du cercle de centre O et de rayon 2 par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est le cercle de centre $G = r(O)$ (car le triangle OBG est un triangle équila-

téral) et de rayon 2. Comme A et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2, leurs images par r , E et F , appartiennent au cercle de centre G et de rayon 2.

Finalement, **E et F sont les points d'intersection du cercle de centre B passant par A avec le cercle de centre G et de rayon 2.**

$$\text{b) } z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_B) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 1 + i\sqrt{3}) + 1 - i\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } z_E &= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_A - 1 + i\sqrt{3}) + 1 - i\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} - i - 1 + i\sqrt{3}) + 1 - i\sqrt{3} \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 - i\sqrt{3} \\
 &= 2 - \sqrt{3} + i.
 \end{aligned}$$

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

Partie A

Soit A, B, A', B' , quatre points d'affixes respectives $z_A, z_B, z_{A'}$ et $z_{B'}$, tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

L'écriture complexe d'une similitude directe σ est :

$$z \mapsto az + b, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ complexes et } a \neq 0.$$

Comme la similitude σ transforme A en A' et B en B' , on obtient que les réels a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b. \end{cases}$$

Comme $z_A \times 1 - 1 \times z_B = z_A - z_B \neq 0$ (car $A \neq B$, on a $z_A \neq z_B$), le système admet par conséquent une unique solution.

$$a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \neq 0, \text{ car } A' \neq B', \text{ donc } z_{A'} \neq z_{B'}, \text{ et ainsi } z_A - z_B \neq 0.$$

$$b = z_{A'} - \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \times z_A.$$

Par suite, il existe une unique similitude directe σ transformant A en A' et B en B' .

Partie B

$$1. \text{ a) } \bullet z_A = -\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right),$$

$$\text{donc : } \begin{cases} |z_A| = 2; \\ \arg z_A = -\frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

$$\bullet z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$\text{donc : } \begin{cases} |z_B| = 2; \\ \arg z_B = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

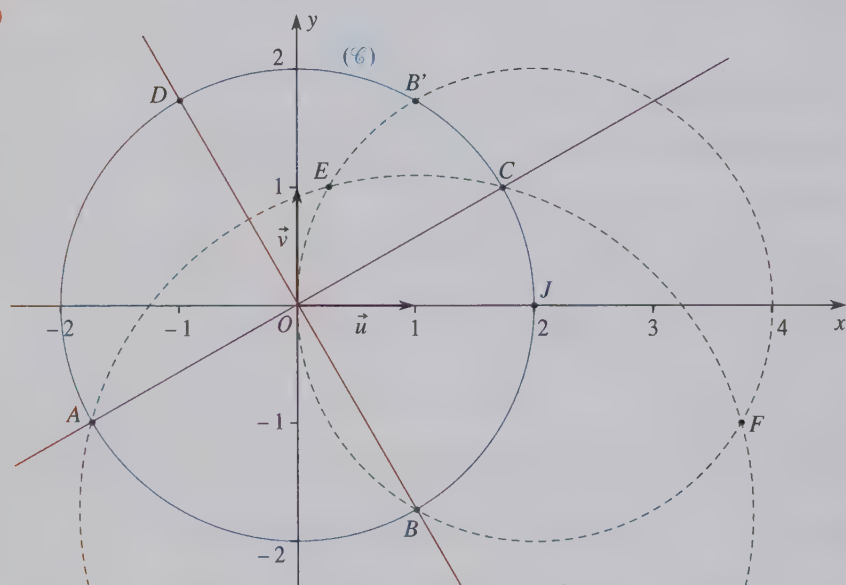
$$\bullet z_C = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right),$$

donc :
$$\begin{cases} |z_C| = 2 ; \\ \arg z_C = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

• $z_D = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right),$

donc :
$$\begin{cases} |z_D| = 2 ; \\ \arg z_D = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

b)



L'échelle de l'énoncé n'est pas respectée.

Comme $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$, les points A, B, C et D appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2.

Soit J le point de coordonnées $(2; 0)$.

On trace le cercle de centre J et de rayon 2 ; ce cercle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points, dont l'un est B , car les triangles OBG et $OB'G$ sont équilatéraux et, ainsi, les angles

$\widehat{BOJ}$ et $\widehat{B'OJ}$ valent $\frac{\pi}{3}$, donc B est en dessous de l'axe des abscisses.

D est le symétrique de B par rapport à O ; on trace donc la droite (OB) et le deuxième point d'intersection avec $\mathcal{C}$ est ce point D .

Comme $\arg z_C = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$, C est le point d'intersection entre la bissectrice de l'angle $\widehat{JOB'}$ et $\mathcal{C}$.

A est le symétrique de C par rapport à O .

$$\text{c) } \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{(-\sqrt{3} - i) + (\sqrt{3} + i)}{2} = 0; \text{ ainsi, } O, \text{ origine du repère, est le milieu de } [AC].$$

$$\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{(1 - i\sqrt{3}) + (-1 + i\sqrt{3})}{2} = 0; \text{ ainsi, } O \text{ est le milieu de } [BD].$$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} = \frac{(1 - i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)}{4} = \frac{-\sqrt{3} + i + 3i + \sqrt{3}}{4} = \frac{4i}{4} = i.$$

$\left. \begin{array}{l} O \text{ milieu de } [AC] \\ O \text{ milieu de } [BD] \end{array} \right\}$ cela signifie que $ABCD$ est un parallélogramme, car ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leurs milieux.

De plus, on a $\frac{OB}{OA} = \frac{|z_B|}{|z_A|} = \left| \frac{z_B}{z_A} \right| = |i| = 1$, d'où $OA = OB$, puis $AC = BD$, puisque les diagonales se coupent en leurs milieux.

Ainsi, $ABCD$ est un rectangle, car c'est un parallélogramme dont les diagonales ont mêmes longueurs.

$$\text{On a : } \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi};$$

par suite, $ABCD$ est un losange, car c'est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

Finalement, **$ABCD$ est un carré**, car c'est un rectangle et un losange.

2. a)

Méthode : l'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme :

$$z' = az + b, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ nombres complexes et } a \neq 0.$$

- L'angle de la similitude est donné par un argument de a .
- Le rapport est donné par le module de a .
- Le centre de la similitude est obtenu en cherchant les points fixes.

- Centre de la similitude :

$$z = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} z + 2 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) z = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z = 2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}} = 1 - i\sqrt{3} = z_B.$$

B est donc le centre de la similitude.

- Angle de la similitude : $\arg a = \arg e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$

- Rapport de la similitude : $|a| = \left| e^{-i\frac{\pi}{3}} \right| = 1.$

Par suite, **g est une rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.**

b) $ABCD$ est un carré, donc $BA = BC$
 $E = g(A)$, donc $BA = BE$
 $F = g(C)$, donc $BC = BF$ } d'où $BA = BC = BE = BF$; A, C, E et F appar-

tiennent au cercle de centre B passant par A .

De plus, l'image du cercle de centre O et de rayon 2 par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est le cercle de centre $J = r(O)$ (car le triangle OBJ est un triangle équila-

téral) et de rayon 2. Comme A et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2, leurs images par g , E et F , appartiennent au cercle de centre J et de rayon 2.

Finalement, **E et F sont les points d'intersection du cercle de centre B passant par A avec le cercle de centre J et de rayon 2.**

c) On constate que J est le milieu de $[EF]$.

D'après la question 1. c), O est le milieu de $[AC]$

g est une rotation

$$g(O) = J$$

$$g(A) = E$$

$$g(C) = F$$

une rotation conserve les milieux

donc **J est le milieu de $[EF]$.**

EXERCICE 3

1. G isobarycentre de A, B, C et D , donc G est le barycentre de $\{(A; 1), (B; 1), (C; 1), (D; 1)\}$. I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[CD]$; on obtient ainsi que G est le barycentre de $\{(I; 2), (J; 2)\}$, donc $G \in (IJ)$.

K est le milieu de $[BC]$ et L est le milieu de $[AD]$; on obtient ainsi que G est le barycentre de $\{(K; 2), (L; 2)\}$, donc $G \in (KL)$.

M est le milieu de $[AC]$ et N est le milieu de $[BD]$; on obtient ainsi que G est le barycentre de $\{(M; 2), (N; 2)\}$, donc $G \in (MN)$.

On en conclut que **les droites (IJ) , (KL) et (MN) sont concourantes en G .**

2. a) D'après la question 1., G barycentre de $\{(I; 2), (J; 2)\}$, donc G milieu de $[IJ]$
 G barycentre de $\{(K; 2), (L; 2)\}$, donc G milieu de $[KL]$ }

on en déduit que $IKJL$ est un parallélogramme, car ses diagonales $[IJ]$ et $[KL]$ se coupent en leurs milieux.

ABC triangle
 De plus, I milieu de $[AB]$
 K milieu de $[BC]$ } d'où $IK = \frac{1}{2} AC$, d'après le théorème de la droite des milieux.

ABD triangle
 L milieu de $[AD]$
 I milieu de $[AB]$ } d'où $IL = \frac{1}{2} BD$, d'après le théorème de la droite des milieux.

Or, par hypothèse, on a $BD = AC$, donc $IL = IK$.

Ainsi, **$IKJL$ est un losange**, car c'est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux.

De la même façon, **$IMJN$ et $KNLM$ sont des losanges.**

b) Les diagonales d'un losange sont orthogonales ; par suite, comme $IKJL$ est un losange, d'après la question 2. a), ses diagonales **(IJ) et (KL) sont orthogonales.** De même, on montrerait que (IJ) et (MN) sont perpendiculaires, ainsi que (KL) et (MN) .

3. a)

Rappel de cours : une droite perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan est perpendiculaire à ce plan.

D'après la question 2. b), on a : $\begin{cases} (IJ) \perp (MN) \\ (IJ) \perp (KL). \end{cases}$

De plus, $L \in (MKN)$, car $KNLM$ est un losange (d'après la question 2. a)) ; (KL) et (MN) sont donc deux droites du plan (MKN) sécantes en G (d'après la question 1.). Par suite, ces deux droites appartiennent au plan (MKN) .

Finalement, la droite (IJ) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (MKN) ; **la droite (IJ) est, en conséquence, orthogonale au plan (MKN) .**

b) • Comme (IJ) est orthogonale au plan (MKN) , cette droite est orthogonale à toute droite du plan (MKN) ; (IJ) est ainsi orthogonale à la droite (MK) ; par suite, $\vec{IJ} \cdot \vec{MK} = 0$.

• $\left. \begin{array}{l} ABC \text{ triangle} \\ M \text{ milieu de } [AC] \\ K \text{ milieu de } [BC] \end{array} \right\} \text{ d'où } \vec{MK} = \frac{1}{2} \vec{AB}, \text{ d'après le théorème de Thalès vectoriel.}$

$$\vec{IJ} \cdot \vec{MK} = 0 \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{AB} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \vec{IJ} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \vec{AB} = 0, \quad \text{car } \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Ainsi, **les droites (IJ) et (AB) sont orthogonales.**

• Comme (IJ) est orthogonale au plan (MKN) , cette droite est orthogonale à toute droite du plan (MKN) ; (IJ) est ainsi orthogonale à la droite (NK) ; par suite, $\vec{IJ} \cdot \vec{NK} = 0$.

$\left. \begin{array}{l} BDC \text{ triangle} \\ N \text{ milieu de } [BD] \\ K \text{ milieu de } [BC] \end{array} \right\} \text{ d'où } \vec{NK} = \frac{1}{2} \vec{CD}, \text{ d'après le théorème de Thalès vectoriel.}$

$$\vec{IJ} \cdot \vec{NK} = 0 \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{CD} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\vec{IJ} \cdot \vec{CD}) = 0 \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \vec{CD} = 0, \quad \text{car } \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Ainsi, **les droites (IJ) et (CD) sont orthogonales.**

c) $\left. \begin{array}{l} (IJ) \perp (AB) \\ I \text{ milieu de } [AB] \end{array} \right\} \text{ la droite } (IJ) \text{ appartient donc au plan médiateur de } [AB].$

De plus, $G \in (IJ)$ (d'après la question 1.) ; **G appartient donc au plan médiateur de $[AB]$.**

$\left. \begin{array}{l} (IJ) \perp (CD) \\ J \text{ milieu de } [CD] \end{array} \right\} \text{ la droite } (IJ) \text{ appartient donc au plan médiateur de } [CD].$

De plus, $G \in (IJ)$ (d'après la question 1.) ; **G appartient donc au plan médiateur de $[CD]$.**

d)

Méthode : cette question est une question ouverte, c'est-à-dire que la démarche scientifique est valorisée. Vous devez énoncer les idées et les réflexions que vous avez eues ; celles-ci seront prises en compte dans la notation même si cela ne vous a pas permis de conclure.

Idée : pour montrer que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, il suffit de montrer que : $GA = GB = GC = GD$.

D'après 3. c), on a $GA = GB$ et $GC = GD$, car G appartient au plan médiateur de $[AB]$ et $[CD]$.

Il resterait donc à montrer que $GB = GC$ (par exemple).

Pour cela, il suffirait de montrer que G appartient au plan médiateur de $[BC]$ et, en reprenant le raisonnement des questions 3. a) et b), on montrerait que la droite (KL) est orthogonale au plan (MNJ) .

Démonstration :

D'après la question 2. b), on a : $\begin{cases} (KL) \perp (MN) \\ (KL) \perp (IJ) \end{cases}$

De plus, les droites (IJ) et (MN) sont sécantes en G (d'après la question 1.); ces deux droites appartiennent donc au plan (MNJ) .

Finalement, la droite (KL) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (MNJ) ; la droite (KL) est par conséquent orthogonale au plan (MNJ) .

Comme (KL) est orthogonale au plan (MNJ) , cette droite est orthogonale à toute droite du plan (MNJ) . (KL) est ainsi orthogonale à la droite (NJ) ; par suite, $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{NJ} = 0$.

$\left. \begin{array}{l} BCD \text{ triangle} \\ J \text{ milieu de } [DC] \\ N \text{ milieu de } [BD] \end{array} \right\} \text{ d'où } \overrightarrow{NJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}, \quad \text{d'après le théorème de Thalès vectoriel.}$

$$\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{NJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{KL} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad \text{car } \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Ainsi, les droites (KL) et (BC) sont orthogonales.

$\left. \begin{array}{l} (KL) \perp (BC) \\ K \text{ milieu de } [BC] \end{array} \right\} \text{ la droite } (KL) \text{ appartient donc au plan médiateur de } [BC].$

De plus, $G \in (KL)$ (d'après la question 1.); G appartient par conséquent au plan médiateur de $[BC]$.

Donc $GB = GC$.

Or, d'après la question 3. c), on a $GA = GB$ et $GC = GD$, car G appartient au plan médiateur de $[AB]$ et $[CD]$.

Ainsi, $GA = GB = GC = GD$; on en conclut que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

EXERCICE 1

Partie A

$$1. a) f(x) = \frac{1}{10} x (20 - x) = -\frac{1}{10} x^2 + 2x.$$

On a $a = -\frac{1}{10} < 0$, la courbe représentative de f est donc une parabole tournée vers le

bas dont l'abscisse du sommet vaut $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times \left(-\frac{1}{10}\right)} = 10$.

Par suite, $\begin{cases} f \text{ est strictement croissante sur } [0 ; 10] ; \\ f \text{ est strictement décroissante sur } [10 ; 20]. \end{cases}$

b) $0 \leq x \leq 10$

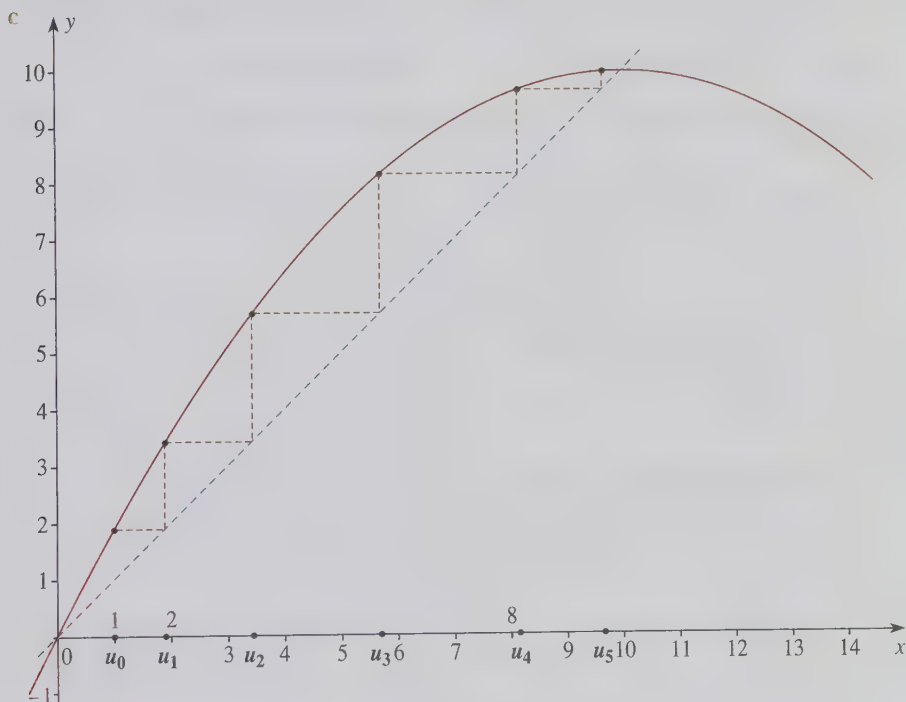
$f(0) \leq f(x) \leq f(10)$

car f est strictement croissante sur $[0 ; 10]$

$0 \leq f(x) \leq 10$

car $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(10) = 10. \end{cases}$

Finalement : si $x \in [0 ; 10]$, alors $f(x) \in [0 ; 10]$.



2.

Rappel de cours : démonstration par récurrence

- On pose une propriété P_n .
- On initialise la récurrence en montrant que cette propriété est bien vraie au premier rang de la suite.
- On montre ensuite l'hérédité de la propriété.

Soit P_n : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ », pour tout n entier naturel.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{19}{10}$;

par suite, $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$; P_0 est vraie.

• Hérédité : supposons P_n vraie pour un entier naturel n fixé et vérifions que P_{n+1} est vraie.
On a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$, d'après l'hypothèse de récurrence ;
puis $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$ car f est strictement croissante sur $[0 ; 10]$
d'après la question 1.a),

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10 \quad \text{car} \quad \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(10) = 10 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

On en conclut que la propriété est héréditaire.

On a montré par récurrence que : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$, pour tout n entier naturel.

3. D'après la question 2., on a $\begin{cases} u_n \leq u_{n+1} \\ u_n \leq 10, \end{cases}$ pour tout n entier naturel.

Par conséquent, la suite (u_n) est une suite croissante majorée par 10, donc (u_n) est convergente.

Comme $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, alors $l = \frac{1}{10} \times l (20 - l)$.

$$l = -\frac{1}{10} l^2 + 2l \Leftrightarrow l^2 - 10l = 0 \Leftrightarrow l(l - 10) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 10.$$

Or, $l \neq 0$, car (u_n) est une suite croissante dont le premier terme est $u_0 = 1$ et, ainsi, $u_n \geq 1 > 0$, pour tout n entier naturel.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$.

Partie II

1. a) z est solution de (E_1) équivaut à $z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$

$$\text{équivaut à } -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{y} + \frac{1}{20}$$

$$\text{car} \quad \begin{cases} z = \frac{1}{y} & \text{en effet, } y \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \\ z' = -\frac{y'}{y^2} & \text{et ne s'annule pas sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{20}y^2 \quad \text{car } y \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}_+$$

$$\text{équivaut à } y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$$

équivaut à y solution de (E) .

b)

Méthode : soient a et b deux réels donnés, avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont de la forme :

$$\mathcal{F}_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

$$\text{On a } (E_1) : z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

Les solutions sont de la forme $z_k(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{20} = ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}$.

On a $y = \frac{1}{z}$; on cherche donc k tel que $z_k(x) \neq 0$, pour tout x de $\mathbb{R}_+$.

Si $k \geq 0$, alors $z_k(x) > 0$.

Si $k < 0$: $z_k(x) = 0 \Leftrightarrow ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{10k}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = \ln\left(-\frac{1}{10k}\right) = -\ln(-10k)$$

$$\text{car } \begin{cases} \text{comme } k < 0, \text{ on a } -\frac{1}{10k} > 0 \\ \ln \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^* \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \ln(-10k).$$

Or, $x \in \mathbb{R}_+$; ainsi, on doit avoir

$$2 \ln(-10k) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(-10k) \geq 0 \Leftrightarrow -10k \geq 1 \Leftrightarrow k \leq -\frac{1}{10}.$$

Par suite, si $k \leq -\frac{1}{10}$, la fonction z_k s'annule pour $x = 2 \ln(-10k) \geq 0$. Il faut donc que

$k > -\frac{1}{10}$ pour que z_k ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Finalement : } y_k(x) = \frac{1}{ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{10ke^{-\frac{1}{2}x} + 1}, \text{ avec } k \in \left]-\frac{1}{10}; +\infty\right[.$$

2. Comme g est solution de (E), $g(x) = \frac{10}{10ke^{-\frac{1}{2}x} + 1}$, d'après la question 1. b).

De plus, on a $g(0) = 1$, d'où $\frac{10}{10ke^0 + 1} = 1 \Leftrightarrow 10 = 10k + 1 \Leftrightarrow 10k = 9$.

Par suite, $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$, pour tout x de $\mathbb{R}_+$.

3. Comme g est solution de (E), g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = \frac{1}{20} g(x)(10 - g(x))$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } g'(x) &= \frac{1}{20} \times \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} \times \left(10 - \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}\right) \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} \times \frac{90e^{-\frac{1}{2}x}}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

car $\exp$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$ et comme somme, produit et quotient de nombres strictement positifs.

On en conclut que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4.

Rappel de cours : théorème des limites des fonctions composées

Soient f, g deux fonctions et a, b, c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0, \\ \text{théorème sur les limites de fonctions composées.} \end{array}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 9e^{-\frac{1}{2}x} + 1 = 1,$$

$$\text{puis } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} = 1 \quad \text{par inverse,}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 10.$$

On en déduit que la courbe représentative de g admet une asymptote horizontale d'équation $y = 10$ au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, le nombre de foyers possédant un téléviseur à écran plat va, au fil du temps, se rapprocher de 10 millions en croissant.

5. On cherche à résoudre $g(x) = 5$, soit :

$$\frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} = 5$$

$$10 = 5(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1)$$

$$9e^{-\frac{1}{2}x} + 1 = 2$$

$$9e^{-\frac{1}{2}x} = 1$$

$$e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{9}$$

$$-\frac{1}{2}x = -\ln 9 \quad \text{car } \begin{cases} \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ de } \mathbb{R}_+^* \\ \ln e^x = x, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \\ \ln \frac{1}{x} = -\ln x \end{cases}$$

$$x = 2 \ln 9 = 4 \ln 3$$

$$\text{car } \ln 9 = \ln 3^2 = 2 \ln 3$$

$$x \approx 3,4.$$

En conclusion, le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera les 5 millions durant l'année 2009.

Nouvelle-Calédonie

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 50 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 1 h 10 min.
- Exercice 4 : 60 min.
- Spécialité exercice 4 : 60 min.

EXERCICE 1 Nombres complexes – Formes algébriques et trigonométriques, Lieux géométriques (4 points)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O .

1. Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

- a) 3 ; b) i ; c) $3 + i$.

2. Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :

- a) $|z| + 1$; b) $|z - 1|$; c) $|i\bar{z} + 1|$.

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

- a) $-\frac{\pi}{3} + \theta$; b) $\frac{2\pi}{3} + \theta$; c) $\frac{2\pi}{3} - \theta$.

4. Soit n un entier naturel. Le complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si, et seulement si :

- a) $n = 3$; b) $n = 6k + 3$, avec k entier relatif ; c) $n = 6k$, avec k entier relatif.

a) la droite (AB) ; **b)** le cercle de diamètre $[AB]$;

6. Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ est :

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est :

- Corrigé page 148**

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

144

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ , avec λ réel strictement positif.

a) Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ .

Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.

b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

Corrigé page 150

EXERCICE 3 Analyse – Tangente, Théorème des gendarmes (6 points)

Partie A : Question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a; +\infty[$. Compléter la phrase suivante :
On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si...

2. Démontrer le théorème « des gendarmes ».

Soient f , g et h trois fonctions définies sur $[a; +\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et, si pour tout x assez grand, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ .

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 1,$$

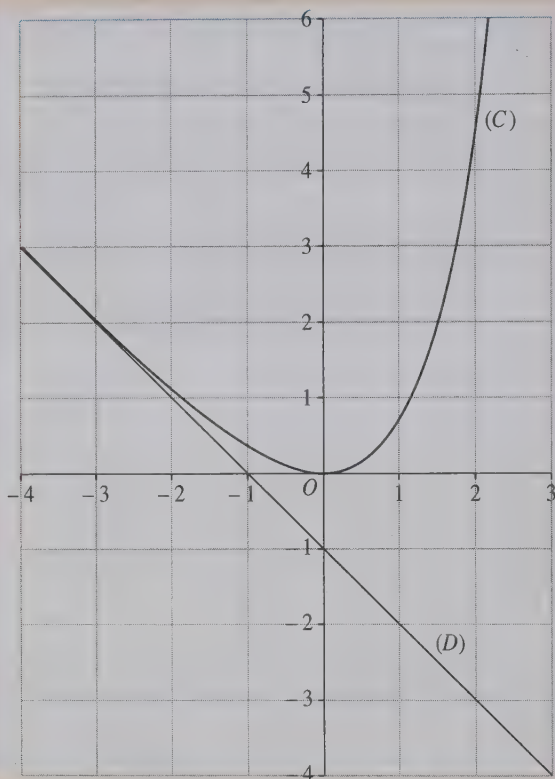
et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (C) . On a représenté sur l'**annexe**, page suivante, la courbe (C) et la droite (D) .

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a , une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse a .

2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b . Vérifier que $b - a = -1$.

3. En déduire une construction, à effectuer sur l'**annexe**, de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

Annexe



Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f .
2. En déduire, pour tout entier naturel non nul n , les inégalités suivantes :

$$(1) \quad e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} ; \quad (2) \quad e^{\frac{-1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

5. Dédurre des questions précédentes un encadrement de :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

Corrigé page 152

EXERCICE 4 Géométrie dans l'espace – Distance, Représentation paramétrique d'une droite (5 points)

Soit $OABC$ un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB , OBC , OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) . Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. a) Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

b) Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontre de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC) .

c) Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right)$.

3. a) Calculer la distance du point O au plan (ABC) .

b) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$. En déduire l'aire du triangle ABC .

c) Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

Corrigé page 154

SPÉCIALITÉ EXERCICE 4 Arithmétique – Théorème de Bézout,
Equation de la forme $ax + by = c$ (5 points)

1. a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
 b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
 c) En déduire que $6^{40} \equiv 1[11]$ et que $6^{40} \equiv 1[5]$.
 d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2. Dans cette question, x et y désignent des entiers relatifs.

- a) Montrer que l'équation :

$$(E) \quad 65x - 40y = 1$$

n'a pas de solution.

- b) Montrer que l'équation :

$$(E') \quad 17x - 40y = 1$$

admet au moins une solution.

- c) Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E') .

- d) Résoudre l'équation (E') .

En déduire qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.

3. Pour tout entier naturel a , démontrer que, si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$, alors $b^{33} \equiv a[55]$.

Corrigé page 157

Corrigés

EXERCICE 1

Cet exercice est un Q.C.M. dans lequel il est précisé que, pour chaque question, il n'existe qu'une bonne réponse. Par conséquent, on peut raisonner soit de manière directe en faisant le calcul, soit par élimination des mauvaises réponses. Aucune justification n'est demandée le jour de l'examen ; les explications données ci-après le sont dans un souci de compréhension.

1. Réponse c).

En effet, on vérifie que $2(3 + i) + \overline{(3 + i)} = 6 + 2i + 3 - i = 9 + i$.

2. Réponse c).

$$|i\bar{z} + 1| = |i(\bar{z} - i)|, \quad \text{car } i^2 = -1$$

$$\begin{aligned}
 |i\bar{z} + 1| &= |i| |\bar{z} - i|, & \text{car } |zz'| &= |z| |z'|, \text{ pour tous } z \text{ et } z' \text{ complexes} \\
 |i\bar{z} + 1| &= |z + i|, & \text{car } |i| &= 1 \\
 |i\bar{z} + 1| &= |z + i|, & \text{car } |\bar{z}| &= |z| \text{ pour tout complexe } z.
 \end{aligned}$$

3. Réponse b).

$$\begin{aligned}
 \arg\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right) &= \arg(-1 + i\sqrt{3}) - \arg(\bar{z}) \pmod{2\pi}, \\
 &\quad \text{car } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi} \\
 \arg\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right) &= \arg\left(2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \arg(z) \pmod{2\pi}, \\
 &\quad \text{car } \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi} \\
 \arg\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right) &= \arg\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) + \arg(z) \pmod{2\pi} \\
 \arg\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right) &= \frac{2\pi}{3} + \theta \pmod{2\pi}.
 \end{aligned}$$

4. Réponse b).

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3} + i)^n &= \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n, \\
 (\sqrt{3} + i)^n &= 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}, & \text{car } (e^{ia})^n &= e^{ina}, \text{ pour tous } a \text{ réel et } n \text{ entier.} \\
 (\sqrt{3} + i)^n &\text{ est imaginaire pur si, et seulement si, } e^{i\frac{n\pi}{6}} \text{ l'est également,} \\
 &\text{si, et seulement si, } \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0, \\
 &\text{si, et seulement si, } \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \\
 &\text{si, et seulement si, } \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ entier relatif,} \\
 &\text{si, et seulement si, } n = 3 + 6k, k \text{ entier relatif.}
 \end{aligned}$$

5. Réponse c).

$$\begin{aligned}
 |z - i| &= |z + 1| \\
 &\text{équivalent à } |z - z_A| = |z - z_B|, \\
 &\text{équivalent à } AM = BM, \\
 &\text{équivalent à } M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [AB], \\
 &\text{équivalent à } M \text{ appartient à la droite perpendiculaire à } (AB) \text{ passant} \\
 &\text{par } O, \text{ car } O \text{ vérifie } OA = OB.
 \end{aligned}$$

6. Réponse c).

$$\begin{aligned}
 |z - 1 + i| &= |3 - 4i| \\
 &\text{équivalent à } |z - z_\Omega| = \sqrt{3^2 + (-4)^2}, \\
 &\text{équivalent à } \Omega M = 5, \\
 &\text{équivalent à } M \text{ appartient au cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } 5, \\
 &\text{équivalent à } z = z_\Omega + 5e^{i\theta}, \text{ avec } \theta \text{ réel quelconque,} \\
 &\text{équivalent à } z = 1 - i + 5e^{i\theta}, \text{ avec } \theta \text{ réel quelconque.}
 \end{aligned}$$

7. Réponse a).

On cherche un point C tel que $AB = AC$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, donc un complexe

$$z \text{ tel que } \frac{z_A - z}{z_A - z_B} = i.$$

$$\text{Or, } \frac{z_A - z}{z_A - z_B} = \frac{4 - z}{4 - 3i} = i \quad \text{équivalent à } 4 - z = i(4 - 3i),$$

$$\text{équivalent à } z = 4 - i(4 - 3i) = 4 - 4i - 3 = 1 - 4i.$$

8. Réponse c).

$$\frac{z-2}{z-1} = z \quad \text{équivalent à } z-2 = z(z-1), \text{ avec } z \neq 1,$$

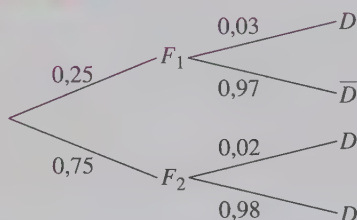
$$\text{équivalent à } z^2 - 2z + 2 = 0, \text{ avec } z \neq 1,$$

$$\text{équivalent à } z = \frac{2+2i}{2} = 1+i \text{ ou } z = \frac{2-2i}{2} = 1-i,$$

$$\text{car } \Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2.$$

EXERCICE 2

1. a)



b)

Rappel de cours : formule des probabilités totales

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ formant une partition de l'univers. Soit A un événement ; on a :

$$p(A) = p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A) + \dots + p(B_n \cap A).$$

$D \cap F_1$ correspond à l'événement : « le composant vient du premier fournisseur et il est défectueux ».

En utilisant la branche supérieure de l'arbre pondéré, on obtient :

$$p(D \cap F_1) = p_{F_1}(D) \times p(F_1) = 0,03 \times 0,25 = \mathbf{0,0075}.$$

Les événements F_1 et F_2 forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales, on a ainsi :

$$p(D) = p(D \cap F_1) + p(D \cap F_2) = 0,0075 + 0,75 \times 0,02 = \mathbf{0,0225}.$$

c) Nous devons ici calculer $p_D(F_1)$.

$$p_D(F_1) = \frac{p(D \cap F_1)}{p(D)} = \frac{0,0075}{0,0225} = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}.$$

2.

Méthode: loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A de probabilité p et $\bar{A}$ de probabilité $(1 - p)$.

Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X , égale au nombre de réalisations de l'événement A , suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

On a, de plus : $E(X) = np$.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de composants défectueux. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = p(D) = 0,0225$.

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$$

$$= 1 - \binom{20}{0} \times 0,0225^0 \times 0,9775^{20} - \binom{20}{1} \times 0,0225^1 \times 0,9775^{19},$$

$$p(X \geq 2) = 1 - 0,0225^0 \times 0,9775^{20} - 20 \times 0,0225^1 \times 0,9775^{19},$$

$$p(X \geq 2) = \mathbf{0,074}.$$

3. a)

Rappel de cours : si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ sur $[0 ; +\infty[$, alors on a, pour $0 \leq a \leq b$:

$$p(X \in [a ; b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$\text{et } p(X \in [a ; +\infty[) = 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

$$\text{Ici, on a } p(X > 5) = p(X \geq 5) = p(X \in [5 ; +\infty[) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t} dt,$$

$$\text{puis } p(X > 5) = 1 + [e^{-\lambda t}]_0^5 = 1 + e^{-5\lambda} - 1 = e^{-5\lambda}.$$

On doit donc résoudre $e^{-5\lambda} = 0,325$.

En appliquant la fonction logarithme, on obtient :

$$-5\lambda = \ln(0,325), \text{ soit } \lambda = -\frac{\ln(0,325)}{5} \approx \mathbf{0,225}.$$

$$\text{b) On a } p(0 \leq X \leq 8) = \int_0^8 \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^8 = -e^{-0,225 \times 8} + 1 = -e^{-1,8} + 1 \approx \mathbf{0,835}.$$

La probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans est 0,835.

Du résultat précédent, on déduit : $p(X > 8) = 1 - p(0 \leq X \leq 8) = e^{-1,8} \approx 0,165$.

La probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans est 0,165.

$$\text{c) On a } p_{X>3}(X > 8) = \frac{p((X > 8) \cap (X > 3))}{p(X > 3)} = \frac{p(X > 8)}{p(X > 3)};$$

$$\text{or, } p(X > 3) = 1 - \int_0^3 \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 + [e^{-\lambda t}]_0^3 = 1 + e^{-3 \times 0,225} - 1 = e^{-0,675} \approx 0,509,$$

$$\text{d'où : } p_{X>3}(X > 8) = \frac{e^{-1,8}}{e^{-0,675}} = e^{-1,125} \approx 0,325.$$

La probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans est ainsi de 0,325.

EXERCICE 3

Partie A

1. On dit que f admet une limite finie l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$, pour x assez grand.

2. I est un intervalle ouvert contenant l .

Il existe un réel x_0 tel que, si $x \geq x_0$, on a $g(x) \in I$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$.

Il existe un réel x_1 tel que, si $x \geq x_1$, on a $h(x) \in I$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$.

Il existe un réel x_2 tel que, si $x \geq x_2$, on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Soit M le plus grand des trois nombres x_0 , x_1 et x_2 .

Pour tout $x \geq M$, on a $g(x) \in I$ et $h(x) \in I$, donc $f(x) \in I$.

Ainsi, f a pour limite l en $+\infty$.

Partie B

1.

Rappel de cours : si C est la courbe représentative d'une fonction dérivable sur un intervalle I , alors, pour tout réel a dans I , la tangente à C , au point d'abscisse a , a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont.

Par suite, la tangente à C , au point d'abscisse a , a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$f'(a) = e^a - 1$, donc (T) : $y = (e^a - 1)(x - a) + e^a - a - 1$;

$$(T) : y = (e^a - 1)x + (1 - a)e^a - 1.$$

2. On cherche le point d'intersection entre la droite (D) et la tangente (T) ; on doit, par conséquent résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y = (e^a - 1)x + (1 - a)e^a - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} -x - 1 = (e^a - 1)x + (1 - a)e^a - 1 \\ y = -x - 1, \end{cases}$$

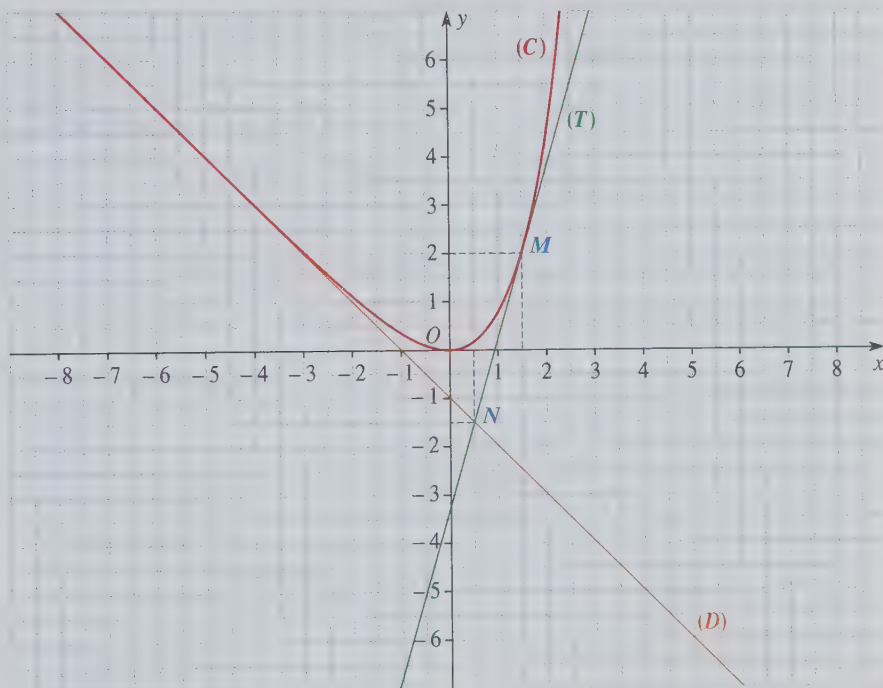
$$\text{équivaut à } \begin{cases} -(1 - a)e^a = e^a x \\ y = -x - 1, \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = -1 + a \\ y = -x - 1, \text{ car } e^a \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = -1 + a \\ y = -a. \end{cases}$$

L'énoncé indique que le point d'intersection a pour abscisse b ; on a donc $b = -1 + a$, c'est-à-dire $b - a = -1$.

3. La tangente (T) passe par le point M de la courbe C d'abscisse 1,5. D'autre part, d'après la question précédente, elle passe également par le point N de (D) d'abscisse $b = -1 + a = -1 + 1,5 = 0,5$. Connaissant deux points de la droite, on peut effectuer le tracé.



Partie C

1. La courbe C est toujours au-dessus de l'axe des abscisses, donc $f(x) \geq 0$, pour tout réel x .

2. On a $f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$, d'après 1.; ainsi $e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1 \geq 0$, puis $e^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n} + 1$ (1).

De même, $f\left(-\frac{1}{n+1}\right) \geq 0$ d'après 1.; ainsi $e^{-\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{n+1} - 1 \geq 0$,

puis $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$ (2).

3. $e^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n} + 1$ équivaut à $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$,

équivaut à $e \geq \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$,

car $(e^a)^n = e^{na}$, pour tout réel a et tout entier n .

$$4. e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1} \text{ équivaut à } \left(e^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\text{équivaut à } e^{-1} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\text{équivaut à } e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

$$\text{car } a \geq b \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}, \text{ pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positifs}$$

$$\text{équivaut à } e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

5. En utilisant les deux questions précédentes, on obtient directement :

$$\text{d'après la question 4., } e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1};$$

$$\text{ceci implique que } e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right), \text{ puis } \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ car } 1 + \frac{1}{n} \neq 0;$$

$$\text{avec la question 3., on a : } \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e;$$

$$\text{or, on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{1 + \frac{1}{n}}\right) = e.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ possède une limite en $+\infty$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

EXERCICE 4

1. a)

Rappels de cours :

- Une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toute droite contenue dans ce plan.
- Une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale à ce plan.

La droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) par définition du point H ; elle est donc orthogonale à toute droite contenue dans ce plan. Ainsi, (OH) est orthogonale à (BC) . La droite (OA) est orthogonale à (OB) , car le triangle OAB est rectangle en O et elle est aussi orthogonale à (OC) , car le triangle OAC est rectangle en O .

Par conséquent, comme (OA) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (OBC) , on a $(OA) \perp (OBC)$.

Ainsi, (OA) est orthogonale à toute droite contenue dans ce plan, donc en particulier à (BC) .

b) D'après la question précédente, on a $(BC) \perp (OH)$ et $(BC) \perp (OA)$. En utilisant la propriété rappelée à la question précédente, on en déduit que $(BC) \perp (OAH)$, puis que $(BC) \perp (AH)$.

On admet, comme indiqué dans l'énoncé, que l'on pourrait montrer de la même manière que $(BH) \perp (AC)$.

c) $(BC) \perp (AH)$ implique que H appartient à la hauteur de ABC issue de A .

$(BH) \perp (AC)$ implique que H appartient à la hauteur de ABC issue de B .

On en déduit que **le point H est à l'intersection de deux hauteurs du triangle (ABC) : c'est donc l'orthocentre du triangle (ABC) .**

2. a) Le plan (ABC) a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

$A \in (ABC)$, donc $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$, ainsi $a + d = 0$.

$B \in (ABC)$, donc $ax_B + by_B + cz_B + d = 0$, ainsi $2b + d = 0$.

$C \in (ABC)$, donc $ax_C + by_C + cz_C + d = 0$, ainsi $3c + d = 0$.

On doit ainsi résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} a + d = 0 \\ 2b + d = 0 \\ 3c + d = 0. \end{cases}$$

On obtient
$$\begin{cases} a = -d \\ b = -\frac{d}{2}, \\ c = -\frac{d}{3}. \end{cases}$$
 avec d réel quelconque

Par suite, **le plan (ABC) a pour équation $-dx - \frac{d}{2}y - \frac{d}{3}z + d = 0$ (d quelconque non nul), ce qui donne, en choisissant $d = -6$, $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.**

b)

Rappel de cours :

– Un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

– La droite passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ a pour

système d'équations paramétriques
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct. \end{cases}$$

(D) est orthogonale au plan (ABC) ; elle admet donc pour vecteur directeur un vecteur

normal à (ABC) , comme, par exemple, $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le système d'équations paramétriques de (D) est, par conséquent :

$$\begin{cases} x = x_0 + 6t = 6t \\ y = y_0 + 3t = 3t, \text{ avec } t \text{ réel quelconque} \\ z = z_0 + 2t = 2t. \end{cases}$$

c) Soit un point $M(x; y; z)$ appartenant à l'intersection de (D) et (ABC) .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \\ 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases} & \text{équivalent à } \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \\ 36t + 9t + 4t - 6 = 0 \end{cases} \\ & \text{équivalent à } \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \\ t = \frac{6}{49} \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x = \frac{36}{49} \\ y = \frac{18}{49} \\ z = \frac{12}{49} \\ t = \frac{6}{49} \end{cases} \end{aligned}$$

La droite (D) et le plan (ABC) s'intersectent en $H\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right)$.

3. a)

Rappel de cours : dans un repère orthonormal, la distance du point $A(\alpha; \beta; \gamma)$ au plan P d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est égale à :

$$d(A, P) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$d(O, (ABC)) = \frac{|6x_0 + 3y_0 + 2z_0 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}.$$

La distance du point O au plan (ABC) vaut donc $\frac{6}{7}$.

b)

Rappel de cours : soit $OABC$ un tétraèdre. Son volume est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{hauteur}) \times (\text{aire de la base}).$$

On a $V = \frac{1}{3} \times OA \times \text{aire}(OBC)$, car (OA) est orthogonale au plan (OBC) d'après la question 1. a).

Or, $OA = 1$ et $\text{aire}(OBC) = \frac{OB \times OC}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$, car OBC est un triangle rectangle en O .

$$\text{D'où : } V = \frac{1}{3} \times 3 \times 1 = 1.$$

D'autre part, on a $V = \frac{1}{3} \times OH \times \text{aire}(ABC)$.

On en déduit que $\text{aire}(ABC) = \frac{3V}{OH} = \frac{3 \times 1}{\frac{6}{7}} = \frac{7}{2}$, car OH est la distance du point O au plan (ABC) qui vaut $\frac{6}{7}$ d'après la question 3. a).

$$\text{c) Aire}(ABC)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4},$$

$\text{aire}(OBC)^2 = (3)^2 = 9$, d'après le calcul fait à la question 3. b)

$$\text{aire}(OAB)^2 = \left(\frac{1}{2} \times OA \times OB\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2\right)^2 = 1, \quad \text{car } OAB \text{ est rectangle en } O$$

$$\text{aire}(OAC)^2 = \left(\frac{1}{2} \times OA \times OC\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 3\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad \text{car } OAC \text{ est rectangle en } O.$$

On remarque que :

$$(\text{aire}(OBC))^2 + (\text{aire}(OAB))^2 + (\text{aire}(OAC))^2 = 9 + 1 + \frac{9}{4} = \frac{49}{4} = (\text{aire}(ABC))^2.$$

Finalement, le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces du tétraèdre.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 4

1. a)

Rappel de cours : si $a \equiv b[n]$, alors $a^p \equiv b^p[n]$ pour tous entiers naturels n et p , et pour tous entiers relatifs a et b .

On a $6^2 \equiv 3[11]$, puis $6^3 \equiv 7[11]$, $6^4 \equiv 9[11]$, $6^5 \equiv -1[11]$ et donc $6^{10} \equiv 1[11]$.

Le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 est ainsi 1.

b) On a $6 \equiv 1[5]$, donc $6^4 \equiv 1[5]$.

Le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 est ainsi 1.

c) On a $6^{10} \equiv 1[11]$, donc $(6^{10})^4 \equiv 1^4[11]$ et ainsi $6^{40} \equiv 1[11]$.

De même, $6^4 \equiv 1[5]$, donc $(6^4)^{10} \equiv 1^{10}[5]$ et ainsi $6^{40} \equiv 1[5]$.

d) D'après ce qui précède, $6^{40} - 1 \equiv 0[11]$ et $6^{40} - 1 \equiv 0[5]$. Par suite, $6^{40} - 1$ est divisible par 11 et par 5.

On en déduit que **$6^{40} - 1$ est divisible par 55**, car 11 et 5 sont premiers entre eux.

2. a) $65x - 40y = 1$ équivaut à $5(13x - 8y) = 1$.

Comme x et y sont des entiers relatifs, $13x - 8y$ l'est aussi et, ainsi, si l'équation possède des solutions, 1 serait divisible par 5, ce qui est impossible.

Finalement, **l'équation (E) n'a pas de solution.**

b)

Rappel de cours : théorème de Bézout

Si a et b sont premiers entre eux, alors il existe u et v entiers relatifs tels que $au + bv = 1$.

Recherchons le PGCD de 40 et 17. On a :

$$40 = 2 \times 17 + 6,$$

$$17 = 2 \times 6 + 5,$$

$$6 = 5 \times 1 + 1,$$

$$5 = 5 \times 1 + 0.$$

On en déduit que $\text{PGCD}(17, 40) = 1$ et que les nombres 40 et 17 sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Bézout, l'équation (E') admet au moins une solution.

c) En utilisant les calculs précédents :

$$1 = 6 - 5 \times 1,$$

$$1 = 6 - (17 - 2 \times 6) \times 1 = 3 \times 6 - 17,$$

$$1 = 3 \times (40 - 2 \times 17) - 17 = 3 \times 40 - 7 \times 17.$$

On en conclut que le couple $(-7; -3)$ est solution de (E') .

d)

Rappel de cours : pour résoudre une équation du type $ax + by = c$, avec a, b, c, x et y entiers relatifs, et a et b premiers entre eux :

- on cherche une solution $(x_0; y_0)$ particulière ;
- on se ramène à la résolution de $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$;
- puis on utilise le théorème de Gauss.

• On a $17x - 40y = 1 = -7 \times 17 + 3 \times 40$, donc $17(x + 7) = 40 \times (y + 3)$.

17 divise ainsi $40 \times (y + 3)$; or, 17 et 40 sont premiers entre eux et 17 divise donc $(y + 3)$;

d'où : $y + 3 = 17k$, avec k entier relatif, c'est-à-dire $y = 17k - 3$.

En remplaçant dans $17(x + 7) = 40 \times (y + 3)$, on obtient $17(x + 7) = 40 \times 17k$;

soit $x + 7 = 40k$, puis $x = 40k - 7$.

On vérifie que les couples $(40k - 7, 17k - 3)$, avec k entier relatif, sont bien solutions de (E') .

Ainsi, les solutions de (E') sont les couples $(40k - 7, 17k - 3)$, avec k entier relatif.

• $17x \equiv 1[40]$ équivaut à $17x - 40y = 1$, avec y entier naturel quelconque.

D'après ce qui précède, on sait qu'alors on a $x = 40k - 7$, avec k entier relatif.

Comme on cherche à obtenir $0 \leq x \leq 40$, cela impose :

$$0 \leq 40k - 7 \leq 40, \text{ soit } \frac{7}{40} \leq k \leq \frac{47}{40}.$$

La seule valeur possible est $k = 1$, d'où $x = 33$.

En conclusion, il existe un unique entier naturel $x_0 = 33$ inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.

3. On a $17 \times 33 \equiv 1[40]$, d'après la question précédente ;

d'où : $17 \times 33 = 40k + 1$, avec k entier relatif.

Par ailleurs, $a^{17} \equiv b[55]$ donne $(a^{17})^{33} = b^{33}[55]$,

$$a^{40k+1} \equiv b^{33}[55],$$

$$(a^{40})^k \times a = b^{33}[55].$$

Or, par hypothèse, on a $a^{40} \equiv 1[55]$.

On en déduit que $a \equiv b^{33}[55]$.

Finalement, $b^{33} \equiv a[55]$.

France métropolitaine

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 60 min.
- Exercice 2 : 1 h 10 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Spécialité exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 50 min.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Analyse – Fonctions. Dérivation (5 points)

Les parties 1. et 2. portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue.

On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q . Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $] -1; 1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $] -1; 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $] -\pi; 0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

a) Démontrer que, pour tout x de $] -\pi; 0[$, on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h .

b) Calculer $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, puis donner l'expression de $h(x)$.

Corrige page 163

EXERCICE 2 Analyse – Suites (6 points)

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$, pour tout entier naturel n .

a) On a représenté, dans un repère orthonormé direct du plan en annexe (en fin d'énoncé), la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2; 0)$.

Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u .

b) Démontrer que, si la suite u est convergente, alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq \frac{23}{18}$.

d) Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right),$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

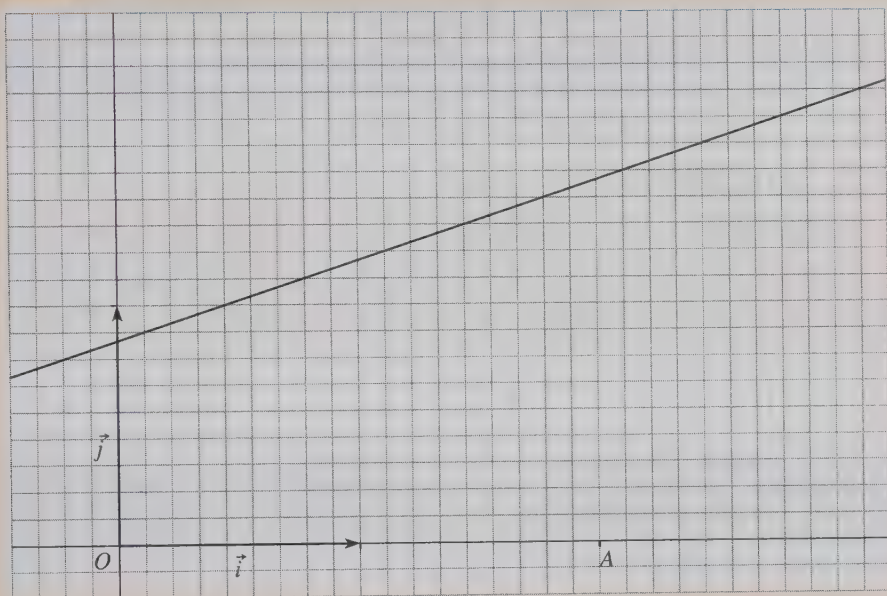
b) La suite v est définie par $v_n = 1,277 \dots 7$, avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi, $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.

En utilisant le a), démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au 1. et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

Annexe



Corrigé page 164

EXERCICE 3 Nombres complexes – Le plan complexe, Forme algébrique, trigonométrique et exponentielle (5 points)

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, \quad z_2 = 2 + 2i \quad \text{et} \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

- Écrire Z sous forme algébrique.
- Donner les modules et arguments de z_1 , z_2 et Z .
- En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2,5 cm comme unité graphique.
On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et Z .

Placer le point B , puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

e) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z^{2\,007}$.

Corrigé page 166

SPECIALITÉ EXERCICE 3 Arithmétique – Congruence (5 points)

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a) Pour tout élément a de A_7 , écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément de y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \pmod{7}$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

b) Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.

c) Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; 3; \dots; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p . Soit a un élément de A_p .

a) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.

b) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p . Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.

c) Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \pmod{p}$ si, et seulement si, x est un multiple de p ou y est un multiple de p .

d) Application : $p = 31$.

Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$.

À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

Corrigé page 168

EXERCICE 4 Analyse – Équations différentielles (4 points)

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) : y' + (1 + \tan x)y = \cos x,$$

$$(E_0) : y' + y = 1.$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) .

2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que :

$$f(x) = g(x) \cos x.$$

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction g est solution de (E_0) .

3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Corrigé page 170

Corrigés

EXERCICE 1

1. **Proposition P** : vraie.

Soit a un réel. On a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} \\ &= x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) = na^{n-1} = f'(a),$$

pour tout réel a .

Ainsi, f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et f est par conséquent dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est définie de la manière suivante : $a \mapsto na^{n-1}$, pour tout a réel ; on a donc $f'(x) = nx^{n-1}$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Proposition Q : fausse.

Méthode : on va chercher un contre-exemple.

Posons $f(x) = (2x)^2 = 4x^2$; on a alors $u(x) = 2x$ et $n = 2$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme de degré 2 et $f'(x) = 8x \neq 4x = 2u(x)$.

2. a)

Rappel de cours :

Soit f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur un intervalle J . On suppose que, pour tout x de I , $f(x) \in J$, alors la fonction $x \mapsto g(f(x))$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto f'(x) g'(f(x))$.

$\cos x \in]-1; 1[$ pour tout $x \in]-\pi; 0[$ } donc h est dérivable sur $]-1; 1[$ comme
 la fonction cosinus est dérivable sur $]-\pi; 0[$
 g est dérivable sur $]-1; 1[$ }
 composée de deux fonctions dérivables.

On a $h'(x) = -\sin(x) g'(\cos x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}$, car $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

puis $h'(x) = \frac{-\sin x}{|\sin x|} = 1$, car $|\sin x| = -\sin x$ sur $]-\pi; 0[$.

b) • $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = g(0) = 0$.

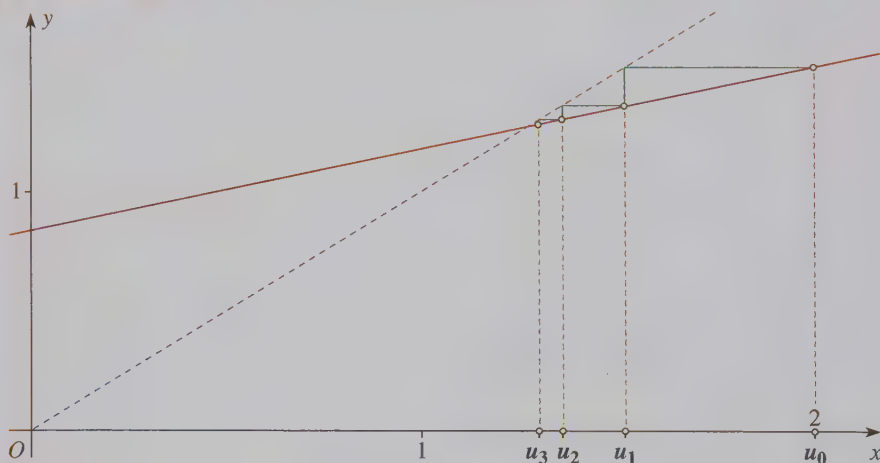
• Comme on a $h'(x) = 1$, pour tout x de $]-\pi; 0[$, on sait donc que $h(x) = x + k$, où k réel.

Or, $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, d'où $-\frac{\pi}{2} + k = 0$, puis $k = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $h(x) = x + \frac{\pi}{2}$, pour tout réel x .

EXERCICE 2

1. a)



b) Si la suite (u_n) est convergente, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$.

Comme $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{23}{27}$, on obtient que $l = \frac{1}{3} l + \frac{23}{27}$,

d'où $\frac{2}{3} l = \frac{23}{27}$, puis $l = \frac{23}{27} \times \frac{3}{2} = \frac{23}{18}$.

c)

Rappel de cours : démonstration par récurrence

- On pose une propriété P_n .
- On initialise la récurrence en montrant que cette propriété est bien vraie au premier rang de la suite.
- On montre ensuite l'hérédité de la propriété.

Soit P_n : « $u_n \geq \frac{23}{18}$ » pour tout entier naturel n .

- Initialisation : on a $u_0 = 2 = \frac{36}{18} \geq \frac{23}{18}$, donc P_0 est vraie.
- Hérédité : supposons que P_n soit vraie pour n quelconque fixé et montrons que P_{n+1} est vraie.

On a $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \geq \frac{1}{3} \times \frac{23}{18} + \frac{23}{27}$, d'après l'hypothèse de récurrence ;

$$\text{puis } u_{n+1} \geq \frac{23}{54} + \frac{23}{27} = \frac{69}{54} = \frac{23}{18}.$$

On en conclut que la propriété est héréditaire.

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq \frac{23}{18}$.

d) On a $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27} \leq -\frac{2}{3} \times \frac{23}{18} + \frac{23}{27}$, d'après la question 1. c),

$$\text{car } u_n \geq \frac{23}{18} \text{ entraîne } -u_n \leq -\frac{23}{18}$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n \leq \frac{-23}{27} + \frac{23}{27} = 0.$$

Ainsi, on constate que $u_{n+1} \leq u_n$, pour tout entier naturel n .

Par suite, la suite (u_n) est décroissante.

De plus, la suite est minorée par $\frac{23}{18}$; la suite (u_n) est donc convergente et, d'après la

question 1. b), elle converge vers $\frac{23}{18}$.

$$\begin{aligned}
 2. a) \quad \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) &= \frac{1}{90} \left(\frac{10^n - 1}{10^n} \right) \\
 &= \frac{1}{90} \times (10 - 1) \times \frac{10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10^2 + 10 + 1}{10^n} \\
 &= \frac{9}{90} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-2}} + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} \right) \\
 &= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-2}} + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}.$$

b) On sait, d'après la question 2. a), que :

$$v_n = 1,2777 \dots = 1,2 + 7 \times \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{12}{10} + 7 \times \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Or, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$, pour $-1 < k < 1$.

Par suite, $v = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$.

En conclusion : v est bien un rationnel.

3. Ces deux suites sont bien adjacentes, car (u_n) est une suite décroissante (d'après la question 1. d)) et (v_n) est une suite croissante (par définition) et, de plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{23}{18}.$$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

EXERCICE 3

a)

Méthode : on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée.

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 + 2i} = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})(2 - 2i)}{8} = \frac{(2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) + i(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

b) • Calcul des modules :

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}; \quad |z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$$

$$|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1, \text{ car } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ pour tous } z \text{ de } \mathbb{C} \text{ et } z' \text{ complexe non nul.}$$

• Calcul des arguments :

► Notons θ un argument de z_1 modulo 2π . On a :

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

► Notons θ' un argument de z_2 modulo 2π . On a :

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta' &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \text{ donc } \theta' = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

► $\arg Z = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$

car $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$,
pour z et z' complexes non nuls

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}.$$

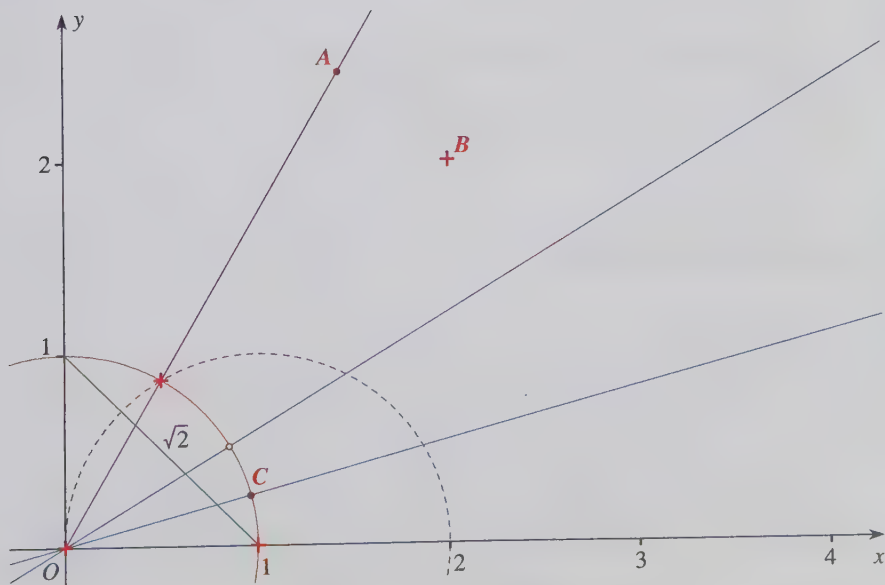
c) D'après la question b), on a $Z = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$.

D'après la question a), $Z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

d)



- On place le point B d'affixe $z_2 = 2 + 2i$.
- A appartient à la demi-droite issue de O et formant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe des abscisses dans le sens direct (car $\arg z_1 = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$). Or, sur le cercle trigonométrique, on sait placer l'angle $+\frac{\pi}{3}$: cet angle apparaît en faisant l'intersection de la droite $x = \frac{1}{2}$ avec le cercle trigonométrique.

A appartient au cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ (car $|z_1| = 2\sqrt{2}$).

Ainsi, pour placer A , il suffit de reporter la longueur $2\sqrt{2}$ à partir de O sur la demi-droite issue de O . En vert est représentée la longueur $\sqrt{2}$ qui est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ; on reporte deux fois cette longueur à partir de O .

- Comme $|Z| = 1$, on sait que C appartient au cercle trigonométrique. De plus, on a $\arg Z = \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$. Or, $\frac{\pi}{12}$ est la moitié de $\frac{\pi}{6}$ qui est lui-même la moitié de $\frac{\pi}{3}$.

On a tracé précédemment la demi-droite issue de O et formant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe des abscisses dans le sens direct ; il suffit en conséquence de tracer deux bissectrices successives avec le compas pour obtenir la demi-droite issue de O et formant un angle de $\frac{\pi}{12}$ avec l'axe des abscisses dans le sens direct.

e) On sait que $Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$

$$\begin{aligned} \text{et on a donc } Z^{2007} &= \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2007} = e^{i\frac{2007\pi}{12}} = e^{i\frac{669\pi}{4}} = e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ &= \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3

1. a)

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

b) Observons les valeurs prises par $3x$ (modulo 7)

x (modulo 7)	0	1	2	3	4	5	6
$3x$ (modulo 7)	0	3	6	2	5	1	4

On a ainsi : $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.

c) $ax \equiv 0$ (modulo 7) équivaut à ax est un multiple de 7.

$$\left. \begin{array}{l} ax \text{ est un multiple de } 7 \\ a \in A_7 \text{ donc } a \text{ n'est pas un multiple de } 7 \end{array} \right\} \text{ ainsi } x \text{ est un multiple de } 7, \text{ d'après le théorème de Gauss.}$$

Finalement : $x \equiv 0$ (modulo 7).

2. a)

Rappel de cours : petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p , on a alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p .

$$\left. \begin{array}{l} p \text{ est un nombre premier} \\ a \in A_p, \text{ donc } a \text{ et } p \text{ sont premiers entre eux} \\ a \text{ entier naturel} \end{array} \right\} \text{ donc } a^{p-1} - 1 \text{ est divisible par } p, \text{ d'après le petit théorème de Fermat ;}$$

ainsi, $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ (modulo p) ;

puis $a^{p-1} \equiv 1$ (modulo p) ;

et $a \times a^{p-2} \equiv 1$ (modulo p) ;

finally, a^{p-2} est solution de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).

b) a^{p-2} est solution de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).

Donc $a \times a^{p-2} \equiv 1$ (modulo p).

Or, r est le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p ; il existe par conséquent un entier q tel que $a^{p-2} = q \times p + r$, avec $0 \leq r < p$: ainsi $r \in A_p$ et r est unique.

On remplace dans l'équation et on obtient :

$$a \times (q \times p + r) \equiv 1 \text{ (modulo } p),$$

$$aqp + ar \equiv 1 \text{ (modulo } p),$$

$$ar \equiv 1 \text{ (modulo } p), \text{ car } aqp \text{ est un multiple de } p \text{ et donc } aqp \equiv 0 \text{ (modulo } p).$$

En conclusion, r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).

c) $xy \equiv 0$ (modulo p) équivaut à $x \equiv 0$ (modulo p) ou $y \equiv 0$ (modulo p), car p est premier équivaut à x ou y sont des multiples de p .

d) • On doit résoudre $2x \equiv 1$ (modulo 31).

D'après la question 2. b), le reste de la division euclidienne de $2^{31-2} = 2^{29}$ par 31 est l'unique solution dans A_{31} de l'équation ci-dessus.

$$\text{Or, on a } 2^{29} = 17\,318\,416 \times 31 + 16.$$

On en déduit que **16 est l'unique solution dans A_{31} .**

• On doit résoudre $3x \equiv 1$ (modulo 31).

D'après la question 2. b), le reste de la division euclidienne de $3^{31-2} = 3^{29}$ par 31 est l'unique solution dans A_{31} de l'équation ci-dessus.

$$\text{Or, on a } 3^{29} = 2\,213\,883\,140\,802 \times 31 + 21.$$

Ainsi, **21 est l'unique solution dans A_{31} .**

• On doit résoudre $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0$ (modulo 31).

Calculons le discriminant : $\Delta = 1 > 0$; le trinôme admet donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{3} \text{ ou } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Par suite, $6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (2x - 1)(3x - 1)$.

$6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$ équivaut à $(2x - 1)(3x - 1) \equiv 0 \pmod{31}$,
 équivaut à $2x - 1 \equiv 0 \pmod{31}$ ou $3x - 1 \equiv 0 \pmod{31}$,
 car 31 est premier et d'après la question 2. c)
 équivaut à $2x \equiv 1 \pmod{31}$ ou $3x \equiv 1 \pmod{31}$,
 équivaut à $x \equiv 16 \pmod{31}$ ou $x \equiv 21 \pmod{31}$.

EXERCICE 4

1.

Rappel de cours : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$, a et b réels et $a \neq 0$, sont de la forme :

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

$(E_0) y' + y = 1$ équivaut à $y' = -y + 1$.

Par suite, **les solutions** de cette équation différentielle **sont de la forme :**

$x \mapsto Ce^{-x} + 1$, avec C constante réelle.

2. f est solution de (E) équivaut à $f'(x) + (1 + \tan x)f(x) = \cos x$,

$$\text{car } f \text{ est dérivable sur } I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[,$$

équivaut à $g'(x) \cos x - g(x) \sin x + (1 + \tan x)g(x) \cos x = \cos x$,

équivaut à $g'(x) \cos x - g(x) \sin x + g(x) \cos x + g(x) \sin x = \cos x$,

équivaut à $g'(x) \cos x + g(x) \cos x = \cos x$,

équivaut à $g'(x) + g(x) = 1$, car $\cos x \neq 0$ sur I ,

équivaut à g est solution de (E_0) .

3. D'après les questions 1. et 2., on a $f(x) = (Ce^{-x} + 1) \cos x$, avec C constante réelle.

Or, $f(0) = 0 \Leftrightarrow C + 1 = 0 \Leftrightarrow C = -1$.

Finalement : $f(x) = (-e^{-x} + 1) \cos x$.

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 35 min.
- Exercice 2 : 35 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Spécialité exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 50 min.
- Exercice 5 : 60 min.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Géométrie dans l'espace – Représentation paramétrique d'une droite, Distance (3 points)

L'espace est muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives

$$x + 2y - z + 1 = 0 \text{ et } -x + y + z = 0.$$

Soit A le point de coordonnées $(0; 1; 1)$.

1. Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.
2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3}, \text{ où } t \text{ est un nombre réel.} \\ z = t \end{cases}$$

Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d) .

3. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P') .

4. En déduire la distance du point A à la droite (d) .

Corrigé page 176

EXERCICE 2 Analyse – Intégration, Fonction exponentielle (3 points)

1. Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a ; b]$.

2. Soient les deux intégrales définies par :

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$$

$$\text{et} \quad J = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx.$$

a) Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^{\pi} + 1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et de J .

Corrigé page 178

EXERCICE 3 Nombres complexes – Résolution algébrique, Transformations géométriques (5 points)

Partie A

On considère l'équation :

$$(E) \quad z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0,$$

où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E) .

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A , B et C les points d'affixes respectives i , $2 + 3i$ et $2 - 3i$.

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'affixe du point A' , image du point A par la rotation r .

2. Démontrer que les points A' , B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A' .

Corrigé page 179

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3 Nombres complexes – Similitudes

(5 points)

La figure est proposée en *annexe*. Elle sera complétée tout au long de l'exercice.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C , d'affixes respectives $-5 + 6i$, $-7 - 2i$ et $3 - 2i$. On admet que le point F , d'affixe $-2 + i$, est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC .

1. Soit H le point d'affixe -5 .

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H .

2. a) Étant donnés des nombres complexes z et z' , on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' .

Soient a et b des nombres complexes.

Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ qui, au point M , associe le point M' .

Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s .

Quelle est alors la nature de s ?

- b) En déduire l'affixe du point E , symétrique du point H par rapport à la droite (AC) .

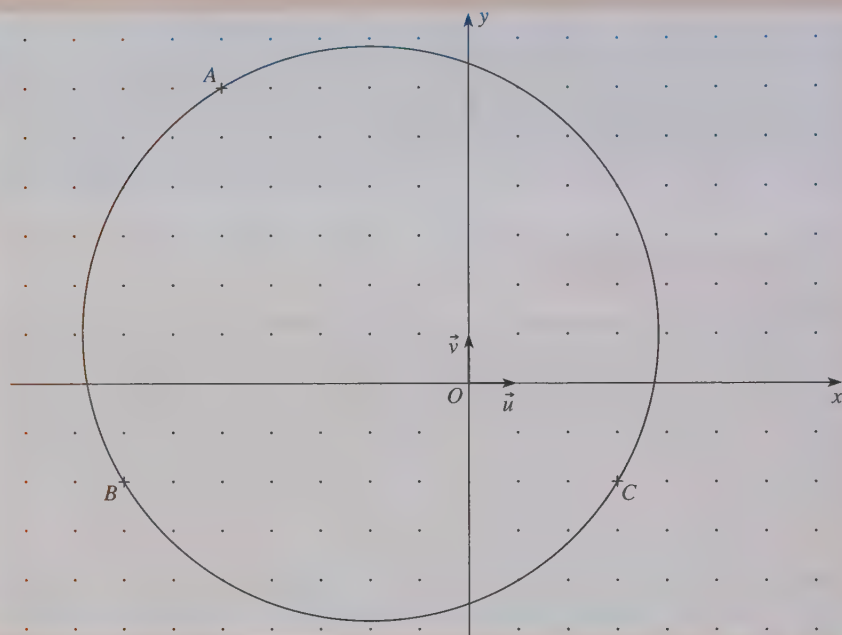
- c) Vérifier que le point E est un point du cercle Γ .

3. Soit I le milieu du segment $[AC]$.

Déterminer l'affixe du point G , image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.

Démontrer que les points H , G et F sont alignés.

Annexe



Corrige page 181

EXERCICE 4 Probabilités – Loi de probabilité, Conditionnement (4 points)

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} près.

1. Un représentant de commerce propose un produit à la vente.

Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2.

Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :

a) 0,4 ; b) 0,04 ; c) 0,102 4 ; d) 0,204 8.

2. Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard.

La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

- a) 0,043 ; b) 0,275 ; c) 0,217 ; d) 0,033.

3. Dans la classe de la question 2., on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

- a) 0,100 ; b) 0,091 ; c) 0,111 ; d) 0,25.

4. Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible.

La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

- a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{9}{14}$; c) $\frac{4}{7}$; d) $\frac{1}{3}$.

Corrigé page 183

EXERCICE 5 Analyse – Suites, Fonction logarithme népérien (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est donnée sur le document **annexe** que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : étude de certaines propriétés de la courbe $\mathcal{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f .

Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $] -1 ; +\infty[$. Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f .

3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

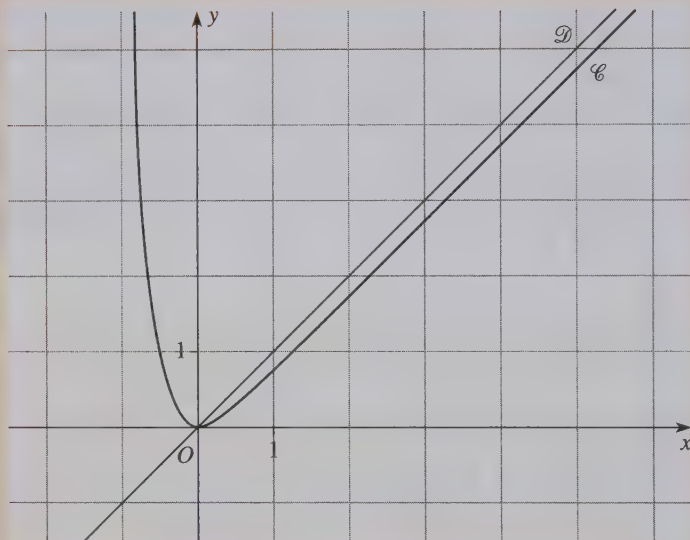
1. Démontrer que, si $x \in [0 ; 4]$, alors $f(x) \in [0 ; 4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- Sur le graphique de l'**annexe** ci-dessous, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 .
- Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n \in [0 ; 4]$.
- Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.
- Utiliser la **partie A** pour donner la valeur de ℓ .

Annexe



Corrigé page 185

Corrigés

EXERCICE 1

1.

Méthode : pour montrer que deux plans sont perpendiculaires, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Rappel de cours : un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ admet un vecteur normal de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P) car l'équation cartésienne de (P) est :

$$x + 2y - z + 1 = 0,$$

et $\vec{n}' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P') car l'équation cartésienne de (P') est :

$$-x + y + z = 0.$$

Or, on a $\vec{n} \cdot \vec{n}' = xx' + yy' + zz' = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = -1 + 2 - 1 = 0$.

Ainsi, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux et les plans (P) et (P') sont, par conséquent, **perpendiculaires**.

2.

Méthode : on vérifie que tous les points de (d) vérifient les équations de (P) et de (P') .

$$\text{On a } x + 2y - z + 1 = \left(-\frac{1}{3} + t\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - t + 1 = -\frac{1}{3} + t - \frac{2}{3} - t + 1 = -1 + 1 = 0,$$

pour tout t réel ;

par suite, tous les points de (d) appartiennent à (P) .

$$\text{De même, } -x + y + z = -\left(-\frac{1}{3} + t\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + t = \frac{1}{3} - t - \frac{1}{3} + t = 0, \text{ pour tout } t \text{ réel ;}$$

tous les points de (d) appartiennent à (P') .

Comme ces deux plans sont perpendiculaires, ils sont sécants suivant une droite.

D'après les calculs que l'on vient d'effectuer, **ils sont sécants selon (d)** .

3.

Rappel de cours : distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé, si un plan (P) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, la distance d'un point M de coordonnées $(x_M; y_M; z_M)$ au plan est alors donnée par :

$$d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$d(A, P) = \frac{|0 + 2 - 1 + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$d(A, P') = \frac{|0 + 1 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

4. Soit H, H' et H'' les projetés orthogonaux de A sur respectivement (P) , (P') et (d) .

Comme les plans (P) et (P') sont perpendiculaires, le quadrilatère $AHH''H'$ est un rectangle.

On a donc : $AH'' = d(A, d)$; $AH = d(A, P)$ et $HH'' = AH' = d(A, P')$ (propriétés du rectangle).

Or le triangle AHH'' est rectangle en H ; on a, en conséquence, d'après le théorème de Pythagore : $AH^2 + HH''^2 = AH''^2$,

$$\text{soit } AH'^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{6} + \frac{4}{3} = \frac{12}{6} = 2.$$

Finalement : $d(A, d) = \sqrt{2}$.

EXERCICE 7

1. Soient u et v deux fonctions sur $I = [a ; b]$, dérivables, telles que u' et v' , leurs dérivées, sont continues.

uv est donc dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Comme u et v sont dérivables sur I , u et v sont alors continues sur I .

Par suite, $(uv)'$ est continue sur I comme produit et somme de fonctions continues sur I .

On peut, en conséquence, intégrer $(uv)'$ sur I :

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \, dx = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx$$

(par linéarité de l'intégrale).

Or, une primitive sur I de $(uv)'$ est uv ; l'égalité devient alors :

$$[u(x)v(x)]_b^a = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

D'où :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_b^a - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

2. a) • Posons $u(x) = \sin x$ d'où $u'(x) = \cos x$;

$v'(x) = e^x$ d'où $v(x) = e^x$ (à une constante près).

u et v sont dérivables et u' et v' sont continues sur $[0 ; \pi]$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^\pi e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$$

$$I = (e^\pi \sin \pi - e^0 \sin 0) - J$$

$$I = -J.$$

• Posons $u(x) = e^x$ d'où $u'(x) = e^x$;

$v'(x) = \sin x$ d'où $v(x) = -\cos x$ (à une constante près).

u et v sont dérivables et u' et v' sont continues sur $[0 ; \pi]$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^\pi e^x \sin x \, dx = [-e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -e^x \cos x \, dx$$

$$I = (-e^\pi \cos \pi + e^0 \cos 0) + \int_0^\pi e^x \cos x \, dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale})$$

$$I = e^\pi + 1 + J.$$

b) On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} I = -J \\ I = e^{\pi} + 1 + J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ I = e^{\pi} + 1 - I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ 2I = e^{\pi} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ I = \frac{e^{\pi} + 1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} J = -\frac{e^{\pi} + 1}{2} \\ I = \frac{e^{\pi} + 1}{2} \end{cases}$$

EXERCICE 3

Partie A

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a } i^3 - (4+i) \times i^2 + (13+4i) \times i - 13i &= -i + (4+i) + (13+4i) \times i - 13i \\ &\quad \text{car } i^2 = -1 \\ &= -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0. \end{aligned}$$

i est bien solution de l'équation (E).

2. On cherche a, b, c réels tels que :

$$\begin{aligned} z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i &= (z-i)(az^2 + bz + c) \\ &= az^3 + (b-ia)z^2 + (c-ib)z - ic. \end{aligned}$$

Il suffit d'identifier les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -4 - i \\ c - ib = 13 + 4i \\ -ic = -13i \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \end{cases} \text{ conviennent.}$$

3.

Méthode : résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

On vérifie d'abord que cette expression n'est pas une identité remarquable.

Si tel n'est pas le cas, on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

• Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

$$\begin{aligned} z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0 &\text{ équivaut à } (z-i)(z^2 - 4z + 13) = 0, \\ &\text{ équivaut à } z - i = 0 \text{ ou } z^2 - 4z + 13 = 0, \end{aligned}$$

équivalent à $z = i$ ou $z^2 - 4z + 13 = 0$.

On résout l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$;

calculons $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 52 = -36$, soit $\Delta < 0$; on a, par conséquent, deux solutions complexes :

$$z = \frac{4 - 6i}{2} \text{ ou } z = \frac{4 + 6i}{2},$$

$$z = 2 - 3i \text{ ou } z = 2 + 3i.$$

L'ensemble des solutions de (E) est $\{i ; 2 - 3i ; 2 + 3i\}$.

Partie B

1.

Méthode : si A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par la rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ , on a alors :

$$z_{A'} - z_\Omega = e^{i\theta} (z_A - z_\Omega).$$

$$\text{On a } z_{A'} - z_B = (z_A - z_B) e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$\text{puis } z_{A'} = z_B + (z_A - z_B) e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$z_{A'} = (2 + 3i) + (i - (2 + 3i)) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 2 + 3i + (-2 - 2i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 2 + 3i - \sqrt{2} - i\sqrt{2} - i\sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= 2 + (3 - 2\sqrt{2})i.$$

2. • L'affixe de $\overrightarrow{A'B}$ est : $z_B - z_{A'} = (2 + 3i) - (2 + (3 - 2\sqrt{2})i) = 2\sqrt{2}i$.

L'affixe de $\overrightarrow{A'C}$ est : $z_C - z_{A'} = (2 - 3i) - (2 + (3 - 2\sqrt{2})i) = (-6 + 2\sqrt{2})i$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{A'C}$ sont colinéaires, car ils sont tous deux colinéaires au même vecteur $\vec{v}$.

Par suite, **les points A' , B et C sont alignés.**

• On cherche le rapport de l'homothétie.

Comme cette homothétie est de centre B et transforme C en A' , on a : $\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC}$;

$$\text{or } \begin{cases} \text{l'affixe de } \overrightarrow{BA'} \text{ est } -2\sqrt{2}i \\ \text{l'affixe de } \overrightarrow{BC} \text{ est } z_C - z_B = (2 - 3i) - (2 + 3i) = -6i, \end{cases}$$

$$\text{d'où } k = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Soit M' , d'affixe z' , l'image de M , d'affixe z , par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2\sqrt{2}}{6}$, on a alors :

$$\overrightarrow{BM'} = \frac{2\sqrt{2}}{6} \overrightarrow{BM};$$

$$\text{d'où } z' - z_B = \frac{2\sqrt{2}}{6} (z - z_B),$$

puis $z' = 2 + 3i + \frac{2\sqrt{2}}{6}(z - 2 - 3i)$.

Finalement : $z' = \frac{12 - 4\sqrt{2}}{6} + (3 - \sqrt{2})i + \frac{2\sqrt{2}}{6}z$.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3

1.

Méthode : si B est l'image de A par une similitude directe de centre C , d'angle α et de rapport k , alors :

$$k = \frac{CB}{CA} \text{ et } \alpha = \text{mes}(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi}.$$

On cherche les éléments caractéristiques d'une similitude directe de centre A qui transforme C en H , donc :

$$k = \frac{AH}{AC} \text{ et } \alpha = \text{mes}(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH}) \pmod{2\pi}.$$

Calculons $Z = \frac{z_H - z_A}{z_C - z_A}$, car $\begin{cases} |Z| = k \\ \arg Z = \alpha \pmod{2\pi} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{-5 + 5 - 6i}{3 - 2i + 5 - 6i} \\ &= \frac{-6i}{8 - 8i} \\ &= \frac{-3i}{4 - 4i} \\ &= \frac{-3i(4 + 4i)}{32} \\ &= \frac{12 - 12i}{32} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{3}{8}i. \end{aligned}$$

Ainsi : $|Z| = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{32}} = \frac{3\sqrt{2}}{8},$

et $\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \text{ donc } \alpha = \arg Z = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.$

On en conclut que les éléments caractéristiques de cette similitude directe sont :

$$k = \frac{3\sqrt{2}}{8} \text{ et } \alpha = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

2. a) A et C sont invariants par s ; on a, par conséquent :

$$\begin{cases} z_A = a \overline{z_A} + b \\ z_C = a \overline{z_C} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 + 6i = a(-5 - 6i) + b \\ 3 - 2i = a(3 + 2i) + b. \end{cases}$$

On soustrait les deux lignes membres à membres et on obtient :

$$-8 + 8i = a(-8 - 8i),$$

$$\text{puis } a = \frac{-1 + i}{-1 - i} = \frac{(-1 + i)(-1 + i)}{2} = -i.$$

On remplace dans la première équation :

$$-5 + 6i = -i(-5 - 6i) + b$$

$$-5 + 6i = 5i - 6 + b$$

$$b = 1 + i.$$

On fait la vérification immédiate des calculs et on trouve :

$$a = -i \text{ et } b = 1 + i.$$

L'écriture de s correspond à une similitude indirecte qui possède deux points invariants ; il s'agit donc soit de l'identité, soit de la symétrie d'axe (AC) . Or, les calculs montrent qu'il ne s'agit pas de l'identité.

On en conclut que s est une réflexion par rapport à la droite (AC)

b) Comme E est le symétrique de H par rapport à la droite (AC) , E est donc l'image de H par s ; ainsi :

$$z_E = -i \overline{z_H} + 1 + i = -i \times (-5) + 1 + i = 1 + 6i.$$

c) Il suffit de montrer que $EF = AF$, car AF est un rayon du cercle et F le centre.

L'affixe de $\overrightarrow{AF}$ est : $z_F - z_A = -2 + i + 5 - 6i = 3 - 5i$, ainsi $AF = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$;

l'affixe de $\overrightarrow{EF}$ est : $z_F - z_E = -2 + i - 1 - 6i = -3 - 5i$, ainsi $EF = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.

Conclusion : E est bien un point de Γ .

3. • I est le milieu de $[AC]$;

$$\text{on a donc } z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-5 + 6i + 3 - 2i}{2} = -1 + 2i ;$$

calculons à présent l'affixe de G :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BI},$$

$$z_G - z_B = \frac{2}{3} (z_I - z_B),$$

$$z_G = -7 - 2i + \frac{2}{3} (-1 + 2i + 7 + 2i)$$

$$= -7 - 2i + \frac{2}{3} (6 + 4i)$$

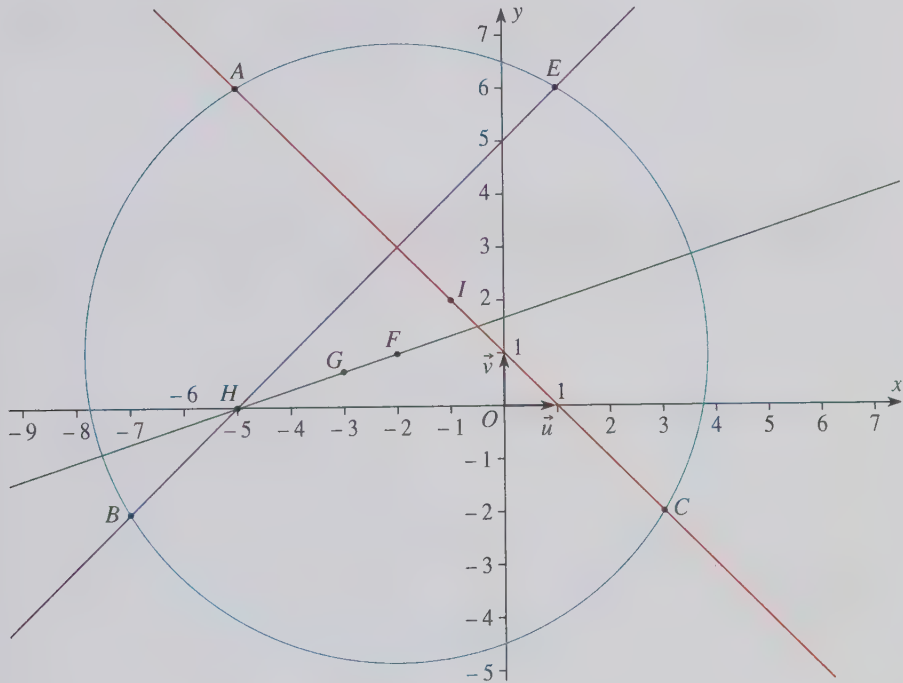
$$= -3 + \frac{2}{3} i.$$

• L'affixe de $\overrightarrow{HG}$ est : $z_G - z_H = -3 + \frac{2}{3}i + 5 = 2 + \frac{2}{3}i$;

l'affixe de $\overrightarrow{HF}$ est : $z_F - z_H = -2 + i + 5 = 3 + i$;

on remarque que $\overrightarrow{HF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{HG}$;

on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires et que, par conséquent, les points H, F et G sont alignés.



EXERCICE 4

Méthode : cet exercice est un Q.C.M. dans lequel il est précisé que, pour chaque question, il existe une seule bonne réponse. On peut donc raisonner soit de manière directe, en faisant le calcul, soit par élimination des mauvaises réponses.

1. Réponse : d).

Méthode : loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A de probabilité p et $\bar{A}$ de probabilité $(1 - p)$.

Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de réalisations de l'évènement A suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

L'épreuve de Bernoulli de probabilité $p = 0,2$ correspond à la vente du produit à un client par le représentant de commerce. On répète 5 fois cette épreuve de Bernoulli de manière indépendante. On crée une variable aléatoire X correspondant au nombre de réalisations de la vente. On a alors une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,2$.

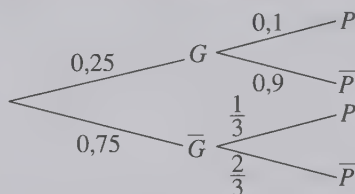
$$p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,2^2 \times 0,8^3 \approx 0,2048.$$

2. Réponse : b).**Rappel de cours : formule des probabilités totales**

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ formant une partition de l'univers. Soit A un événement ; on a :

$$p(A) = p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A) + \dots + p(B_n \cap A).$$

Soit G l'évènement : « être un garçon » et P l'évènement : « avoir eu son permis du premier coup ».



G et $\bar{G}$ forment une partition de l'univers ; ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(P) &= p(G \cap P) + p(\bar{G} \cap P) = p_G(P) \times p(G) + p_{\bar{G}}(P) \times p(\bar{G}) \\ &= 0,1 \times 0,25 + \frac{1}{3} \times 0,75 = 0,275. \end{aligned}$$

3. Réponse : b).

$$\text{On a } p_P(G) = \frac{p(P \cap G)}{p(P)} = \frac{0,1 \times 0,25}{0,275} \approx 0,091.$$

4. Réponse : a).

L'aire de la zone la plus éloignée du centre est égale à : $\pi \times 30^2 - \pi \times 20^2 = 500\pi \text{ cm}^2$.
L'aire totale de la cible est : $\pi \times 30^2 = 900\pi$.

$$p = \frac{\text{aire de la zone la plus éloignée du centre}}{\text{aire totale de la cible}} = \frac{500\pi}{900\pi} = \frac{5}{9}.$$

EXERCICE 5

Partie A

1. $x \mapsto 1+x$ est dérivable sur $I =]-1; +\infty[$ } donc $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur I .
 $1+x > 0$ sur I

f est alors dérivable sur I comme somme et quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur est non nul sur I .

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - \ln(1+x) \times 1}{(1+x)^2}$$

$$= 1 - \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

2. • N est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I (d'après la question 1.) et on a :

$$N'(x) = 2(1+x) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(1+x)^2 + 1}{x+1};$$

on sait que $x+1 > 0$, car $x > -1$,

et que $2(1+x)^2 + 1 > 0$ sur I comme somme de nombres strictement positifs.

Par conséquent : $N'(x) > 0$ sur I ,

et N est strictement croissante sur I .

• $N(0) = (1+0)^2 - 1 + \ln 1 = 0$.

• On obtient le tableau de variations suivant :

x	-1	$+\infty$
$N'(x)$		+
N	$-\infty$	$+\infty$

car $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} (1+x)^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty \end{array} \right\}$, d'où $\lim_{x \rightarrow -1} N(x) = -\infty$.

N est continue sur I car dérivable sur I

N est strictement croissante sur I

0 est compris entre $\lim_{x \rightarrow -\infty} N(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = +\infty$ } donc, d'après le théorème

des valeurs intermédiaires, l'équation $N(x) = 0$ admet une unique solution sur I .

Or, on a vu que $N(0) = 0$;

ainsi l'équation $N(x) = 0$ admet une unique solution 0 ;

d'après le tableau de variation de N , on obtient que :

$$\begin{cases} N(x) > 0 & \text{sur }]0 ; +\infty[\\ N(x) < 0 & \text{sur }]-1 ; 0[\\ N(0) = 0 ; \end{cases}$$

or, on a $f'(x) = \frac{N(x)}{(1+x)^2}$;

comme $(1+x)^2 > 0$ sur I , le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $N(x)$.

Par suite, $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{sur }]0 ; +\infty[\\ f'(x) < 0 & \text{sur }]-1 ; 0[\\ f'(0) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} f \text{ est strictement croissante sur } [0 ; +\infty[\\ f \text{ est strictement décroissante sur }]-1 ; 0] \end{cases}$.

3. On veut résoudre l'équation $f(x) = x$; on a :

$$x - \frac{\ln(1+x)}{x+1} = x,$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x+1} = 0,$$

$$\ln(1+x) = 0,$$

$$1+x = 1,$$

$$\text{soit } x = 0.$$

$$\text{car } x \neq -1$$

$$\text{car } \begin{cases} e^{\ln x} = x, \text{ pour tout } x \\ e^0 = 1 \end{cases}$$

$$\text{De plus, on a } f(0) = 0 - \frac{\ln 1}{1} = 0.$$

En conclusion, les coordonnées du point d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont $(0 ; 0)$.

Partie B

1. On a $0 \leq x \leq 4$,

$$\text{et } f(0) \leq f(x) \leq f(4),$$

$$\text{or, } f(0) = 0$$

car f strictement croissante sur $[0 ; 4]$
d'après la question A.3.

$$\text{et } f(4) = 4 - \frac{\ln 5}{4} < 4,$$

$$\text{car } \ln 5 > 0$$

$$\text{ainsi } 0 \leq f(x) \leq 4,$$

$$\text{puis } f(x) \in [0 ; 4].$$

2. a) Voir le graphique page suivante.

b)

Rappel de cours : démonstration par récurrence

- On pose une propriété P_n .
- On initialise la récurrence en montrant que cette propriété est bien vraie au premier rang de la suite.
- On montre ensuite l'hérédité de la propriété.

Soit P_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq 4$ », pour tout n entier naturel.

• Initialisation : on a $u_0 = 4$,

donc P_0 est vrai.

• Hérédité : supposons P_n , pour n entier naturel donné, et vérifions P_{n+1} .

$0 \leq u_n \leq 4$ d'après l'hypothèse de récurrence

$0 \leq f(u_n) \leq 4$ d'après la question B.1.

$0 \leq u_{n+1} \leq 4$.

On a montré l'hérédité de la propriété P_n .

On a démontré par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [0 ; 4]$.

c) Étudions la monotonie de la suite (u_n) ; on a :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\frac{\ln(1 + u_n)}{1 + u_n}.$$

Or, $0 \leq u_n \leq 4$,

d'où $1 \leq u_n + 1 \leq 5$,

donc $\ln 1 \leq \ln(u_n + 1) \leq \ln 5$, car $\ln$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

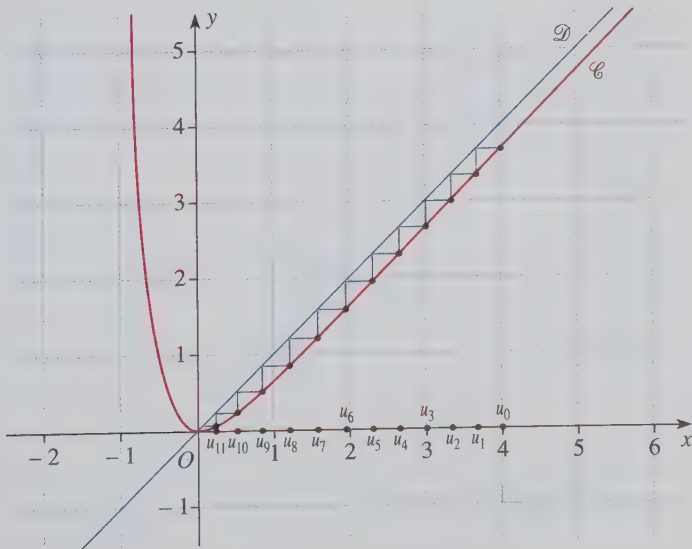
ainsi $\frac{\ln(1 + u_n)}{1 + u_n} > 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$, comme quotient de deux nombres strictement

positifs ;

puis $u_{n+1} - u_n \leq 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$,

donc $u_{n+1} \leq u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Finalement : la suite (u_n) est décroissante.



d) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; on en conclut qu'elle **converge**.

e) On a $u_{n+1} = f(u_n)$,

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$,

puis $l = f(l)$ car f est continue sur I puisque dérivable sur I
par suite, $l = 0$, d'après la question **A.3**.

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 45 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 1 h 15 min.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Géométrie dans l'espace – Barycentre (4 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3; 2; 6)$, B de coordonnées $(1; 2; 4)$ et C de coordonnées $(4; -2; 5)$.

1. a) Vérifier que les points A , B et C définissent un plan.
b) Vérifier que ce plan est P .
2. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.
b) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P .
c) Soit K le projeté orthogonal de O sur P . Calculer la distance OK .
d) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}.$$
 - a) Vérifier que ce système admet un barycentre qu'on notera G .
 - b) On note I le centre de gravité du triangle ABC . Montrer que G appartient à (OI) .

c) Déterminer la distance de G au plan P .

4. Soit l'ensemble Γ des points M de l'espace vérifiant :

$$\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5.$$

Déterminer Γ . Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

Corrigé page 193

EXERCICE 2 Nombres complexes – Lieux géométriques (5 points)

1. Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit R la rotation du plan de centre Ω , d'affixe ω et d'angle de mesure θ . L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

$$-R(\Omega) = \Omega ;$$

- pour tout point M du plan, distinct de Ω , l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi]$.

On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b ,

$$AB = |b - a| \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a)[2\pi].$$

Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R sont liées par la relation :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_I = 1 + i$ et $z_B = 2 + 2i$.

Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

a) Donner l'écriture complexe de R .

b) Soit A l'image de I par R . Calculer l'affixe z_A de A .

c) Montrer que O , A et B sont sur un même cercle de centre I . En déduire que OAB est un triangle rectangle en A . Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

d) En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A' = T(A)$.

a) Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A' .

b) Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?

c) Montrer que $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

Corrigé page 196

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Nombres complexes – Similitudes (5 points)

1. Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connus les résultats suivants :

- la composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
- la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
- une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A, B, C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que :

$$s(A) = s'(A), s(B) = s'(B), s(C) = s'(C).$$

Montrer que $s = s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'affixe 2, E d'affixe $1 + i$, F d'affixe $2 + i$ et G d'affixe $3 + i$.

a) Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF . En déduire que ces triangles sont semblables.

b) Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte S , en déterminant l'écriture complexe de S .

c) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $A' = h(A)$ et $G' = h(G)$, et on appelle I le milieu de $[EA']$. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI) .

Montrer que $S = \sigma \circ h$.

Corrigé page 200.

EXERCICE 3 Analyse – Fonction logarithme népérien, Intégration, Suites (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f' , sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

- a) Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
 b) Montrer, sans chercher à calculer u_n , que, pour tout entier naturel n ,

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.

a) Justifier la dérivabilité sur $[0; +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x , le nombre $F'(x)$.

b) On pose, pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \int_0^n f(x) \, dx.$$

Calculer I_n .

4. On pose, pour tout entier naturel n ,

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}.$$

Calculer S_n . La suite (S_n) est-elle convergente ?

Corrigé page 202

EXERCICE 4 Probabilités – Fonction exponentielle (6 points)

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge au hasard 50 personnes de manière indépendante. On considère les événements :

A : « au moins une personne accepte de répondre » ;

B : « moins de trois personnes acceptent de répondre » ;

C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

Calculer les probabilités des événements A , B et C . On arrondira au millièème.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\begin{cases} \text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1, P(X=k) = \frac{e^{-a} a^k}{k!} \\ \text{et } P(X=n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-a} a^k}{k!}, \\ \text{formules dans lesquelles } a = \frac{n}{10}. \end{cases}$$

a) Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a) = 1 - e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

b) Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième.

Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1. ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = 1 - e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right)$$

ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$ et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3.

c) En déduire le nombre minimal de personnes à interroger.

Corrigé page 204

Corrigés

EXERCICE 1

$$1. a) \text{ On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, car, sinon, il existerait un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$,

$$\text{soit } \begin{cases} -2 = k \\ 0 = -4k \\ -2 = -k \end{cases} \text{ et } k \text{ prendrait alors les valeurs } -2, 0 \text{ et } 2, \text{ ce qui contredit l'unicité de } k.$$

Par suite, les points A , B et C définissent un plan.

b) On va s'assurer que les coordonnées de A , B et C vérifient bien l'équation de P :

$$2x_A + y_A - 2z_A + 4 = 2 \times 3 + 2 - 2 \times 6 + 4 = 6 + 2 - 12 + 4 = 0; \text{ donc } A \in P.$$

$$2x_B + y_B - 2z_B + 4 = 2 \times 1 + 2 - 2 \times 4 + 4 = 2 + 2 - 8 + 4 = 0; \text{ donc } B \in P.$$

$$2x_C + y_C - 2z_C + 4 = 2 \times 4 + (-2) - 2 \times 5 + 4 = 8 - 2 - 10 + 4 = 0; \text{ donc } C \in P.$$

On en conclut que le plan défini par les points A , B et C est le plan P .

2. a) On sait que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, d'après la question 1. a) ;

$$\text{d'où } AB = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}.$$

De même, on a $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'après la question 1. a) ;

$$\text{d'où } AC = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18}.$$

$$\text{On calcule } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ d'où } BC = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$$

$$\text{Puis : } AB^2 + AC^2 = 8 + 18 = 26 = BC^2.$$

Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que le triangle ABC est rectangle en A .

b)

Rappel de cours : un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ admet un vecteur normal de coordonnées (a, b, c) .

Δ est perpendiculaire au plan P ; Δ admet donc pour vecteur directeur un vecteur normal de P .

Or, l'équation cartésienne de P est : $2x + y - 2z + 4 = 0$. On en déduit que le vecteur

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } P.$$

De plus, Δ passe par le point $O(0; 0; 0)$; en conséquence, une équation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

c)

Rappel de cours : dans un repère orthonormal, la distance du point $A(\alpha; \beta; \gamma)$ au plan P d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est égale à :

$$\frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$OK = d(O; P) = \frac{|2 \times 0 + 0 - 2 \times 0 + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}.$$

d) La hauteur du tétraèdre $OABC$ est OK , car K est le projeté orthogonal de O sur le plan contenant A, B et C .

$$\text{L'aire du triangle } ABC \text{ est : } \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{18}}{2} = 6; \quad \text{car } \begin{cases} \text{le triangle } ABC \text{ est} \\ \text{rectangle en } A \text{ d'après} \\ \text{la question 2. a).} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, le volume du tétraèdre } OABC \text{ est : } V = \frac{1}{3} \times OK \times 6 = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

3. a) Le système S admet un barycentre si la somme des poids est différente de 0 ; on a ici :

$$3 + 1 + 1 + 1 = 6 \neq 0.$$

Finalement : le système S admet bien un barycentre G .

b) I est le centre de gravité du triangle ABC , c'est donc l'isobarycentre des points A, B, C . Comme G est le barycentre du système $\{(O, 3)(A, 1)(B, 1)(C, 1)\}$, G est aussi le barycentre du système $\{(O, 3)(I, 3)\}$ (par associativité du barycentre).

Par suite, G est l'isobarycentre des points O et I (par homogénéité du barycentre).

Donc G est le milieu de $[OI]$.

G appartient bien à la droite (OI) .

c) On a :

$$x_G = \frac{1}{6} (3x_O + x_A + x_B + x_C) = \frac{1}{6} (0 + 3 + 1 + 4) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3};$$

$$y_G = \frac{1}{6} (3y_O + y_A + y_B + y_C) = \frac{1}{6} (0 + 2 + 2 - 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$z_G = \frac{1}{6} (3z_O + z_A + z_B + z_C) = \frac{1}{6} (0 + 6 + 4 + 5) = \frac{15}{6} = \frac{5}{2};$$

d'où les coordonnées de $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{2}\right)$.

$$d(G; P) = \frac{\left|2 \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - 2 \times \frac{5}{2} + 4\right|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

Voir le rappel de cours précédent.

4. Comme G est le barycentre du système $\{(O, 3)(A, 1)(B, 1)(C, 1)\}$, on a :

$$6\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

$$\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5 \text{ équivaut à } \|6\overrightarrow{MG}\| = 5,$$

$$\text{équivaut à } 6MG = 5,$$

$$\text{équivaut à } MG = \frac{5}{6}.$$

Par suite, Γ est la sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{6}$.

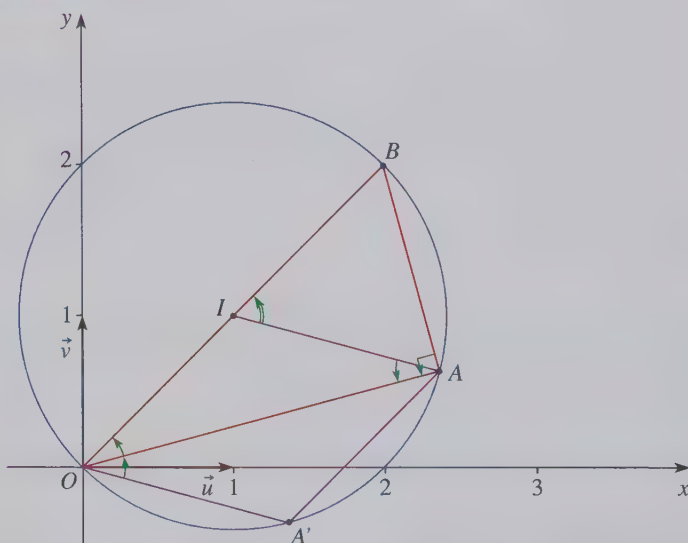
Or le rayon de cette sphère est égal à $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$; il est supérieur à la distance de G à P qui

$$\text{est de } \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

Ainsi, Γ et le plan P s'intersectent selon un cercle.

Et l'ensemble des points communs à P et Γ est un cercle.

EXERCICE 2



1. Soient M et M' des points d'affixes liées par la relation $z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$.

• Si $M \neq \Omega$, on a alors $z - \omega \neq 0$.

Considérons le quotient :

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega) \text{ équivaut à } \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}, \quad \text{avec } z - \omega \neq 0$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1 \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \pmod{2\pi}, \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \pmod{2\pi}, \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \pmod{2\pi}, \end{cases}$$

équivalent à M' est l'image de M par la rotation R .

• Si $M = \Omega$, on a alors $z - \omega = 0$.

Quand on remplace dans l'expression, on obtient $z' - \omega = 0$, soit $z' = \omega$, puis $M' = \Omega$.
Finalement, l'image de Ω par la rotation R est bien Ω .

2. a) La relation devient $z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_B)$.

Ainsi l'écriture complexe de la rotation R est : $z' - (2 + 2i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 2 - 2i)$.

b) D'après la question 2. a), on a :

$$\begin{aligned} z_A - (2 + 2i) &= e^{i\frac{\pi}{3}}(z_I - 2 - 2i) \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}}(1 + i - 2 - 2i) \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}}(-1 - i) \\ &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 - i) \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } z_A = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \bullet OI &= |z_I| \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IB &= |z_B - z_I| \\ &= |2 + 2i - 1 - i| = |1 + i| \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IA &= |z_A - z_I| \\ &= \left| \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{2} - 1 - i \right| \\ &= \left| \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4} + \frac{4-2\sqrt{3}}{4}} \\
 &= \sqrt{\frac{4+4}{4}} = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

On en conclut que **les points O, A et B sont sur le même cercle de centre I .**

• On remarque que : $\frac{z_B + z_O}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i = z_I.$

Cela signifie que I est le milieu du segment $[OB]$ et, par conséquent, que OB est un diamètre du cercle.

