

Exos 1^{res} ES/L

résolus

Conseillé par les enseignants

Maths

NOUVEAU PROGRAMME

250 exercices
minutés

avec trois niveaux de difficulté

30 interrogos
écrites

sur tout le programme

des résumés

GIBERT JOSEPH

occasion

Tous les corrigés
détaillés

avec des conseils de méthode

+
un formulaire
détachable

chette
ED

Exos ^{1^{res}} ES/L

résolus

Maths

Claudine **RENARD**

Geneviève **ROCHE**

CONCEPTION GRAPHIQUE

Couverture : Audrey Izern

Intérieur : Karine Nayé

Photo de couverture : @stock.xchg®vi

COMPOSITION, MISE EN PAGES ET SCHÉMAS

ScienTech Livre

© HACHETTE Livre 2011, 43, quai de Grenelle, 75905 PARIS cedex 15.

ISBN : 978 2.01 160293.0

www.hachette-education.com

Achevé d'imprimer en Italie par Grafiche Flaminia

Dépot légal : Juin 2011 – Édition : 1 - 16/0293/7

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le code de la propriété intellectuelle, n'autorisant, aux termes des articles L.122.4 et L.122.5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que « les analyses et courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayant cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

PRÉFACE

Ce livre d'exercices traite l'ensemble du nouveau programme de mathématiques de 1^{re} ES (enseignement spécifique) et de 1^{re} L (enseignement obligatoire).

Le livre est organisé en 12 chapitres

- 11 chapitres proposent l'essentiel du cours, puis des exercices et des interrogations écrites corrigés intégralement dans un langage simple et rigoureux ;
- 1 chapitre est réservé à la résolution de problèmes, leurs corrections étant entièrement détaillées.

Les exercices

■ Après un QCM d'introduction, qui permet de faire un tour d'horizon rapide du chapitre, les exercices sont regroupés par thème et rangés par ordre de difficulté croissante.

■ La difficulté des exercices est signalée par des pictogrammes :

- ★ exercice de base,
- ★★ exercice nécessitant davantage de méthode et de réflexion,
- ★★★ exercice difficile destiné à ceux qui souhaitent approfondir des notions du chapitre.

■ Une durée indicative de résolution figure avant chaque exercice ; ce temps a été estimé pour un bon élève.

■ L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, qui favorise les démarches d'investigation, est fréquente et largement commentée.

■ L'algorithmique et la programmation prennent une place naturelle dans tous les chapitres.

■ Les corrigés des exercices sont détaillés, enrichis d'un rappel du cours (sur fond jaune) chaque fois que nécessaire et de commentaires (en bleu) pour faciliter la compréhension du raisonnement à tenir.

Nous sommes persuadées que cet ouvrage vous apportera une aide précieuse dans votre travail, vous inculquera des méthodes durant cette année scolaire et vous préparera efficacement à la classe de terminale.

Il nous reste à vous souhaiter bon courage !

Les auteures

Sommaire

Préface	3
Index des mots clés	7

1 Mise au point sur les fonctions

Cours	9
Exercices	12
Vrai ou faux ?	12
Ensemble de définition	12
Courbe représentative et lecture graphique	13
Parité, imparité	14
Sens de variation	15
Minimum, maximum d'une fonction	17
Avec un logiciel de géométrie dynamique	18
Les interrogations écrites	19
Corrigés des exercices	21

2 Fonctions polynômes. Fonctions polynômes du second degré

Cours	31
Exercices	35
Vrai ou faux ?	35
Fonctions polynômes	35
Sens de variation et courbe d'une fonction polynôme du second degré	36
Équations du second degré	38
Algorithme de résolution d'une équation du second degré	39
Signe d'un polynôme du second degré	39
Résolution d'équations	40
Les interrogations écrites	41
Corrigés des exercices	42

3 Fonctions usuelles, fonctions associées

Cours	57
Exercices	61
Vrai ou faux ?	61
Sens de variation des fonctions usuelles ...	61
Équations	62
Encadrements	62
Sens de variation de fonctions associées ...	63
Courbes de fonctions associées	64

Résolution graphique	65
Les interrogations écrites	65
Corrigés des exercices	67

4 Dérivation

Cours	80
Exercices	83
Vrai ou faux ?	83
Nombre dérivé et tangente	83
Calculs de dérivées	85
Les interrogations écrites	86
Corrigés des exercices	87

5 Applications de la dérivation

Cours	97
Exercices	98
Vrai ou faux ?	98
Sens de variation	98
Minimum, maximum, extremum	101
Comparaison de fonctions	101
Les interrogations écrites	102
Corrigés des exercices	103

6 Fonctions et problèmes

Exercices	116
Étude de fonctions	116
Optimisation	117
Résolution d'équations	117
Économie	119
Les interrogations écrites	119
Corrigés des exercices	122

7 Pourcentages

Cours	137
Exercices	139
Vrai ou faux ?	139
Notions de pourcentage	139
Coefficient multiplicateur	141
Fonctions linéaires	142
Évolutions successives	142

Pourcentage d'évolution	144
Indices	145
Les interrogations écrites	146
Corrigés des exercices	147

8 Mode de génération d'une suite

Cours	161
Exercices	165
Vrai ou faux ?	165
Calculs de termes	166
Représentation graphique	168
Sens de variation, majorant, minorant	171
Les interrogations écrites	172
Corrigés des exercices	174

9 Suites arithmétiques – Suites géométriques

Cours	186
Exercices	189
Vrai ou faux ?	189
Suites arithmétiques	189
Suites géométriques	191
Calcul de sommes	192
Quelques problèmes concrets	195
Les interrogations écrites	197
Corrigés des exercices	198

10 Statistiques

Cours	212
Exercices	217
Vrai ou faux ?	217

Mode, moyenne, médiane	217
Quartiles	218
Utilisation de la calculatrice	219
Utilisation du tableur	221
Transformation affine de données	221
Boîte-à-moustaches	222
Lissage par moyennes mobiles	223
Les interrogations écrites	224
Corrigés des exercices	226

11 Probabilités

Cours	249
Exercices	255
Vrai ou faux ?	255
Loi de probabilité	255
Simulation d'expériences aléatoires	257
Probabilité d'un événement	257
Variables aléatoires	258
L'interrogation écrite	263
Corrigés des exercices	265

12 Loi binomiale

Cours	281
Exercices	284
Vrai ou faux ?	284
Variables aléatoires de Bernoulli	284
Coefficients binomiaux	285
Variables aléatoires binomiales	286
Échantillonnage	289
L'interrogation écrite	291
Corrigés des exercices	292

INDEX DES MOTS CLÉS

A

Augmentation 138

B

Bernoulli (épreuve de) 281

Bernoulli (loi de) 281

Boîte médiane 216

Boîte moyenne 216

Boîte-à-moustaches 216

Bornée (suite) 161

C

Coefficient multiplicateur
137

Coefficients binomiaux 282

Constante (fonction) 97

Contraire (événement) 249

Courbe représentative
d'une fonction 9

Croissante (fonction) 10, 97

Croissante (suite) 161

D

Décroissante (fonction) 10,
97

Décroissante (suite) 161

Dérivée 81

Diminution 138

Discriminant 31

Distribution de
proportionnalité 249

E

Écart interquartile 215

Écart type 215, 251

Ensemble de définition
d'une fonction 9

Espérance mathématique
250

Étendue 214

Événement 249

Évolution 138

Évolution exponentielle 188

Évolution linéaire 187

Expérience aléatoire 250

F

Fonction affine 57

Fonction carré 37

Fonction cube 58

Fonction inverse 58

Fonction racine carrée 58

Formule de Pascal 282

I

Impaire (fonction) 10

Incompatibles
(événements) 249

Indice 138

Intervalle de fluctuation 283

L

Loi binomiale 281

Loi de probabilité 250

M

Majorant 10

Majorée (suite) 161

Maximum 10

Médiane 214

Minimum 10

Minorant 10

Minorée (suite) 161

Mode 212

Modéliser une expérience
aléatoire 251

Monotone (suite) 161

Moyenne 213

N

Nombre dérivé 80

P

Paire (fonction) 9

Parabole 32

Polynôme 31

Pourcentage 137

Proportionnalité 137

Q

Quartile 214

R

Racine 32

Raison 186, 187

S

Strictement croissante
(fonction) 10

Suite arithmétique 186

suite géométrique 187

T

Tangente 80

Taux 138

Triangle de Pascal 282

V

Variance 215, 250

CHAPITRE 1

Mise au point sur les fonctions

Ensemble de définition

Définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels qui admettent une image par f ; on note usuellement $\mathcal{D}_f$ cet ensemble.

Exemples

- L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto x^3$ est $\mathbb{R}$ (car tout nombre réel admet un cube).
- L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$ (car les seuls réels qui admettent une racine carrée sont les réels positifs ou nuls).

Courbe représentative

Définition

Le plan étant rapporté à un repère, la **courbe représentative** d'une fonction f est la courbe d'équation : $y = f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, x décrivant l'ensemble de définition de f .

Propriété

Si $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction, alors toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe $\mathcal{C}$ en au plus un point.

Parité, imparité

Définitions

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à O .

- f est **paire** si, et seulement si, pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$f(-x) = f(x)$$

- f est **impaire** si, et seulement si, pour tout x de $\mathcal{D}_f$:

$$f(-x) = -f(x)$$

Propriétés

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Sens de variation

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si, et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\text{si } x \leq x', \text{ alors } f(x) \leq f(x')$$

(f conserve les inégalités larges).

- f est **décroissante** sur I si, et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\text{si } x \leq x', \text{ alors } f(x) \geq f(x')$$

(f renverse les inégalités larges).

- f est **strictement croissante** sur I si, et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\text{si } x < x', \text{ alors } f(x) < f(x')$$

(f conserve les inégalités strictes).

- f est **strictement décroissante** sur I si, et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\text{si } x < x', \text{ alors } f(x) > f(x')$$

(f renverse les inégalités strictes).

Minorant, majorant, minimum, maximum d'une fonction

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I .

Définitions

- Un réel m est un **minorant** de f sur I si, et seulement si, pour tout x de I :

$$m \leq f(x)$$

On dit alors que f est minorée par m sur I .

- Un réel M est un **majorant** de f sur I si, et seulement si, pour tout x de I :

$$f(x) \leq M$$

On dit alors que f est majorée par M sur I .

- $f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I si, et seulement si, pour tout x de I :

$$f(x) \geq f(x_0)$$

- $f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I si, et seulement si, pour tout x de I :

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Propriétés

- Le minimum de f sur I , s'il existe, est un minorant m de f sur I tel que l'on puisse trouver au moins un élément x_0 de I qui vérifie :

$$f(x_0) = m.$$

- Le maximum de f sur I , s'il existe, est un majorant M de f sur I tel que l'on puisse trouver au moins un élément x_0 de I qui vérifie :

$$f(x_0) = M.$$

Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Soient f une fonction et k un réel.

- Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = k$.

Résoudre l'équation $f(x) = k$ revient à trouver les antécédents de k par f .

- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq k$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous (au sens large) de la droite d'équation $y = k$ (énoncés analogues avec $f(x) < k$, $f(x) \geq k$, $f(x) > k$).

EXERCICES

Vrai ou faux ?

1

(corrigés p. 21)

- 1° L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 9}$ est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- 2° L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{3}{\sqrt{x}}$ est $\mathbb{R}_+$.
- 3° L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto (x + 5)(x - 4)$ est $\mathbb{R} \setminus \{-5 ; 4\}$.
- 4° Le point $A(3 ; 9)$ appartient à la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$.
- 5° Si le point $B(-1 ; 2)$ appartient à la courbe d'une fonction f , alors : $f(2) = -1$.
- 6° La fonction $x \mapsto x^2$ est paire.
- 7° La fonction $x \mapsto -8x$ est impaire.
- 8° Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $f(-2) < f(3)$.
- 9° Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $f(-3,7) < f(-3,8)$.
- 10° Si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est positive sur $\mathbb{R}$.
- 11° Si f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 12° Une fonction affine non constante n'a pas de maximum.

Ensemble de définition

2 ★ 15 min

(corrigés p. 21)

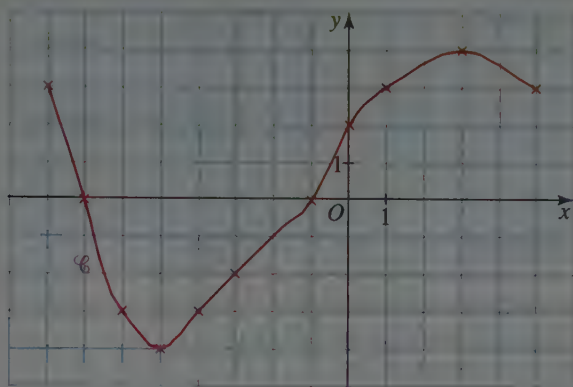
Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f proposée.

- 1° $x \mapsto \frac{2x - 5}{x^2 + 1}$;
- 2° $x \mapsto \frac{3x - 7}{x^2 - 9}$;
- 3° $x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 - 1)(x + 5)}$;
- 4° $x \mapsto \sqrt{x + \pi}$;
- 5° $x \mapsto \sqrt{(x + 1)(3x - 1)}$;
- 6° $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

Courbe représentative et lecture graphique

3 ★ 5 min

(corrigés p. 22)



On a dessiné ci-dessus la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-8 ; 5]$.

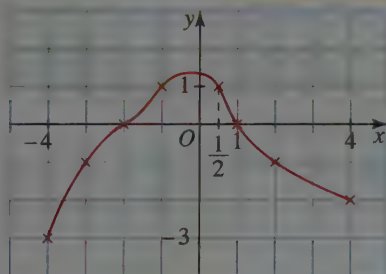
- 1° Donner l'image de 0 par f .
- 2° Que vaut $f(-3)$?
- 3° Donner les antécédents de 3 par la fonction f .
- 4° Résoudre graphiquement chacune des équations ou inéquations suivantes :
 a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = -3$; c) $f(x) \leq -3$.
- 5° Trouver un nombre réel k tel que l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution. Justifier rapidement.

4 ★ 5 min

(corrigés p. 22)

f est une fonction définie sur $[-4 ; 4]$; sa courbe est tracée ci-contre. Résoudre graphiquement chacune des inéquations suivantes :

- 1° $f(x) \geq 1$;
- 2° $f(x) < 0$;
- 3° $f(x) \leq -1$;
- 4° $f(x) > -4$.

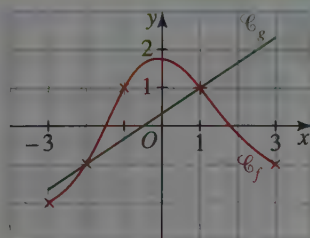


5 ★ 5 min

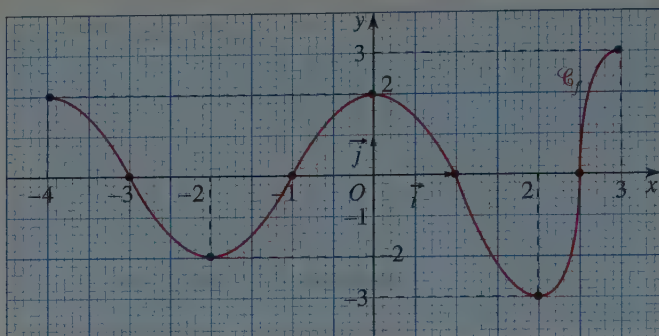
(corrigés p. 22)

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-3 ; 3]$. Résoudre graphiquement chacune des inéquations suivantes :

- 1° $f(x) \geq g(x)$;
- 2° $f(x) > g(x)$;
- 3° $f(x) \leq g(x)$;
- 4° $f(x) < g(x)$.



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4 ; 3]$ et ayant, dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique suivante :



1° Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$.

Résumer les résultats obtenus dans un tableau.

2° Dresser le tableau de variation de f .

Parité, imparité

Soit f une fonction.

Dire pourquoi le tableau de variation de f proposé est faux dans chacun des deux cas suivants :

1°

x	0	5
$f(x)$	$\sqrt{3}$	2

2° f est paire et :

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f(x)$					

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et telle que :

pour tout réel x positif ou nul, $f(x) = 3x$.

1° Construire la courbe de f .

2° Expliciter $f(x)$ si x est négatif.

9 ★ 5 min

(corrigés p. 23)

On sait que la fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

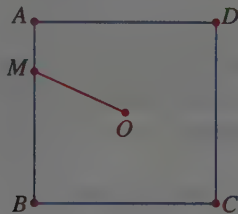
1° Justifier que la fonction inverse est impaire.

2° Que peut-on alors affirmer pour sa courbe représentative ?

10 ★★ 15 min

(corrigés p. 23)

$ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre O .



Le point M parcourt le bord du carré dans le sens $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$, en partant de A . On appelle x la longueur du parcours du point M et f la fonction qui à x fait correspondre la longueur OM , notée $f(x)$.

1° En s'aidant de considérations géométriques, dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

2° Quel est le tableau de variation de f sur $[4 ; 8]$?

Quel est le tableau de variation de f sur $[8 ; 12]$?

Quel est le tableau de variation de f sur $[12 ; 16]$?

3° Expliciter $f(x)$ pour $x \in [0 ; 4]$.

4° En quels réels de $[0 ; 16]$ f atteint-elle son maximum ?

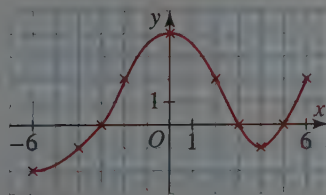
En quels réels de $[0 ; 16]$ f atteint-elle son minimum ?

Sens de variation

11 ★ 5 min

(corrigés p. 24)

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-6 ; 6]$; sa courbe est tracée ci-dessous.



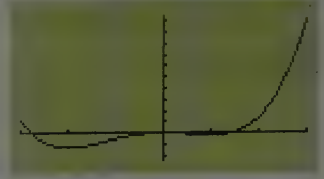
1° Dresser le tableau de variation de f .

2° Quel est le minimum de f sur $[-3 ; 6]$?

3° Quel est le maximum de f sur $[-6 ; 6]$?

Voici la courbe obtenue à l'écran d'une calculatrice pour la fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2.$$



- 1° Quelle conjecture est-on amené à formuler à propos du sens de variation de f sur $[-3 ; -2]$? Comment utiliser la calculatrice pour conforter cette conjecture ?
- 2° Que dire du sens de variation de f sur $[-2 ; 3]$?

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

1° a) Quel est le sens de variation de f sur $[-3 ; 0]$?

b) En déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sachant que $x \in [-3 ; 0]$.

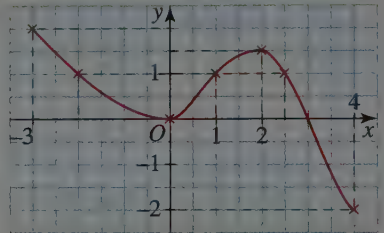
2° a) Quel est le sens de variation de f sur $[0 ; 2]$?

b) En déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sachant que $x \in [0 ; 2]$.

3° a) Quel est le sens de variation de f sur $[2 ; 4]$?

b) On sait que x est un réel de $[2 ; 4]$ et que l'on a : $-2 \leq f(x) \leq 1$.
Donner le meilleur encadrement de x .

4° On sait : $-3 \leq x \leq 2$, donner alors le meilleur encadrement possible de $f(x)$.



En revenant à la définition, étudier le sens de variation de la fonction f :

$$x \mapsto 2x^2 + 3x$$

sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

En revenant à la définition, étudier le sens de variation de la fonction f :

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$$

sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.

En revenant à la définition, étudier le sens de variation de la fonction f :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Minimum, maximum d'une fonction

17 ★ 5 min

(corrigés p. 26)

Déterminer le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f :

$$x \mapsto 5 + \sqrt{x^2 + 1}.$$

18 ★ 10 min

(corrigés p. 26)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto x^2 + 4x + 5.$$

1° Pour tout réel x , factoriser $f(x) - 1$.2° En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

19 ★ 10 min

(corrigés p. 27)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto -x^2 - 2x + 3.$$

1° Pour tout réel x , factoriser $f(x) - 4$.2° En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

20 ★★ 10 min

(corrigés p. 27)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto 3 - 2x^2(x - 1)^2.$$

Justifier que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de ce maximum, ainsi que les réels en lesquels il est atteint.

21 ★★★ 5 min

(corrigés p. 27)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{x-1}.$$

Justifier que 0 est un minorant de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$; est-ce le minimum de f sur $]1; +\infty[$?

22 ★★★ 10 min

(corrigés p. 28)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto (x+1)^2 + (x-1)^4.$$

1° Justifier : pour tout x de $[0; +\infty[$, $1 \leq (x+1)^2$.2° En déduire que 1 est un minorant de f sur $[0; +\infty[$.1 est-il le minimum de f sur $[0; +\infty[$?

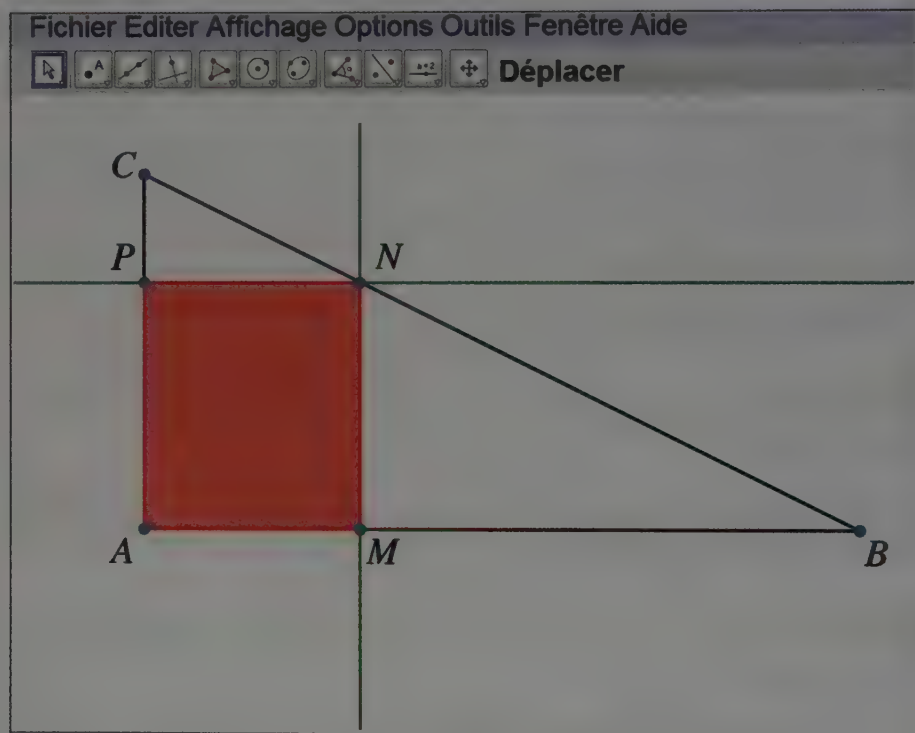
ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB = 6$ et $AC = 3$.

M est un point du segment $[AB]$, N et P sont des points appartenant respectivement aux segments $[BC]$ et $[AC]$ tels que le quadrilatère $AMNP$ soit un rectangle.

On pose : $AM = x$ et il s'agit de trouver la position de M telle que l'aire de $AMNP$ soit maximale.

A. Conjecture à l'aide d'un logiciel

1° Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



2° Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle $AMNP$ semble-t-elle maximale ?

B. Démonstration

1° Déterminer la longueur du segment $[AP]$ en fonction de x .

2° Quelle est l'aire $a(x)$ du rectangle $AMNP$ en fonction de x ?

3° a) Démontrer que, pour tout réel x , $x^2 - 6x + 9 \geq 0$.

b) En déduire que, pour tout réel x , $-x^2 + 6x \leq 9$.

4° Quelle est la valeur maximale de l'aire du rectangle $AMNP$?

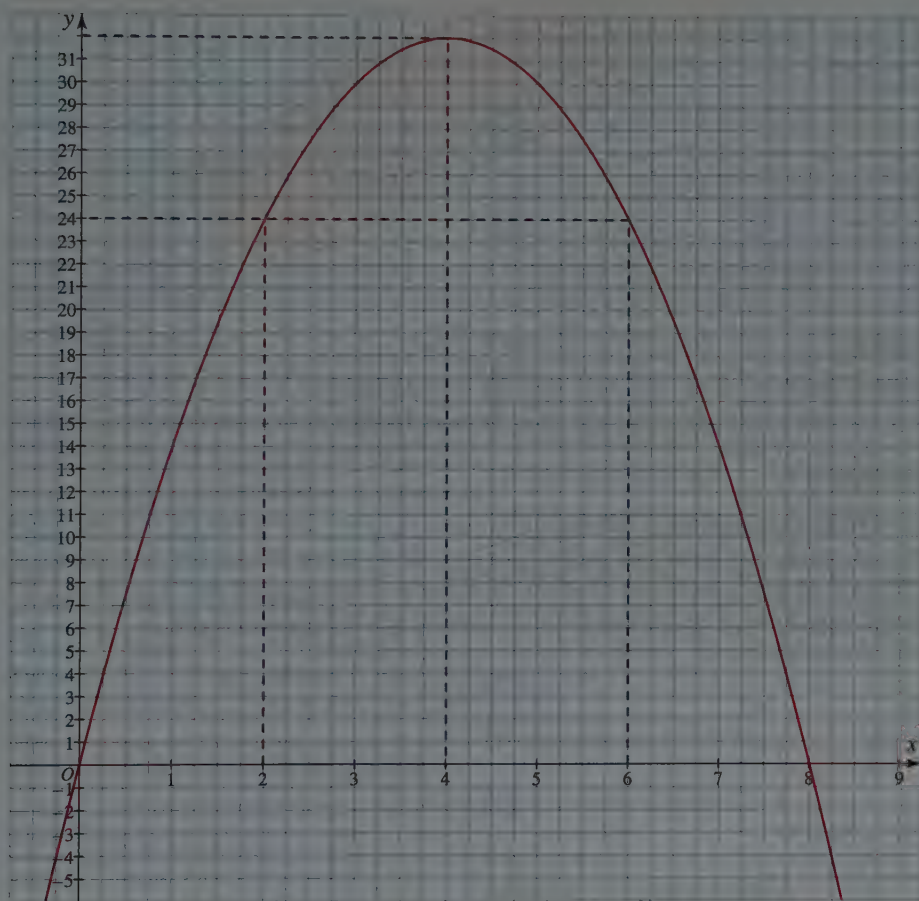
En quel réel ce maximum est-il atteint ? Pourquoi ?

Les interrogations écrites

24 10 min

(corrigés p. 29)

Voici la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 16x$.

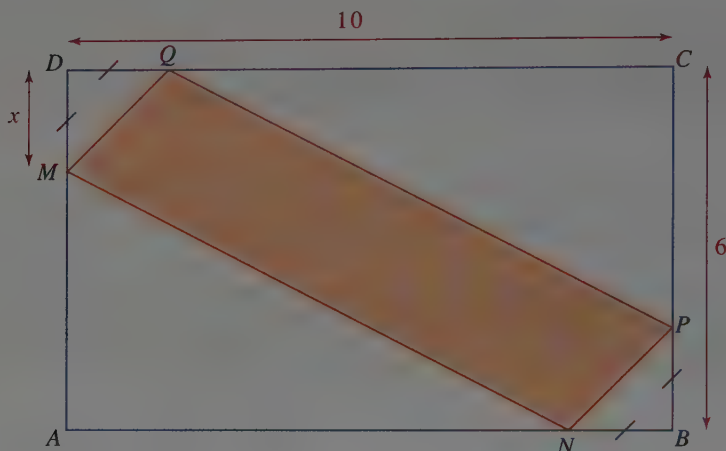


- 1° Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; 6]$.
- 2° Résoudre graphiquement dans $[0 ; 6]$ l'équation $f(x) = 24$.
- 3° Résoudre graphiquement dans $[0 ; 6]$ l'inéquation $f(x) \geq 24$.
- 4° Donner le minimum de f sur $[0 ; 6]$.
En quelle valeur est-il atteint ?
- 5° Donner le maximum de f sur $[0 ; 6]$.
En quelle valeur est-il atteint ?

Le parallélogramme $MNPQ$ est inscrit dans le rectangle $ABCD$, de telle sorte que l'on a : $DM = DQ = BN = BP$.

On appelle x la longueur DM .

On cherche la valeur de x telle que l'aire de $MNPQ$ soit maximale.



Partie A

1° Pour quelles valeurs de x la figure est-elle réalisable ?

2° Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ du parallélogramme $MNPQ$ en fonction de x .

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 16x$.

1° Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) = -2(x - 4)^2 + 32$.

2° Déterminer le maximum de la fonction f et préciser en quel réel il est atteint.

3° En déduire pour quelle valeur de x l'aire de $MNPQ$ est maximale.

CORRIGÉS

Vrai ou faux ?

1 **1°** L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 9}$ est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Faux. L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$; f n'est pas définie en -3 car $(-3)^2 = 9$.

2° L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{3}{\sqrt{x}}$ est $\mathbb{R}_+$.

Faux. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}_+^*$; f n'est pas définie en 0 .

3° L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto (x+5)(x-4)$ est $\mathbb{R} \setminus \{-5; 4\}$.

Faux. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$; n'importe quel réel a une image par f .

4° Le point $A(3; 9)$ appartient à la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$.

Vrai. En effet : $3^2 = 9$.

5° Si le point $B(-1; 2)$ appartient à la courbe d'une fonction f , alors : $f(2) = -1$.

Faux. Si $B(-1; 2)$ appartient à la courbe d'une fonction f , alors $f(-1) = 2$ et on ne sait rien sur $f(2)$; la courbe de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, avec x décrivant l'ensemble de définition de f .

6° La fonction $x \mapsto x^2$ est paire.

Vrai. Pour tout réel x , x et $-x$ ont la même image par f .

7° La fonction $x \mapsto -8x$ est impaire.

Vrai. Toute fonction linéaire est impaire.

8° Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $f(-2) < f(3)$.

Vrai. Toute fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ « conserve l'ordre ».

$-2 < 3$, donc $f(-2) < f(3)$.

9° Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $f(-3,7) < f(-3,8)$.

Faux. Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors de $-3,7 > -3,8$, on déduit : $f(-3,7) > f(-3,8)$.

10° Si f est croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est positive sur $\mathbb{R}$.

Faux. La fonction $f: x \mapsto x+5$ est un exemple de fonction croissante qui prend des valeurs négatives et des valeurs positives. $f(-9) = -4$ et $f(0) = 5$.

11° Si f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Faux. La fonction carré est un exemple de fonction qui n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$; elle n'est ni croissante sur $\mathbb{R}$, ni décroissante sur $\mathbb{R}$.

12° Une fonction affine non constante n'a pas de maximum.

Vrai. La courbe représentative d'une fonction affine non constante est une droite non parallèle à celle des abscisses; elle admet des points d'ordonnée aussi grande que l'on veut.

Ensemble de définition

2 **1°** $f: x \mapsto \frac{2x-5}{x^2+1}$.

Pour tout réel x , $x^2 + 1 \neq 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$, autrement dit :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

2° $f: x \mapsto \frac{3x-7}{x^2-9}$.

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que :

$$x^2 - 9 \neq 0;$$

$$\text{or : } x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3,$$

$$\text{donc : } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}.$$

Pour tous réels a et b :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$3^\circ f: x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 - 1)(x + 5)}.$$

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que :

$$(x^2 - 1)(x + 5) \neq 0;$$

or :

$$\begin{aligned}(x^2 - 1)(x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 1 &= 0 \text{ ou } x + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -5,\end{aligned}$$

donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; -1; 1\}$.

$$4^\circ f: x \mapsto \sqrt{x + \pi}.$$

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que :

$$x + \pi \geq 0,$$

donc : $\mathcal{D}_f = [-\pi; +\infty[$.

$$5^\circ f: x \mapsto \sqrt{(x + 1)(3x - 1)};$$

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que :

$$(x + 1)(3x - 1) \geq 0.$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$3x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(3x-1)$	$+$	0	$-$	$+$

On déduit du tableau de signes ci-dessus :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty[.$$

$$6^\circ f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 1}.$$

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que :

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0,$$

or, pour tout réel x ,

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2,$$

donc, pour tout réel x , $x^2 + 2x + 1 \geq 0$,
ce qui implique que f est définie sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

Courbe représentative et lecture graphique

3 $1^\circ f(0) = 2$; le point de la courbe $\mathcal{C}$ de f qui a pour abscisse 0 a pour ordonnée 2.

$2^\circ f(-3) = -2$; le point de $\mathcal{C}$ qui a pour abscisse -3 a pour ordonnée -2 .

3 Les antécédents de 3 par la fonction f sont -8 , 1 et 5; seuls trois points de $\mathcal{C}$ ont pour ordonnée 3, ils ont pour abscisses -8 , 1 et 5.

4 **a)** L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions -7 et -1 (ce sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite (Ox)).

Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ de f avec la droite d'équation $y = k$.

b) L'équation $f(x) = -3$ admet deux solutions : -6 et -4 .

c) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq -3$ est l'intervalle $[-6; -4]$.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq k$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ de f situés au-dessous (au sens large) de la droite d'équation $y = k$.

5 On peut choisir : $k = 5$. En effet, le maximum de f est 4, donc pour tout réel k strictement supérieur à 4, l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

Le minimum de f étant -4 , pour tout réel k strictement inférieur à -4 , l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

4 **1**° L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 1$ est $[-1; 0,5]$; ce sont les abscisses des points de la courbe de f dont les points ont une ordonnée supérieure ou égale à 1.

2° L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est $[-4; -2[\cup]1; 4]$.

3° L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq -1$ est $[-4; -3] \cup [2; 4]$.

4° L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > -4$ est $[-4; 4]$.

Tous les points de la courbe ont une ordonnée strictement supérieure à -4 .

5 **1**° L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est $[-2; 1]$; ce sont les abscisses des points de la courbe de f situés au-dessus (au sens large) de la courbe de g .

2° L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $]-2; 1[$; ce sont les abscisses des points de la courbe de f situés au-dessus (au sens strict) de la courbe de g .

3° L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est $[-3; -2] \cup [1; 3]$.

4° L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est $[-3; -2[\cup]1; 3]$.

6 1° D'après le graphique, on a :

$f(-3) = f(-1) = f(1) = f(2,5) = 0$;
 si $x \in [-4; -3[$, alors $f(x) > 0$;
 si $x \in]-3; -1[$, alors $f(x) < 0$;
 si $x \in]-1; 1[$, alors $f(x) > 0$;
 si $x \in]1; 2,5[$, alors $f(x) < 0$;
 si $x \in]2,5; 3]$, alors $f(x) > 0$.

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

x	-4	-3	-1	1	2,5	3
$f(x)$	+	0	-	0	+	0

2° Le tableau de variation de f est :

x	-4	-2	0	2	3				
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Attention, le repère n'est pas orthonormé.

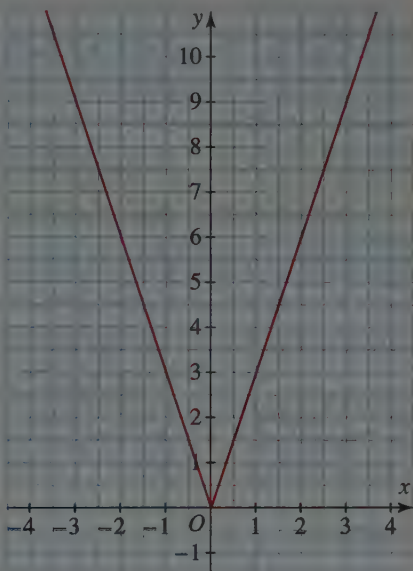
Parité, imparité

7 1° $\sqrt{3} < 2$, donc la fonction f ne peut décroître de $\sqrt{3}$ à 2, ce qui prouve que le tableau de variation de f proposé est faux.

2° Si la fonction f est paire et si de plus elle est décroissante sur $[0; 3]$, alors f doit être croissante sur $[-3; 0]$, ce qui est en contradiction avec le tableau de variation de f proposé.

8 f paire et, pour tout réel x positif ou nul, $f(x) = 3x$.

1°



2° Si le réel x est négatif ou nul, alors $f(x) = -3x$.

En effet, pour tout réel x négatif ou nul :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \text{ (car } f \text{ est paire)} \\ &= -3 \times (-x) \text{ (car } -x \text{ est positif ou nul)} \\ &= 3x. \end{aligned}$$

9 Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

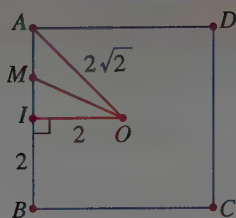
1° $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à zéro et, pour tout réel x non nul :

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

On en déduit que la fonction inverse est impaire.

2° La courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère (voir cours du chapitre 3).

10 $ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre O et $OM = f(x)$.



1° Voici le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

x	0	2	4
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$ 2	$\nearrow$ $2\sqrt{2}$

f est d'abord décroissante, puis croissante.
 $OA = OB = 2\sqrt{2}$ et $OI = 2$ si I est le milieu de $[AB]$.

2° On a : $f(0) = f(4) = f(8) = f(12) = f(16) = OA = 2\sqrt{2}$

et les triangles OAB , OBC , OCD et ODA sont isométriques, donc les tableaux de variation de f sur $[0 ; 4]$, $[4 ; 8]$, $[8 ; 12]$ et $[12 ; 16]$ sont « similaires ».

Le tableau de variation de f sur $[4 ; 8]$ est :

x	4	2	8
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$ 2	$\nearrow$ $2\sqrt{2}$

Le tableau de variation de f sur $[8 ; 12]$ est :

x	8	2	12
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$ 2	$\nearrow$ $2\sqrt{2}$

Le tableau de variation de f sur $[12 ; 16]$ est :

x	12	2	16
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$ 2	$\nearrow$ $2\sqrt{2}$

La fonction f est périodique de période 4.

3° Notons I le milieu du segment $[AB]$; le triangle OIM est rectangle en I et : $OI^2 = 2^2$, $IM^2 = (2-x)^2$,

si $M \in [AI]$,

alors : $0 \leq x \leq 2$ et $IM = 2-x$,

si $M \in [IB]$,

alors : $2 \leq x \leq 4$ et $IM = x-2 = -(2-x)$,

donc : $IM^2 = (2-x)^2 = (x-2)^2$.

D'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = 2^2 + (2-x)^2 = 4 + 4 - 4x + x^2 = 8 - 4x + x^2.$$

Finalement : si $x \in [0 ; 4]$,

alors $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$.

4° Le maximum de f sur $[0 ; 16]$ est $2\sqrt{2}$, il est atteint en 0, en 4, en 8, en 12 et en 16. Le minimum de f sur $[0 ; 16]$ est 2, il est atteint en 2, en 6, en 10 et en 14.

La plus grande longueur OM est obtenue pour M en A , en B , en C ou en D .

La plus petite longueur OM est obtenue pour M milieu de $[AB]$, de $[BC]$, de $[CD]$, ou de $[DA]$.

Sens de variation, minimum, maximum d'une fonction

11 1° Le tableau de variation de f est donné ci-dessous.

x	-6	0	4	6
$f(x)$	-2	$\nearrow$ 4	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 2

2° Le minimum de f sur $[-3 ; 6]$ est -1 et il est atteint en 4.

3° Le maximum de f sur $[-6 ; 6]$ est 4 et il est atteint en 0.

12 f est définie sur $[-3 ; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2.$$

1° Il semble que f soit strictement décroissante sur $[-3 ; -2]$. En affichant la table de $f(x)$ sur $[-3 ; -2]$ avec un pas de 0,1 ou même de 0,01, la conjecture peut être confortée ; mais elle reste une conjecture.

2° f peut paraître croissante sur $[-2; 3]$, ce qui est faux puisque l'on a : $0 < 1$ et $f(0) > f(1)$ ($f(0) = 0$ et $f(1) = -\frac{5}{12}$).

Cette fonction est étudiée dans le chapitre 6, exercice n° 1.

13 1° a) f est strictement décroissante sur $[-3; 0]$.

b) Si $-3 \leq x \leq 0$,

alors $f(0) \leq f(x) \leq f(-3)$,

donc :

si $-3 \leq x \leq 0$, alors $0 \leq f(x) \leq 2$;

c'est le meilleur encadrement possible ($f(0) = 0$ et $f(-3) = 2$).

2° a) f est strictement croissante sur $[0; 2]$.

b) Si $0 \leq x \leq 2$,

alors $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$,

donc :

si $0 \leq x \leq 2$, alors $0 \leq f(x) \leq 1,5$;

c'est le meilleur encadrement possible ($f(0) = 0$ et $f(2) = 1,5$).

3° a) f est strictement décroissante sur $[2; 4]$.

b) Si $x \in [2; 4]$ et si $-2 \leq f(x) \leq 1$,

alors $2,5 \leq x \leq 4$.

En effet : si $2 \leq x < 2,5$, alors $f(x) > 1$ sur $[2,5; 4]$, le minimum de f est -2 , le maximum de f est 1 .

4° Si $-3 \leq x \leq 2$,

alors $0 \leq f(x) \leq 2$;

Sur $[-3; 2]$, le minimum de f est 0 et le maximum de f est 2 .

14 $f: x \mapsto 2x^2 + 3x$.

Soient x et x' des réels tels que :

$$0 \leq x < x';$$

on a :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= (2x'^2 + 3x') - (2x^2 + 3x) \\ &= 2(x'^2 - x^2) + 3(x' - x) \\ &= 2(x' - x)(x' + x) \\ &\quad + 3(x' - x) \\ &= (x' - x)(2(x' + x) + 3) \\ &= (x' - x)(2x + 2x' + 3); \end{aligned}$$

Pour comparer deux nombres, penser à étudier le signe de leur différence.

or : $2x + 2x' + 3 > 0$ (car x et x' sont positifs) et $x' - x > 0$ (car $x < x'$), donc : $f(x') - f(x) > 0$, c'est-à-dire : $f(x) < f(x')$.

On a ainsi démontré que, pour tous réels x et x' appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$: si $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$, autrement dit que la fonction $f: x \mapsto 2x^2 + 3x$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

15 $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.

Soient x et x' des réels tels que :

$x < x' < 1$; on a :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{2x' + 1}{x' - 1} - \frac{2x + 1}{x - 1} \\ &= \frac{(2x' + 1)(x - 1) - (2x + 1)(x' - 1)}{(x' - 1)(x - 1)} \\ &= \frac{(2x'x + x - 2x' - 1)}{(x' - 1)(x - 1)} \\ &\quad - \frac{(2xx' + x' - 2x - 1)}{(x' - 1)(x - 1)}, \\ f(x') - f(x) &= \frac{3(x - x')}{(x' - 1)(x - 1)}; \end{aligned}$$

or :

$$(x' - 1)(x - 1) > 0,$$

(car $x' - 1 < 0$ et $x - 1 < 0$)

et $x - x' < 0$ (car $x < x'$),

donc : $f(x') - f(x) < 0$, c'est-à-dire :

$$f(x) > f(x').$$

On a ainsi démontré que, pour tous réels x et x' appartenant à l'intervalle $]-\infty; 1[$:

si $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$,

autrement dit que la fonction

$f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$ est strictement décrois-

sante sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

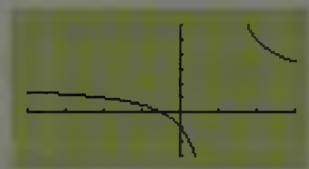
- en entrant :

$$Y1=(2X+1)\div(X-1)$$

- avec le cadrage :

$$-4 \leq x \leq 3$$

$$-3 \leq y \leq 6.$$



16 $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Soient x et x' des réels tels que :

$0 < x < x'$; on a :

$$f(x') - f(x) = \frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x'}}{\sqrt{x'} \sqrt{x}},$$

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x'}}{\sqrt{x} \sqrt{x'}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x'}}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x'})(\sqrt{x} + \sqrt{x'})}{\sqrt{x} \sqrt{x'} (\sqrt{x} + \sqrt{x'})} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x'})^2}{\sqrt{x} \sqrt{x'} (\sqrt{x} + \sqrt{x'})} \\ &= \frac{x - x'}{\sqrt{x} \sqrt{x'} (\sqrt{x} + \sqrt{x'})}, \end{aligned}$$

Pour tous réels a et b strictement

positifs : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$

or : $\sqrt{x} \sqrt{x'} (\sqrt{x} + \sqrt{x'}) > 0$

et $x - x' < 0$,

donc : $f(x') - f(x) < 0$,

c'est-à-dire : $f(x) > f(x')$.

On a ainsi démontré que, pour tous réels x et x' appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$:

si $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$,

autrement dit, que la fonction f :

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est strictement décroissante

sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

17 $f: x \mapsto 5 + \sqrt{x^2 + 1}.$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$x^2 \geq 0,$$

donc : $x^2 + 1 \geq 1$,

donc : $\sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{1},$

Deux réels positifs ou nuls sont rangés comme leurs racines carrées.

donc : $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1,$

donc : $5 + \sqrt{x^2 + 1} \geq 5 + 1,$

donc, pour tout réel x , $f(x) \geq 6$, autrement dit, 6 est un minorant de f . De plus, 6 est clairement une valeur prise par f :

$$f(0) = 5 + \sqrt{0^2 + 1} = 5 + 1 = 6.$$

En résumé :

$$\begin{cases} \text{pour tout réel } x, f(x) \geq 6, \\ f(0) = 6, \end{cases}$$

ce qui prouve que :

6 est le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$f: x \mapsto 5 + \sqrt{x^2 + 1}.$

18 $f: x \mapsto x^2 + 4x + 5.$

1° Pour tout réel x :

$$f(x) - 1 = x^2 + 4x + 4$$

$$= x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2$$

$$= (x + 2)^2.$$

Pour tous réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2° D'après 1° :

pour tout réel x , $f(x) = (x+2)^2 + 1$,

or : $(x+2)^2 \geq 0$,

donc, pour tout réel x , $f(x) \geq 1$, autrement dit, 1 est un minorant de f (sur $\mathbb{R}$).

De plus, $f(-2) = 1$, donc 1 est une valeur prise par f .

Des relations :

$$\begin{cases} \text{pour tout réel } x, f(x) \geq 1, \\ f(-2) = 1, \end{cases}$$

on déduit que **1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.**

19 $f: x \mapsto -x^2 - 2x + 3.$

1° Pour tout réel x ,

$$f(x) - 4 = -x^2 - 2x - 1$$

$$= -(x^2 + 2x + 1)$$

$$= -(x+1)^2.$$

2° D'après 1° :

pour tout réel x , $f(x) = -(x+1)^2 + 4$,

or : $-(x+1)^2 \leq 0$,

donc, pour tout réel x , $f(x) \leq 4$,

autrement dit, 4 est un majorant de f (sur $\mathbb{R}$).

De plus, $f(-1) = 4$, donc 4 est une valeur prise par f .

Des relations :

$$\begin{cases} \text{pour tout réel } x, f(x) \leq 4, \\ f(-1) = 4, \end{cases}$$

on déduit que **4 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.**

20 $f: x \mapsto 3 - 2x^2(x-1)^2.$

Pour tout réel x , $-2x^2(x-1)^2 \leq 0$,

donc : $3 - 2x^2(x-1)^2 \leq 3$,

donc : $f(x) \leq 3$,

autrement dit, 3 est un majorant de f .

De plus, pour tout réel x :

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 3 - 2x^2(x-1)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow -2x^2(x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ou } (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1,$$

ce qui prouve que 3 est non seulement un majorant de f , mais aussi le maximum de f , et que les seuls réels en lesquels f prend la valeur 3 sont 0 et 1.

Finalement, **f admet 3 pour maximum sur $\mathbb{R}$, et les réels en lesquels f atteint son maximum sont 0 et 1.**

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

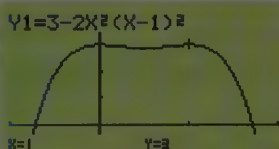
• en entrant :

$$Y1=3-2X^2(X-1)^2$$

• avec le cadrage :

$$-1 \leq x \leq 2$$

$$-1 \leq y \leq 4.$$



21 $f: x \mapsto \frac{1}{x-1}.$

La fonction f est définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ et, pour tout x de $]1; +\infty[$:

$$x - 1 > 0,$$

$$\text{donc : } \frac{1}{x-1} > 0,$$

autrement dit : $f(x) > 0$.

Un réel non nul et son inverse ont le même signe.

On en déduit que **0 est un minorant de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.**

D'autre part, pour tout x de $]1; +\infty[$: $f(x) \neq 0$, donc **0 n'est pas le minimum de f sur $]1; +\infty[$.**

$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de 0, pourvu que x soit suffisamment grand, ce qui s'écrit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0,$$

mais f n'atteint jamais cette valeur sur $]1; +\infty[$ (ni sur $]-\infty; 1[$).

22 $f: x \mapsto (x+1)^2 + (x-1)^4$.

1° Si x est un réel supérieur ou égal à 0, alors :

$$1 \leq x+1,$$

donc, des réels positifs étant rangés comme leurs carrés :

$$1 \leq (x+1)^2.$$

Il vient :

pour tout x de $[0; +\infty[$, $1 \leq (x+1)^2$.

2° • Pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$1 \leq (x+1)^2 \text{ (d'après 1°)}$$

$$\text{et } 0 \leq (x-1)^4,$$

$$\text{donc : } 1 \leq (x+1)^2 + (x-1)^4,$$

$$\text{autrement dit : } 1 \leq f(x),$$

ce qui prouve que **1 est un minorant de f sur $[0; +\infty[$.**

• Pour tout x de $[0; +\infty[$:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x-1)^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow ((x+1)^2 - 1) + (x-1)^4 = 0,$$

$$\text{or : } (x+1)^2 - 1 \geq 0 \text{ d'après 1°),}$$

$$(x-1)^4 \geq 0 \text{ d'après 1°)}$$

et une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls, donc, si $f(x) = 1$, alors $(x-1)^4 = 0$, c'est-à-dire $x = 1$.

De plus :

$$f(1) = (1+1)^2 + (1-1)^4 = 4,$$

ce qui montre que 1 n'est l'image par f d'aucun réel de $[0; +\infty[$.

En conclusion, **1 n'est pas le minimum de f sur $[0; +\infty[$.**

Avec un logiciel de géométrie dynamique

23 A. Conjecture à l'aide d'un logiciel

1° On peut construire la figure à l'aide du logiciel Géoplan ; voici une édition de la figure.

Position de Roxy: Xmin: -3.34572007952, Xmax: 5.72457470506, Ymax: 5.99990510154
Objet dessinaable Roxy, particularités: rouge, non dessiné

A point de coordonnées (0,0) dans le repère Roxy

B point de coordonnées (6,0) dans le repère Roxy

C point de coordonnées (0,3) dans le repère Roxy

tri polygone ABC

M point libre sur le segment [AB]

Objet libre M, paramètre : 0.49791722856
d1 droite perpendiculaire à (AB) passant par M

N point d'intersection des droites d1 et (BC)
d2 droite perpendiculaire à (AC) passant par N

P point d'intersection des droites d2 et (AC)

a = AP*AM (unité de longueur Uoxy)

rect polygone AMNP

Objet dessinaable rect, particularités : rouge, hachures verticales

Hauteur de la zone des affichages : 94

Af0 affichage de la longueur du segment [AM] (unité de longueur Uoxy) (3 décimales)

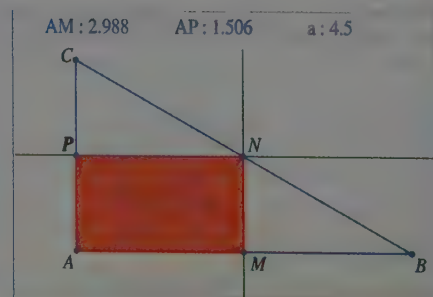
Position de l'affichage Af0: (2,1)

Af1 affichage de la longueur du segment [AP] (unité de longueur Uoxy) (3 décimales)

Position de l'affichage Af1: (401,10)

Af2 affichage du scalaire a (3 décimales)

Position de l'affichage Af2: (932,2)



2° Il semble que l'aire du rectangle $AMNP$ soit maximale pour x valant environ 3 et qu'alors, l'aire du rectangle soit environ 4,5.

B. Démonstration

1° On reconnaît une configuration de Thalès : les droites (PN) et (AB) sont parallèles et les droites (AP) et (BN) sont sécantes en C .

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{CP}{CA} = \frac{PN}{AB}, \text{ donc : } \frac{CP}{3} = \frac{x}{6}, \text{ d'où :}$$

$$CP = 3 \times \frac{x}{6} = \frac{1}{2}x, \text{ et par conséquent :}$$

$$AP = 3 - \frac{1}{2}x = 3 - 0,5x.$$

$$2^\circ a(x) = x(3 - 0,5x) = -0,5x^2 + 3x.$$

L'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur.

3° a) Pour tout réel x ,

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2,$$

donc :

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0.$$

Un carré est toujours positif ou nul.

b) Pour tout réel x :

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0,$$

$$\text{donc : } -x^2 + 6x - 9 \leq 0,$$

$$\text{d'où : } -x^2 + 6x \leq 9.$$

4° La valeur maximale de l'aire du rectangle $AMNP$ est 4,5 et elle est atteinte pour $x = 3$. En effet, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} a(x) &= -0,5x^2 + 3x \\ &= 0,5(-x^2 + 6x) \end{aligned}$$

$$\text{et : } -x^2 + 6x \leq 9,$$

$$\text{d'où : } a(x) \leq 4,5.$$

$$\text{De plus : } a(3) = 4,5.$$

Les interrogations écrites

24 1° Le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; 6]$ est le suivant :

x	0	4	6
$f(x)$	0	32	24

2° Dans $[0 ; 6]$, l'équation $f(x) = 24$ admet deux solutions : 2 et 6.

3° Dans $[0 ; 6]$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 24$ est $[2 ; 6]$.

4° Le minimum de f sur $[0 ; 6]$ est 0 et il est atteint en 0.

5° Le maximum de f sur $[0 ; 6]$ est 32 et il est atteint en 4.

25 Partie A

1° La figure n'est réalisable que si $0 \leq x \leq 6$.

• Si la figure est réalisable, alors

$$x \geq 0 \text{ car } x = DM$$

$$x \leq 6 \text{ car } M \in [AD] \text{ et } AD = 6,$$

donc : $0 \leq x \leq 6$.

• Réciproquement, il est clair que, si $0 \leq x \leq 6$, alors la figure est réalisable.

2° On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \text{aire}(ABCD) - 2 \times \text{aire}(DMQ) \\ &\quad - 2 \times \text{aire}(AMN) \end{aligned}$$

et :

$$\text{aire}(ABCD) = 10 \times 6 = 60,$$

$$2 \times \text{aire}(DMQ) = x^2,$$

$$\begin{aligned} 2 \times \text{aire}(AMN) &= (6 - x)(10 - x) \\ &= x^2 - 16x + 60 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mathcal{A}(x) = 60 - x^2 - x^2 + 16x - 60,$$

$$\text{d'où : } \mathcal{A}(x) = -2x^2 + 16x.$$

Partie B

Pour tout réel x , $f(x) = -2x^2 + 16x$.

1° Pour tout réel x :

$$-2(x-4)^2 + 32 = -2x^2 + 16x - 32 + 32$$

donc : $f(x) = -2(x-4)^2 + 32$.

2° Pour tout réel x ,

$$f(x) = -2(x-4)^2 + 32$$

$$\text{et } -2(x-4)^2 \leq 0,$$

d'où : $f(x) \leq 32$

et, de plus : $f(4) = 32$.

Par conséquent, le maximum de la fonction f est 32 et il est atteint en 4.

C'est un résultat que l'on a visualisé dans l'exercice 24.

3° L'aire de $MNPQ$ est maximale pour $x = 4$. Si $x \in [0 ; 6]$, alors $f(x) = \mathcal{A}(x)$.

CHAPITRE 2

Fonctions polynômes. Fonctions polynômes du second degré

COURS

Fonctions polynômes

Définition

Un polynôme est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

où n est un entier naturel et $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des réels.

Si a_n est non nul, alors :

- n est le degré du polynôme,
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont ses coefficients.

Le polynôme nul $x \mapsto 0$ n'a pas de degré.

Égalité de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et si les coefficients des « termes de même degré » sont égaux.

Fonctions polynômes du second degré

Soit f le polynôme du second degré : $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$).

Le discriminant de f , que l'on notera Δ , est le réel $b^2 - 4ac$.

Forme canonique

Pour tout réel x , $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$, donc :

pour tout réel x , $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Minimum, maximum

- Si $a > 0$, alors f admet un minimum, qui est atteint en $-\frac{b}{2a}$.
- Si $a < 0$, alors f admet un maximum, qui est atteint en $-\frac{b}{2a}$.

Racines et factorisation

On appelle racine de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

et : pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Si $\Delta = 0$, alors f admet une seule racine x_0 :

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

et : pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_0)^2$.

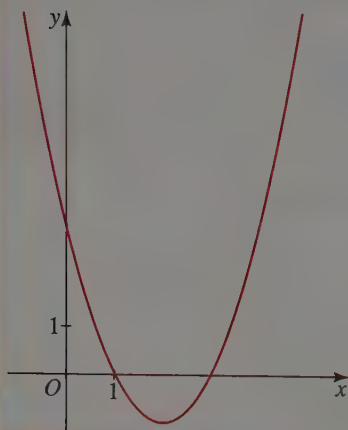
- Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de racine.

Allure de la courbe

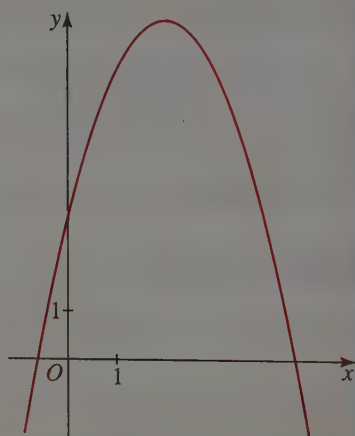
La courbe représentative de f est une parabole qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Le sommet de cette parabole est son point d'abscisse $-\frac{b}{2a}$.

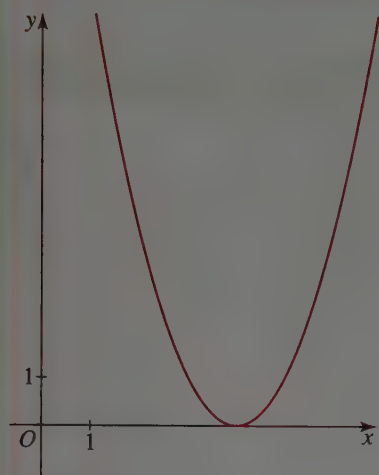
1^{er} cas : $\Delta > 0$ et $a > 0$



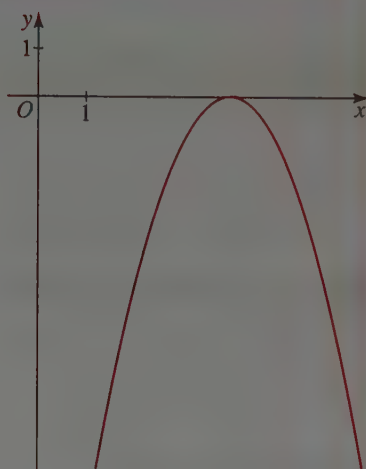
2^e cas : $\Delta > 0$ et $a < 0$



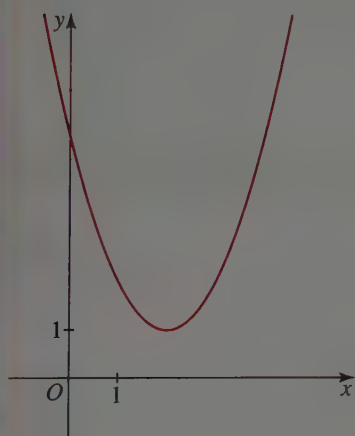
3^e cas : $\Delta = 0$ et $a > 0$



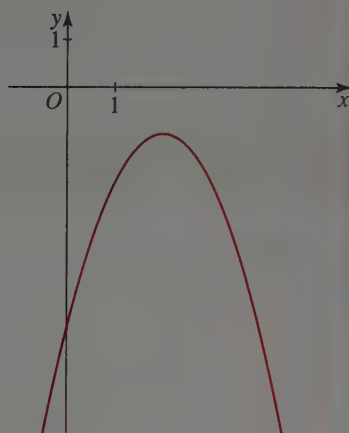
4^e cas : $\Delta = 0$ et $a < 0$



5^e cas : $\Delta < 0$ et $a > 0$



6^e cas : $\Delta < 0$ et $a < 0$



Signe

Le signe de $f(x)$ est donné dans les tableaux suivants.