Le triangle OAB est donc rectangle en A , car tout triangle dont les sommets appartiennent à un cercle et dont l'un des côtés est un diamètre de ce même cercle est rectangle au point opposé au côté diamètre du cercle.

• On a $AB = |z_B - z_A|$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right| \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{2} \\
 &= IA = IB.
 \end{aligned}$$

Ainsi, le triangle AIB est équilatéral et, en conséquence, $\text{mes}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$

Les angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ interceptent le même arc ; par suite, d'après le théorème de l'angle au centre, on a :

$$\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \text{mes}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{6} \pmod{\pi}.$$

Mais, comme $0 < \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) < \frac{\pi}{2}$, on obtient que $\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}.$

d) On a $\text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}$;

or $\text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B) \pmod{2\pi}$;

$$|z_B| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

On cherche θ tel que
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{soit } \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi},$$

d'où $\text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}.$$

3. a) Le vecteur $\overrightarrow{IO}$ admet $-1 - i$ pour affixe :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= z_A + (-1 - i) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + (-1 - i) \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 - \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

b) A' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$.

On a donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{IO}$.

Par suite, $OIAA'$ est un parallélogramme.

De plus, comme I est le centre du cercle circonscrit à ABO , on a $IA = IO$.

Le quadrilatère $OIAA'$ possède donc deux côtés consécutifs de même longueur, c'est un losange.

c) On a $\text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}) = \text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) \pmod{2\pi}$.

Or, d'après la question 2. d), $\text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

D'autre part, comme $OIAA'$ est un losange, (OA) est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA'})$

et, ainsi, $\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA'}) = \text{mes}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA'})$

$$= -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \quad \text{d'après la question 2. c)}$$

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que } \text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OA'}) &= \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Finalement, un argument de $z_{A'}$ est $-\frac{\pi}{12}$.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

1. On a :

$$s'^{-1}(s(B)) = s'^{-1}(s'(B)) = B, \text{ car } s(B) = s'(B);$$

$$s'^{-1}(s(A)) = s'^{-1}(s'(A)) = A, \text{ car } s(A) = s'(A);$$

$$s'^{-1}(s(C)) = s'^{-1}(s'(C)) = C, \text{ car } s(C) = s'(C).$$

De plus, s'^{-1} est une similitude plane car s' l'est ; par suite, la composée de s suivie de s'^{-1} est aussi une similitude plane.

Finalement, cette similitude est l'identité du plan puisqu'elle laisse invariants trois points non alignés du plan.

Ainsi, pour tout point M du plan, on a $s'^{-1}(s(M)) = M$,

donc : $s'(s'^{-1}(s(M))) = s'(M)$, pour tout point M du plan,

soit $s(M) = s'(M)$, pour tout point M du plan.

Conclusion : $s = s'$.

200

$$\frac{1+i}{2} \bar{z}_G = \frac{1+i}{2} \times (3-i) = \frac{3-i+3i+1}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i = z_F.$$

Finalement, le triangle OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte d'écriture complexe : $z' = \frac{1+i}{2} \bar{z}$.

c) • On a $h(O) = O$, car O est le centre de l'homothétie h et $\sigma(O) = O$, O se trouvant sur l'axe de cette symétrie orthogonale. On en déduit que $\sigma \circ h(O) = O = S(O)$.

• Par définition de A' , on a $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{OA}$,

$$\text{donc } OA' = \frac{1}{\sqrt{2}} OA = \sqrt{2} = OE.$$

Comme I est le milieu de $[EA']$, on en déduit que $\sigma(A') = E$, puis que $\sigma \circ h(A) = E = S(A)$;

$$\text{on en déduit aussi que } z_I = \frac{z_E + z_{A'}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{2}.$$

• Par définition de G' , on a $\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{OG}$,

$$\text{donc } OG' = \frac{1}{\sqrt{2}} OG = \sqrt{5} = OF \text{ et } z_{G'} = \frac{1}{\sqrt{2}} z_G = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Calculons $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{FG'}$: $x_I \times (x_{G'} - x_F) + y_I \times (y_{G'} - y_F)$:

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{FG'} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2} - 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = 0.$$

Ainsi, les droites (OI) et (FG') sont orthogonales et, comme $OF = OG'$, on a $\sigma(G') = F$. On en déduit que $\sigma \circ h(G) = F = S(G)$.

• On a ainsi obtenu successivement que $\sigma \circ h(O) = S(O)$, $\sigma \circ h(A) = S(A)$ et $\sigma \circ h(G) = S(G)$.

D'autre part, la composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale est une similitude indirecte.

En utilisant le résultat de la question 1., on montre donc que $\sigma \circ h = S$.

EXERCICE 3

Rappels de cours : dérivation

- Dérivation d'un quotient : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $v(x) \neq 0$, pour tout x de I ; alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Dérivation de $\ln$: u est une fonction dérivable sur un intervalle I et $u(x) > 0$ sur I ; alors $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto x+3 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \\ x+3 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \text{ donc } x \mapsto \ln(x+3) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur est différent de zéro sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{On a } f'(x) = \frac{\frac{1}{x+3} \times (x+3) - \ln(x+3) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}.$$

Étudions le signe de f' :

on a $(x+3)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, car un carré est toujours positif ;

le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $1 - \ln(x+3)$;

$x \geq 0 \Leftrightarrow x+3 \geq 3 \Leftrightarrow \ln(x+3) \geq \ln 3$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$\Leftrightarrow -\ln(x+3) \leq -\ln 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - \ln(x+3) \leq 1 - \ln 3 < 0 \quad \text{car } e < 3 \Leftrightarrow 1 < \ln 3 \Leftrightarrow 1 - \ln 3 < 0$$

On obtient ainsi : $f'(x) < 0$, pour tout x de $\mathbb{R}_+$.

Calculons à présent la limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x+3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+3} = 0, \quad \text{d'après le théorème sur les limites de fonctions composées.}$$

Voici le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$\swarrow$
f	$\frac{\ln 3}{3}$	0

2. a) On a $n \leq x \leq n+1$, pour n entier naturel,

puis $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$, car f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$

soit : $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b) D'après le tableau de variation de f , on a $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ }
 f est continue sur $\mathbb{R}_+$, car dérivable sur $\mathbb{R}_+$

on en déduit que u_n est l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$.

Cela veut dire que u_n est compris entre l'aire des rectangles inférieur et supérieur :

$$f(n+1)(n+1-n) \leq u_n \leq f(n)(n+1-n),$$

soit : $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

$$\text{c) On a } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0,$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0.$$

De plus, on a vu, à la question 2. b), que $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

Finalement, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. a)

Rappel de cours : dérivation de u^n

• Soit u^n , pour n entier naturel, une fonction dérivable sur un intervalle I ; u^n est alors dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

On a vu à la question 1. que $x \mapsto \ln(x+3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, la fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$; ainsi, **par composition**, F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = 2 \times \frac{1}{x+3} \times \ln(x+3) = 2 \frac{\ln(x+3)}{x+3} = 2f(x).$$

$$\begin{aligned} \text{b) } I_n &= \int_0^n f(x) \, dx \\ &= \int_0^n \frac{1}{2} F'(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^n F'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} [F(x)]_0^n \\ &= \frac{1}{2} (F(n) - F(0)) \\ &= \frac{1}{2} ([\ln(n+3)]^2 - [\ln(3)]^2) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(n+3) - \ln 3)(\ln(n+3) + \ln 3) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+3}{3}\right) \ln(3(n+3)). \end{aligned}$$

4. Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1}$. On a :

$$S_n = \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) \, dx = \int_0^n f(x) \, dx \text{ d'après la relation de Chasles}$$

$$\text{d'où } S_n = I_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+3}{3}\right) \ln(3(n+3)); \quad \text{d'après la question 3. b)}$$

on a d'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+3}{3}\right) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n+3}{3}\right) = +\infty$;

et d'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3(n+3) = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(3(n+3)) = +\infty$;

d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

On en conclut que la suite (S_n) n'est pas convergente.

EXERCICE 4

1.

Méthode : loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A de probabilité p et $\bar{A}$ de probabilité $(1 - p)$.

Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de réalisations de l'événement A suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

On a, de plus : $E(X) = np$.

Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli où le succès est représenté par l'événement « la personne accepte de répondre à l'enquête » avec une probabilité de $p = 0,1$.

Comme, de plus, on répète 50 fois cette épreuve de Bernoulli de manière indépendante, on crée donc un schéma de Bernoulli.

Puis, lorsqu'on s'intéresse au nombre de réalisations du succès, on est alors devant une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.

$$\begin{aligned} p(A) &= 1 - p(\bar{A}) \\ &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - \binom{50}{0} 0,1^0 \times 0,9^{50} \\ &\approx 0,995. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(B) &= p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \\ &= \binom{50}{0} 0,1^0 \times 0,9^{50} + \binom{50}{1} 0,1^1 \times 0,9^{49} + \binom{50}{2} 0,1^2 \times 0,9^{48} \\ &\approx 0,112. \end{aligned}$$

$$p(C) = 1 - p(B) \approx 0,888.$$

2. a) On a $f(a) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2))$

$$\begin{aligned} &= 1 - \left(\frac{e^{-a} a^0}{0!} + \frac{e^{-a} a^1}{1!} + \frac{e^{-a} a^2}{2!} \right) \\ &= 1 - \left(e^{-a} + e^{-a} a + \frac{e^{-a} a^2}{2!} \right) \\ &= 1 - e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(5) &= 1 - e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{25}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{37}{2} e^{-5} \\ &\approx 0,875. \end{aligned}$$

À la question 1., on avait trouvé que le même événement avait une probabilité de 0,888 si la loi était de type binomiale. **On peut ainsi considérer que les deux modélisations donnent des résultats voisins.**

3. a) • f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$$f'(x) = - \left((-e^{-x}) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right) + e^{-x}(1+x) \right) = \frac{x^2}{2} e^{-x}$$

Ainsi $\begin{cases} f'(x) = 0, \text{ pour } x = 0, \\ f'(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$ comme produit de nombres strictement positifs.

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

• On peut aussi écrire f sous la forme : $f(x) = 1 - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{e^x}$.

Or, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, pour tout entier naturel n , d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$,

$$\text{ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 ;$$

finally, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Voici le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	0	1

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc continue sur $\mathbb{R}_+$;

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$;

0,95 est compris entre $0 = f(0)$ et $1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

En conséquence, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,95$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

En utilisant la calculatrice, on vérifie que :

$f(6,29) < 0,95$ et $f(6,3) > 0,95$.

Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0,95$, on conclut que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3.

Sujet 11 CORRIGÉS

c) On en déduit que **le nombre minimal de personnes à interroger** pour obtenir au moins trois réponses à l'enquête **est** $n = a \times 10 = 6,3 \times 10 = \mathbf{63}$.

Nouvelle-Calédonie

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 45 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 1 h 15 min.

EXERCICE 1 Probabilités – Loi binomiale, Probabilités conditionnelles**(4 points)**

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2. a) On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.

Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son espérance mathématique.

b) On désigne par A l'événement : « aucun animal n'est malade parmi les 10 ». On désigne par B l'événement : « au moins un animal est malade parmi les 10 ». Calculer les probabilités de A et de B .

3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'événement : « avoir un test positif à cette maladie » et M l'événement : « être atteint de cette maladie ».

a) Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité de l'événement T .

c) Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Corrigé page 212

EXERCICE 2 Nombres complexes – Résolution algébrique, Interprétation géométrique (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

On considère l'équation (E) :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$$

où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. a) Montrer que (E) admet une solution réelle, notée z_1 .

b) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b).$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les trois points A , B et C d'affixes respectives 1 , $2 + 2i$ et $1 - i$.

1. Représenter A , B et C .

2. Déterminer le module et un argument de $\frac{2 + 2i}{1 - i}$.

En déduire la nature du triangle OBC .

3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.

4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre C . Déterminer l'affixe de D .

5. Quelle est la nature de $OCDB$?

Corrigé page 213

SPECIALITÉ EXERCICE 2 Nombres complexes – Géométrie (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité 1 cm).

On construira une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r .

Montrer que B a pour affixe $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant :

$$\left\{ -3; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i; -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

3. a) Déterminer $r(F)$.

- b) Quelle est la nature du polygone $ABCDEF$?

4. Soit s la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C .

- a) Déterminer l'angle et le rapport de s' . En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.

- b) Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?

- c) Déterminer l'écriture complexe de $s' \circ s$.

5. Soit A' le symétrique de A par rapport à C .

- a) Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(A')$, puis l'image de A' par $s' \circ s$.

- b) Calculer l'affixe du point A' . Retrouver alors le résultat du a) en utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$.

Corrigé page 216

EXERCICE 3 Analyse – Suites (5 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

1. a) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

Sujet 12

Étudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra comme unité 2 cm.)

b) Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $(O; \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3 .

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \geq \sqrt{2}$.

b) Montrer que, pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.

c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d) Prouver qu'elle converge.

3) Soit l la limite de la suite (u_n) . Montrer que l est solution de l'équation :

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

En déduire sa valeur.

Corrigé page 219

EXERCICE 4 Géométrie dans l'espace – Barycentre (6 points)

Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

– les points $A(0; 0; 3)$, $B(2; 0; 4)$, $C(-1; 1; 2)$ et $D(1; -4; 0)$;

– les plans $(P_1): 7x + 4y - 3z + 9 = 0$ et $(P_2): x - 2y = 0$;

– les droites (Δ_1) et (Δ_2) définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -8 + 2t \\ z = -10 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 7 + 2t' \\ y = 8 + 4t' \\ z = 8 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a)	b)	c)	d)
1. Le plan (P_1) est :	le plan (ABC)	le plan (BCD)	le plan (ACD)	le plan (ABD)
2. La droite (Δ_1) contient :	le point A	le point B	le point C	le point D
3. Position relative de (P_1) et de (Δ_1) :	(Δ_1) est strictement parallèle à (P_1)	(Δ_1) est incluse dans (P_1)	(Δ_1) coupe (P_1)	(Δ_1) est orthogonale à (P_1)
4. Position relative de (Δ_1) et de (Δ_2) :	(Δ_1) est strictement parallèle à (Δ_2)	(Δ_1) et (Δ_2) sont confondues	(Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes	(Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires
5. L'intersection de (P_1) et de (P_2) est une droite dont une représentation paramétrique est :	$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t + t \\ z = -3t \end{cases}$

Seconde partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (D) passant par $A(0; 0; 3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1; 0; -1)$ et la droite (D') passant par $B(2; 0; 4)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(0; 1; 1)$.

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à (D) et à (D') , de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

1. On considère un point M appartenant à (D) et un point M' appartenant à (D') définis par $\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$ et $\overrightarrow{BM'} = b\vec{v}$, où a et b sont des nombres réels.

Exprimer les coordonnées de M , de M' , puis du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b .

2. Démontrer que la droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D') si, et seulement si, le couple $(a; b)$ est solution du système :
$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1. \end{cases}$$

3. Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M' , que nous noterons ici H et H' , tels que la droite (HH') soit bien perpendiculaire commune à (D) et à (D') .

Montrer que $HH' = \sqrt{3}$ unités de longueur.

4. On considère un point M quelconque de la droite (D) et un point M' quelconque de la droite (D') .

a) En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1., démontrer que :

$$MM'^2 = (a + b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + 3.$$

b) En déduire que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' est en H' .

Corrigés

EXERCICE 1

1. Dans le cheptel, 5 animaux sur 1 000 sont malades ; on a donc $p = \frac{5}{1\,000} = 0,005$.

2.

Méthode : loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A de probabilité p et $\bar{A}$ de probabilité $(1 - p)$.

Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de réalisations de l'événement A suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

On a, de plus : $E(X) = np$.

a) Choisir un animal dans le cheptel est une épreuve de Bernoulli qui présente les issues « l'animal est malade » de probabilité 0,005 et « l'animal n'est pas malade » de probabilité 0,995. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $p = 0,005$ et $n = 10$.

Son espérance vaut $E(X) = np = 0,005 \times 10 = 0,05$.

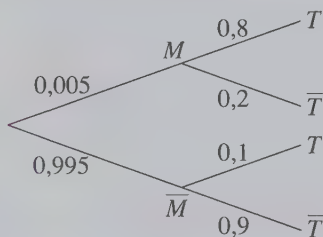
b) A est l'événement « aucun animal n'est malade parmi les 10 » :

$$p(A) = p(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0,005^0 \times 0,995^{10} = 0,995^{10} \approx 0,951.$$

B est l'événement « au moins un animal est malade parmi les 10 » :

$$p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0,995^{10} \approx 0,049.$$

3. a)



b)

Rappel de cours : formule des probabilités totales

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ formant une partition de l'univers. Soit A un événement ; on a :

$$p(A) = p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A) + \dots + p(B_n \cap A).$$

M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. On a :

$$p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M}),$$

$$p(T) = p(T / M) \times p(M) + p(T / \overline{M}) \times p(\overline{M}),$$

$$p(T) = 0,8 \times 0,005 + 0,1 \times 0,995 = \mathbf{0,1035}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } p(M / T) &= \frac{p(T \cap M)}{p(T)} \\ &= \frac{p(T / M) \times p(M)}{p(T)} \\ &= \frac{0,8 \times 0,005}{0,1035} = \frac{0,8}{20,7} = \frac{8}{207} \approx \mathbf{0,039}. \end{aligned}$$

La probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif est de 0,039.

EXERCICE 2

Partie A

1. a) Cherchons une solution z réelle de (E) :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0 \text{ équivaut à } (z^3 - 4z^2 + 7z - 4) + i(-z^2 + z) = 0,$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} z^3 - 4z^2 + 7z - 4 = 0 \\ -z^2 + z = 0 \end{cases} \text{ car } z \text{ réel}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} z^3 - 4z^2 + 7z - 4 = 0 \\ z(1 - z) = 0, \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} z^3 - 4z^2 + 7z - 4 = 0 \\ z = 0 \text{ ou } z = 1, \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } z = 1 \text{ car } 0^3 - 4 \times 0^2 + 7 \times 0 - 4 = -4 \neq 0.$$

Ainsi, l'équation (E) admet une unique solution réelle $z_1 = 1$.

Autre méthode :

On remarque que 1 est une racine évidente, car :

$$1^3 - (4 + i) \times 1^2 + (7 + i) \times 1 - 4 = 1 - 4 - i + 7 + i - 4 = 0.$$

b) On procède par identification en développant le membre de droite :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b),$$

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - 1)(z - 2 - 2i)(az + b),$$

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z^2 - (3 + 2i)z + 2 + 2i)(az + b),$$

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = az^3 + (b - 3a - 2ia)z^2 + [(2 + 2i)a - (3 + 2i)b]z + (2 + 2i)b.$$

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} a = 1 \\ b - 3a - 2ia = -4 - i \\ (2 + 2i)a - (3 + 2i)b = 7 + i \\ (2 + 2i)b = -4, \end{cases} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 + i. \end{cases}$$

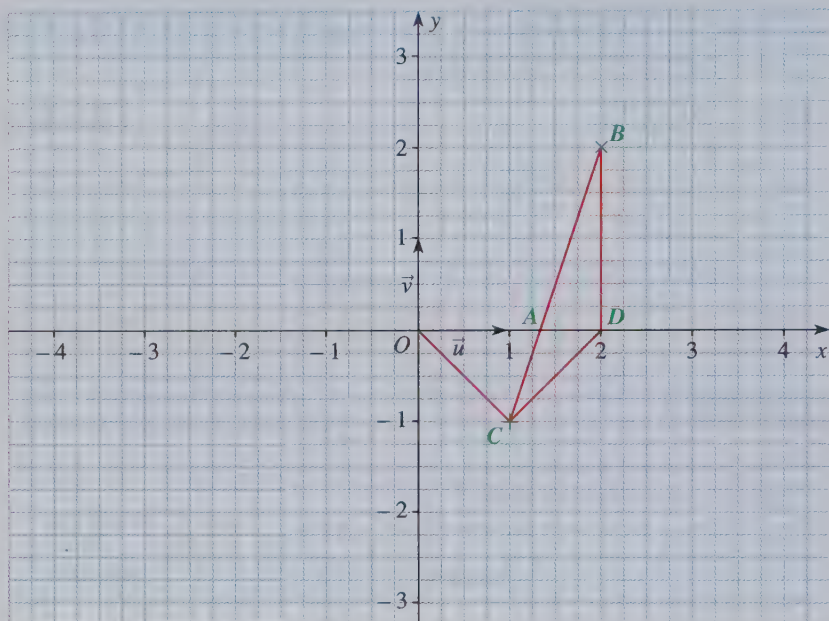
2. (E) équivaut à $(z - z_1)(z - 2 - 2i)(z - 1 + i) = 0$, d'après la question précédente.

(E) équivaut à $z = z_1 = 1$ ou $z = 2 + 2i$ ou $z = 1 - i$.

L'équation possède donc trois solutions 1 ; $2 + 2i$ et $1 - i$.

Partie B

1.



2. On a $|2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ et $|1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{2 + 2i}{1 - i} &= \frac{2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \\ &= 2 \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} \\ &= 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\left| \frac{2 + 2i}{1 - i} \right| = 2$ et $\arg \left(\frac{2 + 2i}{1 - i} \right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

On en déduit que $\frac{OB}{OC} = \frac{|2 + 2i|}{|1 - i|} = \left| \frac{2 + 2i}{1 - i} \right| = 2$

et $\text{mes}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \arg \left(\frac{2 + 2i}{1 - i} \right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Le triangle OBC est donc rectangle en O , mais non isocèle.

$$\begin{aligned}
 3. \text{ On a } \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &= \arg\left(\frac{2+2i}{1}\right) \\
 &= \arg\left(2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
 &= \arg\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) &= \arg\left(\frac{1-i}{1}\right) \\
 &= \arg\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
 &= \arg\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \\
 &= -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.
 \end{aligned}$$

Donc $\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \pmod{2\pi}$.

La droite (OA) est, par conséquent, la bissectrice intérieure issue de O dans le triangle OBC.

4.

Méthode : si A' , d'afixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'afixe z_A , par la rotation de centre Ω d'afixe z_Ω et d'angle θ , alors :

$$z_{A'} - z_\Omega = (z_A - z_\Omega) e^{i\theta}.$$

D est l'image de O par la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\begin{aligned}
 z_D - z_C &= e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_C), \\
 z_D &= z_C - e^{-i\frac{\pi}{2}}z_C = z_C\left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right), \text{ car } z_O = 0, \\
 z_D &= (1-i)(1+i) = 1+1 = 2.
 \end{aligned}$$

D a ainsi pour affixe 2.

5. On sait que $\text{mes}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, d'après la question 2.

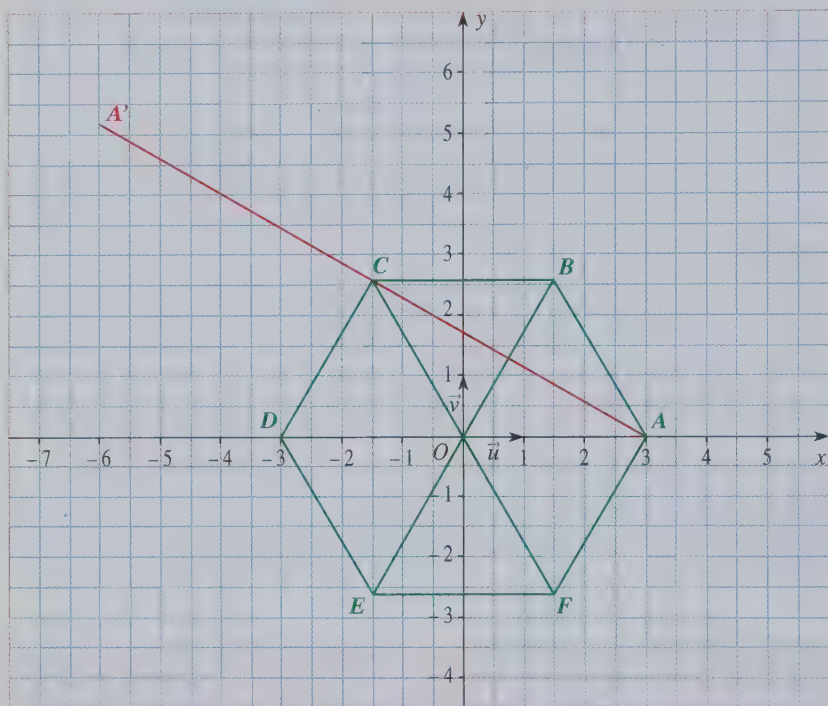
Par définition de D , on a aussi $\text{mes}(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CO}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

$$\text{De plus, } z_D - z_C = 2 - 1 + i = 1 + i = \frac{1}{2}(z_B - z_O),$$

$$\text{donc } \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{CD}.$$

On en déduit que **le quadrilatère OCDB est un trapèze rectangle en O et C.**

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2



L'échelle de l'énoncé n'est pas respectée.

1.

Méthode : si A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par la rotation de centre O et d'angle θ , alors :

$$z_{A'} = z_A e^{i\theta}.$$

On sait que $B = r(A)$, donc $z_B = z_A e^{i\frac{\pi}{3}} = 3 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. De même, $C = r(B)$, donc $z_C = z_B e^{i\frac{\pi}{3}} = z_A e^{i\frac{2\pi}{3}} = 3 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$D = r(C)$, donc $z_D = z_C e^{i\frac{\pi}{3}} = z_A e^{i\frac{3\pi}{3}} = -3$.

$E = r(D)$, donc $z_E = z_D e^{i\frac{\pi}{3}} = z_A e^{i\frac{4\pi}{3}} = 3 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$F = r(E)$, donc $z_F = z_E e^{i\frac{\pi}{3}} = z_A e^{i\frac{5\pi}{3}} = z_A e^{-i\frac{\pi}{3}} = 3 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. a) On a $z_F e^{i\frac{\pi}{3}} = z_A e^{i\frac{6\pi}{3}} = z_A e^{2i\pi} = z_A$, donc $r(F) = A$.

b) Par construction, on a :

$$\begin{aligned} \text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &= \text{mes}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \text{mes}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \text{mes}(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) = \text{mes}(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \\ &= \text{mes}(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

et $OA = OB = OC = OD = OE = OF$.

Par suite, le polygone $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O .

4. a)

Méthode : si B est l'image de A par une similitude directe de centre C d'angle α et de rapport k , alors :

$$k = \frac{CB}{CA} \text{ et } \alpha = (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi}.$$

Ici, la similitude s' de centre E transforme F en C , d'où :

$$\frac{EC}{EF} = \left| \frac{z_C - z_E}{z_F - z_E} \right| = \left| \frac{-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}} \right| = \left| \frac{3i\sqrt{3}}{3} \right| = \sqrt{3},$$

$$\text{et } \text{mes}(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_E}{z_F - z_E}\right) = \arg\left(\frac{3i\sqrt{3}}{3}\right) = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

On en conclut que s' est la similitude de centre E , de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Méthode : soient s et s' deux similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs a et a' .

La composée des deux est encore une similitude directe dont le rapport est kk' et l'angle $a + a' \pmod{2\pi}$.

$s' \circ s$ est ainsi une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

b)

Rappel de cours : écriture complexe d'une similitude

Si A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par la similitude de centre Ω d'affixe z_Ω , de rapport k et d'angle θ , alors :

$$z_{A'} - z_\Omega = (z_A - z_\Omega) k e^{i\theta}.$$

Soit z , l'affixe de l'image de D par s . On a :

$$z - z_A = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} (z_D - z_A),$$

$$z = 3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-3 - 3) = 3 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = z_F.$$

L'image de D par s est F .

De plus, $s'(F) = C$, l'image de D par $s' \circ s$ est donc C .

c)

Méthode : l'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme :

$$z' = az + b, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ nombres complexes et } a \neq 0.$$

- L'angle de la similitude est donné par un argument de a .
- Le rapport est donné par le module de a .
- Le centre de la similitude est obtenu en cherchant les points fixes.

On sait déjà que $s' \circ s$ est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

En conséquence, l'écriture complexe de $s' \circ s$ est :

$$z' = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} z + b = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) z + b = \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z + b,$$

avec b complexe à déterminer.

Comme l'image de D par $s' \circ s$ est C , on a :

$$z_C = \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_D + b,$$

$$\text{puis } b = z_C - \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_D = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right) + 3 \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) = -\frac{15}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i.$$

En conclusion, l'écriture complexe de $s' \circ s$ est $z' = \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z - \frac{15}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i$.

5. a) Par hypothèse, on a : $AA' = 2AC = 2AE$, donc $AE = \frac{1}{2} AA'$.

Le triangle ACE est équilatéral, d'où $\text{mes}(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AE}) = \text{mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Ainsi, l'image de A' par s est E .

D'autre part, l'image de E par s' est lui-même, car c'est le centre de la similitude s' .

D'où $s' \circ s(A') = E$.

b) Comme précédemment, par hypothèse, $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AC}$, donc $z_{A'} - z_A = 2(z_C - z_A)$.

$$\text{Par suite : } z_{A'} = z_A + 2(z_C - z_A) = 3 + 2 \times \left(-\frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2} - 3 \right) = -6 + 3\sqrt{3}i.$$

Retrouvons le résultat $s' \circ s(A') = E$ en utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$. On a :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_{A'} - \frac{15}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i &= \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) (-6 + 3\sqrt{3}i) - \frac{15}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i \\ &= \frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4}i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{9}{4} - \frac{15}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ &= z_E. \end{aligned}$$

On a bien $s' \circ s(A') = E$.

EXERCICE 3

1. a)

Méthode : étude de fonction

Une telle étude comprend les étapes suivantes :

- dérivabilité de la fonction,
- calcul de la dérivée,
- étude du signe de la dérivée,
- variations de la fonction.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ [comme somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$; on a :

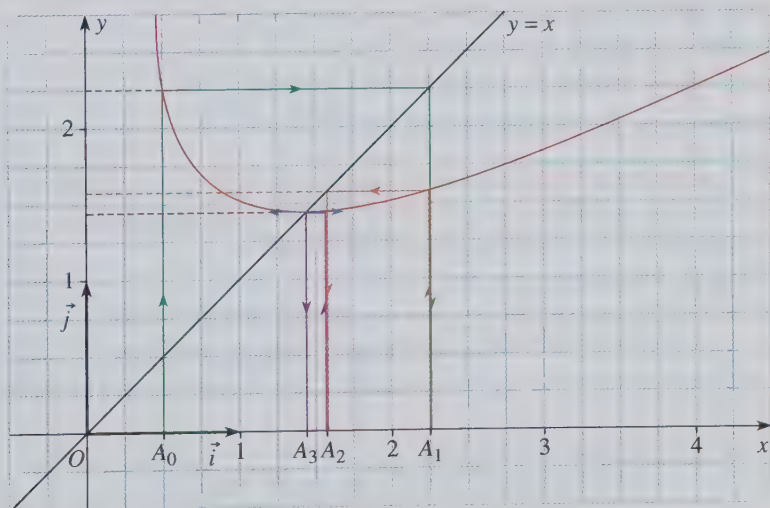
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 2}{2x^2} \\ &= \frac{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{2x^2}. \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $(x - \sqrt{2})$.

Ainsi $f'(x) > 0$, si $x > \sqrt{2}$ et $f'(x) < 0$, si $0 < x < \sqrt{2}$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0; \sqrt{2}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

De plus, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; la courbe représentative de f possède une asymptote verticale qui est l'axe des ordonnées.



b) On place la valeur u_0 sur l'axe des abscisses, ce qui nous donne le point A_0 . On rejoint ensuite la courbe de la fonction f parallèlement à l'axe des ordonnées, puis la droite d'équation $y = x$ parallèlement à l'axe des abscisses. On lit l'abscisse du point obtenu, ce qui nous donne la valeur de x_1 et le point A_1 . On reproduit le même raisonnement avec A_1 et ainsi de suite.

2. a)

Rappel de cours : démonstration par récurrence

- On pose une propriété P_n .
- On initialise la récurrence en montrant que cette propriété est bien vraie au premier rang de la suite.
- On montre ensuite l'hérédité de la propriété.

Soit P_n la propriété : « $u_n \geq \sqrt{2}$ », pour tout entier naturel n non nul.

• Initialisation : on a $u_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{9}{4} = 2,25 \geq \sqrt{2}$.

• Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $u_n \geq \sqrt{2}$.

D'après la question 1. a), f est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$, donc $u_n \geq \sqrt{2} \Rightarrow f(u_n) \geq f(\sqrt{2})$.

Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, on obtient $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

Ainsi, P_{n+1} est vraie si P_n est vraie pour n entier naturel non nul donné.

Conclusion : on a montré par récurrence que $u_n \geq 2$, pour tout n entier naturel non nul.

b) On a $f(x) - x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) - x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = \frac{2-x^2}{2x}$.

Si $x \geq \sqrt{2}$, alors $x^2 \geq 2$ et ainsi $2 - x^2 \leq 0$.

De plus, $2x > 0$, d'où $f(x) - x \leq 0$, puis $f(x) \leq x$.

On vient de démontrer que, pour tout $x \geq \sqrt{2}$, on a $f(x) \leq x$.

c) Raisonnons de nouveau par récurrence.

Soit P_n la propriété : « $u_{n+1} \leq u_n$ », pour tout entier naturel n non nul.

• Initialisation : on a $u_1 = 2,25 \geq u_2$, car $u_2 = \frac{113}{72} \approx 1,57$.

• Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $u_{n+1} \leq u_n$.

D'après la question précédente, on sait que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout entier naturel non nul et,

d'après la question 1. a), f est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$,

donc $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$.

Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, on obtient $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

Ainsi, P_{n+1} est vraie si P_n est vraie, pour n entier naturel non nul donné.

Conclusion : on a montré par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$, pour tout n entier naturel non nul.

d) On a prouvé précédemment que la suite $(u_n)_n$ est minorée par $\sqrt{2}$ et décroissante à partir du rang 1 ; elle est donc **convergente vers une limite $L \geq \sqrt{2}$.**

3. La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions continues sur $]0; +\infty[$.

Par conséquent, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(L)$.

Or, on sait que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$.

L doit donc vérifier $f(L) = L$.

$$f(L) = L \quad \text{équivaut à} \quad \frac{1}{2} \left(L + \frac{2}{L} \right) = L,$$

$$\text{équivaut à} \quad \frac{1}{2} L = \frac{1}{L},$$

$$\text{équivaut à} \quad L^2 = 2,$$

$$\text{équivaut à} \quad L = -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad L = \sqrt{2}.$$

On a vu de plus, à la question 2. d), que $L \geq \sqrt{2}$; on en conclut que $L = \sqrt{2}$.

EXERCICE 4

Première partie

Méthode : cet exercice est un Q.C.M. dans lequel il est précisé que, pour chaque question, il n'existe qu'une bonne réponse. Par conséquent, on peut raisonner soit de manière directe, en faisant le calcul, soit par élimination des mauvaises réponses.

1. Réponse c).

On a $7x_B + 4y_B - 3z_B + 9 = 7 \times 2 + 4 \times 0 - 3 \times 4 + 9 = 11 \neq 0$; le point B n'appartient donc pas au plan (P_1) . Par élimination, la bonne réponse est c).

2. Réponse d).

Vérifions que D appartient à la droite (Δ_1) :

$$\begin{cases} x_D = -1 + t \\ y_D = -8 + 2t \\ z_D = -10 + 5t \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} 1 = -1 + t \\ -4 = -8 + 2t \\ 0 = -10 + 5t \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad t = 2.$$

Ainsi, D appartient bien à la droite (Δ_1) et la bonne réponse est d).

3. Réponse b).

$$(\Delta_1) \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } (P_1) \text{ a pour vecteur normal } \vec{n}_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On constate que $\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 1 \times 7 + 2 \times 4 + 5 \times (-3) = 0$; ce qui signifie que $\vec{u}_1 \perp \vec{n}_1$, et donc que (Δ_1) est parallèle à (P_1) .

De plus, $D \in (\Delta_1)$ d'après la question 2. et $D \in (P_1)$ d'après la question 1.

On en déduit que (Δ_1) est incluse dans (P_1) .

4. Réponse c).

$$(\Delta_2) \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Les vecteurs } \vec{u}_1 \text{ et } \vec{u}_2 \text{ ne sont pas colinéaires,}$$

car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : les droites (Δ_1) et (Δ_2) ne sont, en conséquence, pas parallèles. Elles sont donc soit sécantes, soit non coplanaires.

Cherchons un éventuel point d'intersection entre ces deux droites :

$$M(x, y, z) \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2) \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} -1 + t = 7 + 2t' \\ -8 + 2t = 8 + 4t' \\ -10 + 5t = 8 - t' \end{cases}, \text{ avec } t \text{ et } t' \text{ deux réels.}$$

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} t = 8 + 2t' \\ t = 8 + 2t' \\ -10 + 5(8 + 2t') = 8 - t' \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} t = 4 \\ t' = -2. \end{cases}$$

Conclusion : les droites sont sécantes en un point M de coordonnées $(3; 0; 10)$, ce qui correspond à la réponse c).

5. Réponse b).

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (P_1) \cap (P_2) &\text{ équivaut à } \begin{cases} 7x + 4y - 3z + 9 = 0 \\ x - 2y = 0, \end{cases} \\ &\text{équivaut à } \begin{cases} x = 2y \\ 18y - 3z + 9 = 0, \end{cases} \\ &\text{équivaut à } \begin{cases} x = 2y \\ z = 6y + 3. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Posons } y = t; M(x, y, z) \in (P_1) \cap (P_2) \text{ équivaut à } \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 6t + 3 \end{cases}, \text{ avec } t \text{ réel quelconque.}$$

C'est la réponse b).

Seconde partie

$$1. \text{ Soit } M(x, y, z) \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = a\vec{u}. \text{ On a alors } \begin{cases} x = a \\ y = 0 \\ z = 3 - a. \end{cases}$$

$$\text{Soit } M'(x', y', z') \text{ tel que } \overrightarrow{BM'} = b\vec{v}. \text{ On a alors } \begin{cases} x' = 2 \\ y' = b \\ z' = 4 + b. \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que : } \overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} 2 - a \\ b \\ a + b + 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. (MM') \perp (D) \text{ et } (MM') \perp (D') \text{ équivaut à } \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \text{ et } \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = 0,$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} (2 - a) - (a + b + 1) = 0 \\ b + (a + b + 1) = 0, \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

On obtient ainsi deux points $H(1, 0, 2)$ et $H'(2, -1, 3)$ tels que (HH') soit la perpendiculaire commune à (D) et (D') .

$$\text{On a } HH' = \sqrt{(1-2)^2 + (0+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}.$$

4. a) On a $MM'^2 = (2 - a)^2 + b^2 + (a + b + 1)^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2a + 2b + 2ab + 5$,
or, $(a + b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + 3 = 2a^2 + 2b^2 - 2a + 2b + 2ab + 5$,
par suite : $MM'^2 = (a + b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + 3$.

b) La distance MM' est minimale lorsque les termes au carré sont minimaux, c'est-à-dire nuls.

Il faut donc que $\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 1 = 0 \\ b + 1 = 0 \end{cases}$, soit encore $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

On retrouve ainsi les deux points obtenus à la question 3., H et H' .

Amérique du Sud

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 35 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 45 min.
- Exercice 4 : 1 h 40 min.

EXERCICE 1 Géométrie dans l'espace – Distance, Représentation paramétrique (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

- A de coordonnées $(3; 1; -5)$,
 B de coordonnées $(0; 4; -5)$,
 C de coordonnées $(-1; 2; -5)$,
et D de coordonnées $(2; 3; 4)$.

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » ou « FAUX ». On attribue 0,5 point par réponse correcte et on retranche 0,25 point par réponse incorrecte. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Les points A , B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A , B , C et D sont coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD) .

6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \frac{7}{2} + k, \quad k \in \mathbb{R}. \\ z = -\frac{1}{2} - 9k \end{cases}$$

Corrigé page 229

EXERCICE 2 Nombres complexes – Interprétation géométrique

(5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. Question de cours

On rappelle que :

« Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z , on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$. »

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a) Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}).$$

b) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\frac{p-m}{n-m}\right|$.

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 4 + i, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 5i \quad \text{et} \quad z_D = -3 - i.$$

Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z tel que :

$$z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i.$$

a) Préciser les images des points A et B par f .

b) Montrer que f admet un unique point invariant Ω , dont on précisera l'affixe ω .

4. a) Montrer que pour tout nombre complexe z , on a :

$$z' - z = -2i(2 - i - z).$$

b) En déduire, pour tout point M différent du point Ω , la valeur de $\frac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$.

c) Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d) Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - i\sqrt{3}$. Écrire z_E sous forme exponentielle, puis placer le point E sur la figure.

Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E .

Corrigé page 230

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Arithmétique – Équation de la forme $ax + by = c$ (5 points)

Rappel :

Pour deux entiers relatifs a et b , on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \pmod{7}$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. Cette question constitue une restitution organisée de connaissances.

a) Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que : si $a \equiv b \pmod{7}$ et $c \equiv d \pmod{7}$, alors $ac \equiv bd \pmod{7}$.

b) En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls, si $a \equiv b \pmod{7}$ alors, pour tout entier naturel n , $a^n \equiv b^n \pmod{7}$.

2. Pour $a = 2$, puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que :

$$a^n \equiv 1 \pmod{7}.$$

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a) Montrer que :

$$a^6 \equiv 1 \pmod{7}.$$

b) On appelle *ordre* de $a \pmod{7}$, et on désigne par k , le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod{7}$.

Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod{7}$.
 En déduire que k divise 6.

Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c) Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. À tout entier naturel n , on associe le nombre :

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \pmod{7}$.

Corrigé page 231

EXERCICE 3 Probabilités – Loi binomiale (4 points)

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$.

On définit les événements suivants :

- A : « le jardinier a choisi le lot 1 » ;
- B : « le jardinier a choisi le lot 2 » ;
- J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a) Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b) Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c) Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

d) Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles

a) Montrer que :

$$P_B(J_n) = \binom{50}{n} 2^{-50}.$$

b) En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c) On note p_n la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que J_n est réalisé.

Établir que :

$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}.$$

d) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0,9$?

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

EXERCICE 4 Analyse – Fonction logarithme népérien, Suites (8 points)

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$, puis étudier le sens de variation de f_n .

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1; e]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n; 0)$.

b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 .

c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n .

d) Préciser la valeur de α_1 , puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n) .

3. a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n .

b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :

$$f_{n+1}(\alpha_n) < 0.$$

c) Dédire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n) .

d) Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ .

4. On désigne par $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = e$.

a) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à :

$$\frac{\alpha_n^2}{n}.$$

b) Établir que :

$$(e - \alpha_n) \ln \alpha_n \leq \frac{\alpha_n^2}{n} \leq (e - \alpha_n).$$

c) En déduire un encadrement de $n(e - \alpha_n)$.

d) La suite de terme général $n(e - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?

Corrigés

EXERCICE 1

Méthode : cet exercice est un Q.C.M. dans lequel il est précisé que, pour chaque question, il n'existe qu'une bonne réponse. Par conséquent, on peut raisonner soit de manière directe, en faisant le calcul, soit par élimination des mauvaises réponses.

1. Affirmation 1 : faux.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; on constate que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas col-

néaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Ainsi, les points A , B et D ne sont pas alignés.

2. Affirmation 2 : vrai.

Les coordonnées de B vérifient l'équation $x + y = 4$;
Les coordonnées de A vérifient l'équation $x + y = 4$; on en conclut que la droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne $x + y = 4$.

3. Affirmation 3 : vrai.

On a :
 $18 \times 0 - 9 \times 4 - 5 \times (-5) + 11 = -36 + 25 + 11 = 0$: les coordonnées de B vérifient l'équation ;

$18 \times (-1) - 9 \times 2 - 5 \times (-5) + 11 = -18 - 18 + 25 + 11 = 0$: les coordonnées de C vérifient l'équation ;

$18 \times 2 - 9 \times 3 - 5 \times 4 + 11 = 36 - 27 - 20 + 11 = 0$: les coordonnées de D vérifient l'équation.

Par suite, une équation cartésienne du plan (BCD) est bien : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.

4. Affirmation 4 : faux.

Il suffit de vérifier si les coordonnées de A vérifient l'équation du 3.

$18 \times 3 - 9 \times 1 - 5 \times (-5) + 11 = 54 - 9 + 25 + 11 = 81 \neq 0$: les coordonnées de A ne vérifient pas cette équation. Les points A , B , C et D ne sont donc pas coplanaires.

5. Affirmation 5 : faux.

Rappel de cours : dans un repère orthonormal, la distance du point $A(\alpha; \beta; \gamma)$ au plan P d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est égale à :

$$\frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Calculons la distance de A au plan (BCD) :

$$d(A, (BCD)) = \frac{|18 \times 3 - 9 \times 1 - 5 \times (-5) + 11|}{\sqrt{18^2 + (-9)^2 + (-5)^2}} = \frac{81}{430} \neq 9.$$

On en conclut que la sphère de centre A et de rayon 9 n'est pas tangente au plan (BCD) .

6. Affirmation 6 : vrai.

Les coordonnées de D doivent vérifier la représentation paramétrique donnée, donc nécessairement pour $x_D = 2$:

$$2 = 1 - 2k \Leftrightarrow -2k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

En remplaçant la valeur de k dans les deux autres relations du système, on retrouve bien les coordonnées de D .

En procédant de la même manière, on montre que les coordonnées de B vérifient aussi l'équation paramétrique.

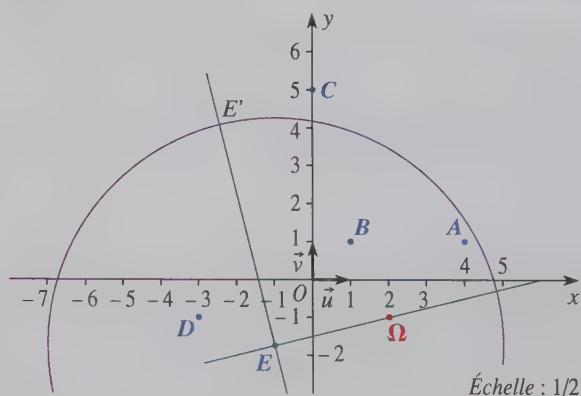
EXERCICE 2

$$\begin{aligned} 1. a) \text{ On a } (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}) &= (\overrightarrow{MN}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{MP}) \pmod{2\pi} \\ &= (\vec{u}; \overrightarrow{MP}) - (\vec{u}; \overrightarrow{MN}) \pmod{2\pi} \\ &= \arg(p - m) - \arg(n - m) \pmod{2\pi} \\ &= \arg\left(\frac{p - m}{n - m}\right) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

car $\arg z - \arg z' = \arg\left(\frac{z}{z'}\right)$, pour tous z et z' complexes non nuls.

$$\begin{aligned} b) \left| \frac{p - m}{n - m} \right| &= \frac{|p - m|}{|n - m|} \quad \text{car } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ pour tous complexes } z \text{ et } z' \text{ non nuls} \\ &= \frac{MP}{MN}, \quad \text{car } MP = |p - m|. \end{aligned}$$

2.



$$\begin{aligned} 3. a) z'_A &= (1 + 2i)z_A - 2 - 4i = (1 + 2i)(4 + i) - 2 - 4i = 4 + i + 8i - 2 - 2 - 4i = 5i. \\ z'_B &= (1 + 2i)z_B - 2 - 4i = (1 + 2i)(1 + i) - 2 - 4i = 1 + i + 2i - 2 - 2 - 4i = -3 - i. \end{aligned}$$

b) Pour déterminer le point invariant, on résout l'équation $f(z) = z$:

$$f(z) = z \Leftrightarrow z = (1 + 2i)z - 2 - 4i \Leftrightarrow -2iz = -2 - 4i \Leftrightarrow z = \frac{-2 - 4i}{-2i} = -i + 2.$$

Finalement, $\omega = 2 - i$

4. a) $z' - z = (1 + 2i)z - 2 - 4i - z = 2iz - 2 - 4i = -2i(2 - i - z).$

b) On a $\frac{MM'}{\Omega M} = \left| \frac{z' - z}{z - \omega} \right|$ d'après la question **1. b)**

$$= \left| \frac{-2i(2 - i - z)}{z - (2 - i)} \right| = \left| \frac{2i(2 - i - z)}{2 - i - z} \right| = |2i| = 2,$$

et mes $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) = \arg \left(\frac{z' - z}{\omega - z} \right) \pmod{2\pi}$ d'après la question **1. a)**

$$= \arg(2i) \pmod{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

c) On a vu à la question précédente que mes $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$;

par conséquent, le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M , mais il n'est pas isocèle car $MM' = 2 \Omega M$.

d) On a $z_E = -1 - i\sqrt{3}$.

• $|z_E| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

• $\cos \theta = -\frac{1}{2}$
 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ } donc $\theta = -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

D'où : $z_E = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Pour construire E' , on fait appel aux résultats des questions précédentes :

$EE' = 2 \Omega E$ et mes $(\overrightarrow{E\Omega}, \overrightarrow{EE'}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

1. a) On a $\begin{cases} a \equiv b \pmod{7} \\ c \equiv d \pmod{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7k & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ c = d + 7k' & \text{où } k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$,

de ce fait, $ac = (b + 7k)(d + 7k') = bd + 7k'b + 7kd + 49kk' = bd + 7(k'b + kd + 7kk')$
 avec $k'b + kd + 7kk' \in \mathbb{Z}$.

Et finalement : $ac \equiv bd \pmod{7}$.

b)

Rappel de cours : démonstration par récurrence

- On pose une propriété P_n .
- On initialise la récurrence en montrant que cette propriété est bien vraie au premier rang de la suite.
- On montre ensuite l'hérédité de la propriété.

Soit la propriété P_n : « $a^n \equiv b^n \pmod{7}$ », pour tout entier naturel n .

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $a^0 = 1$ et $b^0 = 1$; donc $a^0 \equiv b^0 \pmod{7}$.

La propriété P_0 est vraie.

- Hérédité : supposons P_n vraie pour n fixé et vérifions que P_{n+1} est vraie.

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{7} \text{ (hypothèse de l'énoncé)} \\ a^n \equiv b^n \pmod{7} \text{ (hypothèse de récurrence)} \end{array} \right\} \text{ d'où } a \times a^n \equiv b \times b^n \pmod{7},$$

d'après la question 1. a)

puis $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{7}$.

Par suite, P_{n+1} est vraie si P_n l'est.

On a montré par récurrence : si $a \equiv b \pmod{7}$, alors $a^n \equiv b^n \pmod{7}$, pour tout entier naturel n .

2. On a $2^3 = 8 = 1 + 7 \times 1 \equiv 1 \pmod{7}$; $n = 3$ convient.

On a $3^6 = 729 = 1 + 104 \times 7 \equiv 1 \pmod{7}$; $n = 6$ convient.

3. a) D'après l'énoncé, a est non divisible par 7 ; il existe donc q et r des entiers naturels, avec r non nul, tels que :

$$a = 7q + r, \text{ avec } 1 \leq r \leq 6 \text{ (division euclidienne)} ; \text{ d'où :}$$

$$a^6 = (7q + r)^6$$

$$= \sum_{i=0}^6 \binom{6}{i} (7q)^i r^{6-i}$$

$$= (7q)^6 + 6r(7q)^5 + 15r^2(7q)^4 + 20r^3(7q)^3 + 15r^4(7q)^2 + 6r^5(7q) + r^6$$

$$= 7k + r^6, \text{ avec } k = 7^5q^6 + 6r7^4q^5 + 15r^27^3q^4 + 20r^37^2q^3 + 15r^47q^2 + 6r^5q \in \mathbb{Z}.$$

Si $r = 1$, alors $r^6 = 1 \equiv 1 \pmod{7}$,

si $r = 2$, alors $r^6 \equiv 1 \pmod{7}$

d'après la question 2., donc $r^6 = (r^3)^2 \equiv 1 \pmod{7}$,

si $r = 3$, alors $r^6 \equiv 1 \pmod{7}$

d'après la question 2.

si $r = 4$, alors $r^6 = 4\,096 = 7 \times 585 + 1 \equiv 1 \pmod{7}$,

si $r = 5$, alors $r^6 = 15\,625 = 7 \times 2\,232 + 1 \equiv 1 \pmod{7}$,

si $r = 6$, alors $r^6 = 46\,656 = 7 \times 6\,665 + 1 \equiv 1 \pmod{7}$,

d'où : $r^6 \equiv 1 \pmod{7}$, pour tout entier naturel r tel que $1 \leq r \leq 6$.

Finalement : $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$, car $7k \equiv 0 \pmod{7}$.

b) Effectuons la division euclidienne de 6 par k :

$6 = kq + r$, où q et r sont deux entiers avec $0 \leq r < k$,

$$a^6 = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r = (a^k)^q \times a^r \equiv 1 \times a^r \pmod{7} \quad \text{car } a^k \equiv 1 \pmod{7}$$

Ainsi $a^r \equiv 1 \pmod{7}$ d'après la question 3. a).

On en déduit que $r = 0$, car $\begin{cases} r < k, \text{ car } r \text{ est le reste de la division euclidienne de 6 par } k, \\ k \text{ est le plus petit entier naturel non nul tel que} \\ a^k \equiv 1 \pmod{7}. \end{cases}$

Donc k divise 6.

Finalement : $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.

c) On teste, par ordre croissant, toutes les valeurs de k trouvées à la question 3. b) :

- pour $a = 2 : k = 3$,
- pour $a = 3 : k = 6$,
- pour $a = 4 : k = 6$,
- pour $a = 5 : k = 6$,
- pour $a = 6 : k = 2$.

$$\begin{aligned}
 4. A_{2006} &= 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006} \\
 &= 2^{3 \times 668 + 2} + 3^{6 \times 334 + 2} + 4^{6 \times 334 + 2} + 5^{6 \times 334 + 2} + 6^{2 \times 1003} \\
 &= 4 \times (2^3)^{668} + 9 \times (3^6)^{334} + 16 \times (4^6)^{334} + 25 \times (5^6)^{334} + (6^2)^{1003} \\
 &\equiv 55 \pmod{7} \quad \text{car} \quad \begin{cases} 2^3 \equiv 1 \pmod{7} \\ 3^6 \equiv 1 \pmod{7} \\ 4^6 \equiv 1 \pmod{7} \\ 6^2 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \\
 &\equiv 6 \pmod{7}.
 \end{aligned}$$

EXERCICE 3

1. a)

Méthode : loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A de probabilité p et $\bar{A}$ de probabilité $(1 - p)$.

Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de réalisations de l'événement A suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

On a, de plus : $E(X) = np$.

Nous sommes devant une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues :

- S : « obtenir une tulipe jaune » de probabilité $\frac{1}{4}$,
- et $\bar{S}$ de probabilité $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Cette expérience aléatoire est donc une épreuve de Bernoulli que l'on va répéter de manière indépendante 50 fois.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement S .

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{4}$.

b) $E(X) = n \times p = 50 \times \frac{1}{4} = 12,5$

c) Comme il s'agit d'une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{4}$, la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes est donnée par la formule suivante :

$$P_A(J_n) = p(X = n) = \binom{50}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n}.$$

$$d) p(X = 15) = \binom{50}{15} \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \left(\frac{3}{4}\right)^{50-15} = \binom{50}{15} \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \left(\frac{3}{4}\right)^{35} \approx 0,089.$$

2. a) Nous sommes devant une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues :

- S' : « obtenir une tulipe jaune » de probabilité $\frac{1}{2}$,
- et $\bar{S}'$ de probabilité $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Cette expérience aléatoire est donc une épreuve de Bernoulli que l'on va répéter de manière indépendante 50 fois.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement S' .

Y suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{2}$.

$$P_B(J_n) = p(Y = n) = \binom{50}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{50-n} = \binom{50}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \binom{50}{n} 2^{-50}.$$

b)

Rappel de cours : formule des probabilités totales

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ formant une partition de l'univers. Soit A un événement ; on a :

$$p(A) = p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A) + \dots + p(B_n \cap A).$$

A et B forment une partition de l'univers ; on a donc :

$$\begin{aligned} P(J_n) &= p(A \cap J_n) + p(B \cap J_n) \\ &= P_A(J_n) \times P(A) + P_B(J_n) \times P(B) \\ &= \frac{1}{2} \binom{50}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} + \frac{1}{2} \binom{50}{n} 2^{-50} \\ &= \frac{1}{2} \binom{50}{n} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} + 2^{-50} \right) \\ &= \frac{1}{2} \binom{50}{n} \left(\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{4^{25}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \binom{50}{n} \frac{3^{50-n} + 4^{25}}{4^{50}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) p_n &= P_{J_n}(A) \\ &= \frac{p(A \cap J_n)}{P(J_n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2} \binom{50}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n}}{\frac{1}{2} \binom{50}{n} \frac{3^{50-n} + 4^{25}}{4^{50}}} \\
&= \frac{\frac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\frac{3^{50-n} + 4^{25}}{4^{50}}} \\
&= \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 4^{25}} \\
&= \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}.
\end{aligned}$$

d) On cherche les valeurs de n pour lesquelles on a $p_n \geq 0,9$, soit :

$$\frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}} \geq 0,9 \quad \text{d'après la question précédente}$$

$$3^{50-n} \geq 0,9 (3^{50-n} + 2^{50}) \quad \text{car } 3^{50-n} + 2^{50} > 0, \quad \text{comme somme de deux nombres strictement positifs}$$

$$0,1 \times 3^{50-n} \geq 0,9 \times 2^{50}$$

$$3^{50-n} \geq 9 \times 2^{50}$$

$$\ln(3^{50-n}) \geq \ln(9 \times 2^{50}) \quad \text{car la fonction logarithme est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$(50-n) \ln 3 \geq \ln(9 \times 2^{50}) \quad \text{car } \ln(a^p) = p \ln(a) \begin{cases} \text{pour tout } p \text{ entier} \\ a \text{ réel strictement positif} \end{cases}$$

$$50-n \geq \frac{\ln(9 \times 2^{50})}{\ln 3} \quad \text{car } \ln 3 > 0$$

$$n \leq 50 - \frac{\ln(9 \times 2^{50})}{\ln 3} \approx 16,45.$$

Finalement : n est un entier compris entre 0 et 16.

La probabilité pour que le jardinier ait choisi le lot 1 sachant qu'il a obtenu entre 0 et 16 tulipes jaune sera supérieure à 0,9.

EXERCICE 4

$$1. a) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{n} - 1 &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

$x \mapsto \ln x$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$;

$x \mapsto \frac{x}{n} - 1$ est une fonction affine de coefficient directeur $\frac{1}{n} > 0$; elle est, en conséquence, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

f_n est donc une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente,

et on a $0 \in] \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) [$.

On en conclut que **l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée α_n , sur $\mathbb{R}_+^*$** .

Calculons à présent $f_n(1)$ et $f_n(e)$.

$$f_n(1) = \ln(1) + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n} - 1 \leq 0 \quad \text{car } n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} - 1 \leq 0 ;$$

$$f_n(e) = \ln(e) + \frac{1}{n} - 1 = 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n} > 0 \quad \text{car } n \geq 1.$$

Ainsi $0 \in [f_n(1) ; f_n(e)]$, avec f_n strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme α_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$, on obtient que **$\alpha_n \in [1 ; e]$** .

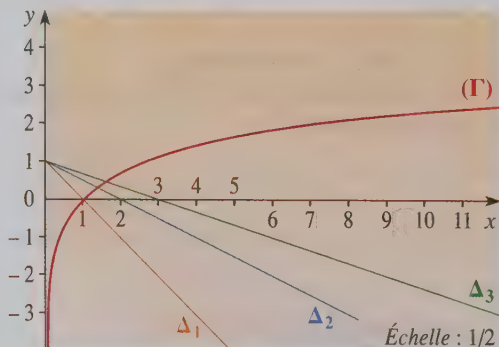
2. a) Δ_n est de la forme $y = ax + b$, car c'est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

$$\text{On a : } a = \frac{y_A - y_{B_n}}{x_A - x_{B_n}} = \frac{1 - 0}{0 - n} = -\frac{1}{n}, \text{ d'où } \Delta_n : y = -\frac{1}{n}x + b.$$

De plus, Δ_n passe par le point A ; son ordonnée à l'origine vaut 1.

$$\text{On obtient enfin : } \Delta_n : y = -\frac{1}{n}x + 1.$$

b)



c) L'abscisse du point d'intersection entre (Γ) et Δ_n vérifie l'équation : $\ln x = -\frac{1}{n}x + 1$,

$$\text{soit } \ln x + \frac{1}{n}x - 1 = 0,$$

ou encore $f_n(x) = 0$.

Comme α_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$, α_n est bien l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n .

d) Pour $n = 1$, on a : $\ln x + x - 1 = 0$.

1 est une solution évidente de cette équation.

De plus, il a été vu à la question 1. b) que cette solution était α_1 et qu'elle était unique. Donc $\alpha_1 = 1$.

Il semblerait, grâce en particulier au graphique, que la suite (α_n) soit croissante.

3. a) On sait que $f_n(\alpha_n) = 0$;

$$\text{soit } \ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0,$$

$$\text{finalement : } \ln(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n} + 1.$$

$$\text{b) On a : } f_{n+1}(x) = \ln(x) + \frac{x}{n+1} - 1,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } f_{n+1}(\alpha_n) &= \ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = -\frac{\alpha_n}{n} + 1 + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = \alpha_n \left(\frac{-1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{-\alpha_n}{n(n+1)} \text{ d'après la question 3. a).} \end{aligned}$$

Or, $\alpha_n \in [1; e]$, d'après la question 1. b) ;

$$\text{donc : } \frac{-\alpha_n}{n(n+1)} < 0.$$

$$\text{D'où : } f_{n+1}(\alpha_n) < 0.$$

c) On sait que $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$, d'après la question 3. b), et que $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$,

$$\text{d'où } f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1}).$$

Or, f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la question 1. a).

Ainsi, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, pour tout entier $n \geq 1$.

En conclusion, la suite (α_n) est croissante.

d) • À la question 1. b), on a montré que $\alpha_n \in [1; e]$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Il s'ensuit que la suite (α_n) est majorée par e pour tout entier naturel $n \geq 1$.

De plus, (α_n) est une suite croissante d'après la question 3. c).

Ainsi, la suite (α_n) est convergente vers un réel l comme suite croissante majorée.

• On a $f_n(\alpha_n) = 0$,

$$\text{d'où } \ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0, \quad \text{pour tout entier } n \geq 1$$

$$\text{puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0,$$

car (α_n) est convergente et, par suite, la suite de terme général $\ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n} - 1$ est convergente

$$\text{d'où } \ln l - 1 = 0, \quad \text{car } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) = \ln(l) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0 \end{cases}$$

soit $\ln l = 1$,
finalement, $l = e$.

4. a)

Rappel de cours : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$ telles que u' et v' sont continues. On a alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Soit A l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$, exprimée en unité d'aire.

Sur $[\alpha_n ; e]$, $\ln$ est strictement positive et continue, donc $A = \int_{\alpha_n}^e \ln x dx$.

Posons $u(x) = \ln x$ d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$,

$v'(x) = 1$ d'où $v(x) = x$ (à une constante près),

avec u, v, u' et v' dérivables continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} A &= [x \ln x]_{\alpha_n}^e - \int_{\alpha_n}^e dx \\ &= (e \times \ln e - \alpha_n \ln(\alpha_n)) - [x]_{\alpha_n}^e \\ &= e - \alpha_n \ln(\alpha_n) - (e - \alpha_n) \\ &= \alpha_n (1 - \ln(\alpha_n)) \\ &= \alpha_n \times \frac{\alpha_n}{n} \quad \text{car } f_n(\alpha_n) = 0 \text{ et, par conséquent, } 1 - \ln(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n} \\ &= \frac{\alpha_n^2}{n}. \end{aligned}$$

b) On a $A = \int_{\alpha_n}^e \ln x dx$.

Pour tout réel x appartenant à $[\alpha_n ; e]$, on sait que $\ln \alpha_n \leq \ln x \leq \ln e$,
d'où $\ln(\alpha_n) \times (e - \alpha_n) \leq A \leq \ln(e) \times (e - \alpha_n)$,

$$\text{puis } (e - \alpha_n) \ln(\alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{n} \leq (e - \alpha_n) \quad \text{car } \ln e = 1.$$

c) On a vu à la question 4. b) que $(e - \alpha_n) \ln(\alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{n}$,

d'où $n(e - \alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{\ln(\alpha_n)}$, car $\ln(\alpha_n) > 0$ (comme $\alpha_n \in [1; e]$ d'après la question 1. b))

de plus, $\frac{\alpha_n^2}{n} \leq (e - \alpha_n)$, d'après la question 4. b)

soit $n(e - \alpha_n) \geq \alpha_n^2$,

Finalement : $\alpha_n^2 \leq n(e - \alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{\ln(\alpha_n)}$.

d)

Rappel de cours : théorème sur la limite de fonctions composées

Soient f, g deux fonctions et a, b, c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^2 = e^2$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e$ d'après la question 3. d)

et $\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e \\ \lim_{x \rightarrow e} \ln(x) = 1 \end{array} \right\}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) = 1$, d'après le théorème des limites des fonctions composées

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n^2}{\ln(\alpha_n)} = e^2$;

de plus, $\alpha_n^2 \leq n(e - \alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{\ln(\alpha_n)}$, d'après la question 4. b)

Il en découle que la suite de terme général $n(e - \alpha_n)$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e - \alpha_n) = e^2$, d'après le théorème des gendarmes.

Ainsi, la suite (α_n) converge vers e plus vite que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$, sinon le produit $n(e - \alpha_n)$ tendrait vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

France métropolitaine

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 45 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice : 60 min.
- Exercice 3 : 1 h 10 min.
- Exercice 4 : 1 h 05 min.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Probabilités – Loi de probabilité (4 points)

La scène se passe en haut d'une falaise, au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A – Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'événement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i -ème jour. » et O_i l'événement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i -ème jour. »

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(E_1)$; $p_{E_1}(O_2)$; $p(E_1 \cap E_2)$.

3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B – On suppose maintenant que n touristes ($n \geq 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leq k \leq n$) partent en direction de l'Est.

2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.

a) Peut-il y avoir deux touristes *heureux* ?

b) Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut :

$$p = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

c) Application numérique

Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste *heureux* parmi les 10.

Corrigé page 246

EXERCICE 2 Nombres complexes – Interprétation géométrique (5 points)

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels.

On rappelle que $\bar{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z .

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z' \bar{z}) = 0$.

2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $\operatorname{Im}(z' \bar{z}) = 0$.

Applications

3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?

4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$.

On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O , N et P soient alignés.

a) Montrer que :

$$\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)(\overline{z^2 - 1}) = -\bar{z}^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2.$$

b) En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Corrigé page 247

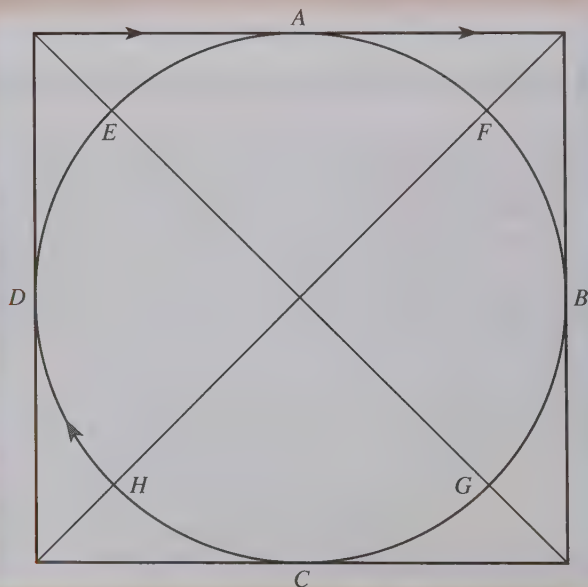
SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Arithmétique – Équation de la forme $ax + by = c$ (5 points)

1. On considère l'équation ($\mathcal{E}$) : $17x - 24y = 9$, où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.

a) Vérifier que le couple $(9; 6)$ est solution de l'équation ($\mathcal{E}$).

b) Résoudre l'équation ($\mathcal{E}$).

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma ci-dessous. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.



Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant $t = 0$, Jean part du point H , en même temps que le pompon part du point A .

a) On suppose qu'à un certain instant t , Jean attrape le pompon en A . Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t , on note y le nombre de tours effectués par Jean depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon.

Montrer que (x, y) est solution de l'équation (E) de la question 1.

b) Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

c) Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A .

d) Jean part maintenant du point E . Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

Corrigé page 248

EXERCICE 3 Analyse – Équations différentielles, Fonction logarithme népérien (6 points)

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0; 1]$.

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E_\lambda) : y' = y^2 + \lambda y \text{ et la condition } y(0) = 1.$$

On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[: z = \frac{1}{y_0}$.

Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z .

2. Question de cours

Pré-requis :

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\lambda x}$, où C est une constante réelle.

a) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle $(E'_\lambda) : z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.

b) Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0 .

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle

$$\left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[.$$

3. a) Démontrer que :

$$\ln(1 + \lambda) > \frac{\lambda}{\lambda + 1}.$$

On pourra étudier sur $]0 ; 1[$ la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{x + 1}$.

b) En déduire que $\frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda) > \frac{1}{2}$.

4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[$.

Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[$ que l'on précisera.

Corrigé page 250

EXERCICE 4 Géométrie dans l'espace – Barycentre (5 points)

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté $ABCDEFGH$ et représenté sur l'**annexe**.

Soit I le barycentre des points pondérés $(E; 2)$ et $(F; 1)$, J celui de $(F; 1)$ et $(B; 2)$ et, enfin, K celui de $(G; 2)$ et $(C; 1)$.

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I , J et K . On note Δ cet ensemble.

1. Placer les points I , J et K sur la figure de l'**annexe**.

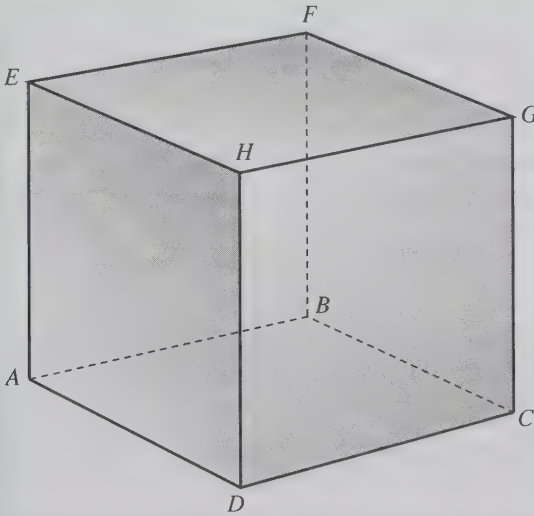
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK) . Que représente ce point pour le triangle IJK ?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal

suivant : $\left(A ; \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}, \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \frac{1}{3} \overrightarrow{AE} \right)$.

3. Donner les coordonnées des points I, J et K .
4. Soit $P(2; 0; 0)$ et $Q(1; 3; 3)$ deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK) .
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x; y; z)$.
 - a) Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet $(x; y; z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?
 - b) Vérifier que P et Q appartiennent à Δ . Tracer Δ sur la figure.
6. a) Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
 - b) Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω .

Annexe

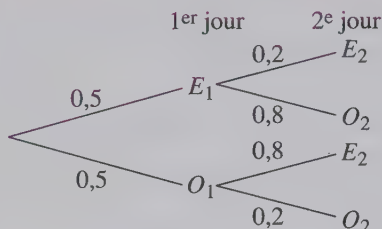


Corrigé page 253

Corrigés

EXERCICE 1

A - 1.



2. On a :

$P(E_1) = \frac{1}{2}$, car, le premier jour, le touriste choisit sa direction au hasard parmi deux choix possibles.

$P_{E_1}(O_2) = 0,8$, car la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille est de 0,8.

$$P(E_1 \cap E_2) = P_{E_1}(E_2) \times P(E_1) = (1 - P_{E_1}(O_2)) \times P(E_1) = (1 - 0,8) \times 0,5 = 0,1.$$

3. On note p , la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage deux jours consécutifs, c'est-à-dire pour qu'il aille, soit deux fois sur la plage Est, soit deux fois la plage Ouest. On a ainsi :

$$p = P(E_1 \cap E_2) + P(O_1 \cap O_2) = 0,2.$$

B - 1.

Méthode : loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A de probabilité p et $\bar{A}$ de probabilité $(1 - p)$.

Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de réalisations de l'événement A suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

On a, de plus : $E(X) = np$.

La situation décrite correspond à une loi binomiale de paramètres $p = 0,5$ et n .

$$P(X = k) = \binom{n}{k} 0,5^k \times (1 - 0,5)^{n-k} = 0,5^n \times \binom{n}{k}.$$

2. a) Non, car, dans l'hypothèse de l'énoncé, il y a au moins 3 touristes présents ; or, si un touriste est *heureux*, cela signifie qu'il est seul sur sa plage et, en conséquence, que tous les autres se trouvent sur l'autre plage ; il y a alors au moins 2 touristes sur cette autre plage.

b) On a $p = P(X = 1) + P(X = n - 1)$, car le touriste *heureux* est soit sur la plage Est, soit sur la plage Ouest.

$$\begin{aligned} p &= \binom{n}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{(n-1)!1!} \right) \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{2n}{2^n} \\ &= \frac{n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

c) Dans ce cas, $n = 10$, d'où : $p = \frac{10}{2^9} \approx 0,02$.

On en conclut que la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi 10 est de 0,02.

EXERCICE 2

1. On a : $z' \bar{z} = (x' + iy')(x - iy) = x'x - ix'y + iy'x + y'y = (x'x + y'y) + i(xy' - x'y)$,
d'où : $\operatorname{Re}(z' \bar{z}) = x'x + y'y$.

$$\operatorname{Re}(z' \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}' = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{OM}' \text{ sont orthogonaux.}$$

$$\text{car } \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OM}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

2. D'après la question 1., on a $\operatorname{Im}(z' \bar{z}) = xy' - x'y$.

$$\operatorname{Im}(z' \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{OM}' \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow O, M \text{ et } M' \text{ sont alignés.}$$

3. D'après la question 1., on a $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ orthogonaux équivaut à $\operatorname{Re}((z^2 - 1) \bar{z}) = 0$;

$$\text{or, } (z^2 - 1) \bar{z} = ((x + iy)^2 - 1)(x - iy) = (x^2 + 2ixy - y^2 - 1)(x - iy)$$

$$= x^3 - ix^2y + 2ix^2y + 2xy^2 - xy^2 + iy^3 - x + iy$$

$$= (x^3 + xy^2 - x) + i(x^2y + y^3 + y),$$

$$\text{d'où } \operatorname{Re}((z^2 - 1) \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow x^3 + xy^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1.$$

Par suite, l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux est la réunion de l'axe des ordonnées et du cercle de centre O et de rayon 1.

$$4. a) \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \overline{(z^2 - 1)} = \bar{z}^2 \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \overline{\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)} = -\bar{z}^2 \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \overline{\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)} = -\bar{z}^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$$

$$\text{car } z' \bar{z} = |z|^2.$$

$$b) O, N \text{ et } P \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \overline{(z^2 - 1)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} \left(-\bar{z}^2 \left| \frac{1}{z^2} - 1 \right|^2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{z^2} - 1 \right|^2 \operatorname{Im}(-\bar{z}^2) = 0 \quad \text{car } \left| \frac{1}{z^2} - 1 \right|^2 \text{ est réel}$$

$$\Leftrightarrow 2xy \left| \frac{1}{z^2} - 1 \right|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0 \quad \text{car } \frac{1}{z^2} - 1 \neq 0.$$

Ainsi, l'ensemble recherché est composé des deux axes de coordonnées.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

1. a) On a $17 \times 9 - 24 \times 6 = 153 - 144 = 9$.

On constate que le couple (9 ; 6) est bien solution de l'équation (E).

b)

Rappel de cours : pour résoudre une équation du type $ax + by = c$, avec a, b, c, x et y entiers relatifs, et a et b premiers entre eux :

- on cherche une solution $(x_0 ; y_0)$ particulière ;
- on se ramène à la résolution de $a(x_0 - y_0) = b(x_0 - y_0)$;
- puis on utilise le théorème de Gauss.

Un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation $17x - 24y = 9$
 équivaut à $17x - 24y = 17x_0 - 24y_0$,
 équivaut à $17(x - 9) = 24(y - 6)$.

Or, 17 divise de manière évidente $17(x - 9)$,

ainsi 17 divise $24(y - 6)$,

donc, d'après le théorème de Gauss, 17 divise $(y - 6)$, car 17 et 24 sont premiers entre eux

par suite, il existe un entier relatif k tel que $(y - 6) = 17k$,
 d'où $y = 17k + 6$, avec k entier relatif.

$$17x - 24y = 9 \text{ équivaut à } \begin{cases} y = 17k + 6 \\ 17(x - 9) = 24(y - 6) \end{cases} \quad \text{avec } k \text{ entier relatif}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} y = 17k + 6 \\ 17(x - 9) = 24 \times 17k \end{cases} \quad \text{avec } k \text{ entier relatif}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} y = 17k + 6 \\ x - 9 = 24k \end{cases} \quad \text{avec } k \text{ entier relatif}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} y = 17k + 6 \\ x = 24k + 9 \end{cases} \quad \text{avec } k \text{ entier relatif.}$$

Réciproquement, tous les couples $(24k + 9 ; 17k + 6)$, avec k entier relatif, sont solutions de l'équation.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $17x - 24y = 9$ est l'ensemble des couples de la forme $(24k + 9 ; 17k + 6)$, où k entier relatif.

2. a) Pour aller du point H au point A , Jean doit parcourir $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ de tour de cercle.

Or, il parcourt le cercle en 24 secondes ; Jean va donc du point H au point A en 9 secondes.

Ainsi, en partant du point H , Jean passe sur le point A toutes les $24y + 9$ secondes.

De plus, le pompon repasse sur le point A toutes les $17x$ secondes.

On en déduit que Jean et le pompon se trouvent en même temps sur le point A si, et seulement si, $17x = 24y + 9$.

Par conséquent, $(x ; y)$ est bien solution de l'équation $17x - 24y = 9$ et, donc, de (E).

b) D'après les questions **2. a)** et **1. b)**, on a $\begin{cases} x = 24k + 9 \\ y = 17k + 6 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{N}$ (comme k est un nombre de tours, il est positif).

Par suite, la plus petite solution de ce système est obtenue pour $k = 0$, soit $\begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \end{cases}$.

Ce couple correspond à un temps de $t = 17 \times 9 = 153$ secondes, ou encore 2 minutes et 33 secondes.

On en conclut que **Jean n'aura pas le temps d'attraper le pompon en 2 minutes.**

c) Les autres éventuels points de contact entre Jean et le pompon sont B , C et D .

• Pour aller du point H au point B , Jean doit parcourir $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ de tour de cercle.

Or, il parcourt le cercle en 24 secondes et va donc du point H au point B en 15 secondes.

Ainsi, en partant du point H , Jean passe sur le point B toutes les $24y + 15$ secondes.

De plus, le pompon fait $\frac{1}{4}$ de tour pour aller de A à B et met donc $\frac{1}{4} \times 17 = \frac{17}{4}$ secondes.

En conséquence, en partant de A , le pompon passe sur le point B toutes les

$17x + \frac{17}{4}$ secondes.

Finalement, Jean et le pompon se trouvent en même temps sur le point B :

si, et seulement si, $24y + 15 = 17x + \frac{17}{4}$,

si, et seulement si, $24y - 17x = -\frac{43}{4}$, avec x et y entiers naturels.

Ce qui est impossible, car $-\frac{43}{4} \notin \mathbb{Z}$.

• Par le même raisonnement, on obtient que, en partant du point H , Jean passe sur le point C toutes les $24y + 21$ secondes.

De plus, en partant de A , le pompon passe sur le point C toutes les $17x + \frac{17}{2}$ secondes.

Finalement, Jean et le pompon se trouvent en même temps sur le point C :

si, et seulement si, $24y + 21 = 17x + \frac{17}{2}$,

si, et seulement si, $24y - 17x = -\frac{25}{2}$, avec x et y entiers naturels.

Ce qui est impossible, car $-\frac{25}{2} \notin \mathbb{Z}$.

• Par le même raisonnement, on obtient que, en partant du point H , Jean passe sur le point D toutes les $24y + 3$ secondes.

De plus, en partant de D , le pompon passe sur le point B toutes les $17x + \frac{51}{3}$ secondes.

Finalement, Jean et le pompon se trouvent en même temps sur le point D :

si, et seulement si, $24y + 3 = 17x + \frac{51}{3}$,

si, et seulement si, $24y - 17x = \frac{42}{3}$, avec x et y entiers naturels.

Ce qui est impossible, car $\frac{42}{3} \notin \mathbb{Z}$.

d) Pour aller du point E au point A , Jean doit parcourir $\frac{1}{8}$ de tour.

Or, il parcourt le cercle en 24 secondes et sera donc au point E au point A en 3 secondes. Ainsi, en partant du point E , Jean passe sur le point A toutes les $24y + 3$ secondes.

De plus, le pompon repasse sur le point A toutes les $17x$ secondes.

Par suite, Jean et le pompon se trouvent en même temps sur le point A si, et seulement si, $17x = 24y + 3$.

Une solution particulière de cette équation est $(3 ; 2)$.

On voit que **Jean** se retrouve à portée du pompon au bout de 2 tours, c'est-à-dire au bout de 51 secondes. Il **aura donc le temps en 2 minutes d'attraper le pompon**.

EXERCICE 3

1. y_0 satisfait l'équation différentielle (E_λ) ; on a, par conséquent :

$$y_0' = y_0^2 + \lambda y_0$$

$$\frac{y_0'}{y_0^2} = 1 + \frac{\lambda}{y_0} \quad \text{car } y_0 > 0 \text{ sur }]-\infty ; \frac{1}{2}], \text{ donc } y_0 \neq 0 \text{ sur }]-\infty ; \frac{1}{2}]$$

$$-z' = 1 + \lambda z$$

car $z = \frac{1}{y_0}$ est dérivable sur $] -\infty ; \frac{1}{2}]$ comme inverse d'une fonction dérivable

ne s'annulant pas sur $] -\infty ; \frac{1}{2}]$ et $z' = \frac{-y_0'}{y_0^2}$

Finalement : $z' = -\lambda z - 1$, avec $z(0) = \frac{1}{y_0(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

2. a) Posons $Z = \lambda z + 1$.

Z est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$, car z l'est et $Z' = \lambda z'$.

$$(E'_\lambda) : z' = -(\lambda z + 1), \text{ avec } z(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{Z'}{\lambda} = -Z, \text{ avec } Z(0) = \lambda z(0) + 1, \text{ car } \lambda \neq 0$$

$$\Leftrightarrow Z' = -\lambda Z, \text{ avec } Z(0) = \lambda + 1.$$

Cette équation associée à la condition initiale admet une unique solution ; ainsi (E'_λ) admet une unique solution.

b) Les solutions sont donc de la forme $Z(x) = Ce^{-\lambda x}$.

D'après la condition initiale, on obtient que : $Z(0) = C = \lambda + 1$,

d'où $Z(x) = (\lambda + 1)e^{-\lambda x}$,

$$\text{soit } z_0(x) = \frac{Z(x) - 1}{\lambda} = \frac{(\lambda + 1)e^{-\lambda x} - 1}{\lambda}, \text{ pour tout } x \text{ de } \left]-\infty; \frac{1}{2}\right].$$

3. a) Soit $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$ sur $I =]0; 1]$. On a :

$x \mapsto 1+x$ est dérivable sur I $\left\{ \begin{array}{l} \text{donc } x \mapsto \ln(1+x) \text{ est dérivable sur } I. \\ 1+x > 0 \text{ sur } I \end{array} \right.$

$x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur I comme fonction rationnelle dérivable sur son ensemble de définition.

Ainsi, f est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I . On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x}{(1+x)^2} > 0 \text{ sur } I. \end{aligned}$$

Par suite, f est strictement croissante sur I .

$$\text{Par ailleurs : } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0 \end{array} \right\} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est strictement croissante sur } I \\ \text{On a donc : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ soit } f(x) > 0 \text{ sur } I.$$

$$\text{D'où } \ln(1+x) - \frac{x}{x+1} > 0 \text{ sur }]0; 1].$$

Finalement :

$$\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{1+\lambda}, \text{ pour tout } \lambda \text{ de }]0; 1].$$

b) On a : $0 < \lambda < 1$,
soit $1 < \lambda + 1 < 2$,

$$\text{puis } \frac{1}{\lambda + 1} > \frac{1}{2},$$

$$\text{d'où } \ln(1 + \lambda) > \frac{\lambda}{\lambda + 1} > \frac{\lambda}{2} \text{ sur }]0 ; 1],$$

$$\text{ou encore } \ln(1 + \lambda) > \frac{\lambda}{2}.$$

On en conclut que : $\frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda) > \frac{1}{2}$, car $\lambda > 0$.

4. On va chercher à résoudre l'équation suivante : $z_0 = 0$.

$$z_0 = 0 \text{ équivaut à } \frac{(\lambda + 1)e^{-\lambda x} - 1}{\lambda} = 0,$$

$$\text{équivaut à } (\lambda + 1)e^{-\lambda x} - 1 = 0, \text{ car } \lambda \neq 0$$

$$\text{équivaut à } e^{-\lambda x} = \frac{1}{1 + \lambda}, \quad \text{car } \lambda \neq -1$$

$$\text{équivaut à } -\lambda x = \ln\left(\frac{1}{1 + \lambda}\right), \quad \text{car } \begin{cases} \frac{1}{1 + \lambda} > 0 \\ \text{pour tout } a \text{ et } b \text{ de } \mathbb{R}_+, a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b \\ \ln(e^x) = x \text{ sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } -\lambda x = -\ln(1 + \lambda), \quad \text{car } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \text{ pour tout } a \text{ de } \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{équivaut à } x = \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda), \quad \text{car } \lambda \neq 0.$$

$$\text{On obtient finalement : } z_0(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda).$$

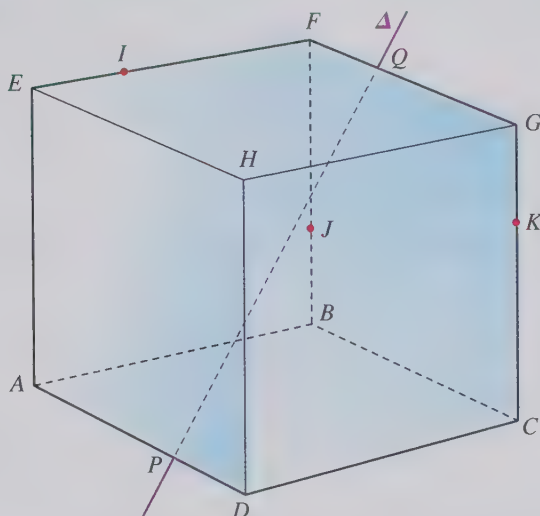
$$\text{Or, on sait, d'après la question 3. b), que } \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda) > \frac{1}{2},$$

$$\text{donc } z_0 \text{ ne s'annule pas sur }]-\infty ; \frac{1}{2}].$$

$$\text{Comme } z_0 \text{ ne s'annule pas sur }]-\infty ; \frac{1}{2}], \text{ on peut écrire } y_0 = \frac{1}{z_0};$$

$$\text{ainsi } y_0(x) = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)e^{-\lambda x} - 1} \text{ sur }]-\infty ; \frac{1}{2}].$$

EXERCICE 4



1.

Rappel de cours : si G le barycentre de $\{(A; a), (B; b)\}$, alors $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$.

On a : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{GC}$.

2. Ω est équidistant des points I, J ; Ω appartient donc au plan médiateur de $[IJ]$.
 Ω est équidistant des points I, K ; Ω appartient donc au plan médiateur de $[IK]$.
 Ω est équidistant des points J, K ; Ω appartient donc au plan médiateur de $[JK]$.
 De plus, Ω appartient au plan (IJK) ; ainsi Ω est l'intersection des trois médiatrices du triangle IJK . Par suite, **Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle IJK .**

3. Dans le repère $\left(A; \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}, \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des points suivants sont :

$A(0; 0; 0)$; $D(3; 0; 0)$; $B(0; 3; 0)$; $E(0; 0; 3)$; $C(3; 3; 0)$; $H(3; 0; 3)$;
 $F(0; 3; 3)$; $G(3; 3; 3)$.

• On a : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{EF}$. On utilise la relation de Chasles.

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \quad \text{car } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \text{ dans un cube}$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + 3 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$$

d'où $I(0; 1; 3)$.

• On a : $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{FB}$. On raisonne comme précédemment.

$$\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{EA} \quad \text{car } \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA} \text{ dans un cube.}$$

$$-(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{AJ} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AE} \quad \text{car } \overrightarrow{AF} = 0 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + 3 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + 3 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AE} = 3 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$$

d'où $J(0; 3; 1)$.

• On a : $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{GC}$.

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{EA} \quad \text{car } \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EA}$$

$$-(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AE} \quad \text{car } \overrightarrow{AG} = 3 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + 3 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + 3 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AE} = 3 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + 3 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + 2 \times \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$$

d'où $K(3; 3; 2)$.

4. On a $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \times (-1) + 2 \times 3 - 2 \times 3 = 0$; on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux et, en conséquence, que les droites (IJ) et (PQ) sont orthogonales.

$\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{PQ} = 3 \times (-1) + 2 \times 3 - 1 \times 3 = 0$; on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux et, en conséquence, que les droites (IK) et (PQ) sont orthogonales.

Finalement, on constate que la droite (PQ) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (IJK) ; (PQ) est donc **perpendiculaire au plan (IJK)** .

5. a) $M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} MI = MJ \\ MI = MK \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MI^2 = MJ^2 \\ MI^2 = MK^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 4z + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 4z = 0 \\ 6x + 4y - 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ 3x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}t + 2 \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, Δ est une droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par le point P .

b) On a $P \in \Delta$ (vu à la question précédente).

Pour $t = 3$, on obtient que le point de coordonnées $(1; 3; 3)$ appartient à Δ , d'où $Q \in \Delta$.

6. a) À la question 4., on a vu que la droite (PQ) est perpendiculaire au plan (IJK) ; le

vecteur $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est donc normal à ce plan.

Une équation du plan (IJK) est alors de la forme : $-x + 3y + 3z + d = 0$.

On sait que $I \in (IJK)$, donc $-x_I + 3y_I + 3z_I + d = 0$, soit $d = -12$.

En conclusion, une équation cartésienne du plan (IJK) est : $-x + 3y + 3z - 12 = 0$.

$$\text{b) On a : } \begin{cases} \Omega \in (IJK) \\ \Omega \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 3z - 12 = 0 \\ x = -\frac{1}{3}t + 2 \\ y = t \\ z = t, \end{cases}$$

$$\text{d'où } -\left(-\frac{1}{3}t + 2\right) + 3t + 3t - 12 = 0,$$

$$\text{soit } \frac{19}{3}t - 14 = 0,$$

$$\text{finalement : } t = \frac{42}{19}.$$

On remplace t par sa valeur dans les expressions de x , y et z et on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{24}{19} \\ y = \frac{42}{19} \\ z = \frac{42}{19}, \end{cases}$$

$$\text{soit : } \Omega\left(\frac{24}{19}; \frac{42}{19}; \frac{42}{19}\right).$$

Polynésie française

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 50 min.
- Exercice 2 : 50 min.
- Exercice 3 : 1 h 20 min.
- Exercice 4 : 60 min.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Nombres complexes – Interprétation géométrique, Transformation géométrique (4 points)

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On pose $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$. On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives a , b et c .

Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B .

a) Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.

b) Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe :

$$\frac{z - 3}{z - 5 + 2i}.$$

c) Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z - 3}{z - 5 + 2i}$ soit un nombre réel strictement négatif.

2. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2 - i$.

a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r . Déterminer une équation paramétrique de Γ' .

Corrigé page 259

EXERCICE 2 Probabilités – Conditionnement (4 points)

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Calculer $P(X = 0)$.

c) On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.

• Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.

• En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.

2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

Soit k un entier compris entre 1 et n .

Soit N l'événement : « La k -ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches. »

Soit A l'événement : « On obtient une boule blanche dans chacun des $k - 1$ premiers tirages et une boule noire au k -ième. »

Soit B l'événement : « On obtient une boule blanche dans chacun des $(n - k)$ derniers tirages. »

Calculer :

- $P(A)$,
- $P_A(B)$
- et $P(N)$.

EXERCICE 3 Analyse – Fonction exponentielle, Intégration (7 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}.$$

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x}.$$

c) Dresser le tableau de variations de f .

d) Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(Unité graphique : 1 cm.)

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

b) On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$.

Déterminer I_2 et I_3 .

c) Soit A l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer A .

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction v sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = u\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a; b]$ (où $0 < a < b$).

Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.

b) On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$, où f est la fonction définie à la question 1.

Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

c) Dédurre des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

EXERCICE 4 Géométrie dans l'espace – Produit scalaire, Barycentre

(5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si, et seulement si, un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2) .

Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = t. \end{cases}$$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9; -4; -1)$.

a) Vérifier que A n'appartient ni à (P_1) , ni à (P_2) .

b) Exprimer AM^2 en fonction de t .

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.

• Étudier les variations de f .

• Pour quel point M , la distance AM est-elle minimale ?

Dans la suite, on désignera ce point par I .

• Préciser les coordonnées du point I .

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A .

a) Déterminer une équation de (Q) .

b) Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D) .

Corrigé page 265

Corrigés

EXERCICE 1

1. a) On a :

$$AB = |z_B - z_A| = |5 - 2i - 3| = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2};$$

$$AC = |z_C - z_A| = |5 + 2i - 3| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2};$$

$$BC = |z_C - z_B| = |5 + 2i - 5 + 2i| = |4i| = 4;$$

donc $AB = AC$.

De plus, on constate que $AB^2 + AC^2 = 8 + 8 = 16 = BC^2$; le triangle ABC est, par conséquent, rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Ainsi le triangle ABC est isocèle rectangle en A .

$$\text{b) } \arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right) = \text{mes}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \pmod{2\pi}.$$

D'un point de vue géométrique, cet argument représente la mesure de l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$

$$\text{c) On cherche } \frac{z-3}{z-5+2i} < 0.$$

$$\frac{z-3}{z-5+2i} < 0 \text{ équivaut à } \arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = \pi \pmod{2\pi},$$

$$\text{équivaut à } \text{mes}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pi \pmod{2\pi},$$

$$\text{équivaut à } M \in [AB], \text{ privé de } A \text{ et } B.$$

L'ensemble des points M tels que $\frac{z-3}{z-5+2i} < 0$ est le segment $[AB]$ privé des

points A et B .

2. a)

Rappel de cours : si A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par la rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ , alors :

$$z_{A'} - z_\Omega = (z_A - z_\Omega)e^{i\theta}.$$

Ici, si M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z ; alors :

$$z' - z_\Omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega)$$

$$z' - 2 + i = -i(z - 2 + i)$$

$$z' = -iz + 3 + i.$$

b) Comme le triangle ABC est isocèle rectangle en A d'après la question 1. a), le cercle

Γ a pour centre D le milieu du segment $[BC]$, d'affixe $\frac{z_B + z_C}{2} = 5$ et pour rayon $\frac{BC}{2} = 2$.

L'image de Γ par la rotation r est donc le cercle de centre $D' = r(D)$, de rayon 2 et on a :

$$z_{D'} = -iz_D + 3 + i = -5i + 3 + i = 3 - 4i.$$

Finalement : Γ' est le cercle de centre D' d'affixe $3 - 4i$ et de rayon 2.

Rappel de cours : équation paramétrique d'un cercle

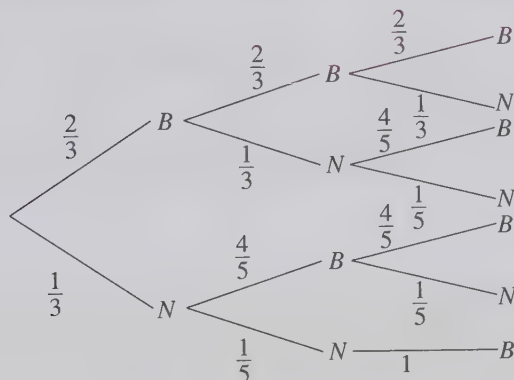
Soit C le cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon R .

$M(x, y)$ appartient à C si, et seulement si, $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$.

On obtient ici l'équation paramétrique suivante : $\begin{cases} x = 2 \cos \theta + 3 \\ y = 2 \sin \theta - 4 \end{cases}$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$.

EXERCICE 2

1. Voici l'arbre pondéré des tirages :



a) L'arbre ci-dessus nous indique que X peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.

b) $X = 0$ correspond au tirage de trois boules blanches ; ainsi

$$P(X = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

c) • Si la seule boule noire est obtenue au second tirage, on se trouve sur la branche BNB de l'arbre. Par suite, la probabilité vaut $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$.

$$\begin{aligned} \bullet P(X = 1) &= P(NBB) + P(BNB) + P(BBN) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{8}{45} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{144 + 120 + 100}{27 \times 25} = \frac{364}{675}. \end{aligned}$$

2. • Si l'événement A se produit, la composition de l'urne pour les k tirages reste inchangée : 4 boules blanches et 2 noires ;

$$\text{d'où : } P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{k-1}}{3^k}.$$

• Si l'événement B se réalise sachant que A est réalisé, à partir du $(k+1)$ -ième tirage, l'urne est composée de 4 boules blanches et d'une boule noire pour chacun des $(n-k)$ tirages restants. On doit ainsi calculer la probabilité de tirer successivement $(n-k)$ boules blanches dans une urne contenant à chaque fois 4 boules blanches et une boule noire.

$$\text{Donc : } P_A(B) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}.$$

• On remarque que $N = A \cap B$, d'où :

$$P(N) = P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = \frac{2^{k-1}}{3^k} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} = \frac{2^{k-1} \times 2^{2n-2k}}{3^k \times 5^{n-k}} = \frac{2^{2n-k-1}}{3^k \times 5^{n-k}}.$$

EXERCICE 3

1. a) Calculons les limites :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

• On a $f(x) = 2x^3 e^{-x} - 4x^2 e^{-x}$, pour tout x réel.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 e^{-x} = 0$, en utilisant les théorèmes de croissance comparée ;
ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b)

Rappel de cours : dérivation• Dérivation du produit de deux fonctions : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; uv est alors dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.• Dérivée de la fonction e^u : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ; e^u est alors dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x^2 - 8x)e^{-x} + (2x^3 - 4x^2)(-e^{-x}) = (6x^2 - 8x - 2x^3 + 4x^2)e^{-x} \\ &= (-2x^3 + 10x^2 - 8x)e^{-x} = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x}. \end{aligned}$$

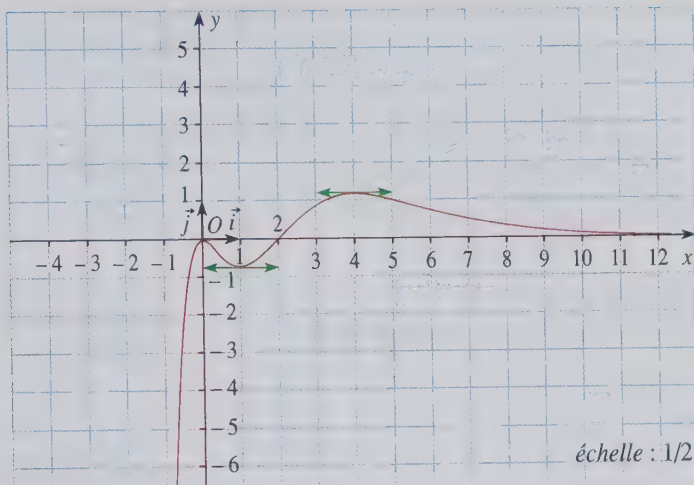
c) On sait que $e^{-x} > 0$ pour tout x réel ; alors $f'(x)$ est du signe de $2x(-x^2 + 5x - 4)$.Le discriminant du polynôme du second degré vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 4 = 9$ et ses racines sont 1 et 4.Par suite, $-x^2 + 5x - 4$ est du signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur des racines et de $-a$ à l'intérieur.

On peut ainsi compléter le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$		
$2x$	-	0	+	+	+		
$-x^2+5x-4$	-	-	0	+	0	-	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	-	$64e^{-4}$	0		

d)



2.

Rappel de cours : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ telles que u' et v' le sont aussi. On a alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

a) $I_1 = \int_0^1 xe^{-x} \, dx.$

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$, alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$ à une constante près.

Les fonctions u , v , u' , v' sont dérivables et on peut donc écrire :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x} \, dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \, dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}.$$

b) On admet que $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$, pour tout n supérieur ou égal à 2 ; on obtient donc :

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) - \frac{1}{e} = 2 - \frac{5}{e}, \text{ d'après la question 2. a)}$$

$$I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3\left(2 - \frac{5}{e}\right) - \frac{1}{e} = 6 - \frac{16}{e}.$$

c) D'après le tableau de variations de f obtenu à la question 1. c), on a $f(x) \leq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$. L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et la courbe de la fonction f est donc égale à

l'opposé de l'intégrale $\int_0^1 f(x) \, dx$; ainsi :

$$A = - \int_0^1 f(x) \, dx = - \int_0^1 (2x^3 - 4x^2) e^{-x} \, dx = -2 \int_0^1 x^3 e^{-x} \, dx + 4 \int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx,$$

$$A = -2I_3 + 4I_2 = -2\left(6 - \frac{16}{e}\right) + 4\left(2 - \frac{5}{e}\right) = -4 + \frac{12}{e} \text{ unités d'aire.}$$

Or, 1 unité d'aire vaut 1 cm^2 selon l'unité graphique proposée à la question 1. d).

$$\text{En conclusion, } A = -4 + \frac{12}{e} \approx 0,4 \text{ cm}^2.$$

3.

Remarque : il s'agit presque d'une question de cours.

a) Soient x et y éléments de $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \leq x \leq y \leq \frac{1}{a} \text{ implique } a \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \leq b, & \quad \text{car } \begin{cases} 0 < a < b \\ \text{la fonction inverse est} \\ \text{décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases} \\ \text{implique } u\left(\frac{1}{y}\right) \leq u\left(\frac{1}{x}\right), & \quad \text{car la fonction } u \text{ est croissante} \\ \text{implique } v(y) \leq v(x). & \quad \text{sur } [a, b] \end{aligned}$$

La fonction v est donc décroissante sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.

b)

Rappel de cours : **théorème des limites de fonctions composées**

Soient f, g deux fonctions et a, b, c désignant des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0, \quad \text{d'après le théorème sur les limites de fonctions composées.}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad \text{car la fonction } f \text{ est continue en } 0.$$

c) En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question 3. a), on peut montrer que si la fonction u est décroissante sur $[a, b]$, alors la fonction v est croissante sur

$$\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right].$$

On applique ces résultats aux fonctions f et g ; on obtient alors les variations de g , « contraires » à celles de f .

x	0	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
g	0	$\frac{64}{e^4}$	$-\frac{2}{e}$	0

EXERCICE 4

1.

Rappel de cours : un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ admet un vecteur normal de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Le plan (P_1) a pour vecteur normal $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et le plan (P_2) a pour vecteur normal $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 4 = 0$; les vecteurs sont donc orthogonaux et tous deux non nuls.

On en déduit que **les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.**

2. Soit $M(x, y, z)$ un point de la droite (D) .

$M \in (D)$ équivaut à $M \in (P_1)$ et $M \in (P_2)$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} -2x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + 4z - 9 = 0, \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} y = 2x - z + 6 \\ x - 2(2x - z + 6) + 4z - 9 = 0, \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} y = 2x - z + 6 \\ -3x + 6z - 21 = 0, \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} y = 2x - z + 6 \\ x = 2z - 7, \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} y = 2(2z - 7) - z + 6 = 3z - 8 \\ x = 2z - 7. \end{cases}$$

Posons maintenant $z = t$, on obtient :

$$M \in (D) \text{ équivaut à } \begin{cases} x = 2t - 7 \\ y = 3t - 8, \text{ avec } t \text{ réel.} \\ z = t \end{cases}$$

3. a) On a $-2 \times (-9) + (-4) + (-1) - 6 = 18 - 4 - 1 - 6 = 7 \neq 0$; ainsi $A \notin (P_1)$.

De même, $(-9) - 2 \times (-4) + 4 \times (-1) - 9 = -9 + 8 - 4 - 9 = -14 \neq 0$; donc $A \notin (P_2)$.

$$\text{b) } AM^2 = (x+9)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = (-7+2t+9)^2 + (-8+3t+4)^2 + (t+1)^2$$

$$AM^2 = (2t+2)^2 + (3t-4)^2 + (t+1)^2 = 4t^2 + 8t + 4 + 9t^2 - 24t + 16 + t^2 + 2t + 1$$

$$AM^2 = 14t^2 - 14t + 21 = 7(2t^2 - 2t + 3).$$

c)

Rappel de cours : soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels.

Si $a < 0$, P est croissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ et décroissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$.

Si $a > 0$, P est décroissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ et croissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$.

• f admet pour représentation graphique une parabole tournée vers le haut, car $a = 2 > 0$;

on peut donc affirmer que f est décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

D'après ses variations, la fonction f admet alors un minimum en $x = \frac{1}{2}$ valant $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$.

• On en déduit que, comme $AM^2 = 7f(t)$, la distance sera **minimale** pour $t = \frac{1}{2}$ et

$$\text{vaudra alors } \sqrt{7 \times \frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{35}{2}}.$$

• Pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient le point I de coordonnées $\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

4. a) De sa représentation paramétrique, on en déduit que $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) .

Le plan (Q) est orthogonal à (D) et a donc $\vec{u}$ pour vecteur normal.

Son équation est ainsi de la forme : $2x + 3y + z + d = 0$, où d est un réel.

De plus, on a $A \in Q$, ce qui signifie que ses coordonnées vérifient l'équation de (Q) ; soit : $2 \times (-9) + 3 \times (-4) + (-1) + d = 0$, puis $d = 31$.

Le plan (Q) a donc pour équation $2x + 3y + z + 31 = 0$.

b) Par définition, le point I appartient à la droite (D) .

De plus, on a $\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u} = (-6 + 9) \times 2 + \left(-\frac{13}{2} + 4\right) \times 3 + \left(\frac{1}{2} + 1\right) \times 1 = 6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = 0$;

ces vecteurs sont donc orthogonaux.

Le point I est bien le projeté orthogonal de A sur (D) .

France métropolitaine

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 60 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Spécialité exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 60 min.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Géométrie dans l'espace – Barycentre (5 points)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère les points $A(2, 4, 1)$, $B(0, 4, -3)$, $C(3, 1, -3)$, $D(1, 0, -2)$,

$E(3, 2, -1)$, $I\left(\frac{3}{5}, 4, -\frac{9}{5}\right)$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(CD) \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

5. Le point I est sur la droite (AB).

Corrigé page 272

EXERCICE 2 Analyse - Fonction exponentielle, Intégration (5 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{1-x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathcal{C}$ peut-on en tirer ?

b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f' .

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe $\mathcal{C}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

a) Établir une relation entre I_{n+1} et I_n .

b) Calculer I_1 , puis I_2 .

c) Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c).

3. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$.

b) En déduire un encadrement de I_n , puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé page 274

EXERCICE 3 Nombres complexes – Lieux géométriques (5 points)

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans tout l'exercice, $P \setminus \{O\}$ désigne le plan P privé du point origine O .