- Si $\Delta > 0$, alors, en notant x' et x'' les deux racines de f de sorte que $x' < x''$:

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a

- Si $\Delta = 0$, alors, x_0 étant la seule racine de f :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta < 0$, alors f garde un signe constant, celui de a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Somme et produit des racines

Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines :

- leur somme est égale à $-\frac{b}{a}$,
- leur produit est égal à $\frac{c}{a}$.

EXERCICES

Vrai ou faux ?

1

(corrigés p. 42)

- 1° P étant un polynôme de degré 3, le degré de $2P$ est 6.
- 2° La somme de deux polynômes de degré 4 est un polynôme de degré 4.
- 3° Il existe (au moins) un nombre x tel que : $(x+3)(2x-4) < 0$.
- 4° Pour tout réel x , $-x(-x-8) \leq 0$.
- 5° Pour tout réel x , $-7(x+5)^2 - 9 < 0$.
- 6° Il existe un seul réel x tel que $x^2 = 10$.
- 7° L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < 9$ est $[0 ; 3[$.
- 8° La somme des carrés de deux nombres est le carré de la somme de ces deux nombres.
- 9° Le point $A(\sqrt{2} ; 2)$ appartient à la courbe de la fonction carré.
- 10° La fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 9$ admet un maximum.
- 11° La fonction polynôme $x \mapsto (x-3)(x+5)$ a deux racines.
- 12° La fonction $x \mapsto x^2 + 7$ ne s'annule pas.

Fonctions polynômes

2 ★ 5 min

(corrigés p. 42)

Soient les polynômes P et Q définis par :

$$P(x) = 4x^2 - x + 4,$$

$$Q(x) = -6x^3 + x - 5.$$

- 1° Prévoir le degré des polynômes $P+Q$, $P-Q$, $3P-2Q$ et $P \times Q$.
- 2° Déterminer les polynômes $P+Q$, $P-Q$, $3P-2Q$ et $P \times Q$.

3 ★ 1 min

(corrigés p. 43)

P , Q et R sont des polynômes de degrés respectifs 1, 2 et 6.
 Quel est le degré du polynôme $P \times Q \times R$?

4 ★ 5 min

(corrigés p. 43)

Trouver le degré et le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme P proposé.

- 1° $P(x) = (x^2 + 1)(3 - x^4)$.
- 2° $P(x) = (x - 2)^4 - 7x^2 + 13x$.
- 3° $P(x) = (x + 1)(x^3 - 5) + x(7x^2 - x^3)$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer un polynôme P de degré 4 tel que :

- 1° P ne prend que des valeurs strictement négatives ;
- 2° P s'annule exactement une fois ;
- 3° P s'annule exactement trois fois.

Indiquer si la fonction f proposée est un polynôme. Si oui, en préciser le degré.

1° $f: x \mapsto \sqrt{5}$.

2° $f: x \mapsto 0,3 \sin^2(x) - 3 \times 10^{-1} + 0,3 \cos^2(x)$.

3° $f: x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.

4° $f: x \mapsto 0,5x^{10} + 3x^5 - 7x + \sqrt{x} + 2$.

5° $f: x \mapsto x^7 - 0,5x^6 - x^7 + 3x^5 - 2,7x^2 + \frac{1}{2}x^6 + 4$.

6° $f: x \mapsto \frac{x + 5}{\pi}$.

Que peut-on dire des réels a et b si, pour tout réel x :

$$ax^2 + 4x - 3 = bx - 3 ?$$

Sens de variation et courbe d'une fonction polynôme du second degré

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 21(x - 3)^2 - 4 \text{ et } g(x) = -6(x + 5)^2 + 47,2.$$

- 1° Donner le sens de variation de chacune des fonctions f et g .
- 2° Préciser si l'extremum de f est un maximum ou un minimum et en quel réel il est atteint.
- 3° Préciser si l'extremum de g est un maximum ou un minimum et en quel réel il est atteint.

Dans chacun des cas suivants, écrire $f(x)$ sous la forme $(x - \alpha)^2 + \beta$, puis donner les coordonnées du sommet S de la parabole représentant f dans un repère orthonormal.

1° $f(x) = x^2 - 10x + 25$.

4° $f(x) = x^2 + 8x + 16$.

2° $f(x) = x^2 - 10x + 26$.

5° $f(x) = x^2 + 8x + 19$.

3° $f(x) = x^2 - 10x + 24$.

6° $f(x) = x^2 + 8x + 14$.

10 ★ 5 min

(corrigés p. 45)

On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto x^2 - 2x + 1$,
 $f_2 : x \mapsto 2x^2 - 4x + 2$,
 $f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$.

- 1° Déterminer la forme canonique de chacune des fonctions définies ci-dessus.
- 2° Donner le sens de variation de la fonction f .

11 ★ 10 min

(corrigés p. 45)

Soit f la fonction : $x \mapsto 2x^2 + 5x - 3$.

Après avoir vérifié :

$$\text{pour tout réel } x, f(x) = (2x - 1)(x + 3) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8},$$

choisir la meilleure expression de $f(x)$ pour :

- 1° déterminer le minimum de f ;
- 2° étudier le signe de $f(x)$;
- 3° résoudre l'inéquation $f(x) < -3$.

12 ★ 15 min

(corrigés p. 45)

On considère la parabole $\mathcal{P}$ représentant, dans un repère orthonormal, la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

- 1° a) Déterminer la forme canonique, puis la forme factorisée de f .
b) Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathcal{P}$, une équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$, les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses, les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des ordonnées.
- 2° La parabole $\mathcal{P}$ est-elle superposable avec celle de la fonction carré ?
- 3° Tracer $\mathcal{P}$.

13 ★ 15 min

(corrigés p. 46)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 2x + 4$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

- 1° Calculer l'image de 1 et l'image de $-\frac{1}{2}$ par f .
- 2° Déterminer les antécédents de 4 par f .
- 3° Vérifier : pour tout réel x , $f(x) = -(x - 1)^2 + 5$.
- 4° Quel est le sens de variation de f ?
Dresser le tableau de variation de f .
- 5° La fonction f admet-elle un extremum ? Si oui, lequel et en quelle valeur est-il atteint ?
Quelle est la nature de $\mathcal{C}$? Quels sont ses éléments caractéristiques ?
Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

$ABCD$ est un carré de côté 4. On considère les points I, J, K, L appartenant respectivement aux segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$ tels que : $AI = BJ = CK = DL$.

On pose : $AI = x$.

1° Faire une figure.

2° À quel intervalle le réel x appartient-il ?

3° Déterminer l'aire de $IJKL$ en fonction de x .

4° Déterminer pour quelle valeur de x l'aire de $IJKL$ est minimale et préciser la valeur de l'aire minimale.

On considère un carré $ABCD$ de côté 10 cm et on note I le milieu de $[AD]$; de plus, M est un point de $[AB]$, N est le point de $[BC]$ qui vérifie $BN = AM$.

1° Soient x le réel tel que $AM = x$ cm, et $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle MIN en cm^2 .

a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de x ?

b) Calculer $\mathcal{A}(0)$ et $\mathcal{A}(10)$.

c) Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x .

d) Dresser le tableau de variation de $\mathcal{A}$.

2° En déduire l'aire maximale et l'aire minimale du triangle MIN .

Équations du second degré

Résoudre l'équation (E) proposée.

1° $x^2 - 4x + 7 = 0$.

2° $2x^2 + \sqrt{5}x + \frac{1}{2} = 0$.

3° $x^2 - 3x + 2,25 = 0$.

Quel est le discriminant de :

$$x \mapsto (1\,234x - 4\,321)^2 ?$$

Justifier rapidement que l'équation :

$$2\,221x^2 - 3\,332x - 4\,443 = 0$$

admet deux solutions de signes contraires.

1° Résoudre l'équation (E) :

$$3x^2 - 5x - 2 = 0.$$

2° En déduire les solutions de l'équation (E') :

$$3x^4 - 5x^2 - 2 = 0.$$

20 ★★ 10 min

(corrigés p. 49)

Le but de l'exercice est de calculer par deux méthodes les racines du polynôme f : $x \mapsto x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$, et de comparer ces deux méthodes.

1° Développer $(x - x_1)(x - x_2)$.

En déduire une factorisation de f . Quelles sont les racines de f ?

2° Déterminer les racines de f par la méthode du discriminant.

3° Vérifier que les deux méthodes conduisent bien au même résultat.

21 ★★ 15 min

(corrigés p. 50)

Un jardin rectangulaire a une aire de 12 ares et un périmètre de 140 mètres. Quelles sont les dimensions de ce jardin ?

22 ★★ 15 min

(corrigés p. 51)

Deux automobilistes effectuent le même parcours de 400 km, mais le second le fait à 20 km/h de plus que le premier et en une heure de moins.

Donner la vitesse de chacun d'eux et le temps nécessaire à chacun pour parcourir le trajet.

23 ★★ 15 min

(corrigés p. 51)

Un lycée projette un voyage pédagogique et le transporteur a fait un prix global de 1 200 €. Quatre élèves, qui n'étaient pas inscrits, se décident à participer à cette excursion ; ainsi, le prix du voyage baisse de 10 euros pour chaque élève.

Quel est le nombre d'élèves qui participent au voyage ? Quel est le montant payé par chaque élève ?

Algorithme de résolution d'une équation du second degré

24 ★★ 15 min

(corrigés p. 52)

Proposer un algorithme qui demande les réels a, b, c (a étant non nul) et qui donne les racines, si elles existent, du polynôme f : $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Signe d'un polynôme du second degré

25 ★ 5 min

(corrigés p. 52)

Déterminer (de tête !) le signe de chacune des expressions suivantes en fonction du réel x :

1° $(x + 2)(x - 3)$;

2° $(x + 2)(2 - 3x)$;

3° $x^2 + x + 1$.

Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x pour le polynôme du second degré f proposé.

1° $f: x \mapsto -3x^2 + 5x + 7$.

2° $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x + 9$.

3° $f: x \mapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 3$.

Soient a, b, c des réels ($a \neq 0$) tels que le trinôme du second degré f :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

admette un discriminant Δ strictement négatif.

Peut-on affirmer que, pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de c ?

Soient a, b, c des réels ($a \neq 0$) tels que le trinôme du second degré f :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

admette deux racines x_1 et x_2 .

Que peut-on dire du signe de $f\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}\right)$?

Des études statistiques ont montré que, dans la salle de concert de 300 places de la ville de Terminalesse, le nombre de spectateurs est fonction du prix d'entrée.

Si x est le nombre de spectateurs et p le prix du billet en euros, alors x et p vérifient la relation $x = 300 - 12p$.

Les charges fixes de la salle se montent à 1 848 euros.

Déterminer le prix du billet qui permet d'amortir les dépenses et d'avoir le maximum de spectateurs.

Résolution d'équations

Résoudre l'équation (E) proposée.

1° $x^3 + 4x^2 + 5x = 0$.

2° $x + 2 + \frac{1}{x} = 0$.

Soit f le polynôme :

$$x \mapsto x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30.$$

1° Démontrer qu'il existe des réels a et b , à déterminer, tels que :

$$\text{pour tout réel } x, f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + ax + b).$$

2° En déduire les racines de f .

Les interrogations écrites

32 15 min

(corrigés p. 55)

Un décorateur achète de la soie pour 540 euros. Si le mètre de soie avait coûté 5 euros de moins, alors ce décorateur aurait obtenu 9 mètres en plus. Combien de mètres de soie ont été achetés par ce décorateur ?

33 10 min

(corrigés p. 55)

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{-x^2 + 9x - 8}$.

34 20 min

(corrigés p. 55)

1° On considère la fonction polynôme p définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = x^3 + 4x - 16$.

a) Quel est le degré de p ? Quels en sont les coefficients ?

b) Calculer $p(2)$; que peut-on dire du réel 2 ?

c) Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, p(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c).$$

2° On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x + 8$.

a) Quel est le degré de f ? Quels en sont les coefficients ?

b) Déterminer les racines de f .

3° On considère la fonction polynôme g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 - 12x + 35$.

a) Quel est le degré de g ? Quels en sont les coefficients ?

b) Déterminer les racines de g .

4° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 - 12x + 35} \geq 0$.

Vrai ou faux ?

1 1° P étant un polynôme de degré 3, le degré de $2P$ est 6.

Faux. Le degré de $2P$ est 3, il est égal à celui de P .

2° La somme de deux polynômes de degré 4 est un polynôme de degré 4.

Faux. Considérons, par exemple, les polynômes P et Q de degré 4 définis par : $P(x) = 5x^4$ et $Q(x) = -5x^4 + 7x$.

Alors leur somme $P + Q$ est le polynôme de degré 1 : $x \mapsto 7x$.

La somme de deux polynômes de degré 4 est un polynôme de degré au plus 4.

3° Il existe (au moins) un nombre x tel que : $(x+3)(2x-4) < 0$.

Vrai. Il suffit de prendre : $x = 0$.

4° Pour tout réel x , $-x(-x-8) \leq 0$.

Faux. Il suffit de choisir : $x = 1$, alors $-x(-x-8) = 9$, donc : si $x = 1$, alors $-x(-x-8) > 0$.

$$-x(-x-8) = x(x+8).$$

5° Pour tout réel x , $-7(x+5)^2 - 9 < 0$.

Vrai. Un carré étant toujours positif ou nul, pour tout réel x :

$$-7(x+5)^2 \leq 0,$$

donc : $-7(x+5)^2 - 9 \leq -9$,

d'où : $-7(x+5)^2 - 9 < 0$.

6° Il existe un seul réel x tel que $x^2 = 10$.

Faux. $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$ sont les deux réels x tels que $x^2 = 10$.

7° L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < 9$ est $]0 ; 3[$.

Faux. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 < 9$ est $] -3 ; 3[$.

8° La somme des carrés de deux nombres est le carré de la somme de ces deux nombres.

Faux. En voici un contre-exemple : $3^2 + 4^2 = 25$ et $(3+4)^2 = 49$.

9° Le point $A(\sqrt{2} ; 2)$ appartient à la courbe de la fonction carré.

Vrai. En effet : $(\sqrt{2})^2 = 2$.

10° La fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 9$ admet un maximum.

Faux. La courbe de la fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 9$ est une parabole « tournée vers le haut ».

11° La fonction polynôme $x \mapsto (x-3)(x+5)$ a deux racines.

Vrai. La fonction polynôme $x \mapsto (x-3)(x+5)$ a deux racines : -5 et 3 .

12° La fonction $x \mapsto x^2 + 7$ ne s'annule pas.

Vrai. Le minimum de la fonction $x \mapsto x^2 + 7$ est 7.

Fonctions polynômes

2 $P(x) = 4x^2 - x + 4$ et $Q(x) = -6x^3 + x - 5$.

1° Les degrés des polynômes P et Q étant respectivement égaux à 2 et 3, on peut affirmer que les polynômes $P + Q$, $P - Q$, $3P - 2Q$ seront de degré 3 (le plus grand des deux degrés) et que $P \times Q$ sera de degré 5 (la somme des deux degrés).

2°

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) \\ &= (4x^2 - x + 4) + (-6x^3 + x - 5) \\ &= -6x^3 + 4x^2 - 1.\end{aligned}$$

Donc $P + Q$ est le polynôme (de degré 3) tel que :

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= -6x^3 + 4x^2 - 1. \\ (P-Q)(x) &= P(x) - Q(x) \\ &= (4x^2 - x + 4) - (-6x^3 + x - 5) \\ &= 4x^2 - x + 4 + 6x^3 - x - 5 \\ &= 6x^3 + 4x^2 - 2x + 9.\end{aligned}$$

Donc $P - Q$ est le polynôme (de degré 3) tel que :

$$\begin{aligned}(P-Q)(x) &= 6x^3 + 4x^2 - 2x + 9. \\ (3P-2Q)(x) &= 3(4x^2 - x + 4) - 2(-6x^3 + x - 5) \\ &= 12x^2 - 3x + 12 + 12x^3 - 2x + 10 \\ &= 12x^3 + 12x^2 - 5x + 22.\end{aligned}$$

Donc $3P - 2Q$ est le polynôme (de degré 3) tel que :

$$(3P - 2Q)(x) = 12x^3 + 12x^2 - 5x + 22.$$

$$\begin{aligned}(P \times Q)(x) &= P(x) \times Q(x) \\ &= (4x^2 - x + 4)(-6x^3 + x - 5) \\ &= -24x^5 + 6x^4 - 24x^3 + 4x^3 \\ &\quad - x^2 + 4x - 20x^2 + 5x - 20 \\ &= -24x^5 + 6x^4 - 20x^3 - 21x^2 \\ &\quad + 9x - 20.\end{aligned}$$

Donc $P \times Q$ est le polynôme (de degré 5) tel que :

$$(P \times Q)(x) = -24x^5 + 6x^4 - 20x^3 - 21x^2 + 9x - 20.$$

3 P , Q et R étant des polynômes de degrés respectifs 1, 2 et 6, le degré du polynôme $P \times Q \times R$ est $1 + 2 + 6$, c'est-à-dire 9.

4 $1^\circ P(x) = (x^2 + 1)(3 - x^4).$

P est le produit d'un polynôme de degré 2 par un polynôme de degré 4, donc P est un polynôme de degré 6.

De plus : $x^2 \times (-x^4) = -x^6$, donc le coefficient du terme de plus haut degré de P est -1 .

$2^\circ P(x) = (x - 2)^4 - 7x^2 + 13x.$

Le polynôme P est de degré 4 et le coefficient de son terme de plus haut degré est celui de $(x - 2)^4$, c'est-à-dire 1.

$3^\circ P(x) = (x + 1)(x^3 - 5) + x(7x^2 - x^3).$

On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}P(x) &= x^4 + x^3 - 5x - 5 + 7x^3 - x^4 \\ &= 8x^3 - 5x - 5,\end{aligned}$$

donc le polynôme P est de degré 3 et le coefficient de son terme de plus haut degré est 8.

P n'est pas de degré 4 car les termes en x^4 s'annulent.

5 1° Pour tout réel x , $-x^4 - 1 < 0$.

Le polynôme P :

$$x \mapsto -x^4 - 1$$

est de degré 4 et ne prend que des valeurs strictement négatives.

Autres exemples :

$$x \mapsto -3x^4 - 2,$$

$$x \mapsto -x^4 - x^2 - 1,$$

$$x \mapsto -x^4 - 0,001, \text{ etc.}$$

2° Le polynôme P :

$$x \mapsto (x - 2)^4$$

est de degré 4 et s'annule exactement une fois (en 2).

Autres exemples :

$$x \mapsto -3x^4,$$

$$x \mapsto 5(x - 0,1)^4, \text{ etc.}$$

3° Le polynôme P :

$$x \mapsto x(x - 1)(x - 2)^2$$

est de degré 4 et s'annule exactement trois fois (en 0, 1 et 2).

Autres exemples :

$$x \mapsto -3x^2(x + 2)(x - 1),$$

$$x \mapsto 5(x + 3)^2(x - \pi)(x - 1),$$

etc.

6 $1^\circ f : x \mapsto \sqrt{5}.$

La fonction f est une fonction constante non nulle, définie sur $\mathbb{R}$.

Donc f est un polynôme de degré 0.

2°

Pour tout réel x :

$$\sin^2(x) = (\sin(x))^2,$$

$$\cos^2(x) = (\cos(x))^2.$$

$$f : x \mapsto 0,3 \sin^2(x) - 3 \times 10^{-1} + 0,3 \cos^2(x).$$

Pour tout réel x :

$$f(x) = 0,3(\sin^2(x) + \cos^2(x)) - 0,3$$

$$= 0,3 \times 1 - 0,3$$

$$= 0.$$

Pour tout réel x ,

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Donc f est le polynôme nul $x \mapsto 0$; il n'a pas de degré.

3° $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$

La fonction f n'est pas définie en -2 .

Son ensemble de définition n'est pas $\mathbb{R}$, donc f n'est pas un polynôme.

4° $f : x \mapsto 0,5x^{10} + 3x^5 - 7x + \sqrt{x} + 2.$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$, donc f n'est pas un polynôme.

$$5^\circ f: x \mapsto x^7 - 0,5x^6 - x^7 + 3x^5 - 2,7x^2 + \frac{1}{2}x^6 + 4.$$

Pour tout réel x , $f(x) = 3x^5 - 2,7x^2 + 4$.

Donc f est un polynôme de degré 5.

$$6^\circ f: x \mapsto \frac{x+5}{\pi}.$$

$$\text{Pour tout réel } x, f(x) = \frac{1}{\pi}x + \frac{5}{\pi}.$$

Donc f est un polynôme de degré 1 ; c'est une fonction affine.

7 Si, pour tout réel x :

$$ax^2 + 4x - 3 = bx - 3,$$

alors les polynômes :

$$x \mapsto ax^2 + 4x - 3 \text{ et } x \mapsto bx - 3$$

sont égaux, donc ils ont le même degré et les mêmes coefficients, c'est-à-dire :

$$a = 0 \text{ et } b = 4.$$

Réciproquement, si $a = 0$ et $b = 4$, alors, pour tout réel x : $ax^2 + 4x - 3 = bx - 3$.

Sens de variation et courbe d'une fonction polynôme du second degré

$$8 \quad f(x) = 21(x-3)^2 - 4 \text{ et } g(x) = -6(x+5)^2 + 47,2.$$

Sachant que $x \mapsto k(x-\alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique d'une fonction polynôme f du second degré, on peut affirmer que :

- si $k > 0$, alors f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$;
- si $k < 0$, alors f est strictement croissante sur $]-\infty ; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

1° • Le coefficient 21 étant positif, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 3]$ et strictement croissante sur $[3 ; +\infty[$.

• Le coefficient -6 étant négatif,

g est strictement croissante sur $]-\infty ; -5]$ et strictement décroissante sur $[-5 ; +\infty[$.

2° L'extremum de f est un **minimum** ; il vaut -4 et il est atteint en **3**.

3° L'extremum de g est un **maximum** ; il vaut $47,2$ et il est atteint en -5 .

9

Sachant que $x \mapsto k(x-\alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique d'une fonction polynôme p du second degré, on peut affirmer que le sommet de la parabole représentant p a pour coordonnées $(\alpha ; \beta)$.

1° Pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 \text{ donc : } f(x) = (x-5)^2 \text{ forme canonique.}$$

Pour tous réels a et b ,

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

Le sommet S de la parabole représentant f a pour coordonnées **(5 ; 0)**.

2° Pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 - 10x + 26 = x^2 - 10x + 25 + 1 \text{ donc : } f(x) = (x-5)^2 + 1 \text{ forme canonique.}$$

Le sommet S de la parabole représentant f a pour coordonnées **(5 ; 1)**.

3° Pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 - 10x + 24 = x^2 - 10x + 25 - 1 \text{ donc : } f(x) = (x-5)^2 - 1 \text{ forme canonique.}$$

Le sommet S de la parabole représentant f a pour coordonnées **(5 ; -1)**.

4° Pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2 \text{ donc : } f(x) = (x+4)^2 \text{ forme canonique.}$$

Pour tous réels a et b ,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2.$$

Le sommet S de la parabole représentant f a pour coordonnées **(-4 ; 0)**.

5° Pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 + 8x + 19 = x^2 + 8x + 16 + 3 \text{ donc : } f(x) = (x+4)^2 + 3 \text{ forme canonique.}$$

Le sommet S de la parabole représentant f a pour coordonnées **(-4 ; 3)**.

6° Pour tout réel x :

$f(x) = x^2 + 8x + 14 = x^2 + 8x + 16 - 2$
donc : $f(x) = (x + 4)^2 - 2$ forme canonique.

Le sommet S de la parabole représentant f a pour coordonnées $(-4 ; -2)$.

10 $f_1 : x \mapsto x^2 - 2x + 1$,

$f_2 : x \mapsto 2x^2 - 4x + 2$,

$f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$

1° • La forme canonique de f_1 est
 $x \mapsto (x - 1)^2$.

• Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2x^2 - 4x + 2 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) \\ &= 2(x - 1)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, la forme canonique de f_2 est $x \mapsto 2(x - 1)^2$.

• Pour tout réel x :

$$f(x) = f_2(x) + 3 = 2(x - 1)^2 + 3.$$

On en déduit que la forme canonique de f est $x \mapsto 2(x - 1)^2 + 3$.

2° D'après sa forme canonique, f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

11 $f : x \mapsto 2x^2 + 5x - 3$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \bullet (2x - 1)(x + 3) &= 2x^2 + 6x - x - 3 \\ &= 2x^2 + 5x - 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} &= 2\left(x^2 + 2 \times \frac{5}{4} \times x + \frac{25}{16}\right) - \frac{49}{8} \\ &= 2x^2 + 5x + \frac{25 - 49}{8} \\ &= 2x^2 + 5x - 3, \end{aligned}$$

ce qui permet d'affirmer :

pour tout réel x ,

$$f(x) = (2x - 1)(x + 3) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}.$$

1° « $f(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$ » met en

évidence que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $-\frac{49}{8}$ (et qu'il est atteint en $-\frac{5}{4}$).

$$-\frac{49}{8} = -6,125.$$

2° « $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$ » permet d'étudier le signe de $f(x)$ (en dressant un tableau de signes ou en utilisant les résultats concernant le signe d'un trinôme du second degré).

3° « $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ » met en évidence que l'inéquation $f(x) < -3$ est équivalente à $2x^2 + 5x < 0$ (que l'on sait résoudre, puisque l'on est ramené à étudier le signe de $x(2x + 5)$).

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

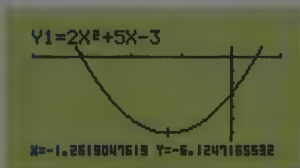
• en entrant :

$$Y1=2X^2+5X-3$$

• avec le cadrage :

$$-4 \leq x \leq 1,$$

$$-8 \leq y \leq 2.$$



12 $\mathcal{P}$ représente la fonction f :

$$x \mapsto x^2 + 4x - 5.$$

1° a) • La forme canonique de f est
 $x \mapsto (x + 2)^2 - 9$

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4.$$

• La forme factorisée est

$$x \mapsto (x + 2 + 3)(x + 2 - 3),$$

c'est-à-dire : $x \mapsto (x + 5)(x - 1)$.

b) D'après la forme canonique de f :

• les coordonnées du sommet S de $\mathcal{P}$ sont donc $(-2 ; -9)$,

• et $x = -2$ est une équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$.

D'après la forme factorisée de f :

$\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-5; 0)$ et $(1; 0)$.

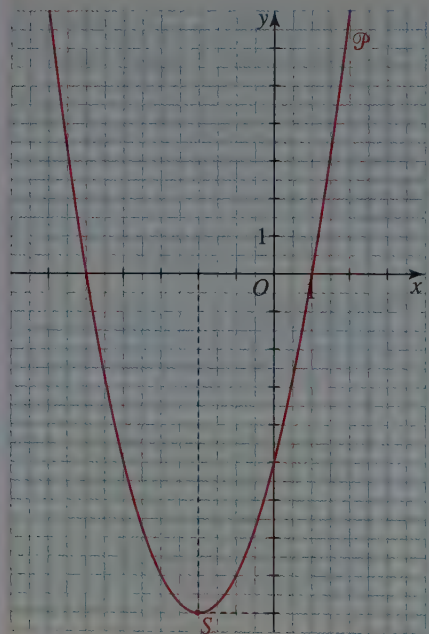
D'après la forme développée de f :

$\mathcal{P}$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; -5)$.

2° $\mathcal{P}$ est superposable avec la parabole de la fonction carré, car le coefficient de x^2 dans l'expression développée de $f(x)$ est 1.

$\mathcal{P}$ est l'image de la parabole représentant la fonction $x \mapsto x^2$ par la translation de vecteur $-2\vec{i} - 9\vec{j}$.

3°



13 $f(x) = -x^2 + 2x + 4$.

1° $f(1) = 5$ et $f\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - 1 + 4 = \frac{11}{4}$.

2° Les antécédents de 4 par f sont les solutions de l'équation $f(x) = 4$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) = 4 &\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 4 = 4 \\ &\Leftrightarrow -x(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2, \end{aligned}$$

donc les antécédents de 4 par f sont 0 et 2.

3° Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} -(x-1)^2 + 5 &= -(x^2 - 2x + 1) + 5 \\ &= -x^2 + 2x + 4 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Autre façon.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2x + 4 \\ &= -(x^2 - 2x - 4) \\ &= -[(x^2 - 2x + 1) - 5] \\ &= -(x-1)^2 + 5. \end{aligned}$$

On note que $x \mapsto -(x-1)^2 + 5$ est la forme canonique de f .

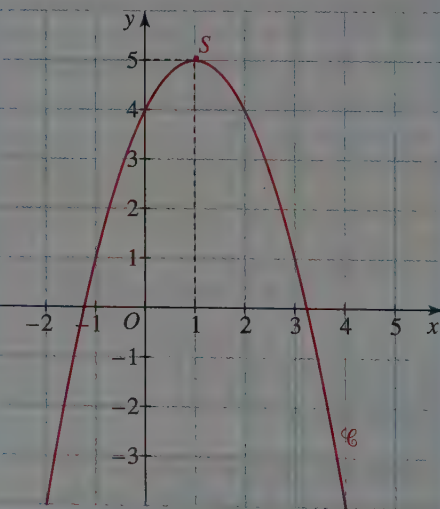
4° f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

Le tableau de variation de f est dressé ci-dessous.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		5	

5° La fonction f admet un maximum qui vaut 5 et qui est atteint en 1.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est une parabole de sommet $S(1; 5)$ et dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 1$.

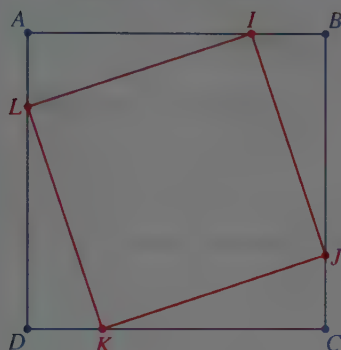


14

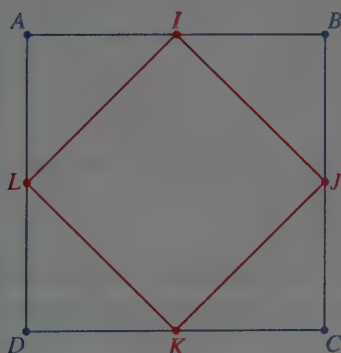
On peut commencer par construire la figure avec un logiciel de géométrie dynamique et afficher l'aire du carré $IJKL$ suivant la valeur du réel x .

1°

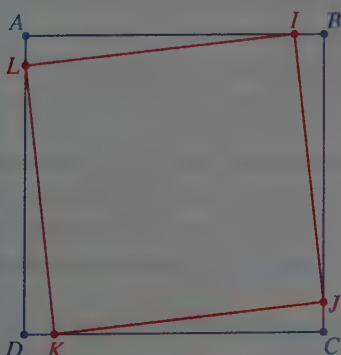
$x : 2.916 \quad a : 9.676$



$x : 2 \quad a : 8$



$x : 3.6 \quad a : 13.12$



2° Le réel x appartient à $[0 ; 4]$ puisque x est une mesure de longueur ($x \geq 0$) inférieure ou égale à celle du côté du carré $ABCD$ ($x \leq 4$).

3°

aire($IJKL$) = aire($ABCD$) - $4 \times$ aire(AIL)

$$= 16 - 4 \times \frac{x(4-x)}{2}$$

$$= 16 - 2x(4-x)$$

$$= 2x^2 - 8x + 16,$$

donc l'aire de $IJKL$ est $2(x^2 - 4x + 8)$.

On démontrerait facilement que $IJKL$ est un carré.

4° Pour tout réel x , posons :

$$a(x) = 2x^2 - 8x + 16 ;$$

$$a(x) = 2(x^2 - 4x + 8)$$

$$= 2(x^2 - 4x + 4 + 4)$$

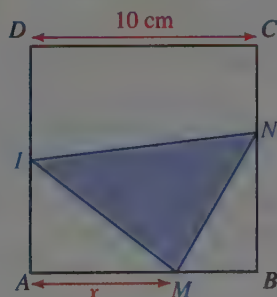
$$= 2(x-2)^2 + 8.$$

D'après la forme canonique de a , l'aire de $IJKL$ est minimale pour $x = 2$

(2 appartient bien à $[0 ; 4]$) et la valeur minimale de l'aire de $IJKL$ est 8.

Dans ce cas, l'aire de $IJKL$ vaut la moitié de celle de $ABCD$ (voir 2^e figure).

15



1° $\mathcal{A}(x)$ est l'aire en cm^2 du triangle MIN .

a) M est un point de $[AB]$ et $AB = 10$, donc :

$$0 \leq AM \leq 10,$$

c'est-à-dire :

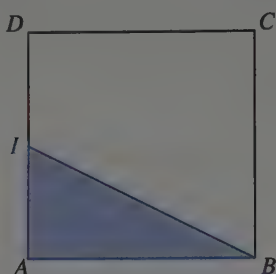
$$0 \leq x \leq 10.$$

Réciproquement, pour tout x de $[0 ; 10]$, il existe un (et un seul) point M de $[AB]$,

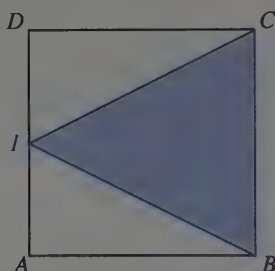
un (et un seul) point N de $[BC]$ tels que $AM = BN = x$.

L'ensemble des valeurs possibles de x est donc $[0 ; 10]$.

b)



• $\mathcal{A}(0)$ est l'aire en cm^2 du triangle IAB , donc : $\mathcal{A}(0) = 25$.



• $\mathcal{A}(10)$ est l'aire en cm^2 du triangle BIC , donc : $\mathcal{A}(10) = 50$.

c) Le carré $ABCD$ a une aire de 100 cm^2 ; d'autre part, l'aire du carré $ABCD$ est égale à la somme des aires :

- du triangle MIN ,
- du triangle AMI , rectangle en A , tel que :

$$AI = 5 \text{ et } AM = x,$$

- du triangle MBN , rectangle en B , tel que :

$$BM = 10 - x \text{ et } BN = x,$$

- du trapèze $DINC$, de bases $[DI]$, $[CN]$, de hauteur $[DC]$, telles que :

$$DI = 5, CN = 10 - x \text{ et } DC = 10,$$

donc :

$$\begin{aligned} 100 &= \mathcal{A}(x) + \frac{5 \times x}{2} + \frac{(10 - x) \times x}{2} \\ &\quad + \frac{5 + (10 - x)}{2} \times 10 \\ &= \mathcal{A}(x) + \frac{5}{2}x + 5x - \frac{1}{2}x^2 + 75 - 5x \\ &= \mathcal{A}(x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 75, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \mathcal{A}(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 100 - 75 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 25. \end{aligned}$$

Finalement : pour tout x de $[0 ; 10]$,

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 25.$$

d) Pour obtenir le tableau de variation de $\mathcal{A}$, déterminons la forme canonique du polynôme du second degré :

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 25.$$

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 25 &= \frac{1}{2}(x^2 - 5x) + 25 \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{25}{4} + 25. \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout x de $[0 ; 10]$:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{175}{8},$$

et le tableau de variation de $\mathcal{A}$ sur $[0 ; 10]$:

x	0	$\frac{5}{2}$	10
$\mathcal{A}(x)$	25	$\frac{175}{8}$	50

$$\frac{175}{8} = 21,875.$$

2° D'après le tableau de variation de $\mathcal{A}$:

- l'aire maximale du triangle MIN est 50 cm^2 ,
- l'aire minimale du triangle MIN est $21,875 \text{ cm}^2$.

Équations du second degré

16 **1°** (E) : $x^2 - 4x + 7 = 0$.

Le discriminant Δ de l'équation du second degré (E) vérifie :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12.$$

$\Delta < 0$, donc (E) n'admet pas de solution.

2° (E) : $2x^2 + \sqrt{5}x + \frac{1}{2} = 0$.

Soit Δ le discriminant de l'équation du second degré (E) :

$$\Delta = (\sqrt{5})^2 - 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 5 - 4 = 1.$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{1}}{2 \times 2} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4},$$

$$x_2 = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$

3° (E) : $x^2 - 3x + 2,25 = 0$.

Le discriminant Δ de l'équation du second degré (E) vérifie :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2,25 = 9 - 9 = 0.$$

$\Delta = 0$, donc (E) admet une seule solution x_0 :

$$x_0 = \frac{-(-3)}{2 \times 1} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

On aurait aussi pu remarquer que, pour tout réel x : $x^2 - 3x + 2,25 = (x - 1,5)^2$.

17 Le polynôme du second degré :

$$x \mapsto (1\,234x - 4\,321)^2$$

admet une seule racine (qui est $\frac{4\,321}{1\,234}$), donc le discriminant de

$x \mapsto (1\,234x - 4\,321)^2$ est égal à 0.

Il était inutile (et pénible !) de calculer le discriminant.

18 Notons (E) l'équation du second degré :

$$2\,221x^2 - 3\,332x - 4\,443 = 0.$$

Son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = (-3\,332)^2 - 4 \times 2\,221 \times (-4\,443) \\ = 3\,332^2 + 4 \times 2\,221 \times 4\,443.$$

Inutile de terminer le calcul de Δ pour connaître son signe.

Donc $\Delta > 0$, ce qui prouve que (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 ; de plus, le produit de ces solutions est égal à $-\frac{4\,443}{2\,221}$, donc $x_1 \times x_2 < 0$, ce qui signifie que x_1 et x_2 sont de signes contraires.

Si deux nombres ont un produit strictement négatif, alors ils sont de signes contraires.

Plus généralement, si $ac < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions de signes contraires.

19 1° (E) : $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Soit Δ le discriminant de l'équation du second degré (E) :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 ;$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{5 - 7}{6} = -\frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{5 + 7}{6} = 2.$$

2° (E') : $3x^4 - 5x^2 - 2 = 0$.

x est solution de (E') si, et seulement si, x^2 est solution de (E).

Pour tout réel x :

$$3x^4 - 5x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2)^2 - 5x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \text{ ou } x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$$

$-\frac{1}{3} < 0$, donc l'équation $x^2 = -\frac{1}{3}$ n'admet pas de solution.

Finalement, les solutions de (E') sont :

$$-\sqrt{2} \text{ et } \sqrt{2}.$$

20 $f : x \mapsto x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$.

1° • Pour tout réel x :

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 \\ = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

• En remarquant que le polynôme f du second degré a :

– pour coefficient de x l'opposé de la somme de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$,

– pour terme constant le produit de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$,

on obtient :

pour tout réel x , $f(x) = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3})$,
ce qui met en évidence que les **racines de f sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$** .

2° En notant Δ le discriminant de f :

$$\begin{aligned}\Delta &= -(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{6} \\ &= 2 + 3 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}.\end{aligned}$$

• Déterminons le signe de Δ , c'est-à-dire comparons les nombres 5 et $2\sqrt{6}$.

$5^2 = 25$ et $(2\sqrt{6})^2 = 4 \times 6 = 24$, donc $5^2 > (2\sqrt{6})^2$, donc, deux réels positifs étant rangés comme leurs carrés :

$$5 > 2\sqrt{6},$$

ce qui prouve : $\Delta > 0$.

• $\Delta > 0$, donc f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-(-(\sqrt{2} + \sqrt{3})) - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{2 \times 1} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-(-(\sqrt{2} + \sqrt{3})) + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{2 \times 1} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{2}.\end{aligned}$$

3° Les écritures des racines obtenues par les deux méthodes sont très différentes, car, dans la seconde, l'expression de $\sqrt{\Delta}$ n'a pas été simplifiée.

En notant que :

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 + 2 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$
et $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, on peut écrire :

$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, et l'on obtient :

$$x_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{3}.$$

Finalement, **les deux méthodes conduisent bien au même résultat.**

21 En premier lieu, rappelons que 1 are vaut 100 m², et donc que 12 ares valent 1 200 m². Appelons x et y les dimensions, en mètres, du jardin ; les réels positifs x et y satisfont au système d'équation (S) :

$$\begin{aligned}(S) &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1\,200 \\ 2(x + y) = 140, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1\,200 \\ y = 70 - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(70 - x) = 1\,200 \\ y = 70 - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 70x + 1\,200 = 0 \\ y = 70 - x. \end{cases}\end{aligned}$$

Soit (E) l'équation du second degré :

$$x^2 - 70x + 1\,200 = 0.$$

Son discriminant Δ vérifie :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-70)^2 - 4 \times 1 \times 1\,200 \\ &= 4\,900 - 4\,800 = 100;\end{aligned}$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-70) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{70 - 10}{2} = 30,$$

$$x_2 = \frac{-(-70) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{70 + 10}{2} = 40.$$

$x_1 > 0$, $x_2 > 0$: le problème posé a bien une solution.

Il vient :

$$\begin{aligned}(S) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \text{ ou } x = 40 \\ y = 70 - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 70 - x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 40 \\ y = 70 - x, \end{cases}\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 40 \\ y = 30. \end{cases}$$

Finalement, la longueur du jardin est de 40 m et la largeur de 30 m.

22 Appelons v la vitesse en km/h du premier automobiliste et t le temps en heures qu'il met pour parcourir le trajet.

On a :

$$v \times t = 400 \quad (1).$$

$$(1) \text{ donne : } t = \frac{400}{v}.$$

Par ailleurs, le second automobiliste effectue le même trajet avec une vitesse de $(v + 20)$ km/h et un temps de parcours de $(t - 1)$ heures.

On a donc :

$$(v + 20) \times (t - 1) = 400 \quad (2).$$

De (1) et (2), on déduit :

$$(v + 20) \times \left(\frac{400}{v} - 1 \right) = 400 \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow 400 - v + \frac{8\,000}{v} - 20 - 400 = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow v - \frac{8\,000}{v} + 20 = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{v^2 - 8\,000 + 20v}{v} = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow v^2 + 20v - 8\,000 = 0.$$

Soit (E) l'équation du second degré :

$$v^2 + 20v - 8\,000 = 0 ;$$

son discriminant Δ vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta &= 20^2 - 4 \times 1 \times (-8\,000) \\ &= 400 + 32\,000 = 32\,400. \end{aligned}$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes v_1 et v_2 :

$$v_1 = \frac{-20 + \sqrt{32\,400}}{2 \times 1} = \frac{-20 + 180}{2} = 80,$$

$$v_2 = \frac{-20 - \sqrt{32\,400}}{2 \times 1} = \frac{-20 - 180}{2} = -100,$$

v étant un réel positif, la seule valeur possible pour v est 80 ; il vient :

• $t = \frac{400}{80} = 5$; le premier automobiliste roule à 80 km/h, la durée de son trajet étant de 5 h ;

• $v + 20 = 80 + 20 = 100$, $t - 1 = 5 - 1 = 4$; le second roule à 100 km/h, la durée de son trajet étant de 4 h.

23 Notons x le nombre d'élèves inscrits au préalable et y le prix initial, en euros, du voyage.

On a : $xy = 1\,200$ et $(x + 4)(y - 10) = 1\,200$, c'est-à-dire :

$$y = \frac{1\,200}{x}$$

$$\text{et } (x + 4) \left(\frac{1\,200}{x} - 10 \right) = 1\,200,$$

donc x est solution de

$$1\,200x - 10x^2 + 4\,800 - 40x = 1\,200x \quad (1)$$

(1) est équivalente à :

$$-10x^2 - 40x + 4\,800 = 0,$$

et (1) est aussi équivalente à :

$$x^2 + 4x - 480 = 0$$

(on a divisé par -10 les deux membres de l'équation).

Le discriminant Δ de cette équation (E) du second degré vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4 \times (-480) = 16 + 1\,920 \\ &= 1\,936 = 44^2. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc : $\frac{-4 - 44}{2}$

et $\frac{-4 + 44}{2}$, c'est-à-dire : -24 et 20 .

La seule solution positive est 20, de plus :

$$20 + 4 = 24 \text{ et } \frac{1\,200}{24} = 50.$$

On peut donc conclure que 24 élèves participent au voyage et que chaque élève paie 50 euros. On a bien : $20 \times 60 = 1\,200$ et $(20 + 4)(60 - 10) = 24 \times 50 = 1\,200$.

Algorithme de résolution d'une équation du second degré

24 $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels et a non nul.

Langage naturel	TI	CASIO
Variables a, b, c, D, X, X' : réels		
Début algorithme		
Entrer a, b, c	Disp « a = » Input a	« a = » ? $\rightarrow$ a
	Disp « b = » Input b	« b = » ? $\rightarrow$ b
	Disp « c = » Input c	« c = » ? $\rightarrow$ c
$D \leftarrow b^2 - 4ac$	$b^2 - 4ac \rightarrow D$	$b^2 - 4ac \rightarrow D$
Si $D < 0$ alors écrire « pas de racine »	If $D < 0$ Then	If $D < 0$ Then "pas de racine"
Fin Si	Disp "pas de racine" End	IfEnd
Si $D = 0$ alors $X \leftarrow \frac{-b}{2a}$	If $D = 0$ Then $-b/(2a) \rightarrow X$	If $D = 0$ Then $-b \div (2a) \rightarrow X$
Écrire « racine double : » Écrire X	DISP "racine double" DISP X	"racine double" X $\blacktriangle$
Fin Si	End	IfEnd
Si $D > 0$ alors	If $D > 0$ Then	If $D > 0$ Then
$X \leftarrow \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$	$(-b - \sqrt{D})/(2a) \rightarrow X$	$(-b - \sqrt{D}) \div (2a) \rightarrow X$
$X' \leftarrow \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$	$(-b + \sqrt{D})/(2a) \rightarrow X'$	$(-b + \sqrt{D}) \div (2a) \rightarrow X'$
Écrire « deux racines : » Écrire X Écrire X'	Disp « deux racines : » Disp X Disp X'	« deux racines : » X $\blacktriangle$ X' $\blacktriangle$
Fin Si	End	IfEnd
Fin algorithme		

Signe d'un polynôme du second degré

25 1° $(x + 2)(x - 3)$.

$x \mapsto (x + 2)(x - 3)$ est un polynôme du second degré, dont le coefficient de x^2 est positif, et qui a pour racines -2 et 3 , donc :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$(x+2)(x-3)$	+	0	-	0	+

2° $(x + 2)(2 - 3x)$.

$x \mapsto (x + 2)(2 - 3x)$ est un polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est négatif (il vaut -3) ; de plus, ses racines sont -2 et $\frac{2}{3}$, donc :

x	$-\infty$	-2	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$(x+2)(2-3x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

3° $x^2 + x + 1$.

$x \mapsto x^2 + x + 1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant Δ est strictement

négatif ($\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$) ; de plus, le coefficient de x^2 est positif, donc :

pour tout réel x , $x^2 + x + 1 > 0$.

26 1° f : $x \mapsto -3x^2 + 5x + 7$.

Soit Δ le discriminant de f :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times 7 = 25 + 84 = 109.$$

$\Delta > 0$, donc f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{109}}{2 \times (-3)} = \frac{5 + \sqrt{109}}{6},$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{109}}{2 \times (-3)} = \frac{5 - \sqrt{109}}{6}.$$

En remarquant que le coefficient de x^2 de f est négatif et $x_2 < x_1$, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$		
$f(x)$		-	0	+	0	-

Finalement :

- si $x \in]-\infty ; x_2[\cup]x_1 ; +\infty[$, alors $f(x) < 0$,
- si $x \in]x_2 ; x_1[$, alors $f(x) > 0$,
- si $x = x_2$ ou $x = x_1$, alors $f(x) = 0$.

2° f : $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x + 9$.

Soit Δ le discriminant de f .

$$\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 9 = 1 - 18 = -17.$$

$\Delta < 0$, donc f garde un signe constant et, puisque $\frac{1}{2} > 0$:

pour tout réel x , $f(x) > 0$.

3° f : $x \mapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 3$.

Soit Δ le discriminant de f :

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times (-1) \times (-3)$$

$$= 12 - 12$$

$$= 0.$$

$\Delta = 0$, donc f admet une seule racine x_0 :

$$x_0 = \frac{-2\sqrt{3}}{2 \times (-1)} = \sqrt{3}.$$

On pouvait également remarquer que, pour tout réel x :

$$f(x) = -(x^2 - 2\sqrt{3}x + 3) = -(x - \sqrt{3})^2.$$

Le signe de $f(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Finalement : **$f(\sqrt{3}) = 0$ et, pour tout réel x distinct de $\sqrt{3}$, $f(x) < 0$.**

27 Par hypothèse, le trinôme du second degré f :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

admet un discriminant Δ strictement négatif ; on sait qu'alors f garde un signe constant, qui est en particulier celui de $f(0)$, c'est-à-dire celui de c .

On a ainsi prouvé que :

pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de c .

Attention ! Ne pas dire : « $f(x)$ n'est pas du signe de c car il est du signe de a ». Ici, pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de a et du signe de c .

28 f : $x \mapsto ax^2 + bx + c$, x_1 et x_2 ses racines.

Remarquons que $\frac{x_1 + 2x_2}{3}$ est strictement compris entre x_1 et x_2 :

• dans le cas où $x_1 < x_2$:

$$x_1 + 2x_1 < x_1 + 2x_2 < x_2 + 2x_2,$$

c'est-à-dire : $3x_1 < x_1 + 2x_2 < 3x_2$,

$$\text{donc : } x_1 < \frac{x_1 + 2x_2}{3} < x_2 ;$$

• dans le cas où $x_2 < x_1$, on obtient de même :

$$x_2 < \frac{x_1 + 2x_2}{3} < x_1.$$

On en déduit que :

$f\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}\right)$ est du signe contraire de celui de a .

$\frac{x_1 + 2x_2}{3}$ est la moyenne pondérée de x_1 et x_2 affectés des coefficients 1 et 2.

29 • $p \geq 0$, $x = 300 - 12p$
 $x \geq 0$, donc $12p \leq 300$, donc $p \leq 25$.

• En notant $R(p)$ la recette en euros :

$$\begin{aligned} R(p) &= (300 - 12p)p - 1\,848 \\ &= -12p^2 + 300p - 1\,848 \\ &= 12(-p^2 + 25p - 154), \end{aligned}$$

donc $R(p) = 12f(p)$, où f est le polynôme du second degré : $x \mapsto -x^2 + 25x - 154$.

• « Amortir les dépenses » se traduit par $R(p) \geq 0$, c'est-à-dire $f(p) \geq 0$.

Le discriminant Δ de f vérifie :

$$\Delta = 25^2 - 4 \times 154 = 625 - 616 = 9 = 3^2.$$

f admet donc deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-25 - 3}{-2} = 14 \text{ et } x_2 = \frac{-25 + 3}{-2} = 11,$$

et :

$$-x^2 + 25x - 154 \geq 0 \Leftrightarrow 11 \leq x \leq 14.$$

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe contraire de a entre ses racines.

On en déduit :

$$-p^2 + 25p - 154 \geq 0 \Leftrightarrow 11 \leq p \leq 14.$$

Enfin, pour avoir le maximum de spectateurs, il faut que le prix du billet soit minimal ($x = 300 - 12p$), donc $p = 11$.

Finalement :

le prix du billet qui permet d'amortir les dépenses et d'avoir le maximum de spectateurs s'élève à 11 euros.

$300 - 12 \times 11 = 300 - 132 = 168$; on peut donc alors compter sur 168 spectateurs.

Résolution d'équations

30 **1°** (E) : $x^3 + 4x^2 + 5x = 0$.

Pour tout réel x :

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Soit (E') l'équation du second degré $x^2 + 4x + 5 = 0$; en notant Δ son discriminant :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 ;$$

$\Delta < 0$, donc (E') n'admet pas de solution.

En conclusion :

la seule solution de l'équation (E) est 0.

$$\mathbf{2^\circ} \text{ (E) : } x + 2 + \frac{1}{x} = 0.$$

Si un réel x est solution de (E), il est nécessairement non nul.

Pour tout réel x non nul :

$$x + 2 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

Pour tous réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

On a ainsi démontré que :

-1 est la seule solution de (E).

31 $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$.

1° Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} (x^2 - 2)(x^2 + ax + b) &= x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x^2 - 2ax - 2b \\ &= x^4 + ax^3 + (b - 2)x^2 - 2ax - 2b. \end{aligned}$$

Donc, dire :

pour tout réel x ,

$$f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + ax + b)$$

signifie que le polynôme :

$$x \mapsto x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$$

et le polynôme :

$$x \mapsto x^4 + ax^3 + (b - 2)x^2 - 2ax - 2b$$

sont égaux, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - 2 = -17 \\ -2a = 4 \\ -2b = 30, \end{cases}$$

c'est-à-dire : **$a = -2$ et $b = -15$.**

2° D'après la première question :

pour tout réel x ,

$$f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 2x - 15),$$

donc :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \text{ ou } x^2 - 2x - 15 = 0.$$

• Les solutions de l'équation $x^2 - 2 = 0$ sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

• Soient (E) l'équation du second degré :
 $x^2 - 2x - 15 = 0$,

et Δ son discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 4 + 60 = 64 ;$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{2 - 8}{2} = -3,$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{2 + 8}{2} = 5.$$

Finalement, les racines de f sont $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, -3 et 5 .

Les interrogations écrites

32 Notons x le nombre de mètres de soie achetés par le décorateur et p le prix, en euros, d'un mètre de soie. Le décorateur achète de la soie pour 540 euros, donc :

$$xp = 540 \quad (1), \quad x > 0, \quad p > 0.$$

Si le mètre de soie avait coûté 5 euros de moins, alors le décorateur aurait obtenu 9 mètres de plus, donc :

$$(x + 9)(p - 5) = 540 \quad (2).$$

De (1), on déduit : $p = \frac{540}{x}$,

de (2), on déduit : $p - 5 = \frac{540}{x + 9}$,

c'est-à-dire : $p = \frac{540}{x + 9} + 5$.

On obtient que x vérifie la relation :

$$\frac{540}{x} = \frac{540}{x + 9} + 5,$$

d'où, en multipliant par $x(x + 9)$:

$$540(x + 9) = 540x + 5x(x + 9),$$

en divisant par 5 :

$$108(x + 9) = 108x + x(x + 9),$$

en réduisant et ordonnant :

$$x^2 + 9x - 972 = 0$$

$$(108 \times 9 = 972).$$

Le discriminant Δ de cette équation (E) du second degré vérifie :

$$\Delta = 9^2 - 4 \times (-972) = 81 + 3\,888 = 3\,969 = 63^2.$$

Les solutions de (E) sont donc :

$$\frac{-9 - 63}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-9 + 63}{2},$$

c'est-à-dire -36 et 27 .

La seule solution positive étant 27 , on peut conclure que, si le problème a une solution, alors le décorateur a acheté 27 mètres de soie.

Il est facile de vérifier que le problème a

bien une solution : $\frac{540}{27} = 20$ et

$$(27 + 9)(20 - 5) = 36 \times 15 = 540.$$

Conclusion : le décorateur a acheté **27 mètres de soie**.

33 $f: x \mapsto \sqrt{-x^2 + 9x - 8}$.

Pour tout réel x :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow -x^2 + 9x - 8 \geq 0.$$

Pour tout réel x , posons :

$$g(x) = -x^2 + 9x - 8.$$

1 est racine évidente de g et le produit des racines est 8 , donc l'autre racine de g est 8 .

Méthode plus classique en 1^{re} :

$$\Delta = 9^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 81 - 32 = 49 = 7^2,$$

g admet donc deux racines :

$$\frac{-9 - 7}{-2} \quad \text{et} \quad \frac{-9 + 7}{-2},$$

c'est-à-dire 8 et 1 .

Le coefficient du terme de plus haut degré de g est -1 ; de plus, $-1 < 0$, donc g est positive entre ses racines.

On en déduit :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow -x^2 + 9x - 8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 8$$

$$\Leftrightarrow x \in [1 ; 8].$$

Finalement : $\mathcal{D}_f = [1 ; 8]$.

34 1° $p(x) = x^3 + 4x - 16$.

a) Le degré de p est 3 ;

les coefficients de p dans l'ordre des puissances décroissantes de x sont : **1 ; 0 ; 4 ; -16**.

b) $p(2) = 2^3 + 4 \times 2 - 16 = 8 + 8 - 16 = 0$; **2 est donc une racine de p** .

c) Pour tout réel x , on a :

$$p(x) = x^3 + 4x - 16$$

et $(x-2)(ax^2 + bx + c)$

$$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$

$$= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c.$$

Deux polynômes sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes coefficients.

De plus, le système :

$$a = 1, b - 2a = 0, c - 2b = 4, -2c = -16,$$

équivalent à : $a = 1, b = 2, c = 8$.

Donc : pour tout réel x ,

$$p(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 8).$$

Remarques :

- penser à développer pour vérifier ;
- il est facile, sans calcul, de voir que $a = 1$ et $c = 8$; il suffit de regarder le coefficient de x^3 et le terme constant dans chacun des polynômes :

$$x \mapsto x^3 + 4x - 16 \text{ et}$$

$$x \mapsto (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

$$((x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + \dots + (-2c)).$$

$$2^\circ f(x) = x^2 + 2x + 8.$$

a) Le degré de f est 2 ;

les coefficients de f dans l'ordre des puissances décroissantes de x sont : 1 ; 2 ; 8.

b) $\Delta = 4 - 32 = -28$; le discriminant de f est strictement négatif, donc f n'a pas de racine.

$$3^\circ g(x) = x^2 - 12x + 35.$$

a) Le degré de g est 2 ;

les coefficients de g dans l'ordre des puissances décroissantes de x sont : 1 ; -12 ; 35.

b) $\Delta = 144 - 140 = 4$; les racines de g sont donc : $\frac{12-2}{2}$ et $\frac{12+2}{2}$, c'est-à-dire : 5 et 7.

$$4^\circ (I) : \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 - 12x + 35} \geq 0$$

L'ensemble de définition de (I) est $\mathbb{R} \setminus \{5 ; 7\}$.

Pour tout réel x distinct de 5 et 7 :

$$(I) \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 8)}{x^2 - 12x + 35} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)f(x)}{g(x)} \geq 0.$$

x	$-\infty$	2	5	7	$+\infty$	
$x-2$	-	0	+	+	+	
x^2+2x+8	+	+	+	+	+	
$x^2-12x+35$	+	+	0	-	0	+
$\frac{x^3+4x-16}{x^2-12x+35}$	-	0	+	-	+	

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est :

$$[2 ; 5[\cup]7 ; +\infty[.$$

CHAPITRE 3

Fonctions usuelles, fonctions associées

LE COURS

Pour les tracés de courbes, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Fonctions affines

Définition

Une **fonction affine** est une fonction qui peut s'écrire $x \mapsto ax + b$, a et b étant des nombres réels ; elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Sens de variation

Si $a > 0$, alors $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$, alors $x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative

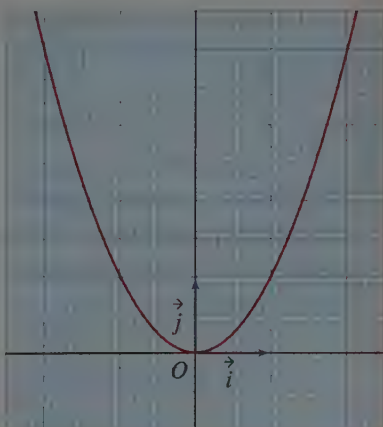
La courbe représentative de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

Fonction carré

La **fonction carré** $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$; elle est paire, strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$	0	$+\infty$

Sa courbe représentative est une parabole de sommet O , d'axe de symétrie la droite des ordonnées, et admet une tangente horizontale en O .