1. Question de cours

On prend comme prérequis les résultats suivants :

– Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :
 $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

– Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z , on a :
 $\arg(z) = (\vec{u} ; \vec{w})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

a) Soit z et z' des nombres complexes non nuls ;

démontrer que $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

b) Démontrer que, si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c , on a : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2. On considère l'application f de $P \setminus \{O\}$ dans $P \setminus \{O\}$ qui, au point M du plan d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{1}{\bar{z}}$. On appelle U et V

les points du plan d'affixes respectives 1 et i .

a) Démontrer que, pour $z \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

En déduire que, pour tout point M de $P \setminus \{O\}$, les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O .

b) Déterminer l'ensemble des points M de $P \setminus \{O\}$ tels que $f(M) = M$.

c) M est un point du plan P distinct de O, U , et V ; on admet que M' est aussi distinct de O, U , et V .

Établir l'égalité $\frac{z' - 1}{z' - i} = \frac{1}{i} \left(\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + i} \right) = -i \left(\frac{z - 1}{z - i} \right)$.

En déduire une relation entre $\arg\left(\frac{z' - 1}{z' - i}\right)$ et $\arg\left(\frac{z - 1}{z - i}\right)$.

3. a) Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$, et soit M le point d'affixe z . Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si, et seulement si, $\frac{z - 1}{z - i}$ est un nombre réel non nul.

b) Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V .

Corrigé page 277

SPECIALITÉ EXERCICE 3 Arithmétique - Théorème de Gauss (5 points)

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$. (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple.) Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2. a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à :

$$\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$$

b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$.

3. a) Trouver un couple (u, v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b)).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12, le reste est 6, et lorsqu'on le divise par 19, le reste est 13.

On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Corrigé page 278

EXERCICE 4 Probabilités – Conditionnement (5 points)

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

- Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?
- Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?
- Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?
- Pour quelles valeurs de n a-t-on : $p_n > 0,99$?

2. Ce tireur participe au jeu suivant :

Dans un premier temps, il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le

numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.

Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,409 6 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela, il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

a) Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

b) On pose $d^2 = \sum_{k=1}^4 \left(f_k - \frac{1}{4} \right)^2$. Calculer d^2 .

c) On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule, pour chaque simulation, le nombre d^2 . On obtient, pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 , les résultats suivants :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé ?

Corrigé page 280

Corrigés

EXERCICE 1

Remarque : aucune justification n'est demandée le jour de l'examen ; les explications données ci-après le sont dans un souci de compréhension.

1. Affirmation 1 : vrai.

Méthode : il suffit de vérifier que les coordonnées des trois points vérifient l'équation donnée.

On a :

$$2x_A + 2y_A - z_A - 11 = 2 \times 2 + 2 \times 4 - 1 - 11 = 4 + 8 - 1 - 11 = 0 ;$$

$$2x_B + 2y_B - z_B - 11 = 2 \times 0 + 2 \times 4 - (-3) - 11 = 0 + 8 + 3 - 11 = 0 ;$$

$$2x_C + 2y_C - z_C - 11 = 2 \times 3 + 2 \times 1 - (-3) - 11 = 6 + 2 + 3 - 11 = 0 ;$$

Ainsi, les coordonnées des points A , B et C vérifient l'équation de l'énoncé ; le plan (ABC) admet donc pour équation $2x + 2 - z - 11 = 0$.

2. Affirmation 2 : faux.

Méthode : E doit alors vérifier deux conditions : $\begin{cases} E \in (ABC) \\ (AE) \text{ orthogonale à } (ED). \end{cases}$

$$\text{On a } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{d'où : } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{ED} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-2) + (-2) \times (-1) = 4 \neq 0 ;$$

par suite, les droites (AE) et (ED) ne sont pas orthogonales.

On en conclut que le point E n'est pas le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .

3. Affirmation 3 : vrai.

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{d'où : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-2) \times (-2) + 0 \times (-1) + (-4) \times 1 = 0 ;$$

ainsi, les droites (AB) et (CD) sont bien orthogonales.

4. Affirmation 4 : faux.

Méthode : on va montrer que les coordonnées du point C ne vérifient pas la représentation paramétrique.

$$\text{On cherche un unique } t \text{ réel tel que } \begin{cases} x_C = -1 + 2t \\ y_C = -1 + t \\ z_C = 1 - t. \end{cases}$$

La première ligne du système nous donne $3 = -1 + 2t$, d'où $t = 2$.

On a alors $1 - t = 1 - 2 = -1 \neq z_C$.

Les coordonnées de C ne vérifient donc pas la représentation paramétrique donnée.

En conséquence, celle-ci ne peut pas représenter la droite (CD) .

5. Affirmation 5 : vrai.

Méthode : on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ 0 \\ -\frac{14}{5} \end{pmatrix} ;$$

$$\text{par suite, } \overrightarrow{AI} = \frac{7}{10} \overrightarrow{AB} ;$$

les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires.

On en déduit que les points A , I et B sont alignés.

EXERCICE 2

1. a)

Rappel de cours : théorème des limites des fonctions composéesSoient f, g deux fonctions et a, b, c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

Calculons les limites de f :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty, \\ \text{d'après le théorème sur la limite des fonctions composées.} \end{array}$$

Par suite, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.• Posons $X = 1 - x$; on a alors $f(x) = (1 - X)^2 e^X = e^X - 2Xe^X + X^2 e^X$.Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = -\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0 \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \\ \text{d'après les limites des croissances comparées.} \end{array}$$

Finalement, $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.b) $x \mapsto 1 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; donc $x \mapsto e^{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$;Par suite, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.**Rappel de cours : dérivation**

- Dérivation du produit de deux fonctions : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; uv est alors dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Dérivée de la fonction e^u : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ; e^u est alors dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

Calculons la dérivée de f : $f'(x) = 2x e^{1-x} + x^2 \times (-1) e^{1-x} = e^{1-x} (2 - x)x$.c) On a $e^{1-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$;ainsi, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $-x^2 + 2x = x(2 - x)$ qui a pour racines évidentes 0 et 2. $-x^2 + 2x$ est un polynôme de degré 2, il est, par conséquent, du signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ à l'intérieur.

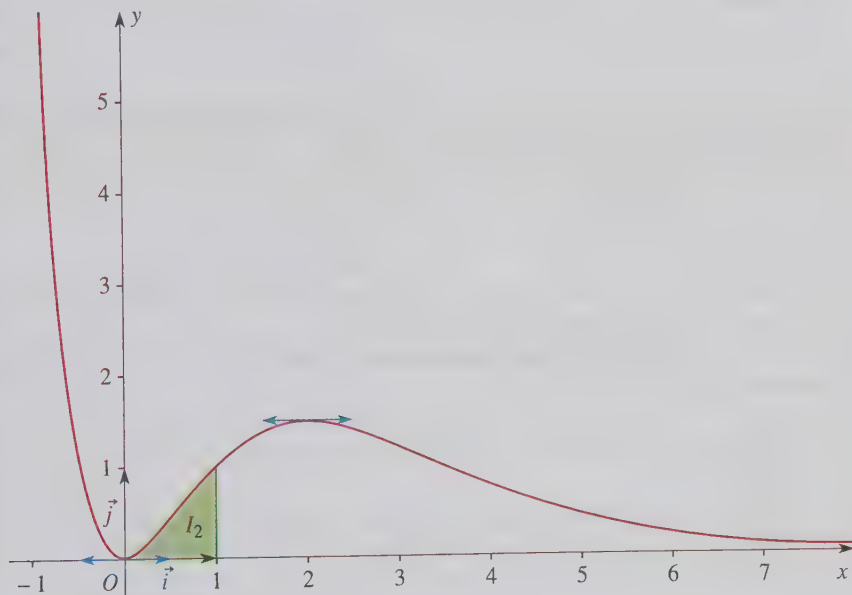
$$\text{D'où : } \left\{ \begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ sur }]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[\\ f'(x) > 0 \text{ sur }]0 ; 2[\\ f'(x) = 0 \text{ en } 0 \text{ et } 2. \end{array} \right.$$

En conclusion, f est $\left\{ \begin{array}{l} \text{strictement croissante sur }]0 ; 2[\\ \text{strictement décroissante sur }]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[. \end{array} \right.$

On peut ainsi dresser le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	$4e^{-1}$	0	

Tracé de la courbe (l'échelle de l'énoncé n'est pas respectée) :



2. a)

Rappel de cours : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$ telles que u' et v' sont continues. On a alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

L'intégrale I_n est définie par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ et on a :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx.$$

Posons $u(x) = x^{n+1}$ d'où $u'(x) = (n+1)x^n$,
 $v'(x) = e^{1-x}$ d'où $v(x) = -e^{1-x}$ (à une constante près),
 avec u, v dérivables sur $[0; 1]$, et u' et v' continues sur $[0; 1]$.

On en déduit :

$$I_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x} dx \\ = -1 + (n+1) I_n \quad \text{par linéarité de l'intégrale.}$$

b) • Calcul de I_1 :

$$\text{On a } I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx.$$

Effectuons de nouveau une intégration par parties.

Posons $u(x) = x$ d'où $u'(x) = 1$,
 $v'(x) = e^{1-x}$ d'où $v(x) = -e^{1-x}$ (à une constante près),
 avec u, v dérivables sur $[0; 1]$, et u' et v' continues sur $[0; 1]$.

$$I_1 = \left[-x e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x} dx = -1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = -1 + \left[-e^{1-x} \right]_0^1 = -1 + (-1 + e) = -2 + e.$$

Remarque : on pouvait aussi voir que le résultat de la question précédente était valable pour $n = 0$ en posant $I_0 = \int_0^1 x^0 e^{1-x} dx = \int_0^1 e^{1-x} dx = \left[-e^{1-x} \right]_0^1 = e - 1$, ce qui donnait directement la valeur de I_1 .

• Calcul de I_2 :

$$\text{On a } I_2 = -1 + 2 I_1 = -5 + 2e \quad \text{d'après la question 2. a)}$$

c) $f(x) \geq 0$ sur $[0; 1]$ comme produit de deux fonctions positives et f est continue sur $[0; 1]$ comme produit de deux fonctions continues.

Par suite, I_2 est l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. a) On a :

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq 1-x \leq 1,$$

$$e^0 \leq e^{1-x} \leq e, \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

$$1 \leq e^{1-x} \leq e,$$

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e \quad \text{car } x^n \geq 0 \text{ sur } [0; 1].$$

b)

Rappel de cours :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$. Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

On a : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ sur $[0; 1]$, d'après la question précédente

$$\text{d'où } \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx,$$

$$\text{puis } \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq e \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1,$$

soit : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; en conséquence, d'après le théorème des gendarmes, on en conclut que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

EXERCICE 3

1. Question de cours

a) Posons $Z = \frac{z}{z'}$, avec z et z' différents de 0.

On a alors $Zz' = z$, et, d'après le premier prérequis, $\arg Z + \arg z' = \arg z \pmod{2\pi}$.

D'où : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + \text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) \\ &= -\text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + \text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) \\ &= -\arg(b-a) + \arg(c-a) \pmod{2\pi} \quad \text{d'après le second pré-requis} \\ &= \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \pmod{2\pi}. \quad \text{d'après le 1. a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. a) } \arg z' &= \arg\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \pmod{2\pi} \quad \text{avec } z \neq 0 \\ &= -\arg(\bar{z}) \pmod{2\pi} \\ &= -(-\arg z) \pmod{2\pi} \\ &= \arg z \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\text{mes}(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM'}) = \text{mes}(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}$.

En conclusion, **M et M' appartiennent à la même demi-droite d'origine O .**

$$\begin{aligned} \text{b) On a } f(M) = M &\Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \quad \text{avec } z \neq 0 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow OM = 1. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des points M tel que $f(z) = z$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

$$\begin{aligned} \text{c) } \bullet \text{ On a } \frac{z'-1}{z'-i} &= \frac{\frac{1}{\bar{z}}-1}{\frac{1}{\bar{z}}-i} = \frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}} \\ &= \frac{1-\bar{z}}{i\left(\frac{1}{i}-\bar{z}\right)} = \frac{1-\bar{z}}{i(-i-\bar{z})} \\ &= \frac{\bar{z}-1}{i(\bar{z}+i)} = \frac{1}{i} \left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{i} \frac{\overline{z-1}}{\overline{z-i}} = \frac{1}{i} \overline{\left(\frac{z-1}{z-i} \right)} \\
 &= -i \overline{\left(\frac{z-1}{z-i} \right)}.
 \end{aligned}$$

• On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 \arg \left(\frac{z'-1}{z'-i} \right) &= \arg(-i) + \arg \left(\overline{\left(\frac{z-1}{z-i} \right)} \right) \pmod{2\pi} \\
 &= -\frac{\pi}{2} - \arg \left(\frac{z-1}{z-i} \right) \pmod{2\pi}.
 \end{aligned}$$

$$\text{3. a) } \frac{z-1}{z-i} \text{ est un réel non nul} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z-1}{z-i} \right) = 0 \pmod{\pi} \quad \text{avec } z \neq i \text{ et } z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \text{mes}(\overrightarrow{MV}, \overrightarrow{MU}) = 0 \pmod{\pi} \quad \text{avec } z \neq i \text{ et } z \neq 1$$

$$\Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite } (UV) \text{ privée de } U \text{ et } V.$$

b) M appartient à la droite (UV) privée de U et V

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z-1}{z-i} \right) = \begin{cases} 0 \pmod{2\pi} \\ \pi \pmod{2\pi} \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} z \neq i \\ z \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z'-1}{z'-i} \right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ -\frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} z \neq i \\ z \neq 1 \end{cases} \quad \text{d'après la question 3. a)}$$

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z'-1}{z'-i} \right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \quad \text{avec } \begin{cases} z \neq i \\ z \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{mes}(\overrightarrow{M'V}, \overrightarrow{M'U}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \quad \text{avec } \begin{cases} z \neq i \\ z \neq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M'$ appartient au cercle de diamètre $[UV]$ privé de U et V .

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3

Partie A : Question de cours

1. Théorème de Bézout :

Soient a et b , deux entiers relatifs non nuls.

a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss :

Soient a , b et c , des entiers relatifs non nuls.

Si a divise bc et si a est premier avec b , alors a divise c .

2.

Remarque : comme le titre l'indique, c'est une question traitée en cours pendant l'année.

Démontrons le théorème de Gauss à partir du théorème de Bézout.

Supposons que a divise bc et que a est premier avec b .

Alors, il existe k entier relatif tel que $bc = ka$.

Comme a et b sont premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bézout, deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

On a : $au + bv = 1$,

donc $acu + bcv = c$,

puis $acu + kav = c$.

Ainsi, on peut écrire : $c = a(cu + kv)$, avec $(cu + kv)$ entier relatif.

En conclusion : **a divise c .**

Partie B

Soit $(S) : \begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12}. \end{cases}$

1. 19 et 12 sont des entiers premiers entre eux ; par suite, en appliquant le théorème de Bézout, on sait qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $19u + 12v = 1$.

Posons $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$.

On a $N = 13 \times (1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 + 19 \times (-13u + 6u) = 13 - 19 \times 7u$,

d'où $N \equiv 13 \pmod{19}$.

De même, $N = 13 \times 12v + 6 \times (1 - 12v) = 6 + 12 \times (13v - 6v) = 6 + 12 \times 7u$,

d'où $N \equiv 6 \pmod{12}$.

Finalement, **N est bien solution du système (S) .**

2. a) Supposons n_0 solution de (S) .

• Si n est solution de (S) , on a $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$ et $\begin{cases} n_0 \equiv 13 \pmod{19} \\ n_0 \equiv 6 \pmod{12}. \end{cases}$

En soustrayant les relations terme à terme, on obtient $\begin{cases} n - n_0 \equiv 0 \pmod{19} \\ n - n_0 \equiv 0 \pmod{12}, \end{cases}$

soit : $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12}. \end{cases}$

• Réciproquement, si $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12}, \end{cases}$ comme on a $\begin{cases} n_0 \equiv 13 \pmod{19} \\ n_0 \equiv 6 \pmod{12}, \end{cases}$

par transitivité, on obtient : $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12}. \end{cases}$

Ainsi, le système (S) est bien équivalent à $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12}. \end{cases}$

b) Si n est solution de $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12}, \end{cases}$

il existe alors deux entiers relatifs k et l tels que $\begin{cases} n = n_0 + 19k \\ n = n_0 + 12l. \end{cases}$

On en déduit que $19k = 12l$.

Ainsi, 12 divise $19k$.

Comme 19 et 12 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss affirme qu'alors 12 divise k .

Il existe donc k' entier relatif tel que $k = 12k'$.

Par suite, on obtient : $n = n_0 + 19 \times 12k'$, et, ainsi $n \equiv n_0 \pmod{19 \times 12}$.

Réciproquement, si $n \equiv n_0 \pmod{19 \times 12}$, alors $n \equiv n_0 \pmod{19}$ et $n \equiv n_0 \pmod{12}$; n est donc solution de (S).

Finalement, on a démontré que : **n solution de (S) équivaut à $n \equiv n_0 \pmod{19 \times 12}$.**

3. a)

Méthode : pour trouver u et v , on écrit les premiers multiples de 12, puis ceux de 19, et on recherche ceux qui seraient distants d'une unité.

On peut aussi appliquer l'algorithme d'Euclide-Bézout.

On remarque que $8 \times 12 = 96$ et $5 \times 19 = 95$; on a donc $(-5) \times 19 + 8 \times 12 = 1$.

Ainsi, **le couple $(u, v) = (-5 ; 8)$ vérifie $19u + 12v = 1$.**

On peut, à présent, calculer N :

$$N = 13 \times 12 \times 8 + 6 \times 19 \times (-5) = 678.$$

b) En utilisant la question 2. b), on a : n solution de (S) équivaut à $n \equiv N \pmod{19 \times 12}$.

D'où : $n \equiv 678 \pmod{228}$.

Or, $678 = 2 \times 228 + 222$.

Donc : $n \equiv 222 \pmod{228}$.

Les solutions du système (S) sont, en conséquence, tous les entiers relatifs de la forme $222 + 228k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

4.

Rappel de cours : division euclidienne

Soient a et b deux entiers naturels.

Il existe deux uniques entiers naturels q et r vérifiant $a = bq + r$, avec $0 \leq r < b$.

q est le quotient et r le reste.

Un entier naturel n , tel que le reste de la division par 12 soit 6 et que le reste de la division par 19 soit 13, vérifie le système (S) et, d'après la question 3.b., s'écrit :

$n = 228k + 222$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le reste de la division euclidienne d'un tel nombre par 228 est donc 222.

EXERCICE 4

1. a) À chaque tir, la probabilité de laisser le ballon intact est $0,8 = \frac{4}{5}$.

Comme les tirs sont indépendants, **la probabilité demandée est $0,8 \times 0,8 = 0,64$.**

b)

Méthode :

Soit A un évènement de probabilité p .

L'évènement contraire, noté $\bar{A}$, a alors pour probabilité $1 - p$.

« Deux tirs suffisent pour crever le ballon » est l'évènement contraire de la question 1. a)

La probabilité demandée est donc $1 - 0,64 = 0,36$.

c) « n tirs suffisent pour crever le ballon » est l'évènement contraire de : « le ballon est intact au bout de n tirs ». **Ainsi, on a $1 - p_n = (0,8)^n$, et ainsi $p_n = 1 - (0,8)^n$.**

d) $p_n = 1 - (0,8)^n > 0,99$ équivaut à $(0,8)^n < \frac{1}{100}$,
 équivaut à $e^{n \ln(0,8)} < \frac{1}{100}$,

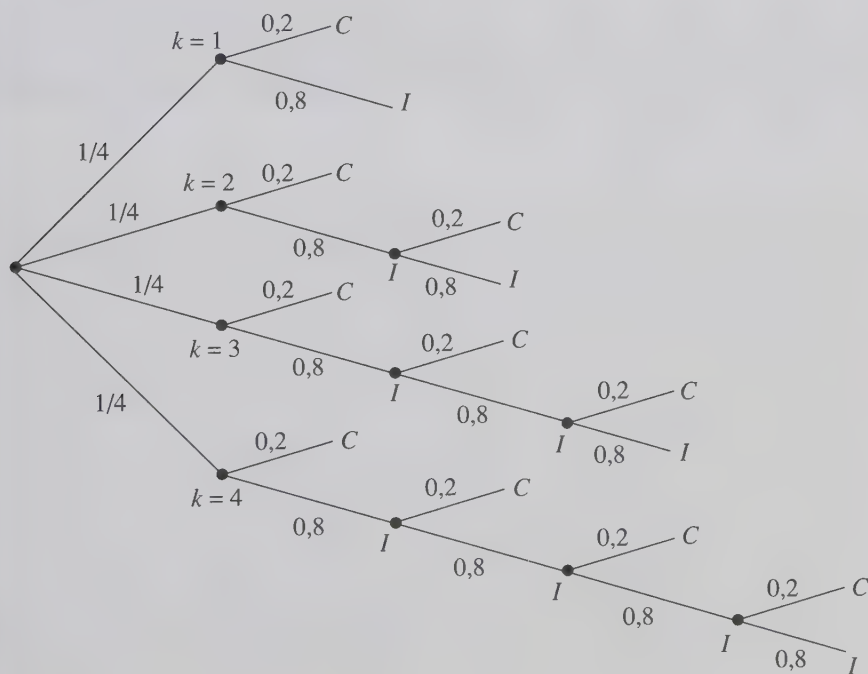
équivaut à $n \ln(0,8) < \ln\left(\frac{1}{100}\right)$, car la fonction logarithme
 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

équivaut à $n > -\frac{\ln(100)}{\ln(0,8)}$, car $\begin{cases} \ln(0,8) < 0 \\ \text{et } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a, \\ \text{pour tout } a > 0 \end{cases}$

équivaut à $n > 20,64$.

La probabilité sera donc supérieure à 0,99 s'il y a au moins 21 tirs.

2. On note C l'évènement « le ballon est crevé » et I l'évènement « le ballon est intact ». Voici l'arbre pondéré correspondant aux différents résultats du lancer du dé tétraédrique régulier.



Comme le dé est parfaitement équilibré, le joueur a autant de chances d'obtenir 1, 2, 3 ou 4 avec le dé, soit une probabilité $\frac{1}{4}$.

En suivant les différents chemins possibles qui permettent de ne pas crever le ballon, on obtient : $1 - p = 0,2 + 0,8 \times 0,2 + 0,8^2 \times 0,2 + 0,8^3 \times 0,2 = 0,5904$.

On en déduit : $p = 0,4096$.

3. a)

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face	58	49	52	41
Fréquences	$\frac{58}{200} = 0,29$	$\frac{49}{200} = 0,245$	$\frac{52}{200} = 0,26$	$\frac{41}{200} = 0,205$

b) Calculons d^2 :

$$d^2 = \sum_{k=1}^4 \left(f_k - \frac{1}{4} \right)^2 = \left(\frac{58}{200} - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{49}{200} - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{52}{200} - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{41}{200} - \frac{1}{4} \right)^2$$

$$d^2 = \left(\frac{8}{200} \right)^2 + \left(\frac{-1}{200} \right)^2 + \left(\frac{2}{200} \right)^2 + \left(\frac{-9}{200} \right)^2 = \frac{150}{40\,000} = \frac{3}{800} = 0,00375.$$

c) On compare la valeur d^2 calculée ci-dessus avec la valeur D_9 .

Par la lecture du tableau fourni dans l'énoncé de la question, au moins 90 % des valeurs de d^2 sont dans l'intervalle $[0 ; 0,00452]$.

Or, on a $d^2_{\text{calculée}} = 0,00375$,

donc $d^2_{\text{calculée}} \in [0 ; 0,00452]$.

On peut donc dire, avec un risque d'erreur de 10 %, que le dé est équilibré. Il n'est pas pipé.

Pondichéry

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 45 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 50 min.
- Exercice 4 : 1 h 25 min.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Analyse – Fonctions, Suites (4 points)

Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de 1.a à 3.d sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.

Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x , e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1.a	Pour tous les réels a et b : $(e^a)^b = e^{ab}$.
Affirmation 1.b	Pour tous les réels a et b : $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
Affirmation 1.c	La droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

Sujet 17

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I .

Affirmation 2.a	Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
Affirmation 2.b	Si f est continue en a , alors f est dérivable en a .
Affirmation 2.c	Si f est dérivable en a , alors la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3.a	Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim (u_n + v_n) = 0$.
Affirmation 3.b	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim v_n = +\infty$, alors la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas.
Affirmation 3.c	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3.d	Si (u_n) et (v_n) convergent, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

Corrigé page 288

EXERCICE 2 Nombres complexes – Suites (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n .

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.
Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, puis établir que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon $0,1$?

4. a) Établir que, pour tout entier naturel n , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.

En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1} .

b) Pour tout entier naturel n , on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$.

On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$.

Exprimer ℓ_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Corrigé page 290

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Nombres complexes – Similitudes (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 5 cm pour unité graphique.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$.

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ .

2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n , on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.

a) Déterminer les affixes des points A_1, A_2 et A_3 , puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 .

b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, puis établir que, pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

c) À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon $0,1$?

3. a) Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$?

En déduire, pour tout entier naturel n , la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.

b) Pour tout entier naturel n , on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$.

On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$.

Exprimer ℓ_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Corrigé page 292

EXERCICE 3 Géométrie dans l'espace – Produit scalaire (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A

(cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

On considère le point I de coordonnées (x_I, y_I, z_I) et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a, b, c) .

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan P est égale à

$$\frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan P .

Déterminer, en fonction de a, b, c, x_I, y_I et z_I , un système d'équations paramétriques de Δ .

2. On note H le point d'intersection de Δ et P .

a) Justifier qu'il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{IH} = k\vec{n}.$$

b) Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I .

c) En déduire que :

$$IH = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Partie B

Le plan Q d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère S de centre le point Ω de coordonnées $(1; -1; 3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère S .

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan Q .

3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère S et du plan Q .

Corrigé page 296

EXERCICE 4 Analyse, Probabilités – Équations différentielles (7 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000). D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = -\frac{1}{20} y(3 - \ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante :

Une fonction f , dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$

vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(H) \quad z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0 ; +\infty[$:

$$f(t) = \exp \left(3 + C \exp \left(\frac{t}{20} \right) \right)$$

(la notation $\exp$ désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto e^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp \left(3 - 3 \exp \left(\frac{t}{20} \right) \right).$$

a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

c) Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas. »

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.

2. En déduire $P(T)$.

3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Corrige page 298

Corrigés

EXERCICE 1

Remarque : un certain nombre de questions sont des questions de cours. Aucune justification n'est demandée le jour de l'examen ; les explications données ci-après le sont dans un souci de compréhension.

1. a) **Première affirmation : faux.**

Pour tous réels a et b , on a $(e^a)^b = e^{ab}$.

1. b) **Deuxième affirmation : vrai.**

Pour tous réels a et b , on a $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.

1. c) **Troisième affirmation : faux.**

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction $f(x) = e^x$ est donnée par :

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = e(x - 1) + e = ex$, car $f'(x) = e^x$, pour tout réel x .

2. a) **Quatrième affirmation : vrai.**

Toute fonction dérivable en a est nécessairement continue en a .

2. b) Cinquième affirmation : faux.

C'est la réciproque de la question précédente. Une fonction continue en a n'est pas nécessairement dérivable en a . Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0, car ses dérivées à droite et à gauche, valant respectivement 1 et -1 , ne sont pas égales.

2. c) Sixième affirmation : vrai.

Si f est dérivable en a , la limite de son taux d'accroissement en a existe et est un nombre réel.

Ainsi : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est un nombre réel ; cette limite est donc finie.

3. a) Septième affirmation : faux.

On est dans le cas d'une forme indéterminée et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ peut être $-\infty$, $+\infty$ ou un nombre réel. Voici quelques exemples :

- Si $u_n = n$ et $v_n = -n + 3$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 3$.
- Si $u_n = n^2$ et $v_n = -n$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1) = +\infty$.
- Si $u_n = n$ et $v_n = -n^2$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - n^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - n) = -\infty$.

3. b) Huitième affirmation : vrai.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \pm \infty$, selon le signe de l .

On en conclut que la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas (sa limite n'est pas un nombre réel).

3. c) Neuvième affirmation : vrai.

Si (v_n) tend vers 0 en étant positive, alors $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ tend vers $+\infty$. On se trouve alors dans

la même situation qu'à la question **3. b)** en utilisant les suites (u_n) et $\left(\frac{1}{v_n}\right)$.

3. d) Dixième affirmation : faux.

Supposons que (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers a et b .

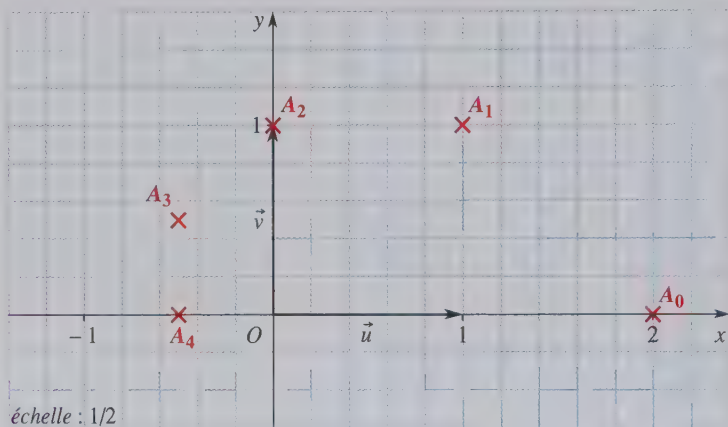
Alors, si $b \neq 0$, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers $\frac{a}{b}$, donc converge. Mais, si $b = 0$, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers $+\infty$

ou $-\infty$ selon le signe de a et, par conséquent, diverge.

EXERCICE 2

$$1. z_0 = 2; z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = 1+i; z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{(1+i)^2}{2} = i; z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = \frac{i-1}{2};$$

$$z_4 = \frac{1+i}{2} z_3 = \frac{-1}{2}.$$



2. Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} z_n \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \times |z_n| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2} \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n.$$

Rappel de cours : si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors :

$$u_n = u_0 \times q^n, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Par suite, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme

$$u_0 = |z_0| = 2.$$

$$\text{D'où : } u_n = u_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$

3. A_n appartient au disque de centre O et de rayon $0,1$

équivalent à $OA_n \leq 0,1$,

$$\text{équivalent à } u_n = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \leq 0,1,$$

$$\text{équivalent à } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \leq 0,05,$$

$$\text{équivalent à } \ln \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \right] \leq \ln(0,05), \text{ car la fonction logarithme est croissante sur } \mathbb{R}_+^*,$$

$$\text{équivalent à } n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \leq \ln(0,05), \quad \text{car } \ln(a^b) = b \ln a, \text{ avec } a > 0,$$

$$\text{équivalent à } -n \ln(\sqrt{2}) \leq \ln(0,05), \quad \text{car } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a, \text{ avec } a > 0,$$

$$\text{équivalent à } n \geq -\frac{\ln(0,05)}{\ln(\sqrt{2})}, \quad \text{car } -\ln(\sqrt{2}) < 0,$$

$$\text{équivalent à } n \geq 8,6.$$

Ainsi, à partir de $n_0 = 9$, tous les points A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon $0,1$.

$$4. a) \text{ On a : } \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2} z_n - z_n}{\frac{1+i}{2} z_n} = \frac{\frac{1+i}{2} - 1}{\frac{1+i}{2}} = \frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1)(1-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i.$$

$$\text{On en déduit que } \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Or, } \left| \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} \right| = \frac{|z_{n+1} - z_n|}{|z_{n+1} - 0|} = \frac{A_n A_{n+1}}{OA_{n+1}}.$$

$$\text{D'où : } \frac{A_n A_{n+1}}{OA_{n+1}} = \left| e^{i\frac{\pi}{2}} \right| = 1.$$

$$\text{Ainsi, } OA_{n+1} = A_n A_{n+1}.$$

En conséquence, le triangle $OA_n A_{n+1}$ est isocèle en A_{n+1} .

$$\text{De plus, on a } \arg \left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0} \right) = \text{mes}(\overrightarrow{A_{n+1}O}; \overrightarrow{A_{n+1}A_n}) \pmod{2\pi}.$$

$$\begin{aligned} \text{Soit, } \text{mes}(\overrightarrow{A_{n+1}O}; \overrightarrow{A_{n+1}A_n}) &= \arg \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right) \pmod{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Par suite, le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} .

Finalement, le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1} .

$$b) \text{ On donne } l_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n.$$

Rappel de cours : si (u_n) est une suite géométrique de raison q différente de 1 et de premier terme u_0 , alors la somme des n premiers termes consécutifs de cette suite est :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Comme la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a : $OA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} OA_n$;

on en déduit que $OA_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} OA_{n+1}$, pour tout entier naturel n :

Le coefficient de proportionnalité entre les triangles $OA_n A_{n+1}$ et $OA_{n+1} A_{n+2}$ (qui sont semblables) est donc $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On obtient ainsi que $A_{n+1} A_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_n A_{n+1}$.

La suite formée des longueurs $(A_n A_{n+1})$ est géométrique de raison $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $A_0 A_1 = |z_1 - z_0| = |1 + i - 2| = |1 - i| = \sqrt{2}$.

l_n représente donc la somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique dont la raison est différente de 1.

$$\text{D'où : } l_n = \sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$$

Comme $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$.

Par suite, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right) = \frac{2}{\sqrt{2}-1}$.

La suite (l_n) converge donc vers $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

1.

Méthode : l'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme :

$$z' = az + b, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ nombres complexes et } a \neq 0.$$

- L'angle de la similitude est donné par un argument de a .
- Le rapport est donné par le module de a .
- Le centre de la similitude est obtenu en cherchant les points fixes.

Ici, on a $z' = f(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$, donc $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $b = 1$.

Ainsi, le module de a vaut : $|a| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\text{d'où } a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$\text{puis } \arg(a) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

Cherchons les points invariants :

$$z = f(z) \text{ équivaut à } z = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right) z + 1,$$

$$\text{équivaut à } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \right) z = 1,$$

$$\text{équivaut à } \frac{1}{2} (1 - i) z = 1,$$

$$\text{équivaut à } z = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i.$$

En conclusion, f est bien une similitude directe d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$, de rapport $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et

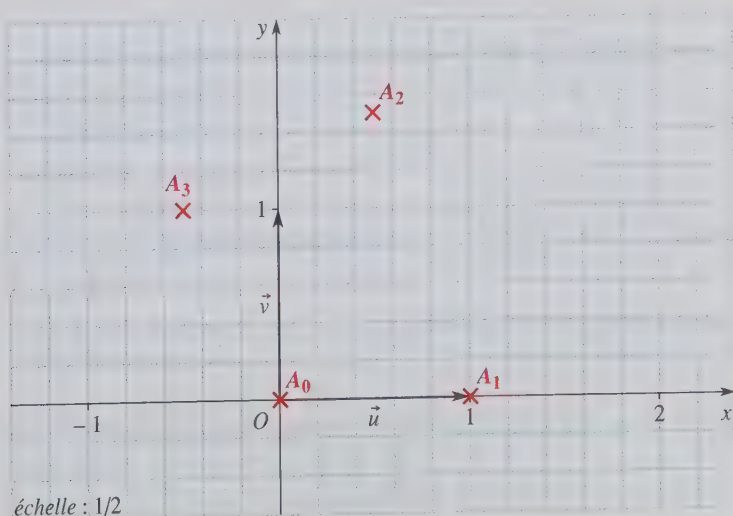
de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + i$.

2. a) • $A_0 = O$, d'affixe $z_0 = 0$.

• $A_1 = f(A_0)$, d'affixe $z_1 = f(z_0) = 1$.

• $A_2 = f(A_1)$, d'affixe $z_2 = f(z_1) = \frac{1}{2}(1 + i) + 1 = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$.

• $A_3 = f(A_2)$, d'affixe $z_3 = f(z_2) = \frac{1}{2}(1 + i)\left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4}i + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i = -\frac{1}{2} + i$.



b) f est une similitude directe d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$, de rapport $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et de centre Ω d'affixe

$$\omega = 1 + i.$$

Comme $A_{n+1} = f(A_n)$, on a $\Omega A_{n+1} = k \Omega A_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_n$.

On en déduit que : $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n$.

Ainsi, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme

$$u_0 = \Omega A_0 = \Omega O = O\Omega = |\omega| = |1 + i| = \sqrt{2}.$$

Rappel de cours : si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors :

$$u_n = u_0 \times q^n, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Finalement, $u_n = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, pour tout entier naturel n .

c) A_n appartient au disque de centre Ω et de rayon 0,1, équivaut à $\Omega A_n \leq 0,1$,

$$\text{équivaut à } u_n = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0,1,$$

$$\text{équivaut à } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \frac{0,1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{équivaut à } \ln \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \right] \leq \ln \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} \right), \text{ car la fonction logarithme est croissante sur } \mathbb{R}_+^*,$$

$$\text{équivaut à } n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \leq \ln \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} \right), \text{ car } \ln(a^b) = b \ln a, \text{ avec } a > 0,$$

$$\text{équivaut à } -n \ln(\sqrt{2}) \leq \ln \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} \right), \text{ car } \ln \left(\frac{1}{a} \right) = -\ln a, \text{ avec } a > 0,$$

$$\text{équivaut à } n \geq -\frac{\ln \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} \right)}{\ln(\sqrt{2})}, \quad \text{car } -\ln(\sqrt{2}) < 0,$$

$$\text{équivaut à } n \geq \frac{\ln(\sqrt{2}) - \ln(0,1)}{\ln(\sqrt{2})},$$

$$\text{équivaut à } n \geq 7,6.$$

Ainsi, à partir de $n_0 = 8$, tous les points A_n appartiennent au disque de centre Ω et de rayon 0,1.

3. a) On sait que $\Omega A_0 = |\omega| = \sqrt{2}$ (d'après la question 2. b))

et on a $\Omega A_1 = u_1 = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 = 1$,

d'où $A_0 A_1 = |z_1 - z_0| = |1| = 1$.

Ainsi, le triangle $\Omega A_0 A_1$ est isocèle en A_1 .

De plus, on a $\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A_0}; \overrightarrow{\Omega A_1}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$, car c'est l'angle de la similitude.

En conséquence, le triangle étant isocèle, on sait que $\text{mes}(\overrightarrow{A_0 A_1}; \overrightarrow{A_0 \Omega}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$

et, par suite, $\text{mes}(\overrightarrow{A_1 \Omega}; \overrightarrow{A_1 A_0}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ (la somme des angles d'un triangle faisant π).

On peut dès lors affirmer que **le triangle $\Omega A_0 A_1$ est isocèle et rectangle en A_1 .**

Comme l'image d'un triangle par une similitude est un triangle semblable, **tous les triangles $\Omega A_n A_{n+1}$ sont isocèles rectangles en A_{n+1} , avec n entier naturel.**

b) On a : $l_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.

Rappel de cours : si (u_n) est une suite géométrique de raison q différente de 1 et de premier terme u_0 , alors la somme des n premiers termes consécutifs de cette suite est :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Comme la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a :

$$\Omega A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_n;$$

on en déduit que $\Omega A_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega A_{n+1}$, pour tout entier naturel n .

Le coefficient de proportionnalité entre les triangles $\Omega A_n A_{n+1}$ et $\Omega A_{n+1} A_{n+2}$ (qui sont semblables) est donc $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On obtient ainsi que $A_{n+1} A_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_n A_{n+1}$.

La suite formée des longueurs $(A_n A_{n+1})$ est géométrique de raison $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $A_0 A_1 = 1$.

l_n représente donc la somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique dont la raison est différente de 1.

$$\text{D'où : } l_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$$

Comme $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$.

Par suite, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

La suite (l_n) converge donc vers $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

EXERCICE 3

Partie A

Remarque : cette première partie est une simple restitution de connaissance ; les questions permettent de retrouver une démonstration faite en classe.

1. Comme P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à ce plan et, par conséquent, un vecteur directeur de la droite Δ .

$M(x, y, z) \in \Delta$ équivaut à $\overrightarrow{IM} = t\vec{n}$ où t est un réel

équivaut à $\begin{cases} x - x_I = ta \\ y - y_I = tb \\ z - z_I = tc \end{cases}$ où t est un réel

équivaut à $\begin{cases} x = x_I + ta \\ y = y_I + tb \\ z = z_I + tc \end{cases}$ où t est un réel.

2. a) H est le point d'intersection de Δ et de P ; H appartient donc à la droite Δ . Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$.

b) D'après la question 1., $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ équivaut à $\begin{cases} x_H = x_I + ka \\ y_H = y_I + kb \\ z_H = z_I + kc \end{cases}$.

De plus, le point H appartenant au plan P , ses coordonnées doivent donc vérifier l'équation du plan.

Ainsi : $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$,

$a(x_I + ka) + b(y_I + kb) + c(z_I + kc) + d = 0$,

$k(a^2 + b^2 + c^2) + ax_I + by_I + cz_I + d = 0$,

$k = -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2}$, car, comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on a $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

c) D'après les questions précédentes, on sait que :

$$\overrightarrow{IH} = k\vec{n}, \text{ avec } k = -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

D'où, $IH = |k| \|\vec{n}\| = \left| -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

$$\text{soit } IH = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

car $|-x| = |x|$ pour tout réel x et $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

$$\text{Finalement : } IH = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Partie B

1. La sphère S a pour centre $\Omega(1 ; -1 ; 3)$ et le plan Q est d'équation $x - y + z - 11 = 0$.

Méthode : le rayon d'une sphère est égal à la distance entre le centre de la sphère et tout plan tangent à cette sphère.

Ici, le rayon R de la sphère vaut donc la distance entre le point Ω et le plan Q . En utilisant les résultats de la **partie A**, on en déduit que $R = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, avec Q

d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

On a $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = -11$,

$$\text{d'où } R = \frac{|1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 3 - 11|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

2. On utilise le résultat de la question 1., **partie A**.

$M(x, y, z) \in \Delta$ équivaut à $\overrightarrow{\Omega M} = t\vec{n}$ où t est un réel et $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur normal à Q

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = x_\Omega + ta \\ y = y_\Omega + tb \\ z = z_\Omega + tc \end{cases} \text{ où } t \text{ est un réel}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ où } t \text{ est un réel.}$$

3. Soit H , le point d'intersection de S et de Q . H est également le point d'intersection entre Q et la droite Δ .

En utilisant la question 2. **b)** de la **partie A**, on peut affirmer que $\begin{cases} x_H = x_\Omega + ka \\ y_H = y_\Omega + kb \\ z_H = z_\Omega + kc, \end{cases}$

$$\text{avec } k = -\frac{ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\text{On en déduit que : } k = -\frac{1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 3 - 11}{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$\text{Puis : } \begin{cases} x_H = x_\Omega + ka = 1 + 2 \times 1 = 3 \\ y_H = y_\Omega + kb = -1 + 2 \times (-1) = -3 \\ z_H = z_\Omega + kc = 3 + 2 \times 1 = 5. \end{cases}$$

Le point H a donc pour coordonnées : $(3 ; -3 ; 5)$.

EXERCICE 4

Partie A

1.

Rappel de cours : u est une fonction dérivable sur un intervalle I et $u(x) > 0$ sur I ; alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I , de dérivée $\frac{u'}{u}$.

f dérivable sur $[0; +\infty[$ et strictement positive sur $[0; +\infty[$; g est donc définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\text{On a } g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20} \Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{20} \ln(f(t)) - \frac{3}{20} = -\frac{1}{20} (3 - \ln(f(t)))$$

$$\Leftrightarrow f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)(3 - \ln(f(t))),$$

car $f(t) > 0$, pour tout t de $[0; +\infty[$.

2.

Rappel de cours : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$, a et b réels et $a \neq 0$, sont de la forme :

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

$$\text{On a : (H) } z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}.$$

$$\text{Les solutions sont donc de la forme : } z(t) = Ce^{\frac{1}{20}t} - \frac{-\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}} = Ce^{\frac{1}{20}t} + 3.$$

3. D'après la question A.1., on a, pour tout t de $[0; +\infty[$:

$$g(t) = Ce^{\frac{1}{20}t} + 3 \Leftrightarrow \ln(f(t)) = Ce^{\frac{1}{20}t} + 3$$

$$\Leftrightarrow f(t) = \exp(Ce^{\frac{1}{20}t} + 3),$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. a)

Rappel de cours : **théorème des limites des fonctions composées**

Soient f, g deux fonctions et a, b, c désignant des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

On a $\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{20} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{20}t} = +\infty$,
d'après le théorème sur les limites des fonctions composées.

Ainsi, $\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} 3 - 3e^{\frac{1}{20}t} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\}$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(3 - 3e^{\frac{1}{20}t}) = 0$, d'après le théorème sur
les limites des fonctions composées.

b) • $t \mapsto \frac{t}{20}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$; par suite, $t \mapsto e^{\frac{1}{20}t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de deux fonctions de même sens de variation.

• $x \mapsto 3 - 3x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$; ainsi, $t \mapsto 3 - 3e^{\frac{1}{20}t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de deux fonctions de sens de variations contraires.

En conclusion, **f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$** comme composée de deux fonctions de sens de variation contraires.

c. Résolvons $f(t) < 0,02$; on a :

$$\exp(3 - 3e^{\frac{1}{20}t}) < 0,02$$

$$3 - 3e^{\frac{1}{20}t} < \ln(0,02) \quad \text{car la fonction logarithme est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$-3e^{\frac{1}{20}t} < \ln(0,02) - 3$$

$$e^{\frac{1}{20}t} > \frac{\ln(0,02) - 3}{-3}$$

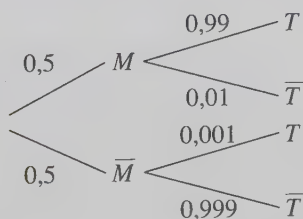
$$e^{\frac{1}{20}t} > \frac{3 - \ln(0,02)}{3}$$

$$\frac{1}{20}t > \ln\left(\frac{3 - \ln(0,02)}{3}\right) \quad \text{car la fonction logarithme est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$t > 20 \ln\left(\frac{3 - \ln(0,02)}{3}\right) = 20 \ln\left(1 - \frac{\ln(0,02)}{3}\right) \approx 16,69.$$

C'est au bout de 17 ans que la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus.

Partie B



1. On a :

- $P(M) = \frac{1}{2}$, car la population testée comporte 50 % d'animaux malades ;
- $P_M(T) = 0,99$, car, si l'animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ;
- $P_{\bar{M}}(T) = 0,001$, car, si l'animal est sain, le test est positif dans 0,1 % des cas.

2.

Rappel de cours : formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ formant une partition de l'univers. Soit A un événement.

On a alors $p(A) = p(A_1 \cap A) + p(A_2 \cap A) + \dots + p(A_n \cap A)$.

M et $\bar{M}$ forment une partition de l'univers. On a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) = P_M(T) \times P(M) + P_{\bar{M}}(T) \times P(\bar{M}) \\ &= 0,99 \times 0,5 + 0,001 \times 0,5 = 0,4955. \end{aligned}$$

$$3. \text{ On a } P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P_M(T) \times P(M)}{P(T)} = \frac{0,99 \times 0,5}{0,4955} \approx 0,99899 < 0,999.$$

On en conclut que ce test n'est pas fiable.

France métropolitaine

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 1 h 20 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 40 min.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Analyse – Fonction exponentielle, Equations différentielles (7 points)

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α .

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

5. Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 f(x) dx$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, associe $y(t)$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0; +\infty[$, vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E') \quad y' + \frac{1}{2}y = 0.$$

b) Résoudre l'équation différentielle (E').

c) Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ , en degrés Celsius, de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

Calculer la valeur exacte de θ , puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

Corrige page 307

EXERCICE 2 Nombres complexes – Analyse (5 points)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Aucune justification n'est demandée.

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :

A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i$.

C : $z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3}$.

B : $z^{14} = 64 - 64i$.

D : $z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}$.

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe $4i$. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3| = |3 - 4i|$.

A : (E) est la médiatrice du segment $[ST]$.

B : (E) est la droite (ST) .

C : (E) est le cercle de centre Ω , d'affixe $3 - 4i$, et de rayon 3.

D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\vec{AC} \cdot \vec{CF}$ est égal à :

A : $\sqrt{3}$.

B : -3 .

C : $-\sqrt{3}$.

D : $\frac{3}{2}$.

4. Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 3}$; soit

Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.

A : Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.

B : Γ n'admet pas d'asymptote.

C : Γ admet une asymptote d'équation $y = x$.

D : Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. La fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f sur $\mathbb{R}$, est définie par :

A : $f''(x) = \int_0^x -2te^{-t^2} dt$.

C : $f''(x) = -2xe^{-x^2}$.

B : $f''(x) = \int_0^x -2xe^{-x^2} dx$.

D : $f''(x) = e^{-x^2}$.

Corrigé page 310

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Arithmétique, Similitudes (5 points)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0$ (modulo 6).

A : Toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : Il n'y a aucune solution.

C : Les solutions vérifient $x \equiv 2$ (modulo 6).

D : Les solutions vérifient $x \equiv 2$ (modulo 6) ou $x \equiv 5$ (modulo 6).

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x; y) = (34k - 7; 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x; y) = (17k - 7; 5 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x; y) = (-7k; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 1\,789^{2\,005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4$ (modulo 17) et $p \equiv 0$ (modulo 17).

B : p est un nombre premier.

C : $p \equiv 4$ (modulo 17).

D : $p \equiv 1$ (modulo 17).

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b . Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si, et seulement si, le point M d'affixe z est tel que :

$$\text{A : } z = \frac{b - ia}{1 - i}.$$

$$\text{C : } a - z = i(b - z).$$

$$\text{B : } z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a).$$

$$\text{D : } b - z = \frac{\pi}{2}(a - z).$$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$.

Soit f la similitude directe de centre A , de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$;

soit g la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$;

soit h la symétrie centrale de centre I .

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Corrigé page 312

EXERCICE 3 Géométrie dans l'espace – Barycentre (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(1; -2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2; 1; 5)$ et le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

b) Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $C(-1; 4; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 1)$.

c) Soit le point $A(5; -2; -1)$.

Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$, puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.

d) Déterminer la distance du point A à la droite Δ .

2. a) Soit, pour tout nombre réel t , le point M_t de coordonnées $(1 + 2t; 3 - t; t)$.

Déterminer, en fonction de t , la longueur AM_t .

On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.

c) Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

Corrigé page 314

EXERCICE 4 Probabilités – Loi de probabilité (3 points)

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré. Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer, on note la couleur de la face cachée.

On considère les événements suivants :

E est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
 F est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des événements E et F , ainsi que la probabilité de E sachant F .

2. On effectue dix parties identiques et indépendantes.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré.

Pour cela, on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 156 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face i est cachée ; on obtient les résultats suivants :

Face i	1	2	3	4
Effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i

et d_{obs}^2 le réel $\sum_{i=1}^4 \left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$.

On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 156 fois parmi l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule

$d^2 = \sum_{i=1}^4 \left(F_i - \frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i .

Le 9^e décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,009 8.

Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

Corrigé page 316

Corrigés

EXERCICE 1

Partie A

1.

Rappel de cours : théorème des limites de fonctions composéesSoient f, g deux fonctions et a, b, c désignant des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

$$\text{On a } f(x) = 20xe^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x} = 40 \frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}} + 10e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{array} \right\}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x} = +\infty$$

(d'après le théorème sur les limites de fonctions composées).

$$\text{Puis : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 40 \frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}} = 0 \text{ (par passage à l'inverse).}$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} 10e^{-\frac{1}{2}x} = 0, \text{ on en déduit que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2.

- Dérivation du produit de deux fonctions : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Dérivée de la fonction e^u : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , alors e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

La fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$; par suite, $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.

$$\text{On a } f'(x) = 20e^{-\frac{1}{2}x} + (20x + 10) \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} = (-10x + 15)e^{-\frac{1}{2}x} = 5(3 - 2x)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Comme $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, le signe $f'(x)$ ne dépend que du signe de $3 - 2x$.

Dès lors, sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$ et, sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$, $f'(x) \leq 0$.

La fonction f est, en conséquence, croissante sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$.

Elle admet donc un maximum en $x = \frac{3}{2}$ valant $f\left(\frac{3}{2}\right) = 40e^{-\frac{3}{4}} \approx 18,9$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	10	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	0

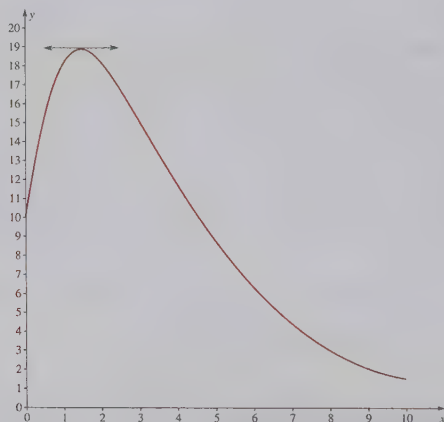
3. La fonction f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ et $f(0) = 10$. Ainsi, on a $f(x) > 10$ pour tout $x \in \left]0; \frac{3}{2}\right[$ et l'équation $f(x) = 10$ n'admet donc pas de solution sur $\left]0; \frac{3}{2}\right[$.

La fonction f est continue et strictement décroissante de $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ dans $\left]0; f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$ avec $10 \in \left]0; f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$. Par suite, l'équation admet une unique solution α dans $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

On en déduit que l'équation admet une unique solution α strictement positive dans $]0; +\infty[$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de α est 4,673.

4. Tracé de la courbe (échelle 1/2) :



5.

Méthode : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$ telles que u' et v' le sont aussi. On a alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Posons :

$$u(x) = 20x + 10 \quad \text{d'où } u'(x) = 20,$$

$$v'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{d'où } v(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} \text{ (à une constante près),}$$

où u , v , u' et v' sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

Intégrons par parties :

$$I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 u(x) v'(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_0^3 - \int_0^3 u'(x) v(x) dx$$

$$I = \left[-2(20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^3 + 40 \int_0^3 e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$$I = -140e^{-\frac{3}{2}} + 20 + 40 \left[-2e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^3$$

$$I = -140e^{-\frac{3}{2}} + 20 - 80e^{-\frac{3}{2}} + 80 = -220e^{-\frac{3}{2}} + 100$$

$$I = 20 \left(5 - 11e^{-\frac{3}{2}} \right)$$

Partie B

1. D'après la question A.2., on sait que $f'(x) = 5(3 - 2x)e^{-\frac{1}{2}x}$. On a :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 5(3 - 2t)e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}(20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t} = (15 - 10t + 10t + 5)e^{-\frac{1}{2}t} = 20e^{-\frac{1}{2}t}.$$

On en conclut que f est bien solution de (E) sur $[0 ; +\infty[$.