Fonction inverse

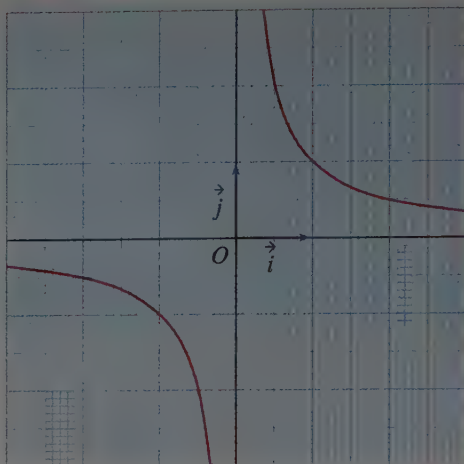
La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour

ensemble de définition $\mathbb{R}^*$; elle est impaire et strictement décroissante sur chacun des intervalles :

$$]-\infty; 0[\text{ et }]0; +\infty[$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$+\infty$	0

Sa courbe représentative est une hyperbole, de centre O , d'asymptotes les droites des abscisses et des ordonnées.

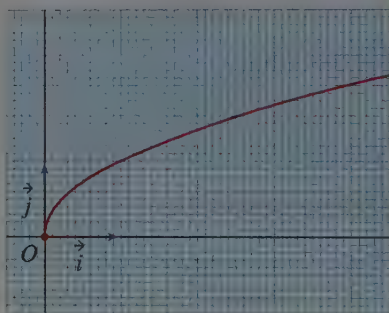


Fonction racine carrée

La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour ensemble de définition $[0; +\infty[$; elle est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+\infty$

Sa courbe représentative est une demi-parabole, la droite des ordonnées est tangente à la courbe au point O .

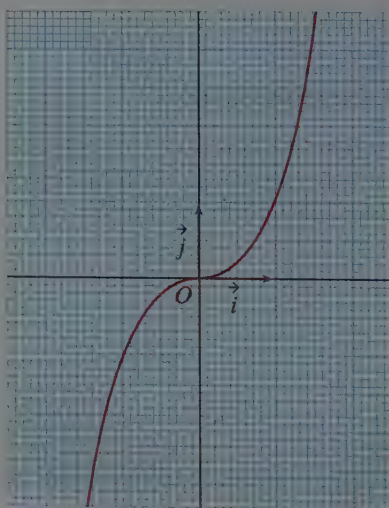


Fonction cube

La fonction cube $x \mapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$; elle est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

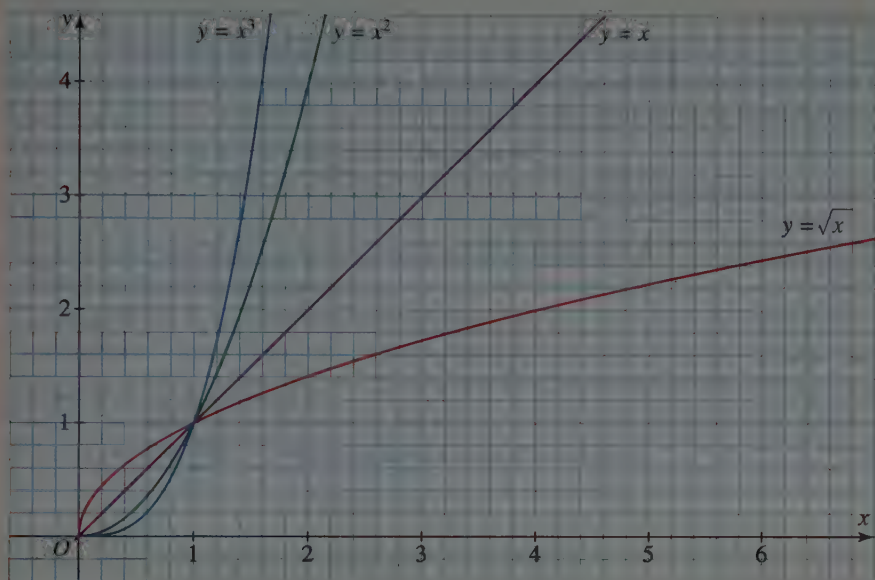
x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$-\infty$	$+\infty$

Sa courbe représentative est symétrique par rapport à O et admet une tangente horizontale en ce point.



Position relative de certaines courbes usuelles

Les courbes des fonctions racine carrée, identité, carré et cube ont deux points communs, l'origine O du repère et le point de coordonnées $(1 ; 1)$.



Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^3 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.

Si $x \geq 1$, alors $x^3 \geq x^2 \geq x \geq \sqrt{x}$.

Opérations sur les fonctions

Définitions

Soient u et v des fonctions définies sur un même intervalle I , et λ un réel.

- $u + v$ est la fonction $x \mapsto u(x) + v(x)$.
- $u + \lambda$ est la fonction $x \mapsto u(x) + \lambda$.
- λu est la fonction $x \mapsto \lambda u(x)$.
- uv est la fonction $x \mapsto u(x) \times v(x)$.
- $\sqrt{u}$ est la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$.
- $\frac{1}{u}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$.

Sens de variation

Soient u et v des fonctions définies sur un même intervalle I et λ un réel.

- Les fonctions u et $u + \lambda$ ont le même sens de variation.

- Si les fonctions u et v sont strictement croissantes sur l'intervalle I , alors la fonction $u + v$ est strictement croissante sur I .

Si les fonctions u et v sont strictement décroissantes sur l'intervalle I , alors la fonction $u + v$ est strictement décroissante sur I .

- Si $\lambda > 0$, alors la fonction λu a le même sens de variation que u .

Si $\lambda < 0$, alors les fonctions λu et u ont des sens de variation contraires.

- Si u est positive sur l'intervalle I , alors $\sqrt{u}$ a le même sens de variation sur I que la fonction u .

Remarque : de façon générale, on ne peut rien dire du sens de variation du produit de deux fonctions, ni du sens de variation de la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

EXERCICES

Vrai ou faux ?

1

(corrigés p. 67)

- 1° La fonction $x \mapsto -3x + 4$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 2° La fonction $x \mapsto x - 7$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 3° La courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à la droite des ordonnées.
- 4° La courbe de la fonction inverse est une parabole.
- 5° La courbe de la fonction racine carrée est située à droite de l'axe des ordonnées et au-dessus de l'axe des abscisses.
- 6° La somme de deux fonctions décroissantes est une fonction décroissante.
- 7° Le point de coordonnées (18 ; 324) appartient à la courbe de la fonction carré.
- 8° Le point de coordonnées (-7 ; 21) appartient à la courbe de la fonction cube.
- 9° La racine carrée d'un réel positif est toujours inférieure ou égale à ce nombre.
- 10° Les fonctions f et $3f - 4$ ont le même sens de variation.

Sens de variation des fonctions usuelles

2 ★ 5 min

(corrigés p. 67)

Préciser le sens de variation de la fonction f proposée.

- 1° $x \mapsto \frac{3-x}{2}$.
- 2° $x \mapsto -x^3$.
- 3° $x \mapsto \frac{2}{x}$.
- 4° $x \mapsto 2x^2 - 7$.

3 ★ 5 min

(corrigés p. 68)

Déterminer le minimum et le maximum de la fonction $x \mapsto x^2$ sur chacun des intervalles $[2 ; 3]$, $[-3 ; -2]$, $[-3 ; 2]$.

4 ★ 10 min

(corrigés p. 68)

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

- 1° Démontrer que f est paire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ de f ?
- 2° Démontrer, en revenant à la définition, que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- 3° Quel est le sens de variation de f sur $]-\infty ; 0]$?

5 ★★ 10 min

(corrigés p. 68)

Donner un exemple de fonction f :

- 1° croissante sur $[0 ; +\infty[$, telle que f^2 (c'est-à-dire $f \times f$) soit croissante sur $[0 ; +\infty[$;
- 2° décroissante sur $[0 ; +\infty[$, telle que f^2 soit croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donner un exemple de fonction f :

1° décroissante sur $]0 ; +\infty[$, telle que f^2 (c'est-à-dire $f \times f$) soit décroissante sur $]0 ; +\infty[$;

2° croissante sur $]0 ; +\infty[$, telle que f^2 soit décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Équations

7 ★ 2 min

(corrigés p. 69)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 = -8$.

8 ★ 10 min

(corrigés p. 69)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation proposée.

1° $x^2 = 8$.

2° $x^3 = -27$.

3° $\sqrt{x} = 2$.

4° $\frac{1}{x} = 5$.

9 ★ 5 min

(corrigés p. 69)

Résoudre l'équation (E) : $x + x^3 + x^5 = 3$.

Encadrements

10 ★ 2 min

(corrigés p. 69)

La fonction carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

On peut traduire cette propriété par : des réels positifs sont rangés comme leur carré.

Traduire sur le même modèle chacune des propriétés proposées.

1° La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2° La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

3° La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

4° La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

11 ★ 5 min

(corrigés p. 70)

x désignant un nombre réel vérifiant : $3 < x \leq 5$,

encadrer au mieux les nombres $x^2, x^3, \sqrt{x}, \frac{1}{x}$.

12 ★ 5 min

(corrigés p. 70)

x désignant un nombre réel vérifiant : $-6 \leq x < -4$,

encadrer au mieux les nombres $x^2, x^3, \frac{1}{x}$.

13 ★★ 10 min

(corrigés p. 70)

1° x désigne un nombre réel vérifiant : $-2 \leq x \leq 1$.Encadrer au mieux les nombres x^2, x^3 .2° x désigne un réel non nul tel que : $-2 \leq x \leq 1$.Que peut-on dire de $\frac{1}{x}$?

14 ★★ 15 min

(corrigés p. 70)

Dans chacun des cas proposés, donner le meilleur renseignement sur le réel x .

1° $x^2 < 7$.

2° $x^2 \geq 4$.

3° $0 < \frac{1}{x} < 2$.

4° $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$.

5° $\frac{1}{x} \geq 3$.

Sens de variation de fonctions associées

15 ★ 10 min

(corrigés p. 71)

Une fonction f , définie sur $[-2 ; 5]$, possède le tableau de variation suivant.

x	-2	-1	0	2	3	4	5
$f(x)$	5	$\searrow$ 0	$\searrow$ -3	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ π	$\searrow$ 0	$\searrow$ -4

Dresser soigneusement les tableaux de variation des fonctions : $f + 3, -2f$.

Aucune justification n'est demandée.

16 ★★ 15 min

(corrigés p. 71)

On considère une fonction f , définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3	0	4
$f(x)$	2	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 3

1° Préciser le maximum de f sur chacun des intervalles $[-3 ; 0], [-3 ; 4], [0 ; 1], [-2 ; 1]$.2° Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions $f + 2, -3f$.3° Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{10 - 3f(x)}}$ est définie sur $[-3 ; 4]$.

Courbes de fonctions associées

17 ★ 10 min

(corrigés p. 71)

Dresser le tableau de variation et tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto x^3 - 2, \quad f_2 : x \mapsto (x-2)^3, \quad f_3 : x \mapsto -x^3.$$

On notera $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, les courbes représentatives respectives des fonctions f_1, f_2, f_3 .

18 ★ 10 min

(corrigés p. 72)

Dresser le tableau de variation et tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{x+1} \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{x}-2, \quad f_3 : x \mapsto \sqrt{x-1}+2.$$

On notera $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, les courbes représentatives respectives des fonctions f_1, f_2, f_3 .

19 ★★ 15 min

(corrigés p. 73)

Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+2}-3$.

1° Du tableau de variation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, déduire celui de f et préciser par quelle transformation géométrique on passe de la demi-parabole Γ d'équation $y = \sqrt{x}$ à $\mathcal{C}_f$.

2° On considère les fonctions :

$$g : x \mapsto -\sqrt{x+2}+3 \text{ et } h : x \mapsto \sqrt{-x+2}-3.$$

Tracer $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sur un même graphique.

20 ★★ 20 min

(corrigés p. 73)

1° Donner le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto -\frac{4}{x}$.

2° Soit g la fonction homographique : $x \mapsto \frac{x-1}{x+3}$.

Donner sa forme canonique, c'est-à-dire déterminer des réels a et b tels que, pour tout réel x différent de -3 :

$$g(x) = \frac{a}{x+3} + b.$$

3° Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction g .

4° La courbe de f , que l'on notera $\mathcal{C}_f$, est une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

Comment passe-t-on de la courbe de f à celle de g ? Que peut-on dire de la courbe $\mathcal{C}_g$ de g ?

Tracer $\mathcal{C}_g$.

Résolution graphique

21 ★ 10 min

(corrigés p. 74)

1° Résoudre graphiquement l'équation (E) : $\frac{1}{x} = 2x + 1$.2° Soit x un réel non nul.Démontrer que, si x est solution de (E), alors : $2x^2 + x - 1 = 0$.

Retrouver alors le résultat de la première question.

22 ★ 10 min

(corrigés p. 75)

1° Résoudre graphiquement l'équation (E) : $\sqrt{x} = 6 - x$.2° Soit x un réel positif ou nul.Démontrer que, si x est solution de (E), alors : $x^2 - 13x + 36 = 0$.

Retrouver alors le résultat de la première question.

23 ★★ 10 min

(corrigés p. 76)

Résoudre graphiquement le système Σ d'inconnue (x, y) :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x - 2. \end{cases}$$

24 ★★ 15 min

(corrigés p. 76)

Résoudre graphiquement l'inéquation (I) :

$$x^2 - 4x - 2 \geq \frac{-6}{x-1}.$$

25 ★★ 15 min

(corrigés p. 76)

Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) :

$$\sqrt{x+2} = x^2 - x - 2.$$

Les interrogations écrites

26 10 min

(corrigés p. 77)

1° Étudier le sens de variation de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x} - x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.2° Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $\frac{1}{x} - x = -\frac{3}{2}$.

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{2x-11}{x-3}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

2° Démontrer : pour tout réel x différent de 3, $f(x) = 2 - \frac{5}{x-3}$.

3° Dresser successivement les tableaux de variation des fonctions $f_1: x \mapsto \frac{-5}{x}$, $f_2: x \mapsto \frac{-5}{x-3}$ et $f_3: x \mapsto 2 - \frac{5}{x-3}$.

4° Notons $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 .

a) La courbe $\mathcal{C}_1$, comme la courbe représentative de la fonction inverse, est une hyperbole.

Pourquoi la courbe $\mathcal{C}$ est-elle une hyperbole superposable à $\mathcal{C}_1$?

b) Les asymptotes de la courbe $\mathcal{C}_1$ sont les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

Quelles sont les asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$?

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

5° a) Résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = x + 5$.

b) Retrouver graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = x + 5$.

6° a) Résoudre, par le calcul, l'inéquation $f(x) > 3$.

b) Retrouver graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) > 3$.

CORRIGÉS

Vrai ou faux ?

1 **1°** La fonction $x \mapsto -3x + 4$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Vrai. On a : $-3 < 0$, donc la fonction affine $x \mapsto -3x + 4$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2° La fonction $x \mapsto x - 7$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Faux. On a : $1 > 0$, donc la fonction affine $x \mapsto x - 7$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$x - 7 = 1 \times x - 7.$$

3° La courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à la droite des ordonnées.

Vrai. La fonction carré est paire.

4° La courbe de la fonction inverse est une parabole.

Faux. La courbe de la fonction inverse est une hyperbole.

Une hyperbole admet un centre de symétrie, ce n'est pas le cas pour une parabole.

5° La courbe de la fonction racine carrée est située à droite de l'axe des ordonnées et au-dessus de l'axe des abscisses.

Vrai. Notons $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction racine carrée.

La fonction racine carrée a pour ensemble de définition $[0 ; +\infty[$, donc les points de $\mathcal{C}$ ont tous une abscisse positive ou nulle et $\mathcal{C}$ est située à droite (au sens large) de l'axe des ordonnées.

De plus, la racine carrée de n'importe quel réel positif ou nul est un réel positif ou nul, donc les points de $\mathcal{C}$ ont tous une ordonnée positive ou nulle et $\mathcal{C}$ est située au-dessus (au sens large) de l'axe des abscisses.

6° La somme de deux fonctions décroissantes est une fonction décroissante.

Vrai. C'est un résultat du cours.

7° Le point de coordonnées $(18 ; 324)$ appartient à la courbe de la fonction carré.

Vrai. En effet : $18^2 = 324$.

8° Le point de coordonnées $(-7 ; 21)$ appartient à la courbe de la fonction cube. **Faux.** En effet : $(-7)^3 \neq 21$.

9° La racine carrée d'un réel positif est toujours inférieure ou égale à ce nombre.

Faux. Il suffit de choisir, par exemple, le nombre 0,25. On a :

$$\sqrt{0,25} = \sqrt{(0,5)^2} = 0,5 \text{ et } 0,25 < 0,5.$$

Plus généralement :

• si $0 \leq x \leq 1$, alors $\sqrt{x} \geq x$;

• si $x \geq 1$, alors $\sqrt{x} \leq x$.

10° Les fonctions f et $3f - 4$ ont le même sens de variation.

Vrai. En effet, d'après le cours :

• f et $3f$ ont le même sens de variation (car $3 > 0$) ;

• $3f$ et $3f - 4$ ont le même sens de variation.

Sens de variation
des fonctions usuelles

2 **1°** $f : x \mapsto \frac{3-x}{2}$.

f est la fonction affine

$$x \mapsto -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \text{ et } -\frac{1}{2} < 0, \text{ donc :}$$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2° $f : x \mapsto -x^3$.

La fonction f est l'opposée de la fonction cube, celle-ci étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$; il vient :

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3° $f : x \mapsto \frac{2}{x}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. En notant u la fonction inverse, on peut écrire : $f = 2u$; $2 > 0$, donc f et u ont le même sens de variation, ce qui prouve que :

f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$.

$$4^\circ f : x \mapsto 2x^2 - 7.$$

$x \mapsto 2x^2 - 7$ a le même sens de variation que $x \mapsto 2x^2$, et $x \mapsto 2x^2$ a le même sens de variation que $x \mapsto x^2$ (car $2 > 0$), donc :

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

3 • La fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc sur $[2 ; 3]$; sur cet intervalle, la fonction $x \mapsto x^2$ atteint donc son minimum en 2 et son maximum en 3, ce qui implique :

le minimum et le maximum de la fonction carré sur $[2 ; 3]$ sont respectivement 4 et 9.

• La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, donc sur $[-3 ; -2]$; sur cet intervalle, la fonction $x \mapsto x^2$ atteint donc son minimum en -2 et son maximum en -3 , ce qui implique :

le minimum et le maximum de la fonction carré sur $[-3 ; -2]$ sont respectivement 4 et 9.

Attention !

La fonction carré n'est pas monotone sur $[-3 ; 2]$.

• Pour tout x de $[-3 ; 0]$:
 $0^2 \leq x^2 \leq (-3)^2$ (car $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $[-3 ; 0]$),
 c'est-à-dire : $0 \leq x^2 \leq 9$.

Pour tout x de $[0 ; 2]$: $0 \leq x^2 \leq (2)^2$
 (car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0 ; 2]$),
 c'est-à-dire : $0 \leq x^2 \leq 4$.

On en déduit :

pour tout x de $[-3 ; 2]$, $0 \leq x^2 \leq 9$,
 les valeurs 0 et 9 étant prises par la fonction carré respectivement en 0 et -3 .

Finalement, le minimum et le maximum de la fonction carré sur $[-3 ; 2]$ sont respectivement 0 et 9.

4 $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}.$

1° f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :
 $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$,
 ce qui prouve que **f est paire.**

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, donc, évidemment, si $x \in \mathcal{D}_f$, alors $-x \in \mathcal{D}_f$.

La courbe $\mathcal{C}$ de f est donc symétrique par rapport à la droite des ordonnées.

2° Soient a et b des réels tels que $0 \leq a < b$. La fonction carré étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a :

$$a^2 < b^2,$$

d'où :

$$a^2 + 1 < b^2 + 1,$$

donc, la fonction racine carrée étant aussi strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (et les réels $a^2 + 1$, $b^2 + 1$ étant positifs) :

$$\sqrt{a^2 + 1} < \sqrt{b^2 + 1},$$

c'est-à-dire :

$$f(a) < f(b).$$

On a ainsi démontré que :

f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

3° f est paire et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc :

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

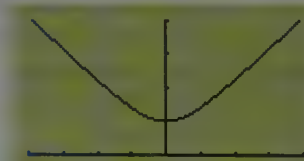
• en entrant :

$$Y1 = \sqrt{(X^2 + 1)}$$

• avec le cadrage :

$$-4 \leq x \leq 4,$$

$$0 \leq y \leq 4.$$



5 1° Prenons pour f la fonction :

$$x \mapsto x.$$

f^2 est alors la fonction carré $x \mapsto x^2$; de plus, f et f^2 sont croissantes sur $[0 ; +\infty[$.

Autres exemples pour f :

$$x \mapsto \sqrt{x}, \quad x \mapsto 2x, \quad x \mapsto 3x + 1, \text{ etc.}$$

Plus généralement, si f est croissante et à valeurs positives, alors f^2 est croissante.

2° Prenons pour f la fonction :

$$x \mapsto -x.$$

f^2 est alors la fonction carré $x \mapsto x^2$; de plus, f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, f^2 est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Si g est croissante et à valeurs positives, alors $-g$ est décroissante et à valeurs négatives, et comme $(-g)^2 = g^2$, $(-g)^2$ est croissante.

6 1° Prenons pour f la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{x}.$$

f^2 est alors la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; de plus, f et f^2 sont décroissantes sur $]0; +\infty[$.

2° Prenons pour f la fonction : $x \mapsto -\frac{1}{x}$.

f^2 est alors la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; de plus, f est croissante sur $]0; +\infty[$ et f^2 est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Équations

7 Équation : $x^3 = -8$.

$(-2)^3 = -8$, et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

-2 est la seule solution de l'équation $x^3 = -8$.

Si une fonction est strictement monotone, elle ne peut prendre une certaine valeur m qu'au plus une fois.

8 1° Pour tout réel x :

$$x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt{8} \text{ ou } x = -\sqrt{8}.$$

L'équation $x^2 = 8$ a deux solutions : $2\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{2}$.

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}.$$

2° On sait : $(-3)^3 = -27$, donc -3 est une solution de l'équation $x^3 = -27$; de plus, la fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\text{si } x < -3, \text{ alors } x^3 < -27$$

$$\text{si } x > -3, \text{ alors } x^3 > -27$$

donc **-3 est la seule solution de l'équation $x^3 = -27$.**

3°

Des réels positifs sont égaux si, et seulement si, ils ont le même carré.

Pour tout réel x positif ou nul :

$$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 2^2 \Leftrightarrow x = 4,$$

donc **4 est la seule solution de l'équation $\sqrt{x} = 2$.**

Autre méthode

On sait : $\sqrt{4} = 2$, donc 2 est une solution de l'équation $\sqrt{x} = 2$.

De plus, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$,

$$\text{si } 0 \leq x < 4, \text{ alors } \sqrt{x} < 2$$

$$\text{si } x > 4, \text{ alors } \sqrt{x} > 2$$

donc **4 est la seule solution de l'équation $\sqrt{x} = 2$.**

4° Pour tout réel x non nul :

$\frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$, donc $\frac{1}{5}$ est la seule solution de l'équation $\frac{1}{x} = 5$.

$$(E) : x + x^3 + x^5 = 3.$$

1 est une solution évidente de l'équation (E).

De plus, comme somme des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^5$, toutes strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto x + x^3 + x^5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f ne prend la valeur 3 qu'en 1 ; en effet, $f(1) = 3$ et, pour tout réel x :

$$\text{si } x < 1, \text{ alors } f(x) < f(1),$$

$$\text{si } x > 1, \text{ alors } f(x) > f(1),$$

donc : si $x \neq 1$, alors $f(x) \neq 3$.

On peut donc conclure que **1 est la seule solution de (E).**

Encadrements

10 1° La propriété « la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ » peut se traduire par « **des réels sont rangés comme leurs cubes** ».

2° La propriété « la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ » peut se traduire par « **des réels strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses** ».

3° La propriété « la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ » peut se traduire par « **des réels négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés** ».

4° La propriété « la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ » peut se traduire par « **des réels positifs sont rangés comme leurs racines carrées** ».

11 $3 < x \leq 5$.

• On a : $0 < 3 < x \leq 5$;

de plus, la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$,

donc : $3^2 < x^2 \leq 5^2$,

c'est-à-dire : **$9 < x^2 \leq 25$** .

• De même, la fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$3^3 < x^3 \leq 5^3,$$

c'est-à-dire : **$27 < x^3 \leq 125$** .

• La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$,

on obtient : $\sqrt{3} < \sqrt{x} \leq \sqrt{5}$.

• La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0; +\infty[$,

on a : $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$.

12 $-6 \leq x < -4$.

• On a : $-6 \leq x < -4 < 0$;

de plus, la fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$,

donc : $(-4)^2 < x^2 \leq (-6)^2$,

c'est-à-dire : **$16 < x^2 \leq 36$** .

• De même, la fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$(-6)^3 \leq x^3 < (-4)^3,$$

c'est-à-dire : **$-216 \leq x^3 < -64$** .

• La fonction inverse étant strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$, on a :

$$\frac{1}{-4} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{-6},$$

c'est-à-dire : **$-\frac{1}{4} < \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{6}$** .

13 1° On sait que le nombre x vérifie : $-2 \leq x \leq 1$.

• Attention, la fonction carré n'est pas monotone sur $[-2; 1]$.

Dressons le tableau de variation de la fonction carré sur l'intervalle $[-2; 1]$.

x	-2	0	1
x^2	4	0	1

Du tableau, on déduit : **$0 \leq x^2 \leq 4$** .

0 est le minimum de la fonction carré sur $[-2; 1]$,

4 est le maximum de la fonction carré sur $[-2; 1]$.

• La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$(-2)^3 \leq x^3 < 1^3,$$

c'est-à-dire : **$-8 \leq x^3 < 1$** .

2° $x \neq 0$ et $-2 \leq x \leq 1$.

$\frac{1}{x}$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit positif et suffisamment proche de 0.

De même, si $-2 \leq x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0$

et $\frac{1}{x}$ peut être rendu aussi loin de 0 que l'on veut, pourvu que x soit négatif et suffisamment proche de 0.

On en déduit que la fonction inverse n'est ni majorée, ni minorée sur $[-2; 0[\cup]0; 1]$.

14 1° Pour tout réel x :

$$x^2 < 7 \Leftrightarrow -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}.$$

Les points de la courbe de la fonction carré qui ont une ordonnée strictement inférieure à 7 ont une abscisse strictement comprise entre $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$.

2° Pour tout réel x :

$$x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2.$$

Pour que le carré d'un réel soit supérieur ou égal à 4, il faut et il suffit que ce réel soit inférieur ou égal à -2 ou qu'il soit supérieur ou égal à 2.

3° Pour tout réel x :

$$0 < \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Les points de la courbe de la fonction inverse dont l'ordonnée est strictement comprise entre 0 et 2 sont ceux dont l'abscisse est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

4° Pour tout réel x :

$$1 \leq \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow 1^2 \leq (\sqrt{x})^2 \leq 2^2 \\ \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4.$$

La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.

5° Pour tout réel x :

$$\frac{1}{x} \geq 3 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{3}.$$

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Sens de variation de fonctions associées

15 Du tableau de variation de la fonction f :

x	-2	-1	0	2	3	4	5
$f(x)$	5	0	-3	0	π	0	-4

on déduit celui de la fonction $f+3$:

x	-2	-1	0	2	3	4	5
$f(x)+3$	8	3	0	3	$\pi+3$	3	-1

f et $f+3$ ont le même sens de variation celui de la fonction $-2f$:

x	-2	-1	0	2	3	4	5
$-2f(x)$	-10	0	-6	0	-2π	0	-8

f et $-2f$ ont des sens de variation contraires.

16 1° D'après le tableau de variation de f :

- le maximum de f sur $[-3; 0]$ est 2 ;
- le maximum de f sur $[-3; 4]$ est 3 ;
- le maximum de f sur $[0; 1]$ est $f(1)$;
- le maximum de f sur $[-2; 1]$ est le plus grand des deux nombres $f(-2)$ et $f(1)$.

2° D'après le cours, les fonctions $f+2$ et f ont le même sens de variation ; on obtient le tableau de variation de la fonction $f+2$ suivant :

x	-3	0	4
$f(x)+2$	4	1	5

D'après le cours, les fonctions $-3f$ et f ont des sens de variation contraires ; on obtient le tableau de variation de la fonction $-3f$ suivant :

x	-3	0	4
$-3f(x)$	-6	3	-9

3° D'après le tableau de variation de $-3f$, le minimum de $-3f$ est -9, donc, pour tout x de $[-3; 4]$:

$$-3f(x) \geq -9,$$

donc : $10 - 3f(x) \geq 1$,

et *a fortiori* : $10 - 3f(x) > 0$,

ce qui permet d'affirmer que la fonction

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{10-3f(x)}}$ est définie sur $[-3; 4]$.

Courbes de fonctions associées

17 Notons $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$.

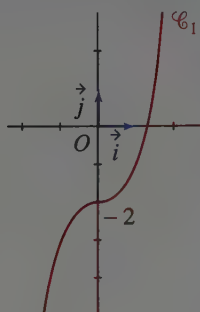
x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$-\infty$	$+\infty$

Le tableau de variation de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 se déduit de celui de la fonction cube.

• $f_1 : x \mapsto x^3 - 2$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$	$-\infty$	$+\infty$

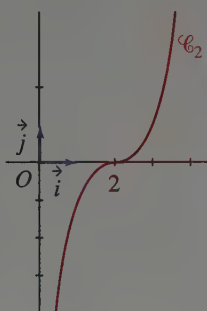
$\mathcal{C}_1$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.



• $f_2 : x \mapsto (x-2)^3$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_2(x)$	$-\infty$	$+\infty$

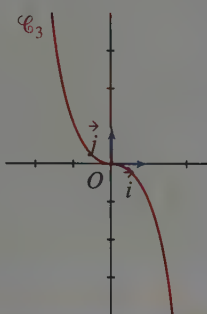
$\mathcal{C}_2$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$.



• $f_3 : x \mapsto -x^3$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_3(x)$	$+\infty$	$-\infty$

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_3$ sont symétriques par rapport à la droite des abscisses.



Une fonction f et son opposée $-f$ ont des sens de variation contraires.

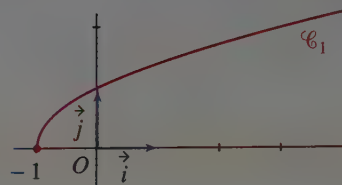
18 Notons $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+\infty$

Le tableau de variation de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 se déduit de celui de la fonction racine carrée.

• $f_1 : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

x	-1	$+\infty$
$f_1(x)$	0	$+\infty$



$\mathcal{C}_1$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $-\vec{i}$.

• $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} - 2$.

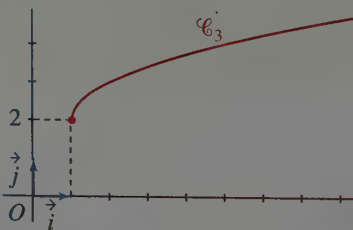
x	0	$+\infty$
$f_2(x)$	-2	$+\infty$



$\mathcal{C}_2$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

• $f_3 : x \mapsto \sqrt{x-1} + 2$.

x	1	$+\infty$
$f_3(x)$	2	$+\infty$



$\mathcal{C}_3$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $\vec{i} + 2\vec{j}$.

19 $f : x \mapsto \sqrt{x+2} - 3$.

1° Du tableau de variation de $x \mapsto \sqrt{x}$:

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+\infty$

on déduit celui de f :

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	-3	$+\infty$

et on passe de la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{x}$ à $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-2\vec{i} - 3\vec{j}$.

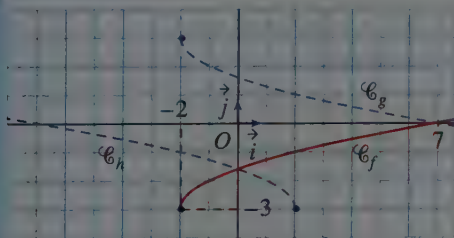
2° $g : x \mapsto -\sqrt{x+2} + 3$

et $h : x \mapsto \sqrt{-x+2} - 3$.

• f et g ont toutes deux pour ensemble de définition $[-2; +\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle : $g(x) = -f(x)$, donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

• L'ensemble de définition de h est le symétrique par rapport à 0 de celui de f et, pour tout x de $]-\infty; 2]$: $h(x) = f(-x)$, donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

$\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sont donc symétriques par rapport au point O .



Remarquons que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent au point d'abscisse 7 de l'axe des abscisses.

20 1° $f : x \mapsto -\frac{4}{x}$.

La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$+\infty$	0

-4 étant un réel strictement négatif, on en déduit celui de la fonction f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	$-\infty$

Si $\lambda < 0$, alors f et λf ont des sens de variation contraires.

2° $g : x \mapsto \frac{x-1}{x+3}$.

L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

• Pour tout réel x différent de -3 :

$$g(x) = \frac{(x+3)-3-1}{x+3} = \frac{(x+3)-4}{x+3},$$

$$g(x) = \frac{x+3}{x+3} - \frac{4}{x+3},$$

$$g(x) = 1 - \frac{4}{x+3} = \frac{-4}{x+3} + 1.$$

Donc la forme canonique de g est :

$$x \mapsto \frac{-4}{x+3} + 1.$$

En prenant $a = -4$ et $b = 1$, on peut écrire, pour tout réel x différent de -3 :

$$g(x) = \frac{a}{x+3} + b.$$

3° D'après ce qui précède, pour tout réel x différent de -3 :

$$g(x) = f(x+3) + 1.$$

• Du tableau de variation de f , on déduit alors celui de g :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$

4° On passe de l'hyperbole $\mathcal{C}_f$ à la courbe $\mathcal{C}_g$ par la translation t de vecteur $-3\vec{i} + \vec{j}$, donc la courbe $\mathcal{C}_g$ est superposable à $\mathcal{C}_f$, et $\mathcal{C}_g$ est aussi une hyperbole.

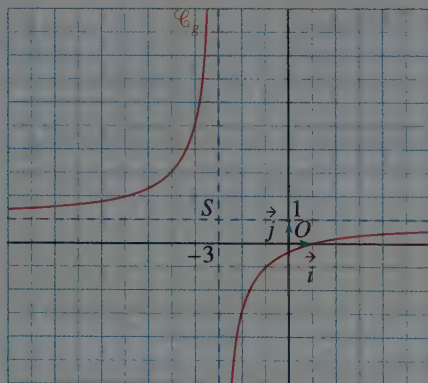
Les asymptotes de $\mathcal{C}_g$ sont les images par t de celles de $\mathcal{C}_f$, or $\mathcal{C}_f$ et l'hyperbole d'équation

$y = \frac{1}{x}$ ont les mêmes asymptotes : la droite des abscisses et celle des ordonnées. Il en résulte que les asymptotes de $\mathcal{C}_g$ sont les droites d'équations $x = -3$ et $y = 1$.

De même, l'origine O étant le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, son image par t est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$, donc le centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$ est le point $S(-3; 1)$.

(S est le point d'intersection des asymptotes de $\mathcal{C}_g$).

	translation de vecteur $-3\vec{i} + \vec{j}$	
	$\mathcal{C}_f$	$\mathcal{C}_g$
Équations des asymptotes	$x = 0$ et $y = 0$	$x = -3$ et $y = 1$
Coordonnées du centre de symétrie	$(0; 0)$	$(-3; 1)$



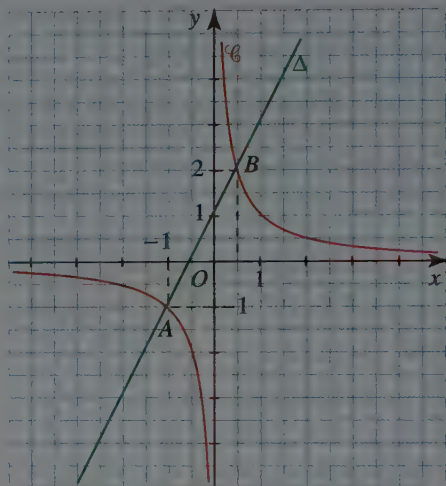
Résolution graphique

21 1° (E) : $\frac{1}{x} = 2x + 1$.

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ et de la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$.

La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$. Ses asymptotes sont la droite des abscisses et la droite des ordonnées.

Traçons la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ dans un même repère.



$\mathcal{C}$ et Δ ont deux points d'intersection A et B, dont les abscisses sont respectivement -1 et $\frac{1}{2}$.

On a bien :

$$\frac{1}{-1} = 2 \times (-1) + 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{1}{2} + 1.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation (E) : $\frac{1}{x} = 2x + 1$ sont -1 et $\frac{1}{2}$.

2° Soit x un réel non nul.

• Supposons que x est solution de (E),

alors x vérifie : $\frac{1}{x} = 2x + 1$,

donc, en multipliant par x :

$$1 = 2x^2 + x,$$

d'où : $2x^2 + x - 1 = 0$.

On a prouvé que, si x est solution de (E), alors $2x^2 + x - 1 = 0$.

• Résolvons l'équation du second degré $2x^2 + x - 1 = 0$.

Son discriminant Δ est tel que :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9 = 3^2,$$

donc $\Delta > 0$ et l'équation $2x^2 + x - 1 = 0$

admet deux solutions : $\frac{-1-3}{2 \times 2}$ et $\frac{-1+3}{2 \times 2}$,

c'est-à-dire -1 et $\frac{1}{2}$.

On en déduit que, si x est solution de (E), alors $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$.

• Réciproquement :

si $x = -1$, alors :

$$\frac{1}{x} = -1 \text{ et } 2x + 1 = -1,$$

si $x = \frac{1}{2}$, alors :

$$\frac{1}{x} = 2 \text{ et } 2x + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Donc, si $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$, alors :

$$\frac{1}{x} = 2x + 1.$$

• On a prouvé que x est solution de (E) si, et seulement si : $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$,

autrement dit, les solutions de l'équation (E) : $\frac{1}{x} = 2x + 1$ sont -1 et $\frac{1}{2}$.

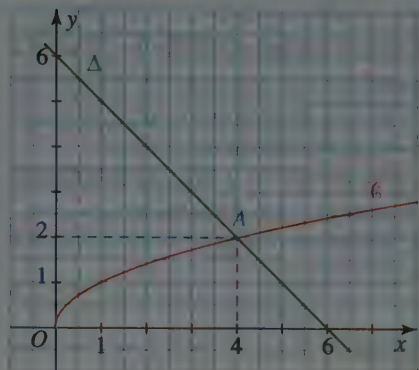
On retrouve bien le résultat de la première question.

22 1° (E) : $\sqrt{x} = 6 - x$.

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \sqrt{x}$ et de la droite Δ d'équation $y = 6 - x$.

La courbe représentative de la fonction racine carrée est la demi-parabole d'équation $y = \sqrt{x}$.

Traçons la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ dans un même repère.



$\mathcal{C}$ et Δ ont un seul point d'intersection A dont l'abscisse est 4.

On a bien : $\sqrt{4} = 6 - 4$.

Par conséquent, l'équation (E) :

$\sqrt{x} = 6 - x$ a pour seule solution 4.

2° • Soit x un réel positif ou nul.

Supposons que x est solution de (E) ;

alors x vérifie : $\sqrt{x} = 6 - x$,

donc : $(\sqrt{x})^2 = (6 - x)^2$,

si deux nombres sont égaux, alors bien sûr leurs carrés sont égaux

d'où :

$$x = 36 - 12x + x^2,$$

et, par conséquent :

$$x^2 - 13x + 36 = 0.$$

On a prouvé que, si x est solution de (E), alors $x^2 - 13x + 36 = 0$.

• Résolvons l'équation du second degré $x^2 - 13x + 36 = 0$.

Son discriminant Δ est tel que :

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 36 = 169 - 144 = 25 = 5^2.$$

$\Delta > 0$ et l'équation $x^2 - 13x + 36 = 0$

admet deux solutions : $\frac{13-5}{2 \times 1}$ et $\frac{13+5}{2 \times 1}$,

c'est-à-dire : 4 et 9.

On en déduit que, si x est solution de (E), alors $x = 4$ ou $x = 9$.

• Réciproquement :

si $x = 4$, alors :

$$\sqrt{x} = \sqrt{4} = 2 \text{ et } 6 - x = 6 - 4 = 2,$$

donc 4 vérifie l'équation $\sqrt{x} = 6 - x$, ce qui prouve que 4 est une solution de (E) ; si $x = 9$, alors :

$$\sqrt{x} = \sqrt{9} = 3 \text{ et } 6 - x = 6 - 9 = -3,$$

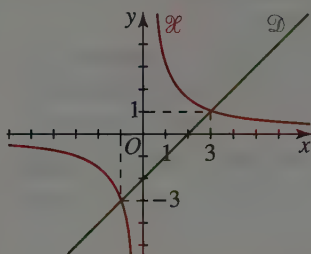
donc 9 n'est pas solution de l'équation $\sqrt{x} = 6 - x$.

On a ainsi prouvé que x est solution de (E) si, et seulement si, $x = 4$.

Autrement dit, **4 est la seule solution de l'équation (E) : $\sqrt{x} = 6 - x$.**

On retrouve bien le résultat de la première question.

23 $\Sigma : \begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x - 2. \end{cases}$



Les solutions de Σ sont les couples de coordonnées des points d'intersection de l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation :

$$y = \frac{3}{x}$$

et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$$y = x - 2.$$

On lit sur la figure que **les solutions de Σ sont (3 ; 1) et (-1 ; -3).**

On contrôle facilement par le calcul que (3 ; 1) et (-1 ; -3) sont bien solutions de Σ .

24 (I) : $x^2 - 4x - 2 \geq \frac{-6}{x-1}$.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 2 &= (x^2 - 4x + 4) - 6 \\ &= (x - 2)^2 - 6. \end{aligned}$$

On considère :

- le polynôme du second degré f :

$$x \mapsto x^2 - 4x - 2,$$

- la fonction $g : x \mapsto \frac{-6}{x-1}$.

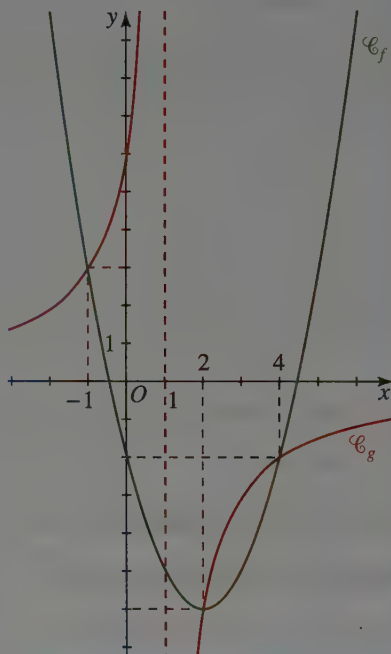
Les solutions de (I) sont les abscisses des points de la parabole $\mathcal{C}_f$ situés au-dessus (au sens large) de l'hyperbole $\mathcal{C}_g$.

La forme canonique de f étant :

$$x \mapsto (x - 2)^2 - 6,$$

$\mathcal{C}_f$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $2\vec{i} - 6\vec{j}$.

Quant à $\mathcal{C}_g$, c'est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \frac{-6}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{i}$.



La droite des abscisses et celle d'équation $x = 1$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_g$.

On lit sur le graphique que **l'ensemble des solutions de (I) est :**

$$]-\infty ; -1] \cup [1 ; 2] \cup [4 ; +\infty[.$$

25 (E) : $\sqrt{x+2} = x^2 - x - 2$.

On considère :

- la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$,

- le polynôme du second degré g :

$$x \mapsto x^2 - x - 2.$$

Les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

$\mathcal{C}_f$ est l'image de la demi-parabole d'équation $y = \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.

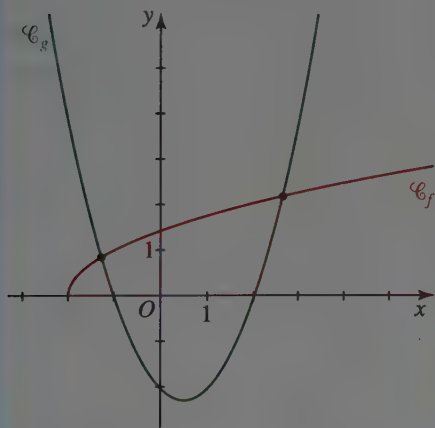
La forme canonique de g étant :

$$x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4}$$

$$= x^2 - x - 2$$

$\mathcal{C}_g$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{9}{4}\vec{j}$.



Sur le graphique, on lit que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont exactement deux points d'intersection, donc :

le nombre de solutions de (E) est 2.

Les interrogations écrites

26 1° $f: x \mapsto \frac{1}{x} - x$

f est la somme des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -x$, toutes deux strictement décroissantes sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

2° Puisque la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x} - x$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, l'équation $\frac{1}{x} - x = -\frac{3}{2}$ admet au plus une solution.

En outre : $\frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, donc 2 est une solution de l'équation $\frac{1}{x} - x = -\frac{3}{2}$.

Par conséquent, dans $]0; +\infty[$, l'équation $\frac{1}{x} - x = \frac{3}{2}$ admet une seule solution : 2.

27 $f: x \mapsto \frac{2x-11}{x-3}$

1° $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, car 3 est le seul réel qui n'a pas d'image par f .

2° Pour tout réel x différent de 3,

$$2 - \frac{5}{x-3} = \frac{2x-6-5}{x-3} = \frac{2x-11}{x-3},$$

donc :

$$f(x) = 2 - \frac{5}{x-3}.$$

3°

$x \mapsto \frac{-5}{x}$ et la fonction inverse ont des sens de variation contraires.

Tableau de variation de $f_1: x \mapsto \frac{-5}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{-5}{x}$		$+\infty$	0
	0	$-\infty$	

Tableau de variation de $f_2: x \mapsto \frac{-5}{x-3}$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$\frac{-5}{x-3}$		$+\infty$	0
	0	$-\infty$	

Tableau de variation de $f_3 : x \mapsto 2 - \frac{5}{x-3}$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2 - \frac{5}{x-3}$	2	$+\infty$	2
		$-\infty$	

4° $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f_1 et $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f .

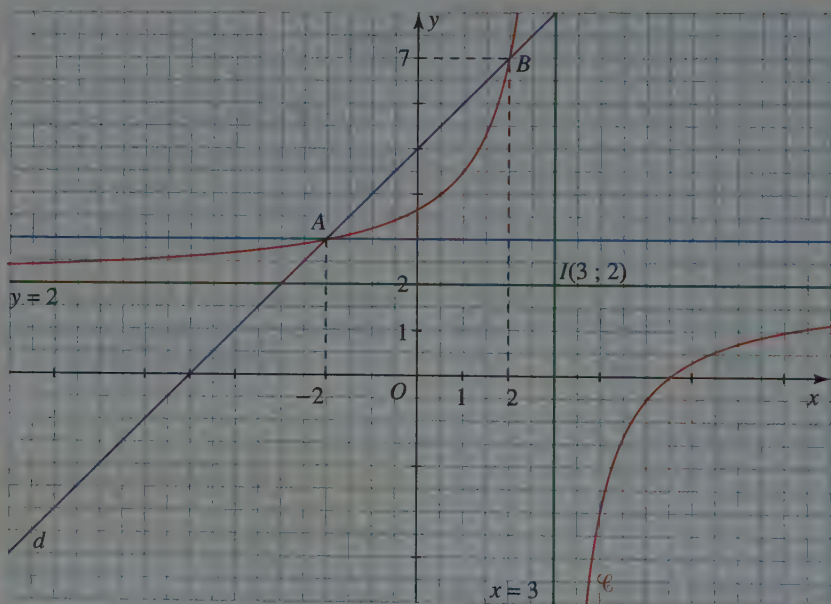
a) Comme la translation de vecteur $3\vec{i} + 2\vec{j}$ permet de passer de la courbe $\mathcal{C}_1$ à la courbe $\mathcal{C}$ et que toute translation conserve les distances, la courbe $\mathcal{C}$ est une hyperbole superposable à $\mathcal{C}_1$.

b) Les asymptotes de $\mathcal{C}$ sont les images des asymptotes de $\mathcal{C}_1$ par la translation t de vecteur $3\vec{i} + 2\vec{j}$, donc les asymptotes de $\mathcal{C}$ sont les droites d'équations $x = 3$ et $y = 2$.

La droite d'équation $x = 0$ a pour image par t la droite d'équation $x = 3$ et la droite d'équation $y = 0$ a pour image par t la droite d'équation $y = 2$.

$\mathcal{C}$ est une hyperbole dont le centre de symétrie est $I(3; 2)$ puisque ses asymptotes sont les droites d'équations $x = 3$ et $y = 2$.

c)



5° a) Pour tout x différent de 3 :

$$\begin{aligned}
 f(x) = x + 5 &\Leftrightarrow \frac{2x-11}{x-3} = x + 5 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x^2-3x+5x-15}{x-3} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x^2+2x-15}{x-3} \\
 &\Leftrightarrow 2x-11 = x^2+2x-15 \\
 &\Leftrightarrow x^2-4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 4 \\
 &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2.
 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation

$f(x) = x + 5$ sont -2 et 2 .

Autre façon :

pour tout x différent de 3 :

$$\begin{aligned}
 f(x) = x + 5 &\Leftrightarrow 2 - \frac{5}{x-3} = x + 5 \\
 &\Leftrightarrow -\frac{5}{x-3} = x + 3 \\
 &\Leftrightarrow -5 = (x+3)(x-3) \\
 &\Leftrightarrow -5 = x^2 - 9 \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 4 \\
 &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2.
 \end{aligned}$$

b) Les solutions de l'équation

$f(x) = x + 5$ sont les abscisses des points A et B d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite d d'équation $y = x + 5$.

D'après le graphique, $f(x) = x + 5$ a deux solutions : -2 et 3 .

6° a) Pour tout réel x différent de 3 :

$$\begin{aligned} f(x) > 3 &\Leftrightarrow \frac{2x-11}{x-3} > 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-11}{x-3} - 3 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-11-3x+9}{x-3} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x-2}{x-3} > 0, \end{aligned}$$

or le signe du quotient $\frac{-x-2}{x-3}$ est celui du produit $(-x-2)(x-3)$ (polynôme du second degré de racines -2 et 3 et

dont le coefficient du terme de plus haut degré est strictement négatif),

donc : $f(x) > 3 \Leftrightarrow -2 < x < 3$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$-x-2$	+	0	-	0	-
$x-3$	-	-	0	+	
$\frac{-x-2}{x-3}$	-	0	+		-

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 3$ est $] -2 ; 3[$.

b) Les solutions de l'inéquation $f(x) > 3$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ qui ont une ordonnée strictement supérieure à 3 .

D'après le graphique, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 3$ est $] -2 ; 3[$.

CHAPITRE 4

Dérivation

LE COURS

f est une fonction dont l'ensemble de définition est un intervalle I et a un réel de I .

Nombre dérivé

- Pour tout réel h tel que $a + h$ appartienne à l'intervalle I , le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est le réel $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- Dire que f est dérivable en a signifie que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie ℓ quand h tend vers 0.

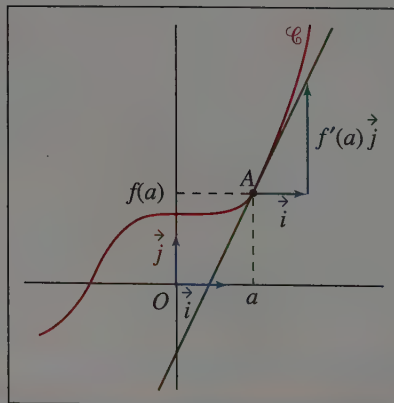
Le nombre ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a , et noté $f'(a)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell.$$

Interprétation graphique : tangente

- Si f est dérivable en a , alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet, au point A d'abscisse a , une tangente non verticale de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$



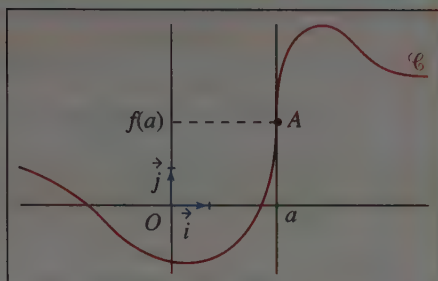
• Si l'on a : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$

ou encore : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\infty$,

alors f n'est pas dérivable en a ;

si de plus : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, alors la

courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet, au point A d'abscisse a , une tangente verticale d'équation $x = a$.



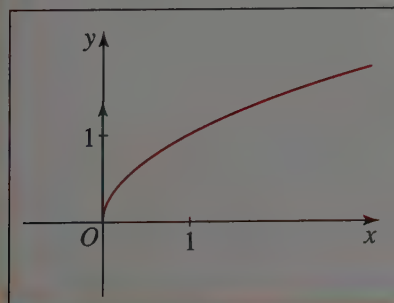
Dérivation sur un intervalle - Fonction dérivée

On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout réel de I , et la fonction dérivée de f sur I est alors la fonction f' qui, à tout réel x de I , associe $f'(x)$ (c'est-à-dire le nombre dérivé de f en x).

Dérivées des fonctions usuelles

f	f'	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0 ; +\infty [$	$] 0 ; +\infty [$

• La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale à l'origine O .

► Dérivées et opérations

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I ; λ est un réel.

Formule	Conditions
$(u + v)' = u' + v'$	
$(\lambda u)' = \lambda u'$	
$(uv)' = u'v + uv'$	
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

► Polynômes et fonctions rationnelles

- Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle (c'est-à-dire qui est le quotient de deux polynômes) est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

EXERCICES

Dans tous les exercices, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Vrai ou faux ?

1 (corrigés p. 87)

1° Si f est dérivable en -3 , alors $f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$.

2° La fonction $h \mapsto h + 2h^3 - \sqrt{h}$ a pour limite 0 en 0.

3° La fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ a pour dérivée $x \mapsto x^2 + x + 1$.

4° Les fonctions $x \mapsto (x-1)^2$ et $x \mapsto x^2 - 2x$ ont la même dérivée.

5° La fonction inverse est dérivable en tout réel de son ensemble de définition.

6° La fonction racine carrée est dérivable sur son ensemble de définition. ✓

7° La fonction $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

8° Si f est une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$, alors $f'(3) = 0$.

9° Soit a un nombre réel fixé. La fonction : $x \mapsto x^2 - a^3$ admet pour dérivée $x \mapsto 2x - 3a^2$.

10° Si la courbe représentative d'une fonction admet une tangente en un point d'abscisse a , alors la fonction est dérivable en a .

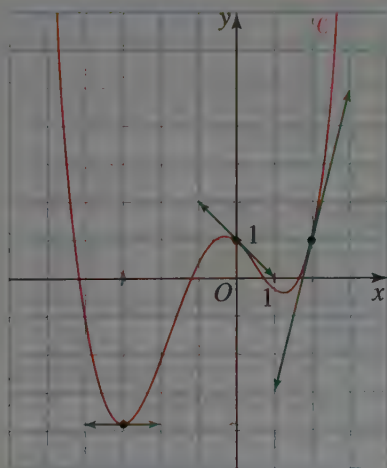
Nombre dérivé et tangente

2 ★ 2 min

(corrigés p. 88)

Sur la figure ci-contre, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f a été tracée, ainsi que trois de ses tangentes.

Déterminer graphiquement $f'(-3)$, $f'(0)$, et $f'(2)$.



3 ★★ 10 min

(corrigés p. 88)

On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - 3x + 5$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1° En utilisant la définition, déterminer le nombre dérivé de f en -1 .

2° Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 .

4 ★ 5 min

(corrigés p. 89)

	A	B	C	D
1	h	x	$f(x)$	
2	1	2	2,64575131	0,64575131
3	0,1	1,1	2,05182845	0,51828453
4	0,01	1,01	2,0050187	0,50187032
5	0,001	1,001	2,00050019	0,50018745
6	0,0001	1,0001	2,00005	0,50001875
7	0,00001	1,00001	2,000005	0,50000188
8	0,000001	1,000001	2,0000005	0,50000019
9	0,0000001	1,0000001	2,00000005	0,50000002
10	0,00000001	1,00000001	2,000000001	0,5
11				

On considère la copie d'écran ci-dessus, où a été tabulée la fonction f :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}.$$

Dans la cellule D2 a été entrée la formule :

$$=(C2-2)/A2$$

puis la poignée de recopie rapide a été tirée vers le bas à partir de la cellule D2.

Quelle conjecture est-on amené à formuler ?

5 ★★ 10 min

(corrigés p. 89)

On appelle f la fonction : $x \mapsto x^3 - 7x^2 + 3x - 2$.

1° Pour tout réel h , calculer $f(2+h) - f(2)$.

2° Montrer que f est dérivable en 2. Que vaut $f'(2)$?

6 ★★ 10 min

(corrigés p. 89)

1° Démontrer que la fonction $f: x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

Justifier que f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

2° Soient u et v des fonctions définies sur un intervalle I .

Est-il nécessaire que u et v soient dérivables sur I pour que la fonction $u \times v$ soit dérivable sur I ?

7 ★★ 20 min

(corrigés p. 90)

Soit f la fonction : $x \mapsto x^2 + 4x - 7$.

1° Montrer en utilisant la définition du nombre dérivé que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.

2° Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f ; donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

3° Tracer $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_f$.

8 ★★ 20 min

(corrigés p. 90)

Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+2}$.

1° Montrer en utilisant la définition du nombre dérivé que f est dérivable en -1 , et déterminer $f'(-1)$.

2° Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ au point A d'abscisse -1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f .

3° Tracer $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_f$.

9 ★★ 15 min

(corrigés p. 91)

Démontrer que les courbes représentatives des fonctions $f: x \mapsto -x^2$ et $g: x \mapsto x^2 + 8x + 8$ ont la même tangente au point d'abscisse -2 .

10 ★★ 15 min

(corrigés p. 91)

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels :

1° la tangente est parallèle à la droite des abscisses ;

2° la tangente est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 9x - 7$.

Calculs de dérivées

11 ★★ 20 min

(corrigés p. 92)

Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f proposée et calculer $f'(x)$ pour tout x de cet ensemble.

1° $f: x \mapsto 3x^2 - 2$. $\mathbb{R}$

2° $f: x \mapsto \sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3} + 3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}$

3° $f: x \mapsto 1 - 5x^2 + x^5$. $\mathbb{R}$

4° $f: x \mapsto (x-3)^2 = x^2 + 9 = 2x$

5° $f: x \mapsto \frac{1}{x} + x$.

6° $f: x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x}$.

7° $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

8° $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

9° $f: x \mapsto \frac{1}{x^2 - 6x + 10}$.

10° $f: x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.

12 ★★ 10 min

(corrigés p. 94)

Calculer le nombre dérivé en a de la fonction f proposée.

1° $f: x \mapsto 3\sqrt{x} - \frac{2}{x}$, $a = 1$.

2° $f: x \mapsto (x^3 - 3)(x^2 + x + 1)$, $a = -1$.

$$3^\circ f: x \mapsto x^2\sqrt{x}, \quad a = 4.$$

$$4^\circ f: x \mapsto \frac{2x-1}{3x-2}, \quad a = 0.$$

13 ★★ 10 min

(corrigés p. 94)

Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la dérivée de la fonction f proposée et préciser $f'(0)$.

$$1^\circ f: x \mapsto g(x) - x^3. \quad 1 - 3x^2$$

$$2^\circ f: x \mapsto xg(x).$$

$$3^\circ f: x \mapsto (g(x))^2.$$

$$4^\circ f: x \mapsto (x^3 - x)g(x).$$

$$5^\circ f: x \mapsto \frac{g(x)}{x^2 + 1}.$$

Les interrogations écrites

14 ★★ 10 min

(corrigés p. 95)

On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 + 5x - 1$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1° En utilisant la définition, déterminer le nombre dérivé de f en 1.

2° Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

15 ★★ 10 min

(corrigés p. 95)

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = 2\sqrt{x} - x$.

Déterminer le point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente a pour ordonnée à l'origine 2.

16 ★★ 10 min

(corrigés p. 96)

Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f proposée et calculer $f'(x)$ pour tout x de cet ensemble.

$$1^\circ f: x \mapsto 3x^2 - 5x + 2.$$

$$2^\circ f: x \mapsto \frac{1}{x^3}.$$

$$3^\circ f: x \mapsto (2x + 3)(3x - 5).$$

$$4^\circ f: x \mapsto \frac{2x + 7}{x - 2}.$$

CORRIGÉS

Vrai ou faux ?

1 **1°** Si f est dérivable en -3 , alors

$$f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}.$$

Vrai. Car si f est dérivable en -3 , alors elle admet un nombre dérivé en -3 , noté $f'(-3)$, et $f'(-3)$ est la limite du taux d'accroissement de f entre -3 et $-3+h$ quand h tend vers 0.

2° La fonction $h \mapsto h + 2h^3 - \sqrt{h}$ a pour limite 0 en 0.

Vrai. En effet, chacune des fonctions $h \mapsto h$, $h \mapsto h^3$, $h \mapsto \sqrt{h}$ a pour limite 0 en 0, la valeur qu'elle prend en 0.

3° La fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ a pour dérivée $x \mapsto x^2 + x + 1$.

Vrai. En notant f la fonction polynôme $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, dérivable sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x + 1 = x^2 + x + 1.$$

4° Les fonctions $x \mapsto (x-1)^2$ et $x \mapsto x^2 - 2x$ ont la même dérivée.

Vrai. On peut écrire, pour tout réel x :

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Les fonctions $x \mapsto (x-1)^2$ et $x \mapsto x^2 - 2x$ ont toutes deux pour dérivée la fonction $x \mapsto 2x - 2$.

On dit que les fonctions $x \mapsto (x-1)^2$ et $x \mapsto x^2 - 2x$ diffèrent d'une constante.

5° La fonction inverse est dérivable en tout réel de son ensemble de définition.

Vrai. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable et ne s'annule pas sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$, $]0; +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$,

autrement dit la fonction inverse est dérivable en tout réel de son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.

On pouvait aussi dire que, f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable en tout réel de son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.

6° La fonction racine carrée est dérivable sur son ensemble de définition.

Faux.

En effet, d'après le cours, la fonction racine carrée :

- a pour ensemble de définition $[0; +\infty[$,
- est dérivable sur $]0; +\infty[$, non dérivable en 0.

Montrons que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

On a, pour tout réel h strictement positif :

$$\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}},$$

et $\frac{1}{\sqrt{h}}$ peut être rendu aussi grand que l'on

veut pourvu que le réel strictement positif h soit suffisamment proche de 0, donc le taux d'accroissement entre 0 et h n'admet pas une limite finie quand h tend vers 0.

B3		=1/RACINE(A3)	
	A	B	C
1	h	$1/\sqrt{h}$	
2	1		1
3	0,1	3,162278	
4	0,01	10,000000	
5	0,001	31,622777	
6	0,0001	100,000000	
7	0,00001	316,227766	
8	0,000001	1000,000000	
9	0,0000001	3162,277660	
10	0,00000001	10000,000000	
11			

7° La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

Vrai. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$ admet pour dérivée $x \mapsto 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$, c'est-à-dire $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

8° Si f est une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$, alors $f'(3) = 0$.

Vrai. Toute fonction constante dont l'ensemble de définition est un intervalle I est dérivable sur I et admet pour dérivée la fonction nulle sur I .

9° Soit a un nombre réel fixé. La fonction : $x \mapsto x^2 - a^3$ admet pour dérivée $x \mapsto 2x - 3a^2$.

Faux. La dérivée de $x \mapsto x^2 - a^3$ est $x \mapsto 2x$.

La fonction $x \mapsto x^2 - a^3$ est la somme de la fonction carré et de la fonction constante $x \mapsto -a^3$, et cette fonction constante sur $\mathbb{R}$ admet pour dérivée la fonction nulle $x \mapsto 0$.

10° Si la courbe représentative d'une fonction admet une tangente en un point d'abscisse a , alors la fonction est dérivable en a .

Faux. Par exemple, la courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente en son point d'abscisse 0, et la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

En revanche, la réciproque est vraie :

« si une fonction est dérivable en un réel a , alors sa courbe représentative admet une tangente en son point d'abscisse a », et on peut préciser que cette tangente n'est pas verticale.

Nombre dérivé et tangente

2 • La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -3 est parallèle à la droite des abscisses, donc admet 0 pour coefficient directeur.

On en déduit :

$$f'(-3) = 0.$$

• La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 admet -1 pour coefficient directeur, donc :

$$f'(0) = -1.$$

La tangente passe par les points $A(-1; 2)$, $B(1; 0)$ et :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{1 - (-1)} = \frac{-2}{2} = -1.$$

• De même, la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 admet 4 pour coefficient directeur, donc :

$$f'(2) = 4.$$

3 $f(x) \mapsto x^2 - 3x + 5$.

1° La fonction f étant une fonction polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel h non nul, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2 - 3(-1+h) + 5 - 9}{h} \\ &= \frac{1 - 2h + h^2 + 3 - 3h - 4}{h} \\ &= \frac{h^2 - 5h}{h} \\ &= h - 5, \end{aligned}$$

de plus : $\lim_{h \rightarrow 0} (h - 5) = -5$,

donc : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -5$.

Cela prouve que f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -5$.

2° La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 admet pour équation :

$$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)).$$

Or : $f'(-1) = -5$,

$$f(-1) = 1 + 3 + 5 = 9,$$

donc $\mathcal{T}$ admet pour équation :

$$y - 9 = -5(x + 1),$$

ou encore : $y = -5x + 4$.

On peut obtenir une équation de la tangente $\mathcal{T}$ sans utiliser la « formule ». Le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ est $f'(-1)$, c'est-à-dire -5 , donc une équation de $\mathcal{T}$ est du type $y = -5x + b$; de plus, le point de coordonnées $(-1; 9)$ appartient à $\mathcal{T}$, donc : $9 = -5 \times (-1) + b$, d'où : $b = 4$.

4

	A	B	C	D
1	h	x	$f(x)$	
2	1	2	2,64575131	0,64575131
3	0,1	1,1	2,05182845	0,51828453
4	0,01	1,01	2,0050187	0,50187032
5	0,001	1,001	2,00050019	0,50018745
6	0,0001	1,0001	2,00005	0,50001875
7	0,00001	1,00001	2,000005	0,50000188
8	0,000001	1,000001	2,0000005	0,50000019
9	0,0000001	1,0000001	2,00000005	0,50000002
10	0,00000001	1,00000001	2,000000001	0,5

$$f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}.$$

La formule =(C2)/A2 entrée dans la cellule D2 correspond au calcul de

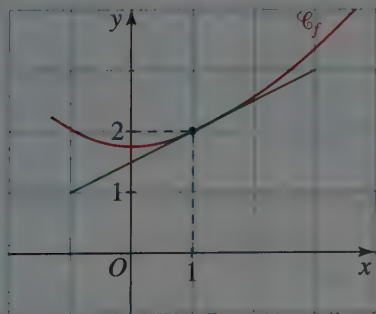
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (\text{car } f(1) = \sqrt{4} = 2),$$

c'est-à-dire au taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et $1+h$.

Les valeurs de la colonne D montrent que, lorsque h se rapproche de 0, $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ est de plus en plus proche de 0,5 ; lorsque $h = 10^{-8}$, la précision du tableur ne permet plus de distinguer

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ de } 0,5.$$

On est donc amené à conjecturer que f admet un nombre dérivé en 1, égal à 0,5.



5 $f: x \mapsto x^3 - 7x^2 + 3x - 2.$

La fonction f étant une fonction polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

1° Pour tout réel h , on a :

$$\begin{aligned} f(2+h) - f(2) &= (2+h)^3 - 7(2+h)^2 \\ &\quad + 3(2+h) - 2 - (-16) \\ &= 8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 28 - 28h - 7h^2 \\ &\quad + 6 + 3h + 14 \end{aligned}$$

donc :

$$f(2+h) - f(2) = -13h - h^2 + h^3.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

2° Pour tout réel h non nul, on a :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -13 - h + h^2,$$

$$\text{et : } \lim_{h \rightarrow 0} (-13 - h + h^2) = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -13.$$

Cela prouve que f est dérivable en 2 et que $f'(2)$ est égal à -13 .

6 1° $f: x \mapsto x\sqrt{x}.$

• L'ensemble de définition de f est $[0; +\infty[$.

La fonction f est le produit de la fonction $x \mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable seulement sur $]0; +\infty[$.

Comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (au moins).

Pour étudier la dérivabilité de f en 0, intéressons-nous au taux d'accroissement de f entre 0 et h .

Pour tout réel h strictement positif :

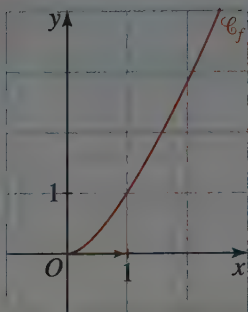
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h},$$

$$\text{et } \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0,$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0,$$

ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

• La fonction f est dérivable en 0 et sur $]0; +\infty[$, donc f est dérivable en tout réel de $[0; +\infty[$, autrement dit f est dérivable sur son ensemble de définition $[0; +\infty[$.



2° Notons u la fonction $x \mapsto x$, v la fonction racine carrée et I l'intervalle $[0; +\infty[$. D'après la question précédente, la fonction $u \times v$ est dérivable sur I sans que la fonction v soit dérivable sur cet intervalle. Donc « u et v sont dérivables sur I » n'est pas une condition nécessaire pour que $u \times v$ soit dérivable sur I .

En revanche, d'après le cours :

si u et v sont dérivables sur I , alors $u \times v$ est dérivable sur I ,

donc « u et v sont dérivables sur I » est une condition suffisante pour que $u \times v$ soit dérivable sur I .

7 $f: x \mapsto x^2 + 4x - 7$.

1° La fonction f étant un polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel h , on a :

$$\begin{aligned} & \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{(1+h)^2 + 4(1+h) - 7 - (-2)}{h} \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 + 4 + 4h - 5}{h} \\ &= \frac{h^2 + 6h}{h} \\ &= h + 6, \end{aligned}$$

et : $\lim_{h \rightarrow 0} (h + 6) = 6$

donc : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 6$.

Donc f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1, c'est-à-dire $f'(1)$, est 6.

2° Le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ est $f'(1)$, c'est-à-dire 6.

A est un point de $\mathcal{T}$; il a pour abscisse 1 et donc pour ordonnée $f(1)$, soit -2.

$\mathcal{T}$ admet donc une équation de la forme :
 $y = 6x + q$.

Déterminons le réel q :

A est un point de $\mathcal{T}$, donc :

$$y_A = 6x_A + q,$$

soit : $-2 = 6 \times 1 + q,$

d'où : $q = -8.$

Donc $\mathcal{T}$ admet pour équation :

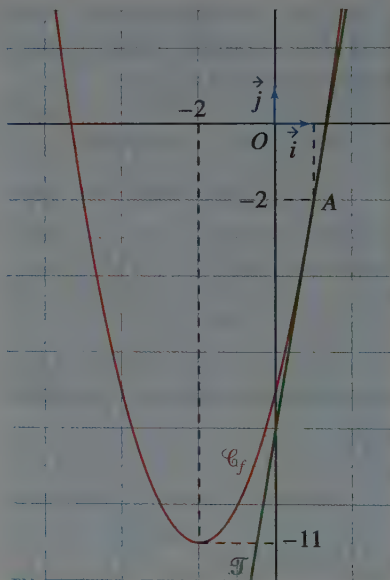
$$y = 6x - 8.$$

On peut aussi utiliser le fait que $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ est une équation de $\mathcal{T}$.

3° Pour tout réel x ,

$$f(x) = (x + 2)^2 - 11.$$

Donc $\mathcal{C}_f$ est la parabole déduite de celle d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $-2\vec{i} - 11\vec{j}$.



8 $f: x \mapsto \sqrt{x+2}$.

1° L'ensemble de définition de f est $[-2; +\infty[$.

Pour tout réel h non nul, tel que $-1 + h \geq -2$

(c'est-à-dire $h \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[$), calculons le taux de variation $t(h)$ de f entre -1 et $-1 + h$:

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\ &= \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

Technique de l'expression conjuguée.

$$= \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}.$$

La limite de t en 0 est $\frac{1}{2}$, car $\sqrt{1+h}$ tend vers 1 quand h tend vers 0.

La limite, quand h tend vers 0, du taux de variation $t(h)$ de f entre -1 et $-1+h$ est $\frac{1}{2}$, ce qui signifie :

f est dérivable en -1 et $f'(-1) = \frac{1}{2}$.

2° $\mathcal{T}$ est la droite :

- de coefficient directeur $f'(-1)$, soit $\frac{1}{2}$,
- qui passe par le point $A(-1; f(-1))$, avec $f(-1) = 1$.

Donc $\mathcal{T}$ admet pour équation :

$$y - 1 = \frac{1}{2}[x - (-1)],$$

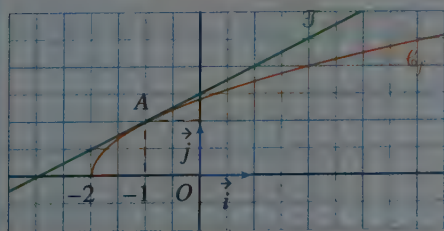
ou encore : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

3° $\mathcal{C}_f$ se déduit de la demi-parabole d'équation $y = \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.

$$\mathcal{T} : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

$\mathcal{T}$ a donc pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$ et pour ordonnée à l'origine $\frac{3}{2}$.

$\mathcal{T}$ coupe la droite $(O; \vec{j})$ au point d'ordonnée $\frac{3}{2}$.



9 $f: x \mapsto -x^2$ et $g: x \mapsto x^2 + 8x + 8$ ont la même tangente au point d'abscisse -2 .

D'une part :

$$f(-2) = -(-2)^2 = -4,$$

$$g(-2) = 4 - 16 + 8 = -4.$$

D'autre part, en tant que polynômes, les fonctions f et g sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = -2x \text{ et } g'(x) = 2x + 8,$$

donc :

$$f'(-2) = 4, \quad g'(-2) = -4 + 8 = 4.$$

On en déduit que la droite $\mathcal{T}$ passant par le point de coordonnées $(-2; -4)$ et de coefficient directeur 4 est la tangente à chacune des courbes représentatives de f et g en leur point d'abscisse -2 .

La droite $\mathcal{T}$ admet pour équation :

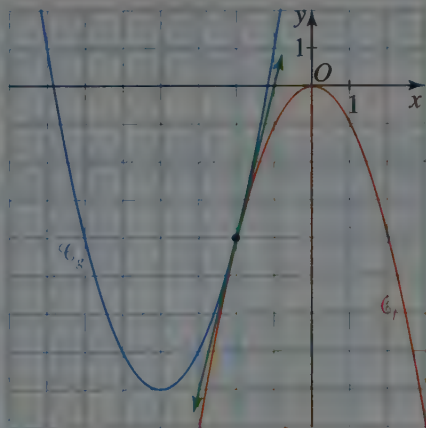
$$y - (-4) = 4(x - (-2)),$$

c'est-à-dire :

$$y + 4 = 4(x + 2),$$

ou encore, plus simplement :

$$y = 4x + 4.$$



10 $\mathcal{C} : y = x^3 - 3x^2 + 1$.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative du polynôme $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'une part, on sait que, pour tout réel a , $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .

D'autre part, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

1° La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est parallèle à la droite des abscisses si, et seulement si, son coefficient directeur $f'(a)$ est nul, or :

$$\begin{aligned} f'(a) = 0 &\Leftrightarrow 3a(a - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 2. \end{aligned}$$

De plus :

$$f(0) = 1 \text{ et } f(2) = 8 - 12 + 1 = -3.$$

On en déduit que les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite des abscisses sont $A(0 ; 1)$ et $B(2 ; -3)$.

2° La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 9x - 7$ si, et seulement si, son coefficient directeur $f'(a)$ est égal à 9, or :

$$\begin{aligned} f'(a) = 9 &\Leftrightarrow 3a^2 - 6a = 9 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0. \end{aligned}$$

L'équation du second degré

$x^2 - 2x - 3 = 0$ admet pour discriminant le réel Δ tel que :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16.$$

$\Delta > 0$, donc les solutions de cette équation sont les réels x_1 et x_2 définis par :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2 - 4}{2} = -1,$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

On pouvait aussi ne pas mettre en œuvre la méthode standard basée sur le discriminant en observant que -1 est solution de l'équation. L'autre solution α vérifie alors :

$$-1 \times \alpha = \frac{-3}{1} \text{ (le produit des solutions est}$$

égal au quotient du coefficient constant par le coefficient du terme de degré 2), donc $\alpha = 3$.

On peut donc écrire :

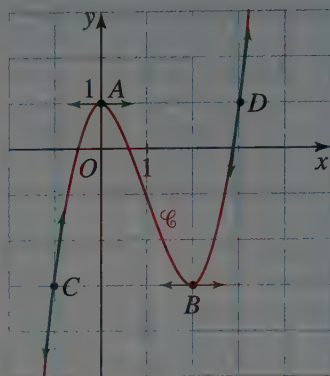
$$f'(a) = 9 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ou } a = 3.$$

De plus, $f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3$

et $f(3) = 27 - 27 + 1 = 1$.

On en déduit que les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la

droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 9x - 7$ sont $C(-1 ; -3)$ et $D(3 ; 1)$.



Calculs de dérivées

11 1° $f: x \mapsto 3x^2 - 2$.

• La fonction f est un polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 3 \times 2x = 6x.$$

On a utilisé les résultats du cours suivants :

les formules $(u + v)' = u' + v'$

et $(\lambda u)' = \lambda u'$,

la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$),

la dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

2° $f: x \mapsto \sqrt{3} - \frac{1}{3}$.

f est une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction nulle $x \mapsto 0$, autrement dit :

pour tout réel x , $f'(x) = 0$.

3° $f: x \mapsto 1 - 5x^2 + x^5$.

• La fonction f est un polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5 \times 2x + 5x^4 \\ &= -10x + 5x^4 = 5x(x^3 - 2). \end{aligned}$$

4° $f: x \mapsto (x - 3)^2$.

• La fonction f est un polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 9, \\ f'(x) &= 2x - 6 = 2(x - 3). \end{aligned}$$

On pouvait aussi écrire, pour tout réel x :

$$f(x) = (x - 3) \times (x - 3),$$

d'où, en utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$:
 $f'(x) = 1 \times (x-3) + (x-3) \times 1 = 2(x-3)$.

$$5^\circ f: x \mapsto \frac{1}{x} + x.$$

• La fonction f est la somme de la fonction inverse, dérivable en tout réel non nul, et de la fonction $x \mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$, $] 0; +\infty[$.

L'ensemble de dérivabilité de f est égal à son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.

• Pour tout réel x non nul :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

$$6^\circ f: x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x}.$$

• La fonction f est une fonction rationnelle dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$, donc l'ensemble de dérivabilité de f est $\mathbb{R}^*$.

L'ensemble de dérivabilité d'une fonction rationnelle est égal à son ensemble de définition.

• Pour tout réel x non nul :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2 \times x - (x^3 - 1) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 + 1}{x^2}. \end{aligned}$$

On a utilisé la formule du cours :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

On pouvait aussi mener le calcul en écrivant que, pour tout réel x non nul :

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x},$$

$$\text{d'où : } f'(x) = 2x - \frac{-1}{x^2} = 2x + \frac{1}{x^2}.$$

$$7^\circ f: x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

• La fonction f est une fonction rationnelle dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$, donc l'ensemble de dérivabilité de f est $\mathbb{R}^*$.

f est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$, $] 0; +\infty[$.

• Pour tout réel x non nul :

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

On a utilisé la formule du cours : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

$$8^\circ f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

• La fonction f a pour ensemble de définition $] 0; +\infty[$. De plus, f est l'inverse de la fonction racine carrée, dérivable et ne s'annulant pas sur $] 0; +\infty[$, donc l'ensemble de dérivabilité de f est $] 0; +\infty[$.

• Pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = -\frac{1}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

On a utilisé les résultats du cours suivants :

$$\text{la formule } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2},$$

$$\text{la dérivée de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est } x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$9^\circ f: x \mapsto \frac{1}{x^2 - 6x + 10}.$$

• Le polynôme du second degré $x \mapsto x^2 - 6x + 10$ admet pour discriminant le réel Δ défini par :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 10 = 36 - 40 = -4.$$

$\Delta < 0$, donc le polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On pouvait aussi écrire que, pour tout réel x :

$$x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1,$$

ce qui prouve : $x^2 - 6x + 10 > 0$.

Comme inverse du polynôme $x \mapsto x^2 - 6x + 10$, dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x-6}{(x^2-6x+10)^2} \\ &= \frac{2(3-x)}{(x^2-6x+10)^2}. \end{aligned}$$

$$10^\circ f: x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}.$$

• La fonction rationnelle f est définie sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$x^2 + 1 > 0,$$

donc :

$$x^2 + 1 \neq 0.$$

• Pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{3x^2 \times (x^2 + 1) - (x^3 - 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 2x}{(x^2 + 1)^2},$$

$$f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(x^3 + 3x + 2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$12 \quad 1^\circ f: x \mapsto 3\sqrt{x} - \frac{2}{x}, \quad a = 1.$$

La fonction f a pour ensemble de définition $]0; +\infty[$, et f est dérivable sur cet intervalle car $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont toutes deux dérivables sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2},$$

$$\text{donc : } f'(1) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

$$2^\circ f: x \mapsto (x^3 - 3)(x^2 + x + 1), \quad a = -1.$$

La fonction f est le produit de deux polynômes, donc f est un polynôme et est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 \times (x^2 + x + 1) + (x^3 - 3) \times (2x + 1),$$

donc :

$$f'(-1) = 3 \times 1 + (-4) \times (-1) = 7.$$

En développant le produit définissant $f(x)$, on obtient, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3(x^2 + x + 1) - 3(x^2 + x + 1) \\ &= x^5 + x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x - 3, \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 6x - 3,$$

$$\text{et : } f'(-1) = 5 - 4 + 3 + 6 - 3 = 7.$$

$$3^\circ f: x \mapsto x^2\sqrt{x}, \quad a = 4.$$

La fonction f est le produit de la fonction carré, dérivable sur $\mathbb{R}$, par la fonction racine carrée, dérivable sur $]0; +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times \sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

$$\text{donc : } f'(4) = 2 \times 4 \times 2 + \frac{16}{2 \times 2} = 20.$$

La fonction f a pour ensemble de définition $]0; +\infty[$ et, avec les théorèmes généraux, on a démontré que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Il est facile de prouver que f est aussi dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$; en effet, pour tout réel h strictement positif :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2\sqrt{h}}{h} = h\sqrt{h},$$

$$\text{or : } \lim_{h \rightarrow 0} h\sqrt{h} = 0 \times \sqrt{0} = 0,$$

$$\text{donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0.$$

$$4^\circ f: x \mapsto \frac{2x-1}{3x-2}, \quad a = 0.$$

La fonction homographique f a pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$,

donc f est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty; \frac{2}{3}[$ et $\frac{2}{3}; +\infty[$.

Toute fonction homographique est le quotient de deux fonctions affines. Toute fonction affine étant un polynôme, une fonction homographique est aussi une fonction rationnelle.

Pour tout réel x distinct de $\frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \times (3x-2) - (2x-1) \times 3}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{6x-4-6x+3}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{-1}{(3x-2)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{donc : } f'(0) = \frac{-1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}.$$

13 g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$1^\circ f: x \mapsto g(x) - x^3.$$

• Comme différence des fonctions g et $x \mapsto x^3$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x :

$$f'(x) = g'(x) - 3x^2,$$

$$\text{donc : } f'(0) = g'(0).$$

2° $f: x \mapsto xg(x)$.

• Comme produit des fonctions g et $x \mapsto x$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x :

$$f'(x) = 1 \times g(x) + x \times g'(x)$$

$$= g(x) + xg'(x),$$

$$\text{donc : } f'(0) = g(0).$$

Ici, il était facile de déterminer $f'(0)$ sans calculer au préalable $f'(x)$ pour tout réel x .

En effet, pour tout réel h non nul :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{hg(h)}{h} = g(h),$$

$$\text{or : } \lim_{h \rightarrow 0} g(h) = g(0),$$

$$\text{donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = g(0).$$

3° $f: x \mapsto (g(x))^2$.

• La fonction f est le produit de la fonction g par elle-même. Or, g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x :

$$f(x) = g(x) \times g(x),$$

$$f'(x) = g'(x) \times g(x) + g(x) \times g'(x)$$

$$= 2g'(x)g(x),$$

$$\text{donc : } f'(0) = 2g'(0)g(0).$$

4° $f: x \mapsto (x^3 - x)g(x)$.

• Comme produit des fonctions g et $x \mapsto x^3 - x$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x :

$$f'(x) = (3x^2 - 1) \times g(x)$$

$$+ (x^3 - x) \times g'(x),$$

$$\text{donc : } f'(0) = -g(0).$$

5° $f: x \mapsto \frac{g(x)}{x^2 + 1}$.

• La fonction f est le quotient de la fonction g , dérivable sur $\mathbb{R}$, par la fonction

$x \mapsto x^2 + 1$, dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x) \times (x^2 + 1) - g(x) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(x^2 + 1)g'(x) - 2xg(x)}{(x^2 + 1)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{donc : } f'(0) = g'(0).$$

Les interrogations écrites

14 $f: x \mapsto x^2 + 5x - 1$.

1° On a, pour tout réel h non nul :

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^2 + 5(1+h) - 1 - 5}{h} \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 + 5 + 5h - 6}{h}, \end{aligned}$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 + 7h}{h} = h + 7,$$

$$\text{or : } \lim_{h \rightarrow 0} (h + 7) = 7,$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 7,$$

ce qui prouve que f est dérivable en 1 et $f'(1) = 7$.

Noter que, f étant un polynôme, on savait dès le départ que f était dérivable en tout réel, et en particulier en 1.

2° La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 admet pour équation :

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1),$$

$$\text{c'est-à-dire : } y - 5 = 7(x - 1),$$

$$\text{ou encore : } y = 7x - 2.$$

15 $\mathcal{C}: y = 2\sqrt{x} - x$.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto 2\sqrt{x} - x$, définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$.

On démontrerait facilement que f n'est pas dérivable en 0, car :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +\infty.$$

Comme de plus $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$,

on sait qu'alors la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine O .

On a, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1.$$

Soit a un réel strictement positif. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

c'est-à-dire :

$$y - 2\sqrt{a} + a = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right)(x - a),$$

$$\text{soit : } y = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right)x - \frac{a}{\sqrt{a}} + a + 2\sqrt{a} - a,$$

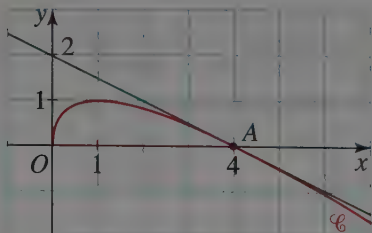
$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

$$\text{ou encore : } y = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right)x + \sqrt{a}.$$

On en déduit que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a admet 2 pour ordonnée à l'origine si, et seulement si, $\sqrt{a} = 2$, c'est-à-dire si, et seulement si, $a = 4$.

De plus : $f(4) = 2\sqrt{4} - 4 = 0$, donc le point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente a pour ordonnée à l'origine 2 est $A(4; 0)$.

La tangente à $\mathcal{C}$ en $A(4; 0)$ admet pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 2$.



16 1° $f: x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$.

• La fonction f est un polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x :

$$f'(x) = 3 \times 2x - 5 = 6x - 5.$$

2° $f: x \mapsto \frac{1}{x^3}$.

• La fonction f est une fonction rationnelle dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$, donc l'ensemble de dérivabilité de f est $\mathbb{R}^*$.

• Pour tout réel x non nul :

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}.$$

3° $f: x \mapsto (2x + 3)(3x - 5)$.

• La fonction f est le produit de deux fonctions affines, donc f est un polynôme, ce qui prouve que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times (3x - 5) + (2x + 3) \times 3 \\ &= 6x - 10 + 6x + 9 \\ &= 12x - 1. \end{aligned}$$

On pouvait aussi commencer par développer $f(x)$:

$$f(x) = 6x^2 - 10x + 9x - 15 = 6x^2 - x - 15,$$

on obtient alors :

$$f'(x) = 6 \times 2x - 1 = 12x - 1.$$

4° $f: x \mapsto \frac{2x + 7}{x - 2}$.

• f est une fonction rationnelle, donc l'ensemble de dérivabilité de f est son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• Pour tout réel x distinct de 2 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \times (x - 2) - (2x + 7) \times 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x - 4 - 2x - 7}{(x - 2)^2}, \\ f'(x) &= \frac{-11}{(x - 2)^2}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 5

Applications de la dérivation

Les théorèmes suivants précisent le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction sur un intervalle.

Théorèmes de monotonie

f désigne une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est positive sur I , c'est-à-dire si : pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- Si f' est négative sur I , c'est-à-dire si : pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- Si f' est nulle sur I , c'est-à-dire si : pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Théorèmes de stricte monotonie

f désigne une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si, pour tout x de I : $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I .
- Si, pour tout x de I : $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I .

Plus généralement :

- Si f' est positive sur I et si f' ne s'annule éventuellement qu'en un nombre fini de réels de I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est négative sur I et si f' ne s'annule éventuellement qu'en un nombre fini de réels de I , alors f est strictement décroissante sur I .

EXERCICES

Dans tous les exercices, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Vrai ou faux ?

1

(corrigés p. 103)

1° Soit f la fonction : $x \mapsto 2x^3 - 6x + 1$.

a) Pour tout réel x , $f'(x) = 6(x^2 - 1)$.

b) La fonction f est croissante sur $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

c) Le maximum de f sur $] -\infty; 3]$ est 5.

d) La fonction f n'admet ni maximum, ni minimum sur $\mathbb{R}$.

2° Soit f une fonction dérivable sur $[-1; 1]$.

a) Si, pour tout x appartenant à $[-1; 1]$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[-1; 1]$.

b) Si f est strictement croissante sur $[-1; 1]$, alors, pour tout x appartenant à $[-1; 1]$, $f'(x) > 0$.

c) Si $f'(0) = 0$, alors f admet un extremum en 0.

d) Si f admet un extremum en 0, alors $f'(0) = 0$.

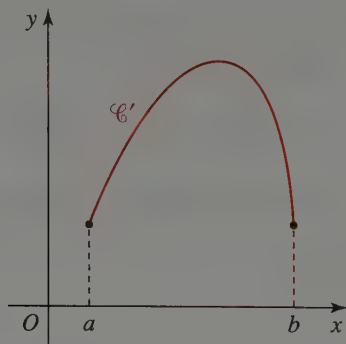
Sens de variation

2 ★ 5 min

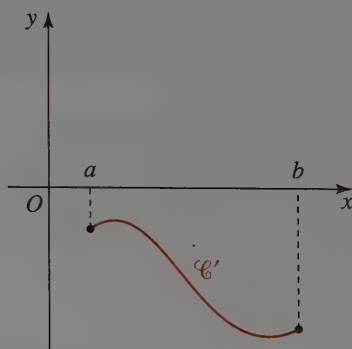
(corrigés p. 104)

Dans chacun des deux cas suivants, comparer les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sachant que $\mathcal{C}'$ est la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f , dérivable sur le segment $[a; b]$.

1°



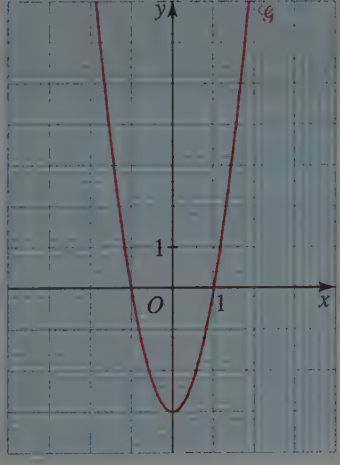
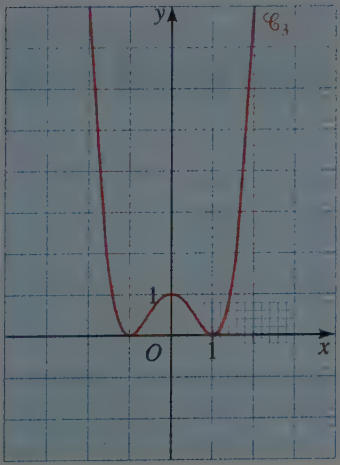
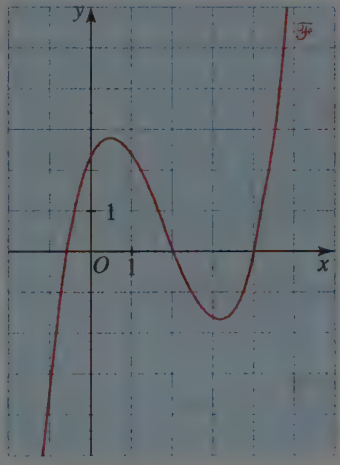
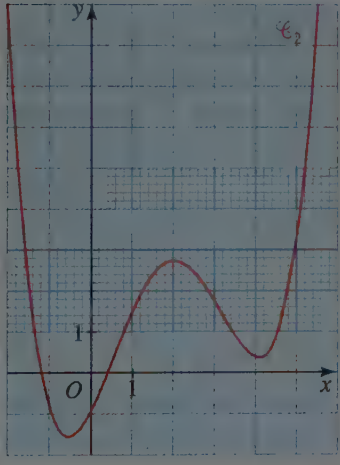
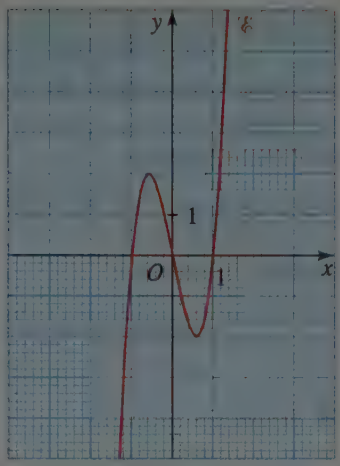
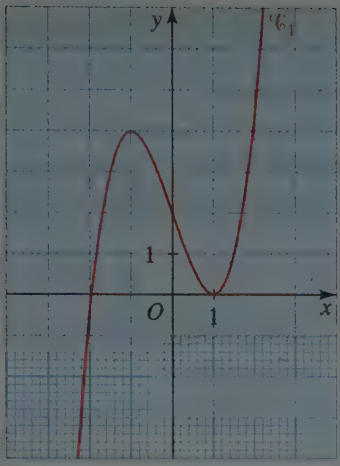
2°



3 ★ 5 min

(corrigés p. 104)

Les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ (première colonne) sont les courbes représentatives respectives de trois fonctions f_1, f_2, f_3 ; pour chacune de ces fonctions, déterminer la courbe représentative de sa fonction dérivée, à choisir parmi les courbes $\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ de la seconde colonne.



Déterminer la dérivée de la fonction f proposée, puis étudier le sens de variation de f .

1° Fonction polynôme.

a) $x \mapsto -3x^2 + 4x + 5$.

b) $x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + x - 1$.

c) $x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - 10x^2 + 25x - 20$.

2° Fonction rationnelle.

a) $x \mapsto 5 - \frac{3}{2x-1}$.

b) $x \mapsto \frac{2x+0,7}{3x+1}$.

3° Fonction irrationnelle.

a) f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

b) $x \mapsto \frac{4}{x} + \sqrt{x}$.

Étudier le sens de variation de la fonction f :

$$x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}$$

Comparer les réels A et B définis par :

$$A = \frac{(5,012013014015016)^2 + 3}{3,012013014015016},$$

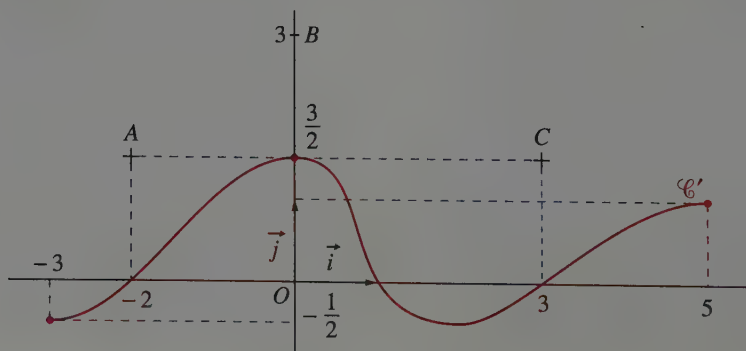
$$B = \frac{(5,012013014015017)^2 + 3}{3,012013014015017}.$$

f est une fonction dérivable sur $[-3; 5]$.

$\mathcal{C}'$ est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f .

1° Étudier le sens de variation de f .

2° Déterminer l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sachant qu'elle passe par les points A, B, C .



Minimum, maximum, extremum

8 ★ 10 min

(corrigés p. 108)

Soit f la fonction : $x \mapsto x^4 - 4x + 2$.Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$; préciser la valeur de ce minimum.**9** ★★ 15 min

(corrigés p. 109)

Déterminer le maximum sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ de la fonction f :

$$x \mapsto 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

10 ★★ 15 min

(corrigés p. 110)

Soit f la fonction : $x \mapsto x^3 - x^2 - x$.1° Dresser le tableau de variation de la fonction f .2° Encadrer au mieux $f(x)$ lorsque x appartient à :a) $[0 ; 1]$; b) $[-1 ; 0]$; c) $[-2 ; 2]$.**11** ★★★ 20 min

(corrigés p. 111)

Le but de l'exercice est d'obtenir un encadrement de $a^3 - 8a^2$ sachant que le réel a appartient au segment $[5,2 ; 5,3]$.1° Donner un encadrement de a^3 , puis de $-8a^2$.En déduire un encadrement de $a^3 - 8a^2$.2° Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^3 - 8x^2$ est décroissante sur $\left[0 ; \frac{16}{3}\right]$.En déduire un nouvel encadrement de $a^3 - 8a^2$.

3° Comparer les amplitudes des deux encadrements obtenus.

Quelle est ici la méthode la plus efficace ?

Comparaison de fonctions

12 ★★ 15 min

(corrigés p. 112)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - x^2 + x + \frac{5}{3}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.1° Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 2.2° Soit g la fonction : $x \mapsto f(x) + x - 3$.a) Déterminer le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.Quel est le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$?b) En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{T}$.

Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité de Bernoulli :
pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x positif ou nul,

$$x^n - 1 \geq n(x - 1).$$

1° a) Étudier le cas où n est égal à 1.

b) On suppose, dans cette question, l'entier n supérieur ou égal à 2.

Déterminer le tableau de variation de la fonction $f: x \mapsto x^n - 1 - n(x - 1)$ sur $[0; +\infty[$.

En déduire le signe de f sur $[0; +\infty[$, puis conclure.

2° Interprétation graphique

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^n$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

a) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

b) Interpréter alors graphiquement le résultat de la question **1° b)**.

Les interrogations écrites

Étudier le sens de variation de la fonction $f: x \mapsto x - 2\sqrt{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On pose :

$$A = 0,999\,998 + \frac{1}{0,999\,998} \quad \text{et} \quad B = 0,999\,999 + \frac{1}{0,999\,999}.$$

Comparer les nombres A et B .

Soit f la fonction : $x \mapsto \frac{6x^2 - 9x + 4}{x^3}$.

1° Préciser l'ensemble de dérivabilité de f , calculer $f'(x)$ pour tout x de cet ensemble et démontrer que $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 3x - 2$.

2° Déterminer le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.

3° Déterminer le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[1; 4]$.

CORRIGÉS

Vrai ou faux ?

1 $1^\circ f: x \mapsto 2x^3 - 6x + 1$.

a) Pour tout réel x , $f'(x) = 6(x^2 - 1)$.

Vrai. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3x^2 - 6 = 6x^2 - 6 \\ &= 6(x^2 - 1). \end{aligned}$$

b) La fonction f est croissante sur $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

Faux.

Dressons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

La fonction f est croissante sur chacun des intervalles $] -\infty; -1]$, $[1; +\infty[$, mais pas sur leur réunion, comme le prouve les relations :

$$-1 < 1 \text{ et } f(-1) > f(1).$$

$f(-1)$ et $f(1)$ ne sont pas rangés dans le même ordre que -1 et 1 .

c) Le maximum de f sur $] -\infty; 3]$ est 5.

Faux.

D'après le tableau de variation de f :

• le maximum de f sur $] -\infty; 1]$ est 5,

• le maximum de f sur $[1; 3]$ est $f(3)$,

$$\text{or : } f(3) = 2 \times 27 - 18 + 1 = 37,$$

donc le maximum de f sur $] -\infty; 3]$ est 37.

d) La fonction f n'admet ni maximum, ni minimum sur $\mathbb{R}$.

Vrai.

• La fonction f n'est pas majorée, car $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.

On notera alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On peut vérifier que, pour tout réel A supérieur ou égal à 2, il suffit que $x \geq A$ pour que $f(x) \geq A$.

• Pour des raisons analogues, f n'est pas minorée.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

2° Soit f une fonction dérivable sur $[-1; 1]$.

a) Si, pour tout x appartenant à $[-1; 1]$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[-1; 1]$.

Vrai. C'est un résultat du cours.

b) Si f est strictement croissante sur $[-1; 1]$, alors, pour tout x appartenant à $[-1; 1]$, $f'(x) > 0$.

Faux.

Considérons, par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$.

Elle est strictement croissante, dérivable sur $[-1; 1]$ et sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0.

c) Si $f'(0) = 0$, alors f admet un extremum en 0.

Faux.

Un extremum est un minimum ou un maximum.

Reprenons l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$.

Elle est dérivable sur $[-1; 1]$ et sa dérivée s'annule en 0 ; de plus, étant strictement croissante, la fonction $x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extremum en 0.

Étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^3$ n'admet aucun extremum.

d) Si f admet un extremum en 0, alors $f'(0) = 0$.

Vrai. Mais il manque encore quelques outils en analyse pour le démontrer en classe de Première.

Sens de variation

2 1° La fonction dérivée f' de f est strictement positive sur l'intervalle $[a; b]$, donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle. Comme, de plus, $a < b$, il vient : $f(a) < f(b)$.

2° La fonction f' étant strictement négative sur $[a; b]$, la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Comme, de plus, $a < b$, on peut conclure : $f(a) > f(b)$.

3 • Fonction f_1

f_1 est décroissante sur $[-1; 1]$, sa dérivée est donc négative sur $[-1; 1]$. **La seule courbe qui puisse être celle de la dérivée de f_1 est $\mathcal{G}$.**

• Fonction f_2

f_2 n'est pas monotone sur $[1; 5]$, donc sa dérivée n'est pas de signe constant sur cet intervalle. Or, seule $\mathcal{F}$ possède des points dont l'abscisse est comprise entre 1 et 5 et dont l'ordonnée n'est pas de signe constant.

On en déduit que la courbe de la dérivée de f_2 est $\mathcal{F}$.

• Fonction f_3

D'après ce qui précède, **la courbe de la dérivée de f_3 ne peut être que $\mathcal{E}$** , ce qui est confirmé par la cohérence du tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0	+ 0	- 0	+
$f(x)$					

4 1° a) $f: x \mapsto -3x^2 + 4x + 5$.

La fonction f étant un polynôme, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = -6x + 4 = 2(-3x + 2),$$

$$\text{donc : } \bullet f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0,$$

$$\bullet \text{ si } x < \frac{2}{3}, \text{ alors } f'(x) > 0,$$

$$\bullet \text{ si } x > \frac{2}{3}, \text{ alors } f'(x) < 0.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty; \frac{2}{3}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{2}{3}; +\infty[$.

On retrouve le sens de variation de f en écrivant que, pour tout réel x :

$$f(x) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{19}{3}.$$

$$\text{b) } f: x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + x - 1.$$

La fonction f est un polynôme ; elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{1}{4}x + 1 = \frac{1}{4}(x + 4),$$

$$\text{donc : } \bullet f'(-4) = 0,$$

$$\bullet \text{ si } x < -4, \text{ alors } f'(x) < 0,$$

$$\bullet \text{ si } x > -4, \text{ alors } f'(x) > 0.$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty; -4]$ et strictement croissante sur $[-4; +\infty[$.

On retrouve le sens de variation de f en écrivant que, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{1}{8}(x + 4)^2 - 3.$$

$$\text{c) } f: x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - 10x^2 + 25x - 20.$$

La fonction f est un polynôme ; elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = 4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2,$$

$$\text{donc : } \bullet f'\left(\frac{5}{2}\right) = 0,$$

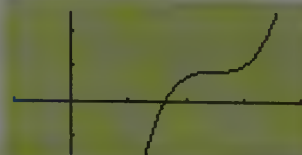
$$\bullet \text{ si } x \neq \frac{5}{2}, \text{ alors } f'(x) > 0.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

• en entrant :

$$Y1=4X^3/3-10X^2+25X-20$$



• avec le cadrage :

$$-1 \leq x \leq 4,$$

$$-1,5 \leq y \leq 2,5.$$

$$2^{\circ} \text{ a) } f: x \mapsto 5 - \frac{3}{2x-1}.$$

La fonction f a pour ensemble de définition $]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$.

f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable en tout réel de son ensemble de définition.

Pour tout réel x différent de $\frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{6}{(2x-1)^2},$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

donc : $f'(x) > 0$.

Il en résulte que f est strictement croissante sur chacun des intervalles

$$]-\infty; \frac{1}{2}[\text{ et }]\frac{1}{2}; +\infty[.$$

Attention !

f n'est pas croissante sur la réunion de ces deux intervalles ; considérer, par exemple :

$$f(-1) = 6, \quad f(1) = 2.$$

$$\text{b) } f: x \mapsto \frac{2x+0,7}{3x+1}.$$

f est une fonction rationnelle dont l'ensemble

de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, donc f est

dérivable sur chacun des intervalles

$$]-\infty; -\frac{1}{3}[\text{ et }]-\frac{1}{3}; +\infty[.$$

Pour tout réel x différent de $-\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(3x+1) - 3(2x+0,7)}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{-0,1}{(3x+1)^2}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

donc : $f'(x) < 0$.

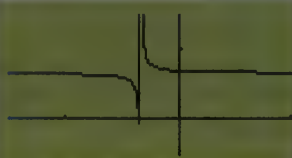
Il en résulte que f est strictement décroissante sur chacun des intervalles

$$]-\infty; -\frac{1}{3}[\text{ et }]-\frac{1}{3}; +\infty[.$$

Copie d'écran de calculatrice obtenue :

• en entrant :

$$Y1=(2X+.7)\div(3X+1)$$



• avec le cadrage :

$$-1,5 \leq x \leq 1,$$

$$-0,5 \leq y \leq 1,5.$$

Le graphique fait apparaître un trait vertical ; c'est en fait un segment qui joint deux points dont les abscisses sont proches de $-\frac{1}{3}$, l'une

étant strictement inférieure à $-\frac{1}{3}$, et l'autre strictement supérieure à $-\frac{1}{3}$. C'est le mode

de tracé en points connectés qui donne ce résultat (en mode « points séparés », le trait vertical disparaît). Noter que ce trait vertical matérialise une asymptote à la courbe représentative de la fonction f (la droite d'équation $x = -\frac{1}{3}$) ; en effet, on pourrait démontrer que :

• $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\frac{1}{3}$ par valeurs inférieures,

• $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\frac{1}{3}$ par valeurs supérieures.

3° Fonction irrationnelle

a) Pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x}.$$

Comme produit des fonctions $x \mapsto x-3$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux dérivables sur $]0; +\infty[$, f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + (x-3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x} \times \sqrt{x} + x - 3}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x + x - 3}{2\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}},$$

et $f'(x)$ est du signe de $x-1$,
donc :

- $f'(1) = 0$,
- si $0 < x < 1$, alors $f'(x) < 0$,
- si $x > 1$, alors $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0 ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

b) $f : x \mapsto \frac{4}{x} + \sqrt{x}$.

Un réel x appartient à l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f si, et seulement si :

$$x \neq 0 \text{ et } x \geq 0,$$

$$\text{donc : } \mathcal{D}_f =]0 ; +\infty[.$$

f est la somme des fonctions $x \mapsto \frac{4}{x}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-8\sqrt{x} + x^2}{2x^2\sqrt{x}},$$

et, en utilisant : $x^2 = x \times x = x\sqrt{x} \times \sqrt{x}$,
on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-8 + x\sqrt{x})\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{-8 + x\sqrt{x}}{2x^2} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - 8}{2x^2}, \end{aligned}$$

ce qui met en évidence que le signe de $f'(x)$ est celui de $x\sqrt{x} - 8$.

Il vient, pour tout x de $]0 ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x\sqrt{x} - 8 > 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x})^3 > 2^3, \end{aligned}$$

donc, la fonction cube $x \mapsto x^3$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2,$$

c'est-à-dire, des réels positifs étant rangés comme leurs carrés :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 4;$$

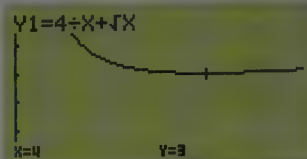
on obtient de manière analogue :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\text{Finalement : } \begin{cases} f'(4) = 0, \\ f'(x) < 0 \text{ si } 0 < x < 4, \\ f'(x) > 0 \text{ si } x > 4, \end{cases}$$

ce qui prouve que f est strictement décroissante sur $]0 ; 4]$ et strictement croissante sur $[4 ; +\infty[$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



• en entrant :

$$Y1 = 4 \div X + \sqrt{X}$$

• avec le cadrage :

$$0 \leq x \leq 6,$$

$$0 \leq y \leq 5.$$

5 $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}$.

• L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x tels que :

$$x^2 - 4x + 3 \neq 0.$$

Soit (E) l'équation du second degré :

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4.$$

$\Delta > 0$, donc les solutions de (E) sont les réels x_1 et x_2 définis par :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

On pouvait éviter ces calculs en remarquant que 1 est solution de (E) ; or le produit des solutions d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est égal à $-\frac{c}{a}$, donc l'autre

solution, notée α , vérifie : $\alpha \times 1 = -\frac{3}{1}$, autrement dit $\alpha = 3$.

On en déduit que la fonction f a pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$, c'est-à-dire $]-\infty ; 1[\cup]1 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

• f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable en tout réel de son ensemble de définition.

Pour tout réel x différent de 1 et de 3 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - (x^2 + 1)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 8x^2 + 6x - 2x^3 - 2x + 4x^2 + 4}{(x^2 - 4x + 3)^2} \\ &= \frac{4(-x^2 + x + 1)}{(x^2 - 4x + 3)^2}, \end{aligned}$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2 + x + 1$.

Réolvons l'équation (E) du second degré :

$$-x^2 + x + 1 = 0.$$

Son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5;$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,62, \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62.$$

Après avoir remarqué :

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 3,$$

dressons le tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	1	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	-

On en déduit que f est strictement décroissante sur chacun des intervalles

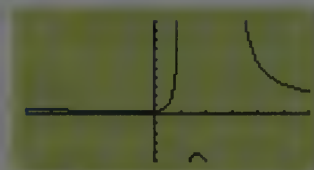
$]-\infty; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}]$, $[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 3[$ et

$]3; +\infty[$, et strictement croissante sur

chacun des intervalles $[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 1[$

et $]1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}]$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



• en entrant :

$$Y1 = (X^2 + 1) \div (X^2 - 4X + 3)$$

• avec le cadrage :

$$-5 \leq x \leq 6,$$

$$-5 \leq y \leq 10.$$

$$6 \quad A = \frac{(5,012013014015016)^2 + 3}{3,012013014015016},$$

$$B = \frac{(5,012013014015017)^2 + 3}{3,012013014015017}.$$

La plupart des calculatrices utilisées dans une classe de 1^{re} n'ont pas une précision suffisante pour comparer A et B .

Posons : $a = 5,012013014015016$

et $b = 5,012013014015017$;

alors A et B sont les images respectives de a et b par la fonction f :

$$x \mapsto \frac{x^2 + 3}{x - 2}.$$

Étudions le sens de variation de la fonction f .

f est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ et, pour tout réel x différent de 2 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x - 2) - (x^2 + 3) \times 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 3}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x - 3}{(x - 2)^2}, \end{aligned}$$

donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 4x - 3$.

Réolvons l'équation (E) du second degré : $x^2 - 4x - 3 = 0$.

Son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 28;$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{28}}{2 \times 1} = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7},$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{28}}{2 \times 1} = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7}.$$

$$2 - \sqrt{7} \approx -0,65, \quad 2 + \sqrt{7} \approx 4,65.$$

Dressons le tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{7}$	2	$2 + \sqrt{7}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Les réels a et b appartiennent tous les deux à l'intervalle $[2 + \sqrt{7}; +\infty[$ sur lequel f est strictement croissante, d'après le tableau précédent.

Comme, de plus : $a < b$, on peut affirmer :

$$f(a) < f(b),$$

c'est-à-dire : $A < B$.

On a pu comparer $f(a)$ et $f(b)$ par cette méthode, car a et b appartiennent à un même intervalle de stricte monotonie de f .

7 1° Nous constatons sur le graphique que :

- $f'(-2) = f'(1) = f'(3) = 0$;
- pour tout x de $[-3; 5]$:
 si $x < -2$, alors $f'(x) < 0$,
 si $-2 < x < 1$, alors $f'(x) > 0$,
 si $1 < x < 3$, alors $f'(x) < 0$,
 si $x > 3$, alors $f'(x) > 0$.

On en déduit :

- f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $[-3; -2]$ et $[1; 3]$,
- f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[-2; 1]$ et $[3; 5]$.

2° f est dérivable sur $[-3; 5]$, donc $\mathcal{C}$ est « bien régulière », c'est-à-dire qu'elle admet une tangente en chacun de ses points ; pour tout x de $[-3; 5]$, $f'(x)$ est la pente de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x .

En particulier :

- $f'(-2) = f'(1) = f'(3) = 0$, donc $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale en A , C et au point d'abscisse 1.

• $f'(0) = \frac{3}{2}$, donc la pente de la tangente en B est $\frac{3}{2}$.

• $f'(-3) = -\frac{1}{2}$ et $f'(5) = 1$, donc les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses -3 et 5 ont respectivement pour pente $-\frac{1}{2}$ et 1 .

Résumons tous ces renseignements dans un tableau :

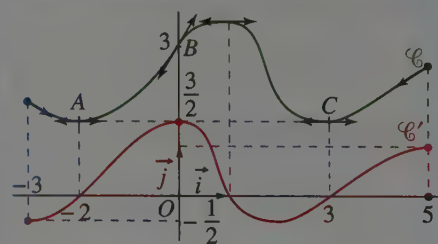
x	-3	-2	0	1	3	5
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{3}{2}$	0	0	1
f						

On constate que le minimum de f sur $[-3; 5]$ est $\frac{3}{2}$,

il est atteint en -2 et 3 :

$$f(-2) = f(3) = \frac{3}{2}.$$

Utilisons tous les résultats obtenus pour tracer l'allure de $\mathcal{C}$:



Minimum, maximum, extremum

8 $f : x \mapsto x^4 - 4x + 2$.

f est une fonction polynôme, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1),$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^3 - 1$;

or la fonction $x \mapsto x^3 - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1, donc $x^3 - 1$ et $x - 1$ ont le même signe ;

on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

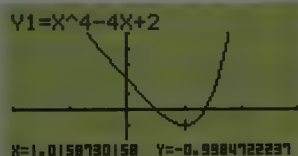
Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$, ce qui implique que f admet $f(1)$ pour minimum sur $\mathbb{R}$ (et que 1 est le seul réel en lequel f atteint ce minimum).

$f(1) = -1$, donc, finalement :

f admet -1 pour minimum sur $\mathbb{R}$.

-1 est le minimum (absolu) de f sur $\mathbb{R}$; on peut remarquer que -1 est également le seul minimum relatif de f sur $\mathbb{R}$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



• en entrant :

$$Y1 = X^4 - 4X + 2$$

• avec le cadrage :

$$-2 \leq x \leq 3,$$

$$-3 \leq y \leq 6.$$

9 $f : x \mapsto 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$

En tant que polynôme, la fonction f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $f'(x) = 6x^2 - x - 2$.

Soit Δ le discriminant du polynôme du second degré f' :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49;$$

$\Delta > 0$, donc f' admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{1 - 7}{2 \times 6} = -\frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{1 + 7}{2 \times 6} = \frac{2}{3}.$$

Pour tout réel x :

$$f'(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

Nous sommes en mesure de dresser le tableau de variation de f sur $[-1; 1]$ (en n'y consignant que les renseignements utiles pour répondre à la question posée) :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f					

Penser à vérifier :

$$-1 < -\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1.$$

On en déduit que le maximum de f sur $[-1; 1]$ est le plus grand des deux nombres $f(-\frac{1}{2})$ et $f(1)$, or :

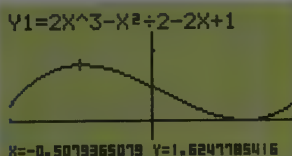
$$\begin{aligned} \bullet f\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + 2 \\ &= \frac{13}{8}, \end{aligned}$$

$$\bullet f(1) = 2 - \frac{1}{2} - 2 + 1 = \frac{1}{2},$$

$$\bullet \frac{13}{8} > \frac{1}{2},$$

donc le maximum de f sur $[-1; 1]$ est $\frac{13}{8}$.

Copie d'écran de calculatrice obtenue :



- en entrant :

$$Y1 = 2X^3 - X^2 + 2 - 2X + 1$$

- avec le cadrage :

$$-1 \leq x \leq 1,$$

$$-1 \leq y \leq 3.$$

10 $f: x \mapsto x^3 - x^2 - x.$

1° La fonction f est un polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

Le polynôme du second degré f' admet pour discriminant le réel Δ tel que :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16.$$

$\Delta > 0$, donc les racines de f' sont les réels x_1 et x_2 définis par :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{2 - 4}{2 \times 3} = -\frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{2 + 4}{2 \times 3} = 1.$$

On pouvait aussi ne pas mettre en œuvre la méthode standard basée sur le discriminant en observant que 1 est solution de l'équation.

L'autre solution α vérifie alors : $1 \times \alpha = -\frac{1}{3}$

(le produit des racines d'un polynôme du second degré est égal au quotient du coefficient constant par le coefficient du terme

de degré 2), donc $\alpha = -\frac{1}{3}$.

On en déduit, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1)$$

donc :

$$\bullet f'\left(-\frac{1}{3}\right) = f'(1) = 0,$$

$$\bullet \text{ si } x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > 1, \text{ alors } f'(x) > 0,$$

$$\bullet \text{ si } -\frac{1}{3} < x < 1, \text{ alors } f'(x) < 0.$$

De plus :

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{-1 - 3 + 9}{27} = \frac{5}{27},$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 0,185 \text{ à } 10^{-3} \text{ près,}$$

$$f(1) = -1.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow \frac{5}{27} \searrow -1 \nearrow$				

2° a) x appartient à $[0 ; 1]$.

$-\frac{1}{3} \leq 0 \leq 1$ et f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{3} ; 1\right]$,

$[0 ; 1]$ est inclus dans $\left[-\frac{1}{3} ; 1\right]$, ce qui se note :

$$[0 ; 1] \subset \left[-\frac{1}{3} ; 1\right]$$

donc f admet sur $[0 ; 1]$ pour minimum $f(1)$ et pour maximum $f(0)$, c'est-à-dire pour minimum -1 et pour maximum 0 .