2. a) La fonction g est solution de l'équation (E) ; dès lors, $g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = 20e^{-\frac{1}{2}t}$, pour tout réel t .

De même, la fonction f est solution de l'équation (E) ; donc $f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 20e^{-\frac{1}{2}t}$, pour tout réel t .

En soustrayant membre à membre les deux relations, on obtient :

$$g'(t) - f'(t) + \frac{1}{2}g(t) - \frac{1}{2}f(t) = 0, \text{ pour tout réel } t.$$

$$\text{Puis : } (g - f)'(t) + \frac{1}{2}(g - f)(t) = 0, \text{ pour tout réel } t.$$

Ainsi, on a démontré que la fonction $g - f$ est solution de l'équation (E') : $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

b)

Rappel de cours : les solutions d'une équation différentielle $y' = ay$, avec a réel, sont de la forme $y(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

L'équation (E') peut se mettre sous la forme $y' = -\frac{1}{2}y$. Par suite, ses solutions sont les

fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par $y(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}$, avec C constante réelle.

c) D'après la question a), on sait que $g - f$ est solution de l'équation (E') ; on obtient donc, en utilisant la question précédente, $g(x) - f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}$, avec C constante réelle. Or, on a $g(0) = 10$ et $f(0) = 10$ d'après la partie A ; ainsi, si on applique la formule $g(x) - f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}$ en $x = 0$, on obtient $g(0) - f(0) = C$, puis $C = 0$.

On en déduit que $f(x) = g(x)$, pour tout réel x dans $[0 ; +\infty[$.

On a ainsi démontré que f est l'unique solution de l'équation différentielle (E) sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant $f(0) = 10$.

3. La température de la réaction chimique est donnée par la fonction f .

La valeur initiale, de la température correspond donc à $f(0) = 10$. D'après A.3., la température redescend à sa valeur initiale, donc à 10, après un temps $t = \alpha \approx 4,673$ heures, c'est-à-dire après 4 heures et 40 minutes environ.

4.

Rappel de cours : la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a ; b]$ est le réel donné par $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ si f est intégrable.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$ est $\theta = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t)dt$.

En utilisant le calcul effectué en A.5., on obtient $\theta = \frac{20}{3} \left(5 - 11e^{-\frac{3}{2}} \right)$ degrés Celsius. Soit $\theta \approx 17^\circ\text{C}$.

EXERCICE 2

Méthode : cet exercice est un Q.C.M. dans lequel il est précisé que, pour chaque question, il n'existe qu'une bonne réponse. Par conséquent, on peut raisonner soit de manière directe, en faisant le calcul, soit par élimination des mauvaises réponses.

1. Réponse : C.

Démonstration :

On a $z = \sqrt{2} e^{i\pi/3}$,

d'où : $z^{14} = (\sqrt{2} e^{i\pi/3})^{14} = (\sqrt{2})^{14} (e^{i\pi/3})^{14} = 128 e^{14i\pi/3} = 128 e^{2i\pi/3}$,

car $\frac{14\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$,

donc : $z^{14} = 128 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -64 + 64i\sqrt{3}$.

2. Réponse : D.

Démonstration :

$$|z-3| = |3-4i| \Leftrightarrow SM = |3-4i| \quad \text{car } SM = |z_M - z_S| = |z-3|$$

$$\Leftrightarrow SM = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Finalement, (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3. Réponse : B.

Démonstration :

Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O, alors les triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OAF sont équilatéraux de côté 1.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CF} = -2 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{car } \begin{cases} \overrightarrow{CF} = -2 \overrightarrow{AB} \\ (a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CF} = -2[(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{AB}] \quad \text{d'après la relation de Chasles}$$

$$= -2[\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}] \quad \text{car } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$= -2\left(AO \times AB \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + AB^2\right) \quad \text{car } \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$$= -2\left(\frac{1}{2} + 1\right) \quad \text{car } \begin{cases} OA = AB = 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= -3$$

4. Réponse : A.

Démonstration :

Méthode : on étudie la limite de la fonction g en $-\infty$.

Rappel de cours : soient f, g deux fonctions et a, b, c désignant des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

$$\text{On a } g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x-3} = \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{-x \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)}, \text{ car } |x| = -x \text{ pour } x \leq 0$$

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1 \end{array} \right\} \text{, donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = 1.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1$, d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{1 - \frac{3}{x}} = -1$.

Ainsi, Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $-\infty$.

Autre méthode : en utilisant la calculatrice, on pouvait deviner l'asymptote en traçant Γ et les droites d'équations $y = x$, $y = -1$ et $y = 1$.

5. Réponse : C.

Démonstration :

Méthode : dérivée de la fonction e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , alors e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

f est la primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ qui s'annule en 0.

Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{-x^2}$.

$x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Finalement, $f''(x) = -2x e^{-x^2}$.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

Méthode : comme le précédent, cet exercice est un Q.C.M. pour lequel il n'y a qu'une bonne réponse par question. On peut donc raisonner de manière directe (en faisant le calcul) ou par élimination des mauvaises réponses.

1. Réponse : D.

Démonstration :

• On a $2^2 - 2 + 4 = 6 \equiv 0 \pmod{6}$; par suite, 2 est solution de l'équation $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$.

En conséquence, la réponse B est éliminée.

• On a $5^2 - 5 + 4 = 24 = 6 \times 4 \equiv 0 \pmod{6}$; ainsi, 5 est solution de l'équation $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$.

Donc la réponse A est éliminée, car 5 n'est pas pair.

• De plus, $5 \not\equiv 2 \pmod{6}$; la réponse C est éliminée.

Il ne reste plus que la réponse D.

2. Réponse : C.

Démonstration :

Méthode : une vérification des solutions suffit, mais il faut être prudent, car la réponse C contient la réponse A.

On a $24(34k - 7) + 34(5 - 24k) = \cancel{816k} - 168 + 170 - \cancel{816k} = 2$, pour tout k de $\mathbb{Z}$.

Les solutions de la réponse A conviennent.

De même, $24(17k - 7) + 34(5 - 12k) = 408k - 168 + 170 - 408k = 2$, pour tout k de $\mathbb{Z}$.

Les solutions de la réponse C conviennent également.

On remarque alors que les solutions proposées en réponse A sont de la forme des solutions proposées en réponse C,

car $34k - 7 = 17(2k) - 7 = 17k' - 7$ et $5 - 24k = 5 - 12(2k) = 5 - 12k'$, avec $k' \in \mathbb{Z}$.
De plus, les solutions de la réponse D n'ont rien à voir avec celles de la réponse C.
La bonne réponse est finalement la réponse C, car c'est la plus générale.

3. Réponse : C.

Démonstration :

Méthode : on peut élever à la puissance n (avec n entier naturel non nul) les termes de part et d'autre d'une congruence :

$$\text{si } a \equiv b [p], \text{ alors } a^n \equiv b^n [p].$$

$$n = 1\,789 = 105 \times 17 + 4 \equiv 4 \pmod{17}$$

$$p = n^{2\,005} \equiv 4^{2\,005} \pmod{17}$$

$$p \equiv 4 \times 4^{2\,004} \pmod{17}$$

$$p \equiv 4 \times 16^{1\,002} \pmod{17}$$

$$p \equiv 4 \times (-1)^{1\,002} \pmod{17}$$

$$p \equiv 4 \pmod{17}$$

$$\text{car } 4^{2\,004} = (4^2)^{1\,002} = 16^{1\,002}$$

$$\text{car } 16 \equiv -1 \pmod{17}$$

4. Réponse : A.

Démonstration :

MAB est un triangle rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$

équivalent à MAB est rectangle direct isocèle en M ,

$$\text{équivalent à } \begin{cases} \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ MA = MB, \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \frac{b-z}{a-z} = i, \text{ car } i \text{ est le complexe de module } 1 \text{ et d'argument } \frac{\pi}{2},$$

$$\text{équivalent à } b - z = i(a - z),$$

$$\text{équivalent à } (i - 1)z = -b + ia,$$

$$\text{équivalent à } z = \frac{-b + ia}{i - 1} = \frac{b - ia}{1 - i}.$$

5. Réponse : D.

Démonstration :

Méthode : la composée de deux similitudes f et g de même centre A est encore une similitude de centre A dont le rapport est le produit des rapports de f et g et dont l'angle est la somme des angles des deux similitudes.

f est une similitude de centre A de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

g est une similitude de centre A de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Ainsi, $g \circ f$ est une similitude de centre A de rapport $2 \times \frac{1}{2} = 1$ et d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$.

Donc $g \circ f$ est une rotation de centre A et d'angle π .

De plus, h est une symétrie centrale de centre I . Par suite, h est une rotation de centre I et d'angle π .

En conséquence, $h \circ (g \circ f)$ est la composée de deux rotations d'angles respectifs π . Or, on a $\pi + \pi = 2\pi = 0 \pmod{2\pi}$. On en conclut que $h \circ (g \circ f)$ est une translation. Finalement, seule la réponse D convient.

EXERCICE 3

1. a)

Méthode : pour montrer que deux plans sont perpendiculaires, il suffit de montrer qu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

$\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{R}$ d'équation $x + 2y - 7 = 0$.

On a $\vec{n} \cdot \vec{n}' = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$.

On constate que les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux ; **les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont, en conséquence, perpendiculaires.**

b) Trouvons l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On sait que $\mathcal{P}$ est de la forme : $-2x + y + 5z + d = 0$.

Or, B appartient au plan $\mathcal{P}$; on a donc $-2 \times 1 + (-2) + 5 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$.

On obtient ainsi $\mathcal{P}$: $-2x + y + 5z - 1 = 0$.

De plus, Δ est l'intersection des plans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$, d'où :

$$\begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 5z + 1 \\ x + 2(2x - 5z + 1) - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 5z + 1 \\ x = 2z + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 3 \end{cases}$$

L'inconnue z pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle, on pose alors $z = t$.

$M(x; y; z)$ appartient à Δ équivaut à $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Un vecteur directeur de Δ est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, pour $t = -1$, on obtient $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = -1. \end{cases}$

Ainsi, Δ est la droite passant par le point de coordonnées $(-1; 4; -1)$, de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c)

Rappel de cours : dans un repère orthonormal, la distance du point $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est égale à :

$$\frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

• Calcul de la distance du point A au plan $\mathcal{P}$:

$$d_{\mathcal{P}} = \frac{|-2 \times 5 + (-2) + 5 \times (-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{3}{5}\sqrt{30}.$$

• Calcul de la distance du point A au plan $\mathcal{R}$:

$$d_{\mathcal{R}} = \frac{|5 + 2 \times (-2) - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}.$$

d) Soit $A_{\mathcal{P}}$ le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$, $A_{\mathcal{R}}$ le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{R}$ et A_{Δ} le projeté de A sur la droite Δ .

On obtient alors que le quadrilatère $AA_{\mathcal{P}}A_{\mathcal{R}}A_{\Delta}$ est un rectangle, car les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont orthogonaux et se coupent en Δ .

De plus, on a $AA_{\mathcal{P}} = d_{\mathcal{P}}$ et $A_{\mathcal{P}}A_{\Delta} = AA_{\mathcal{R}} = d_{\mathcal{R}}$.

Ainsi, le triangle $AA_{\mathcal{P}}A_{\Delta}$ est rectangle en $A_{\mathcal{P}}$; dès lors, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AA_{\Delta}^2 = AA_{\mathcal{P}}^2 + A_{\mathcal{P}}A_{\Delta}^2 = d_{\mathcal{P}}^2 + d_{\mathcal{R}}^2 = \left(\frac{3}{5}\sqrt{30}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\sqrt{5}\right)^2 = 18,$$

$$AA_{\Delta} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

En conclusion, la distance de A à la droite Δ est $3\sqrt{2}$.

2. a) On a $\overrightarrow{AM}_t = \begin{pmatrix} -4 + 2t \\ 5 - t \\ t + 1 \end{pmatrix},$

$$\text{donc } AM_t = \sqrt{(-4 + 2t)^2 + (5 - t)^2 + (t + 1)^2} = \sqrt{6t^2 - 24t + 42}.$$

b) La fonction $t \mapsto 6t^2 - 24t + 42$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme de degré 2.

$$6t^2 - 24t + 42 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ car } \Delta = 24^2 - 4 \times 6 \times 42 < 0.$$

Finalement, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculons sa dérivée. On a :

$$\varphi'(t) = \frac{12t - 24}{2\sqrt{6t^2 - 24t + 42}} = \frac{6t - 12}{\sqrt{6t^2 - 24t + 42}} = \frac{6(t - 2)}{\sqrt{6t^2 - 24t + 42}}$$

Or, $\sqrt{6t^2 - 24t + 42} > 0$ sur $\mathbb{R}$; le signe de $\varphi'(t)$ ne dépend donc que du signe de $t - 2$.

Par suite :

$$\varphi'(t) < 0, \text{ pour tout } t \text{ de }]-\infty ; 2[,$$

$$\varphi'(t) > 0, \text{ pour tout } t \text{ de }]2 ; +\infty[,$$

$$\varphi'(t) = 0, \text{ pour } t = 2.$$

On en conclut que φ est strictement décroissante sur $]-\infty ; 2[$ et strictement croissante sur $]2 ; +\infty[$.

$$\varphi \text{ admet un minimum en } 2 \text{ qui vaut } \varphi(2) = \sqrt{6 \times 2^2 - 24 \times 2 + 42} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

c) Les coordonnées de M_i vérifient la représentation paramétrique de Δ ; en conséquence, M_i appartient à la droite Δ . Ainsi, **la valeur minimale de φ représente la plus courte distance qui sépare le point A d'un point de la droite Δ : c'est donc la distance du point A à la droite Δ .**

EXERCICE 4

Partie A

1. On a une chance sur quatre pour que la couleur de la face cachée d'un dé soit verte.

Comme les deux lancers se font de manière indépendante, $P(E) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

L'événement F est la réunion de trois événements incompatibles : « les deux faces sont bleues », « les deux faces sont rouges » et « les deux faces sont vertes » (c'est-à-dire E).

$$\text{D'où } P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

L'événement E est contenu dans l'événement F . Donc :

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{6}.$$

2.

Méthode : loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A de probabilité p et $\bar{A}$ de probabilité $(1-p)$.

Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de réalisations de l'événement A suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

On a, de plus : $E(X) = np$.

Ici, on se trouve en présence d'un schéma de Bernoulli, avec $p = \frac{3}{8}$ et $n = 10$, en prenant

pour X le nombre de réalisations de l'événement F .

Calculons P' , la probabilité contraire à celle demandée, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir 0 ou 1 fois l'événement F au cours des 10 parties. On a :

$$P' = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} \left(\frac{3}{8}\right)^0 \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{10} + \binom{10}{1} \left(\frac{3}{8}\right)^1 \left(1 - \frac{3}{8}\right)^9$$

$$P' = \left(\frac{5}{8}\right)^{10} + 10 \times \frac{3}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^9 = \left(\frac{5}{8}\right)^9 \left(\frac{5}{8} + 10 \times \frac{3}{8}\right) = \left(\frac{5}{8}\right)^9 \times \frac{35}{8}$$

La probabilité demandée est donc $1 - \left(\frac{5}{8}\right)^9 \times \frac{35}{8} \approx 0,936$.

Partie B

Ajoutons une ligne au tableau de l'énoncé en déterminant les fréquences :

Face i	1	2	3	4
Effectif n_i	30	48	46	32
Fréquence f_i	0,192	0,308	0,295	0,205

On peut ainsi calculer :

$$d_{\text{obs}}^2 = \sum_{i=1}^4 \left(f_i - \frac{1}{4} \right)^2 = \left(0,192 - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(0,308 - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(0,295 - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(0,205 - \frac{1}{4} \right)^2$$

$$\approx 0,0108.$$

Le neuvième décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098. Cela signifie que 90 % des valeurs de d^2 obtenues au cours des 1 000 simulations se trouvent dans l'intervalle $[0 ; 0,0098]$.

Or, la valeur de d_{obs}^2 n'appartient pas à cet intervalle. **On peut donc en conclure qu'au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, le dé n'est pas parfaitement équilibré.**

France métropolitaine

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 45 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 1 h 15 min.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Analyse – Suites (4 points)

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

- (1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
- (2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$;
- (3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite. »

Partie B

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

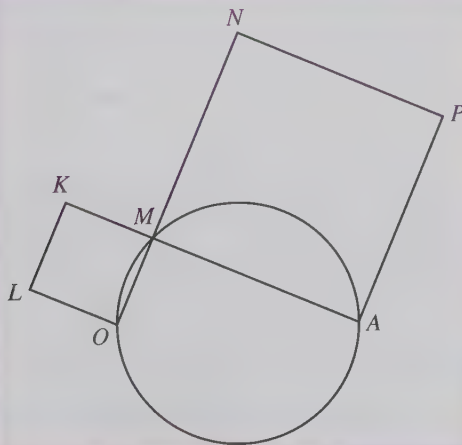
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une

démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1 .
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Corrige page 322

EXERCICE 2 Nombres complexes – Transformations géométriques (5 points)



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[OA]$, un point M variable appartenant au cercle $\mathcal{C}$ et distinct des points O et A , ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1 .

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P .

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathcal{C}$, on a :

$$\left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

2. Établir les relations suivantes : $l = im$ et $p = -im + 1 + i$. On admettra que l'on a également $n = (1 - i)m + i$ et $k = (1 + i)m$.

3. a) Démontrer que le milieu Ω du segment $[PL]$ est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathcal{C}$.

b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathcal{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.

4. a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M , dont on déterminera le centre et le rayon.

Corrigé page 324

EXERCICE 3 Probabilités – Conditionnement, Loi de probabilité (5 points)

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

2. Un second jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.

On considère les événements suivants :

C_1 : « l'enfant choisit la boîte cubique »,

C_2 : « l'enfant choisit la boîte cylindrique »,

R : « l'enfant prend une bille rouge »,

V : « l'enfant prend une bille verte ».

a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce second jeu.

- b) Calculer la probabilité de l'événement R .
- c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
3. L'enfant reproduit n fois de suite son second jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
- a) Exprimer, en fonction de n , la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
- b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,99$.

Corrigé page 326

EXERCICE 4 Analyse – Fonction exponentielle, Équations différentielles (6 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.

- a) Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.
- b) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- c) Étudier les variations de la fonction f .

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t , est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle $(E_1) \quad y' = \frac{y}{4}$.

- a) Résoudre l'équation différentielle (E_1) .
- b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
- c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note

$u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12}, \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u .

a) On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4} h(t) + \frac{1}{12}, \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h .

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h , puis celle de la fonction u .

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Corrige page 340

Corrigés

EXERCICE 1

Partie A : question de cours

Méthode : c'est une question de cours dont la démonstration a dû être vue en classe. Elle se fait en deux temps :

- on montre la convergence des deux suites ;
- on montre que ces limites sont identiques.

Posons (u_n) et (v_n) , deux suites adjacentes telles que la suite (u_n) soit croissante et la suite (v_n) soit décroissante.

D'après la propriété (2), on obtient que $u_n \leq v_n$, pour tout entier naturel n .

Or, on a $\begin{cases} u_0 \leq u_n \\ v_n \leq v_0 \end{cases}$

car $\begin{cases} \text{la suite } (u_n) \text{ est croissante, donc } u_n \leq u_{n+1}, \text{ pour tout entier naturel } n; \\ \text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante, donc } v_{n+1} \leq v_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

On en déduit que $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$, pour tout entier naturel n .

Par conséquent, la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 et la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 .

On en conclut, d'après la propriété (3), que **les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.**

Comme les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, on a donc démontré l'existence de deux réels l et l' tels que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ d'après la propriété (1).

Ainsi, $l - l' = 0$, puis $l = l'$.

Finalement, **les deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.**

Partie B

Méthode : cette question est un « vrai - faux » qu'il faut justifier à chaque étape.

1. Réponse : Faux. On cherche donc un contre-exemple.

Posons $u_n = \frac{1}{n}$, pour tout entier $n \geq 1$. On a bien $u_n \neq 0$, pour tout entier $n \geq 1$.

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Finalement, **la suite (v_n) diverge, alors que la suite (u_n) converge.**

2. Réponse : Vrai. On en fait la démonstration.

(u_n) est minorée par 2. On a successivement :

$2 \leq u_n$, pour tout entier naturel n

$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n}$ car $\begin{cases} \text{la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ u_n > 0 \text{ (car minorée par 2), pour tout entier naturel } n \end{cases}$

$$-\frac{2}{u_n} \geq -2 \times \frac{1}{2}$$

$$v_n \geq -1.$$

Par conséquent, **la suite (v_n) est bien minorée par -1 .**

3. Réponse : Faux. On cherche à nouveau un contre-exemple.

Reprenons la même suite qu'à la question 1.

Posons $u_n = \frac{1}{n}$, pour tout entier $n \geq 1$. On a bien $u_n \neq 0$, pour tout entier $n \geq 1$.

La suite (u_n) est décroissante.

$$\text{Or, } v_n = -\frac{2}{u_n} = -2n = f(n), \text{ où } f(x) = -2x.$$

f est une fonction affine de coefficient directeur -2 , donc négatif. Par suite, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On en conclut que (v_n) est une suite décroissante.

4. Réponse : Faux. On cherche encore un contre-exemple.

Posons $u_n = (-1)^n$, pour tout entier $n \geq 0$. On a bien $u_n \neq 0$, pour tout entier $n \geq 0$.

La suite (u_n) diverge, car elle n'a pas de limite en $+\infty$.

$$\text{Or, } v_n = -\frac{2}{u_n} = -2 \times (-1)^n.$$

Ainsi, la suite (v_n) n'admet pas de limite en $+\infty$ et elle ne peut donc pas converger vers 0.

EXERCICE 2

1.

Méthode : on cherche l'abscisse du centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

Soit I , d'abscisse z_I , le centre du cercle $\mathcal{C}$. I est, par conséquent, le milieu de $[OA]$.

$$\text{Par suite, } z_I = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

De plus, le rayon de $\mathcal{C}$ vaut $\frac{1}{2}$ puisque son diamètre vaut 1.

M , distinct de O et A , appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $IM = \frac{1}{2}$,

$$\text{si, et seulement si, } |m - z_I| = \frac{1}{2},$$

$$\text{si, et seulement si, } \left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

2.

Méthode :

- On utilise les propriétés des carrés : en particulier, les rotations intérieures.

- Si M' , d'abscisse z' , est l'image de M , d'abscisse z , par la rotation de centre I , d'abscisse z_I , et d'angle θ , alors : $z' - z_I = e^{i\theta} (z - z_I)$.

- Soit r , la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. L est alors l'image de M par r , car $MKLO$

est un carré de sens direct.

Ainsi, $L = r(M)$.

$$l - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times (m - 0)$$

$$l = im \quad \text{car } e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

- Soit r' , la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. P est alors l'image de M par r' , car

$MAPN$ est un carré de sens direct.

Ainsi, $P = r'(M)$.

$$p - 1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m - 1)$$

$$p - 1 = -i(m - 1)$$

$$p = -im + 1 + i$$

$$\text{car } e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

3. a) Ω est le milieu de $[PL]$.

$$\text{Donc : } z_{\Omega} = \frac{p + l}{2} = \frac{-im - im + 1 + i}{2} = \frac{1 + i}{2}, \text{ indépendant de } m.$$

Finalement, Ω est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathcal{C}$.

b)

Méthode : Ω appartient à $\mathcal{C}$ équivaut à $|\Omega| = \frac{1}{2}$. Donc, on va calculer $I\Omega$.

$$\bullet I\Omega = |z_{\Omega} - z_I| = \left| \frac{1 + i}{2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{i}{2} \right| = \frac{|i|}{|2|} = \frac{1}{2}, \text{ car } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \text{ pour tous complexes } z \text{ et } z' \text{ tel que } z' \neq 0.$$

En conséquence, Ω appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$. Ainsi, Ω appartient à $\mathcal{C}$.

• Comme $z_{\Omega} = \frac{1 + i}{2}$, on peut en déduire, d'une part, que le point Ω appartient à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ qui est la médiatrice de $[OA]$ et, d'autre part, que l'ordonnée du point

Ω est positive.

En conclusion, Ω est le point d'intersection entre $\mathcal{C}$ et la médiatrice de $[OA]$ se situant dans la moitié supérieure du cercle $\mathcal{C}$.

$$4. a) KN = |n - k| = |(1 - i)m + i - (1 + i)m|$$

$$KN = |-2im + i| = |i(1 - 2m)|$$

$$KN = |i| \times |1 - 2m|$$

$$\text{car } |z \times z'| = |z| \times |z'|, \text{ pour tous } z \text{ et } z' \text{ complexes}$$

$$KN = |-2| \times \left| m - \frac{1}{2} \right| = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad \text{car } \begin{cases} |-2| = 2 \text{ et } |i| = 1 \\ \left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \text{ d'après la question 1.} \end{cases}$$

Donc, $KN = 1$.

Finalement, on peut affirmer que la distance KN est constante.

b)

Méthode : d'après le dessin, on peut conjecturer que le triangle ΩNK est un triangle isocèle rectangle en Ω . Cette conjecture nous donne l'idée de calculer le quotient : $\frac{z_{\Omega} - k}{z_{\Omega} - n}$.

Calculons le quotient $\frac{z_{\Omega} - k}{z_{\Omega} - n}$. On a :

$$\frac{z_{\Omega} - k}{z_{\Omega} - n} = \frac{\frac{1+i}{2} - (1+i)m}{\frac{1+i}{2} - (1-i)m - i} = \frac{1+i-2m-2im}{1+i-2m+2im-2i} = \frac{1-2m+i(1-2m)}{1-2m-i(1-2m)}$$

$$\frac{z_{\Omega} - k}{z_{\Omega} - n} = \frac{(1-2m)(1+i)}{(1-2m)(1-i)} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

Ainsi, $\left| \frac{z_{\Omega} - k}{z_{\Omega} - n} \right| = |i| = 1$.

D'où : $\frac{|z_{\Omega} - k|}{|z_{\Omega} - n|} = 1$, car $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$, pour tous complexes z et z' tel que $z' \neq 0$.

$\frac{K\Omega}{N\Omega} = 1$ équivaut à $\Omega K = \Omega N$.

Par suite, le triangle ΩNK est isocèle en Ω .

De plus, $\arg\left(\frac{z_{\Omega} - k}{z_{\Omega} - n}\right) = \arg(i) \pmod{2\pi}$

$$= \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Donc, $\text{mes}(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega K}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, car $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = \text{mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi}$.

Ainsi, le triangle ΩNK est rectangle en Ω .

En conclusion, le triangle ΩNK est isocèle rectangle en Ω .

5.

Méthode : en faisant plusieurs dessins avec différentes positions du point M sur le cercle $\mathcal{C}$, on peut conjecturer que N est sur un cercle de centre Ω . Ainsi, il suffit de montrer que ΩN est constant.

$\Omega N = |z_{\Omega} - n| = |(1-2m)(1-i)|$ d'après les calculs de la question 4. b)

$$= |1-2m| \times |1-i|$$

$$= |-2| \times \left| m - \frac{1}{2} \right| \times |1-i|$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2} \quad \text{car } \left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \text{ d'après la question 1.}$$

$$= \sqrt{2}$$

Par conséquent, ΩN est constant.

Finalement, N appartient au cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{2}$.

EXERCICE 3

1. a) Dans la boîte cubique, il y a 10 billes rouges et 3 vertes.

Ainsi, lors d'un tirage, on peut tirer, soit 0 boule rouge, soit 1 boule rouge, soit 2 boules rouges, soit 3 boules rouges.

Par suite, $\Omega(X) = \{0; 1; 2; 3\}$.

Posons p_i , la probabilité associée à la valeur i , pour tout $i \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Le nombre de façons de tirer simultanément 3 billes parmi les 13 de la boîte cubique est :

$$\binom{13}{3} = \frac{13!}{10! 3!} = \frac{11 \times 12 \times 13}{6} = 286.$$

• $\binom{10}{0}$ est le nombre de façons de tirer 0 bille rouge parmi les 10 de la boîte cubique.

$\binom{3}{3}$ est le nombre de façons de tirer 3 billes vertes parmi les 3 de la boîte cubique.

Ainsi, le nombre de façons de tirer 0 boule rouge est de : $\binom{10}{0} \times \binom{3}{3} = 1$.

D'où : $p_0 = \frac{1}{286} \approx 0,003$ à 10^{-3} près.

• $\binom{10}{1}$ est le nombre de façons de tirer 1 bille rouge parmi les 10 de la boîte cubique.

$\binom{3}{2}$ est le nombre de façons de tirer 2 billes vertes parmi les 3 de la boîte cubique.

Ainsi, le nombre de façons de tirer 1 boule rouge est de :

$$\binom{10}{1} \times \binom{3}{2} = \frac{10!}{9! 1!} \times \frac{3!}{2! 1!} = 30.$$

D'où : $p_1 = \frac{30}{286} = \frac{15}{143} \approx 0,105$ à 10^{-3} près.

• $\binom{10}{2}$ est le nombre de façons de tirer 2 billes rouges parmi les 10 de la boîte cubique.

$\binom{3}{1}$ est le nombre de façons de tirer 1 bille verte parmi les 3 de la boîte cubique.

Ainsi, le nombre de façons de tirer 2 boules rouges est de :

$$\binom{10}{2} \times \binom{3}{1} = \frac{10!}{8! 2!} \times \frac{3!}{2! 1!} = 135.$$

D'où : $p_2 = \frac{135}{286} \approx 0,472$ à 10^{-3} près.

• $\binom{10}{3}$ est le nombre de façons de tirer 3 billes rouges parmi les 10 de la boîte cubique.

$\binom{3}{0}$ est le nombre de façons de tirer 0 bille verte parmi les 3 de la boîte cubique.

Ainsi, le nombre de façons de tirer 3 boules rouges est de :

$$\binom{10}{3} \times \binom{3}{0} = \frac{10!}{7! 3!} \times 1 = 120.$$

D'où : $p_3 = \frac{120}{286} = \frac{60}{143} \approx 0,420$ à 10^{-3} près.

On obtient finalement la loi de probabilité suivante :

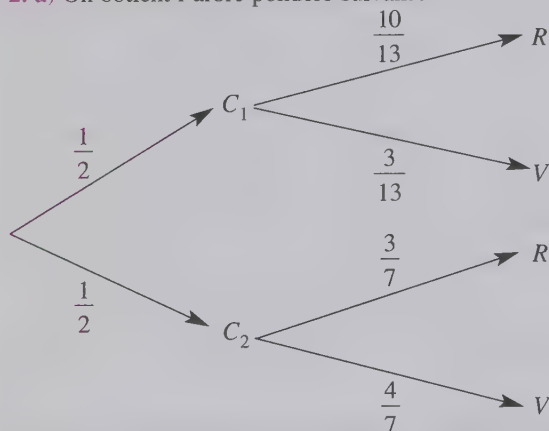
x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{286}$	$\frac{15}{143}$	$\frac{135}{286}$	$\frac{60}{143}$

Remarque : on peut vérifier que la somme des probabilités obtenues vaut bien 1.

$$\text{b) } E(X) = \sum_{i=0}^3 p_i x_i = 0 \times \frac{1}{286} + 1 \times \frac{15}{143} + 2 \times \frac{135}{286} + 3 \times \frac{60}{286} = \frac{240}{143}$$

$E(X) \approx 1,678$ à 10^{-3} près.

2. a) On obtient l'arbre pondéré suivant :



En effet :

$$p(C_1) = p(C_2) = \frac{1}{2}$$

car il y a deux boîtes et on choisit l'une des deux au hasard ;

$$p_{C_1}(R) = \frac{10}{13} \approx 0,769 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

car, dans la boîte cubique, il y a 10 boules rouges sur 13 ;

$$p_{C_1}(V) = 1 - p_{C_1}(R) = \frac{3}{13} \approx 0,231 \text{ à } 10^{-3} \text{ près ;}$$

$$p_{C_2}(R) = \frac{3}{7} \approx 0,429 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

car, dans la boîte cylindrique, il y a 3 boules rouges sur 7 ;

$$p_{C_2}(V) = 1 - p_{C_2}(R) = \frac{4}{7} \approx 0,571 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

b)

Rappel de cours : formule des probabilités totales

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ formant une partition de l'univers. Soit A un événement ; on a :

$$p(A) = p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A) + \dots + p(B_n \cap A).$$

C_1 et C_2 forment une partition de l'univers formé par les 20 billes.

$$\begin{aligned} \text{On a donc } p(R) &= p(C_1 \cap R) + p(C_2 \cap R) \\ &= p_{C_1}(R) \times p(C_1) + p_{C_2}(R) \times p(C_2) \\ &= \frac{10}{13} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{109}{182} \approx 0,599 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.} \end{aligned}$$

c) On cherche à calculer ici la probabilité conditionnelle $p_R(C_1)$:

$$p_R(C_1) = \frac{p(C_1 \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{10}{13} \times \frac{1}{2}}{\frac{109}{182}} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{109}{182}} = \frac{5}{13} \times \frac{182}{109} = \frac{70}{109} \approx 0,642 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

3. a)

Rappel de cours : loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A , de probabilité p , et $\bar{A}$, de probabilité $(1 - p)$. Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de réalisations de l'événement A suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

L'exercice peut se modéliser suivant une loi binomiale de paramètres n et

$$p = p(R) = \frac{109}{182}.$$

On va calculer la probabilité de ne tirer aucune boule rouge au cours des n tirages. On a donc :

$$p(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1 - p)^{n-0} = \left(1 - \frac{109}{182}\right)^n = \left(\frac{73}{109}\right)^n;$$

$$\text{soit, } p_n = 1 - \left(\frac{73}{109}\right)^n.$$

b) On recherche n tel que $p_n \geq 0,99$.

$$p_n \geq 0,99$$

$$1 - \left(\frac{73}{109}\right)^n \geq 0,99$$

$$\left(\frac{73}{109}\right)^n \leq 0,01$$

$$n \ln \left(\frac{73}{109}\right) \leq \ln(0,01) \quad \text{car } \begin{cases} \text{la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \ln a^n = n \ln a, \text{ pour tout } a \text{ de } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

$$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln \left(\frac{73}{109}\right)} \quad \text{car } 0 < \frac{73}{109} < 1, \text{ donc } \ln \left(\frac{73}{109}\right) < 0$$

Or, $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{73}{109}\right)} \approx 11,487$ à 10^{-3} près.

En conclusion, à partir de $n = 12$, on aura $p_n \geq 0,99$.

EXERCICE 4

Partie A

a) $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}} = \frac{e^{\frac{x}{4}} \times 3}{e^{\frac{x}{4}} \times \left(2e^{-\frac{x}{4}} + 1\right)} = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}.$

b)

Rappel de cours : soient f et g deux fonctions; a, b, c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\} \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

• $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{4}} = 0$ d'après le théorème sur les limites des fonctions composées

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 2e^{-\frac{x}{4}} = 1.$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$

• $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{4} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{4}} = +\infty$ d'après le théorème sur les limites des fonctions composées

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + 2e^{-\frac{x}{4}} = +\infty.$

Finalement, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$

c)

Méthode : on peut étudier ce sens de variation de manière classique, c'est-à-dire :

- étudier la dérivabilité,
- calculer la dérivée f' ,
- étudier le signe de la dérivée,
- et en déduire les variations de la fonction.

Mais ici, on peut déterminer les variations directement grâce aux théorèmes sur les fonctions associées.

$x \mapsto -\frac{x}{4}$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine dont le coefficient directeur est négatif.

$x \mapsto e^{-\frac{x}{4}}$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions de sens de variations contraires.

$x \mapsto 2e^{-\frac{x}{4}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ par un réel positif.

$x \mapsto 1 + 2e^{-\frac{x}{4}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, car la courbe de cette fonction se déduit de la précédente par translation de vecteur $\vec{j}$; elles ont donc même sens de variation ;

de plus, $1 + 2e^{-\frac{x}{4}}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, car $\begin{cases} \text{la fonction inverse est décroissante} \\ \text{sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{comme composée de deux fonctions} \\ \text{de même sens de variations.} \end{cases}$

On en conclut que f est croissante sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ par un réel positif.

Partie II

1. a)

Méthode : les solutions de l'équation différentielle $y' = a y$ sont de la forme $y = k e^{ax}$, où k est un réel.

On a $(E_1) : y' = \frac{1}{4} y$.

Les solutions de (E_1) sont, par conséquent, de la forme $y = k e^{\frac{x}{4}}$, où k est un réel.

b) $\begin{cases} g \text{ solution de } (E_1) \\ g(0) = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} g(t) = k e^{\frac{t}{4}} \\ g(0) = 1 \end{cases}$, soit $k = 1$.

Ainsi, $g(t) = e^{\frac{t}{4}}$.

c) On cherche à résoudre l'inéquation suivante : $g(t) \geq 3$. On a donc :

$$e^{\frac{t}{4}} \geq 3$$

$$\frac{t}{4} \geq \ln 3 \quad \text{car} \quad \begin{cases} a \geq b \text{ équivaut à } \ln a \geq \ln b, \text{ pour tous } a \text{ et } b \text{ de } \mathbb{R}_+^* \\ \ln e^x = x, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$t \geq 4 \ln 3$$

$$\text{Or, } 4 \ln 3 \approx 4,39.$$

Finalement, après 5 ans, la population des rongeurs dépassera les 300 individus.

2. a) On a $h(t) = \frac{1}{u(t)}$, sur $\mathbb{R}_+$.

Comme u vérifie (E_2) , on sait que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $u(t) \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Par suite, h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Ainsi, } h'(t) = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}.$$

u vérifie (E_2) équivaut à $u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u^2(t)}{12}$ et $u(0) = 1$,

équivaut à $h'(t) = -\frac{1}{u^2(t)} \left(\frac{u(t)}{4} - \frac{u^2(t)}{12} \right)$ on remplace $u'(t)$ dans l'expression de $h'(t)$

et $h(0) = \frac{1}{u(0)} = 1$, car $u(t) \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+$

équivaut à $h'(t) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{u(t)} + \frac{1}{12}$ et $h(0) = 1$,

équivaut à $h'(t) = -\frac{1}{4} h(t) + \frac{1}{12}$ et $h(0) = 1$.

Finalement, u vérifie (E_2) équivaut à h vérifie (E_3) .

b)

Méthode : les solutions de l'équation différentielle $y' = a y + b$ sont de la forme :

$$y = k e^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4} y + \frac{1}{12}$ sont de la forme :

$$y = k e^{-\frac{x}{4}} + \frac{1}{3}.$$

Ainsi, $\begin{cases} h(t) = k e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3} \\ h(0) = 1 \end{cases}$; on en déduit $k + \frac{1}{3} = 1$, soit $k = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

D'où : $h(t) = \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3} = \frac{1 + 2 e^{-\frac{t}{4}}}{3}$.

Puis, $u(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{3}{1 + 2 e^{-\frac{t}{4}}}$.

c) On remarque que $u(t) = f(t)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Or, d'après la question A. b), on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 3$.

En conclusion, la taille de la population de rongeurs plafonne à 300 individus.

Nouvelle-Calédonie

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 60 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 60 min.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Nombres complexes – Résolution algébrique, Transformations géométriques (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a) Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f .

b) On suppose que deux points ont la même image par f . Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3 .

a) Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si, et seulement si :

$$z^2 - 3z + 3 = 0.$$

b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. a) Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$, puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
Démontrer que tous les points M du cercle (C) de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.

Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et, à l'aide du 3. a), démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E .

Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

Corrigé-page 336

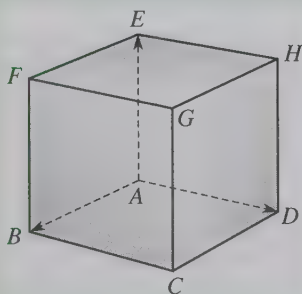
EXERCICE 2 Géométrie dans l'espace – Barycentre (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.).

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Pour chacune des cinq questions, une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent $\frac{1}{2}$ point.



Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1.

On choisit le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FG]$.

L est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 3)\}$.

Soit (π) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

1. Les coordonnées de L sont :

- a) $\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$; b) $\left(\frac{3}{4}; 0; 0\right)$; c) $\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$.

2. Le plan (π) est le plan :

- a) (GLE) ; b) (LEJ) ; c) (GFA) .

3. Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées :

a) $\left(1; 0; \frac{1}{4}\right)$; b) $\left(1; 0; \frac{1}{5}\right)$; c) $\left(1; 0; \frac{1}{3}\right)$.

4. a) Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B .

b) Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.

c) Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.

5. Le volume du tétraèdre $FIJM$ est :

a) $\frac{1}{36}$; b) $\frac{1}{48}$; c) $\frac{1}{24}$.

Corrigé page 339

EXERCICE 3 Analyse – Fonction exponentielle, Croissance comparée (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.

2. Justifier que, pour tout x , $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .

b) Étudier le sens de variations de f , puis dresser son tableau de variations.

3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

b) À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe ($\mathcal{C}$) par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe ($\mathcal{C}$).

Corrigé page 343

EXERCICE 4 Analyse – Suites, Fonctions (5 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} ; v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Calculer u_1 , v_1 , u_2 et v_2 .

2. Soit la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$w_n = v_n - u_n.$$

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n) .

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) , démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Corrigé page 346

Corrigés

EXERCICE 1

1. a)

Méthode : on remplace z par z_A et z_B dans l'expression de f .

$$z_{A'} = z_A^2 - 4z_A = (1 - i)^2 - 4(1 - i) = 1 - 2i + i^2 - 4 + 4i = -4 + 2i$$

$$z_{B'} = z_B^2 - 4z_B = (3 + i)^2 - 4(3 + i) = 9 + 6i + i^2 - 12 - 4i = -4 + 2i$$

b)

Méthode :

- on choisit deux noms de points (ainsi que les affixes de ces points), puis on écrit l'égalité de leur image en utilisant l'expression de f ;
- M' est le symétrique de M par rapport à une symétrie centrale de centre I d'affixe a si, et seulement si, $z' - a = -(z - a)$.

Soient deux points M_1 , d'affixe z_1 , et M_2 , d'affixe z_2 . Ils ont la même image par f , donc :

$$z_1' = z_2'$$

$$z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2$$

$$z_1^2 - z_2^2 - 4z_1 + 4z_2 = 0$$

$$(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0$$

$$(z_1 - z_2)[(z_1 + z_2) - 4] = 0$$

$$z_1 - z_2 = 0$$

$$\text{ou } z_1 + z_2 - 4 = 0$$

$$z_1 = z_2$$

$$\text{ou } z_1 - 2 = -(z_2 - 2)$$

M_1 et M_2 sont confondus ou M_1 est le symétrique de M_2 par la symétrie centrale de centre J d'affixe 2.

Ainsi, si deux points ont la même image par f , alors :

- soit ils sont confondus,
- soit l'un est le symétrique de l'autre par la symétrie centrale de centre J d'affixe 2.

2. a) **OMIM'** est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'I}$,
 si, et seulement si, $z - 0 = -3 - (z^2 - 4z)$,
 si, et seulement si, $z = -3 - z^2 + 4z$,
 si, et seulement si, $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b)

Méthode : résolution d'une équation de second degré dans $\mathbb{C}$

Si cette expression n'est pas une identité remarquable, on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

• Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution réelle : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

• Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

On doit résoudre : $z^2 - 3z + 3 = 0$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 9 - 12 = -3 < 0$; l'équation admet donc deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a},$$

$$z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}.$$

3. a) • On a $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$.

• D'où $|z' + 4| = |(z - 2)^2|$,

$|z' + 4| = |z - 2|^2$, car $|z^n| = |z|^n$, pour tout complexe z .

• Et enfin : $\arg(z' + 4) = \arg(z - 2)^2 = 2 \arg(z - 2) \pmod{2\pi}$,

car $\arg z^n = n \arg z \pmod{2\pi}$, pour tout complexe z non nul.

b)

Méthode : M appartient au cercle de centre A et de rayon R équivaut à $AM = R$.

M appartient à (C) équivaut à $JM = 2$,

équivaut à $|z - 2| = 2$,

équivaut à $|z - 2|^2 = 4$,

équivaut à $|z' + 4| = 4$, d'après 3. a)

équivaut à $KM' = 4$,

équivaut à M' appartient au cercle de centre K et de rayon 4.

c)

Rappel de cours : z est un complexe non nul ; si on peut l'écrire sous la forme $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$.

• $z_E + 4 = -4 - 3i + 4 = -3i = 3(-i) = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$,

car $\begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1. \end{cases}$

Donc $\begin{cases} |z_E + 4| = 3 \\ \arg(z_E + 4) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \end{cases}$

• Cherchons les points d'affixe z qui ont pour image E .

D'après la question 3. a), si un point d'affixe z a pour image E , alors :

$\begin{cases} |z_E + 4| = |z - 2|^2 \\ \arg(z_E + 4) = 2 \arg(z - 2) \pmod{2\pi}. \end{cases}$

D'où $\begin{cases} |z - 2|^2 = 3 \\ -\frac{\pi}{2} = 2 \arg(z - 2) \pmod{2\pi}. \end{cases}$

Méthode : $2 \arg z = \theta \pmod{2\pi} \Leftrightarrow$ il existe un entier k tel que $2 \arg z = \theta + 2k\pi$,

$\Leftrightarrow$ il existe un entier k tel que $\arg z = \frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}$,

$\Leftrightarrow$ il existe un entier k tel que $\arg z = \frac{\theta}{2} + k\pi$,

$\Leftrightarrow \arg z = \frac{\theta}{2} \pmod{\pi}$.

Donc
$$\begin{cases} |z-2| = \sqrt{3}, \text{ car } |z| > 0, \text{ pour tout complexe } z \\ \arg(z-2) = -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi}. \end{cases}$$

Ainsi
$$\begin{cases} |z-2| = \sqrt{3} \\ \arg(z-2) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } \arg(z-2) = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

On obtient :

$$z-2 = \sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \text{ ou } z-2 = \sqrt{3} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

$$z-2 = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{ou} \quad z-2 = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{ou} \quad z = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

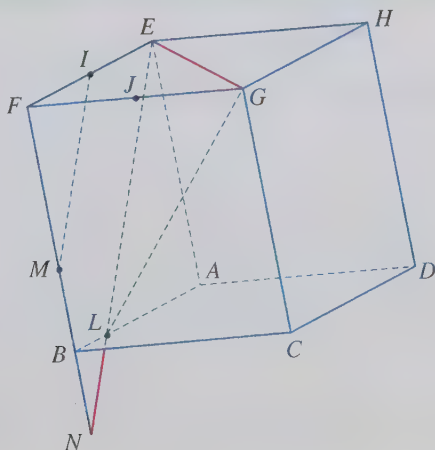
Finalement, il existe deux points dont l'image par f est le point E , leur forme algébrique étant :

$$z = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou } z = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

On remarque que, conformément à la question 1. b), ces deux points sont symétriques par rapport au point J d'affixe 2.

EXERCICE 2

Remarque : les démonstrations ci-après sont données dans un but pédagogique. Aucune justification ne vous est demandée le jour de l'épreuve.



1.

Rappel de cours : si G est le barycentre de $\{(A; a), (B; b)\}$, alors $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$.

Réponse b) vraie ; les autres sont fausses.

Démonstration :

L est le barycentre de $\{(A; 1), (B; 3)\}$.

On a donc $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}$; en conséquence, L a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}; 0; 0\right)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

2.

Méthode : par élimination, on va montrer que A n'appartient pas à (π) et que G appartient à (π) .

Réponse a) vraie ; les autres sont fausses.

Démonstration :

$A(0; 0; 0)$, car A est l'origine du repère.

$4 \times 0 - 4 \times 0 + 3 \times 0 - 3 = -3 \neq 0$; par suite, les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation de (π) . Donc $A \notin (\pi)$ et, par conséquent, (π) n'est pas le plan (GFA) .

Les plans (GLE) et (LEJ) ont deux points communs L et E ; ainsi, comme $J \notin (EG)$, ces deux plans sont distincts.

De ce fait, (π) est soit le plan (GLE) , soit le plan (LEJ) .

Or, G a pour coordonnées $(1; 1; 1)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

$4 \times 1 - 4 \times 1 + 3 \times 1 - 3 = 0$; les coordonnées de G vérifient ainsi l'équation de (π) et, dès lors, $G \in (\pi)$.

Finalement : (π) est le plan (GLE) .

3.

Méthode : on va trouver une équation du plan parallèle à (π) passant par I et une équation paramétrique de la droite (FB) . En résolvant le système formé par ces équations, on peut déterminer les coordonnées du point d'intersection.

Réponse c) vraie ; les autres sont fausses.

Démonstration :

Soit (π') le plan parallèle à (π) passant par I . (π') et (π) ont, par conséquent, même vec-

teur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Une équation de (π') est de la forme : $4x - 4y + 3z + d = 0$.

Or, I est le milieu de $[EF]$, donc I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.

Comme (π') passe par I , les coordonnées de I vérifient l'équation de (π') :

$$4 \times \frac{1}{2} - 4 \times 0 + 3 \times 1 + d = 0.$$

D'où l'on tire : $5 + d = 0$, puis $d = -5$.

Finalement, une équation du plan (π') est : $4x - 4y + 3z - 5 = 0$.

Rappel de cours : une représentation paramétrique d'une droite de vecteur directeur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ passant par le point } M(\alpha; \beta; \gamma) \text{ est } \begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

$$\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} x_F - x_B \\ y_F - y_B \\ z_F - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de la droite } (FB) \text{ passant par } B(1; 0; 0).$$

$$\text{Ainsi, une représentation paramétrique de la droite } (FB) \text{ est : } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

On va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x - 4y + 3z - 5 = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\text{d'où } 4 + 3t - 5 = 0, \text{ puis } t = \frac{1}{3}, \text{ donc } z = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Finalement : } M, \text{ point d'intersection de } (\pi') \text{ et de } (FB), \text{ a pour coordonnées } \left(1; 0; \frac{1}{3}\right).$$

4. Réponses a) et b) vraies ; les autres sont fausses.

Démonstration :

$$\bullet \text{ On a } E(0; 0; 1) \text{ et } L\left(\frac{3}{4}; 0; 0\right), \text{ donc } \overrightarrow{LE} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (EL) est :

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{4}t + \frac{3}{4} \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

De plus, une représentation paramétrique de (FB) est :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Le point d'intersection de ces deux droites doit donc vérifier :

$$-\frac{3}{4}t + \frac{3}{4} = 1, \text{ d'où } t = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Ainsi, le point d'intersection } N \text{ de } (EL) \text{ et } (FB) \text{ a pour coordonnées } \left(1; 0; -\frac{1}{3}\right).$$

$$\text{Or, } M \text{ a pour coordonnées } \left(1; 0; \frac{1}{3}\right).$$

Donc, N est le symétrique de M par rapport à B de coordonnées $(1; 0; 0)$.

• On a $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x_M - x_I \\ y_M - y_I \\ z_M - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 0 - 0 \\ \frac{1}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EL} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

donc $\overrightarrow{IM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{EL}$; on en conclut que les droites (EL) et (IM) sont parallèles.

• Par contre, la réponse c) est fausse. En effet, les deux droites étant parallèles, si, de plus, elles étaient sécantes, elles seraient confondues. Or, M n'appartient pas à la droite (EL) , car ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de cette droite. Ainsi, les deux droites ne sont pas confondues et, par suite, ne sont pas parallèles.

5. Réponse a) vraie ; les autres sont fausses

Méthode : pour faciliter le calcul, il faut prendre le bon point comme sommet ; ici, il faut considérer le tétraèdre $FIJM$ de sommet I ou J .

Si l'on choisit F pour sommet, il faudra utiliser la formule de distance d'un point à un plan pour trouver la hauteur du tétraèdre.

Démonstration :

On a : $V_{FIJM} = \frac{\text{hauteur} \times \text{aire}}{3} = \frac{FI \times A_{FJM}}{3}$.

I est le milieu de $[FE]$, donc $FI = \frac{1}{2}$.

De plus, FMJ est un triangle rectangle en F ; ainsi, son aire est :

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{FJ \times FM}{2}.$$

J est le milieu de $[FG]$; par conséquent, $FJ = \frac{1}{2}$.

On a $F(1 ; 0 ; 1)$ et $M\left(1 ; 0 ; \frac{1}{3}\right)$, alors $\overrightarrow{FM} = \begin{pmatrix} x_M - x_F \\ y_M - y_F \\ z_M - z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

D'où $FM = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$.

L'aire du triangle FMJ est donc : $\frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{6}$.

Or, $V_{FIJM} = \frac{FI \times A_{FMJ}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}{3} = \frac{1}{36}$.

EXERCICE 3

Partie A

1.

Méthode : étude de fonction

Une telle étude comprend les étapes suivantes :

- dérivabilité de la fonction,
- calcul de la dérivée,
- étude du signe de la dérivée,
- variations de la fonction.

$$\text{On a } g(x) = e^x - x - 1.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$.

Étudions le signe de $g'(x)$:

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow \ln e^x > \ln 1, \text{ car la fonction } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow x > 0, \text{ car } \begin{cases} \ln e^x = x, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \\ \ln 1 = 1. \end{cases}$$

$$\text{Finalement : } \begin{cases} g'(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \\ g'(x) < 0 \text{ sur } \mathbb{R}_*^- \end{cases}.$$

Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

$$\text{De plus, } g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0.$$

D'après les variations de g , le minimum de g sur $\mathbb{R}$ vaut donc 0.