Pour bien visualiser la situation, on peut s'aider du tableau suivant :

x	$-\frac{1}{3}$	0	1
$f(x)$	$\frac{5}{27}$	0	-1

Sachant que x appartient à $[0 ; 1]$, le meilleur encadrement de $f(x)$ est donc le suivant :

$$-1 \leq f(x) \leq 0.$$

On parle de « meilleur encadrement » au sens où il n'existe pas d'encadrement d'amplitude plus petite, puisque $f(1) = -1$ et $f(0) = 0$.

b) x appartient à $[-1 ; 0]$.

On a les inégalités : $-1 \leq -\frac{1}{3} \leq 0 \leq 1$.

La fonction f n'est pas monotone sur $[-1 ; 0]$.

• La fonction f est croissante sur $\left[-1 ; -\frac{1}{3}\right]$,

$$\left[-1 ; -\frac{1}{3}\right] \subset]-\infty ; -\frac{1}{3}]$$

et : $f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1,$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27},$$

donc, sur $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$, f admet pour minimum -1 et pour maximum $\frac{5}{27}$.

• La fonction f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$ et :

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}, f(0) = 0,$$

donc, sur $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$, f admet pour minimum 0 et pour maximum $\frac{5}{27}$.

On en déduit que f admet sur $[-1; 0]$ pour minimum -1 et pour maximum $\frac{5}{27}$. Donc, sachant que x appartient à $[-1; 0]$, le meilleur encadrement de $f(x)$ est le suivant :

$$-1 \leq f(x) \leq \frac{5}{27}.$$

c) x appartient à $[-2; 2]$.

La fonction f n'est pas monotone sur $[-2; 2]$.

On a les égalités :

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - (-2)^2 + 2 \\ &= -8 - 4 + 2 \\ &= -10, \end{aligned}$$

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 2 = 8 - 4 - 2 = 2,$$

d'où les inégalités :

$$f(-2) < -1 < \frac{5}{27} < 2.$$

Par un raisonnement analogue à celui mené dans la question précédente, on obtient que f admet sur $[-2; 2]$ pour minimum -10 et pour maximum 2 .

Pour bien visualiser la situation, on peut s'aider du tableau suivant :

x	-2	$-\frac{1}{3}$	1	2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-10	$\frac{5}{27}$	-1	2	

Donc, sachant que x appartient à $[-2; 2]$, le meilleur encadrement de $f(x)$ est le suivant :

$$-10 \leq f(x) \leq 2.$$

11 $a \in [5,2; 5,3]$.

1° • $5,2 \leq a \leq 5,3$ et la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante,

($x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ est positive sur $\mathbb{R}$)

donc : $(5,2)^3 \leq a^3 \leq (5,3)^3$,

c'est-à-dire : $140,608 \leq a^3 \leq 148,877$.

• $5,2 \leq a \leq 5,3$ et la fonction $x \mapsto -8x^2$ est décroissante sur $[0; +\infty[$,

(car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$ et $-8 < 0$)

donc :

$$-8 \times (5,3)^2 \leq -8a^2 \leq -8 \times (5,2)^2,$$

c'est-à-dire :

$$-224,72 \leq -8a^2 \leq -216,32.$$

En additionnant membre à membre les deux encadrements précédents, on obtient :

$$-84,112 \leq a^3 - 8a^2 \leq -67,443.$$

2° $f: x \mapsto x^3 - 8x^2$

• La fonction f étant un polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 8 \times 2x = 3x^2 - 16x \\ &= x(3x - 16). \end{aligned}$$

f' est un polynôme du second degré qui admet pour racines 0 et $\frac{16}{3}$.

x	$-\infty$	0	$\frac{16}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

On en déduit :

pour tout x appartenant à $\left[0; \frac{16}{3}\right]$,

$$f'(x) \leq 0,$$

ce qui prouve que f est décroissante sur

$$\left[0; \frac{16}{3}\right].$$

• $\frac{16}{3} \approx 5,333$ à 10^{-3} près, donc on peut écrire :

$$0 \leq 5,2 \leq a \leq 5,3 \leq \frac{16}{3},$$

d'où, la fonction f étant décroissante sur

$$\left[0; \frac{16}{3}\right]:$$

$$f(5,3) \leq f(a) \leq f(5,2),$$

c'est-à-dire, après calculs :

$$-75,843 \leq a^3 - 8a^2 \leq -75,712.$$

Penser à éditer la fonction f dans la calculatrice pour obtenir les images par f de 5,2 et 5,3.

$$3^\circ \bullet -67,443 - (-84,112)$$

$$= 84,112 - 67,443 = 16,669,$$

donc l'encadrement obtenu à la question 1° a pour amplitude 16,669.

$$\bullet -75,712 - (-75,843)$$

$$= 75,843 - 75,712 = 0,131,$$

donc l'encadrement obtenu à la question 2° a pour amplitude 0,131.

L'amplitude du second encadrement obtenu est inférieure à celle du premier, donc la seconde méthode s'est révélée plus efficace.

La méthode algébrique est moins performante, car les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto -8x^2$ ont des sens de variation contraires sur $[5,2; 5,3]$.

Comparaison de fonctions

$$12 \quad f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - x^2 + x + \frac{5}{3}.$$

1° La fonction f est un polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{1}{6} \times 3x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

On a :

$$f(2) = \frac{8}{6} - 4 + 2 + \frac{5}{3} = 1,$$

$$f'(2) = \frac{4}{2} - 4 + 1 = -1,$$

donc la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en son point d'abscisse 2 admet pour équation :

$$y - 1 = (-1) \times (x - 2),$$

formule du cours :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

ou encore : $y = -x + 3$.

$$2^\circ \quad g: x \mapsto f(x) + x - 3.$$

a) • La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$g'(x) = f'(x) + 1$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4),$$

$$\text{donc : } g'(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2.$$

Pour tous réels a et b ,

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

On en déduit :

$$g'(2) = 0,$$

pour tout réel x distinct de 2, $g'(x) > 0$, ce qui prouve que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Comme, de plus :

$$g(2) = f(2) + 2 - 3 = 1 - 1 = 0,$$

on obtient :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de }]-\infty; 2[, g(x) < 0, \\ g(2) = 0, \\ \text{pour tout } x \text{ de }]2; +\infty[, g(x) > 0. \end{cases}$$

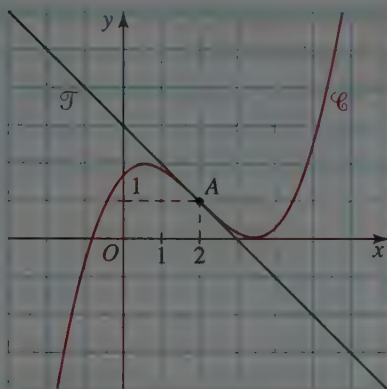
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$		0	

b) $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $y = f(x)$, $\mathcal{T}$ la droite d'équation $y = -x + 3$; de plus, d'après la question précédente :

$$\begin{cases} \text{si } x < 2, \text{ alors } f(x) < -x + 3, \\ \text{si } x = 2, \text{ alors } f(x) = -x + 3, \\ \text{si } x > 2, \text{ alors } f(x) > -x + 3. \end{cases}$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ ont un seul point commun, le point $A(2; 1)$, et que $\mathcal{C}$ est située en dessous de $\mathcal{T}$ dans le demi-plan d'inéquation $x < 2$, au-dessus dans le demi-plan d'inéquation $x > 2$.

On dit que $\mathcal{C}$ traverse sa tangente au point A .



13 1° a) Si n est égal à 1, alors, pour tout réel x positif ou nul :

$$x^n - 1 = x^1 - 1 = x - 1,$$

$$n(x-1) = 1 \times (x-1) = x-1,$$

donc on a bien : $x^n - 1 \geq n(x-1)$.

b) $n \geq 2$, $f: x \mapsto x^n - 1 - n(x-1)$.

• La fonction f est un polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f'(x) = nx^{n-1} - n \times 1 = n(x^{n-1} - 1).$$

De plus, la fonction $x \mapsto x^{n-1} - 1$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et s'annule en 1.

Si $n = 2$, alors $x \mapsto x^{n-1} - 1$ est la fonction affine $x \mapsto x - 1$,

si $n \geq 3$, alors $x \mapsto x^{n-1} - 1$ a pour dérivée $x \mapsto (n-1)x^{n-2}$, qui est positive sur $]0; +\infty[$ et ne s'annule qu'en 0.

On en déduit :

$$\text{si } 0 \leq x < 1, \text{ alors } f'(x) < 0,$$

$$\text{si } x = 1, \text{ alors } f'(x) = 0,$$

$$\text{si } x > 1, \text{ alors } f'(x) > 0.$$

Enfin :

$$f(0) = 0^n - 1 - n \times (-1) = -1 + n = n - 1,$$

$$f(1) = 1^n - 1 - n \times (1-1) = 1 - 1 = 0.$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$n-1$	0	

• D'après le tableau de variation précédent, la fonction f admet pour minimum 0 sur $[0; +\infty[$, ce qui permet de conclure :
pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

• Cette dernière relation peut s'écrire :
pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$x^n - 1 - n(x-1) \geq 0,$$

ce qui équivaut à :

pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$x^n - 1 \geq n(x-1).$$

2° $n \geq 2$, g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^n$.

a) La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$g'(x) = nx^{n-1}.$$

On a : $g(1) = 1$, $g'(1) = n \times 1^{n-1} = n$,
et la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de g en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

$$y - g(1) = g'(1)(x-1)$$

c'est-à-dire : $y - 1 = n(x-1)$,

ou encore : $y = n(x-1) + 1$.

b) D'après la question 1° b) :

pour tout x de $[0; +\infty[$, $x^n \geq n(x-1) + 1$,
c'est-à-dire :

pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$g(x) \geq n(x-1) + 1.$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus de sa tangente $\mathcal{T}$.

Les interrogations écrites

14 $f: x \mapsto x - 2\sqrt{x}$.

La fonction f est la différence des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2\sqrt{x}$, toutes deux dérivables sur $]0; +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif :

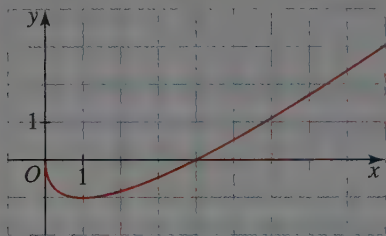
$$f'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}},$$

donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{x}-1$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f'(1) = 0, \\ \text{si } 0 < x < 1, \text{ alors } f'(x) < 0, \\ \text{si } x > 1, \text{ alors } f'(x) > 0. \end{cases}$$

$x \mapsto \sqrt{x}-1$ est une fonction strictement croissante qui s'annule en 1.

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.



On n'a étudié le sens de variation de f que sur $]0; +\infty[$, alors que f est définie sur $[0; +\infty[$.

On pourrait prouver que f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

15 $A = 0,999\,998 + \frac{1}{0,999\,998}$

et $B = 0,999\,999 + \frac{1}{0,999\,999}$.

Lorsque l'on édite le calcul de A et B sur une calculatrice de niveau Lycée, on obtient 2 à l'affichage...

Posons :

$$a = 0,999\,998 \quad \text{et} \quad b = 0,999\,999.$$

Alors : $A = f(a)$, $B = f(b)$, où f est la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

La fonction f est définie sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$, $]0; +\infty[$.

L'idée est d'étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$, intervalle où se trouvent a et b .

Comme somme des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$, toutes deux dérivables sur $]0; +\infty[$, f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}(x-1),$$

$$x+1 > 0 \quad \text{et} \quad x^2 > 0$$

donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$, et en particulier :

$$f'(1) = 0$$

$$\text{si } 0 < x < 1, \text{ alors } f'(x) < 0,$$

ce qui prouve que f est strictement décroissante sur $]0; 1]$.

Des inégalités : $0 < a < b < 1$, on déduit : $f(a) > f(b)$, autrement dit :

$$A > B.$$

À 10^{-12} près :

$$A \approx 2,000\,000\,000\,004,$$

$$B \approx 2,000\,000\,000\,001.$$

16 $f : x \mapsto \frac{6x^2 - 9x + 4}{x^3}$.

1° La fonction f est une fonction rationnelle, donc l'ensemble de dérivabilité de f est son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.

Pour tout réel x non nul :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(12x-9) \times x^3 - (6x^2-9x+4) \times 3x^2}{(x^3)^2} \\ &= \frac{3x^2((4x-3) \times x - (6x^2-9x+4))}{x^6} \\ &= \frac{3(4x^2-3x-6x^2+9x-4)}{x^4} \\ &= \frac{3(-2x^2+6x-4)}{x^4}, \end{aligned}$$

et finalement :

$$f'(x) = \frac{6(-x^2+3x-2)}{x^4},$$

ce qui met en évidence que $f'(x)$ est du signe de $-x^2+3x-2$.

Pour tout réel x non nul, $x^4 > 0$.

2° Le polynôme du second degré $x \mapsto -x^2+3x-2$ admet pour discriminant le réel Δ tel que :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1.$$

$\Delta > 0$, donc les racines de ce polynôme sont les réels x_1 et x_2 définis par :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \frac{-3 - 1}{-2} = 2,$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \frac{-3 + 1}{-2} = 1.$$

On pouvait aussi ne pas mettre en œuvre la méthode standard basée sur le discriminant en observant que 1 est racine du polynôme.

L'autre racine α vérifie alors : $1 \times \alpha = \frac{-2}{-1}$

(le produit des racines est égal au quotient du coefficient constant par le coefficient du terme de degré 2), donc $\alpha = 2$.

On en déduit, pour tout réel x :

- si $x = 1$ ou $x = 2$, alors
 $-x^2 + 3x - 2 = 0,$

- si $x < 1$ ou $x > 2$, alors
 $-x^2 + 3x - 2 < 0,$

- si $1 < x < 2$, alors
 $-x^2 + 3x - 2 > 0,$

le coefficient du terme de degré 2 du polynôme $x \mapsto -x^2 + 3x - 2$ est strictement négatif, donc ce polynôme prend des valeurs positives entre ses racines 1 et 2

ce qui permet de donner le signe de f' sur $]0 ; +\infty[$:

- si $x = 1$ ou $x = 2$, alors $f'(x) = 0$,
- si $0 < x < 1$ ou $x > 2$, alors $f'(x) < 0$,
- si $1 < x < 2$, alors $f'(x) > 0$.

On peut donc affirmer que f est strictement croissante sur $[1 ; 2]$ et strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0 ; 1]$, $[2 ; +\infty[$.

On a : $f(1) = \frac{6 - 9 + 4}{1} = 1,$

$$f(2) = \frac{6 \times 4 - 18 + 4}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

On est en mesure de dresser le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$						
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$		
			1	$\frac{5}{4}$		

3° La fonction f n'est pas monotone sur $[1 ; 4]$.

• La fonction f est croissante sur $[1 ; 2]$,

et : $f(1) = 1, f(2) = \frac{5}{4},$

donc, sur $[1 ; 2]$, f admet pour minimum 1 et pour maximum $\frac{5}{4}$.

• La fonction f est décroissante sur $[2 ; 4]$, et :

$$f(2) = \frac{5}{4},$$

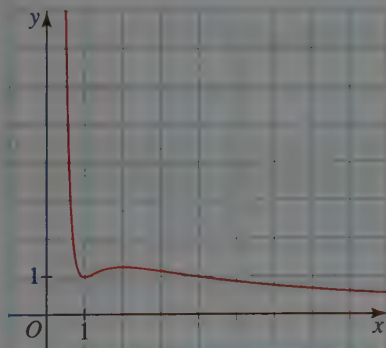
$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{6 \times 16 - 9 \times 4 + 4}{4^3} \\ &= \frac{6 \times 4 - 9 + 1}{4^2} \\ &= \frac{6 - 2}{4} \\ &= 1, \end{aligned}$$

donc, sur $[2 ; 4]$, f admet aussi pour minimum 1 et pour maximum $\frac{5}{4}$.

Pour bien visualiser la situation, on peut s'aider du tableau suivant :

x	1	2	4
$f(x)$	1	$\frac{5}{4}$	1

On en déduit que le minimum de f sur $[1 ; 4]$ est 1 et que le maximum est $\frac{5}{4}$.



Fonctions et problèmes

EXERCICES

Étude de fonctions

1 ★ 10 min

(corrigés p. 122)

On considère la fonction f définie sur $[-3 ; 3]$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

1° Étudier le sens de variation de f .

2° Reprendre l'exercice 12 du chapitre 1 et répondre à la question **2°** de cet exercice.

2 ★★ 20 min

(corrigés p. 122)

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \frac{2}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et Δ la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$.

1° Étudier le sens de variation de f .

2° Soit x un réel quelconque de $[1 ; +\infty[$.

On note M le point de $\mathcal{C}$ et P le point de Δ tous deux de même abscisse x .

a) Calculer $y_M - y_P$.

b) Quel est le signe de $y_M - y_P$?

Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat ?

c) Que devient $y_M - y_P$ lorsque x prend de très grandes valeurs ?

Tracer Δ et $\mathcal{C}$.

3 ★★ 20 min

(corrigés p. 123)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et Δ la droite d'équation $y = x$.

1° Démontrer que f est impaire.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2° Étudier le sens de variation de f .

3° Soit x un réel non nul quelconque.

On note M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et P le point de Δ de même abscisse x .

a) Calculer $y_M - y_P$.

b) Quel est le signe de $y_M - y_P$?

Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat ?

c) Que devient $y_M - y_P$ lorsque x prend de très grandes valeurs ?

4° Tracer Δ et $\mathcal{C}$.

★★★ 30 min

(corrigés p. 124)

Soit f la fonction : $[-3 ; 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3(2x-1)}{2x^2-2x+5}.$$

1° Vérifier que f est définie sur $[-3 ; 4]$ et justifier que, pour tout x de $[-3 ; 4]$, $f(x)$ est du signe de $2x-1$.

2° Déterminer le sens de variation de f , puis dresser son tableau de variation.

3° Tracer $\mathcal{C}_f$ en prenant pour unités graphiques 1 cm sur (Ox), 4 cm sur (Oy).

★★★ 30 min

(corrigés p. 125)

Soit f la fonction : $x \mapsto 3x^3 - 4x - 1$.

1° Étudier le sens de variation de f .

2° a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point I d'abscisse 0.

b) Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T .

3° a) Pour tout réel x , développer le produit $(x+1)(3x^2-3x-1)$.

b) En déduire les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite des abscisses.

4° Tracer T et $\mathcal{C}_f$.

5° Déterminer graphiquement le nombre $N(m)$ de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs du réel m (présenter les résultats dans un tableau).

Optimisation

★★★ 20 min

(corrigés p. 127)

Un livre doit contenir, par page, 500 cm² de texte imprimé.

Chaque page est rectangulaire et possède des marges gauche et droite de 4 cm, des marges inférieure et supérieure de 5 cm.

Quelles sont les dimensions d'une page du livre si l'on veut que la consommation de papier soit minimale ?

Résolution d'équations

★ 15 min

(corrigés p. 127)

Dans chacun des cas suivants, trouver une solution de l'équation (E) proposée, puis démontrer que c'est la seule.

1° (E) : $x + 2x^3 + 4x^5 = -7$.

$$2^\circ (E) : \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = 2.$$

$$3^\circ (E) : x^2 \sqrt{x} = 32.$$

8 ★★ 15 min

(corrigés p. 129)

f est la fonction étudiée dans l'exercice 16 du chapitre 5.

1° Résoudre l'équation (E_1) :

$$f(x) = 1.$$

2° Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$,

puis résoudre l'équation (E_2) :

$$f(x) = 8.$$

3° Combien l'équation (E_3) :

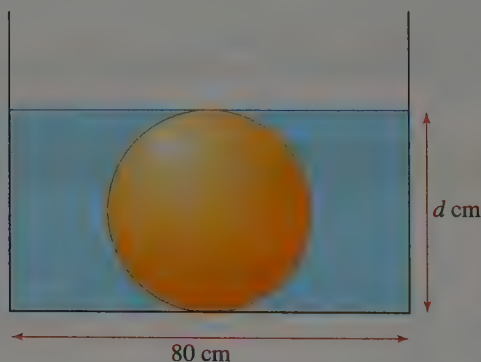
$$f(x) = 1,25$$

admet-elle de solutions ?

9 ★★ 30 min

(corrigés p. 130)

On dispose d'un récipient cylindrique de diamètre 80 cm contenant de l'eau dont la hauteur est 20 cm. On y plonge une bille sphérique de diamètre d cm. On constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille. Le but de cet exercice est de calculer le diamètre d de la bille.



1° Justifier que d appartient à l'intervalle $[0 ; 80]$.

2° Démontrer que d vérifie la relation :

$$d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0.$$

3° Soit f la fonction définie sur $[0 ; 80]$ par :

$$f(x) = x^3 - 9\,600x + 192\,000.$$

a) Étudier le sens de variation de f .

b) Pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet-elle une seule solution dans $[0 ; 80]$?

4° À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de d d'amplitude 0,01.

Économie

10 ★★ 15 min

(corrigés p. 131)

En économie, on constate souvent que le nombre n d'objets vendus diminue quand le prix de vente p de cet objet augmente. Une des lois formulées est : $n = a - ep$, où a et e sont des constantes réelles ($e > 0$).

Un magasin met en vente des bouteilles de champagne au prix de 18 € l'unité, chacune ayant été achetée 12 € chez le grossiste ; au bout d'une semaine, 200 bouteilles sont vendues. Le directeur décide alors de baisser le prix de la bouteille de 0,50 € ; il constate qu'à la fin de la deuxième semaine, la vente hebdomadaire a augmenté de 50 bouteilles.

1° En supposant que la loi $n = a - ep$ s'applique dans cet exemple, quelles sont les valeurs des coefficients a et e ?

2° Exprimer alors le bénéfice b en fonction de p , puis calculer le prix de vente d'une bouteille de champagne assurant un bénéfice maximal (on néglige les frais de tous ordres).

11 ★★ 15 min

(corrigés p. 131)

Dans une usine qui fabrique des pièces mécaniques, le coût en euros pour produire n ($n \in \mathbb{N}^*$) pièces vérifie :

$$C(n) = n^2 - 6n + 144.$$

1° Quel est le coût moyen $C_M(n)$ de fabrication d'une pièce mécanique en fonction de n ?

2° Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 6 + \frac{144}{x}.$$

3° Pour quelle valeur de n le coût moyen de fabrication d'une pièce est-il minimal ?

12 ★★ 15 min

(corrigés p. 132)

On admet que le coût total de production $C(q)$ d'une quantité q ($q > 0$) d'un produit industriel vérifie :

$$C(q) = q^3 - 24q^2 + 144q + 1\,169.$$

1° Calculer le coût marginal $C(q+1) - C(q)$.

2° Étudier le sens de variation de la fonction C sur $]0 ; +\infty[$.

3° Pour quel entier q le coût total de fabrication $C(q)$ est-il minimal ?

Les interrogations écrites

13 20 min

(corrigés p. 132)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.

1° Étudier le sens de variation de f .

2° Soit x un réel quelconque non nul.

On note M le point de $\mathcal{C}$ et P le point de Δ ayant tous deux pour abscisse x .

a) Calculer $y_M - y_P$.

Quel est le signe de $y_M - y_P$?

Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat ?

b) Que devient $y_M - y_P$ lorsque x prend de très grandes valeurs ?

3° Tracer Δ et $\mathcal{C}$.

14 15 min

(corrigés p. 134)

Pendant les mois d'été, la commune de Vilténis propose pour la location d'un court de tennis la formule suivante : un abonnement mensuel de 30 €, puis une location de 2 € par heure.

On note f la fonction qui, au nombre x ($x > 0$) d'heures de location, associe le prix moyen horaire en euros.

1° Déterminer $f(x)$ en fonction de x .

2° Étudier le sens de variation sur $]0; +\infty[$ de la fonction :

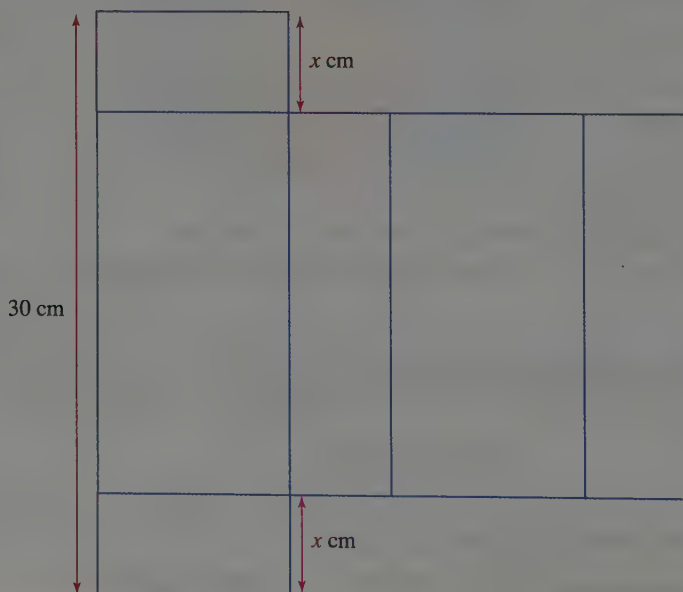
$$x \mapsto \frac{30}{x} + 2.$$

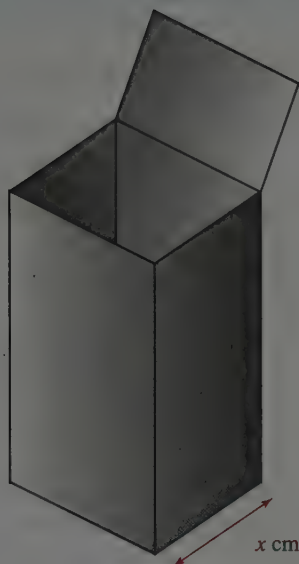
3° Pour quel nombre d'heures de tennis le coût horaire est-il inférieur à 4 € ?

15 45 min

(corrigés p. 134)

Une usine achète des feuilles cartonnées carrées de 30 cm de côté et fabrique dans chacune une boîte qui a la forme d'un pavé droit ; une de ses dimensions est égale à x cm, avec x un réel strictement positif (voir les schémas ci-dessous et page suivante).





- 1° Justifier que x appartient à $[0 ; 15]$.
- 2° Exprimer le volume $v(x)$ de la boîte (en cm^3) en fonction de x .
- 3° Dresser le tableau de variation de la fonction v sur $[0 ; 15]$.
- 4° Quel est le volume maximal ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?
- 5° Le but de cette question est de déterminer les valeurs de x pour lesquelles la boîte a un volume de 0,5 litre.
- a) Quels renseignements donne le tableau de variation de v ?
- b) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, préciser la réponse formulée à la question précédente.
- c) On pose, pour tout réel x :

$$f(x) = (x - 10)(x^2 - 20x + 25).$$

Développer $f(x)$, puis donner la valeur exacte des solutions au problème posé.

CORRIGÉS

Étude de fonctions

1 Pour tout x de $[-3 ; 3]$,

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2.$$

1° f est dérivable sur $[-3 ; 3]$, et pour tout x de $[-3 ; 3]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \times 4x^3 + \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2x \\ &= x(x^2 + x - 2), \end{aligned}$$

et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + x - 2 = 0$.

Le discriminant Δ de $x^2 + x - 2 = 0$ est tel que :

$$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2, \\ \text{donc les solutions de } x^2 + x - 2 &= 0 \text{ sont } \\ \frac{-1+3}{2} \text{ et } \frac{-1-3}{2} \text{ c'est-à-dire } 1 \text{ et } -2. \end{aligned}$$

1 est une solution évidente de $x^2 + x - 2 = 0$, le produit des solutions vaut -2 , donc l'autre est -2 .

On peut alors déterminer le signe de $f'(x)$:

x	-3 -2 0 1 3				
x	-	- 0 +			+
$x^2 + x - 2$	+	0	-	- 0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	- 0 +

On en déduit que f est strictement décroissante sur $[-3 ; -2]$, strictement croissante sur $[-2 ; 0]$, strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; 3]$.

2° Contrairement à ce que laisse penser la copie d'écran de la calculatrice de l'exercice 12 du chapitre 1, la fonction f n'est pas monotone sur $[-2 ; 3]$.

2 Pour tout x de $[1 ; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \frac{2}{x}.$$

$\mathcal{C}$ courbe représentative de f et Δ droite d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$.

1° f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$, et pour tout x de $[1 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2},$$

or $2x^2 > 0$ et $x+2 > 0$,

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-2$.

Par conséquent :

- si $x < 2$, alors $f'(x) < 0$,
- $f'(2) = 0$,
- si $x > 2$, alors $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $[1 ; 2]$ et strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

$$f(1) = \frac{1}{2} - 1 + 2 = 1,5 ;$$

$$f(2) = 1 - 1 + 1 = 1 ;$$

$$f'(1) = -1,5.$$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est égale à $-1,5$.

Le tableau de variation de f est :

x	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-1,5	-	0	+
$f(x)$	1,5		1	

Table Range
X

Start:1
End:8
Pitch:0.5

$Y1 = X \div 2 - 1 + 2 \div X$

1	1.5
1.5	1.0833
2	1
2.5	1.05

1.083333333
FORM DEL RW G-CON G-PLT

2° $M \in \mathcal{C}$, $P \in \Delta$ et M et P d'abscisse x ($x \geq 1$).

$$\begin{aligned}
 \text{a) } y_M - y_P &= f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1\right) \\
 &= \frac{x}{2} - 1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{2} + 1 \\
 &= \frac{2}{x}.
 \end{aligned}$$

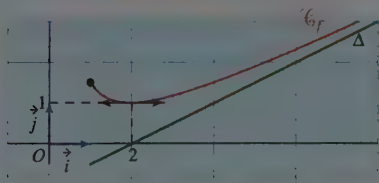
b) $y_M - y_P > 0$, donc $y_M > y_P$, ce qui permet d'affirmer que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ .

c) Lorsque x prend de très grandes valeurs, $\frac{2}{x}$ devient très proche de zéro, donc $y_M - y_P$ se rapproche de zéro.

On dit que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{2}{x}$ tend vers 0.

Les points de $\mathcal{C}$ et Δ de même abscisse x sont aussi proches que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

On dit que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.



Mieux vaut commencer par tracer Δ , le tracé de $\mathcal{C}$ en est facilité.

3 Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

$\mathcal{C}$ courbe représentative de f et Δ droite d'équation $y = x$.

1° Pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

- $-x \in \mathbb{R}^*$,
- $f(-x) = -x + \frac{4}{-x} = -\left(x + \frac{4}{x}\right) = -f(x)$.

Donc, f est une fonction impaire.

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

2° f est une fonction rationnelle, donc f est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$, et pour tout réel x non nul :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} \\
 &= \frac{(x-2)(x+2)}{x^2},
 \end{aligned}$$

or $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-2)(x+2)$.

Par conséquent :

- $f'(-2) = f'(2) = 0$,
- si $x < -2$, alors $f'(x) > 0$,
- si $-2 < x < 0$ ou $0 < x < 2$, alors $f'(x) < 0$,
- si $x > 2$, alors $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty; -2]$ et strictement décroissante sur $[-2; 0[$, strictement décroissante sur $]0; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

f n'est pas définie en 0, donc n'est pas dérivable en 0.

Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$ est le suivant :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f			

↘ 4 ↗

3° x est un réel non nul.

$$\text{a) } y_M - y_P = x + \frac{4}{x} - x = \frac{4}{x}.$$

b) 1^{er} cas : $x > 0$

$$\text{Alors } \frac{4}{x} > 0,$$

$$\text{donc } y_M - y_P > 0,$$

$$\text{d'où } y_M > y_P,$$

ce qui permet d'affirmer que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ dans le demi-plan d'inéquation $x > 0$.

2^e cas : $x < 0$

$$\text{Alors } \frac{4}{x} < 0,$$

$$\text{donc } y_M - y_P < 0,$$

$$\text{d'où } y_M < y_P,$$

ce qui permet d'affirmer que la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ dans le demi-plan d'inéquation $x < 0$.

c) Lorsque x prend des valeurs infiniment grandes, $\frac{4}{x}$ devient très proche de zéro, donc $y_M - y_P$ se rapproche de zéro.

On dit que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{4}{x}$ tend vers 0.

Les points de $\mathcal{C}$ et Δ de même abscisse x sont aussi proches que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

On dit que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

4°

Table Range

X

Start: -10

End: 10

Fetch: 0.5

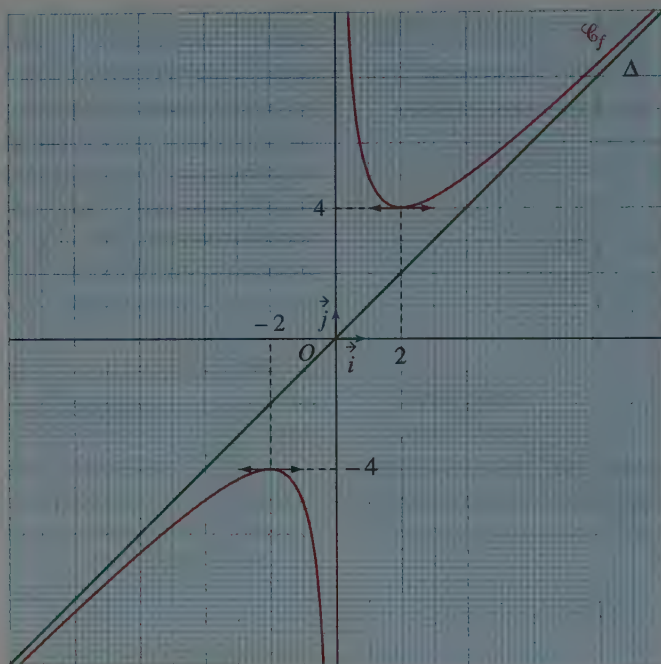
$Y1 = X + 4 \div X$

X	Y1
-10	-10.4
-9.5	-9.921
-9	-9.444
-8.5	-8.971

-9.444444444

FORM DEL ROW

G-CON G-PLT



4 $f: [-3; 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3(2x-1)}{2x^2-2x+5}$$

1° L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x de $[-3; 4]$ tels que :

$$2x^2 - 2x + 5 \neq 0.$$

Soit (E) l'équation du second degré :

$$2x^2 - 2x + 5 = 0;$$

son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 5$$

$$= 4 - 40$$

$$= -36.$$

$\Delta < 0$, donc (E) n'admet pas de solution et :

pour tout réel x , $2x^2 - 2x + 5 > 0$.

$2x^2 - 2x + 5$ est du signe du coefficient de x^2 .

On en déduit que :

l'ensemble de définition de f est $[-3; 4]$ et que, pour tout x de $[-3; 4]$, $f(x)$ est du signe de $2x - 1$.

2° f est la restriction à $[-3; 4]$ d'une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $[-3; 4]$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Pour tout x de $[-3 ; 4]$:

$$f'(x) =$$

$$\begin{aligned} & 3 \times \frac{2(2x^2 - 2x + 5) - (2x - 1)(4x - 2)}{(2x^2 - 2x + 5)^2} \\ &= 3 \times \frac{4x^2 - 4x + 10 - 8x^2 + 4x + 4x - 2}{(2x^2 - 2x + 5)^2} \\ &= 3 \times \frac{-4x^2 + 4x + 8}{(2x^2 - 2x + 5)^2} \\ &= \frac{12(-x^2 + x + 2)}{(2x^2 - 2x + 5)^2}, \end{aligned}$$

donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + x + 2$.

Soit g le polynôme du second degré :

$$x \mapsto -x^2 + x + 2,$$

-1 étant une racine de g , son autre racine, notée α , vérifie :

$$\alpha \times (-1) = \frac{2}{-1},$$

donc :

$$\alpha = 2.$$

On peut aussi calculer le discriminant pour calculer les racines de g .

On en déduit le tableau de signes de $g(x)$:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

puis :

- $f'(-1) = f'(2) = 0$,
- pour tout x de $[-3 ; -1[\cup]2 ; 4]$,
 $f'(x) < 0$,
- pour tout x de $] -1 ; 2[$,
 $f'(x) > 0$,

ce qui implique que f est strictement croissante sur $[-1 ; 2]$ et strictement décroissante sur chacun des intervalles $[-3 ; -1]$ et $[2 ; 4]$.

$$f(-3) = \frac{-21}{29} \approx -0,72,$$

$$f'(-3) = \frac{-120}{841} \approx -0,14,$$

$$f(4) = -f(-3),$$

$$f'(4) = f'(-3).$$

x	-3	-1	2	4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frac{-21}{29}$		1		$\frac{21}{29}$

3°

Table Range
X

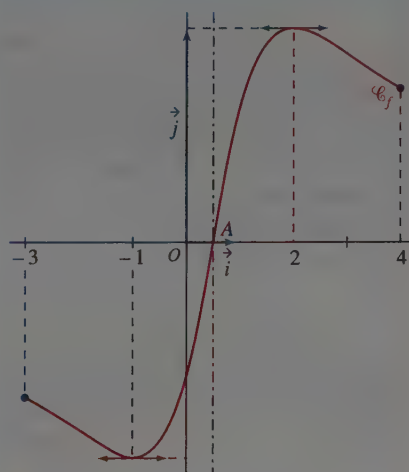
Start: -3
End : 4
Pitch: 0.5

$$Y1 = 12(2X - 1) \div (2X^2 - 2X +$$

X	Y1
-3	-3.36
-2.5	-3.891
-2	-4.612
-1.5	-5.647
	-4.615384615

FORM DEL ROM G:CON G:PLT

Pour tracer $\mathcal{C}_f$ en prenant pour unités graphiques 1 cm sur (Ox) , 4 cm sur (Oy) , il est avantageux de programmer $4f$ plutôt que f .



5 $f: x \mapsto 3x^3 - 4x - 1.$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

1° f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (f est un polynôme), et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2).$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

2° a) L'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point I d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0),$$

or :

$$f(0) = -1, \quad f'(0) = -4.$$

donc I a pour ordonnée -1 et T a pour équation $y = -4x - 1$.

b) Soient x un réel, M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et P celui de T de même abscisse :

$$\begin{aligned} y_M - y_P &= f(x) - (-4x - 1) \\ &= 3x^3 - 4x - 1 - (-4x - 1) \\ &= 3x^3, \end{aligned}$$

x et x^3 sont de même signe,

donc $y_M - y_P$ est du signe de x , ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T dans le demi-plan d'inéquation $x \geq 0$, et en dessous dans le demi-plan d'inéquation $x \leq 0$; de plus, I est leur seul point d'intersection.

3° a) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} (x+1)(3x^2-3x-1) \\ &= 3x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 3x - x - 1 \\ &= 3x^3 - 4x - 1. \end{aligned}$$

b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, et :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0,$$

donc, d'après la question **3° a)** :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+1)(3x^2-3x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1=0 \text{ ou } 3x^2-3x-1=0 \\ &\Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } 3x^2-3x-1=0. \end{aligned}$$

Réolvons l'équation (E) du second degré :

$$3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Son discriminant Δ vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-1) \\ &= 9 + 12 \\ &= 21; \end{aligned}$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{21}}{2 \times 3} = \frac{3 - \sqrt{21}}{6},$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{21}}{2 \times 3} = \frac{3 + \sqrt{21}}{6}.$$

$$\frac{3 - \sqrt{21}}{6} \approx -0,26, \quad \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \approx 1,26.$$

Finalement, les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite des abscisses sont les trois points A , B , C d'abscisses respectives :

$$-1, \quad \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \text{ et } \frac{3 + \sqrt{21}}{6}.$$

4°

Table Range

X

Start: -1.5

End: 1.5

Width: 0.25

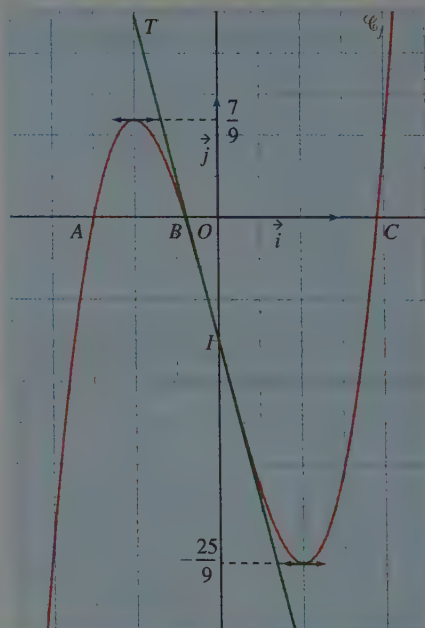
$Y1 = 3X^3 - 4X - 1$

X	Y1
-1.5	-5.125
-1.25	-1.859
-1	0
-0.75	0.719

0.734375

FORM DEL ROW

G-CON G-PLT



5° Le nombre $N(m)$ de solutions de l'équation $f(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = m$ (qui est parallèle à la droite des abscisses).

Par conséquent :

m	$-\infty$	$-\frac{25}{9}$	$\frac{7}{9}$	$+\infty$
$N(m)$	1			1

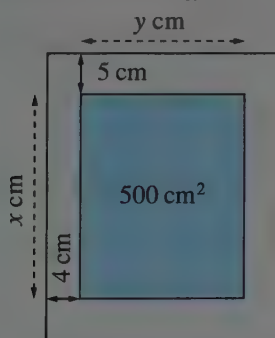
Optimisation

6 Soit y la dimension, en cm, des bords inférieur et supérieur de la partie imprimée d'une page ; soit x celle, en cm, des bords gauche et droit.

L'aire, en cm^2 , de cette partie de page vaut 500,

d'où : $xy = 500$,

c'est-à-dire $y = \frac{500}{x}$,



Les dimensions de la page entière, en cm, sont alors :

$$x + (2 \times 5) \text{ et } y + (2 \times 4),$$

c'est-à-dire $x + 10$ et $\frac{500}{x} + 8$.

Appelons f la fonction (définie seulement sur $\mathbb{R}_+^*$) qui, au réel x , associe l'aire, en cm^2 , de la page entière. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 10) \left(\frac{500}{x} + 8 \right) \\ &= 500 + \frac{5\,000}{x} + 8x + 80, \end{aligned}$$

$$f(x) = 8x + \frac{5\,000}{x} + 580.$$

Étudions le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8 - \frac{5\,000}{x^2} \\ &= \frac{8x^2 - 5\,000}{x^2} \\ &= \frac{8(x^2 - 625)}{x^2} \\ &= \frac{8(x + 25)(x - 25)}{x^2}. \end{aligned}$$

Si $x > 0$, alors : $x + 25 > 0$ et $x^2 > 0$.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x - 25$.

Le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est donné par le tableau suivant :

x	0	25	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			↘ 980 ↗	

Le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est atteint en 25. Les dimensions recherchées sont obtenues pour $x = 25$. On a alors :

$$x + 10 = 35,$$

$$y + 8 = \frac{500}{25} + 8 = 20 + 8 = 28.$$

Si $x = 25$, alors $y = \frac{500}{25} = 20$.

On en déduit que les bords inférieur et supérieur d'une page du livre doivent mesurer 28 cm et les bords gauche et droit, 35 cm.

Résolution d'équations

7 1° (E) : $x + 2x^3 + 4x^5 = -7$.

L'ensemble de définition de (E) est $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, -1 est une solution évidente de (E).

En effet :

$$-1 + 2 \times (-1)^3 + 4 \times (-1)^5 = -1 - 2 - 4 = -7.$$

De plus, la fonction f :

$$x \mapsto x + 2x^3 + 4x^5$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car elle est la somme des fonctions

$$x \mapsto x, \quad x \mapsto 2x^3, \quad x \mapsto 4x^5$$

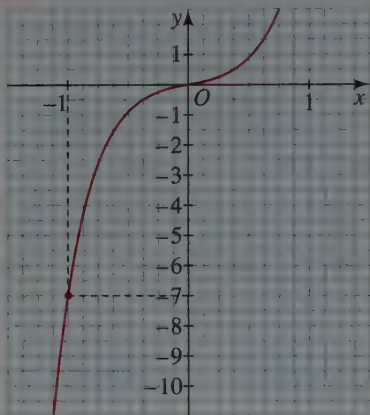
toutes strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

On pouvait aussi écrire que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2 \times 3x^2 + 4 \times 5x^4 \\ &= 1 + 6x^2 + 20x^4, \end{aligned}$$

donc : $f'(x) > 0$,

ce qui prouve que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		-7	

Donc f ne prend qu'une seule fois la valeur -7 .

On peut alors conclure que -1 est la seule solution de $(E) : x + 2x^3 + 4x^5 = -7$.

Une fonction strictement croissante ne prend pas deux fois la même valeur.

$$2^\circ (E) : \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = 2.$$

L'ensemble de définition de (E) est $]0 ; +\infty[$.

1 est une solution évidente de (E) .

$$\text{En effet : } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{1^2} = 1 + 1 = 2.$$

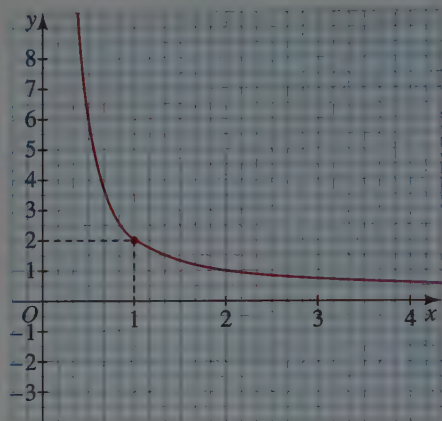
De plus, la fonction f :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, car elle est la somme de deux fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

toutes deux strictement décroissantes sur $]0 ; +\infty[$.



x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		2	

Donc, sur $]0 ; +\infty[$, f ne prend qu'une fois la valeur 2.

On en déduit que **1 est la seule solution de $(E) : \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = 2$.**

$$3^\circ (E) : x^2 \sqrt{x} = 32.$$

L'ensemble de définition de (E) est $[0 ; +\infty[$.

Il est clair que 4 est une solution de (E) .

En effet :

$$4^2 \sqrt{4} = 16 \times 2 = 32.$$

Étudions le sens de variation de la fonction f :

$$x \mapsto x^2 \sqrt{x}.$$

Soient a et b des réels positifs ou nuls.

Supposons : $0 \leq a < b$,

alors : $0 \leq a^2 < b^2$

et : $0 \leq \sqrt{a} < \sqrt{b}$,

donc, en multipliant membre à membre ces inégalités qui portent sur des réels positifs :

$$0 \leq a^2 \sqrt{a} < b^2 \sqrt{b},$$

ce qui prouve que la fonction f :

$$x \mapsto x^2 \sqrt{x}$$

est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

On pouvait aussi écrire que la fonction f :

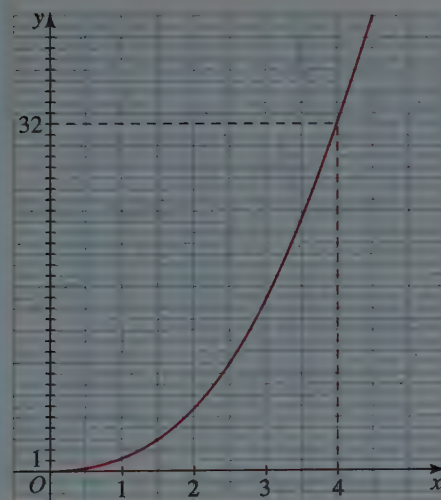
$$x \mapsto x^2 \sqrt{x}$$

est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, car elle est le produit de deux fonctions strictement croissantes et positives sur $[0; +\infty[$.

x	0	4	$+\infty$
$f(x)$		32	

Finalement, 4 est la seule solution de l'équation :

$$(E) : x^2 \sqrt{x} = 32.$$



8 f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x^2 - 9x + 4}{x^3}$$

et son tableau de variation a été dressé dans l'exercice 16 du chapitre 5.

x	0	1	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$				$\frac{5}{4}$		

$$1^\circ (E_1) : f(x) = 1$$

D'après le tableau de variation de f , l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions 1 et 4.

Le minimum de f sur $]0; 1]$ est 1 et il est atteint seulement en 1 ; le maximum de f sur $[4; +\infty[$ est 1 et il est atteint seulement en 4 ; enfin, pour tout x de $]1; 4[$, $f(x) > 1$.

$$2^\circ (E_2) : f(x) = 8$$

$$\begin{aligned} f(0,5) &= \frac{6 \times 0,5^2 - 9 \times 0,5 + 4}{0,5^3} \\ &= \frac{6 \times 0,25 - 4,5 + 4}{0,125} \\ &= \frac{1,5 - 4,5 + 4}{0,125} \\ &= \frac{1}{0,125}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } f(0,5) = 8.$$

On en déduit que 0,5 est une solution de (E_2) .

Puisque, de plus, f est strictement décroissante sur $]0; 1]$, 0,5 est la seule solution de (E_2) sur $]0; 1]$.

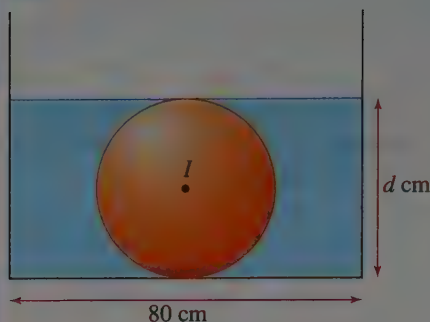
D'après le tableau de variation de f , l'équation (E_2) n'admet pas de solution dans $]1; +\infty[$ (le maximum de f sur cet intervalle est $\frac{5}{4}$, c'est-à-dire 1,25).

Finalement : 0,5 est la seule solution de (E_2) .

$$3^\circ (E_3) : f(x) = 1,25$$

x	0	0,5	1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$		8		1,25		1

D'après le tableau de variation de f , on peut alors affirmer que l'équation (E_3) admet exactement deux solutions (l'une est 2, l'autre appartient à $]0,5; 1[$).



1° • d est un réel positif car d est une mesure de longueur,

• d est inférieur ou égal à 80, car le diamètre du récipient est 80 cm.

Par conséquent :

$$d \in [0 ; 80].$$

2° Cylindre de rayon 40 cm contenant de l'eau dont la hauteur est 20 cm.

Le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est $\pi R^2 h$.

En notant V_1 le volume, en cm^3 , de l'eau dans le cylindre avant l'arrivée de la bille :

$$V_1 = \pi \times 40^2 \times 20 = 32\,000\pi.$$

Le volume d'une boule de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$.

En notant V_2 le volume, en cm^3 , de la bille :

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{d^3}{8} = \frac{\pi \times d^3}{6}.$$

Comme le niveau d'eau est tangent à la bille, $V_1 + V_2$ est le volume, en cm^3 , d'un cylindre de hauteur d ,

donc :

$$V_1 + V_2 = \pi \times 40^2 \times d = 1\,600\pi d,$$

$$d'ou : 32\,000\pi + \frac{\pi \times d^3}{6} = 1\,600\pi d,$$

$$d'ou : 192\,000 + d^3 = 9\,600d,$$

on a multiplié les deux membres de l'égalité par 6 et on les a divisés par π .

On en déduit que d vérifie :

$$d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0.$$

3° f est la fonction définie sur $[0 ; 80]$ par :

$$f(x) = x^3 - 9\,600x + 192\,000.$$

a) f est dérivable sur $[0 ; 80]$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 9\,600 \\ &= 3(x^2 - 3\,200) \\ &= 3(x + \sqrt{3\,200})(x - \sqrt{3\,200}) \\ &= 3(x + 40\sqrt{2})(x - 40\sqrt{2}), \end{aligned}$$

$$\text{or : } 3(x + 40\sqrt{2}) > 0,$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 40\sqrt{2}$.

x	0	$40\sqrt{2}$	80
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	192 000	$f(40\sqrt{2})$	$f(80)$

b) • f est à valeurs strictement négatives sur $[40\sqrt{2} ; 80]$,

on a : $f(40\sqrt{2}) \approx -170\,040$ à 10 près

et $f(80) = -64\,000$,

donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[40\sqrt{2} ; 80]$.

• De plus, f est dérivable et strictement décroissante sur $[0 ; 40\sqrt{2}]$,

et f change de signe entre 0 et $40\sqrt{2}$,

$f(0) = 192\,000$ et $f(40\sqrt{2}) \approx -170\,040$ à 10 près,

donc : $f(0) > 0$ et $f(40\sqrt{2}) < 0$.

Par conséquent, f s'annule une seule fois sur $[0 ; 40\sqrt{2}]$;

autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[0 ; 40\sqrt{2}]$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[0 ; 80]$.

4° • d est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0 ; 80]$.

En effet, d'après la première question :

$$d \in [0 ; 80]$$

et d vérifie :

$$d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0.$$

• De plus, à l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$f(20) = 8\,000 \text{ et } f(21) = -339$$

donc : $20 < d < 21$.

f s'annule entre 20 et 21.

De même :

$$f(20,95) = 75,007375$$

$$\text{et } f(20,96) = -7,819264$$

donc :

$$20,95 < d < 20,96.$$

f s'annule entre 20,95 et 20,96.

La bille a un diamètre de 20,95 cm à 1 mm près.

Économie

10 1° Le nombre n de bouteilles vendues en une semaine et le prix à l'unité de ces bouteilles sont supposés liés par la loi :

$$n = a - ep.$$

La première semaine, 200 bouteilles sont vendues au prix de 18 € l'unité, donc :

$$200 = a - 18e.$$

La deuxième semaine, 250 bouteilles sont vendues au prix de 17,5 € l'unité, donc :

$$250 = a - 17,5e.$$

Les constantes a et e satisfont donc au

$$\text{système : } \begin{cases} a - 18e = 200 \\ a - 17,5e = 250. \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre la première égalité à la seconde, on obtient :

$$0,5e = 50,$$

d'où : $e = 100$;

puis, en substituant la valeur de e dans la première égalité, il vient :

$$a = 200 + 1\,800,$$

soit : $a = 2\,000$.

2° Si n bouteilles sont vendues, au prix d'achat de 12 € et de vente de p € chacune, alors le bénéfice b € vérifie :

$$b = np - n \times 12 = n(p - 12),$$

or : $n = a - ep,$

et : $a = 2\,000, e = 100,$

donc : $b = (2\,000 - 100p)(p - 12)$

$$= 100(20 - p)(p - 12).$$

Soit f la fonction :

$$x \mapsto 100(20 - x)(x - 12).$$

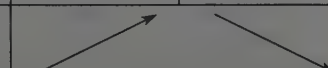
f est un polynôme (du second degré), donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$f(x) = 100(-x^2 + 32x - 240),$$

$$f'(x) = 100(-2x + 32) = -200(x - 16),$$

donc le sens de variation de f est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	16	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est donc atteint en 16.

Si $p = 16$, alors :

$$n = 2\,000 - 100 \times 16 = 400,$$

$$b = 400 \times (16 - 12) = 1\,600.$$

Concrètement, le bénéfice maximal est donc assuré lorsque la bouteille de champagne est vendue 16 € (le nombre de bouteilles vendues est alors 400, et le bénéfice s'élève à 1 600 €).

11 $C(n) = n^2 - 6n + 144.$

1° On a : $C_M(n) = \frac{C(n)}{n}$

$$= \frac{n^2 - 6n + 144}{n},$$

donc : $C_M(n) = n - 6 + \frac{144}{n}.$

Le coût moyen de fabrication d'une pièce est le quotient du coût total par le nombre n de pièces.

2° La fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 6 + \frac{144}{x} \text{ est dérivable sur}$$

$]0 ; +\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{144}{x^2} \\
 &= \frac{x^2 - 144}{x^2} \\
 &= \frac{(x+12)(x-12)}{x^2},
 \end{aligned}$$

or : $x+12 > 0$ et $x^2 > 0$,

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-12$.

On déduit le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	12	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f			

3° Pour tout entier naturel n non nul :

$$C_M(n) = f(n),$$

En utilisant le tableau de variation de f , on déduit que le coût moyen de fabrication est minimal pour $n = 12$.

$$C_M(12) = 12 - 6 + \frac{144}{12} = 6 + 12 = 18,$$

donc le coût moyen minimal de fabrication s'élève à 18 €.

12 $C(q) = q^3 - 24q^2 + 144q + 1\,169.$

$$\begin{aligned}
 1^\circ C(q+1) &= (q+1)^3 - 24(q+1)^2 \\
 &\quad + 144(q+1) + 1\,169 \\
 &= (q+1)(q^2+2q+1) - 24(q^2+2q+1) \\
 &\quad + 144q + 144 + 1\,169 \\
 &= q^3 + 2q^2 + q + q^2 + 2q + 1 - 24q^2 \\
 &\quad - 48q - 24 + 144q + 144 + 1\,169 \\
 &= q^3 - 21q^2 + 99q + 1\,290
 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 C(q+1) - C(q) &= q^3 - 21q^2 + 99q \\
 &\quad + 1\,290 - q^3 + 24q^2 - 144q - 1\,169 \\
 &= 3q^2 - 45q + 121.
 \end{aligned}$$

Le coût marginal est le coût additionnel engendré par la fabrication d'une unité supplémentaire.

2° La fonction C est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout x de cet intervalle :

$$\begin{aligned}
 C'(x) &= 3x^2 - 48x + 144 \\
 &= 3(x^2 - 16x + 48).
 \end{aligned}$$

En économie, le coût marginal est souvent assimilé à la dérivée de la fonction coût total.

Ici : $C'(q) = 3q^2 - 48q + 144$ et

$$C(q+1) - C(q) = 3q^2 - 45q + 121$$

Déterminons les racines du polynôme du second degré $x^2 - 16x + 48$;

son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = 16^2 - 4 \times 48 = 256 - 192 = 64 = 8^2,$$

$\Delta > 0$, donc le polynôme $x^2 - 16x + 48$

admet deux racines $\frac{16-8}{2}$ et $\frac{16+8}{2}$,

c'est-à-dire : 4 et 12.

x	0	4	12	$+\infty$
$C'(x)$		+ 0 - 0 +		
$C(x)$				

La fonction C n'est pas définie en 0, mais lorsque x tend vers 0, $C(x)$ tend vers 1 169.

3° D'après son tableau de variation, la fonction C admet un minimum absolu en 12.

$C(0)$ n'existe pas.

Par conséquent, le coût total de fabrication des objets est minimal lorsque l'entier q est égal à 12.

Les interrogations écrites

13 Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$.

ℳ la courbe représentative de f et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.

1° f est une fonction rationnelle, donc f est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$, et pour tout réel x non nul :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x - \frac{16}{x^2} \\
 &= \frac{2x^3 - 16}{x^2} \\
 &= \frac{2(x^3 - 8)}{x^2} \\
 &= \frac{2(x^3 - 2^3)}{x^2},
 \end{aligned}$$

or $x^2 > 0$,

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^3 - 2^3$, c'est-à-dire celui de $x - 2$.

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent :

- $f'(2) = 0$,
- si $x < 0$ ou $0 < x < 2$, alors $f'(x) < 0$,
- si $x > 2$, alors $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$, strictement décroissante sur $]0 ; 2]$ et strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

La fonction f n'étant pas définie en 0, elle n'est pas dérivable en 0.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
f				

2° x est un réel non nul quelconque.

a) On a :

$$y_M - y_P = x^2 + \frac{16}{x} - x^2 = \frac{16}{x},$$

donc le signe de $y_M - y_P$ est celui de x .

On en déduit :

$$y_M - y_P < 0 \text{ si } x < 0,$$

$$y_M - y_P > 0 \text{ si } x > 0,$$

c'est-à-dire :

$$y_M < y_P \text{ si } x < 0,$$

$$y_M > y_P \text{ si } x > 0.$$

Cela permet d'affirmer que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la parabole $\mathcal{P}$ dans le

demi-plan d'inéquation $x > 0$ et que $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{P}$ dans le demi-plan d'inéquation $x < 0$.

b) Lorsque x prend de très grandes valeurs, $\frac{16}{x}$ devient très proche de zéro, donc $y_M - y_P$ se rapproche de zéro.

On dit que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{16}{x}$ tend vers 0.