Donc $g(x) \geq 0$, sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ D'après A.1., on a : } & g(x) \geq 0, && \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \\ & e^x - x - 1 \geq 0, && \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \\ & e^x - x \geq 1 > 0, && \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalement : $(e^x - x) > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie B

$$1. a) \bullet \text{ On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}.$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ (en utilisant les théorèmes de croissance comparée).}$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = 0 \text{ (car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0).$$

$$\text{Finalement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$\bullet \text{ On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}.$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \text{ (en utilisant les théorèmes de croissance comparée).}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = -1 \text{ et, enfin, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

b)

Rappel de cours : l'interprétation graphique des limites correspond à la présence d'asymptotes à la courbe :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = a$ au voisinage de $+\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = a$ au voisinage de $-\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = -1$ pour asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

2. a)

Rappel de cours : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que $v(x) \neq 0$, pour tout x de I ; alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur est non nul.

$$f'(x) = \frac{1 \times (e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

b) D'après B. 2. a), on a : $f'(x) = \frac{(1 - x)g(x)}{(e^x - x)^2}$.

Or, $\begin{cases} (e^x - x)^2 > 0, & \text{car un carré est toujours positif} \\ e^x > 0, & \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}. \end{cases}$

Ainsi, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(1 - x)$.

Donc $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ de }]-\infty ; 1] \\ f'(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } [1 ; +\infty[. \end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases} f \text{ est croissante sur }]-\infty ; 1] \\ f \text{ est décroissante sur } [1 ; +\infty[. \end{cases}$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-1	$\frac{1}{e-1}$	0

3. a)

Rappel de cours : si f est dérivable en a , la courbe représentative de f admet alors une tangente au point d'abscisse a , d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

f est dérivable en 0 ; par conséquent, la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0 qui a pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$$\text{Donc : } y = x, \text{ car } \begin{cases} f'(0) = \frac{e^0(1-0)}{(e^0-0)^2} = 1 \\ f(0) = \frac{0}{e^0-0} = 0. \end{cases}$$

b)

Méthode : soient f et g deux fonctions ayant $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ pour courbes représentatives.

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur I équivaut à $f(x) \geq g(x)$ sur I , ce qui équivaut encore à $f(x) - g(x) \geq 0$ sur I .

$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur I équivaut à $f(x) \leq g(x)$ sur I , ce qui équivaut encore à $f(x) - g(x) \leq 0$ sur I .

$$\text{On a } f(x) - 0 = \frac{x}{e^x - x}.$$

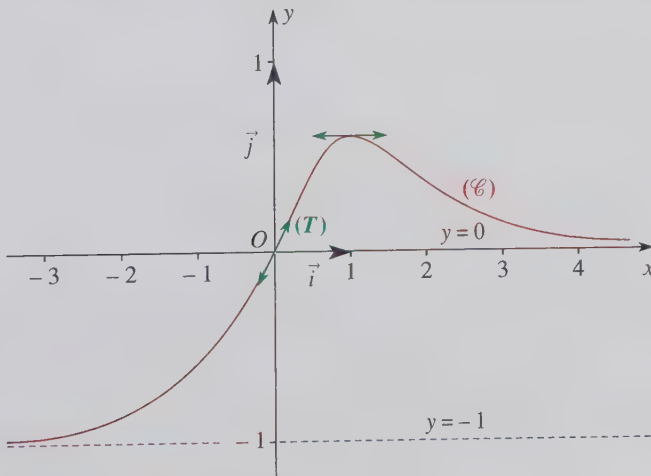
Or, d'après A. 2., $e^x - x > 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

En conséquence, le signe de $f(x)$ ne dépend que du signe de x .

$$\text{Ainsi } \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^+ \\ f(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Finalement : $\mathcal{C}$ est au-dessus de (T) sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}$ est au-dessous de (T) sur $\mathbb{R}^-$.

4. Pour la courbe ci-dessous, l'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 2,5 cm sur l'axe des ordonnées.



EXERCICE 4

$$1. \quad \text{On a : } \begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 4, \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2} \\ v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{15}{4}, \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{29}{8} \\ v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{59}{16}. \end{cases}$$

2. a)

Méthode : on cherche un réel q tel que $w_{n+1} = qw_n$, pour tout entier naturel n .

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4} w_n \end{aligned}$$

(w_n) est donc une suite géométrique de premier terme $w_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{4}$.

b) (w_n) étant une suite géométrique de premier terme $w_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{4}$, on a :

$$w_n = w_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0,$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0 \text{ si } -1 < k < 1.$$

3. D'après 2. b), on a : $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, pour tout entier naturel n .

$$\text{Or, } w_n = v_n - u_n, \text{ donc } \begin{cases} u_n = v_n - \left(\frac{1}{4}\right)^n & (1) \\ v_n = u_n + \left(\frac{1}{4}\right)^n & (2) \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

On remplace dans les expressions de u_{n+1} et v_{n+1} .

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$= \frac{u_n + u_n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{2} \text{ d'après (2)}$$

$$= u_n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{d'où } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n > 0.$$

On a ainsi : $u_{n+1} > u_n$,
pour tout entier naturel n .

La suite (u_n) est donc croissante.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} = \frac{u_n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + v_n}{2}$$

(d'après le calcul de u_{n+1} ci-contre),

$$v_{n+1} = \frac{v_n - \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + v_n}{2} \text{ d'après (1)}$$

$$= v_n - \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = v_n - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\text{d'où } v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < 0.$$

On a ainsi : $v_{n+1} < v_n$, pour tout entier naturel n .

La suite (v_n) est donc décroissante.

La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) décroissante.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$; ainsi, **les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.**

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc convergentes et convergent vers la même limite l .

4. a)

Méthode : on montre que $t_{n+1} = t_n$, pour tout entier naturel n .

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{u_{n+1} + 2 \frac{u_{n+1} + v_n}{2}}{3} = \frac{2u_{n+1} + v_n}{3} = \frac{2 \times \frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{3}$$

$$= \frac{u_n + 2v_n}{3} = t_n$$

On a $t_{n+1} = t_n$, pour tout entier naturel n .

On en conclut que **la suite (t_n) est une suite constante égale à $t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{11}{3}$.**

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{11}{3}$, car la suite (t_n) est constante égale $\frac{11}{3}$.

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 2v_n) = \frac{1}{3} \times 3l = l$$

(en effet, d'après la question 3. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$).

$$\text{D'où } l = \frac{11}{3}.$$

$$\text{Finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{11}{3}.$$

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 1 h 30 min.
- Exercice 2 : 60 min.
- Spécialité exercice 2 : 60 min.
- Exercice 3 : 45 min.
- Exercice 4 : 45 min.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

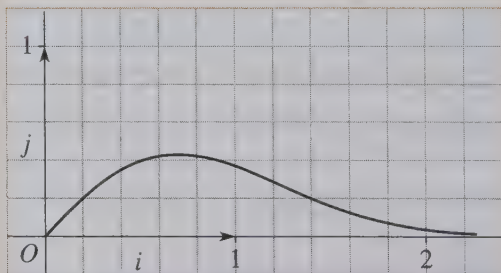
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Analyse – Fonction exponentielle, Suites, Intégration (7 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.)

2. Démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer, en unités d'aire et en fonction de a , l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$. Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) \, dx.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n .

1. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1,

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

b) Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$?

c) Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. a) Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n , $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

b) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.

Corrigé page 152

EXERCICE 2 Nombres complexes – Transformations géométriques, Lieux géométriques (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit A , B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - i, b = 1 - 3i \text{ et } c = -1 - i.$$

1. a.) Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
 b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
 c) Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O , dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n , image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
 a) Donner l'écriture complexe de la rotation r .
 b) En déduire une expression de n en fonction de m .
- 3) On appelle Q le milieu du segment $[AN]$ et q son affixe.
 Montrer que : $q = \frac{(1-i)m}{2} + 2 + i$.
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ .
 a) Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.
 b) Calculer $|q - 2 - i|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

Corrigé page 355

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

 Nombres complexes – Arithmétique

(5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :

$$S(O) = A \quad \text{et} \quad S(A) = B.$$

2. Montrer que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 - i)z + i.$$

Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).

On considère la suite de points (A_n) telle que :

- A_0 est l'origine du repère
- et, pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note z_n l'affixe de A_n . (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$.)

3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $z_n = 1 - (1 - i)^n$.

- b) Déterminer, en fonction de n , les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$. Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}})$.
- c) En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n . Construire les points A_3 et A_4 .
4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

Corrigé page 356

EXERCICE 3 Géométrie dans l'espace – Barycentre (4 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A de coordonnées $(1; 1; 0)$, B de coordonnées $(2; 0; 3)$, C de coordonnées $(0; -2; 5)$ et D de coordonnées $(1; -5; 5)$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G , où G désigne le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées $(3; 3; 0)$ et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

Corrigé page 358

EXERCICE 4 Probabilités – Loi binomiale, Probabilité conditionnelle (4 points)

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques, mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué.

Avec le dé truqué, la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

- a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
- b) Quelle est son espérance ?
- c) Calculer $P(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les événements D et A suivants :

- D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

a) Calculer la probabilité des événements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité.)

b) En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$.

c) Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note B_n l'événement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

- a) Déterminer, en fonction de n , la probabilité p_n de l'événement B_n .
- b) Calculer la limite de la suite (p_n) . Commenter ce résultat.

Corrigé page 160

Corrigés

EXERCICE 1

Partie A

1. a) Pour x différent de 0, on a $f(x) = xe^{-x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \end{aligned} \right\}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty \text{ d'après le théorème sur les limites de fonctions composées.}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0,$

or, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$

d'où, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

b) $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$.

On a $f'(x) = e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(1 - 2x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 \geq 0 \quad \text{car } e^{-x^2} > 0, \text{ pour tout } x \text{ réel.}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{car } x \in \mathbb{R}^+.$

Ainsi $f'(x) \leq 0$ sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$,

et $f'(x) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$

Par suite, f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$; elle admet alors

un maximum en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ qui vaut $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}.$

2. • La fonction f est positive sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de deux fonctions positives sur $\mathbb{R}^+$. De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^+.$

On en déduit que $F(a) = \int_0^a f(x) dx$. On a :

$$F(a) = \int_0^a x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^a -2x e^{-x^2} dx, \text{ par linéarité de l'intégrale}$$

$$F(a) = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^a.$$

Finalement, $F(a) = -\frac{1}{2}(e^{-a^2} - 1) = \frac{1 - e^{-a^2}}{2}$ unités d'aire.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} -a^2 &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-a^2} = 0, \text{ d'après le théorème sur les limites de fonctions composées}$$

donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = \frac{1}{2}.$

Partie B

1. a) Pour tout n entier naturel, $n \geq 2 \Rightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rappel de cours : soient f et g deux fonctions continues sur $[a ; b]$.

Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a ; b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

D'après la **partie A**, on sait que f est décroissante sur $[n ; n+1]$.

Ainsi, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$, pour tout x dans $[n ; n+1]$,

$$\text{d'où } \int_n^{n+1} f(n+1) \, dx \leq \int_n^{n+1} f(x) \, dx \leq \int_n^{n+1} f(n) \, dx,$$

$$\text{puis } f(n+1) \int_n^{n+1} dx \leq u_n \leq f(n) \int_n^{n+1} dx.$$

Finalement, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

b) En utilisant le résultat précédent, on a $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$, pour tout $n \geq 2$.

On en déduit également que $f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1)$, pour tout $n \geq 2$.

Donc $u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n$.

On en conclut que **la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.**

c) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}^+$; ainsi, d'après **B-1. a)**, on a $u_n \geq 0$, pour tout $n \geq 2$.

La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est minorée par 0 et décroissante ; elle est ainsi convergente vers un réel $l \geq 0$.

Pour tout $n \geq 2$, on a $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

donc, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$2. a) \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) \, dt = \int_0^1 f(t) \, dt + \int_1^2 f(t) \, dt + \dots + \int_{n-1}^n f(t) \, dt,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^n f(t) \, dt, \text{ en utilisant la relation de Chasles.}$$

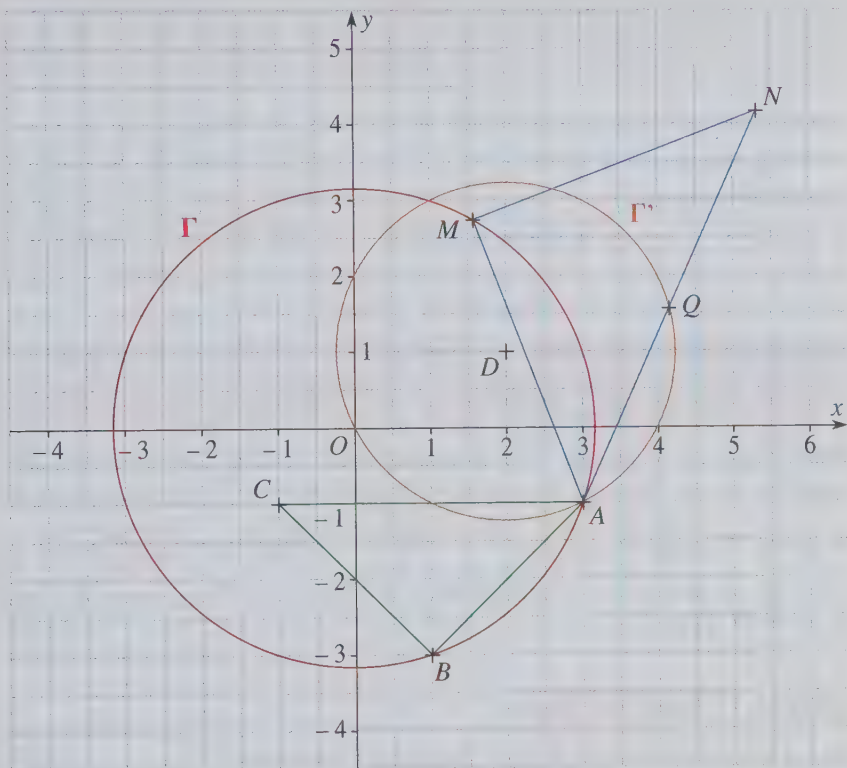
$$\text{En conclusion, } \sum_{k=0}^{n-1} u_k = F(n).$$

b) Le tableau confirme le résultat de la question **A-2.** : $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = \frac{1}{2}$.

La précision du tableur n'est pas suffisante à partir de $n = 5$; on ne peut pas affirmer que les trois dernières valeurs obtenues sont égales à 0,5, mais seulement que ces images sont très proches de 0,5 (la précision devrait être supérieure à 10^{-7}).

EXERCICE 2

1. a)



b) On a $\frac{b-c}{b-a} = \frac{1-3i+1+i}{1-3i-3+i} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$;

donc $\frac{BC}{BA} = \left| \frac{b-c}{b-a} \right| = |i| = 1$, puis $BC = BA$; ainsi, le triangle ABC est isocèle en B .

Et $\text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{b-c}{b-a}\right) \pmod{2\pi}$

$\text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg(i) \pmod{2\pi}$

$\text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$,

d'où : le triangle ABC est rectangle en B .

En conséquence, **le triangle ABC est isocèle rectangle en B .**

c) $OA = |a| = |3-i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$;

$OB = |b| = |1-3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

On en déduit que A et B appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon $\sqrt{10}$.

2. a)

Méthode : si A' , d'affixe $z_{A'}$, est l'image de A , d'affixe z_A , par la rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ , alors on a :

$$z_{A'} - z_\Omega = (z_A - z_\Omega)e^{i\theta}.$$

Ici, on a $z' - m = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - m)$, soit $z' = m + i(z - m) = iz + m(1 - i)$.

b) On a $N = r(A)$, donc $n = ia + m(1 - i) = i(3 - i) + m(1 - i) = 1 + 3i + m(1 - i)$.

3. Q est le milieu de $[AN]$,

$$\text{d'où } q = \frac{a + n}{2} = \frac{3 - i + 1 + 3i + m(1 - i)}{2} = \frac{4 + 2i + m(1 - i)}{2} = 2 + i + \frac{m(1 - i)}{2}.$$

4. a)

Rappel de cours : équation polaire d'un cercle

Soit C le cercle de centre O et de rayon r .

M d'affixe z appartient à C si, et seulement si, $z = re^{i\theta}$, avec $\theta \in [0; 2\pi[$.

L'équation du cercle Γ de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ est $z = \sqrt{10}e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0; 2\pi[$.

M appartient au cercle Γ ; son affixe est donc de la forme $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0; 2\pi[$.

$$\text{b) } |q - 2 - i| = \left| \frac{m(1 - i)}{2} \right| = \frac{|m||1 - i|}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{5} \text{ car } |m| = |\sqrt{10}e^{i\theta}| = \sqrt{10}.$$

Lorsque M décrit le cercle Γ , Q appartient donc au cercle Γ' de centre D d'affixe $d = 2 + i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

1. On a $A \neq O$ et $A \neq B$; ainsi, il existe une unique similitude directe qui transforme O en A et A en B .

2.

Méthode : écriture complexe d'une similitude directe

Si M' , d'affixe z' , est l'image de M , d'affixe z , par une similitude directe, alors :

$$z' = az + b, \text{ avec } a, b \text{ complexes et } a \text{ non nul.}$$

$$\text{On a } \begin{cases} S(O) = A \\ S(A) = B \end{cases},$$

$$\text{donc } \begin{cases} z_A = az_O + b \\ z_B = az_A + b \end{cases}, \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} i = b \\ 1 + 2i = ai + i \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} b = i \\ a = 1 - i. \end{cases}$$

L'écriture complexe de la similitude est ainsi $z' = (1 - i)z + i$.

3. a)

Rappel de cours : démonstration par récurrence

- On pose une propriété P_n .
- On initialise la récurrence en montrant que cette propriété est bien vraie au premier rang de la suite.
- On montre ensuite l'hérédité de la propriété.

Soit P_n , la propriété « $z_n = 1 - (1 - i)^n$ », pour n entier naturel.

- Initialisation : on a $1 - (1 - i)^0 = 1 - 1 = 0 = z_0$.

Donc P_0 est vraie.

- Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour un certain entier n et montrons qu'alors P_{n+1} est encore vraie.

On a $A_{n+1} = S(A_n)$,

$$\begin{aligned} \text{donc } z_{n+1} &= (1 - i)z_n + i = (1 - i)(1 - (1 - i)^n) + i \\ &= (1 - i) - (1 - i)^{n+1} + i, \end{aligned}$$

d'où $z_{n+1} = 1 - (1 - i)^{n+1}$ et, ainsi, P_{n+1} est vraie.

On a donc montré que $z_n = 1 - (1 - i)^n$, pour n entier naturel.

- b)** • On a $z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = z_n - z_\Omega = 1 - (1 - i)^n - 1 = -(1 - i)^n$;

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{A_n A_{n+1}}} &= z_{n+1} - z_n = 1 - (1 - i)^{n+1} - 1 + (1 - i)^n \\ &= (1 - i)^n (1 - i + 1) = i(1 - i)^n ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega A_n &= |z_n - z_\Omega| = |(1 - i)^n| \\ &= |1 - i|^n = \sqrt{2}^n ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n A_{n+1} &= |z_{n+1} - z_n| = |i(1 - i)^n| \\ &= |i| \times |1 - i|^n = \sqrt{2}^n. \end{aligned}$$

On en déduit que $\Omega A_n = A_n A_{n+1}$.

$$\bullet \text{ mes}(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{A_n A_{n+1}}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}}\right) \pmod{2\pi},$$

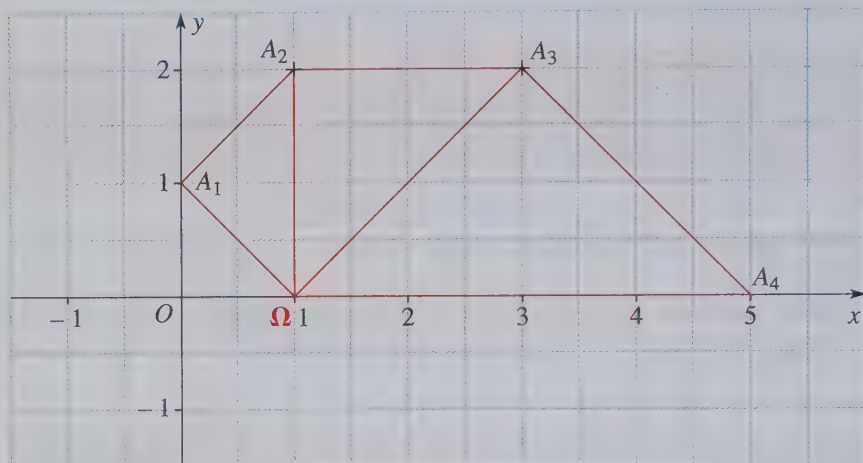
$$\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \arg\left(\frac{i(1 - i)^n}{-(1 - i)^n}\right) \pmod{2\pi},$$

$$\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \arg(-i) \pmod{2\pi},$$

$$\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

c) D'après la question 3. b), le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle direct en A_n . Il faut donc tracer une droite perpendiculaire à (ΩA_n) , puis reporter la distance ΩA_n de telle

$$\text{manière que } \text{mes}(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$



4. $A_n \in (\Omega B)$ équivaut à $\arg(z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$,

équivaut à $\arg(-(1-i)^n) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$,

équivaut à $\pi + n \arg(1-i) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$,

car $\arg(z^n) = n \times \arg(z) \pmod{\pi}$

équivaut à $\pi - n \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, car $1-i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

équivaut à $-n \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$,

équivaut à $n = 2 \pmod{4}$,

équivaut à $n = 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}$,

équivaut à $n = 2 + 4k, k \in \mathbb{N}$,

car n entier naturel.

Les points recherchés sont donc les points de la forme A_{2+4k} , avec k entier naturel.

EXERCICE 3

Proposition 1 : faux.

Choisissons trois points E, F et H de cet ensemble de points : $E(0 ; 4 ; 0)$, $F(-2 ; 0 ; 0)$ et $H(-4 ; -4 ; 1)$.

Alors : $\overrightarrow{EF}(-2 ; -4 ; 0)$ et $\overrightarrow{EH}(-4 ; -8 ; 1)$.

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont clairement pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires et, ainsi, les points E, F et H ne sont pas alignés.

L'ensemble des points n'est donc pas une droite ; il s'agit en fait du plan d'équation $2x - y + 4 = 0$.

Proposition 2 : faux.

G est le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$; pour tout point M , on a donc :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{MG}$$

$$\text{car } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{MG},$$

$$\text{puis } \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG} = -3\overrightarrow{GM}.$$

On en déduit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre G et de rapport -3 .

Proposition 3 : faux.

On a $\overrightarrow{AB}(1; -1; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; -3; 5)$. Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont clairement pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires et, par suite, les points A , B et C ne sont pas alignés. Ils forment donc un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

$$\text{On a } \begin{cases} A \in (ABC) \\ B \in (ABC) \\ C \in (ABC), \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} a + b + d = 0 \\ 2a + 3c + d = 0 \\ -2b + 5c + d = 0 \end{cases}, \quad \text{on fait } L_2 - 2 \times L_1 \rightarrow L_2$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} a + b + d = 0 \\ -2b + 3c - d = 0 \\ -2b + 5c + d = 0 \end{cases}, \quad \text{on fait } L_3 - L_2 \rightarrow L_3$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} a + b + d = 0 \\ -2b + 3c - d = 0 \\ 2c + 2d = 0, \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} a = d \\ b = -2d \\ c = -d. \end{cases}$$

Le plan (ABC) a ainsi pour équation $dx - 2dy - dz + d = 0$,

soit encore $x - 2y - z + 1 = 0$.

Vérifions maintenant si les coordonnées de D vérifient cette équation :

$$+1 - 2 \times (-5) - 5 + 1 = 7 \neq 0.$$

Ainsi, D n'appartient pas au plan (ABC) et A , B , C et D ne sont donc pas coplanaires.

Proposition 4 : vrai.

$$\begin{aligned} \text{On a } \text{dist}(\Omega, (P)) &= \frac{|2 \times 3 + 2 \times 3 + 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{15}{3} = 5. \end{aligned}$$

La distance entre le centre de la sphère et le plan est égale au rayon de cette sphère. On en conclut que la sphère et le plan sont tangents.

EXERCICE 4

1. a)

Méthode : loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne présente que deux issues : A de probabilité p et $\bar{A}$ de probabilité $(1 - p)$.

Lorsque l'on répète n épreuves de Bernoulli de manière indépendante, on crée un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X égale au nombre de réalisations de l'événement A suit une loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ avec } k \text{ entier tel que } 0 \leq k \leq n.$$

On a, de plus : $E(X) = np$.

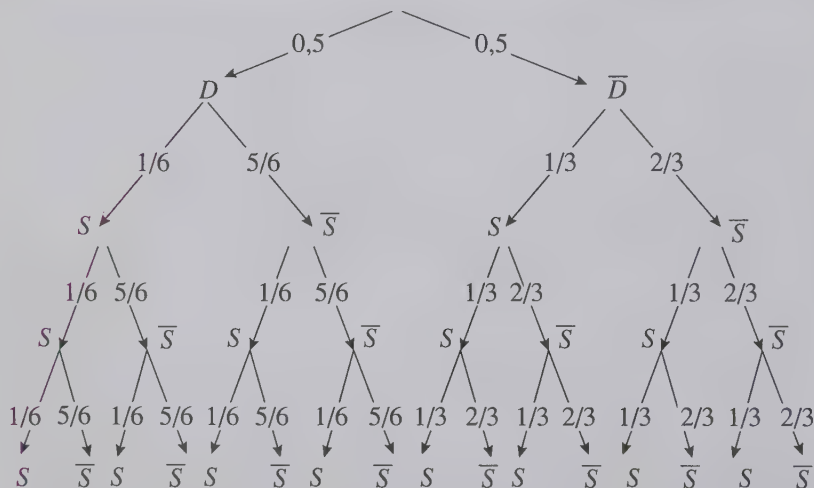
Comme le dé est équilibré, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$ (p correspond à la probabilité d'obtenir un 6 en lançant une fois le dé).

Ainsi, $p(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$, pour k entier naturel compris entre 0 et n .

b) $E(X) = np = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

c) $p(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right) = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$.

2. a) Construisons l'arbre de probabilité correspondant à cette expérience.



• $P(A \cap D) = P(D) \times P(A/D) = P(D) \times P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{72} = \frac{5}{144}$.

$$\bullet P(A \cap \bar{D}) = P(\bar{D}) \times P(A/\bar{D}) = P(\bar{D}) \times (P(SS\bar{S}) + P(\bar{S}\bar{S}S) + P(\bar{S}\bar{S}S)),$$

$$P(A \cap \bar{D}) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{27} = \frac{1}{9}.$$

b)

Rappel de cours : formule des probabilités totales

Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ formant une partition de l'univers. Soit A un événement ; on a :

$$p(A) = p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A) + \dots + p(B_n \cap A).$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(A \cap D) + P(A \cap \bar{D}) = \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{5+16}{144} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}.$$

$$\text{c) } P(\bar{D}/A) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(A)} = \frac{1/9}{7/48} = \frac{48}{7 \times 9} = \frac{16}{21}.$$

3. a) Calculons tout d'abord la probabilité de $\bar{B}_n$: « n'obtenir aucun 6 parmi les n lancers successifs ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(\bar{B}_n) = P(D \cap \bar{B}_n) + P(\bar{D} \cap \bar{B}_n) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6} \right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

$$\text{On en déduit : } p_n = P(B_n) = 1 - P(\bar{B}_n) = 1 - \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{5}{6} \right)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right].$$

$$\text{b) Comme } 0 < \frac{5}{6} < 1 \text{ et } 0 < \frac{2}{3} < 1, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$$

et, ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$.

Au bout d'une infinité de lancers, on est certain d'obtenir au moins un 6.

France métropolitaine

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 50 min.
- Exercice 2 : 1 h 10 min.
- Exercice 3 : 60 min.
- Exercice 4 : 60 min.
- Spécialité exercice 4 : 60 min.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Analyse – Suites (4 points)

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout nombre entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n , $v_n = u_n - 6$.

a) Pour tout nombre entier naturel n , calculer v_{n+1} en fonction de v_n .
Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n , $u_n = -5 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 6$.

c) Étudier la convergence de la suite (u_n) .

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10} .

b) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Donner la nature de la suite (w_n) . Calculer w_{2009} .

Corrigé page 367

EXERCICE 2 Analyse – Fonction exponentielle, Fonction logarithme népérien, Croissance comparée, Intégration (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

La courbe $\mathcal{C}$ est représentée en **annexe** en fin d'énoncé.

Partie I

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. Justifier que, pour tout nombre réel positif x , le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx$.

On se propose de majorer $A(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. Première méthode

a) Représenter, sur l'**annexe** jointe en fin d'énoncé, la partie du plan dont l'aire en unité d'aire est égale à $A(\lambda)$.

b) Justifier que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda) \leq \lambda \times f(1)$.

2. Seconde méthode

a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, $\int_0^\lambda x e^{-x} dx$ en fonction de λ .

b) On admet que, pour tout nombre réel positif u , $\ln(1+u) \leq u$.

Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif :

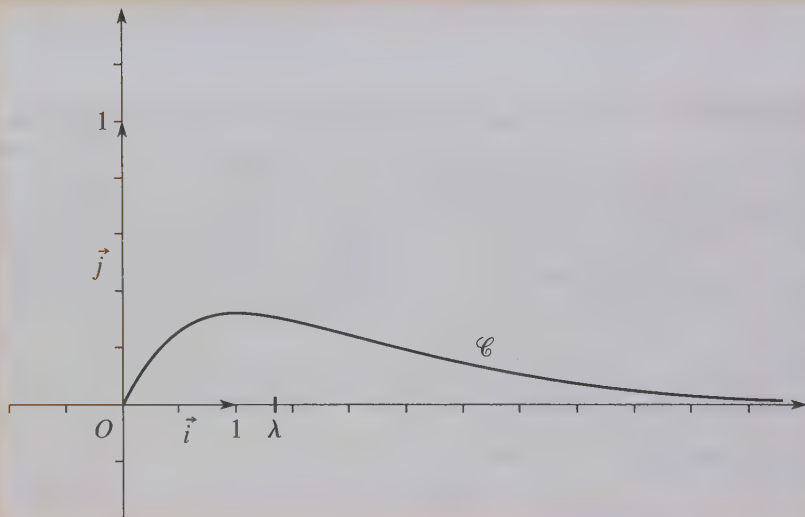
$$A(\lambda) \leq -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.$$

3. Application numérique

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $A(5)$, arrondi au centième.

Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?

Annexe



Consignes 169

EXERCICE 3 Probabilités – Variables aléatoires, Indépendance, Loi de probabilité (5 points)

I. Cette question est une restitution organisée de connaissances.

On rappelle que, si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$,

$$\text{alors } \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leq p \leq n$, on a :
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément 2 jetons de ce sac.

1. a) On note A l'événement « obtenir 2 jetons blancs ».

Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\frac{7}{15}$.

b) On note B l'événement « obtenir 2 jetons portant des numéros impairs ».
Calculer la probabilité de B .

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

Corrige page 371

EXERCICE 4 Nombres complexes – Le plan complexe, Transformations géométriques, Lieux géométriques (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on associe, à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$, où M_1 est le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

Le point M' est appelé l'image du point M .

1. a) Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $OM \times OM_1 = 1$ et que les angles $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_1})$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ à 2π près.

b) Sur la figure donnée en **annexe** en fin d'énoncé, le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

Construire le point A' image du point A . (On laissera apparents les traits de construction.)

2. a) Justifier que, pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

b) Soient B et C les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$. Calculer les affixes des points B' et C' images respectives des points B et C .

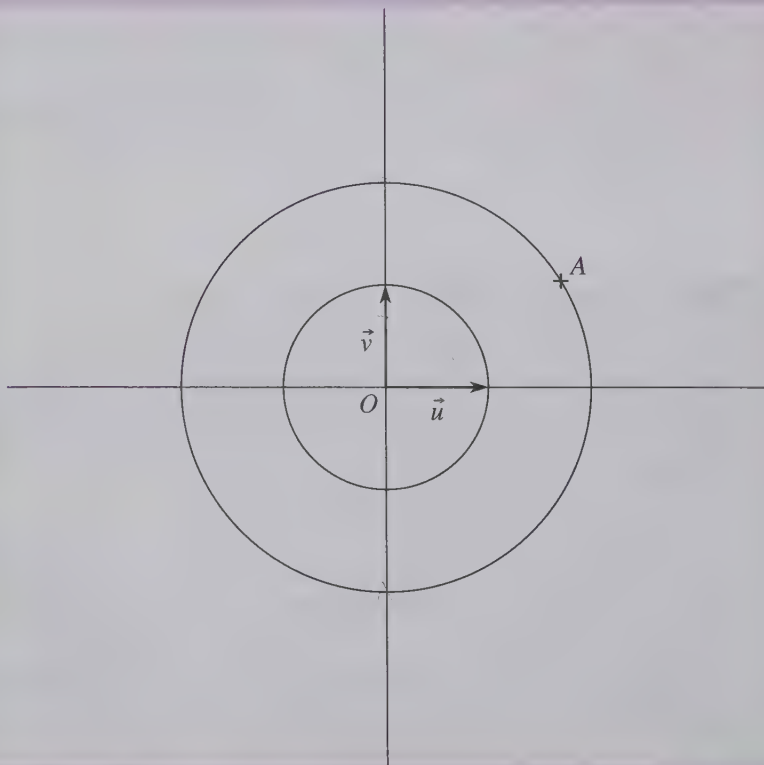
c) Placer les points B , C , B' et C' sur la figure donnée en **annexe** en fin d'énoncé.

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Montrer que, si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' appartient au segment $[KL]$, où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1 .

Annexe



SPÉCIALITÉ EXERCICE 4 Arithmétique (5 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. a) Déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$ de nombres entiers relatifs, solution de l'équation $(E) : 8x - 5y = 3$.

b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p ; q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.

Montrer que le couple $(p ; q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \pmod{40}$.

c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2. Soit n un nombre entier naturel.

a) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel k , on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.

b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9, avec $a \neq 0$. On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.

On se propose de déterminer, parmi ces nombres entiers naturels N , ceux qui sont divisibles par 7.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$.

b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Corrigé page 374

Corrigés

EXERCICE 1

1. a) On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3} u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3} u_n - 2 = \frac{1}{3} (u_n - 6) = \frac{1}{3} v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

b)

Rappel de cours : expression explicite d'un terme u_n d'une suite géométrique de raison q connaissant le terme u_p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

D'après la question 1. a), on a : $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

De plus, $v_n = u_n - 6$, pour tout n entier naturel,

d'où $u_n = v_n + 6$, pour tout entier naturel n .

Ainsi, $u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$, pour tout entier naturel n .

c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, car $-1 < \frac{1}{3} < 1$.

Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.

2. a) $10 \ w_{10} = 11 \ w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$,

d'où : $w_{10} = \frac{210}{10} = 21$.

b)

Méthode : il s'agit, ici, de conjecturer l'expression de la suite, puis de démontrer cette conjecture par récurrence.

Rappel de cours : démonstration par récurrence

- On pose une propriété P_n .
- On initialise la récurrence en montrant que cette propriété est bien vraie au premier rang de la suite.
- On montre ensuite l'hérédité de la propriété.

On peut conjecturer que la suite (w_n) a pour terme général : $w_n = 2n + 1$, pour tout n entier naturel non nul.

Montrons cette formule par récurrence ; posons la propriété P_n : « $w_n = 2n + 1$ », pour tout entier $n \geq 0$.

- Initialisation : $2 \times 0 + 1 = 1 = w_0$.

Donc la propriété P_0 est vraie.

- Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour n entier naturel fixé et vérifions que la propriété P_{n+1} est vraie.

On a $w_n = 2n + 1$

d'après l'hypothèse de récurrence.

$$(n+2) \ w_n = (2n+1)(n+2)$$

$$(n+2) \ w_n + 1 = (2n+1)(n+2) + 1$$

$$(n+1) \ w_{n+1} = (2n+1)(n+2) + 1$$

$$\text{car } n \ w_n = (n+1) \ w_{n-1} + 1,$$

$$\text{donc } (n+1) \ w_{n+1} = (n+2) \ w_n + 1$$

$$(n+1) \ w_{n+1} = 2n^2 + 5n + 3$$

$$(n+1) \ w_{n+1} = (n+1)(2n+3)$$

$$w_{n+1} = 2n+3 = 2(n+1) + 1$$

$$\text{car } n+1 \neq 0.$$

Donc la propriété P_n est héréditaire.

Finalement, on a montré par récurrence que (w_n) est la suite des nombres impairs $w_n = 2n + 1$, pour tout entier naturel n .

- $w_{2\,009} = 2 \times 2\,009 + 1 = 4\,019$.

EXERCICE 2

Partie I

1.

Rappel de cours : théorème des limites des fonctions composéesSoient f, g deux fonctions et a, b, c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right\}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \end{array} \right.$$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, d'après le théorème sur les limites de fonctions composées.

2.

Rappel de cours : dérivation• Dérivation du produit de deux fonctions : soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ; uv est alors dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.• Dérivée de la fonction $\ln u$: soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I ; alors $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$. $x \mapsto x e^{-x}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.Donc $x \mapsto 1 + x e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. $x e^{-x} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, comme produit de fonctions positives ou nulles sur $\mathbb{R}_+$.Ainsi, $1 + x e^{-x} \geq 1 > 0$ sur $\mathbb{R}_+$.Par suite, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$f'(x) = \frac{0 + (1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}))}{1 + x e^{-x}} = \frac{(1-x)e^{-x}}{1 + x e^{-x}}.$$

On a déjà prouvé que $1 + x e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+$; de plus, $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, finalement, **le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $1 - x$ sur $\mathbb{R}_+$.**

3.

Méthode : Attention ! À cette question, on vous demande les variations de la fonction f et non le tableau de variations ; autrement dit, il faut décrire les variations à l'aide d'une phrase.De la question 2., on déduit que : $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 1[$;

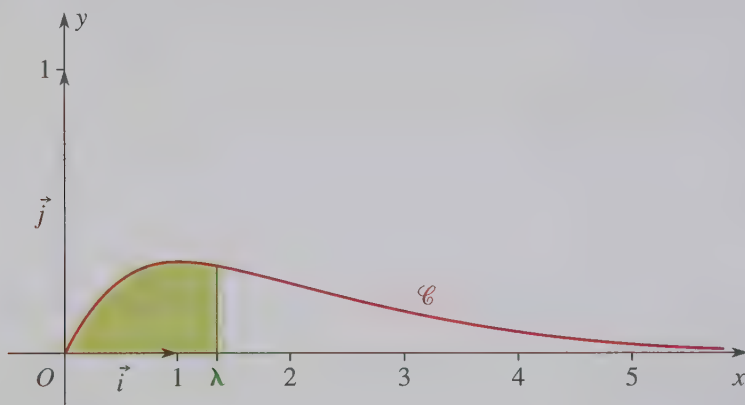
$$f'(x) < 0 \text{ sur }]1 ; +\infty[;$$

$$f'(x) = 0 \text{ pour } x = 1.$$

En conclusion, **f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et f est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$.**

Partie II

1. a) C'est le domaine du plan délimité par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$, car la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ (composée de fonctions continues) et positive, d'après le graphique.



b)

Rappel de cours : f est une fonction continue sur un intervalle I ; m et M sont deux réels et a, b sont deux réels de l'intervalle I tels que $a \leq b$.

Si $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

D'après la question 3 de la **partie I**, f admet un maximum en 1.

Ainsi, par définition du maximum, on a : $f(x) \leq f(1)$, pour tout x de $\mathbb{R}_+$.

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, pour $\lambda > 0$, on a :

$$\int_0^\lambda f(x) dx \leq f(1) (\lambda - 0),$$

$$\int_0^\lambda f(x) dx \leq \lambda \times f(1), \text{ pour tout } \lambda \text{ réel strictement positif.}$$

2. a)

Rappel de cours : intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ telles que u' et v' le sont aussi. On a alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$, alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$ (à une constante près).

De plus, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, et u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}_+$, car dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_0^\lambda - \int_0^\lambda -e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} + \int_0^\lambda e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} + [-e^{-x}]_0^\lambda \\ &= -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1.\end{aligned}$$

b) D'après l'indication donnée dans l'énoncé, on a :

$\ln(1 + x e^{-x}) \leq x e^{-x}$, car $x e^{-x} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\text{d'où } \int_0^\lambda \ln(1 + x e^{-x}) dx \leq \int_0^\lambda x e^{-x} dx,$$

puis $A(\lambda) \leq -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$, pour tout λ réel strictement positif.

$$3. \text{ Première méthode : } A(5) \leq 5 \times f(1) = 5 \times \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) \leq 1,57.$$

Seconde méthode : $A(5) \leq -5e^{-5} - e^{-5} + 1 \leq 0,96$.

Le meilleur majorant est le plus petit des deux. C'est donc la méthode 2 qui donne le meilleur majorant dans le cas $\lambda = 5$.

EXERCICE 3

$$\begin{aligned}\text{I. } \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \\ &= \frac{p \times (n-1)! + (n-p) \times (n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times (p + n - p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times n}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p}.\end{aligned}$$

II. 1. a) Le nombre de façons de tirer 2 jetons parmi les 10 se trouvant dans l'urne est

$$\binom{10}{2}.$$

Le nombre de façons de tirer 2 jetons blancs parmi les 7 jetons blancs se trouvant dans l'urne est $\binom{7}{2}$.

$$\text{Ainsi, } p(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{7!}{2!5!}}{\frac{10!}{2!8!}} = \frac{7 \times 6}{10 \times 9} = \frac{7}{15}.$$

b) Le nombre de façons de tirer 2 jetons impairs parmi les 6 jetons impairs se trouvant dans l'urne est $\binom{6}{2}$.

$$\text{D'où } p(B) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{2!8!}} = \frac{5 \times 6}{9 \times 10} = \frac{1}{3}.$$

c) $A \cap B$ est l'événement : « obtenir deux jetons blancs et impairs ».

Le nombre de façons de tirer 2 jetons impairs et blancs parmi les 4 jetons impairs et blancs se trouvant dans l'urne est $\binom{4}{2}$.

$$\text{On a } p(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15} \text{ et } p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45}.$$

Ainsi, $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$; on en conclut que **les événements A et B ne sont pas indépendants.**

2. a) X prend les valeurs 0 ; 1 ou 2.

$$p(X = 2) = p(A) = \frac{7}{15} ;$$

$$p(X = 0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15} ;$$

$$p(X = 1) = 1 - \frac{1}{15} - \frac{7}{15} = \frac{7}{15}.$$

X	0	1	2
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

b)

Rappel de cours : soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Son espérance mathématique est alors définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^2 n_i x_i = \frac{7}{15} + \frac{14}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}.$$

EXERCICE 4

1. a)

Méthode : soient z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

Et soient z et z' deux complexes tels que $z' \neq 0$, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

- On a $OM = |z|$ et $OM_1 = |z_1| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, donc $OM \times OM_1 = |z| \times \frac{1}{|z|} = 1$.
- mes $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = \arg(z_1) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) \pmod{2\pi}$

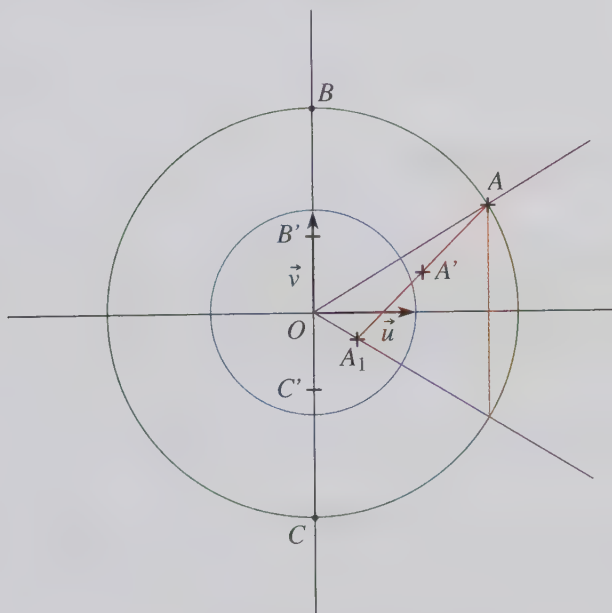
$$= \arg(1) - \arg(z) \pmod{2\pi}$$

$$= 0 - \arg(z) \pmod{2\pi}$$

$$= -\arg(z) \pmod{2\pi}$$

$$= -\text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}.$$

b)



$$2. a) M' \text{ est le milieu de } [MM_1], \text{ donc } z' = \frac{z + z_1}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

$$b) \bullet z_B = 2i, \text{ donc } z_{B'} = \frac{1}{2} \left(2i + \frac{1}{2i} \right) = \frac{-3}{4i} = \frac{3}{4} i.$$

$$\bullet z_C = -2i, \text{ donc } z_{C'} = \frac{1}{2} \left(-2i + \frac{1}{-2i} \right) = \frac{-3}{-4i} = -\frac{3}{4}i.$$

3. $M = M'$ équivaut à $z = z'$,

$$\text{équivaut à } z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

$$\text{équivaut à } z = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2z},$$

$$\text{équivaut à } z = \frac{1}{z},$$

$$\text{équivaut à } z^2 = 1, \quad \text{car } z \neq 0$$

$$\text{équivaut à } z = -1 \text{ ou } z = 1.$$

Ainsi, l'ensemble des points M d'affixe non nulle tels que $M = M'$ se réduit à deux points d'affixes 1 et -1 .

4. Si M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, alors l'affixe de M est $e^{i\theta}$, où θ est un argument de M .

$$\text{Ainsi, } M' \text{ a pour affixe } z' = \frac{1}{2} \left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} \right) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta.$$

Or, on a $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, donc l'affixe de M' est un réel compris entre -1 et 1 ; par suite, M' appartient au segment $[KL]$.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 4

1. a)

Rappel de cours : pour résoudre une équation du type $ax + by + c$, avec a, b, c, x et y entiers relatifs, et a et b premiers entre eux :

- on cherche une solution $(x_0; y_0)$ particulière ;
- on se ramène à la résolution de $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$;
- puis on utilise le théorème de Gauss.

$$\text{On a } (E) : 8x - 5y = 3.$$

Une solution particulière de cette équation est $(1; 1)$, car $8 \times 1 - 5 \times 1 = 3$.

$$\begin{cases} 8x - 5y = 3 \\ 8 \times 1 - 5 \times 1 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 5y = 3 \\ 8 \times 1 - 5 \times 1 = 3. \end{cases}$$

On soustrait les deux lignes et on obtient :

$$8(x - 1) - 5(y - 1) = 0,$$

$$8(x - 1) = 5(y - 1). \quad (*)$$

Les nombres 8 et 5 sont des nombres premiers entre eux.

Or, 5 divise $8(x - 1)$ d'après $(*)$; ainsi, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $x - 1$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $x - 1 = 5k$, d'où $x = 5k + 1$.

On remplace dans $(*)$ et on obtient :

$$8(5k + 1 - 1) = 5(y - 1),$$

$$8k = y - 1,$$

$$y = 8k + 1.$$

Finalement, les solutions de (E) sont de la forme $(5k + 1; 8k + 1)$.

b) On a $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$, donc $p = \frac{m-1}{8}$ et $q = \frac{m-4}{5}$.

On remplace dans (E) : $8 \times \frac{m-1}{8} - 5 \times \frac{m-4}{5} = m - 1 - m + 4 = 3$.

Par suite, le couple $(p; q)$ est solution de (E).

La résolution de (E) faite à la question 1. a) nous donne $p = 5k + 1$, avec k entier relatif.

Or, $m = 8p + 1 = 8(5k + 1) + 1 = 40k + 9$;

d'où $m \equiv 9 [40]$.

c) On a $2\ 000 \equiv 0 [40]$, donc $2\ 009 \equiv 9 [40]$.

Ainsi, **2 009 est le plus petit entier m supérieur à 2 000.**

2. a) On a $2^3 = 8 \equiv 1 [7]$, donc $2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1^k [7] \equiv 1 [7]$.

b) $2^{2\ 009} = 2^{3 \times 669} \times 2^2$,

or, $2^{3 \times 669} \equiv 1 [7]$,

d'où $2^2 \times 2^{3 \times 669} \equiv 4 [7]$,

puis $2^{2\ 009} \equiv 4 [7]$.

Pour conclure, le reste de la division euclidienne de $2^{2\ 009}$ par 7 est 4.

3. a) $10 \equiv 3 [7]$

$10^3 \equiv 27 [7]$

$10^3 \equiv 28 - 1 [7]$

$10^3 \equiv -1 [7]$.

b) On a $N = \overline{a00b} = a \times 10^3 + b$,

or, $10^3 \equiv -1 [7]$,

donc $a \times 10^3 \equiv -a [7]$,

$a \times 10^3 + b \equiv b - a [7]$,

$N \equiv b - a [7]$.

N est divisible par 7 si, et seulement si, $b - a$ est congru à 0 modulo 7,

si, et seulement si, $b - a = 0$ ou $b - a = 7$ ou $b - a = -7$,

car a et b sont des entiers compris entre 0 et 9

si, et seulement si, $b = a$ ou $b = a - 7$ ou $b = a + 7$.

On trouve ainsi les solutions :

1 001, 2 002, 3 003, 4 004, 5 005, 6 006, 7 007, 8 008, 9 009, pour la condition $b = a$;

7 000, 9 002, 8 001, pour la condition $b = a - 7$;

1 008, 2 009, pour la condition $b = a + 7$.

SUJETS D'ORAL



EXERCICE 1 Nombres complexes – Lieux géométriques

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, déterminer et représenter les ensembles des points M d'affixe z suivants :

1. $|z - 1 - 2i| = 5$;
2. $|z - 3| = |z|$.

EXERCICE 2 Analyse – Intégration par parties

Calculer par intégration par parties :

$$I = \int_1^e (x^3 + 3x^2 - 5x + 3) \ln x \, dx.$$

EXERCICE 3 Probabilités – Probabilité conditionnelle

Une compétition sportive est composée de deux disciplines : saut en longueur et course à pied de 100 m ; les participants ne peuvent s'inscrire qu'à un sport. 60 % des participants sont des hommes, 70 % d'entre eux s'inscrivent à la course à pied et 50 % des femmes s'inscrivent au saut en longueur.

1. Déterminer la probabilité qu'un participant choisi au hasard soit une femme inscrite à la course à pied.
2. Déterminer la probabilité qu'un participant choisi au hasard soit inscrit au saut en longueur.
3. Déterminer la probabilité qu'un participant inscrit au saut en longueur soit un homme.

EXERCICE 1

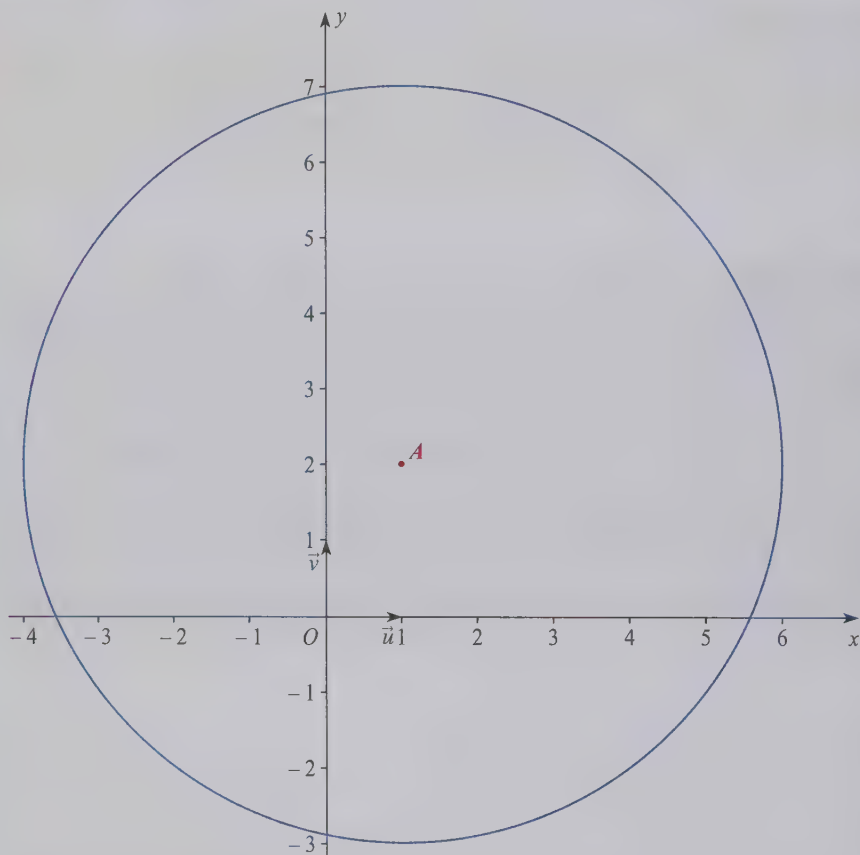
► SUR VOTRE BROUILLON

1. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + 2i$.

On remarque que $AM = |z - z_A|$.

$|z - z_A| = 5$ équivaut à $AM = 5$.

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - z_A| = 5$ est le cercle de centre A et de rayon 5.

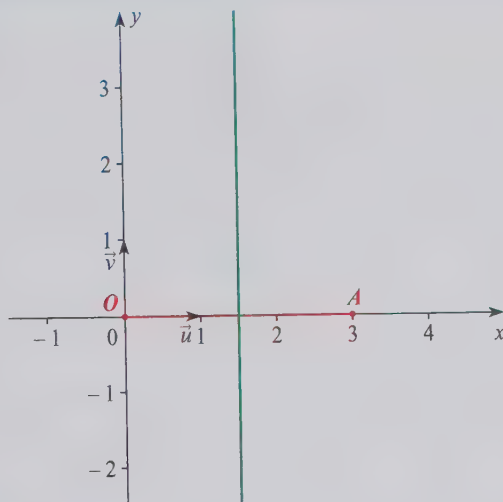


2. Soit A le point d'affixe 3.

On remarque que $AM = |z - 3|$ et $OM = |z|$.

$|z - 3| = |z|$ équivaut à $AM = OM$.

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 3| = |z|$ est la médiatrice du segment $[OA]$.



EXERCICE 2

On a $I = \int_1^e (x^3 + 3x^2 - 5x + 3) \ln x \, dx$.

Posons :

$$u(x) = \ln x, \quad \text{d'où} \quad u'(x) = \frac{1}{x};$$

$$v'(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3, \quad \text{d'où} \quad v(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \text{ (à une constante près)}.$$

u, v sont des fonctions dérivables sur $[1; e]$ et u', v' sont continues sur $[1; e]$.