Les points de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ de même abscisse x sont aussi proches de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand. On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ sont asymptotes, au voisinage de $+\infty$.

3°

Table Range

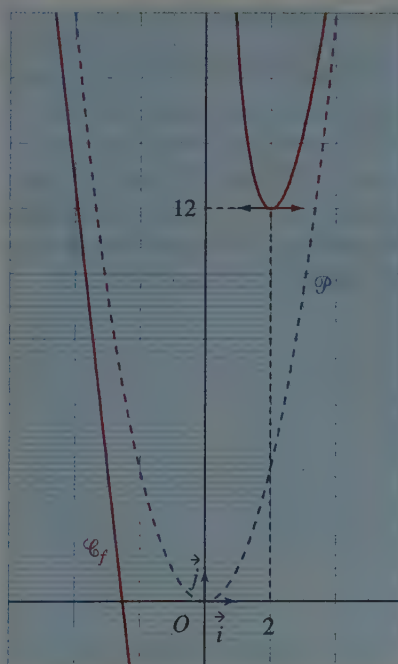
Start: -5
End: 5
Pitch: 0.5

$Y1 = X^2 + 16 \div X$

X	Y1
-5	21.8
-4.5	16.694
-4	12
-3.5	7.6785

7.678571429

FORM DEL ROW G-COL G-PLT



14 1° x désigne le nombre d'heures de location, donc la dépense mensuelle en euros pour la location des courts de tennis est $2x + 30$. Par conséquent, le prix moyen $f(x)$ en euros vérifie :

$$f(x) = \frac{2x + 30}{x} = 2 + \frac{30}{x}.$$

2°

Si f est une fonction, k une fonction constante et a un réel strictement positif, alors :

- f et $f + k$ ont le même sens de variation ;
- f et af ont le même sens de variation.

Sur $]0 ; +\infty[$, les fonctions

$$f: x \mapsto \frac{30}{x} + 2, \quad x \mapsto \frac{30}{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

ont le même sens de variation :

elles sont toutes trois strictement décroissantes sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

On a prouvé que f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

3° Observons (habilement) que $f(15) = 4$.

$$(f(15) = \frac{30}{15} + 2 = 2 + 2 = 4).$$

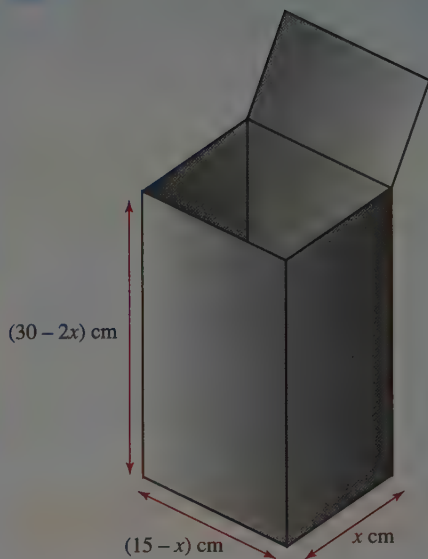
Comme, de plus, f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, le coût horaire est inférieur à 4 € pour un nombre d'heures de tennis supérieur à 15.

On peut aussi résoudre, par le calcul, l'inéquation $f(x) < 4$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) < 4 &\Leftrightarrow \frac{30}{x} + 2 < 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{30}{x} < 2 \\ &\Leftrightarrow 30 < 2x \text{ car } x > 0 \\ &\Leftrightarrow 15 < x \\ &\Leftrightarrow x > 15. \end{aligned}$$

15



1° Les dimensions, en cm, de la boîte sont x , $15 - x$ et $30 - 2x$.

x est une mesure de longueur, donc x est un réel positif ou nul.

$30 - 2x$ est aussi une mesure de longueur, donc $30 - 2x \geq 0$, d'où : $x \leq 15$.

Enfin $15 - x$ est une mesure de longueur, donc $15 - x \geq 0$, d'où : $x \leq 15$.

On en déduit que x appartient à l'intervalle $[0 ; 15]$.

Il est facile de vérifier que, si x appartient à l'intervalle $[0 ; 15]$, alors la fabrication d'une telle boîte est possible.

On note que, si x vaut 0 ou 15, le volume de la boîte est nul.

2° Pour tout x de $[0 ; 15]$:

$$\begin{aligned} v(x) &= x(30 - 2x)(15 - x) \\ &= x \times 2(15 - x)(15 - x) \\ &= 2x(15 - x)^2 \\ &= 2x(x^2 - 30x + 225) \\ &= 2x^3 - 60x^2 + 450x. \end{aligned}$$

On a :

$$(15 - x)^2 = (x - 15)^2 = x^2 - 2 \times 15 \times x + 15^2.$$

3° La fonction v est dérivable sur $[0 ; 15]$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$\begin{aligned}
 v'(x) &= 6x^2 - 120x + 450 \\
 &= 6(x^2 - 20x + 75) \\
 &= 6(x^2 - 20x + 100 - 25) \\
 &= 6[(x - 10)^2 - 5^2] \\
 &= 6(x - 15)(x - 5).
 \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variation de la fonction v sur $[0 ; 15]$:

x	0	5	15
$v'(x)$	+	0	- 0
$v(x)$	0	1 000	0

$$\begin{aligned}
 v(5) &= 2 \times 5 \times (15 - 5)^2 \\
 &= 10 \times 100 \\
 &= 1\,000
 \end{aligned}$$

4° Le maximum de la fonction v sur $[0 ; 15]$ est atteint en 5 et il vaut 1 000, donc le volume maximal de la boîte est 1 000 cm³ et il est obtenu pour $x = 5$.

5° 1 litre = 1 dm³ = 1 000 cm³.

0,5 litre = 500 cm³, il s'agit donc de résoudre l'équation $v(x) = 500$.

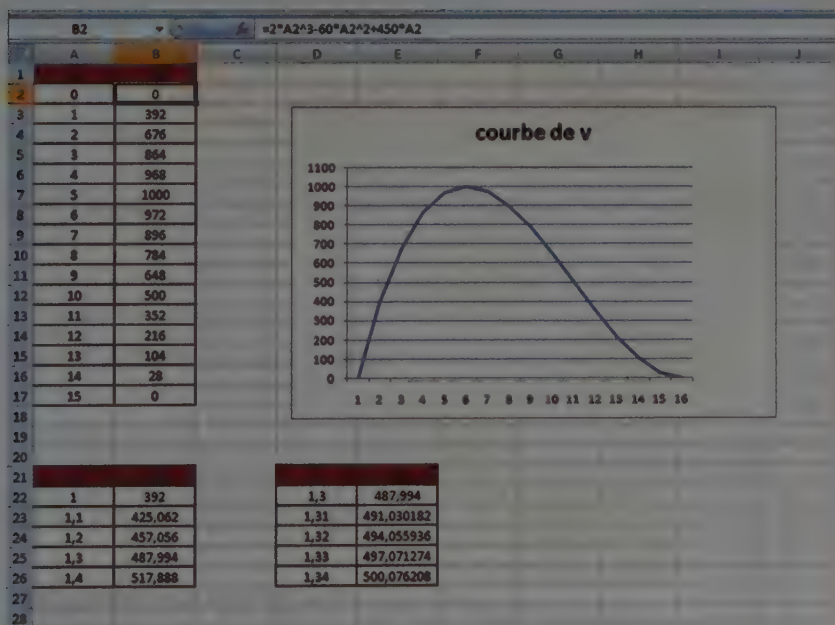
a) D'après le tableau de variation de v , l'équation $v(x) = 500$ admet deux solutions, l'une a entre 0 et 5 et l'autre b entre 5 et 15.

b) Un tableur ou une calculatrice nous donne :

$a \approx 1,34$ à 0,01 près et $b = 10$.

Pour fabriquer une boîte de 0,5 litre, on choisira $x = 10$.

Une boîte ayant une de ses dimensions inférieure à 2 cm semble inutilisable !



c) $f(x) = (x - 10)(x^2 - 20x + 25)$

• Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \\
 x \times (x^2 - 20x + 25) - 10 \times (x^2 - 20x + 25) \\
 &= x^3 - 20x^2 + 25x - 10x^2 + 200x - 250 \\
 &= x^3 - 30x^2 + 225x - 250.
 \end{aligned}$$

• Pour tout x de $[0 ; 15]$:

$$\begin{aligned}
 v(x) &= 500 \\
 &\Leftrightarrow 2x^3 - 60x^2 + 450x - 500 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2f(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(x - 10)(x^2 - 20x + 25) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 10 \text{ ou } x^2 - 20x + 25 = 0.
 \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant du polynôme du second degré g :

$$x \mapsto x^2 - 20x + 25.$$

On a :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-20)^2 - 4 \times 1 \times 25 \\ &= 400 - 100 \\ &= 300 \\ &= (10\sqrt{3})^2,\end{aligned}$$

donc g admet deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{20 - 10\sqrt{3}}{2} = 10 - 5\sqrt{3},$$

$$x_2 = \frac{20 + 10\sqrt{3}}{2} = 10 + 5\sqrt{3}.$$

En remarquant que $x_2 > 15$, on peut affirmer que les solutions dans $[0 ; 15]$ de l'équation $v(x) = 500$ sont 10 et $10 - 5\sqrt{3}$, ce qui permet de conclure que **les valeurs de x pour lesquelles la boîte a pour volume 0,5 litre sont 10 et $10 - 5\sqrt{3}$.**

CHAPITRE 7

Pourcentages

Proportionnalité et pourcentage

Considérons un ensemble E , pris comme ensemble de référence, ayant un nombre fini non nul b d'éléments, et une partie A de E , ayant a éléments.

■ Définitions

- La proportion représentée par la partie A dans E (ou la part de A dans E) est :

$$\frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E} = \frac{\text{quantité partielle}}{\text{quantité totale}} = \frac{a}{b}$$

- La part de A dans E , en pourcentage, est le nombre t tel que : $\frac{t}{100} = \frac{a}{b}$,

c'est-à-dire : $t = \frac{a}{b} \times 100$.

- Dire que le nombre a vaut t % du nombre b signifie : $a = \frac{t}{100} \times b$,

ou encore : $\frac{a}{b} = \frac{t}{100}$.

- Prendre t % d'une quantité, c'est calculer : $\text{quantité} \times \frac{t}{100}$.

Pourcentage d'évolution

- Augmenter une quantité de t %, c'est la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer une quantité de t %, c'est la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.
- Les nombres $1 + \frac{t}{100}$ et $1 - \frac{t}{100}$ sont les coefficients multiplicateurs associés à ces évolutions.

Taux d'évolution

● En sciences humaines ou en sciences expérimentales, on est amené à évaluer un taux d'évolution. On dit qu'une quantité varie de t % lorsque :

$$\frac{(\text{valeur finale}) - (\text{valeur initiale})}{\text{valeur initiale}} = \frac{t}{100}.$$

- Si t est **positif**, on a une **augmentation** (ou hausse) ;
- si t est **négatif**, on a une **diminution** (ou baisse).

Indice

En économie, certaines séries chronologiques sont données en indices (exemple : indice CAC 40).

C'est une valeur fictive de la variable étudiée qui a été fixée à 100 à une date déterminée. À partir de cette valeur, les variations sont données en points.

Évolutions successives

- Prendre t % de t' % d'une quantité, c'est calculer :

$$\text{quantité} \times \frac{t}{100} \times \frac{t'}{100}.$$

- Si une quantité subit une variation de t % suivie d'une variation de t' % (t et t' étant comptés positivement dans le cas d'une augmentation et négativement dans le cas d'une diminution), alors la quantité est multipliée par :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t'}{100}\right).$$

Remarques

Les réels t et t' sont supposés non nuls.

- Une augmentation de t % et une diminution de t % ne se compensent pas.
- Une diminution de t % et une augmentation de t % ne se compensent pas.
- Deux augmentations successives de t % et t' % ne sont pas équivalentes à une augmentation de $(t + t')$ %.
- Deux diminutions successives de t % et t' % ne sont pas équivalentes à une diminution de $(t + t')$ %.

EXERCICES

Vrai ou faux ?



(corrigés p. 147)

- 1° Augmenter de 2 %, c'est multiplier par 1,2.
- 2° Diminuer de 10 %, c'est multiplier par 0,9.
- 3° Doubler, c'est augmenter de 200 %.
- 4° Un produit dont le prix augmente de 10 % puis diminue de 10 % retrouve son prix initial.
- 5° Subir deux hausses consécutives de 3 %, c'est subir une hausse de 6 %.
- 6° Si x est un réel positif, alors $\frac{x}{1,5} < x$.
- 7° La fonction $x \mapsto 0,8x$ est décroissante.
- 8° Un objet dont le prix TTC est 100 € et qui subit une taxe de 5 % a un prix HT de 95 €.
- 9° Un indice qui varie de 300 à 360 points subit une variation de 20 %.
- 10° Un taux d'évolution positif correspond à une augmentation.

Notions de pourcentage

2 ★ 10 min

(corrigés p. 147)

Un lycée accueille 1 600 élèves. Deux élèves sur cinq sont en 1^{re}, 25 % des filles du lycée sont en 1^{re} et 40 % des élèves de 1^{re} sont des filles.

1° Compléter le tableau suivant :

Sexe	Filles	Garçons	Total
Classe			
1 ^{re}			
Autres classes			
Total			1 600

- 2° Quel est le pourcentage de garçons dans l'établissement ?
- 3° a) Quel est le pourcentage de garçons dans les classes de 1^{re} ?
b) Dans les autres classes ?
- 4° Quel est le pourcentage de garçons en 1^{re} parmi les garçons de l'établissement ?

Un minerai contient 24 % de cuivre.

Quelle quantité de minerai faut-il traiter pour obtenir 6 000 tonnes de cuivre ?

L'aire totale du globe terrestre est environ 510 millions de km^2 . L'aire totale des mers et océans est environ 362 millions de km^2 .

1° Quel est le pourcentage de l'aire des mers et océans par rapport à l'aire totale du globe terrestre ?

2° Quelle est l'aire de l'océan Pacifique qui représente 46 % de la surface totale des océans ?

Le prix de vente d'un article s'obtient en augmentant le prix d'achat du tiers de sa valeur.

1° Comment obtient-on le prix d'achat à partir du prix de vente ?

2° À quel pourcentage du prix de vente est égal le prix d'achat ?

En France, la TVA (taxe à la valeur ajoutée) sur les biens courants et les biens de luxe est de 19,6 %.

1° Calculer le prix TTC (toutes taxes comprises) d'un article de luxe dont le prix hors taxe est 260 €.

2° a) Calculer le prix hors taxe d'un vêtement dont le prix TTC est 400 €.

b) Quel est le montant de la TVA sur ce vêtement ?

Une facture est libellée ainsi :

Prix total des réparations	700,00 €
Dont TVA à 19,6 %	137,20 €

En supposant exact le prix total des réparations, cette facturation est-elle correcte ? Sinon, la rectifier.

Une boisson contient 15 % d'alcool.

On voudrait obtenir, à partir d'un litre de cette boisson, un mélange ne contenant que 5 % d'alcool.

Quelle quantité d'eau doit-on ajouter ?

9 ★★ 15 min

(corrigés p. 149)

Un projet de finances pour 2001 prévoit 304 294 millions d'euros de recettes fiscales brutes répartis comme suit (les valeurs étant données en millions d'euros) :

- Taxe sur la valeur ajoutée 137 427
- Impôt sur le revenu 51 913
- Impôts sur les sociétés 49 594
- Autres impôts indirects 39 816
- Taxe intérieure sur les produits pétroliers 25 544

1° Calculer à quel pourcentage du total des recettes fiscales brutes se monte la recette de chacune de ces cinq catégories (on donnera les résultats à 10^{-2} près).

2° Représenter cette répartition par un diagramme circulaire en utilisant un tableur.

Coefficient multiplicateur

10 ★ 5 min

(corrigés p. 150)

Associer le coefficient multiplicateur correspondant à chacune de ces variations.

- 1° Une augmentation de 5 %.
- 2° Une diminution de 0,3 %.
- 3° Une augmentation de 100 %.
- 4° Aucune variation.
- 5° Une augmentation de 4 % suivie d'une augmentation de 3 %.

11 ★ 5 min

(corrigés p. 151)

À quelle variation, en pourcentages, correspondent les coefficients multiplicateurs suivants :

- a) 1,21 ; b) 2,3 ; c) 0,68 ; d) 0,996 ?

12 ★★ 10 min

(corrigés p. 151)

Clara met une certaine somme d'argent sur un compte.

Ce compte rapporte 3 % d'intérêts par an et ces intérêts sont réinvestis chaque année.

Écrire un algorithme en langage naturel puis en langage calculatrice permettant le calcul de la somme sur le compte au bout de n années.

13 ★★ 15 min

(corrigés p. 152)

Noémie verse sur un compte 1 000 euros.

Ce compte rapporte 2 % d'intérêts par an et ces intérêts sont réinvestis chaque année (placement à intérêts composés).

Écrire un algorithme en langage naturel puis en langage calculatrice qui donne le nombre n d'années au bout duquel le capital a doublé.

Fonctions linéaires

14 ★ 10 min

(corrigés p. 152)

Représenter les fonctions linéaires suivantes dans un même repère.

$$f_1 : x \mapsto x.$$

$$f_2 : x \mapsto -x.$$

$$f_3 : x \mapsto 3x.$$

$$f_4 : x \mapsto 2x.$$

$$f_5 : x \mapsto -5x.$$

$$f_6 : x \mapsto -4x.$$

$$f_7 : x \mapsto \frac{1}{2}x.$$

$$f_8 : x \mapsto 0,3x.$$

15 ★ 15 min

(corrigés p. 153)

On considère les fonctions linéaires :

$$f_1 : x \mapsto x$$

$$f_2 : x \mapsto 1,5x$$

$$f_3 : x \mapsto 2x$$

$$f_4 : x \mapsto 0,8x$$

$$f_5 : x \mapsto 1,2x$$

$$f_6 : x \mapsto 0,5x$$

1° Représenter ces fonctions dans un même repère.

2° Associer chacune de ces fonctions linéaires à une augmentation ou à une baisse.

Évolutions successives

16 ★★ 10 min

(corrigés p. 153)

Une ville a sa population qui passe de 20 000 habitants à 24 000 habitants entre le 1^{er} janvier 2001 et le 1^{er} janvier 2006.

1° Quelle est l'augmentation en pourcentage de sa population entre ces deux dates ?

2° Entre le 1^{er} janvier 2006 et le 1^{er} janvier 2011, la population de cette ville baisse de 8 %.

Quel est le pourcentage d'évolution de cette population entre 1^{er} janvier 2001 et le 1^{er} janvier 2011 ?

17 ★★ 10 min

(corrigés p. 153)

Un objet valant 100 euros subit une hausse de 10 %, puis une baisse de 15 %.

Quel est son nouveau prix ?

18 ★★ 10 min

(corrigés p. 153)

Le taux d'intérêt annuel fixe d'une SICAV s'élève à t %.

On sait qu'en deux ans, la SICAV a augmenté de 4 %.

Quel est le taux d'intérêt annuel de la SICAV ?

19 ★★ 10 min

(corrigés p. 154)

Votre carte de fidélité est remplie : vous avez droit à 3 rabais successifs de 5 % sur un article. Vous achetez une veste à 35 €. La réduction offerte correspond-elle à un rabais de 15 % ?

20 ★★ 15 min

(corrigés p. 154)

M. Dupont a un revenu annuel de 16 800 €.

Le montant imposable des revenus s'obtient en appliquant deux déductions forfaitaires successives de 10 % puis 20 %.

1° Calculer le montant imposable de M. Dupont.

2° M. Durand déclare qu'il serait plus avantageux d'appliquer d'abord la déduction fiscale de 20 % puis celle de 10 %.

M. Michel prétend que c'est faux puisque dans les deux cas la déduction globale est de 30 %.

Qu'en pensez-vous ?

21 ★★ 15 min

(corrigés p. 154)

Le salaire mensuel moyen d'une catégorie de fonctionnaires est de 1 900 €.

Le gouvernement et les syndicats négocient une augmentation répartie en quatre étapes : au début de chacun des quatre prochains trimestres. Les syndicats aimeraient obtenir une augmentation de 0,5 % par étape, le gouvernement préconise une augmentation de 9,5 € par étape.

Deux millions de fonctionnaires sont concernés.

On remarquera que 9,5 € représentent 0,5 % du salaire moyen et, par conséquent, que la proposition gouvernementale est en fait une approximation de la proposition syndicale.

1° Quels seraient le salaire mensuel moyen et le salaire annuel moyen d'un fonctionnaire à la suite des quatre augmentations dans chacun des deux cas ?

2° Quel est le montant de la différence annuelle entre les deux propositions

a) pour le fonctionnaire ?

b) pour le gouvernement ?

3° Qu'en pensez-vous ?

22 ★★ 15 min

(corrigés p. 154)

Rappelons que le pouvoir d'achat d'une personne est le rapport entre son salaire mensuel et le prix d'un objet fictif de référence (prix obtenu à partir d'un certain nombre de produits de consommation et de services).

La situation suivante est fictive.

1° Au début de l'année 2010, le salaire d'Antoine est de 1 250 € et le prix de l'objet de référence de 25 €. Quel est son pouvoir d'achat ?

2° En cours d'année, son salaire augmente de 15 € et l'objet augmente de 1 €.

a) Quel est son nouveau pouvoir d'achat ?

b) Quel est le taux d'évolution de son pouvoir d'achat au cours de cette année ?

3° L'année suivante, son salaire augmente de 1,2 %, de même que le prix de l'objet. Quel est son nouveau pouvoir d'achat ?

23 ★★ 15 min

(corrigés p. 155)

Un magasin a l'habitude d'offrir une remise de x % à ses fidèles clients.

Pendant les soldes, il offre une réduction supplémentaire de y %. On sait que x est inférieur à y .

Sachant que la somme des réductions est de 10 % et qu'un fidèle client a payé 901,60 euros un article étiqueté 1 000 euros, calculer x et y .

Pourcentage d'évolution

24 ★★ 15 min

(corrigés p. 155)

1° Compléter le tableau suivant (statistiques fournies par l'INSEE en 2009).

Recette du tourisme international en millions de dollars			
	Année 1990	Année 2008	Évolution annuelle moyenne en %
États-Unis	43 007		5,4
Espagne	18 484		6,9
France	20 184		5,8
Italie	16 458		5,8
Chine	2 218		17,6

2° Dans quel pays les recettes du tourisme ont-elles augmenté le plus fortement :

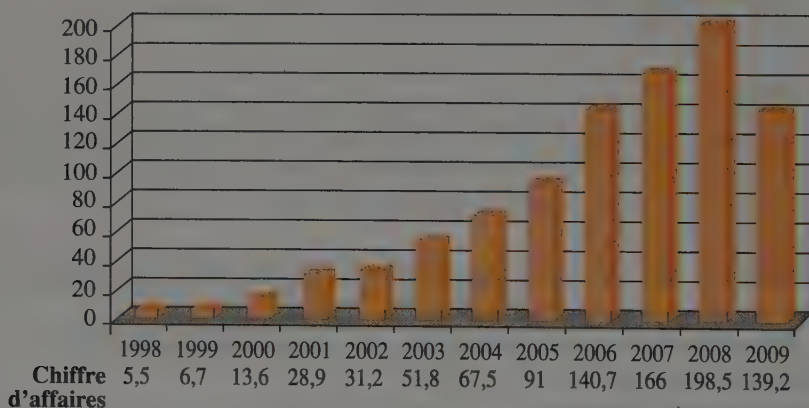
a) en pourcentages ?

b) en variation absolue ?

25 ★★ 20 min

(corrigés p. 156)

Le schéma ci-après donne l'évolution du chiffre d'affaires net d'une entreprise, exprimé en centaine de milliers d'euros.



1° Calculer le pourcentage d'évolution d'un exercice sur l'autre.

2° Quelles constatations peut-on faire ?

26 ★★ 20 min

(corrigés p. 157)

Le tableau suivant donne la diffusion de quelques titres (fictifs) de magazines appartenant au même groupe de presse.

1° Déterminer, en pourcentages, l'évolution du volume des ventes de chacun de ces titres.

2° Déterminer, en pourcentages :

a) l'importance de chacun de ces titres par rapport au groupe qu'ils constituent en 2008, puis en 2010 ;

b) l'évolution du volume de vente du groupe entre 2008 et 2010.

3° Déterminer alors, en pourcentages, l'évolution de la part de chacun dans le groupe.

4° Retrouver ces résultats à l'aide d'un tableur.

Diffusion totale	2008	2010
Teenmag	117 721	133 953
Primo	102 600	107 770
Info jeunes	84 100	93 620
2-Be	94 164	91 408
Séculaire	63 957	71 324
Noya	90 625	79 287
Sembella	53 201	47 395

Indices

27 ★ 10 min

(corrigés p. 158)

Un indice varie de 300 points à 315 points.

Quelle est la variation de cet indice en points ? En pourcentages ?

28 ★★ 15 min

(corrigés p. 158)

Le CAC 40 est un indice qui a été créé le 31 décembre 1987 avec une base de 1 000 points.

CAC signifie *Cotisation Assistée en Continu*.

1° Le 31 décembre de l'année 2000, le CAC 40 vaut 5 926 points.

Quel est le pourcentage d'augmentation entre les années 1987 et 2000 ?

2° Le tableau ci-dessous donne l'indice CAC 40 du 31 décembre de l'année 2000 à l'année 2010.

Indiquer les variations en pourcentages d'une année à la suivante.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Indice	5926	4624	3064	3558	3821	4715	5541	5614	3218	3936	3805

Les interrogations écrites

29 10 min

(corrigés p. 159)

Vrai ou faux ?

- 1° Une augmentation de 7 % est compensée par une diminution de 7 %.
- 2° Une augmentation de 30 % suivie d'une augmentation de 40 % équivaut à une augmentation de 70 %.
- 3° Une diminution de 45 % suivie d'une augmentation de 45 % permet de retrouver la quantité initiale.
- 4° Augmenter de 25 % puis diminuer de 7 % revient à diminuer de 7 % puis à augmenter de 25 %.
- 5° Une augmentation de 13 % suivie d'une diminution de 3 % équivaut à une augmentation de 10 %.

30 10 min

(corrigés p. 160)

La valeur d'une imprimante achetée 850 € se déprécie de 20 % par an. Quelle est sa valeur au bout de trois ans ?

31 10 min

(corrigés p. 160)

Les dépenses du service Communication d'une entreprise sont passées de 2 000 € en 2007 à 6 800 € en 2010.

- 1° Quel est le pourcentage d'augmentation ?
- 2° Quel est le pourcentage d'augmentation annuel moyen ?

32 15 min

(corrigés p. 160)

L'INSEE fournit des statistiques concernant l'activité des femmes en France dans le tableau ci-dessous.

Taux d'activité par âge des femmes en France en %		
	1975	2008
15-24 ans	50,1	31,9
25-49 ans	59,9	83,7
50-64 ans	42,9	54,9
Ensemble	53,3	65,5

- 1° Le taux d'activité des femmes entre 1975 et 2008 a-t-il augmenté ou diminué ?
- 2° Calculer le taux d'évolution du taux d'activité des femmes âgées de 15 à 24 ans entre les années 1975 et 2008. Que traduit son signe ?
- 3° Calculer le taux d'évolution du taux d'activité des femmes âgées de 25 à 49 ans entre les années 1975 et 2008. Que traduit son signe ?

CORRIGÉS

Vrai ou faux ?

1 **1°** Augmenter de 2 %, c'est multiplier par 1,2.

Faux. Augmenter de 2 %, c'est multiplier par 1,02.

Augmenter une grandeur de x %, c'est la multiplier par $1 + \frac{x}{100}$.

2° Diminuer de 10 %, c'est multiplier par 0,9.

Vrai. En effet :

$$1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,1 = 0,9.$$

Diminuer une grandeur de x %, c'est la multiplier par $1 - \frac{x}{100}$.

3° Doubler, c'est augmenter de 200 %.

Faux. Doubler, c'est augmenter de 100 %.

Une augmentation de 200 % correspond à une multiplication par 3.

4° Un produit dont le prix augmente de 10 % puis diminue de 10 % retrouve son prix initial.

Faux. On a :

$(1 + 0,1)(1 - 0,1) = 1,1 \times 0,9 = 0,99$
donc le prix du produit est alors multiplié par 0,99, donc diminué de 1 %.

Une baisse de t % ne compense pas une hausse de t % (car les pourcentages ne portent pas sur le même montant).

5° Subir deux hausses consécutives de 3 %, c'est subir une hausse de 6 %.

Faux. On a :

$(1 + 0,03)(1 + 0,03) = (1,03)^2 = 1,0609$
donc la hausse est supérieure à 6 %.

Elle est de 6,09 %.

6° Si x est un réel positif, alors $\frac{x}{1,5} < x$.

Vrai. En effet : $1,5 > 1$, donc : $\frac{1}{1,5} < 1$

et en multipliant les deux membres de l'inégalité par le nombre x qui est positif, il vient : $\frac{x}{1,5} < x$.

Diviser par un nombre strictement supérieur à 1, c'est multiplier par un nombre strictement compris entre 0 et 1.

7° La fonction $x \mapsto 0,8x$ est décroissante.

Faux. La fonction linéaire $x \mapsto 0,8x$ est croissante puisque son coefficient 0,8 est strictement positif.

8° Un objet dont le prix TTC est 100 € et qui subit une taxe de 5 % a un prix HT de 95 €.

Faux. On a :

$$95 \times 1,05 = 99,75$$

donc si le prix HT est 95 € et si la taxe est de 5 %, alors le prix TTC est de 99,75 €.

9° Un indice qui varie de 300 à 360 points subit une variation de 20 %.

Vrai. On a :

$$\frac{360 - 300}{300} = \frac{20}{100}.$$

10° Un taux d'évolution positif correspond à une augmentation.

Vrai. C'est un résultat du cours.

Le taux d'évolution est le quotient de la différence entre la valeur finale et la valeur initiale par la valeur initiale.

Notions de pourcentages

2 **1°** Le tableau complété est :

Sexe	Filles	Garçons	Total
Classe			
1 ^{re}	256	384	640
Autres classes	768	192	960
Total	1 024	576	1 600

- $\frac{2}{5} \times 1\,600 = 640$, donc 640 élèves sont en 1^{re}.
- $\frac{40}{100} \times 640 = 256$, donc 256 filles sont en 1^{re}.
- Soit f le nombre total de filles du lycée, f vérifie la relation : $\frac{25}{100} \times f = 256$. Donc $f = 1\,024$.

2° L'établissement comporte 576 garçons parmi ses 1 600 élèves.

$$\text{Or } \frac{576}{1\,600} = 0,36 = \frac{36}{100}.$$

Le pourcentage de garçons au sein de l'établissement est de 36 %.

3° a) Parmi les élèves de 1^{re}, 40 % sont des filles, donc **60 % sont des garçons** ($100 - 40 = 60$).

Parmi les 640 élèves de 1^{re}, 384 sont des garçons.

$$\text{Or : } \frac{384}{640} = 0,60,$$

donc 60 % des élèves de 1^{re} sont des garçons.

b) Parmi les 960 élèves des autres classes, 192 sont des garçons.

$$\text{Or } \frac{192}{960} = 0,20.$$

Donc les autres classes comptent 20 % de garçons.

4° Parmi les 576 garçons de l'établissement, 384 sont en 1^{re}.

$$\text{Or : } \frac{384}{576} \approx 0,67,$$

donc **environ 67 % des garçons sont en 1^{re}.**

3 Notons x la quantité (en tonnes) de minerai nécessaire.

Le minerai contenant 24 % de cuivre, on déduit le tableau de proportionnalité :

Cuivre en tonnes	24	6 000
Minerai en tonnes	100	x

$$\text{On a donc : } x = \frac{100 \times 6\,000}{24}$$

d'où : $x = 25\,000$.

Finalement, **pour obtenir 6 000 tonnes de cuivre, il faut 25 000 tonnes de minerai.**

4 Aire de la terre : 510 millions de km².
Aire des mers et océans : 362 millions de km².

1° En notant x le pourcentage de l'aire des mers et océans par rapport à l'aire totale du globe terrestre, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Aire des mers et océans en millions de km²	362	x
Aire totale du globe terrestre en millions de km²	510	100

$$\text{On a : } x = \frac{362 \times 100}{510},$$

$$\text{donc : } x = \frac{3\,620}{51},$$

d'où : $x \approx 70,98$.

Par conséquent, **l'aire des mers et océans représente environ 71 % de l'aire totale du globe terrestre.**

2° Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Aire de l'océan Pacifique en millions de km²	x	46
Aire des mers et océans en millions de km²	362	100

$$\text{On a : } x = \frac{362 \times 46}{100},$$

donc : $x = 166,52$.

Finalement, **l'aire de l'océan Pacifique est environ de 167 millions de km².**

5 1° Le prix de vente d'un article s'obtient en multipliant le prix d'achat par $1 + \frac{1}{3}$, soit par $\frac{4}{3}$.

Donc le prix d'achat s'obtient en multipliant le prix de vente par l'inverse

de $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire par $\frac{3}{4}$.

$\frac{4}{3} \approx 1,3333$; le prix de vente s'obtient en augmentant le prix d'achat.

$$\text{2° On a : } \frac{3}{4} = \frac{75}{100},$$

donc, d'après **1°**, le prix d'achat est égal à **75 % du prix de vente.**

$\frac{3}{4} = 1 - \frac{25}{100}$; le prix d'achat s'obtient en diminuant le prix de vente de 25 %.

6 TVA de 19,6 %.

1° Prix hors-taxé d'un article : 260 €.

En notant x la taxe en euros payée sur cet article, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Taxe (en euros)	19,6	x
Prix HT (en euros)	100	260

On a : $x = \frac{19,6 \times 260}{100}$,

donc : $x = \frac{5\,096}{100} = 50,96$,

de plus : $260 + 50,96 = 310,96$.

prix HT + taxes = prix TTC

On en déduit que le **prix TTC de l'article est 310,96 euros**.

Le prix TTC est le produit du prix HT par 1,196 :
 $260 \times 1,196 = 310,96$.

2° Prix TTC du vêtement : 400 €.

a) Notons x € le prix HT du vêtement.

On a : $x + 0,196x = 400$,

c'est-à-dire : $1,196x = 400$,

donc : $x = \frac{400}{1,196}$,

d'où : $x \approx 334,45$.

Par conséquent, le **prix hors taxe du vêtement est 334,45 €**.

b) On a : $400 - 334,45 = 63,55$.

Donc le **montant de la TVA sur ce vêtement s'élève à 63,55 €**.

7 Les prix sont exprimés en euros. Notons X le prix total (TVA comprise) et Y le prix hors taxes. Le montant en euros de la TVA est alors égal à $X - Y$.

On a : $X = \left(1 + \frac{19,6}{100}\right) \times Y = 1,196 \times Y$

d'où $Y = \frac{1}{1,196}X$.

De plus :

$X - Y = X - \frac{1}{1,196}X$

$= \left(1 - \frac{1}{1,196}\right) \times X$

$= \frac{0,196}{1,196} \times X$,

avec $\frac{0,196}{1,196} \approx 0,1639$ à 10^{-4} près.

Donc le montant de la TVA est égal à 19,6 % du prix hors taxes Y , mais seulement à environ 16,4 % du prix total X .

De plus : $\frac{0,196}{1,196} \times 700 \approx 114,72$.

Le montant de la TVA qui devrait figurer sur la facture est donc de 114,72 €.

La bonne facturation est :

Prix total des réparations	700,00 €
Dont TVA à 19,6 %	114,72 €

Remarque : $700 \times 0,196 \approx 137,20$, somme indiquée sur la facture. Or une augmentation de $t\%$ n'est jamais compensée par une diminution de $t\%$. On pouvait donc prévoir dès le départ que la facture serait erronée.

8 1 litre vaut 100 centilitres.

En notant x le nombre de centilitres d'eau ajoutée à la boisson contenant 15 % d'alcool pour obtenir un mélange avec 5 % d'alcool, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Quantité d'alcool (en cl)	15	5
Quantité de boisson (en cl)	$100 + x$	100

On a : $100 + x = \frac{15 \times 100}{5}$

donc : $x = 300 - 100 = 200$
 (200 cl = 2 l).

En conséquence, **il faut ajouter 2 litres d'eau pour obtenir une boisson avec 5 % d'alcool**.

9 1° Pour déterminer le pourcentage relatif à la taxe sur la valeur ajoutée, il suffit d'effectuer le calcul suivant :

$\frac{137\,427}{304\,294} \times 100 \approx 45,16$.

Donc la taxe sur la valeur ajoutée représente 45,16 % des recettes prévues. On procède de même pour les autres catégories de recette.

Regroupons les réponses dans un tableau :

Nature	Montant en millions d'euros	Pourcentages
Taxe sur la valeur ajoutée	137 427	45,16
Impôt sur le revenu	51 913	17,06
Impôts sur les sociétés	49 494	16,30
Autres impôts indirects	39 816	13,08
Taxe intérieure sur les produits pétroliers	25 544	8,39
Total	304 294	99,99

Ne pas trouver dans le tableau un total de 100 % s'explique par le fait que les pourcentages précédents sont arrondis.

2° • Entrer les données dans la plage de cellules A1:A5 et B1:B5.

• Sélectionner les plages de cellules A1:A5 et B1:B5.

• Cliquer sur l'assistant graphique.

• Sélectionner l'option **Secteur** dans **Type de graphique**, puis choisir un sous-type graphique.

• Cliquer sur **fin**.

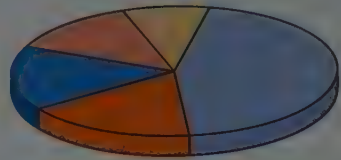
	A	B	
1	Taxe sur la valeur ajoutée	137 427	
2	Impôt sur le revenu	51 913	
3	Impôts sur les sociétés	49 594	
4	Autres impôts indirects	39 816	
5	Taxe intérieure sur les produits pétroliers	25 544	

	A	B	C	D	E	F	G
1	Taxe sur la valeur ajoutée	137 427	45,16%				
2	Impôt sur le revenu	51 913	17,06%				
3	Impôts sur les sociétés	49 594	16,30%				
4	Autres impôts indirects	39 816	13,08%				
5	Taxe intérieure sur les produits pétroliers	25 544	8,39%				
6		304 294	100,00%				
7							

Coefficient multiplicateur

10 **1°** Le coefficient multiplicateur est 1,05.

Avec le deuxième sous-type de graphique, on obtient :



- Taxe sur la valeur ajoutée
- Impôt sur le revenu
- Impôts sur les sociétés
- Autres impôts indirects
- Taxe intérieure sur les produits pétroliers

Notez qu'en déplaçant le pointeur de la souris sur les différents secteurs, une valeur approchée du pourcentage qui leur correspond s'affiche.

On peut aussi faire apparaître les pourcentages avec le tableur.

• Dans B6 faire apparaître la somme des valeurs de la colonne : sélectionner la plage de cellules B1 à B6, puis cliquer sur la touche Σ de la barre d'outils.

• Dans C1 indiquer la formule permettant de calculer la fréquence relative à la valeur contenue dans B1 :

$$=B1/B\$6.$$

• Ensuite tirer le curseur (petit carré noir, qui activé se transforme en une croix) vers le bas jusqu'à la case C6, afin de répéter la formule.

• Mettre en forme les résultats en sélectionnant la colonne C, puis en sélectionnant successivement **Format**, **Cellule**, **Nombre**, **Pourcentage**.

On obtient :

2° Le coefficient multiplicateur est 0,997.

3° Le coefficient multiplicateur est 2.

4° Le coefficient multiplicateur est 1.

5° $1,04 \times 1,03 = 1,0712$.

Le coefficient multiplicateur est **1,0712**.

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de t % est $1 + \frac{t}{100}$,

à une diminution de t % est $1 - \frac{t}{100}$.

11 a) $1,21 = 1 + 0,21 = 1 + \frac{21}{100}$,

le coefficient multiplicateur 1,21 correspond à **une augmentation de 21 %**.

b) $2,3 = 1 + 1,3 = 1 + \frac{130}{100}$,

le coefficient multiplicateur 2,3 correspond à **une augmentation de 130 %**.

c) $0,68 = 1 - 0,32 = 1 - \frac{32}{100}$,

le coefficient multiplicateur 0,68 correspond à **une diminution de 32 %**.

d) $0,996 = 1 - 0,004 = 1 - \frac{0,4}{100}$,

le coefficient multiplicateur 0,996 correspond à **une diminution de 0,4 %**.

12 D'une année à la suivante, la somme S sur le compte de Clara est multipliée par 1,03, donc au bout de n années la somme initiale est multipliée par $(1,03)^n$. (Voir tableaux ci-dessous.)

Langage naturel	TI	Casio
Variables n : entier S : réel		
Début algorithme		
Lire n	Input N	? $\rightarrow$ N
Lire S	Input S	? $\rightarrow$ S
$S \leftarrow 1,03^n \times S$	$1,03^n * S \rightarrow S$	$1,03^n * S \rightarrow S$
Écrire S	Disp S	S $\blacktriangle$
Fin algorithme		

On peut aussi écrire un algorithme avec la boucle **Pour**.

Langage naturel	TI	Casio
Variables n, k : entiers S : réel		
Début algorithme		
Lire n	Input N	? $\rightarrow$ N
Lire S	Input S	? $\rightarrow$ S
Pour k variant de 1 à n	For(K,1,N)	For 1 $\rightarrow$ K To N
$S \leftarrow 1,03 \times S$	$1,03 * S \rightarrow S$	$1,03 * S \rightarrow S$
Fin Pour	End	Next
Écrire S	Disp S	S $\blacktriangle$
Fin algorithme		

13 Notons S la somme en euros de Noémie que l'on initialise à 1 000. Notons n le nombre d'années que l'on initialise à 0.

D'une année sur l'autre, la somme est multipliée par 1,02 cela tant que la somme n'a pas atteint 2 000 euros.

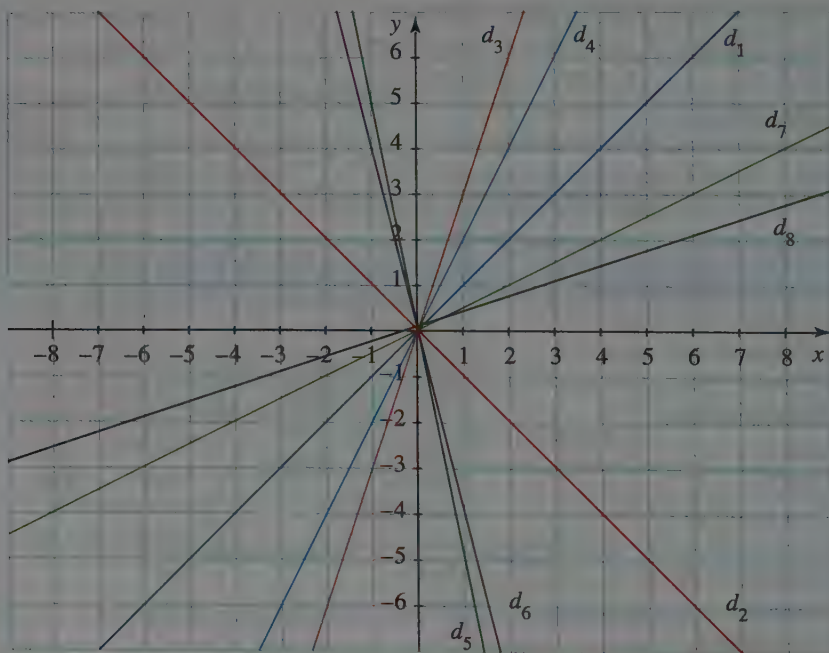
Langage naturel	TI	Casio
Variables n : entier S : réel Début algorithme $n \leftarrow 0$ $S \leftarrow 1\,000$ Tant que $S < 2\,000$ $S \leftarrow 1,02S$ $n \leftarrow n+1$ Fin Tant que Écrire n Fin algorithme	Input N Input S While $S < 2\,000$ $1,02 * S \rightarrow S$ $N+1 \rightarrow N$ End Disp S	$0 \rightarrow N$ $1\,000 \rightarrow S$ While $S < 2\,000$ $1,02 * S \rightarrow S$ $N+1 \rightarrow N$ WhileEnd N ◀

Fonctions linéaires

14 $f_1: x \mapsto x$ $f_2: x \mapsto -x$
 $f_3: x \mapsto 3x$ $f_4: x \mapsto 2x$
 $f_5: x \mapsto -5x$ $f_6: x \mapsto -4x$

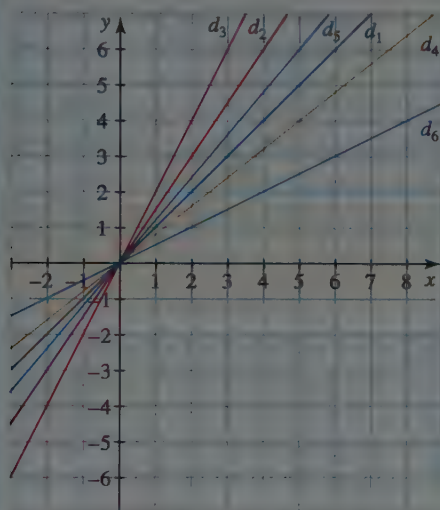
$$f_7: x \mapsto \frac{1}{2}x \quad f_8: x \mapsto 0,3x.$$

Les fonctions linéaires $f_1, f_2, \dots, f_8$ sont représentées respectivement par les droites $d_1, d_2, \dots, d_8$.



15 $f_1: x \mapsto x$ $f_2: x \mapsto 1,5x$
 $f_3: x \mapsto 2x$ $f_4: x \mapsto 0,8x$
 $f_5: x \mapsto 1,2x$ $f_6: x \mapsto 0,5x$

1° Les fonctions linéaires $f_1, f_2, \dots, f_6$ sont représentées respectivement par les droites $d_1, d_2, \dots, d_6$.



2° $f_1: x \mapsto x$ est associée à une augmentation de 0 % ou une baisse de 0 %.

$f_2: x \mapsto 1,5x$ est associée à une augmentation de 50 %.

(On a : $1,5 - 1 = 0,5$ et $0,5 \times 100 = 50$).

$f_3: x \mapsto 2x$ est associée à une augmentation de 100 %.

(On a : $2 - 1 = 1$ et $1 \times 100 = 100$).

$f_4: x \mapsto 0,8x$ est associée à une baisse de 20 %.

(On a : $0,8 - 1 = -0,2$ et $-0,2 \times 100 = -20$).

$f_5: x \mapsto 1,2x$ est associée à une augmentation de 20 %.

(On a : $1,2 - 1 = 0,2$ et $0,2 \times 100 = 20$).

$f_6: x \mapsto 0,5x$ est associée à une baisse de 50 %.

(On a : $0,5 - 1 = -0,5$ et $-0,5 \times 100 = -50$).

Évolutions successives

16 1° Le taux d'augmentation est égal à :

$$\frac{24\,000 - 20\,000}{20\,000},$$

c'est-à-dire à 0,2.

	Nombre d'habitants
1 ^{er} janvier 2001	20 000
1 ^{er} janvier 2006	24 000

On peut alors conclure que l'augmentation en pourcentages de la population entre 2001 et 2006 est de 20 %.

2° La population est multipliée par 0,92 entre 2006 et 2011 et

$$24\,000 \times 0,92 = 22\,080,$$

donc la population est de 22 080 habitants le 1^{er} janvier 2011.

$$\text{En outre : } \frac{22\,080 - 20\,000}{20\,000} = 0,104$$

$$\text{et } 0,104 \times 100 = 10,4$$

donc la population augmente entre 1^{er} janvier 2001 et le 1^{er} janvier 2011 de 10,4 %.

17 Un objet subit une hausse de 10 %, puis une baisse de 15 %.

Une hausse de 10 % est associée au coefficient multiplicateur 1,1.

Une baisse de 15 % est associée au coefficient multiplicateur 0,85.

$$\text{On a : } 100 \times 1,1 \times 0,85 = 100 \times 0,935 = 93,5$$

par conséquent, le nouveau prix de l'objet est 93,50 €.

Lors d'évolutions successives, le coefficient multiplicateur global est égal au produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

18 Le taux d'intérêt annuel fixe de la SICAV étant de t %, la valeur de la SICAV est multipliée chaque année par $1 + 0,01 t$. Donc en deux ans, sa valeur initiale a été multipliée par $(1 + 0,01 t)^2$.

De plus, comme la SICAV a augmenté en deux ans de 4 %, on peut affirmer que sa valeur initiale a été multipliée par 1,04.

$$\text{On en déduit : } (1 + 0,01 t)^2 = 1,04,$$

or :

$$(1 + 0,01t)^2 = 1,04$$

$$\Leftrightarrow 1 + 0,01t = \sqrt{1,04}$$

$$\Leftrightarrow 0,01t = \sqrt{1,04} - 1$$

$$\Leftrightarrow t = 100 \times (\sqrt{1,04} - 1)$$

donc :

$$t \approx 1,98 \text{ à } 0,1 \text{ près.}$$

Finalement, le taux d'intérêt annuel de la SICAV est d'environ 1,98 % par an.

19 Le prix payé prenant en compte les trois rabais de 5 % sera calculé comme suit :

$35 \times 0,95^3 = 30,008125$; donc le prix réclamé à la caisse sera de 30 €.

Un rabais de 5 % correspond à une multiplication par 0,95.

D'autre part :

$$35 \times 0,95 = 29,75,$$

donc, si on applique la baisse de 15 %, le prix réclamé à la caisse sera de 29,75 €. Finalement, la réduction offerte (trois rabais de 5 %) ne correspond pas à un rabais de 15 %.

La différence n'est ici que de quelques centimes.

En effet, pour x « proche » de 0 :

$$(1 + x)^3 \approx 1 + 3x.$$

20 **1°** Le montant annuel en euros affecté de la première déduction forfaitaire de 10 % est :

$$16\,800 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 16\,800 \times 0,9$$

$$= 15\,120.$$

Après la déduction de 20 %, le montant imposable en euros sera égal à :

$$15\,120 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 15\,120 \times 0,8$$

$$= 12\,096.$$

2° Soit R le revenu annuel en euros et M le montant imposable de M. Dupont.

$$\text{On a : } M = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \left[\left(1 - \frac{10}{100}\right) \times R\right]$$

$$= 0,8 \times 0,9R = 0,72R.$$

Si on établit à présent le montant imposable M' selon les règles de M. Durand, on obtient :

$$M' = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \left[\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times R\right] \\ = 0,9 \times 0,8R = 0,72R.$$

Par conséquent, appliquer une déduction de 20 % suivie d'une déduction de 10 % revient à appliquer une déduction de 10 % suivie d'une déduction de 20 %, ce qui donne tort à M. Durand et en partie raison à M. Michel.

Cependant, $0,72 = 1 - \frac{28}{100}$, donc la déduction globale est de 28 % et non de 30 % comme l'affirmait M. Michel.

Une variation de t % suivie d'une variation de t' % n'est pas équivalente à une variation de $(t + t')$ %.

21 **1°** $1\,900 + 4 \times 9,5 = 1\,938$; donc avec la proposition gouvernementale, le salaire mensuel moyen, après les quatre augmentations, sera de 1 938 €.

Le salaire annuel moyen sera alors égal à : $12 \times 1\,938$ €, soit 23 256 €.

$$\bullet 1\,900 \times 1,005^4 = 1\,938,28595119 :$$

donc avec la proposition syndicale, le salaire mensuel moyen après les quatre augmentations, sera de 1 938,29 €.

Le salaire annuel moyen sera alors égal à : $12 \times 1\,938,29$ €, soit 23 259,48 €.

2° a) La différence annuelle pour le fonctionnaire sera de 3,48 €.

$$\text{b) } 3,48 \times 2\,000\,000 = 6\,960\,000.$$

Pour l'État cette différence sera de 6,96 millions d'euros.

3° La proposition gouvernementale approximant la proposition syndicale permet à l'État de réduire ses dépenses de presque 7 millions d'euros, ce qui n'est évidemment pas négligeable dans la négociation.

22 **1°** Le pouvoir d'achat d'Antoine est : $\frac{1\,250}{25} = 50.$

Antoine pourrait acheter 50 fois l'objet de référence avec son salaire mensuel.

2° a) Son nouveau salaire mensuel est (1 250 + 15) €, c'est-à-dire 1 265 €.

Le nouveau prix de référence est :
(25 + 1) €,

soit 26 €.

Le nouveau pouvoir d'achat est égal à $\frac{1\,265}{26}$ donc environ à 48,65.

Antoine ne pourrait plus acheter que 48 fois l'objet de référence avec son nouveau salaire mensuel.

$$b) \frac{48,65 - 50}{50} \approx -0,027.$$

Donc son pouvoir d'achat a baissé de 2,7 %.

3° Son nouveau salaire mensuel est :
 $1,012 \times 1\,265$ €.

Le nouveau prix de référence est :
 $1,012 \times 26$ €.

Le nouveau pouvoir d'achat est donc :
 $\frac{1\,265 \times 1,012}{26 \times 1,012} = \frac{1\,265}{26},$

donc environ 48,65.

L'année suivante, le pouvoir d'achat d'Antoine n'a pas changé.

23 On sait, par hypothèse, que :

$$x + y = 10 \text{ et}$$

$$1\,000 \left(\frac{100 - x}{100} \right) \left(\frac{100 - y}{100} \right) = 901,60;$$

cela équivaut à :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ (100 - x)(100 - y) = 9\,016, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 10\,000 - 100x - 100y + xy = 9\,016, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 100x + 100y - xy = 984, \end{cases}$$

ou encore à :

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ 100x + 100(10 - x) - x(10 - x) = 984, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ 100x + 1\,000 - 100x - 10x + x^2 = 984, \end{cases}$$

et finalement :

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ x^2 - 10x + 16 = 0. \end{cases}$$

Réolvons l'équation (E) du second degré : $x^2 - 10x + 16 = 0$.

Le discriminant Δ de (E) vérifie :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 16 = 100 - 64 = 36 = 6^2.$$

Les solutions de (E) sont donc :

$$\frac{10 - 6}{2} \text{ et } \frac{10 + 6}{2}$$

c'est-à-dire : 2 et 8.

2 est solution évidente de l'équation du second degré $x^2 - 10x + 16 = 0$; le produit des solutions étant égal à 16, l'autre est 8.

Si $x = 2$, alors $10 - x = 8$;

si $x = 8$, alors $10 - x = 2$.

De plus, comme on sait que x est inférieur à y , il vient : $x = 2$ et $y = 8$.

La remise usuelle aux fidèles clients est de 2 % et la remise exceptionnelle durant les soldes est de 8 %.

Pourcentage d'évolution

24 1° Notons a la recette, en millions de dollars, du tourisme international aux États-Unis pour l'année 2008.

Dire que l'évolution moyenne en % est de 5,4 signifie que l'on peut considérer que d'une année sur l'autre, la recette est multipliée par 1,054.

Puisque l'on a :

$$2008 - 1990 = 18,$$

il vient :

$$a = 43\,007 \times (1,054)^{18} \approx 110\,833.$$

De même, en notant b , c , d , e la recette en millions de dollars pour l'année 2008 respectivement en Espagne, en France, en Italie et en Chine :

$$b = 18\,484 \times (1,069)^{18} \approx 60\,434$$

$$c = 20\,184 \times (1,058)^{18} \approx 55\,686$$

$$d = 16\,458 \times (1,058)^{18} \approx 45\,407$$

$$e = 2\,218 \times (1,176)^{18} \approx 41\,048.$$

On peut ainsi compléter le tableau proposé.

	Année 2008
États-Unis	110 833
Espagne	60 434
France	55 686
Italie	45 407
Chine	41 048

2° a) C'est la Chine qui, en moyenne, a connu la plus forte augmentation du tourisme entre les années 1990 et 2008 avec une augmentation moyenne annuelle de 17,6 % mais en 2008 ce pays a toujours les moins grandes recettes touristiques parmi les pays considérés.

b) Ce sont les États-Unis qui ont connu la plus forte augmentation du tourisme entre les années 1990 et 2008 avec une augmentation brute de 67 826 millions de dollars.

$$110\,833 - 43\,007 = 67\,826$$

$$60\,434 - 18\,484 = 41\,950$$

$$55\,686 - 20\,184 = 35\,502$$

$$45\,407 - 16\,458 = 28\,949$$

$$41\,048 - 2\,218 = 38\,830.$$

25 1° En notant X_n le montant du chiffre d'affaires de l'année n et X_{n+1} celui de l'année $n + 1$, le pourcentage d'évolution entre ces deux années est :

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} \times 100.$$

Par exemple, entre l'année 2003 et l'année 2004, on a :

$$\frac{67,5 - 51,8}{51,8} \times 100 \approx 30,3.$$

On peut aussi procéder ainsi :

$$\frac{67,5}{51,8} \approx 1,303 = 1 + \frac{30,3}{100}.$$

Donc le chiffre d'affaires a progressé de 30,3 % entre 2003 et 2004.

Le tableau suivant regroupe les résultats trouvés :

Exercice	Chiffre d'affaires	Évolution en pourcentage
1998	5,5	➤ + 21,8 %
1999	6,7	➤ +102,3 %
2000	13,6	➤ +112,5 %
2001	28,9	➤ +8,1 %
2002	31,2	➤ +66,0 %
2003	51,8	➤ +30,3 %
2004	67,5	➤ +34,8 %
2005	91	➤ +54,6 %
2006	140,7	➤ +18,0 %
2007	166	➤ +19,6 %
2008	198,5	➤ -29,9 %
2009	139,2	

On peut retrouver les résultats à l'aide d'un tableur.

- Entrer les données dans les plages de cellules A1:A13 et B1:B13.

- Dans la cellule C3, introduire la formule donnant l'évolution du chiffre d'affaires entre les deux premières années :

$$=(B3-B2)/B2.$$

- Tirer ensuite le curseur vers le bas jusqu'à C13 pour réitérer la formule.

- Mettre en forme la colonne C pour avoir les résultats en pourcentage : **Format, Cellule, Nombre, Pourcentage**, éventuellement régler le nombre de décimales de l'affichage.

	A	B	C
	Exercice	Chiffre d'affaires	Evolution en pourcentage
1			
2	1998	5,5	
3	1999	6,7	21,8%
4	2000	13,6	103,0%
5	2001	28,9	112,5%
6	2002	31,2	8,0%
7	2003	51,8	66,0%
8	2004	67,5	30,3%
9	2005	91,0	34,8%
10	2006	140,7	54,6%
11	2007	166,0	18,0%
12	2008	198,5	9,6%
13	2009	139,2	-29,9%

2° On peut dire que l'entreprise s'est rapidement développée (doublement du chiffre d'affaires en 2000 et 2001, puis environ tous les deux ans jusqu'en 2009). On peut aussi noter un net repli lors du dernier exercice, qui le ramène au niveau de l'activité en 2006.

26 1° Pour déterminer, en pourcentage, l'évolution de Teenmag, il suffit de trouver le coefficient multiplicateur permettant d'obtenir la valeur en 2010 à partir de la valeur en 2008 :

$$\frac{133\,953}{117\,721} = 1,1379.$$

Donc Teenmag a progressé d'environ 13,79 % en deux ans.

L'avant-dernière colonne du tableau ci-dessous récapitule les résultats.

Le total de ces pourcentages doit en théorie valoir 100. Il est ici arrondi à 10^{-1} près.

2° a) Le volume de vente en 2008 est de 606 368 et : $\frac{117\,721}{606\,368} \times 100 = 19,4$.

Donc Teenmag représente environ 19,4 % du groupe.

Les colonnes « % » du tableau ci-dessous récapitulent les résultats pour 2008 et 2010.

b) $\frac{624\,757}{606\,368} = 1,030$ à 10^{-3} près ;

le volume de ventes du groupe a donc progressé d'environ 3 % entre 2008 et 2010.

3° L'évolution, en pourcentages, de la part de Teenmag dans le groupe se détermine comme suit :

$$\frac{21,44}{19,41} \approx 1,1046,$$

ce qui indique une augmentation d'environ 10,46 %.