On obtient alors par intégration par parties :

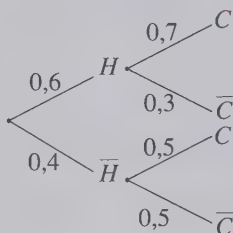
$$\begin{aligned} I &= \left[u(x)v(x) \right]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) \, dx \\ &= \left[\ln x \times \left(\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \left(\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right) dx \\ &= \left[\ln(e) \left(\frac{e^4}{4} + e^3 - \frac{5}{2}e^2 + 3e \right) - 0 \right] - \int_1^e \left(\frac{x^3}{4} + x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \right) dx \quad \text{car } \ln(1) = 0 \\ &= \frac{e^4}{4} + e^3 - \frac{5}{2}e^2 + 3e - \left[\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{4}x^2 + 3x \right]_1^e \quad \text{car } \ln(e) = 1 \\ &= \frac{e^4}{4} + e^3 - \frac{5}{2}e^2 + 3e - \left[\left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^3}{3} - \frac{5}{4}e^2 + 3e \right) - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{3} - \frac{5}{4} + 3 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } I = \frac{3}{16}e^4 + \frac{2}{3}e^3 - \frac{5}{4}e^2 + \frac{103}{48}.$$

EXERCICE 3

H est l'événement : « être un homme » ;

C est l'événement : « faire de la course à pied ».



1. $p(\overline{H} \cap C) = p(\overline{H}) \times p_{\overline{H}}(C) = (1 - p(H)) \times (1 - p_H(C)) = 0,4 \times 0,5 = \mathbf{0,2}.$

2. H et $\overline{H}$ forment une partition de l'univers ; ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(\overline{C}) &= p(H \cap \overline{C}) + p(\overline{H} \cap \overline{C}), \\ &= p(H) \times p_H(\overline{C}) + p(\overline{H}) \times p_{\overline{H}}(\overline{C}) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,5 = \mathbf{0,38}. \end{aligned}$$

3. $p_{\overline{C}}(H) = \frac{p(H \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \frac{0,6 \times 0,3}{0,38} = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} \approx \mathbf{0,474}.$

EXERCICE 1 Nombres complexes

Chaque question peut avoir une ou plusieurs bonnes réponses.

On donne le nombre complexe $z = -5 \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \right)$.

1. Un argument de z est égal à :

a) $-5 \arg \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \right)$;

b) $\pi + \arg(1+i) - \arg(\sqrt{3}-i) \pmod{2\pi}$;

c) $\frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$;

d) $-\frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

2. Le module de z est égal à :

a) $\frac{|1+i|}{|\sqrt{3}-i|}$;

b) $\frac{5}{\sqrt{2}}$;

c) $-5 \frac{|1+i|}{|\sqrt{3}-i|}$;

d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 2 Analyse – Suites. Intégration

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^1 t^n e^t dt.$$

1. Calculer u_0, u_1 .

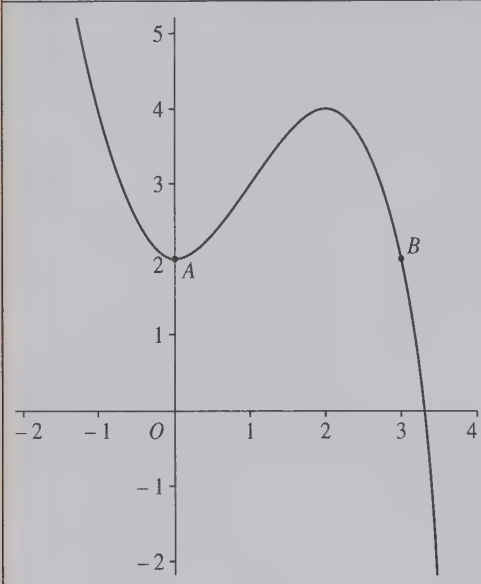
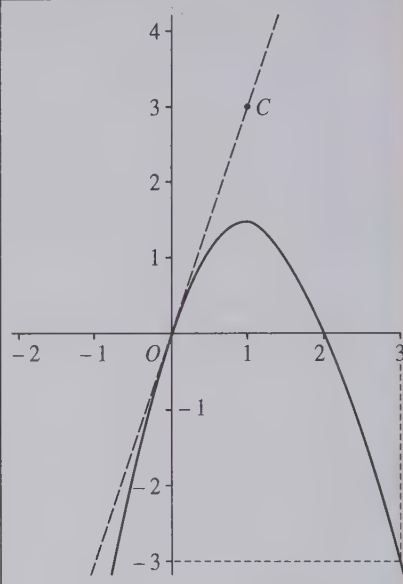
2. Montrer que $u_n \geq 0$, pour tout entier naturel n non nul.

3. Montrer que la suite (u_n) converge.

EXERCICE 3 Analyse – Interprétation graphique

Pour chacune des affirmations suivantes, numérotées de 1 à 8, dire si elle est vraie ou fausse sans justification.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' et f'' les dérivées première et seconde de f .

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la courbe représentative de f.	La courbe Γ ci-dessous est la courbe représentative de f'.
	
	La droite (OC) est tangente à Γ à O.

1. $f'(2) = 0$.
2. Une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$ est $y = 2$.
3. $f(1)$ et $f'(1)$ sont tous deux positifs.
4. f' est négative sur $[-1 ; 3]$
5. f' est croissante sur $[1 ; 2]$
6. Le coefficient directeur de la tangente en B à $\mathcal{C}$ est -3 .
7. $f''(0) = -3$.
8. f'' est positive sur $[0 ; 1]$.

► SUR VOTRE BROUILLON

EXERCICE 1

Remarque : contrairement aux QCM posés à l'écrit, vous pouvez être amené(e) à justifier vos réponses à l'oral. De plus, il peut y avoir plusieurs bonnes réponses et il faut donc toutes les tester.

1. On a $\arg(z) = \arg(-5) + \arg(1+i) - \arg(\sqrt{3}-i) \pmod{2\pi}$,

En effet,
$$\begin{cases} \arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi} \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi} \end{cases} \quad \text{pour } z, z' \text{ complexes non nuls.}$$

d'où $\arg(z) = \pi + \arg(1+i) - \arg(\sqrt{3}-i) \pmod{2\pi}$ car $\arg(-5) = \pi$

On voit ainsi que la réponse **b)** convient et la réponse **a)** non.

Par ailleurs, on a $1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$;

et $\sqrt{3}-i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, donc $\arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

Par suite, $\arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \pmod{2\pi}$.

$$= \frac{17\pi}{12} \pmod{2\pi}$$

$$= -\frac{5\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Or, on constate que $-\frac{5\pi}{12} \neq \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

On obtient ainsi que la réponse **d)** convient et que la **c)** ne convient pas.

Conclusion : les réponses b) et d) sont les seules vraies.

2. On a $|z| = \left| -5 \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \right) \right| = |-5| \times \left| \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \right|$ car $|zz'| = |z| \times |z'|$

$$= 5 \times \left| \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \right|$$

donc a) ne convient pas

$$= 5 \times \frac{|1+i|}{|\sqrt{3}-i|}$$

car $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$, avec z' non nul

$$= 5 \times \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}$$

donc c) ne convient pas

$$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc d) convient

$$= \frac{5 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

donc b) convient

Conclusion : les réponses b) et d) sont les seules qui conviennent.

EXERCICE 2

1. • On a : $u_0 = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1$.

• Calcul de $u_1 = \int_0^1 t e^t dt$.

On effectue une intégration par partie :

soit $u(t) = t$ d'où $u'(t) = 1$;
 $v'(t) = e^t$ d'où $v(t) = e^t$ (à une constante près).

u, v sont des fonctions dérivables sur $[0 ; 1]$ et u', v' sont continues sur $[0 ; 1]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= [u(t) v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t) v(t) dt \\ &= [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \\ &= (e - 0) - u_0 \\ &= e - (e - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Sur $[0 ; 1]$, on a $t^n \geq 0$,

d'où $t^n e^t \geq 0$ sur $[0 ; 1]$,

puis $\int_0^1 t^n e^t dt \geq 0$.

On vient de démontrer que $u_n \geq 0$, pour tout entier naturel non nul.

3. On a $t^{n+1} \leq t^n$ sur $[0 ; 1]$,

d'où $t^{n+1} e^t \leq t^n e^t$ car $e^t > 0$ sur $\mathbb{R}$

puis $\int_0^1 t^{n+1} e^t dt \leq \int_0^1 t^n e^t dt$.

Ainsi : $u_{n+1} \leq u_n$, pour tout entier naturel n non nul.

La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 ; par conséquent, elle converge.

EXERCICE 3

1. Vrai.

En effet, la courbe Γ passe par le point de coordonnées $(2 ; 0)$.

2. Vrai.

Car on lit $f'(0) = 0$ sur la courbe Γ et $f(0) = 2$ sur la courbe $\mathcal{C}$. Sachant que l'équation de la tangente en un point d'abscisse a est donnée par $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, on obtient $y = 2$.

3. Vrai.

Que ce soit sur la courbe $\mathcal{C}$ ou la courbe Γ , les points d'abscisse 1 sont tous les deux au-dessus de l'axe des abscisses.

4. Faux.

La courbe de Γ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0 ; 2]$.

5. Faux.

On remarque sur la courbe Γ que f' est décroissante sur $[1 ; 2]$.

6. Vrai.

Le coefficient directeur de la tangente en B à $\mathcal{C}$ est $f'(3)$, or le point de Γ d'abscisse 3 a bien pour ordonnée -3 .

7. Faux.

$f''(0)$ est le coefficient directeur de la tangente en O à Γ , c'est-à-dire à la droite (OC) . Or ce coefficient directeur est positif (il vaut 3), car la droite (OC) représente une fonction affine croissante.

8. Vrai.

Car f' est croissante sur $[0 ; 1]$.

EXERCICE 1 Analyse – Fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = (2 - x)e^x.$$

Justifier les affirmations suivantes :

1. le tableau de variation est :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	2	e	$-\infty$

2. l'équation $f(x) = 1$ admet exactement une solution positive.

EXERCICE 2 Probabilités

Un metteur en scène dispose de 9 figurants : 5 hommes et 4 femmes. Dans la scène qu'il veut tourner, il a besoin de 3 figurants qu'il choisit au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il ait au moins une femme ?

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3 Nombres complexes – Similitudes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par s l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (-1 + i)z + 2 - i.$$

1. Donner la nature de s et ses éléments caractéristiques.

2. A et B étant deux points distincts, on note $A' = (s \circ s)(A)$ et $B' = (s \circ s)(B)$.

a) Montrer que $A'B' = 2AB$.

b) Les droites (AB) et $(A'B')$ sont-elles perpendiculaires ?

► SUR VOTRE BROUILLON

EXERCICE 1

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

On a $f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = e^x(1-x)$,

et $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}_+$,

ainsi le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(1-x)$.

Par suite,
$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ sur } [0; 1[\\ f'(x) < 0 \text{ sur }]1; +\infty[\\ f'(x) = 0 \text{ en } 1 \end{cases}$$

En conclusion :
$$\begin{cases} f \text{ est strictement croissante sur } [0; 1] \\ f \text{ strictement décroissante sur } [1; +\infty]. \end{cases}$$

2. • f est continue sur $[1; +\infty[$
 f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$
 1 est compris entre $f(1) = e$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ } donc $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$.

• Sur $[0; 1]$, f est continue et strictement croissante de minimum égal à 2 ; par définition du minimum, on a $f(x) \geq 2$, pour tout x de $[0; 1]$. On en déduit que l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $[0; 1]$.

Finalement : $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 2

On cherche la probabilité de l'évènement contraire à celui demandé, soit la probabilité de n'obtenir aucune femme. Il faut, en conséquence, avoir choisi 3 hommes sur les 5 disponibles.

$$p = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = 1 - \frac{5!}{3!2!} \times \frac{3!6!}{9!} = 1 - \frac{5!}{2!} \times \frac{6!}{9!} = 1 - \frac{3 \times 4 \times 5}{7 \times 8 \times 9} = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42} \approx 0,88.$$

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3

1.

Méthode : l'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme :
 $z' = az + b$, avec a et b nombres complexes et $a \neq 0$.

- L'angle de la similitude est donné par un argument de a .
- Le rapport est donné par le module de a .
- Le centre de la similitude est obtenu en cherchant les points fixes.

• Ici, on a : $a = -1 + i$ et $b = 2 - i$,

d'où $|a| = |-1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$a = -1 + i = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, donc $\arg(a) = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

• Soit M d'affixe, un point invariant, il doit vérifier $z = (-1 + i)z + 2 - i$:
 on veut $z = (-1 + i)z + 2 - i$,
 d'où $(2 - i)z = 2 - i$,
 puis $z = 1$.

s est donc une similitude directe de centre C d'affixe 1, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

2. a)

La composée de deux similitudes directes de même centre A , de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs a et a' est une similitude directe de centre A , de rapport kk' et d'angle $a + a'$.

$s \circ s$ est ainsi une similitude directe de centre C d'affixe 1, de rapport 2 et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

Par suite, comme A' et B' sont les images respectives de A et B par $s \circ s$, on a $A'B' = 2AB$.

b) D'après la question précédente, on a de plus : $\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Les droites (AB) et $(A'B')$ sont donc **perpendiculaires**.

EXERCICE 1 Analyse – Fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{e^x}.$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.
3. Étudier le sens de variation de f .

EXERCICE 2 Géométrie dans l'espace – Barycentre

Soit A, B et C , trois points du plan non alignés.

G est le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et I est le centre de gravité du triangle ABC .

1. Trouver x tel que G soit le barycentre du système $\{(A; 1), (B; 1), (C; x)\}$.
2. Quel est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3 MC$?

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3 Arithmétique – Équation de la forme $ax + by = c$

Déterminer les solutions de l'équation $145x + 45y = 15$.

► SUR VOTRE BROUILLON

EXERCICE 1

1. Déterminons les limites de f ; on a :

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{e^x} \right) = +\infty ;$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{finalement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\bullet f(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x - 3}{3e^x}.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 3) &= 0, \text{ par croissance comparée} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x &= 0^+ \end{aligned} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x - 3}{3e^x} = -\infty ;$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

2. On remarque que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$,

$$\text{soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{3} \right) = 0.$$

Cela prouve que la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote (oblique) à la courbe de la fonction f en $+\infty$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car la fonction exponentielle ne s'annule pas).

$$\text{On a } f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{e^x}{(e^x)^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{e^x} ;$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{e^x} \geq 0 \text{ équivaut à } \frac{1}{3} \geq \frac{1}{e^x},$$

$$\text{équivaut à } e^x \geq 3,$$

$$\text{équivaut à } x \geq \ln 3 ; \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante.}$$

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \ln 3]$ et strictement croissante sur $[\ln 3 ; +\infty[$.

EXERCICE 2

1. On a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ en utilisant la relation de Chasles

$\overrightarrow{AG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$-\frac{1}{4}\overrightarrow{GA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, soit $x = 2$.

En conclusion, **G est le barycentre du système $\{(A; 1), (B; 1), (C, 2)\}$.**

2. $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3MC$ équivaut à $\|3\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\| = 3MC$,
équivaut à $\|3\overrightarrow{MI}\| = 3MC$,

car I est le centre de gravité de ABC et donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$
équivaut à $MI = MC$.

L'ensemble des points M recherché est donc la médiatrice du segment $[IC]$.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3

$145x + 45y = 15$ équivaut à $29x + 9y = 3$.

Cherchons une solution particulière de cette équation en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$29 = 9 \times 3 + 2$ et $9 = 2 \times 4 + 1$,

on en déduit que $1 = 9 - 2 \times 4 = 9 - (29 - 9 \times 3) \times 4 = 9 \times 13 - 29 \times 4$;

on obtient en multipliant par 3 : $29 \times (-12) + 9 \times 39 = 3$.

En conséquence, $x = -12$ et $y = 39$ constituent une solution particulière de cette équation.

On a ainsi $29x + 9y = 3 = 29 \times (-12) + 9 \times 39$, d'où $29(x + 12) = 9(39 - y)$.

Utilisons le théorème de Gauss :

29 divise $9(39 - y)$ et 29 est premier avec 9, donc 29 divise $39 - y$; d'où $y = 39 + 29k$, avec k entier relatif.

9 divise $29(x + 12)$ et 9 est premier avec 29, donc 9 divise $x + 12$; d'où $x = 12 + 9k'$, avec k' entier relatif.

Comme $29(x + 12) = 9(39 - y)$, on en déduit que $k = k'$.

Pour conclure, **les solutions de l'équation sont :**

$\begin{cases} x = 12 + 9k \\ y = 39 + 29k \end{cases}$, avec k entier relatif quelconque.

Remarque préalable importante

Pendant l'année scolaire 2008-2009, l'épreuve pratique de mathématiques du baccalauréat S en était encore au stade de l'expérimentation.

Cette épreuve pourrait se généraliser pour le baccalauréat 2010. Il est donc indispensable de s'informer auprès de son professeur pour savoir si cette épreuve est obligatoire ou pas.

SUJET 1 Expression du terme de rang n d'une suite récurrente

Énoncé

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer et représenter graphiquement les vingt premiers termes de cette suite. Le nuage de points obtenus a-t-il une particularité ? Si oui, laquelle ?

Appeler l'examineur pour une vérification de la particularité trouvée.

2. n étant donné, on peut calculer la valeur de u_n si on connaît la valeur de u_{n-1} . On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel non nul n , la valeur de u_n sans pour autant connaître la valeur de u_{n-1} . Pour cela, il faudrait disposer d'une formule donnant u_n en fonction de n .

a) À l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n , u_n en fonction de n .

Appeler l'examineur pour une vérification de la formule trouvée.

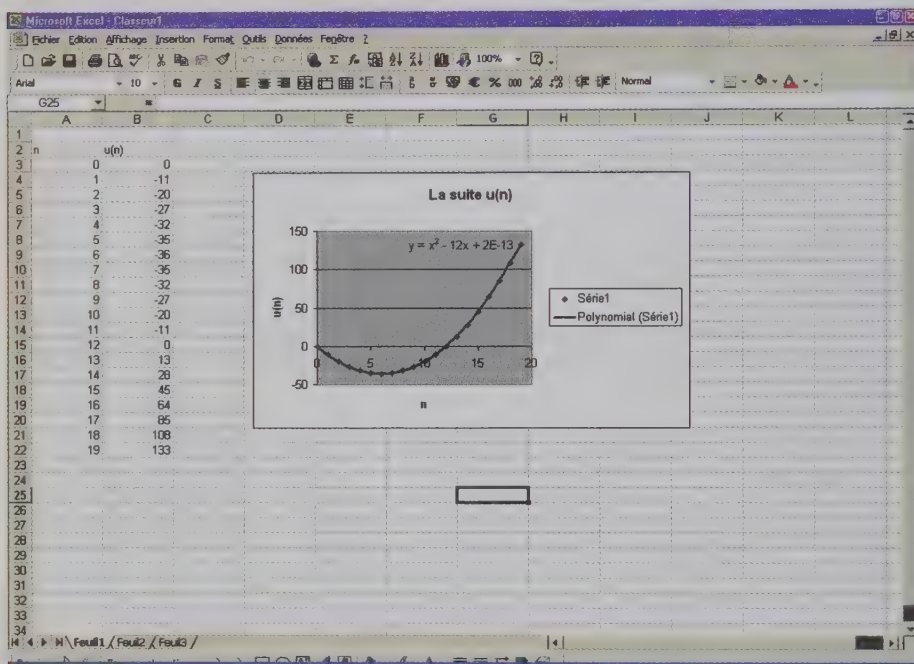
b) Démontrer cette formule.

Production demandée

- Le nuage de points attendu dans la question 1. et la particularité trouvée à ce nuage.
- La stratégie de démonstration retenue à la question 2., ainsi que les étapes de cette démonstration.

► CORRIGÉ DU SUJET 1

1. À l'aide d'un tableur, par exemple, on obtient les vingt premiers termes de la suite et leur représentation graphique :



Les points semblent se trouver sur une parabole.

2. a) D'après les observations faites à la question 1., on conjecture la formule suivante : $u_n = n^2 - 12n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) Soit P_n : « $u_n = n^2 - 12n$ », pour tout n de $\mathbb{N}$.

• Initialisation : on a $u_0 = 0 = 0^2 - 12 \times 0$, donc P_0 est vraie.

• Hérédité : supposons P_n vraie pour n entier naturel fixé et montrons que P_{n+1} est vraie.

$$u_{n+1} = u_n + 2n - 11 \quad \text{par définition}$$

$$= n^2 - 12n + 2n - 11$$

$$= n^2 - 10n - 11$$

$$= (n+1)^2 - 12(n+1) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

On en conclut que P_n est héréditaire.

On a montré par récurrence que $u_n = n^2 - 12n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Remarque préalable importante

Pendant l'année scolaire 2008-2009, l'épreuve pratique de mathématiques du baccalauréat S en était encore au stade de l'expérimentation.

Cette épreuve pourrait se généraliser pour le baccalauréat 2010. Il est donc indispensable de s'informer auprès de son professeur pour savoir si cette épreuve est obligatoire ou pas.

SUJET 2 Recherche d'un lieu géométrique

Énoncé

Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne quatre points O, A, B et C et un cercle (Γ) de centre O .

Le point M est un point quelconque variable sur le cercle (Γ) . On associe au point M l'unique point M' du plan $\mathcal{P}$ défini par l'égalité : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

Il s'agit de déterminer le lieu géométrique $\mathcal{L}$ du point M' lorsque le lieu géométrique du point M est le cercle (Γ) .

1. a) À l'aide d'un logiciel de géométrie plane, construire les points O, A, B et C , le cercle (Γ) et un point libre M sur ce cercle.
- b) Construire le point M' associé à M .

Appeler l'examineur pour une vérification de la construction faite.

- c) En observant plusieurs positions du point M , faire une conjecture sur la nature de la transformation du plan qui transforme M en M' , ainsi que la nature du lieu géométrique du point M' .

Appeler l'examineur pour une vérification de la figure réalisée et de la conjecture faite.

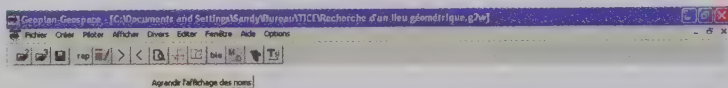
2. a) Déterminer par le calcul la nature de la transformation du plan qui transforme le point M en le point M' .
- b) Déterminer le lieu géométrique $\mathcal{L}$ du point M' .

Production demandée

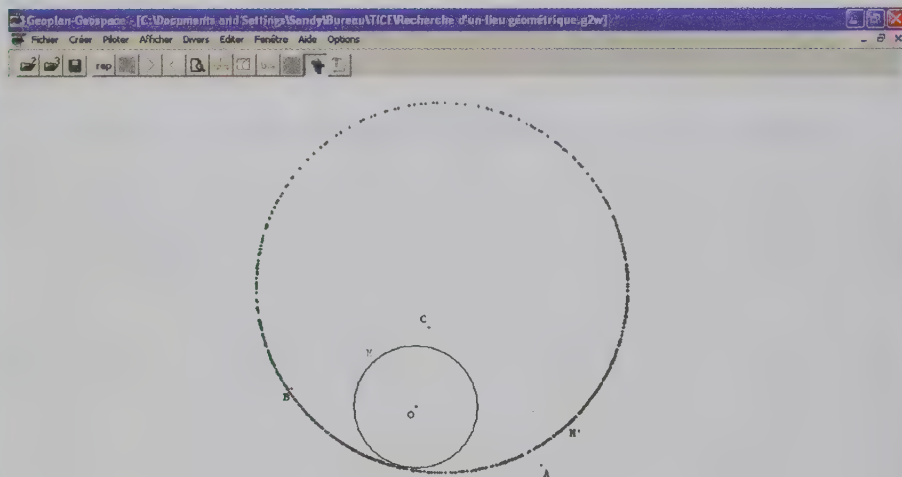
- La figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- Le calcul permettant d'obtenir la nature de la transformation.
- La caractérisation du lieu géométrique de M' et sa justification.

► CORRIGÉ DU SUJET 2

1. a) et b) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on construit les points demandés.



c)



En reproduisant la figure précédente pour différentes positions de M sur le cercle, on peut conjecturer que le point M' serait l'image du point M par une translation et que le point M' décrirait lui-même un cercle.

2. a) Introduisons le point G , barycentre des points $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 2)$. G existe bien, car $1 + 1 + 2 = 4 \neq 0$.

On a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$.

Ainsi, le point M' est l'image du point M par la translation de vecteur $4\overrightarrow{MG}$.

b) L'image du cercle (Γ) par cette translation est donc un cercle de même rayon que (Γ) et de centre O' , l'image de O .

Remarque préalable importante

Pendant l'année scolaire 2008-2009, l'épreuve pratique de mathématiques du baccalauréat S en était encore au stade de l'expérimentation.

Cette épreuve pourrait se généraliser pour le baccalauréat 2010. Il est donc indispensable de s'informer auprès de son professeur pour savoir si cette épreuve est obligatoire ou pas.

SUJET 3 Planètes et ajustement**Énoncé**

Le tableau ci-dessous, pour chaque planète du système solaire, sa période de révolution et le rayon de l'orbite considérée comme circulaire.

A	B	C
Planète	r (en m)	T (en s)
Mercure	$5.79\text{E} + 10$	$7.60\text{E} + 06$
Vénus	$1.08\text{E} + 11$	$1.94\text{E} + 07$
Terre	$1.49\text{E} + 11$	$3.16\text{E} + 07$
Mars	$2.28\text{E} + 11$	$5.94\text{E} + 07$
Jupiter	$7.78\text{E} + 11$	$3.74\text{E} + 08$
Saturne	$1.42\text{E} + 12$	$9.30\text{E} + 08$
Uranus	$2.87\text{E} + 12$	$2.66\text{E} + 09$
Neptune	$4.50\text{E} + 12$	$5.20\text{E} + 09$

1. Entrer sur une feuille de calcul d'un tableur les données des colonnes A, B et C. Tracer, à l'aide du tableur, le graphique représentant la période T en fonction du rayon r . Combien de points apparaissent nettement sur le graphique ? Les identifier et expliquer le phénomène.

2. Faire afficher le graphique donnant $\ln(T)$ en fonction de $\ln(r)$. Combien de points apparaissent sur le graphique et que constatez-vous ?

Appeler l'examineur pour lui montrer les graphiques obtenus.

3. Déterminer, à l'aide du tableur, le coefficient directeur d'une droite qui permet de donner un ajustement des points représentés. Quelle est l'équation de la droite que l'on peut retenir expérimentalement ?

Appeler l'examineur pour lui présenter la procédure retenue et contrôler le résultat.

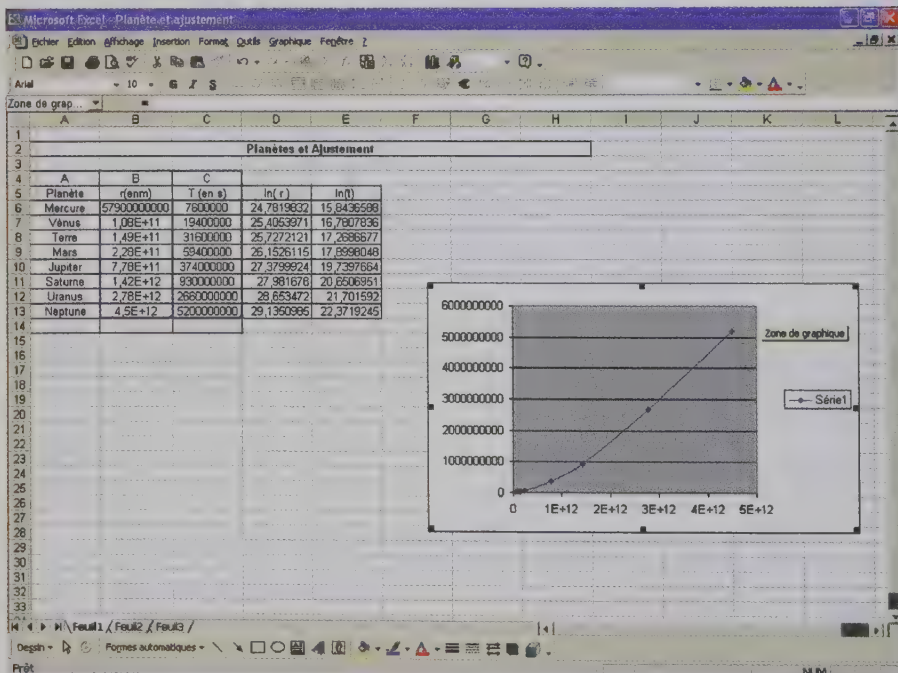
4. En déduire que, pour les huit planètes étudiées, $T \approx k (\sqrt{r})^3$, où k est une constante réelle. Vérifier avec le tableur.

Production demandée

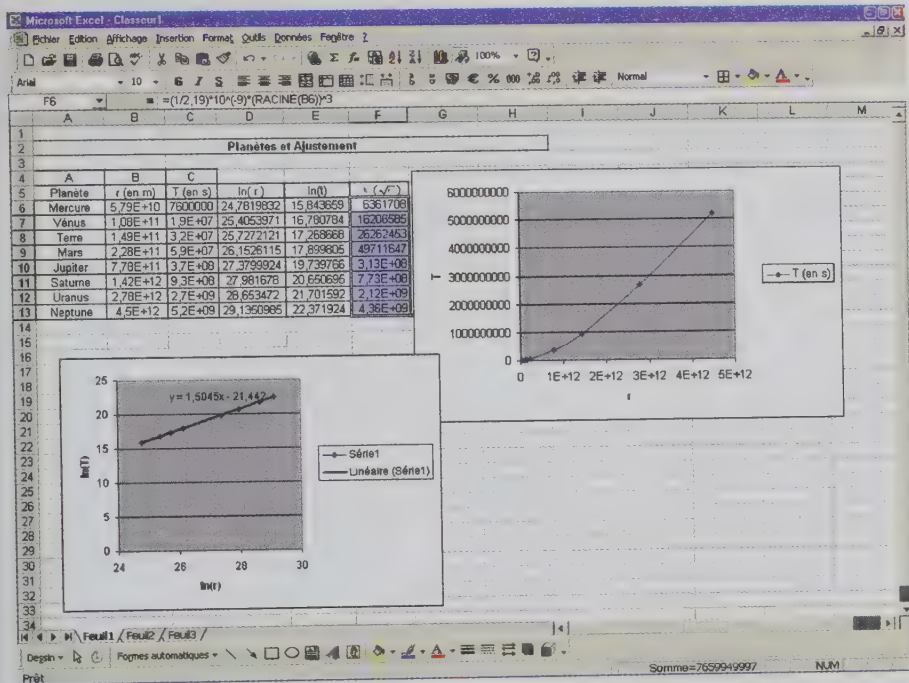
- Pour la question 1., une analyse argumentée du graphique obtenu est attendue.
- Pour la question 2., une analyse du nouveau graphique obtenu est attendue. L'argumentation fera l'objet des questions suivantes.
- Pour la question 3., préciser la méthode de calcul choisie pour établir une équation de la droite d'ajustement.
- Pour la question 4., une rédaction détaillée du calcul de la valeur de k est attendue.

► CORRIGÉ DU SUJET 3

1. On trace, à l'aide du tableur, le graphique représentant T en fonction de r .



On ne voit nettement que cinq points sur le graphique, correspondant aux planètes Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. En effet, en raison de l'échelle choisie, les données correspondant aux planètes Mercure, Vénus et à la Terre ont des valeurs très proches et leurs points forment un amas.



Sur ce nouveau graphique, on voit clairement huit points bien espacés qui correspondent aux huit planètes. De plus, ces points semblent alignés.

3. L'équation de la droite apparaît en cliquant droit sur un point de la droite, en demandant une *courbe de tendance* et, en option, il faut choisir d'afficher l'équation. Le tableau donne une équation $y = 1,5045x - 21,442$.

On peut donc retenir comme coefficient directeur 1,50 et comme ordonnée à l'origine -21,5.

Finalement, nous obtenons l'équation suivante : $\ln(T) = \frac{3}{2} \ln(r) - 21,5$.

4. La réponse précédente nous a donné : $\ln(T) = \frac{3}{2} \ln(r) - 21,5$,

d'où $\ln(T) = \ln\left(r^{\frac{3}{2}}\right) - 21,5 = \ln\left(\sqrt{r}^3\right) - 21,5$,

puis $T = \exp\left(\ln\left(\sqrt{r}^3\right) - 21,5\right) = \ln\left(\sqrt{r}\right)^3 \times e^{-21,5}$, avec $k = e^{-21,5} \approx 4,6 \times 10^{-10}$.

On retrouve bien la formule de l'énoncé.

Remarque préalable importante

Pendant l'année scolaire 2008-2009, l'épreuve pratique de mathématiques du baccalauréat S en était encore au stade de l'expérimentation.

Cette épreuve pourrait se généraliser pour le baccalauréat 2010. Il est donc indispensable de s'informer auprès de son professeur pour savoir si cette épreuve est obligatoire ou pas.

SUJET 4 Étude de lieux géométriques

Énoncé

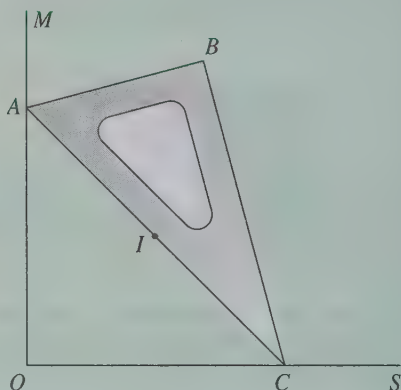
Le triangle ABC représente une équerre telle que $AB = 3$, $AC = 6$ et l'angle en B est droit.

Les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires $[OM)$ et $[OS)$.

Le point I est le milieu du segment $[AC]$.

On s'intéresse aux lieux des points I et B .

1. Observer les propriétés géométriques de la figure. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.



Appeler l'examineur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point I quand C décrit la demi-droite $[OS)$. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

Appeler l'examineur pour valider la conjecture.

3. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point B quand C décrit la demi-droite $[OS)$. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

Appeler l'examineur pour valider la conjecture.

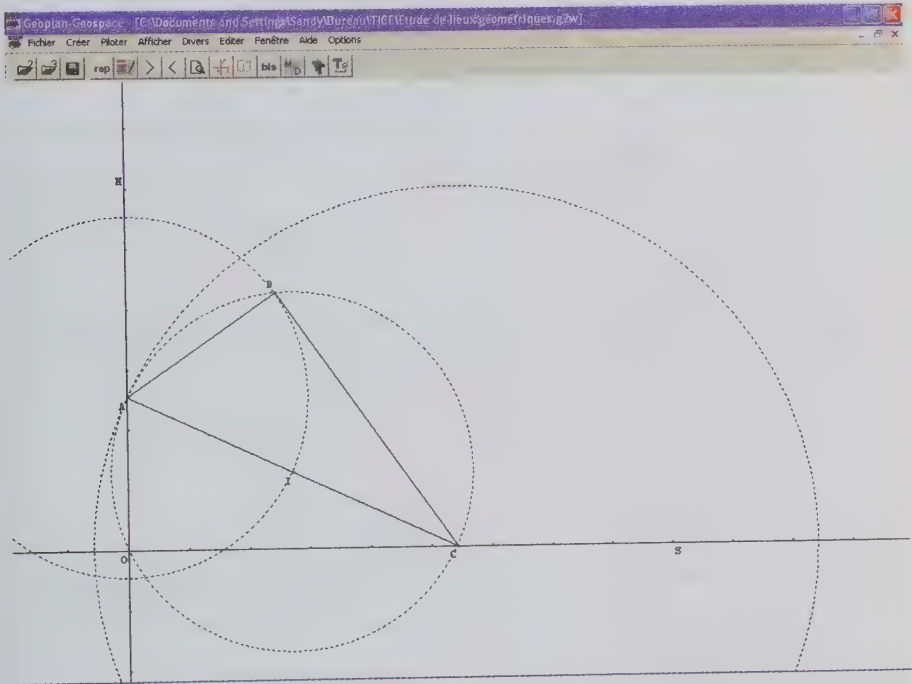
4. – Donner les mesures des angles de l'équerre, puis celle de $\widehat{AOB}$ (A distinct de O).
 – En déduire que le lieu de B est inclus dans une courbe simple dont on précisera la nature.
 – Démontrer que : $OB = 6 \sin(\widehat{OAB})$.
 – En déduire le lieu de B .

Production demandée

Réponse écrite pour la question 4..

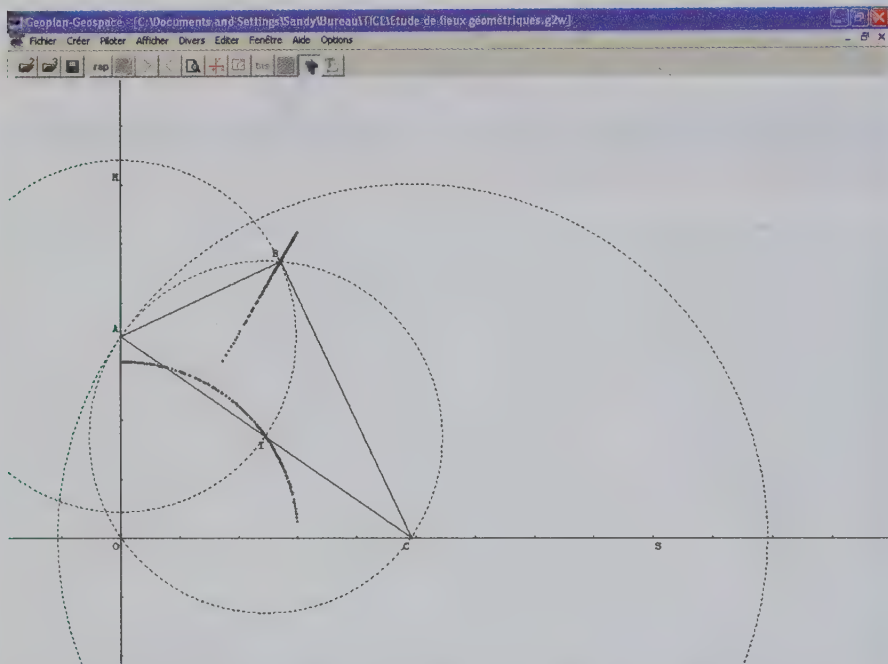
► CORRIGÉ DU SUJET 4

1. et 2. Pour réaliser cette figure, il faut penser à la construction, à la règle et au compas, d'un triangle rectangle dont deux longueurs (y compris l'hypoténuse) sont connues.



On peut conjecturer que le point I décrit un cercle lorsque C décrit la demi-droite $[OS]$.

3.



On peut conjecturer que le point B décrit une droite lorsque C décrit la demi-droite $[OS)$.

4. • ABC est un triangle rectangle en B . En appliquant le théorème de Pythagore, on a : $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 36 - 9 = 27$.

Donc $BC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

On a évidemment $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$,

et $\cos(\widehat{CAB}) = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, d'où $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$;

par différence, $\widehat{BCA} = \pi - \widehat{ABC} - \widehat{CAB} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

• Comme ABC et AOC sont tous les deux des triangles rectangles d'hypoténuse commune $[AC]$, les quatre points A, B, C et O sont sur le même cercle de diamètre $[AC]$. Ainsi, les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AOB}$ sont égaux puisqu'ils interceptent le même arc $\widehat{AB}$: par conséquent : $\widehat{ACB} = \widehat{AOB} = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

• Lorsque C décrit la demi-droite $[OS)$, l'angle $\widehat{ACB}$ reste constant, donc $\widehat{AOB}$ également. Or, on a $\widehat{AOB} = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$ et, comme $(\overrightarrow{OM})$ est fixe, $(\overrightarrow{OB})$ l'est également. Par suite, le point B décrit une partie de la droite passant par O et faisant avec l'axe des ordonnées un angle de $-\frac{\pi}{6}$.

• Ainsi, l'angle géométrique issu de $\widehat{O}$ dans le triangle AOB mesure $\frac{\pi}{6}$.

Par suite, dans le triangle AOB , le sinus devient : $\frac{AB}{\sin \widehat{O}} = \frac{OA}{\sin \widehat{B}} = \frac{OB}{\sin \widehat{A}}$,

d'où : $\frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{AB}{\sin \left(\frac{\pi}{6}\right)}$, où $\widehat{OAB}$ désigne un angle géométrique ;

puis $OB = 6 \sin \widehat{OAB}$.

Or, on a $\widehat{OAB} = \widehat{OAC} + \widehat{CAB}$ et, de plus, $\text{mes } \widehat{OAC} \in \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$,

d'où $\text{mes } \widehat{OAB} \in \left] \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3} \right[$,

puis $OB \in]0 ; 3\sqrt{3}[$.

Finalement, B appartient à un segment de droite passant par O , exclu, faisant un

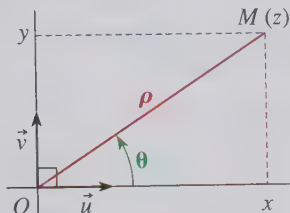
angle de $-\frac{\pi}{6}$ avec l'axe des ordonnées et tel que $0 < OB < 3\sqrt{3}$.

FORMULAIRE

Nombres complexes, géométrie

Nombres complexes

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le point $M(x, y)$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a pour affixe z .



z a pour forme algébrique $x + iy$.

Partie réelle de z : $\operatorname{Re}(z) = x$.

Partie imaginaire de z : $\operatorname{Im}(z) = y$.

Conjugué de z : $\bar{z} = x - iy$.

Module de z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si $z \neq 0$, z a pour forme trigonométrique :

$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $\rho > 0$.

z a pour forme exponentielle : $z = \rho e^{i\theta}$.

Module de z : $|z| = \rho$.

Argument de z : $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$.

Conjugué de z : $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.

• Propriétés des modules

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z| |z'|$.

Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B , alors : $\overline{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$.

• Propriétés des arguments

Pour tous $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$,

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$;

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$.

• Caractérisation complexe de transformations $M(z) \mapsto M'(z')$

Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe t , $t \in \mathbb{C}$:
 $z' = z + t$.

Homothétie de centre Ω d'affixe ω , $\omega \in \mathbb{C}$, et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $z' - \omega = k(z - \omega)$.

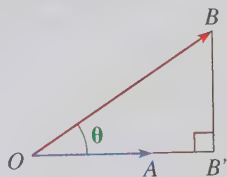
Rotation de centre Ω d'affixe ω , $\omega \in \mathbb{C}$, et d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$: $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Géométrie

• Produit scalaire de deux vecteurs non nuls du plan

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB'} ;$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \cos \theta.$$



• Produit scalaire et coordonnées

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal de l'espace, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Une équation de la sphère de centre Ω de coordonnées (a, b, c) et de rayon R est :
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Algèbre, trigonométrie

Identités remarquables

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots \\ &\quad + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \end{aligned}$$

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soient a , b et c trois nombres réels ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- lorsque $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};$$

- lorsque $\Delta = 0$, une solution réelle

$$z_1 = -\frac{b}{2a};$$

- lorsque $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

$$\text{Si } \Delta \neq 0, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

$$\text{Si } \Delta = 0, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2.$$

Trigonométrie

• Formules d'addition

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b;$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b;$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

• Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a;$$

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1;$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a;$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$$

Probabilités

Généralités

Si les événements A et B sont incompatibles, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Dans le cas général :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A); P(\Omega) = 1; P(\emptyset) = 0.$$

Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de A ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Dans le cas de l'équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

• Probabilité conditionnelle de B sachant A

$P_A(B)$ est définie par :

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

Cas où A et B sont indépendants :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

• Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de Ω ,

$$\text{alors } P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n).$$

Variable aléatoire

Espérance mathématique :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

$$\text{Variance : } V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (p_i x_i^2) - (E(X))^2.$$

$$\text{Écart-type : } \sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Combinaisons

et formule du binôme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq p \leq n,$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n; \quad 0! = 1.$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!}$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p};$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Pour tous $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots$$

$$+ \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n.$$

Lois de probabilité

• Loi de Bernoulli de paramètre p ,

$$p \in [0; 1]$$

X peut prendre les valeurs 0 et 1 avec les probabilités $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

$$E(X) = p; \quad V(X) = p(1-p).$$

• Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p \in [0; 1]$$

X peut prendre les valeurs entières 0, 1, ..., n .

Pour $0 \leq k \leq n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$E(X) = np ; V(X) = np(1-p).$$

- **Loi uniforme sur $[0 ; 1]$**

J étant un intervalle inclus dans $[0 ; 1]$,

$P(J)$ = longueur de J .

- **Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0 ; +\infty[$, dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement**

$$\text{Pour } 0 \leq a \leq b, P([a, b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Pour tout $c \geq 0$,

$$P([c, +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Analyse

Suites arithmétiques, suites géométriques

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + a ; \\ u_n = u_0 + na.$$

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R}^*$:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n ; \\ u_n = u_0 q^n.$$

• Somme de termes

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} ;$$

$$\text{si } b \neq 1, \\ \text{alors } 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

• Limite d'une suite géométrique

$$\text{Si } 0 < q < 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

$$\text{Si } q > 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

Propriétés algébriques de fonctions usuelles

• Fonctions exponentielles et logarithmes

$$e^0 = 1.$$

Pour tous réels a et b ,

$$e^{a+b} = e^a e^b ; e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} ; (e^a)^b = e^{ab}.$$

$$\text{Pour tout } x \in]0 ; +\infty[, \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt ;$$

$$\ln 1 = 0 ; \ln e = 1.$$

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$,

$$\ln ab = \ln a + \ln b \text{ et } \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

$$\text{Pour tout } a \in]0 ; +\infty[\text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, \\ a^x = e^{x \ln a} ; \ln(a^x) = x \ln a.$$

$$\text{Pour tout } x \in]0 ; +\infty[, \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } y \in]0 ; +\infty[, \\ y = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y.$$

• Racine $n^{\text{ème}}$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tous } x \in [0 ; +\infty[\\ \text{et } y \in [0 ; +\infty[, \\ y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n.$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in]0 ; +\infty[, \\ x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Limites usuelles de fonctions

• Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

• Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = 0.$$

• Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

• Comportement à l'origine de

$\ln(1+x)$, e^x , $\sin x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dérivées et primitives

Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives sur des intervalles convenables. Les hypothèses permettant de les utiliser doivent être vérifiées par les candidats.

• Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \times \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

• Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v';$$

$$(ku)' = ku', k \text{ étant une constante};$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2};$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; (v \circ u)' = (v' \circ u)u';$$

$$(e^u)' = e^u u'; (\ln u)' = \frac{u'}{u};$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Calcul intégral

Les hypothèses permettant d'utiliser les formules suivantes doivent être vérifiées par les candidats.

• Formules fondamentales

Si F est une primitive de f ,

$$\text{alors } \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

$$\int_b^a f(t)dt = - \int_a^b f(t)dt.$$

$$\text{Si } g(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ alors } g'(x) = f(x).$$

• Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

• Linéarité

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\ = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt. \end{aligned}$$

• Positivité

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } f \geq 0, \text{ alors } \int_a^b f(t)dt \geq 0.$$

• **Ordre**

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

• **Inégalité de la moyenne**

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$,

alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.

• **Intégration par parties**

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

• **Valeur moyenne**

La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ ($a \neq b$) est :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

Équations différentielles

Pour tous $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, C \in \mathbb{R}.$$

Enseignement de spécialité

Congruences

Pour tous $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$,

si $a \equiv b [n]$ et $a' \equiv b' [n]$, alors :

$a + a' \equiv b + b' [n]$; $a - a' \equiv b - b' [n]$;

$aa' \equiv bb' [n]$; $a^p \equiv b^p [n]$.

Caractérisation complexe des similitudes

• Similitude directe : $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

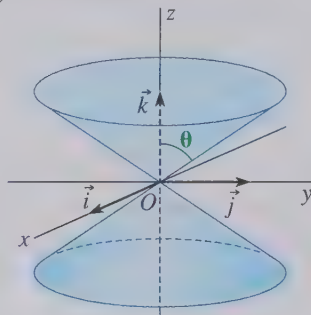
• Similitude indirecte : $z' = a\bar{z} + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

Dans les deux cas, le rapport de la similitude est égal à $|a|$.

Ensembles de points

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une équation du cylindre d'axe $(O; \vec{k})$ et de rayon $r > 0$ est $x^2 + y^2 = r^2$.

Une équation d'un cône d'axe $(O; \vec{k})$ est $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \theta$.



Exercices de géométrie

Exercices de géométrie

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R . Soit A un point du cercle. Soit M un point du segment OA . Soit P un point du cercle. Soit Q un point du segment OP . Soit R un point du segment AP . Soit S un point du segment MP . Soit T un point du segment QR . Soit U un point du segment ST . Soit V un point du segment UT . Soit W un point du segment TV . Soit X un point du segment UV . Soit Y un point du segment UX . Soit Z un point du segment XY . Soit A' un point du segment OA . Soit B' un point du segment OB . Soit C' un point du segment OC . Soit D' un point du segment OD . Soit E' un point du segment OE . Soit F' un point du segment OF . Soit G' un point du segment OG . Soit H' un point du segment OH . Soit I' un point du segment OI . Soit J' un point du segment OJ . Soit K' un point du segment OK . Soit L' un point du segment OL . Soit M' un point du segment OM . Soit N' un point du segment ON . Soit P' un point du segment OP . Soit Q' un point du segment OQ . Soit R' un point du segment OR . Soit S' un point du segment OS . Soit T' un point du segment OT . Soit U' un point du segment OU . Soit V' un point du segment OV . Soit W' un point du segment OW . Soit X' un point du segment OX . Soit Y' un point du segment OY . Soit Z' un point du segment OZ . Soit A'' un point du segment OA . Soit B'' un point du segment OB . Soit C'' un point du segment OC . Soit D'' un point du segment OD . Soit E'' un point du segment OE . Soit F'' un point du segment OF . Soit G'' un point du segment OG . Soit H'' un point du segment OH . Soit I'' un point du segment OI . Soit J'' un point du segment OJ . Soit K'' un point du segment OK . Soit L'' un point du segment OL . Soit M'' un point du segment OM . Soit N'' un point du segment ON . Soit P'' un point du segment OP . Soit Q'' un point du segment OQ . Soit R'' un point du segment OR . Soit S'' un point du segment OS . Soit T'' un point du segment OT . Soit U'' un point du segment OU . Soit V'' un point du segment OV . Soit W'' un point du segment OW . Soit X'' un point du segment OX . Soit Y'' un point du segment OY . Soit Z'' un point du segment OZ .

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R . Soit A un point du cercle. Soit M un point du segment OA . Soit P un point du cercle. Soit Q un point du segment OP . Soit R un point du segment AP . Soit S un point du segment MP . Soit T un point du segment QR . Soit U un point du segment ST . Soit V un point du segment UT . Soit W un point du segment TV . Soit X un point du segment UV . Soit Y un point du segment UX . Soit Z un point du segment XY . Soit A' un point du segment OA . Soit B' un point du segment OB . Soit C' un point du segment OC . Soit D' un point du segment OD . Soit E' un point du segment OE . Soit F' un point du segment OF . Soit G' un point du segment OG . Soit H' un point du segment OH . Soit I' un point du segment OI . Soit J' un point du segment OJ . Soit K' un point du segment OK . Soit L' un point du segment OL . Soit M' un point du segment OM . Soit N' un point du segment ON . Soit P' un point du segment OP . Soit Q' un point du segment OQ . Soit R' un point du segment OR . Soit S' un point du segment OS . Soit T' un point du segment OT . Soit U' un point du segment OU . Soit V' un point du segment OV . Soit W' un point du segment OW . Soit X' un point du segment OX . Soit Y' un point du segment OY . Soit Z' un point du segment OZ . Soit A'' un point du segment OA . Soit B'' un point du segment OB . Soit C'' un point du segment OC . Soit D'' un point du segment OD . Soit E'' un point du segment OE . Soit F'' un point du segment OF . Soit G'' un point du segment OG . Soit H'' un point du segment OH . Soit I'' un point du segment OI . Soit J'' un point du segment OJ . Soit K'' un point du segment OK . Soit L'' un point du segment OL . Soit M'' un point du segment OM . Soit N'' un point du segment ON . Soit P'' un point du segment OP . Soit Q'' un point du segment OQ . Soit R'' un point du segment OR . Soit S'' un point du segment OS . Soit T'' un point du segment OT . Soit U'' un point du segment OU . Soit V'' un point du segment OV . Soit W'' un point du segment OW . Soit X'' un point du segment OX . Soit Y'' un point du segment OY . Soit Z'' un point du segment OZ .



Annales Bac 2010

*Sujets
complets corrigés*

Mathématiques **T^{le}S** Obligatoire et spécialité

Pour s'entraîner et réussir l'épreuve du bac !

- 22 sujets complets (plus de 100 exercices), bac 2009 inclus, tous corrigés.
- 4 sujets pour préparer l'oral.
- 4 sujets de l'épreuve pratique (expérimentale).
- Ces sujets traitent **tous les thèmes du programme** repérés par des couleurs spécifiques.
- Chaque sujet fait l'objet d'un **corrigé rédigé** à l'identique de ce que l'on attend de vous le jour de l'examen, accompagné de **conseils**, d'**astuces** et de **rappels de cours**.
- En fin d'ouvrage, un **formulaire** très complet vous permet de retrouver rapidement les bonnes formules.
- Le **descriptif des épreuves**, des **conseils généraux** et un **tableau des exercices classés par thèmes** complètent utilement cet ouvrage.

Annales 2010

Sujets et corrigés

- Maths T^{le} ES
- Maths T^{le} S
- Physique-Chimie T^{le} S
- SVT T^{le} S

- Français 1^{res} L/ES/S
- Philosophie T^{les} L/ES/S
- Histoire-Géographie
T^{les} L/ES/S
- Anglais T^{les} toutes séries

Sujets

- Maths T^{le} S



Des sujets corrigés gratuits en plus sur www.eleves.hachette-education.com !

ISBN : 978-2-01-169944-2

16/9944/6

9



www.hachette-education.com

hachette
ÉDUCATION

7,40 €
TTC
France métropolitaine