Finalement, le volume de vente de cette revue a augmenté de 13,79 % et sa part dans le groupe de 10,46 %.

Ces résultats apparaissent dans la dernière colonne du tableau.

Diffusion totale	2008	%	2010	%	Évolution en %	
					Volume	Part
Teenmag	117 721	19,41	133 953	21,44	+13,79	+10,46
Primo	102 600	16,92	107 770	17,25	+5,04	+1,95
Info jeunes	84 100	13,87	93 620	14,99	+11,32	+8,07
2 – Be	94 164	15,53	91 408	14,63	–2,93	–5,80
Séclaire	63 957	10,55	71 324	11,42	+11,52	+8,25
Noya	90 625	14,95	79 287	12,69	–12,51	–15,12
Sembella	53 201	8,77	47 395	7,59	–10,91	–13,45
Total	606 368	100,00	624 757	100,01	+3,03	

4° • Introduire les données dans les plages A1:A8 et B1:B8 et D1:D8.

• En B9 : **=SOMME(B2:B8)**

et en D9 : **=SOMME(D2:D8)**.

• Les colonnes C, E, F et G devant donner des résultats en pourcentages, mettre en forme le format de ces colonnes.

Format, Cellule, Nombre, Pourcentage (et 2 chiffres après la virgule).

• La colonne C donne la part du volume de vente de chaque revue dans le groupe ; dans la cellule C2, entrer la formule : $=B2/B\$9$, puis tirer le curseur vers le bas jusqu'à la cellule C9, les cellules C3, ..., C9 contiennent les formules :

$$=B3/B\$9, \dots, =B9/B\$9$$

• Procéder de manière analogue pour remplir les plages de cellules E2:E9, F2:F9 et G2:G8, en entrant respectivement dans les cellules E2, F2 et G2 les formules :

$$=D2/D\$9, =(D2/B2)-1, =(E2/C2)-1.$$

On aurait pu également entrer les formules de la manière suivante.

• En C2 : $=B2/SOMME(B\$2:B\$8)$

Référence relative **Référence absolue**
Les cellules C3 à C9 contiennent respectivement les formules :

$$=B3/SOMME(B\$2:B\$8), \dots,$$

⋮

$$=B9/SOMME(B\$2:B\$8)$$

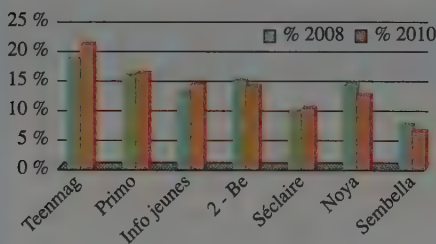
• En E2 : $=D2/SOMME(D\$2:D\$8)$.

On remarquera que les résultats de cette dernière colonne sont légèrement différents de ceux trouvés précédemment : l'ordinateur effectue les calculs avec les valeurs des colonnes B et D et non avec les valeurs approchées des colonnes C et E.

Finalement, on obtient :

	A	E	F	G	H	I	J
1	Diffusion totale	2003	%	2010	%	Evolution en % du volume	Evolution en % de la part
2	Tenmag	117 721	19,41%	133 953	21,44%	13,79%	10,44%
3	Primo	102 600	16,92%	107 770	17,25%	5,04%	1,95%
4	Info jeunes	84 100	13,87%	93 620	14,99%	11,32%	8,04%
5	2-Be	94 164	15,53%	91 408	14,63%	-2,93%	-5,78%
6	Séclaire	63 957	10,55%	71 324	11,42%	11,52%	8,24%
7	Noya	90 625	14,95%	79 287	12,69%	-12,51%	-15,09%
8	Sembella	53 201	8,77%	47 395	7,59%	-10,91%	-13,54%
9	Total	606 368	100,00%	624 757	100,00%	3,03%	

Le schéma suivant donne, pour chacune des revues, l'évolution de leur part de volume de ventes, en pourcentage, dans le groupe :



Indices

27 On a : $315 - 300 = 15$, donc l'indice augmente de 15 points.

Le taux de variation de l'indice est :

$$\frac{315 - 300}{300} = 0,05 = \frac{5}{100}.$$

L'indice a progressé de 5 %.

28 CAC 40 : 1 000 points en 1987.

1° Lors de l'année 2000, le CAC 40 vaut 5 926 points.

On a : $5\,926 - 1\,000 = 4\,926$,

donc l'augmentation entre les années 1987 et 2000 est de 4 926 points.

Par conséquent, le taux d'augmentation entre les années 1987 et 2000 est de 4,926

$$\left(\frac{4\,926}{1\,000} = 4,926 \right)$$

et le pourcentage d'augmentation entre les années 1987 et 2000 est 492,6 %

$$(4,926 \times 100 = 492,6).$$

2° Obtenir le taux de variation de l'année 2000 à l'année 2001, c'est diviser la différence entre l'indice de l'année 2001 et celui de l'année 2000 par l'indice de l'année 2000.

Il reste alors à multiplier par 100 pour avoir le taux en pourcentages.

On a : $\frac{4\,624 - 5\,926}{5\,926} \approx -21,97$

donc le taux de variation de l'indice CAC 40 entre les années 2000 et 2001 est de -21,97 %.

Année	Indice
2000	5 926
2001	4 624
2002	3 064
2003	3 558
2004	3 821
2005	4 715
2006	5 541
2007	5 614
2008	3 218
2009	936
2010	3 805

Taux de variation en % :

$$\frac{\text{indice final} - \text{indice initial}}{\text{indice initial}} \times 100.$$

En faisant de même, on remplit le tableau ci-dessous.

Années	Taux de variation en %
2000-2001	-21,97 %
2001-2002	-33,74 %
2002-2003	+16,12 %
2003-2004	-7,39 %
2004-2005	+23,40 %
2005-2006	+17,52 %
2006-2007	+1,32 %
2007-2008	-42,68 %
2008-2009	+22,31 %
2009-2010	-3,33 %

Les interrogations écrites

29 1° Faux !

La quantité est multipliée par :
 $1,07 \times 0,93 = 0,9951 = 1 - 0,0049$.

La quantité est finalement diminuée de 0,49 %.

Le coefficient multiplicateur associé à deux variations successives est le produit des deux coefficients multiplicateurs.

2° Faux !

La quantité est multipliée par :
 $1,30 \times 1,40 = 1,82$.

Ce coefficient correspond à une augmentation de 82 %.

3° Faux !

La quantité est multipliée par :
 $0,55 \times 1,45 = 0,7975 = 1 - 0,2025$.

Ce coefficient correspond à une diminution de 20,25 %.

De façon générale, une augmentation de t % n'est pas compensée par une diminution de t %, le coefficient multiplicateur étant égal à :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1 - \frac{t^2}{10\,000}$$

qui est différent de 1.

4° Vrai !

La quantité est multipliée par :
 $1,25 \times 0,93$ dans le premier cas,
 $0,93 \times 1,25$ dans le second cas,
 et :

$$1,25 \times 0,93 = 1,1625$$

$$0,93 \times 1,25 = 1,1625.$$

Dans les deux cas, la quantité est multipliée par 1,1625, c'est-à-dire augmentée de 16,25 %.

5° Faux !

La quantité est multipliée par :
 $1,13 \times 0,97 = 1,0961$.

Ce coefficient correspond à une augmentation de 9,61 %.

De manière générale, une augmentation de t % suivie d'une autre de t' % n'est pas équivalente à une augmentation de $(t + t')$ %, le coefficient multiplicateur étant égal à :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{t'}{100}\right) = \left(1 + \frac{t+t'}{100} + \frac{tt'}{100\,000}\right)$$

qui est supérieur à $1 + \frac{t+t'}{100}$.

30 Prix initial d'une imprimante : 850 € et baisse de 20 % par an.

Le coefficient multiplicatif associé à une baisse de 20 % est 0,8 donc le coefficient multiplicatif associé à trois baisses successives de 20 % est $(0,8)^3$.

On a : $850 \times (0,8)^3 = 850 \times 0,512 = 435,2$.

Au bout de trois ans, l'imprimante vaut 435,20 €.

31 Dépenses de 2 000 € en 2007 et de 6 800 € en 2010.

1° On a :

$$\bullet \frac{6\,800 - 2\,000}{2\,000} = 2,4$$

donc le taux d'augmentation est de 2,4.

$$\bullet 2,4 \times 100 = 240,$$

donc l'augmentation est de 240 %.

2° En notant t % le pourcentage d'augmentation annuel moyen, le coefficient multiplicateur associé à trois augmentations successives de t % est égal à

$(1 + 0,01t)^3$ et vérifie :

$$(1 + 0,01t)^3 = 2,4$$

$$\sqrt[3]{2,4} \approx 1,34 \text{ à } 0,01 \text{ près}$$

donc : $1 + 0,01t \approx 1,34$ à 0,01 près

d'où : $t \approx 34$.

Par conséquent, le taux d'évolution annuel moyen est 34 %.

La racine cubique d'un nombre x est le nombre (que l'on note $\sqrt[3]{x}$) dont le cube est x .

32 1° Le taux d'activité des femmes a augmenté entre 1975 et 2008 puisqu'il est passé de 53,3 % à 65,5 %.

2° On a : $\frac{31,9 - 50,1}{50,1} \approx -0,36$ à 0,01 près.

Le taux d'évolution du taux d'activité des femmes âgées de 15 à 24 ans entre les années 1975 et 2008 est de l'ordre de -36 %. Il est négatif, ce qui traduit une baisse d'activité chez les femmes de la tranche d'âge 15-24 ans entre 1975 et 2008.

3° On a : $\frac{83,7 - 53,9}{53,9} \approx 0,55$ à 0,01 près.

Le taux d'évolution du taux d'activité des femmes âgées de 25 à 49 ans entre les années 1975 et 2008 est de l'ordre de 55 %. Il est positif, ce qui traduit une hausse d'activité chez les femmes de la tranche d'âge 25-49 ans entre 1975 et 2008.

Mode de génération d'une suite

LE COURS

Vocabulaire

Définition

Une suite définie sur $\mathbb{N}$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Notations

Une suite peut se noter comme une fonction.

Par exemple, on dit :

la suite $u : n \mapsto -\sqrt{n} + 2$ est définie sur $\mathbb{N}$.

- L'image d'un entier naturel n par la suite u , appelée aussi **terme d'indice n** ou **terme de rang n** , est notée u_n .
- La suite u se note aussi (u_n) , $(u_n)_{n \geq 0}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Propriétés

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Suite majorée, minorée, bornée

- Dire que u est **majorée** signifie qu'il existe un réel M tel que :
pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$.
- Dire que u est **minorée** signifie qu'il existe un réel m tel que :
pour tout entier naturel n , $m \leq u_n$.
- Dire que u est **bornée** signifie que u est à la fois majorée et minorée.

Sens de variation

- Dire que u est **croissante** signifie :
pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.
- Dire que u est **décroissante** signifie :
pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$.
- Dire que u est **monotone** signifie que u est croissante ou que u est décroissante.

Représentation graphique

Suite définie par une formule du type $u_n = f(n)$

Considérons, par exemple, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

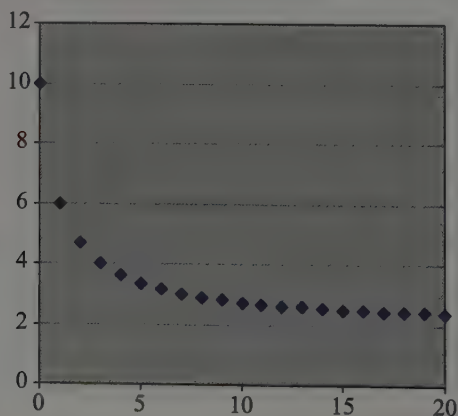
$$u_n = \frac{2n + 10}{n + 1}.$$

f est ici la fonction : $x \mapsto \frac{2x + 10}{x + 1}$.

Utilisation d'un tableur

	B2	=(2*A2+10)/(A2+1)		
	A	B	C	D
1	n	u _n		
2	0	10		
3	1	6		
4	2	4,66666667		
5	3	4		
6	4	3,6		
7	5	3,33333333		
8	6	3,14285714		
9	7	3		
10	8	2,88888889		
11	9	2,8		
12	10	2,72727273		
13	11	2,66666667		
14	12	2,61538462		
15	13	2,57142857		
16	14	2,53333333		
17	15	2,5		
18	16	2,47058824		
19	17	2,44444444		
20	18	2,42105263		
21	19	2,4		
22	20	2,38095238		

En sélectionnant la plage de cellules **A2:B22**, on obtient avec l'assistant graphique (option **Nuage de points**) :



Ce nuage de points représente les termes $u_0, u_1, \dots, u_{20}$ de la suite (u_n) . Il est constitué des points de coordonnées $(0, u_0), (1, u_1), \dots, (20, u_{20})$.

Suite définie par son premier terme u_0 et une formule du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Considérons, par exemple, la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

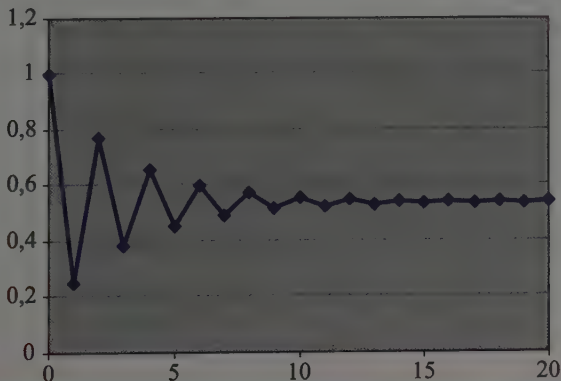
$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - 2)^2.$$

f est ici la fonction : $x \mapsto \frac{1}{4}(x - 2)^2$.

● Utilisation d'un tableur

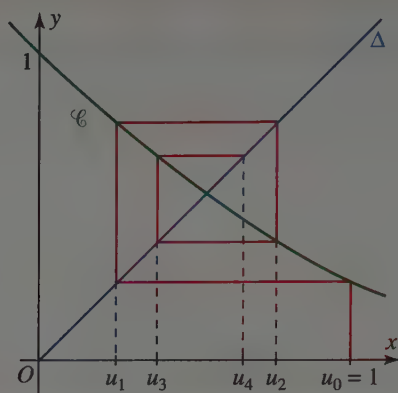
	A	B	C	D
1	n	u_n		
2	0	1		
3	1	0,25		
4	2	0,765625		
5	3	0,38092041		
6	4	0,65535468		
7	5	0,45201776		
8	6	0,59906225		
9	7	0,49065664		
10	8	0,56952934		
11	9	0,51156157		
12	10	0,55386224		
13	11	0,52282861		
14	12	0,54550883		
15	13	0,52888614		
16	14	0,541044		
17	15	0,53213815		
18	16	0,5386546		
19	17	0,5338826		
20	18	0,53737506		
21	19	0,53481793		
22	20	0,53668963		

En sélectionnant la plage de cellules **A2:B22**, on obtient avec l'assistant graphique (option **Nuage de points reliés par une courbe**) :



● Utilisation de la courbe représentative de f

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite d'équation $y = x$.



On a construit la ligne polygonale (en rouge sur le graphique) dont les sommets successifs ont pour coordonnées :

$$\begin{aligned} & (u_0, 0), \\ & (u_0, u_1), (u_1, u_1), \quad u_1 = f(u_0) \\ & (u_1, u_2), (u_2, u_2), \quad u_2 = f(u_1) \\ & (u_2, u_3), (u_3, u_3), \quad u_3 = f(u_2) \\ & (u_3, u_4) \text{ et } (u_4, u_4). \quad u_4 = f(u_3) \end{aligned}$$

Les termes $u_0, u_1, \dots, u_4$ sont représentés sur l'axe des abscisses.

EXERCICES

Dans tous les exercices, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Vrai ou faux ?

1

(corrigés p. 174)

1° Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

a) Le centième terme de la suite (u_n) est u_{100} .

b) Si, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est inférieur ou égal à n , alors (u_n) est majorée.

c) Si la suite (u_n) est croissante, alors $u_2 \leq u_{10}$.

2° Soit u la suite : $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) La suite u est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) La suite u est décroissante.

c) La suite u est bornée.

3° Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ dont les termes successifs sont 1, 2, 3, 1, 2, 3, etc.

a) $u_{100} = 3$.

b) La somme des termes de la suite (u_n) de u_0 à u_{20} est égale à 42.

c) Le produit des termes de la suite (u_n) de u_0 à u_{21} est égal à 6^7 .

4° Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{2n} = \frac{1}{4^n}$.

b) La suite (u_n) est bornée.

c) La suite (u_n) est décroissante.

5° Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2n - 3$.

a) La suite (u_n) est croissante.

b) La suite (u_n) est minorée.

c) Pour tout entier naturel n , $u_{2n+1} = 4n - 1$.

6° Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

a) La suite (u_n) est croissante.

b) $u_5 = -29$.

c) Pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 4u_n - 9$.

Calculs de termes

2 ★ 5 min

(corrigés p. 176)

Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 dans chacun des cas suivants.

1° (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 5 \times 10^n + 2$.

2° (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$.

3° (u_n) est la somme des inverses des n premiers entiers naturels non nuls.

3 ★ 5 min

(corrigés p. 177)

Calculer u_5 lorsque la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + (u_n)^2}}.$$

4 ★ 5 min

(corrigés p. 177)

1° Soit la suite $u : n \mapsto 3n - 7$.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

2° Soit la suite $v : n \mapsto 5^n$.

Exprimer v_{n+1} , puis v_{2n} en fonction de v_n .

5 ★ 5 min

(corrigés p. 177)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{3}{(u_n)^2}.$$

Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n .

6 ★ 5 min

(corrigés p. 177)

Trouver le plus petit indice à partir duquel la suite (u_n) est définie.

1° $u_n = \frac{1}{n^2}.$

2° $u_n = \frac{1}{n - \sqrt{2}}.$

3° $u_n = \sqrt{2n - 15}.$

4° $u_n = \frac{1}{3^n - 1}.$

5° $u_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}.$

7 ★★ 15 min

(corrigés p. 178)

1° Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2.$$

Écrire un algorithme de calcul de u_n , l'entier naturel n étant le paramètre d'entrée. Utiliser la calculatrice pour donner la valeur de u_{15} .

2° Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 + 3^n.$$

Pour tout entier naturel n , exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?

8 ★★ 5 min

(corrigés p. 178)

On considère l'algorithme suivant, qui prend en entrée n et donne en sortie u_n , la suite (u_n) étant définie sur $\mathbb{N}$.

Variables

n, k : entiers

u : réel

Entrée

Saisir n

Initialisation

u prend la valeur -1

Traitement

Pour k variant de 1 à n , faire

u prend la valeur $\frac{u^2}{2} - u$

fin Pour

Sortie

Afficher u

1° Que vaut u_0 ?

Par quelle formule de récurrence la suite (u_n) est-elle construite ?

2°

	A	B
1	n	u_n
2	0	-1
3	1	1,5
4	2	-0,375
5	3	0,4453125
6	4	-0,34616089
7	5	0,40607457
8	6	-0,32362629
9	7	0,37599328
10	8	-0,30530781
11	9	0,35191423
12	10	-0,28999242

Après avoir saisi une formule dans la cellule **B3** de la feuille de calcul ci-dessus, la poignée de recopie rapide a été tirée vers le bas.

Quelle formule a été saisie en **B3** ?

9 ★★ 5 min

(corrigés p. 178)

On considère l'algorithme suivant, qui prend en entrée n et donne en sortie u_n , la suite (u_n) étant définie sur $\mathbb{N}^*$.

Variables n, k : entiers u : réel**Entrée**Saisir n **Initialisation** u prend la valeur 0**Traitement**Pour k variant de 1 à n , faire u prend la valeur $u + n^3$

fin Pour

SortieAfficher u

Comment peut-on définir d'une phrase le nombre u_n ?

10 ★★ 15 min

(corrigés p. 178)

Programmer sur la calculatrice le calcul de u_n , l'entier naturel n non nul étant entré par l'utilisateur, dans chacun des cas suivants.

1° u_n est la somme des entiers de 1 à n .

2° u_n est le produit des entiers de 1 à n .

11 ★★★ 15 min

(corrigés p. 179)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

1° Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 .

2° Écrire un algorithme qui prend en entrée un entier naturel n non nul et donne en sortie les termes de u_2 à u_n de la suite (u_n) .

3° a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

b) Démontrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

c) En déduire une expression explicite de u_n en fonction de l'entier naturel n non nul.

Représentation graphique

12 ★ 5 min

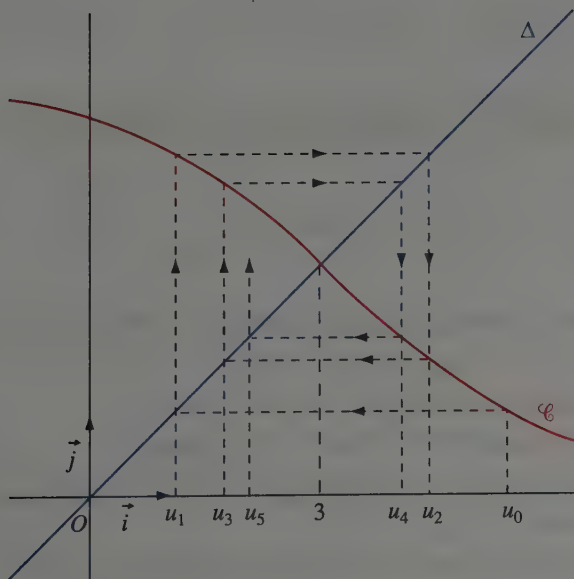
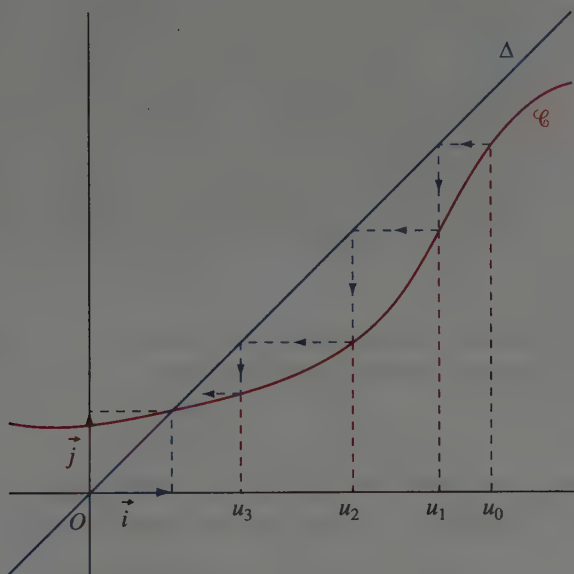
(corrigés p. 180)

Dans chacun des deux cas suivants, on donne la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f ; Δ est la droite d'équation $y = x$.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Quelles conjectures peut-on formuler sur le sens de variation, les bornes éventuelles de (u_n) ?

De quel nombre semble se rapprocher u_n quand n devient grand ?



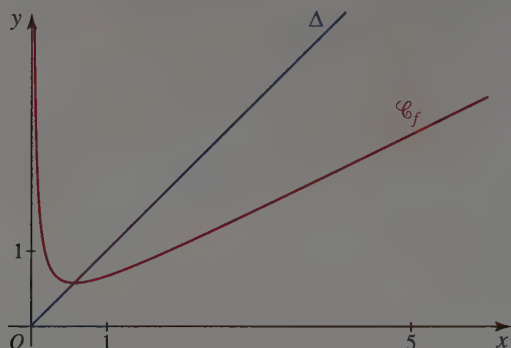
On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$, la première par :

$$u_0 = 5 \text{ et la relation de récurrence } u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{6u_n},$$

la seconde par :

$$v_0 = 2 \text{ et la relation de récurrence } v_{n+1} = \sqrt{(v_n)^2 + 1} - v_n.$$

1°



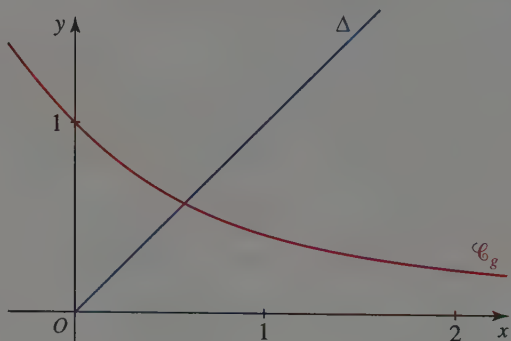
Sur le graphique ci-dessus figurent la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{6x}.$$

En utilisant $\mathcal{C}_f$ et Δ , représenter sur l'axe des abscisses u_1, u_2, u_3 .

De quel nombre se rapproche u_n quand n devient grand ?

2°



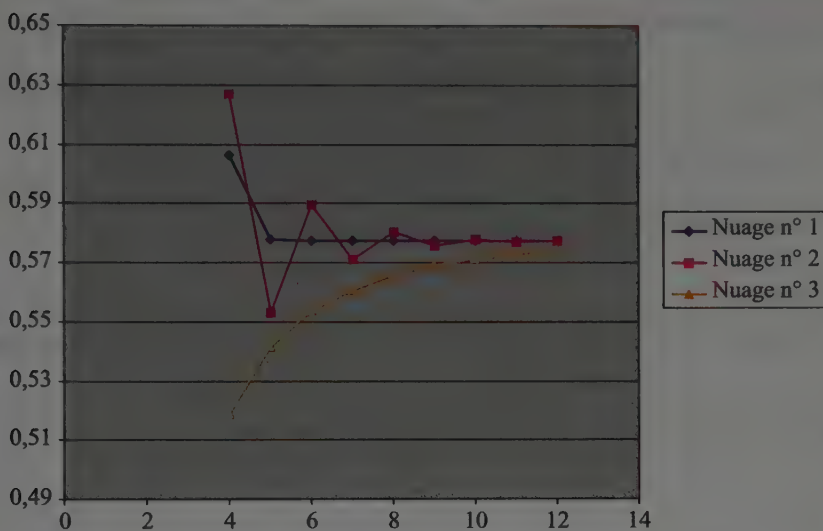
Sur le graphique ci-dessus figurent la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

En utilisant $\mathcal{C}_g$ et Δ , représenter sur l'axe des abscisses v_1, v_2, v_3, v_4 .

De quel nombre se rapproche v_n quand n devient grand ?

3° Quel est celui des trois nuages de points du graphique de la page suivante qui représente les termes $u_4, u_5, \dots, u_{12}$?

Et quel est celui des trois nuages de points qui représente les termes $v_4, v_5, \dots, v_{12}$?



14 ★★ 10 min

(corrigés p. 181)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -5 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}.$$

Construire dans un même repère orthonormé la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{6 + x}$.

Utiliser $\mathcal{C}$ et Δ pour représenter graphiquement les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

Faire une conjecture sur le sens de variation de (u_n) , ses bornes éventuelles.

De quel nombre semble se rapprocher u_n quand n devient grand ?

Sens de variation, majorant, minorant

15 ★ 15 min

(corrigés p. 181)

1° Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et $u_{n+1} = u_n - 3$.

2° Déterminer le sens de variation de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 et $v_{n+1} = v_n + (v_n)^4$.

16 ★ 15 min

(corrigés p. 181)

Étudier le sens de variation de la suite u proposée :

1° $n \mapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1$.

2° $n \mapsto (-5)^n$.

$$3^\circ n \mapsto \frac{3^n}{n+1}.$$

$$4^\circ n \mapsto n^2 + n - 5.$$

$$5^\circ u_0 = 4 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 0,71.$$

17 ★ 5 min

(corrigés p. 182)

Soit u la suite $n \mapsto \frac{1}{n^2}$.

Quel est le plus petit naturel n tel que : $u_n \leq 10^{-3}$?

18 ★★ 15 min

(corrigés p. 183)

Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite u est majorée, si elle est minorée.

$$1^\circ u : n \mapsto n^2.$$

$$2^\circ u : n \mapsto -n^4.$$

$$3^\circ u : n \mapsto \frac{1}{2^n}.$$

$$4^\circ u : n \mapsto (-2)^n.$$

19 ★★ 10 min

(corrigés p. 183)

Les suites proposées sont-elles bornées ?

$$u : n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} + 2, \quad v : n \mapsto (-1)^n, \quad w : n \mapsto \frac{\sqrt{n}}{n+2}.$$

20 ★★ 10 min

(corrigés p. 183)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note u_n la somme des inverses des entiers de 1 à n .

Trouver un entier naturel n_0 tel que :

$$\text{si } n \geq n_0, \text{ alors } u_n \geq 2.$$

Les interrogations écrites

21 10 min

(corrigés p. 184)

Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme des carrés des entiers de 1 à n .
Écrire un algorithme de calcul de S_n , n étant le paramètre d'entrée.

22 10 min

(corrigés p. 184)

Soit u la suite telle que $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n - (u_n)^2.$$

Existe-t-il un entier naturel n tel que $u_n \geq 4,1$?

23 10 min

(corrigés p. 184)

Minorer et majorer au mieux la suite $u : n \mapsto \frac{1}{n}$.

24 10 min

(corrigés p. 184)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

1° Tracer les droites $\mathcal{D}$ et Δ d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x + 1$ et $y = x$.

En utilisant $\mathcal{D}$ et Δ , représenter sur l'axe des abscisses u_1, u_2, u_3, u_4 .

2° En déduire des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et le nombre duquel se rapproche u_n quand n devient grand.

Vrai ou faux ?

1 1° Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

a) Le centième terme de la suite (u_n) est u_{100} .

Faux.

Le premier terme est u_0 , le deuxième u_1 , ..., le centième u_{99} .

b) Si, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est inférieur ou égal à n , alors (u_n) est majorée.

Faux.

Considérons, par exemple, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n$.

Bien évidemment, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n \leq n.$$

De plus, il n'existe pas de réel plus grand que tous les entiers naturels, autrement dit, aucun réel n'est un majorant de la suite (u_n) , ce qui signifie que la suite (u_n) n'est pas majorée.

c) Si la suite (u_n) est croissante, alors $u_2 \leq u_{10}$.

Vrai.

En effet : $u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_9 \leq u_{10}$.

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p :

$$\text{si } n \leq p, \text{ alors } u_n \leq u_p.$$

2° Soit u la suite : $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) La suite u est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Faux.

La suite u a pour ensemble de définition $\mathbb{N}^*$.

Elle n'est pas définie en 0 et elle est définie en tout entier naturel n non nul.

L'ensemble de définition d'une suite est inclus dans $\mathbb{N}$.

b) La suite u est décroissante.

Vrai.

En effet, pour tout entier naturel n non nul : $0 < \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$,

donc, des réels strictement positifs étant rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

c'est-à-dire : $u_{n+1} < u_n$.

• Noter que la suite u est définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(n),$$

où f est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, qui est

strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Par conséquent, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$f(n+1) < f(n),$$

c'est-à-dire :

$$u_{n+1} < u_n.$$

• Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) revient à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ; cette méthode est exposée ci-dessous.

Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}, \end{aligned}$$

or, d'une part : $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$,

donc : $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0$,

d'autre part : $\sqrt{n}\sqrt{n+1} > 0$,

d'où : $u_{n+1} - u_n < 0$,

c'est-à-dire : $u_{n+1} < u_n$.

c) La suite u est bornée.

Vrai.

On a évidemment, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n > 0,$$

donc la suite u est minorée par 0.

De plus, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\sqrt{n} \geq 1$, donc : $u_n \leq 1$, ce qui prouve que la suite u est majorée par 1.

Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

On pourrait démontrer que 0 est le plus grand minorant de la suite u (aucun réel strictement positif n'est un minorant de la suite u).

3° Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ dont les termes successifs sont 1, 2, 3, 1, 2, 3, etc.

a) $u_{100} = 3$.

Faux.

Tous les termes de la suite (u_n) d'indice multiple de 3 sont égaux à 1, tous ceux d'indice de la forme $3k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) sont égaux à 2, enfin, tous ceux d'indice de la forme $3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$) sont égaux à 3.

De plus : $100 = 3 \times 33 + 1$,

donc $u_{100} = 2$.

$100 = 3 \times k + 1$, avec $k = 33$.

b) La somme des termes de la suite (u_n) de u_0 à u_{20} est égale à 42.

Vrai.

Posons : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.

On a :

$$S = (u_0 + u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \dots + (u_{18} + u_{19} + u_{20}),$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ 0 \times 3 & & 1 \times 3 \\ & & \uparrow \\ & & 6 \times 3 \end{array}$

donc :

$$S = \underbrace{6 + 6 + \dots + 6}_{\text{sept termes}} = 7 \times 6 = 42.$$

$$u_0 + u_1 + u_2 = u_3 + u_4 + u_5 = \dots = u_{18} + u_{19} + u_{20} = 6.$$

c) Le produit des termes de la suite (u_n) de u_0 à u_{21} est égal à 6^7 .

Vrai.

Posons : $P = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{21}$.

On a :

$$P = (u_0 \times u_1 \times u_2) \times (u_3 \times u_4 \times u_5) \times \dots \times (u_{18} \times u_{19} \times u_{20}) \times u_{21},$$

donc : $P = \underbrace{6 \times 6 \times \dots \times 6}_{\text{sept facteurs}} \times 1 = 6^7$.

4° Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{2n} = \frac{1}{4^n}$.

Vrai.

On a, pour tout entier naturel n :

$$u_{2n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}.$$

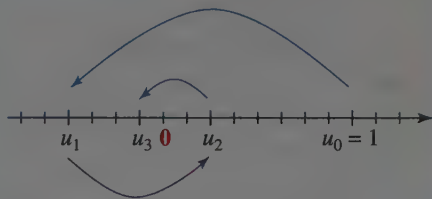
b) La suite (u_n) est bornée.

Vrai.

$-\frac{1}{2}$ étant compris entre -1 et 1 , on a :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 1$.

Plus précisément, on peut montrer que le minimum de la suite u est $-\frac{1}{2}$ et que le maximum est 1 .



c) La suite (u_n) est décroissante.

Faux.

$$u_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } u_2 = \frac{1}{4}, \text{ donc : } u_1 < u_2.$$

La suite n'est pas non plus croissante :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_1 = -\frac{1}{2}, \text{ donc : } u_1 < u_0.$$

Plus généralement, tous les termes de la suite (u_n) d'indice pair sont strictement positifs, tous ceux d'indice impair sont strictement négatifs, donc, pour tout entier naturel n :

$$u_n > u_{n+1} \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$u_n < u_{n+1} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

5° Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2n - 3$.

a) La suite (u_n) est croissante.

Vrai.

On a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = (2(n+1) - 3) - (2n - 3) = 2,$$

$$u_{n+1} - u_n > 0,$$

d'où : $u_{n+1} > u_n$,

donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) La suite (u_n) est minorée.

Vrai.

Pour tout entier naturel n :

$$2n \geq 0,$$

donc : $2n - 3 \geq -3,$

c'est-à-dire : $u_n \geq -3.$

Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

c) Pour tout entier naturel n :

$$u_{2n+1} = 4n - 1.$$

Vrai.

Pour tout entier naturel n :

$$u_{2n+1} = 2 \times (2n + 1) - 3 = 4n - 1.$$

6° Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

a) La suite (u_n) est croissante.

Faux.

$u_0 = 2$ et $u_1 = 2u_0 - 3 = 2 \times 2 - 3 = 1,$
donc : $u_1 < u_0.$

Non seulement la suite (u_n) n'est pas croissante, mais on pourrait même démontrer qu'elle est décroissante.

b) $u_5 = -29.$

Vrai.

On obtient, de proche en proche :

$$u_1 = 2u_0 - 3 = 2 \times 2 - 3 = 1,$$

$$u_2 = 2u_1 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1,$$

$$u_3 = 2u_2 - 3 = 2 \times (-1) - 3 = -5,$$

$$u_4 = 2u_3 - 3 = 2 \times (-5) - 3 = -13,$$

$$u_5 = 2u_4 - 3 = 2 \times (-13) - 3 = -29.$$

c) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 4u_n - 9.$$

Vrai.

Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = u_{(n+1)+1}$$

$$= 2u_{n+1} - 3$$

$$= 2 \times (2u_n - 3) - 3$$

$$= 4u_n - 6 - 3,$$

donc : $u_{n+2} = 4u_n - 9.$

Calculs de termes

2 **1°** $u_n = 5 \times 10^n + 2.$

On a :

$$u_1 = 5 \times 10^1 + 2 = 50 + 2 = 52,$$

puis :

$$u_2 = 502, \quad u_3 = 5\,002,$$

$$u_4 = 50\,002 \text{ et } u_5 = 500\,002.$$

2° $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}.$

On obtient successivement :

$$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$u_3 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}, \quad u_4 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8},$$

$$u_5 = \frac{1}{1+\frac{5}{8}} = \frac{8}{13}.$$

Recursion
an+1=1÷(1+an)
Ecrn+1:

EDIT DEL TYPE MOD RANGE TABL

Table Range n+1

Start: 1

End : 5

a0 : 1

b0 : 0

anStr: 0

bnStr: 0

ao | ai

an+1=1÷(1+an)

n+1 an+1

1 0.5

2 0.6666

3 0.6

4 0.625

0.666666666667

FORM DEL

WEB G-CON G-PLY

3° u_n est la somme des inverses des n premiers naturels non nuls.

On a :

$$u_1 = \frac{1}{1} = 1,$$

$$u_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$u_3 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$$

$$u_4 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12},$$

$$u_5 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} = \frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}.$$

On peut noter que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}.$$

3 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+(u_n)^2}}.$

On obtient de proche en proche :

$$u_1 = \frac{u_0}{\sqrt{1+(u_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{1+(u_1)^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

et de la même manière :

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad u_5 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Table Ranse n+1

Start: 1

End: 5

ao: 1

bo: 0

anStr: 0

bnStr: 0

ao: | ai

an+1=an÷√(1+an²)

n+1	3n+1
1	0.7071
2	0.5773
3	0.5
4	0.4472
0.4472135955	
FORM DEL	WEB G-CON G-PLT

Plus généralement, on peut établir que :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$

4 $1^\circ u : n \mapsto 3n - 7.$

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3(n+1) - 7 \\ &= 3n + 3 - 7 \\ &= 3n - 7 + 3, \end{aligned}$$

donc :

$$u_{n+1} = u_n + 3.$$

« $u_{n+1} = u_n + 3$ » est une relation de récurrence.

$2^\circ v : n \mapsto 5^n.$

Pour tout entier naturel n , on a :

$$v_{n+1} = 5^{n+1} = 5 \times 5^n,$$

donc :

$$v_{n+1} = 5v_n;$$

de même :

$$v_{2n} = 5^{2n} = (5^n)^2,$$

d'où :

$$v_{2n} = (v_n)^2.$$

Pour tout réel a non nul et tous entiers m et p :

$$(a^m)^p = a^{mp}.$$

5 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3}{(u_n)^2}.$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+2} = \frac{3}{(u_{n+1})^2} = \frac{3}{\left(\frac{3}{(u_n)^2}\right)^2} = \frac{3}{\frac{9}{(u_n)^4}} = \frac{3}{9} \times (u_n)^4,$$

donc :

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}(u_n)^4.$$

6 $1^\circ u_n = \frac{1}{n^2}.$

u_n n'est défini que si $n \geq 1$.

On dit que la suite (u_n) est définie à partir de l'indice 1.

On peut écrire :

$$\mathcal{I}_u = \mathbb{N}^*.$$

$2^\circ u_n = \frac{1}{n - \sqrt{2}}.$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $n - \sqrt{2} \neq 0$; par conséquent, la suite (u_n) est définie à partir de l'indice 0, c'est-à-dire sur $\mathbb{N}$.

$\sqrt{2}$ n'est pas un entier naturel.

$3^\circ u_n = \sqrt{2n - 15}.$

L'entier naturel n vérifie $2n - 15 \geq 0$ si, et seulement si : $n \geq 7,5$; on en déduit que la suite (u_n) est définie à partir de l'indice 8.

8 est le plus petit entier supérieur ou égal à 7,5.

$4^\circ u_n = \frac{1}{3^n - 1}.$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$3^n - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^n = 1 \Leftrightarrow n = 0,$$

donc la suite (u_n) est définie à partir de l'indice 1.

(u_n) a pour ensemble de définition $\mathbb{N}^*$.

$$5^\circ u_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

Pour tout entier naturel n , $n^2 + n + 1 \neq 0$,
(en effet, $n \geq 0$, donc $n^2 + n + 1 \geq 1$)

donc la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$,
c'est-à-dire à partir de l'indice 0.

7 $1^\circ u_0 = 2, u_{n+1} = 3u_n - 2.$

• Algorithme de calcul de u_n :

Variables

n, k : entiers

u : réel

Entrée

Saisir n

Initialisation

u prend la valeur 2

Traitement

Pour k variant de 1 à n , faire

u prend la valeur $3u - 2$

fin Pour

Sortie

Afficher u

• En utilisant le menu spécial de la calculatrice pour les suites vérifiant une relation de récurrence, ou en éditant un programme transcrivant l'algorithme précédent, on obtient à l'affichage :

$$u_{15} = 1\,434\,908.$$

Noter que tous les termes de la suite (u_n) sont des entiers naturels. Ici, la calculatrice donne la valeur exacte de u_{15} .

$2^\circ v_n = 1 + 3^n.$

• On a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 + 3^{n+1} \\ &= 1 + 3 \times 3^n \\ &= 1 + 3 \times (1 + 3^n) - 3 \\ &= 3 \times (1 + 3^n) - 2, \end{aligned}$$

donc : $v_{n+1} = 3v_n - 2.$

• De plus : $v_0 = 1 + 3^0 = 1 + 1 = 2.$

On en déduit que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = v_n,$$

autrement dit, les suites (u_n) et (v_n) sont égales.

Des suites qui ont le même premier terme et qui vérifient la même relation de récurrence liant deux termes successifs sont égales.

8 1° D'après l'initialisation :

$$u_0 = -1.$$

D'après l'instruction « u prend la valeur $\frac{u^2}{2} - u$ » dans la boucle Pour, la suite (u_n) vérifie la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{2} - u_n.$$

2°

	B3		=B2^2/2-B2
	A	B	C
1	n	un	
2	0	-1	
3	1	1,5	
4	2	-0,375	
5	3	0,4453125	
6	4	-0,346160889	
7	5	0,406074569	

En B3 a été saisie la formule :

$$=B2^2/2-B2$$

9 D'après l'algorithme :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 + 1^3 = 1^3, \\ u_2 &= u_1 + 2^3 = 1^3 + 2^3, \\ &\vdots \\ u_n &= 1^3 + 2^3 + \dots + n^3, \end{aligned}$$

autrement dit, pour tout entier naturel n non nul, u_n est la somme des cubes des entiers de 1 à n .

10 $1^\circ u_n$ est la somme des entiers de 1 à n .

TI

: Prompt N
: 1 $\rightarrow$ U
: For (1,2,N)
: U+1 $\rightarrow$ U
: End
: Disp U

CASIO

"N=" ? $\rightarrow$ N $\downarrow$
1 $\rightarrow$ U $\downarrow$
For 2 $\rightarrow$ I To N $\downarrow$
U+I $\rightarrow$ U $\downarrow$
Next $\downarrow$
U

Dans le chapitre suivant, sera établi que, pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

ce qui peut aussi se noter : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2° u_n est le produit des entiers de 1 à n .

Pour tout entier naturel n non nul, le produit des entiers de 1 à n se note $n!$ et se lit « factorielle n » :

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n.$$

TI

```
: Prompt N
: 1 → U
: For (1,2,N)
: U×I → U
: End
: Disp U
```

CASIO

```
"N=" ? → N ↓
1 → U ↓
For 2 → I To N ↓
U×I → U ↓
Next ↓
U
```

11 $u_1 = \frac{1}{2}, u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}.$

1° On obtient de proche en proche :

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{2}{3},$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{9}{3 \times 4} = \frac{3}{4},$$

$$u_4 = u_3 + \frac{1}{4 \times 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \times 5} = \frac{16}{4 \times 5} = \frac{4}{5},$$

$$u_5 = u_4 + \frac{1}{5 \times 6} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5 \times 6} = \frac{25}{5 \times 6} = \frac{5}{6}.$$

Ces résultats amènent à conjecturer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

2° Algorithme de calcul de $u_2, \dots, u_n$:

Variables

n, k , entiers

Entrée

Saisir n

Initialisation

u prend la valeur $\frac{1}{2}$

Traitement et sortie

Pour k variant de 2 à n , faire

u prend la valeur $u + \frac{1}{k(k+1)}$

Afficher u

fin Pour

3° a) On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_1 = \frac{1}{1 \times 2},$$

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3},$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4},$$

et, de proche en proche :

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

b) On a, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

c) D'après les questions **3° a)** et **3° b)**, on peut écrire, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots \\ &\quad + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

donc, par télescopage additif, il ne reste plus, dans l'expression définissant u_n , que le premier terme et le dernier :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Représentation graphique

12 L'observation des graphiques nous invite à formuler les conjectures suivantes.

1^{er} graphique :

La suite (u_n) semble décroissante donc majorée par son premier terme u_0 ; elle semble minorée par 1, nombre duquel u_n « se rapproche » quand n devient grand.

2nd graphique :

La suite (u_n) semble majorée par son premier terme u_0 et minorée par u_1 .

La suite ne semble pas monotone ; plus précisément, les termes successifs de la suite sont alternativement supérieurs et inférieurs à 3, et la distance qui les en sépare ne cesse de diminuer et u_n est aussi proche que l'on veut de 3 pourvu que n soit suffisamment grand.

On peut encore affiner l'analyse en conjecturant que :

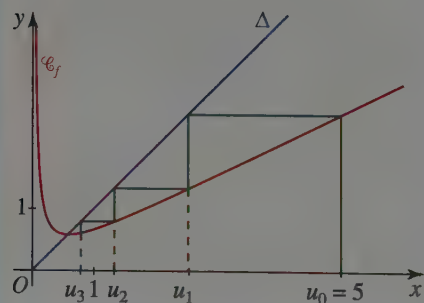
la suite (u_{2n}) des termes d'indice pair de (u_n) est décroissante,

la suite (u_{2n+1}) des termes d'indice impair de (u_n) est croissante.

13 $u_0 = 5, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{6u_n};$

$$v_0 = 2, \quad v_{n+1} = \sqrt{(v_n)^2 + 1} - v_n.$$

1°



Le graphique met en évidence que, quand n devient grand, u_n semble se rapprocher

de l'abscisse ℓ du point d'intersection de C_g et Δ .

Ce réel vérifie : $\ell > 0$ et $\frac{\ell}{2} + \frac{1}{6\ell} = \ell$.

Or, pour tout réel x non nul, on a les équivalences :

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{6x} = x \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{6x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3},$$

donc :

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{6x} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

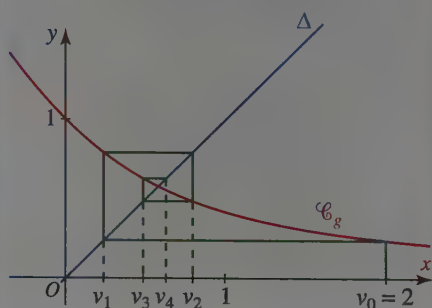
Le réel ℓ étant positif, on en déduit que, **quand n devient grand, u_n se rapproche**

de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $\frac{1}{\sqrt{3}}$, et on écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2°



Le graphique met en évidence que, quand n devient grand, v_n semble se rapprocher de l'abscisse ℓ du point d'intersection de C_g et Δ .

Ce réel vérifie :

$$\ell > 0 \text{ et } \sqrt{\ell^2 + 1} - \ell = \ell.$$

Or, pour tout réel x positif, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} - x = x &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

pour tous réels positifs a et b :

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

donc :

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

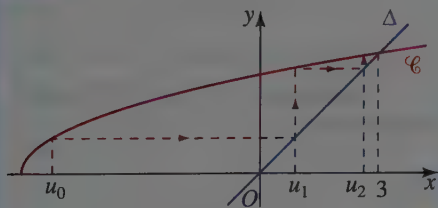
On en déduit que, quand n devient grand, v_n se rapproche de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Noter que toutes les conclusions tirées de l'observation des graphiques ne sont, en fait, que des conjectures. Il faut attendre quelques outils supplémentaires en analyse pour pouvoir les démontrer...

3° Les graphiques des questions **1°** et **2°** mettent respectivement en évidence que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) prend des valeurs qui oscillent autour de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (elles sont alternativement supérieures et inférieures à $\frac{1}{\sqrt{3}}$).

Seul le nuage n° 1 peut représenter des termes de la suite (u_n) et seul le nuage n° 2 peut représenter des termes de la suite (v_n) .

14



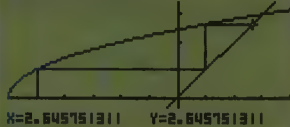
Il semble que la suite (u_n) soit croissante, donc minorée par son premier terme u_0 qui vaut -5 .

De plus, il est raisonnable de penser qu'elle est majorée par 3, et que u_n ne cesse de se rapprocher de 3 quand n grandit ; plus précisément : u_n est aussi proche de 3 que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

Table Ranse n+1

Start: 1
End: 10
a: -5
b: 0
anStr: 5
bnStr: 0
ao | ai

$an+1 = \sqrt{6+an}$



Sens de variation, majorant, minorant

15 1° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n - 3,$$

or : $u_n - 3 < u_n,$

donc : $u_{n+1} < u_n.$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante (sur $\mathbb{N}$).

2° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = v_n + (v_n)^4,$$

or : $(v_n)^4 \geq 0,$

donc : $v_n + (v_n)^4 \geq v_n$

d'où : $v_{n+1} \geq v_n.$

Cela prouve que la suite (v_n) est croissante (sur $\mathbb{N}$).

Dans ces deux cas, le sens de variation ne dépend pas du premier terme.

16 1° $u : n \mapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1$

Étudier le sens de variation de la suite u revient à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - 4(n+1)^2$$

$$-5(n+1) - 1 - n^3 + 4n^2 + 5n + 1,$$

Or :

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

donc, après simplifications :

$$u_{n+1} - u_n = 3n^2 - 5n - 8.$$

-1 est une racine du polynôme du second degré $f: x \mapsto 3x^3 - 5x - 8$, son

autre racine est donc $\frac{8}{3}$.

En notant α la racine de f autre que -1 , on dispose en effet de la relation :

$$-1 \times \alpha = -\frac{8}{3}.$$

On pouvait aussi calculer le discriminant Δ de f :

$$\Delta = 25 + 96 = 121 = 11^2,$$

pour en déduire les racines de f :

$$\frac{5-11}{6} \text{ et } \frac{5+11}{6}$$

c'est-à-dire :

$$-1 \text{ et } \frac{8}{3}.$$

Et l'on sait : $2 < \frac{8}{3} < 3$.

On en déduit que, pour tout entier naturel n :

- si $n \leq 2$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$,
- si $n \geq 3$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$,

autrement dit :

- si $n \leq 2$, alors $u_{n+1} < u_n$,
- si $n \geq 3$, alors $u_{n+1} > u_n$.

En conclusion, la suite u est strictement croissante à partir du rang 3.

On dit aussi que la suite u est strictement croissante à partir de l'indice 3.

2° $u: n \mapsto (-5)^n$.

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$, et, pour tout entier naturel n ,

- si n est pair, alors $u_n > 0$;
- si n est impair, alors $u_n < 0$.

u n'est donc pas monotone, même à partir d'un certain rang.

3° $u: n \mapsto \frac{3^n}{n+1}$.

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ et à termes strictement positifs.

Pour tout entier naturel n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} = \frac{3(n+1)}{n+2} = \frac{3n+3}{n+2},$$

or :

$$\frac{3n+3}{n+2} > 1,$$

(car $3n+3 > n+2 > 0$)

donc, pour tout entier naturel n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

soit : $u_{n+1} > u_n$ (car $u_n > 0$).

Cela prouve que u est strictement croissante.

Il peut être avantageux de calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et de le comparer à 1 lorsque la suite u est à termes strictement positifs. Cette méthode est exclue si la suite n'est pas à termes de signe constant.

4° $u: n \mapsto n^2 + n - 5$.

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$.

D'autre part, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x - 5$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$, donc il en est de même de leur somme $x \mapsto x^2 + x - 5$.

Il en résulte que u est strictement croissante.

On peut aussi écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$(n+1)^2 > n^2 \\ (n+1) - 5 > n - 5$$

et, en additionnant membre à membre ces deux inégalités de même sens :

$$u_{n+1} > u_n.$$

5° $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - 0,71$.

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_n - 0,71 < u_n$$

donc :

$$u_{n+1} < u_n.$$

Par conséquent, u est strictement décroissante.

17 $u: n \mapsto \frac{1}{n^2}$.

u est définie sur $\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq 10^{-3} \\ \Leftrightarrow n^2 \geq 10^3 ;$$

or : $31^2 = 961$ et $32^2 = 1\,024$,

donc le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq 10^{-3}$ est 32.

18 1° $u : n \mapsto n^2$.Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_n = n^2, \text{ donc } u_n \geq 0.$$

En revanche, u_n peut être plus grand que n'importe quel réel A (si $A \geq 0$, il suffit de choisir n supérieur à $\sqrt{A}$).

La suite u est minorée par 0, mais n'est pas majorée.

La suite u est la restriction de la fonction carré à $\mathbb{N}$.

2° $u : n \mapsto -n^4$.Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_n = -n^4,$$

donc :

$$u_n \leq 0.$$

En revanche, u_n peut être plus petit que n'importe quel réel A , pourvu que n soit suffisamment grand (si $A \leq -1$, il suffit de choisir n supérieur à $-A$).

La suite u est majorée par 0, mais n'est pas minorée.

3° $u : n \mapsto \frac{1}{2^n}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{1}{2^n}$,

donc : $u_n > 0$ et $u_n \leq 1$,d'où : $0 \leq u_n \leq 1$.

Cela prouve que la suite u est minorée par 0 et majorée par 1.

1 est un majorant de la suite u , donc tout nombre supérieur à 1 est aussi un majorant de u .

0 est un minorant de la suite u , donc tout nombre négatif est aussi un minorant de u .

4° $u : n \mapsto (-2)^n$.

• Si n est un entier pair, on peut écrire $n = 2p$ (où bien sûr $p \in \mathbb{N}$) et :

$$u_n = (-2)^{2p} = ((-2)^2)^p = 4^p.$$

Comme 4^p peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que l'entier naturel p soit choisi suffisamment grand, **la suite u n'est pas majorée.**

• Si n est un entier naturel impair, on peut écrire $n = 2p + 1$ (où bien sûr $p \in \mathbb{N}$) et :

$$u_n = (-2)^{2p+1} = -2 \times (-2)^{2p} = -2 \times 4^p.$$

Comme -2×4^p est négatif et peut être rendu aussi loin de 0 que l'on veut, pourvu que l'entier naturel p soit choisi suffisamment grand, **la suite u n'est pas minorée.**

19 • $u : n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} + 2$.

u est définie sur $\mathbb{N}^*$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1,$$

donc : $2 < u_n \leq 3$.

On en déduit que la suite u est bornée par 2 et 3.

La valeur 3 est atteinte pour $n = 1$, et u_n est aussi proche de 2 que l'on veut (sans jamais l'atteindre), pourvu que n soit suffisamment grand.

• $v : n \mapsto (-1)^n$.

v est définie sur $\mathbb{N}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} \text{si } n \text{ est impair, alors } v_n = -1, \\ \text{si } n \text{ est pair, alors } v_n = 1. \end{cases}$$

Donc la suite v est bornée par -1 et 1.

• $w : n \mapsto \frac{\sqrt{n}}{n+2}$.

w est définie sur $\mathbb{N}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\sqrt{n}}{n+2} \geq 0,$$

c'est-à-dire : $w_n \geq 0$;

de plus : $\sqrt{n} \leq n+2$,
(pour tout entier naturel n , $\sqrt{n} \leq n$)

donc : $w_n \leq 1$.

Donc la suite w est bornée par 0 et 1.

20 u_n : somme des inverses des entiers de 1 à n .

Dans l'exercice 2, on a calculé les premiers termes de la suite (u_n) et observé que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1},$$

or : $\frac{1}{n+1} > 0,$

d'où : $u_n + \frac{1}{n+1} > u_n,$

donc :

$$u_{n+1} > u_n,$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement croissante (sur $\mathbb{N}^*$).

De plus, on avait obtenu : $u_4 = \frac{25}{12}$

et on a : $\frac{25}{12} \geq 2.$

On peut donc affirmer :

Si $n \geq 4$, alors $u_n \geq 2$.

On a : $u_3 = \frac{11}{6}$, donc : $u_3 < 2$;

par conséquent, 4 est le plus petit entier naturel n_0 tel que : si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq 2$.

Les interrogations écrites

21 Algorithme de calcul de la somme S_n des carrés des entiers de 1 à n :

Variables

n, k : entiers

S : réel

Entrée

Saisir n

Initialisation

S prend la valeur 0

Traitement

Pour k variant de 1 à n , faire

S prend la valeur $S + n^2$

Fin Pour

Sortie

Afficher S

On peut aussi initialiser S à 1, et, dans ce cas, il faut faire varier le compteur de boucle k de 2 à n .

22 Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n - (u_n)^2,$$

or : $-(u_n)^2 \leq 0,$

donc : $u_n - (u_n)^2 \leq u_n,$

d'où : $u_{n+1} \leq u_n,$

ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

De plus : $u_0 = 4$, donc :

pour tout entier naturel n , $u_n \leq 4$,

ce qui implique :

pour tout entier naturel n , $u_n < 4,1$.

Finalement, il n'existe pas d'entier naturel n tel que $u_n \geq 4,1$.

Table Range n+1

Start: 1

End : 6

a0 : 4

b0 : 0

anStr: 0

bnStr: 0

ao | ai

an+1=an-an²

n+1 an+1

1 -12

2 -156

3 -24492

4 -5.9EE

-599882556

FORM DEL

WEB G-CON G-PLT

23 $u : n \mapsto \frac{1}{n}.$

u est définie sur $\mathbb{N}^*$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1,$$

c'est-à-dire : $0 < u_n \leq 1$.

Donc la suite u est minorée par 0 et majorée par 1.

La suite u , étant décroissante, est majorée par son premier terme :

$$u_1 = 1.$$

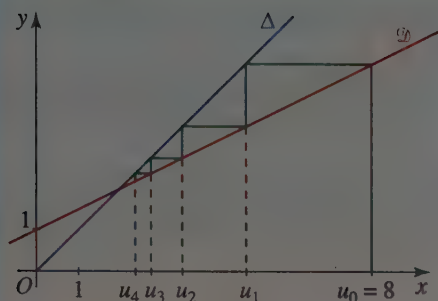
L'encadrement obtenu est le meilleur possible :

• on ne peut pas améliorer la majoration, car $u_1 = 1$;

• on ne peut pas améliorer la minoration, car u_n est aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que n soit suffisamment grand.

24 $u_0 = 8, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$

1° $\mathcal{D} : y = \frac{1}{2}x + 1, \quad \Delta : y = x.$



2° Le graphique ci-dessus met en évidence que la suite (u_n) est décroissante

et que, quand n devient grand, u_n semble se rapprocher de l'abscisse du point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ .

De plus, pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 1 = x &\Leftrightarrow x - \frac{1}{2}x = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2, \end{aligned}$$

donc, quand n devient grand, u_n semble se rapprocher de 2 d'aussi près que l'on veut.

CHAPITRE 9

Suites arithmétiques Suites géométriques

LE COURS

Suites arithmétiques

Définition

- Dire qu'une suite u définie sur $\mathbb{N}$ est arithmétique signifie qu'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

- Le réel r est appelé la raison de la suite arithmétique u .
- Une telle suite est à variation absolue constante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} - u_n = r.$$

Propriété

Les suites à variation absolue constante sont les suites arithmétiques.

Expression explicite de u_n

Si une suite u définie sur $\mathbb{N}$ est arithmétique de raison r , alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Somme de termes consécutifs

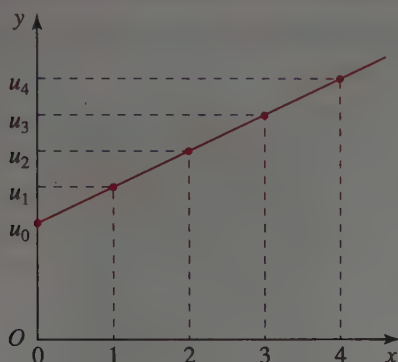
- Si S est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors :

$$S = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{1}^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

- En particulier, pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Représentation graphique



- Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$ sont alignés sur la droite d'équation $y = rx + u_0$.
- On dit qu'une suite arithmétique est à évolution linéaire.

Suites géométriques

Définition

- Dire qu'une suite u définie sur $\mathbb{N}$ est géométrique de raison positive signifie qu'il existe un réel q strictement positif tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

- Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique u .
- Une telle suite est à variation relative constante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

Expression explicite de u_n

Si une suite u définie sur $\mathbb{N}$ est géométrique de raison non nulle q , alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Somme de termes consécutifs

- Si S est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différente de 1, alors :

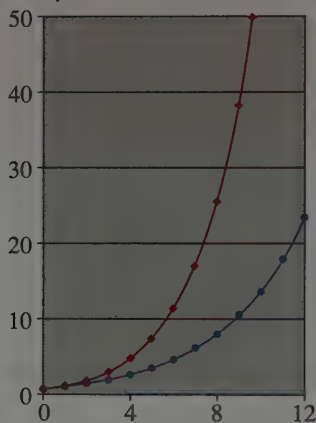
$$S = \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} \times (1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1 - q}$$

- En particulier, pour tout réel q différent de 1 et tout entier naturel n non nul :

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

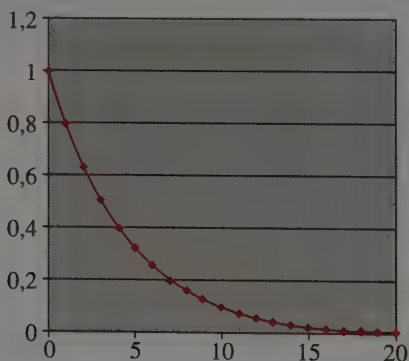
Représentation graphique

- Graphique obtenu avec un tableur pour la suite $n \mapsto (1,3)^n$ (en bleu) et la suite $n \mapsto (1,5)^n$ (en rouge).



On dit qu'une suite géométrique de raison strictement positive est à évolution exponentielle.

- Graphique obtenu avec un tableur pour la suite $n \mapsto (0,8)^n$.



EXERCICES

Vrai ou faux ?

1

(corrigés p. 198)

- 1° La suite $u : n \mapsto 2 - 3n$ est arithmétique de raison 2.
- 2° La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{2}{3^n}$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
- 3° Toute suite (u_n) telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{7}$, est une suite géométrique.
- 4° Toute suite arithmétique de raison 2 est croissante.
- 5° Toute suite géométrique de raison 2 est croissante.
- 6° Toute suite constante est à la fois arithmétique et géométrique.
- 7° La somme des entiers naturels de 1 à 1 000 est égale à 500 500.
- 8° La somme des 1 000 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{20}$ et de raison 1 est égale à 50.
- 9° Si a, b, c sont trois termes consécutifs, dans cet ordre, d'une suite arithmétique, alors $b = \frac{a+c}{2}$.
- 10° Si a, b, c sont trois termes consécutifs, dans cet ordre, d'une suite géométrique, alors $b^2 = ac$.

exercices

Suites arithmétiques

2 ★ 5 min

(corrigés p. 199)

Une suite arithmétique u a pour raison 1,5 et pour premier terme u_0 avec :

$$u_0 = -4.$$

Quels sont ses six premiers termes ?

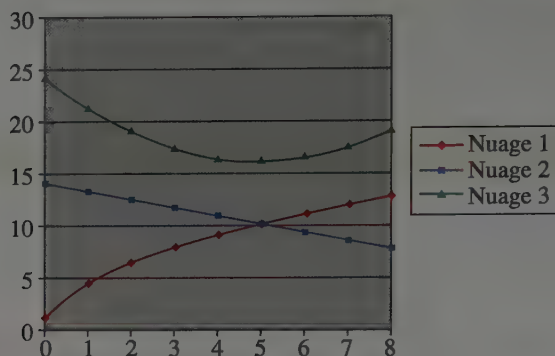
3 ★ 10 min

(corrigés p. 199)

Soient a et b des nombres réels, (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme a et de raison b .

- 1° Définir la suite (u_n) par récurrence.
- 2° Écrire un algorithme de calcul de u_n , les réels a, b et l'entier naturel n étant les paramètres d'entrée.

Chacun des trois nuages de points représente les termes d'indice 0 à 8 d'une suite définie sur $\mathbb{N}$.



Un seul de ces nuages de points correspond à une suite arithmétique. Lequel ?

Démontrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation proposée est arithmétique. Préciser sa raison.

1° $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 6 + u_n$.

3° $u_n = \frac{4-n}{3}$.

2° $u_n = 5n - 3$.

4° $u_n = (n+3)^2 - n^2$.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$, de premier terme -2 et de raison 3 . Pour tout entier naturel n non nul, exprimer u_n en fonction de n .

Dans les trois exercices suivants, u désigne une suite arithmétique de raison r ($r \in \mathbb{R}$).

Sachant que $u_7 = 3\,000$ et $r = -50$, calculer le terme u_1 .

Sachant que $u_0 = 100$ et $u_{100} = 50$, calculer la raison r .

Sachant que $u_{10} = 9$ et $u_{17} = 17,4$, calculer u_{21} .

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{3 + (u_n)^2}.$$

1° On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = (u_n)^2$.

Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

2° En déduire, pour tout entier naturel n , une expression explicite de u_n en fonction de n .

11 ★★ 10 min

(corrigés p. 201)

Soient r un nombre réel et (u_n) une suite arithmétique, définie sur $\mathbb{N}$ et de raison r .

Dans chacun des cas suivants, démontrer que la suite définie par la relation proposée est arithmétique, et préciser sa raison.

1° $v_n = 7u_n - 3$.

2° $w_n = u_{2n}$.

3° $t_n = (u_n)^2 - r^2 n^2$.

Suites géométriques

12 ★ 5 min

(corrigés p. 201)

Une suite géométrique u a pour premier terme 100 et pour raison 0,2.

Calculer les termes de la suite u du deuxième au sixième.

13 ★★ 10 min

(corrigés p. 201)

1° Soient q un réel strictement positif et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = q^n$.

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

2° En déduire le sens de variation de la suite (v_n) proposée.

a) (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 3 \times (0,7)^n$.

b) (v_n) est la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme -2 et de raison 1,6.

14 ★★ 15 min

(corrigés p. 202)

1° Sachant que $2^{10} = 1\,024$, trouver un entier naturel n_0 tel que $2^{n_0} > 10^6$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^6$.

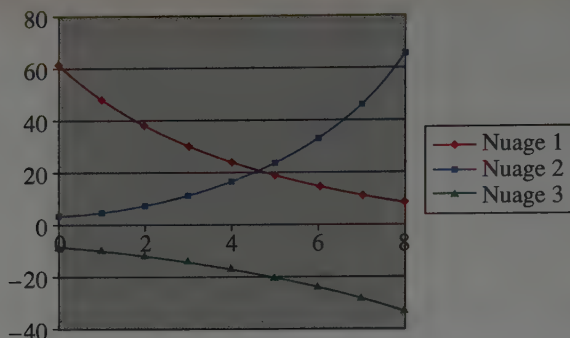
2° Trouver de même un entier naturel n_1 tel que $2^{n_1} > 10^{15}$.

L'entier n_1 ainsi obtenu est-il le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^{15}$?

3° Que peut-on dire, si n est un entier supérieur ou égal à n_1 :

a) de 2^n ?

b) de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$?



Chacun des trois nuages de points du graphique ci-dessus représente les termes d'indice 0 à 8 d'une suite géométrique de raison positive définie sur $\mathbb{N}$. Préciser pour chacun d'eux la position par rapport à 1 de la raison de la suite géométrique représentée.

Dans les trois exercices suivants, u désigne une suite géométrique de raison q ($q \in]0 ; +\infty[$).

16 ★★ 10 min

(corrigés p. 203)

Sachant que $u_5 = 486$ et $q = 3$, calculer u_9 et u_0 .

17 ★★ 10 min

(corrigés p. 203)

Sachant que $u_0 = 1$ et $u_7 = 128$, calculer la raison q .

18 ★★ 10 min

(corrigés p. 203)

Sachant que $u_4 = 44$ et $u_{10} = 352$, calculer u_{13} .

19 ★★ 15 min

(corrigés p. 204)

Démontrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation proposée est géométrique. Préciser sa raison.

$$1^\circ u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{6}.$$

$$5^\circ u_n = 5^{2n+1}.$$

$$2^\circ u_n = 3^{n-1}.$$

$$6^\circ u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}.$$

$$3^\circ u_n = 3^n \times 5^n.$$

$$7^\circ u_n = 3.$$

$$4^\circ u_n = -3 \times 5^{-n}.$$

$$8^\circ u_n = 3 \times 2^n + 2^{n+1}.$$

Calcul de sommes

20 ★ 15 min

(corrigés p. 205)

Dans chacun des cas suivants, quel est le nombre de termes de la somme S ?

$$1^\circ S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}.$$

$$2^\circ S = u_1 + u_2 + \dots + u_{17}.$$

$$3^\circ S = u_0 + u_1 + \dots + u_n, \text{ avec } n \text{ entier naturel.}$$

$$4^\circ S = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \text{ avec } n \text{ entier naturel non nul.}$$

$$5^\circ S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n+1}, \text{ avec } n \text{ entier naturel.}$$

$$6^\circ S = u_2 + u_3 + \dots + u_{n+1}, \text{ avec } n \text{ entier naturel non nul.}$$

21 ★ 5 min

(corrigés p. 205)

Soit n un entier naturel non nul.

On pose : $S_n = 1 + 2 + \dots + 3n$.

Exprimer S_n en fonction de n (sans utiliser de pointillés !).

22 ★ 5 min

(corrigés p. 205)

Calculer (de tête !) :

1° la somme S des neuf premiers termes de la suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 10u_n;$$

2° la somme T des sept premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{10}$.

23 ★ 10 min

(corrigés p. 205)

	A	B	C
1	n	u_n	S_n
2	0	0,7	0,7
3	1	1,9	2,6
4	2	3,1	5,7
5	3	4,3	10
6	4	5,5	15,5
7	5	6,7	22,2
8	6	7,9	30,1

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme 0,7 et de raison 1,2. Pour tout entier naturel n , on note S_n la somme des termes de la suite (u_n) d'indice 0 à n .

1° Dans la feuille de calcul ci-dessus, une formule a été éditée dans la cellule B3, puis étirée vers le bas, de façon à obtenir dans la colonne B les termes successifs de la suite (u_n) .

Quelle est cette formule ?

2° De même, une formule a été éditée en C2, puis étirée vers le bas, de façon à obtenir dans la colonne C les termes successifs de la suite (S_n) .

Quelle est cette formule ?

Soit u la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme -5 et de raison 3 .
Calculer chacune des deux sommes proposées.

1° S est la somme des cent premiers termes de la suite u .

2° $T = u_{20} + u_{21} + \dots + u_{59}$.

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n.$$

1° Exprimer S_n en fonction de n (sans utiliser de pointillés !).

2° En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression en fonction de n de chacune des sommes U_n et V_n suivantes :

a) $U_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2n+1}$;

b) $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

Soit u la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme 3 et de raison $0,2$.
Calculer la somme S des six premiers termes de la suite u .

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = 0, \underbrace{6 \dots 6}_{n \text{ chiffres } 6}$$

1° Montrer que u_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $0,6$.

2° En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right).$$

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1,$$

et soit la suite v telle que, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_n + 1.$$

1° Prouver que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2° Démontrer que la suite v est géométrique.

En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de l'entier naturel n .

3° Déterminer, en fonction de l'entier naturel n , les sommes S et S' telles que :

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

et

$$S' = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Quelques problèmes concrets

29 ★★ 15 min

(corrigés p. 207)

1° On organise un tournoi individuel de tennis avec 128 participants.

Sachant que chaque joueur ayant perdu une partie est éliminé, quel est le nombre de parties du 1^{er} tour, du 2^e tour, du 3^e tour ?

Quel est le nombre total de parties à prévoir ?

2° Reprendre l'énoncé précédent en remplaçant les 128 participants par 2^n participants, où n est un entier naturel non nul.

30 ★★ 10 min

(corrigés p. 208)

Un jeu télévisé est organisé de la façon suivante :

- si le candidat répond correctement à la première question, il gagne 60 € ;
- ensuite, chaque bonne réponse lui rapporte 35 € de plus que la précédente, et le jeu s'arrête à la première réponse fausse.

On note u_n le gain en euros pour une réponse correcte à la n -ième question.

1° Définir la suite (u_n) par récurrence.

En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n .

2° Quel est le nombre minimal de bonnes réponses que doit donner le candidat pour que le total de ses gains s'élève au moins à 1 000 € ?

31 ★★ 10 min

(corrigés p. 208)

Monsieur Carrédas fait un placement de 10 000 € à taux constant dans une banque A, et un autre placement de 10 000 € à taux également constant dans une banque B. On note respectivement C_n et K_n le capital acquis à l'issue de n années dans la banque A et la banque B.

La feuille de calcul ci-dessous donne les valeurs de C_n et K_n , arrondies à l'euro, pour les dix premières années de placement.

	A	B	C
1	n	$C(n)$	$K(n)$
2	0	10000	10000
3	1	10600	10550
4	2	11200	11130
5	3	11800	11742
6	4	12400	12388
7	5	13000	13070
8	6	13600	13788
9	7	14200	14547
10	8	14800	15347
11	9	15400	16191
12	10	16000	17081

1° Le placement effectué dans la banque A est-il à intérêts simples ou composés ?
Et quel en est le taux ?

2° Le placement effectué dans la banque B est-il à intérêts simples ou composés ?
Et quel en est le taux ?

32 ★★ 15 min

(corrigés p. 208)

On effectue un placement de 100 000 euros au taux annuel de 7 % à intérêts composés.

1° De combien dispose-t-on au bout de quatre ans ? au bout de dix ans ?

2° Combien d'années sont nécessaires pour voir le capital doubler ? pour voir le capital tripler ?

33 ★★ 20 min

(corrigés p. 209)

Une jeune diplômée, Mlle N, se voit proposer par le directeur des ressources humaines d'une entreprise deux contrats différents :

– avec le contrat A, le salaire mensuel net d'embauche est de 2 100 €, il est ensuite augmenté tous les ans de 130 € ;

– avec le contrat B, le salaire mensuel net d'embauche est de 2 100 €, il est ensuite augmenté tous les ans de 6 %.

On notera u_n le salaire mensuel net en euros de Mlle N la n -ième année de travail si elle choisit le contrat A, et v_n le salaire mensuel net en euros de Mlle N la n -ième année de travail si elle choisit le contrat B.

1° Expliciter u_n en fonction de l'entier naturel non nul n , puis déterminer le montant cumulé S_n en euros des salaires perçus par Mlle N au cours des n années de travail dans l'entreprise si elle choisit le contrat A.

2° Expliciter v_n en fonction de l'entier naturel non nul n , puis déterminer le montant cumulé T_n en euros des salaires perçus par Mlle N au cours des n années de travail dans l'entreprise si elle choisit le contrat B.

3° Dans la feuille de calcul ci-dessous, les valeurs des salaires et des salaires cumulés affichées ont été arrondies à l'euro.

	A	B	C	D	E
1	n	$u(n)$	$v(n)$	$S(n)$	$T(n)$
2	1	2100	2100	25200	25200
3	2	2230	2226	51960	51912
4	3	2360	2360	80280	80227
5	4	2490	2501	110160	110240
6	5	2620	2651	141600	142055
7	6	2750	2810	174600	175778
8	7	2880	2979	209160	211525
9	8	3010	3158	245280	249416
10	9	3140	3347	282960	289581

a) Après avoir entré en B2 et C2 la valeur 2 100, on a édité une formule dans chacune des cellules B3 et C3, puis étiré ces formules vers le bas.

Quelles formules ont été entrées respectivement en B3 et C3 ?

- b) De même, une formule a été entrée en D2 puis étirée vers le bas, vers la droite. Quelle peut être cette formule ?
- c) Quel est le contrat le plus avantageux pour Mlle N si elle compte rester trois ans dans l'entreprise ? quatre ans ? cinq ans ?

Les interrogations écrites

34 10 min

(corrigés p. 210)

Soient a et b des nombres réels, (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme a et de raison b .

On pose $S_0 = u_0$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

1° Définir la suite (u_n) par récurrence.

2° Écrire un algorithme de calcul de u_n et S_n , les réels a , b et l'entier naturel n étant les paramètres d'entrée.

35 10 min

(corrigés p. 211)

Soit u la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que :

$$u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = -8 \text{ et } u_1 + u_{11} = -3.$$

Déterminer sa raison r et son premier terme u_0 .

36 10 min

(corrigés p. 211)

Soit u la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme u_0 tel que :

$$u_0 = 9.$$

Calculer S , où $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{10}$.

37 20 min

(corrigés p. 211)

Pendant douze années consécutives, Monsieur Dupont place une somme de 10 000 euros le 1^{er} janvier de chaque année au taux d'intérêt annuel de 6 %.

Monsieur Durand place une somme de 30 000 euros le 1^{er} janvier des 1^{re}, 4^e, 7^e et 10^e années au même taux d'intérêt annuel de 6 %.

De combien dispose chacun au bout des douze années ?

Vrai ou faux ?

1 1° La suite $u : n \mapsto 2 - 3n$ est arithmétique de raison 2. **Faux.**

Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 - 3(n+1) = 2 - 3n - 3,$$

$$\text{donc : } u_{n+1} = u_n - 3,$$

ce qui prouve que la suite u est bien arithmétique, mais de raison -3 .

Pour tous réels a et b , la suite $n \mapsto an + b$ est arithmétique de raison a .

2° La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2}{3^n} \text{ est géométrique de raison } \frac{2}{3}.$$

Faux.

En écrivant que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

on reconnaît le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

3° Toute suite (u_n) telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{7}$, est une suite géométrique. **Vrai.**

En effet, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3}{7} \times u_n,$$

ce qui prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{7}$.

4° Toute suite arithmétique de raison 2 est croissante. **Vrai.**

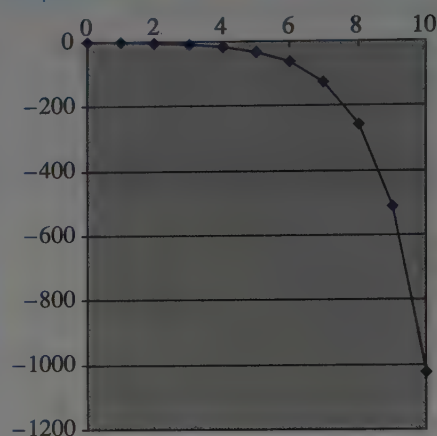
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison 2, alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = u_n + 2$, or $u_n + 2 > u_n$, donc $u_{n+1} > u_n$.

Toute suite arithmétique de raison positive est croissante.

5° Toute suite géométrique de raison 2 est croissante. **Faux.**

Par exemple, la suite $n \mapsto -2^n$ est géométrique de raison 2, et elle est strictement décroissante.

Ne pas confondre -2^n et $(-2)^n$.



6° Toute suite constante est à la fois arithmétique et géométrique. **Vrai.**

Toute suite constante est :

- une suite arithmétique de raison 0,
- une suite géométrique de raison 1.

7° La somme des entiers naturels de 1 à 1 000 est égale à 500 500. **Vrai.**

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + 1\,000 &= \frac{1\,000 \times (1 + 1\,000)}{2} \\ &= 500 \times 1\,001 \\ &= 500\,500. \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

8° La somme des 1 000 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{20}$ et de raison 1 est égale à 50. **Vrai.**

Une suite géométrique de raison 1 étant constante, la somme à calculer est égale à $1\,000 \times \frac{1}{20}$, c'est-à-dire 50.

9° Si a, b, c sont trois termes consécutifs, dans cet ordre, d'une suite arithmétique, alors $b = \frac{a+c}{2}$. **Vrai.**

En notant r la raison de la suite arithmétique, on a :

- $a = b - r$ (car $b = a + r$),
- $c = b + r$,

d'où, en additionnant membre à membre ces deux égalités :

$$a + c = 2b,$$

c'est-à-dire : $b = \frac{a+c}{2}$.

10° Si a, b, c sont trois termes consécutifs, dans cet ordre, d'une suite géométrique, alors $b^2 = ac$. **Vrai.**

En notant q la raison de la suite géométrique, on a :

$$b = qa \quad \text{et} \quad c = qb.$$

On peut alors écrire :

$$\bullet b^2 = b \times b = b \times qa = qab,$$

$$\bullet ac = a \times qb = qab,$$

d'où : $b^2 = ac$.

Suites arithmétiques

2 Les six premiers termes de la suite u sont : $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ avec :

$$u_0 = -4; \quad u_1 = -2,5; \quad u_2 = -1;$$

$$u_3 = 0,5; \quad u_4 = 2; \quad u_5 = 3,5.$$

Recursion
an+1=an+1.5
En+1:

TABLE DEL TYPE ROW COL TABL

Table Range n+1

Start: 1
End : 5
a0 : 4
b0 : 6
anStr: 0
bnStr: 0
a0 | a1

an+1=an+1.5

FORM DEL WEB K-CON G-PLT

3 (u_n) : suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme a et de raison b .

1° La suite (u_n) est définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + b.$$

2° Algorithme de calcul de u_n :

Variables

n, k : entiers

a, b, u : réels

Entrée

Saisir a, b, n

Initialisation

u prend la valeur a

Traitement

Pour k variant de 1 à n faire

u prend la valeur $u + b$

fin Pour

Sortie

Afficher u

4 Seul le nuage de points $n^{\circ} 2$ est formé de points alignés. C'est donc le seul qui corresponde à une suite arithmétique.

5 **1°** $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 6 + u_n$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 6$, donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 6.

2° $u_n = 5n - 3$.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5(n+1) - 3 \\ &= 5n + 5 - 3 \\ &= (5n - 3) + 5, \end{aligned}$$

donc : $u_{n+1} = u_n + 5$.

ce qui prouve que la suite (u_n) est arithmétique de raison 5.

Pour tous réels a et b , la suite $n \mapsto an + b$ est arithmétique de raison a .

On pouvait aussi écrire que, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (5(n+1) - 3) - (5n - 3) \\ &= 5n + 5 - 3 - 5n + 3 \\ &= 5. \end{aligned}$$

3° $u_n = \frac{4-n}{3}$.

Pour tout entier naturel n :

$$u_n = -\frac{1}{3}n + \frac{4}{3},$$

ce qui met en évidence que la suite (u_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
On a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{3}(n+1) + \frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}n - \frac{4}{3} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Démontrer qu'une suite (v_n) est arithmétique, c'est démontrer que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ est constante.

4° $u_n = (n+3)^2 - n^2$.

Pour tout entier naturel n :

$$u_n = n^2 + 6n + 9 - n^2 = 6n + 9,$$

ce qui met en évidence que la suite (u_n) est arithmétique de raison 6.

On a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left((n+4)^2 - (n+1)^2\right) - \left((n+3)^2 - n^2\right) \\ &= \left((n+4) - (n+1)\right)\left((n+4) + (n+1)\right) \\ &\quad - \left((n+3) - n\right)\left((n+3) + n\right) \\ &= 3(2n+5) - 3(2n+3) \\ &= 6n + 15 - 6n - 9 \\ &= 6. \end{aligned}$$

6 (u_n) : la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$, de premier terme -2 et de raison 3.

On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= -2 = -2 + 0 \times 3 \\ u_2 &= u_1 + 3 = -2 + 1 \times 3, \\ u_3 &= u_2 + 3 = -2 + 2 \times 3. \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = u_1 + (n-1) \times 3,$$

d'où :

$$u_n = -2 + (n-1) \times 3 = -2 + 3n - 3,$$

et finalement : $u_n = 3n - 5$.

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}^*$, alors, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = u_1 + (n-1)r.$$

7 $u_7 = 3\,000$ et $r = -50$.

On a : $u_7 = u_1 + 6r$,

d'où : $u_1 = u_7 - 6r = 3\,000 - 6 \times (-50)$,

donc : $u_1 = 3\,300$.

8 $u_0 = 100$ et $u_{100} = 50$.

On a : $u_{100} = u_0 + 100r$,

donc : $r = \frac{u_{100} - u_0}{100} = \frac{50 - 100}{100}$,

d'où : $r = -0,5$.

9 $u_{10} = 9$ et $u_{17} = 17,4$.

• On a l'égalité : $u_{17} = u_{10} + 7r$,

$$u_{17} = u_{10} + (17-10)r$$

donc : $17,4 = 9 + 7r$,

d'où : $r = \frac{17,4 - 9}{7} = \frac{8,4}{7} = 1,2$.

• On peut écrire : $u_{21} = u_{17} + 4r$,

$$u_{21} = u_{17} + (21-17)r$$

donc :

$$u_{21} = 17,4 + 4 \times 1,2 = 17,4 + 4,8$$

et finalement : $u_{21} = 22,2$.

10 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{3 + (u_n)^2}.$$

1° $v_n = (u_n)^2$.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (u_{n+1})^2 \\ &= \left(\sqrt{3 + (u_n)^2}\right)^2 \\ &= 3 + (u_n)^2 \\ &= 3 + v_n \\ &= v_n + 3, \end{aligned}$$

donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 3.

2° $v_0 = (u_0)^2 = 1^2 = 1$ et la suite (v_n) est arithmétique de raison 3, donc, pour tout entier naturel n :

$$v_n = 1 + n \times 3 = 3n + 1,$$

or, d'après la définition des suites (u_n) et (v_n) :

$$u_n \geq 0 \text{ et } v_n = (u_n)^2,$$

donc : $u_n = \sqrt{v_n}$,

et finalement : $u_n = \sqrt{3n + 1}$.

11 (u_n) : suite arithmétique de raison r .

1° $v_n = 7u_n - 3$.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (7u_{n+1} - 3) - (7u_n - 3) \\ &= 7(u_{n+1} - u_n), \end{aligned}$$

or la suite (u_n) est arithmétique de raison r , donc :

$$u_{n+1} - u_n = r,$$

ce qui implique :

$$v_{n+1} - v_n = 7r.$$

On a ainsi prouvé que la suite (v_n) est arithmétique de raison $7r$.

On pouvait aussi écrire que, pour tout entier

naturel n : $v_n = u_0 + nr,$

d'où : $v_n = 7(u_0 + nr) - 3 = 7u_0 - 3 + n \times (7r),$

et on reconnaît le terme général d'une suite arithmétique de raison $7r$.

2° $w_n = u_{2n}.$

Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} - w_n = u_{2(n+1)} - u_{2n}$$

$$= u_{2n+2} - u_{2n}$$

$$= u_{2n} + 2r - u_{2n}$$

$$= 2r.$$

$$u_{2n+2} = u_{2n+1} + r$$

$$= u_{2n} + r + r$$

$$= u_{2n} + 2r.$$

On en déduit que la suite (w_n) est arithmétique de raison $2r$.

On pouvait aussi écrire que, pour tout entier

naturel n : $u_n = u_0 + nr.$

d'où : $w_n = u_0 + 2nr = u_0 + n \times (2r).$

et on reconnaît le terme général d'une suite arithmétique de raison $2r$.

3° $t_n = (u_n)^2 - r^2 n^2.$

Pour tout entier naturel n :

$$t_n = (u_n)^2 - r^2 n^2$$

$$= (u_0 + nr)^2 - r^2 n^2$$

$$= (u_0)^2 + 2 \times u_0 \times nr + (nr)^2 - r^2 n^2$$

$$= (u_0)^2 + n \times (2ru_0).$$

On en déduit que la suite (t_n) est arithmétique de raison $2ru_0$.

On pouvait aussi écrire :

$$t_n = (u_n)^2 - (rn)^2$$

$$= (u_n - rn)(u_n + rn)$$

$$= u_0(u_0 + 2rn)$$

$$= (u_0)^2 + n \times (2ru_0).$$

Suites géométriques

12 u suite géométrique de premier terme 100 et de raison 0,2.

En supposant la suite u définie sur $\mathbb{N}$, u_0 est son premier terme, u_1 son deuxième terme, ..., et u_5 son sixième terme.

On peut écrire :

$$u_0 = 100,$$

$$u_1 = u_0 \times 0,2 = 100 \times 0,2 = 20,$$

$$u_2 = u_1 \times 0,2 = 20 \times 0,2 = 4,$$

$$u_3 = u_2 \times 0,2 = 4 \times 0,2 = 0,8,$$

$$u_4 = u_3 \times 0,2 = 0,8 \times 0,2 = 0,16,$$

$$u_5 = u_4 \times 0,2 = 0,16 \times 0,2 = 0,032.$$

En supposant la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$, u_1 est son premier terme, u_2 son deuxième terme, ..., et u_6 son sixième terme.

	C2	A = B2*0,2					
	A	B	C	D	E	F	G
1	n	1	2	3	4	5	6
2	u(n)	100	20	4	0,8	0,16	0,032
3							

13 **1°** $q > 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = q^n$.

On a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n = q \times q^n - q^n,$$

$$\text{donc : } u_{n+1} - u_n = (q - 1)q^n,$$

or $q > 0$, donc $q^n > 0$ et le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $q - 1$.

On en déduit que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n < 0 \quad \text{si} \quad 0 < q < 1,$$

$$u_{n+1} - u_n = 0 \quad \text{si} \quad q = 1,$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \text{si} \quad q > 1,$$

c'est-à-dire :

$$u_{n+1} < u_n \quad \text{si} \quad 0 < q < 1,$$

$$u_{n+1} = u_n \quad \text{si} \quad q = 1,$$

$$u_{n+1} > u_n \quad \text{si} \quad q > 1.$$

En conclusion, la suite (u_n) , c'est-à-dire la suite (q^n) , est :

• strictement décroissante si

$$0 < q < 1,$$

• constante si $q = 1$,

• strictement croissante si $q > 1$.

Si $q = 1$, alors la suite $n \mapsto q^n$ est la suite constante $n \mapsto 1$.

2° a) (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 3 \times (0,7)^n.$$

$0 < 0,7 < 1$, donc d'après la question **1°**, la suite géométrique $n \mapsto (0,7)^n$ est strictement décroissante. De plus, $3 > 0$ donc (v_n) a le même sens de variation que $n \mapsto (0,7)^n$, c'est-à-dire :

(v_n) est strictement décroissante.

b) (v_n) est la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme -2 et de raison $1,6$, donc on peut écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$v_n = 2 \times (1,6)^n.$$

$1,6 > 1$, donc d'après la question **1°**, la suite géométrique $n \mapsto (1,6)^n$ est strictement croissante. De plus, $-2 < 0$ donc (v_n) et $n \mapsto (1,6)^n$ ont des sens de variation contraires, d'où :

(v_n) est strictement décroissante.

14 1° • On a : $2^{10} = 1\,024$, donc : $2^{10} > 10^3$, donc, la fonction carré étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$:

$$(2^{10})^2 > (10^3)^2,$$

c'est-à-dire :

$$2^{20} > 10^6.$$

Pour tout réel a non nul et tous entiers n et p :

$$(a^n)^p = a^{np}.$$

Donc, en posant $n_0 = 20$, on a :

$$2^{n_0} > 10^6.$$

• À l'aide de la calculatrice :

$2^{19} = 524\,288$, $2^{20} = 1\,048\,576$, donc : $2^{19} < 10^6$ et $2^{20} > 10^6$.

Comme de plus la suite $n \mapsto 2^n$ est strictement croissante, on peut affirmer que le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^6$ est 20.

Pour tout réel q tel que $q > 1$, la suite géométrique $n \mapsto q^n$ est strictement croissante.

2° • De même, de l'inégalité $2^{10} > 10^3$, on déduit : $(2^{10})^5 > (10^3)^5$, c'est-à-dire : $2^{50} > 10^{15}$.

Donc, en posant $n_1 = 50$, on a :

$$2^{n_1} > 10^{15}.$$

• À l'aide de la calculatrice :

$$2^{49} = 562\,949\,953\,421\,312,$$

$$2^{50} = 1\,125\,899\,906\,842\,624,$$

donc : $2^{49} < 10^{15}$ et $2^{50} > 10^{15}$,

ce qui prouve que **50 est le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^{15}$.**

3° a) La suite $n \mapsto 2^n$ étant strictement croissante, de l'inégalité $2^{50} > 10^{15}$ on déduit que, pour tout entier n tel que $n \geq 50$:

$$2^n > 10^{15}.$$

Si $n \geq 50$, alors $2^n > 10^{15}$.

Plus généralement, 2^n peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que l'entier naturel n soit suffisamment grand, ce qui s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$

b) On a, pour tout entier n tel que $n \geq 50$:

$$2^n > 10^{15} > 0,$$

donc : $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^{15}}$,

c'est-à-dire : $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-15}$.

Un réel non nul et son inverse sont de même signe.

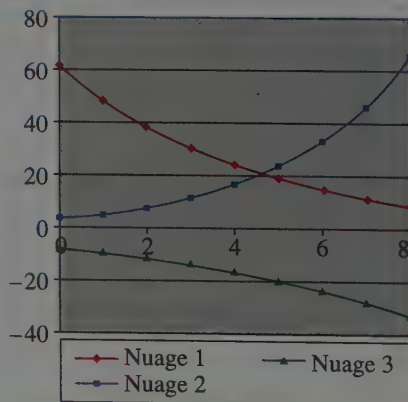
Des réels strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Plus généralement, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ peut être rendu

aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que l'entier naturel n soit suffisamment grand, ce qui s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

15



• La suite géométrique représentée par le **nuage de points n° 1** est strictement décroissante, de premier terme positif, donc **sa raison est strictement inférieure à 1** (voir l'exercice n° 13).

Les termes successifs de la suite se rapprochent de 0.

• La suite géométrique représentée par le **nuage de points n° 2** est strictement croissante, de premier terme positif, donc **sa raison est strictement supérieure à 1**.

Les termes successifs de la suite s'éloignent de 0.

• La suite géométrique représentée par le **nuage de points n° 3** est strictement décroissante, de premier terme négatif, donc **sa raison est strictement supérieure à 1**.

En notant u la suite étudiée, la suite $-u$ est la suite géométrique de premier terme positif $-u_0$ et de raison celle de u . Les représentations graphiques de u et $-u$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Les termes successifs de la suite s'éloignent de 0.

Au lieu de s'intéresser au comportement de la suite (monotonie, rapprochement ou éloignement des termes successifs de 0), on pouvait aussi considérer les deux premiers termes de la suite étudiée, et utiliser que la raison de la suite est le réel par lequel multiplier le premier terme pour obtenir le second.

Par exemple, pour le nuage n° 1, le premier terme de la suite est strictement supérieur à 60, le deuxième terme entre 40 et 50, donc la raison est nécessairement strictement inférieure à 1.

16 $u_5 = 486$ et $q = 3$.

• On a : $u_9 = u_5 \times q^{9-5} = u_5 \times q^4$,
donc : $u_9 = 486 \times 3^4 = 486 \times 81$,
et finalement : $u_9 = 39\,366$.

• D'autre part : $u_5 = u_0 \times q^5$, donc :

$$u_0 = \frac{u_5}{q^5} = \frac{486}{3^5} = \frac{486}{243} = 2.$$

17 $u_0 = 1$ et $u_7 = 128$.

On a : $u_7 = u_0 \times q^7$,

$$\text{donc : } q^7 = \frac{u_7}{u_0} = 128 ;$$

$$\text{or : } 2^7 = 128,$$

$$\text{donc : } q = 2.$$

Pour avoir la racine 7^e de 128, taper

$$7 \times \sqrt[7]{128}$$

ou

$$128^{(1 \div 7)}$$

18 $u_4 = 44$ et $u_{10} = 352$.

$$\text{On a : } u_{10} = u_4 q^6,$$

$$\text{donc : } q^6 = \frac{u_{10}}{u_4} = \frac{352}{44} = 8.$$

$$\text{D'autre part : } u_{13} = u_{10} q^3 = 352 q^3,$$

$$\text{On a : } q^6 = 8,$$

$$\text{c'est-à-dire : } (q^3)^2 = 8.$$

$$\text{De plus : } q > 0,$$

$$\text{donc : } q^3 > 0.$$

$$\text{On en déduit : } q^3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Finalement :

$$u_{13} = 352 \times 2\sqrt{2} = 704\sqrt{2}.$$

19 1° $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{6}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n,$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

$$2^\circ u_n = 3^{n-1}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = 3^n \times 3^{-1} = \frac{1}{3} \times 3^n.$$

On reconnaît le terme général de la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme $\frac{1}{3}$ et de raison 3.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 3.

Pour tout réel a non nul, tous entiers n et p :

$$a^{n+p} = a^n \times a^p.$$

On aurait pu aussi écrire que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3^n = 3 \times 3^{n-1} = 3 \times u_n.$$

$$3^\circ u_n = 3^n \times 5^n.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = (3 \times 5)^n = 15^n,$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison 15.

Pour tous réels a et b non nuls, tout entier n :

$$a^n b^n = (ab)^n.$$

On aurait pu aussi écrire que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{n+1} \times 5^{n+1} \\ &= (3 \times 3^n) \times (5 \times 5^n) \\ &= 15 \times u_n. \end{aligned}$$

$$4^\circ u_n = -3 \times 5^{-n}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = -3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Pour tout réel a non nul et tout entier n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

On aurait pu aussi écrire que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -3 \times 5^{-(n+1)} \\ &= -3 \times 5^{-n} \times 5^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \times (-3 \times 5^{-n}) \\ &= \frac{1}{5} \times u_n. \end{aligned}$$

$$5^\circ u_n = 5^{2n+1}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = 5^{2n} \times 5 = 5 \times (5^2)^n = 5 \times 25^n,$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison 25.

Pour tout réel a non nul et tous entiers n et p :

$$a^{np} = (a^n)^p = (a^p)^n.$$

On aurait pu aussi écrire que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5^{2(n+1)+1} \\ &= 5^{(2n+1)+2} \\ &= 5^2 \times 5^{2n+1} \\ &= 25 \times u_n. \end{aligned}$$

$$6^\circ u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{2^n}{3 \times 3^n} = \frac{1}{3} \times \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

$$7^\circ u_n = 3.$$

En écrivant que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \times 1,$$

ou bien :

$$u_n = 3 \times 1^n,$$

on met en évidence que (u_n) est une suite géométrique de raison 1.

Toute suite constante est une suite géométrique de raison 1.

$$8^\circ u_n = 3 \times 2^n + 2^{n+1}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = 3 \times 2^n + 2 \times 2^n = (3+2) \times 2^n,$$

donc : $u_n = 5 \times 2^n$,

ce qui prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

Calcul de sommes

$$20 \quad 1^\circ S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}.$$

S est la somme de 11 termes.

$$2^\circ S = u_1 + u_2 + \dots + u_{17}.$$

S est la somme de 17 termes.

$$3^\circ S = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

S est la somme de $(n+1)$ termes.

$$4^\circ S = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

S est la somme de n termes.

$$5^\circ S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n+1}.$$

S est la somme de $(n+2)$ termes.

$$6^\circ S = u_2 + u_3 + \dots + u_{n+1}.$$

S est la somme de n termes.

Plus généralement, p et n , étant des entiers naturels tels que $p \leq n$, $u_p + \dots + u_n$ est la somme de $(n-p+1)$ termes.

$$21 \quad S_n = 1 + 2 + \dots + 3n.$$

On sait que, pour tout entier naturel N non nul :

$$1 + 2 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2},$$

ce qui peut s'écrire : $\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2},$

donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \frac{3n(3n+1)}{2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{3n} k = \frac{3n(3n+1)}{2}$$

22 1° S étant la somme des nombres 2, 20, 200, ..., 200 000 000, on obtient :

$$S = 222\,222\,222.$$

2° T étant la somme des nombres 3 ; 0,3 ; 0,03 ; ... ; 0,000 003, on obtient :

$$T = 3,333\,333.$$

23

	A	B	C
1	n	un	Sn
2	0	0,7	0,7
3	1	1,9	2,6
4	2	3,1	5,7
5	3	4,3	10
6	4	5,5	15,5
7	5	6,7	22,2
8	6	7,9	30,1

(u_n) : suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme 0,7 et de raison 1,2.

1° La suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + 1,2,$$

on entre dans la cellule B3 la formule :

$$=B2+1.2$$

2° Pour tout entier naturel n :

$$S_n = u_0 + \dots + u_n,$$

donc on entre dans la cellule C2 la formule :

$$=SOMME(B\$2:B2)$$

Noter la présence du symbole \$ (référence absolue).

Ainsi, après recopie vers le bas de la formule dans C2, c'est par exemple la formule :

$$=SOMME(B\$2:B8)$$

qui est éditée dans la cellule C8.

24 u : suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme -5 et de raison 3.

1° La suite u est définie sur $\mathbb{N}$, donc son premier terme se note u_0 et son centième

u_{99} ; de plus, u est arithmétique de raison 3 et de premier terme -5 , donc :

$$u_{99} = -5 + 99 \times 3 = -5 + 297 = 292.$$

S étant la somme des cent premiers termes de la suite u , on obtient :

$$S = 100 \times \frac{u_0 + u_{99}}{2} = 50 \times (-5 + 292)$$

$$= 50 \times 289,$$

c'est-à-dire :

$$S = 14\,450.$$

$$S = \sum_{k=0}^{99} u_k.$$

$$2^\circ T = u_{20} + u_{21} + \dots + u_{59} = \sum_{k=20}^{59} u_k.$$

T est la somme des termes de u_{20} à u_{59} de la suite arithmétique u , et cette somme comporte 40 termes,

$$59 - 20 + 1 = 40.$$

donc :

$$T = 40 \times \frac{u_{20} + u_{59}}{2} = 20 \times (u_{20} + u_{59}).$$

De plus :

$$u_{20} = u_0 + 20 \times 3 \text{ et } u_{59} = u_0 + 59 \times 3,$$

donc :

$$u_{20} = -5 + 20 \times 3 = -5 + 60 = 55,$$

$$u_{59} = -5 + 59 \times 3 = -5 + 177 = 172,$$

d'où : $T = 20 \times (55 + 172) = 20 \times 227$, et finalement :

$$T = 4\,540.$$

$$\mathbf{25} \quad S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = \sum_{k=0}^n 2^k.$$

1° Pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$$

Pour tout réel q différent de 1 et tout entier naturel n non nul :

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$2^\circ \text{ a) } U_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} 2^k.$$

Pour tout entier naturel n non nul :

$$U_n = S_{2n+1} = 2^{(2n+1)+1} - 1,$$

donc :

$$U_n = 2^{2n+2} - 1.$$

On peut aussi écrire :

$$U_n = 2^{2 \times (n+1)} - 1 = (2^2)^{n+1} - 1 = 4^{n+1} - 1.$$

$$\text{b) } V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{2^n} (2^n + 2^{n-1} + \dots + 1) \\ &= \frac{1}{2^n} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) \\ &= \frac{1}{2^n} \times S_n, \end{aligned}$$

donc :

$$V_n = \frac{1}{2^n} (2^{n+1} - 1) = \frac{2^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{2^n},$$

$$\text{c'est-à-dire : } V_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{En écrivant : } V_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right), \end{aligned}$$

$$\text{on retrouve : } V_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

26 u : suite géométrique de raison 0,2 telle que $u_0 = 3$.

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_5 = \sum_{k=0}^5 u_k.$$

On a :

$$S = \frac{u_0(1 - (0,2)^6)}{1 - 0,2} = \frac{3(1 - 0,000\,064)}{0,8},$$

$$\text{d'où : } S = \frac{3 \times 0,999\,936}{0,8},$$

et finalement :

$$S = 3,749\,76.$$

$$\text{27 } u_n = 0, \underbrace{6 \dots 6}_{\substack{n \text{ chiffres} \\ 6}}.$$

1° On a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= 0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots + 0, \underbrace{0 \dots 06}_{n \text{ chiffres}} \\ &= 0,6 + \frac{6}{100} + \frac{6}{1\,000} + \dots + \frac{6}{10^n} \\ &= 0,6 + 0,6 \times \frac{1}{10} + 0,6 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots \\ &\quad + 0,6 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

ce qui met en évidence que u_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme

$$0,6 \text{ et de raison } \frac{1}{10}.$$

2° On en déduit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{0,6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{10}},$$

donc :

$$u_n = 0,6 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0,6}{0,9} \times \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right),$$

c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Comme l'on pouvait s'y attendre, u_n peut être rendu aussi proche de $\frac{2}{3}$ que l'on veut, pourvu que n soit suffisamment grand, ce qui s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

28 Les suites u et v sont définies sur $\mathbb{N}$.

$$\text{1° } u_0 = 1,$$

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 3,$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 7;$$

$$\bullet u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0,$$

donc u n'est pas une suite arithmétique.

$$\bullet \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0},$$

donc u n'est pas une suite géométrique.

L'égalité $u_2 - u_1 = u_1 - u_0$ ne permettrait pas d'affirmer que la suite u est arithmétique.

De même, l'égalité $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0}$ ne permettrait pas d'affirmer que la suite u est géométrique.

2° • Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n + 1),$$

$$\text{d'où : } v_{n+1} = 2v_n;$$

donc v est une suite géométrique de raison 2. Son premier terme v_0 est tel que :

$$v_0 = u_0 + 1 = 2.$$

• Pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1},$$

$$u_n = v_n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

3° S est la somme de $n+1$ termes consécutifs de la suite géométrique v de raison 2, et dont le premier terme est v_0 ,

donc :

$$S = \frac{v_0(1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = \frac{2(1 - 2^{n+1})}{-1},$$

$$\text{d'où : } S = 2(2^{n+1} - 1).$$

D'autre part :

$$S' = u_0 + u_1 + \dots + u_n,$$

$$S' = v_0 - 1 + v_1 - 1 + \dots + v_n - 1 = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (n+1) \times (-1),$$

$$S' = 2(2^{n+1} - 1) - n - 1,$$

$$\text{donc : } S' = 2^{n+2} - n - 3.$$

Quelques problèmes concrets

29 **1°** Il y aura :

- 64 parties au 1^{er} tour,
 - 32 parties au 2^e tour (pour 64 joueurs),
 - 16 parties au 3^e tour (pour 32 joueurs),
- et ainsi de suite jusqu'au 7^e tour où les deux finalistes se rencontrent.

Or :

$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$,
donc le nombre total de parties à prévoir est 127.

2° Il y aura $\frac{2^n}{2}$ parties, c'est-à-dire 2^{n-1} parties au 1^{er} tour.

D'un tour au tour suivant, le nombre de parties est divisé par 2.

Le nombre total de parties est :

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 2^0.$$

Il s'agit de calculer la somme S_n des n premiers termes consécutifs de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 :

$$S_n = 1 \times \left(\frac{1 - 2^n}{1 - 2} \right) = 2^n - 1.$$

Il faudra prévoir $2^n - 1$ parties.

Qui a été suffisamment astucieux pour s'apercevoir qu'il y a autant de parties à prévoir que de joueurs à éliminer, c'est-à-dire $2^n - 1$?

30 u_n : le gain en euros pour une réponse correcte à la n -ième question.

1° • (u_n) est la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = 60$$

(le candidat gagne 60 € s'il répond correctement à la première question)

et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + 35.$$

(chaque bonne réponse rapporte au candidat 35 € de plus que la précédente).

• On en déduit que (u_n) est la suite arithmétique, définie sur $\mathbb{N}^*$, de premier terme 60 et de raison 35, donc, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times 35$$

$$= 60 + (n-1) \times 35$$

$$= 60 + n \times 35 - 35,$$

c'est-à-dire :

$$u_n = 35n + 25.$$

2° Pour tout entier naturel n non nul, notons S_n le gain en euros du candidat lorsqu'il donne n bonnes réponses. S_n est la somme des n premiers termes de la suite (u_n) , donc :

$$S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2},$$

d'où :

$$S_n = n \times \frac{60 + 35n + 25}{2} = \frac{n}{2}(35n + 85).$$

Déterminons le plus petit entier naturel non nul tel que $S_n \geq 1\,000$.

La suite (S_n) est croissante,

pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ et $u_{n+1} > 0$,

de plus, à l'aide de la calculatrice ou du tableur : $S_6 = 885$ et $S_7 = 1\,155$,

$$S_6 < 1\,000 \text{ et } S_7 \geq 1\,000$$

ce qui permet de conclure que, pour gagner au moins 1 000 €, le candidat doit donner au minimum 7 bonnes réponses.

C2		=SOMME(B5:B2)	
	A	B	C
1	n	u(n)	S(n)
2	1	60	60
3	2	95	155
4	3	130	285
5	4	165	450
6	5	200	650
7	6	235	885
8	7	270	1155
9	8	305	1460
10	9	340	1800
11	10	375	2175

31 1° • Le capital augmente de 600 € par an, donc le placement effectué dans la banque A est à intérêts simples.

(C_n) est la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme 10 000 et de raison 600.

À la fin de chaque année, Monsieur Carrédas touche les intérêts de son placement, qui s'élèvent à 600 €, et cette somme n'est pas réinvestie (c'est par exemple le cas d'un placement en obligations).

• $600 = 0,06 \times 10\,000$, donc le taux de ce placement est de 6 %.

$$C_1 - C_0 = 0,06 \times C_0.$$

2° On a : $\frac{10\,550}{10\,000} = 1,055$, et on vérifie

facilement à la calculatrice que, pour tout entier n compris au sens large entre 1 et 10, K_n est l'arrondi entier de $10\,000 \times (1,055)^n$.

On en déduit que le placement effectué dans la banque B est à intérêts composés, au taux de 5,5 %.

Le capital K_1 en euros acquis à la fin de la première année vérifie :

$$K_1 = K_0 + 0,055 \times K_0 \\ = (1,055)K_0.$$

À la fin de la deuxième année, le capital acquis K_2 en euros vérifie :

$$K_2 = K_1 + 0,055 \times K_1 \\ = (1,055)K_1 \\ = (1,055)^2 K_0,$$

et ainsi de suite.

32 Placement de 100 000 € au taux annuel de 7 % à intérêts composés.

1° Notons u_n le capital en euros au bout de n années.

On a donc : $u_0 = 100\,000$,

$$u_1 = u_0 + \frac{7}{100}u_0 = 1,07u_0,$$

$$u_2 = u_1 + \frac{7}{100}u_1 = 1,07u_1,$$

et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{7}{100}u_n,$$

soit :

$$u_{n+1} = 1,07u_n.$$

Cela prouve que la suite $n \mapsto u_n$, définie sur $\mathbb{N}$, est géométrique : sa raison est 1,07 et son premier terme est 100 000.

On a donc, pour tout entier naturel n :

$$u_n = (1,07)^n \times u_0,$$

soit :

$$u_n = (1,07)^n \times 100\,000.$$

On en déduit :

$$u_4 = (1,07)^4 \times 100\,000 = 131\,079,601$$

et :

$$u_{10} = (1,07)^{10} \times 100\,000,$$

d'où :

$$u_{10} \approx 196\,715,1357 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Finalement, le capital, au centime près, est de 131 079,60 euros au bout de quatre ans, et de 196 715,14 euros au bout de 10 ans.

2° • Le capital aura doublé au bout de la n -ième année dès que l'on aura :

$$\frac{u_n}{u_0} \geq 2,$$

c'est-à-dire :

$$(1,07)^n \geq 2.$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$(1,07)^{10} \approx 1,97 \text{ à } 10^{-2} \text{ près,}$$

$$(1,07)^{11} \approx 2,10 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Finalement, le capital doublera au cours de la 11^e année.

La suite géométrique $n \mapsto (1,07)^n$ est croissante car : $1,07 > 1$.

• Suivons la même démarche.

Cherchons le plus petit entier naturel n tel que :

$$(1,07)^n \geq 3.$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$(1,07)^{16} \approx 2,95 \text{ à } 10^{-2} \text{ près,}$$

$$(1,07)^{17} \approx 3,16 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Finalement, le capital triplera au cours de la 17^e année.

33 1° Contrat A : salaire mensuel net d'embauche de 2 100 €, augmenté tous les ans de 130 €.

• u_n : salaire mensuel net en euros la n -ième année de travail.

(u_n) est la suite arithmétique de raison 130 et de premier terme u_1 égal à 2 100, donc, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times 130$$

$$= 2\,100 + 130n - 130,$$

c'est-à-dire :

$$u_n = 130n + 1\,970.$$

• Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le montant cumulé en euros des salaires perçus par Mlle N la n -ième année de travail est $12u_n$.

$$12u_n = 12 \times (u_1 + (n-1) \times 130)$$

$$= 12 \times u_1 + (n-1) \times (12 \times 130)$$

$(12u_n)$ est une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$, de premier terme $12u_1$ et de raison 12×130 , donc le montant cumulé S_n en euros des salaires perçus par Mlle N à l'issue de n années de travail vérifie :

$$S_n = n \times \frac{12u_1 + 12u_n}{2},$$

d'où :

$$S_n = 6n \times (2\,100 + 130n + 1\,970)$$

$$= 6n \times (130n + 4\,070)$$

$$= 60n(13n + 407),$$

et finalement : $S_n = 60(13n^2 + 407n)$.

On peut aussi écrire :

$$S_n = 12u_1 + 12u_2 + \dots + 12u_n$$

$$= 12(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$

$$= 12 \times n \times \frac{2\,100 + 130n + 1\,970}{2}$$

$$= 6n \times (130n + 4\,070).$$

2° Contrat B : salaire mensuel net d'embauche de 1 850 €, augmenté tous les ans de 6 %.

• v_n : salaire mensuel net en euros la n -ième année de travail.

(v_n) est la suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme v_1 égal à 2 100, donc, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$v_n = v_1 \times (1,06)^{n-1},$$

c'est-à-dire :

$$v_n = 2\,100 \times (1,06)^{n-1}.$$

Augmenter de 6 % revient à multiplier par 1,06.

• Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le montant cumulé en euros des salaires perçus par Mlle N la n -ième année de travail est $12v_n$.

$$12v_n = 12 \times v_1 \times (1,06)^{n-1}.$$

$(12v_n)$ est une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$, de premier terme $12v_1$ et de raison 1,06, donc le montant cumulé T_n en euros des salaires perçus par Mlle N à l'issue de n années de travail vérifie :

$$T_n = 12v_1 \times \frac{1 - (1,06)^n}{1 - 1,06},$$

d'où :

$$T_n = 12 \times 2\,100 \times \frac{(1,06)^n - 1}{0,06}$$

et finalement :

$$T_n = 420\,000 \times ((1,06)^n - 1).$$

3°

E5		=12*SOMME(C\$2:C5)			
	A	B	C	D	E
1	n	u(n)	v(n)	S(n)	T(n)
2	1	2100	2100	25200	25200
3	2	2230	2226	51960	51912
4	3	2360	2360	80280	80227
5	4	2490	2501	110160	110240
6	5	2620	2651	141600	142055
7	6	2750	2810	174600	175778
8	7	2880	2979	209160	211525
9	8	3010	3158	245280	249416
10	9	3140	3347	282960	289581

a) Sachant que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + 130$, on peut entrer en B3 la formule :

$$=B2+130$$

De même, sachant que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = 1,06 + u_n$, on peut entrer en C3 la formule :

$$=C2*1,06$$

b) On peut entrer en D2 la formule :

$$=12*SOMME(B\$2:B2)$$

En étirant cette formule vers la droite, la formule entrée en E2 est :

$$=12*SOMME(C\$2:C2)$$

Grâce au symbole \$ (référence absolue), en étirant ensuite les formules de la plage D2:E2 vers le bas, la formule entrée par exemple dans la cellule E5 est la suivante :

$$=12*SOMME(C\$2:C5)$$

c) On lit dans la feuille de calcul :

- si $n \leq 3$, alors $S_n > T_n$,
- si $4 \leq n \leq 10$, alors $S_n < T_n$.

Il est possible d'établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$S_n < T_n.$$

On en déduit que le contrat A est plus avantageux pour Mlle N si elle compte rester trois ans dans l'entreprise, et que c'est le contrat B si elle compte y rester quatre ou cinq ans.

En utilisant les formules donnant S_n et T_n obtenues aux questions 1° et 2°, on retrouve à l'aide de la calculatrice :

$$S_3 = 80\,280$$

$$S_4 = 110\,160$$

et, plus précisément :

$$T_3 \approx 80\,226,72$$

$$T_4 \approx 110\,240,32.$$

Les interrogations écrites

34 (u_n) : suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$, de premier terme a et de raison b .

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

1° La suite (u_n) est définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = b \times u_n.$$

2° Algorithme de calcul de u_n et S_n :

Variables

n, k : entiers

a, b, u, S : réels

Entrée

Saisir a, b, n

Initialisation

u prend la valeur a

S prend la valeur a

Traitement

Pour k variant de 1 à n faire

u prend la valeur $b \times u$

S prend la valeur $S + u$

fin Pour

Sortie

Afficher u

Afficher S

35 u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , donc, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} &= 4u_0 + (4 + 6 + 8 + 10)r \\ &= 4u_0 + 28r, \end{aligned}$$

$$u_1 + u_{11} = 2u_0 + (1 + 11)r = 2u_0 + 12r.$$

$$\text{Or : } u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = -8,$$

$$u_1 + u_{11} = -3.$$

$$\text{donc : } \begin{cases} 4u_0 + 28r = -8 \\ 2u_0 - 12r = -3. \end{cases}$$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} u_0 + 7r = -2 \\ -u_0 - 6r = 1,5. \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre les deux égalités, on obtient : $r = -0,5$.

D'où d'après la première égalité :

$$u_0 = -2 - 7 \times (-0,5) = 1,5.$$

$$\text{Finalement : } u_0 = \frac{3}{2} \text{ et } r = -\frac{1}{2}.$$

36 u : suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$,

$$u_0 = 9.$$

$$S = u_3 + u_4 + \dots + u_{10} = \sum_{k=3}^{10} u_k.$$

S étant la somme de huit termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et le premier terme de la somme étant

u_3 , on peut écrire :

$$S = u_3 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^8}{1 - \frac{2}{3}} = u_3 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^8}{\frac{1}{3}},$$

c'est-à-dire : $S = 3u_3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^8\right)$.

De plus : $u_3 = u_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$,

et comme $u_0 = 9$, il vient :

$$u_3 = 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 9 \times \frac{8}{3 \times 9} = \frac{8}{3}.$$

On en déduit :

$$S = 8 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^8\right) = 8 \times \left(1 - \frac{2^8}{3^8}\right)$$

$$S = 8 \times \frac{3^8 - 2^8}{3^8},$$

c'est-à-dire, tous calculs effectués :

$$S = \frac{50\,440}{6\,561}.$$

$$S \approx 7,688.$$

37 • Placement de Monsieur Dupont

10 000 euros ont été placés pendant exactement 12 ans, 10 000 autres euros ont été placés pendant exactement 11 ans, ... enfin, 10 000 euros ont été placés pendant exactement 1 an.

Le capital C_1 , en euros, de Monsieur Dupont vérifie donc :

$$C_1 = (1,06)^{12} \times 10\,000 + (1,06)^{11} \times 10\,000 + \dots + (1,06) \times 10\,000,$$

c'est-à-dire :

$$C_1 = 1,06 \times 10\,000 \times [(1,06)^{11} + (1,06)^{10} + \dots + 1].$$

$1 = (1,06)^0$ et il y a douze entiers compris au sens large entre 0 et 11.

On reconnaît à l'intérieur des crochets la somme des 12 premiers termes d'une

suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme 1.

On a donc :

$$C_1 = 1,06 \times 10\,000 \times \frac{1 - (1,06)^{12}}{1 - 1,06},$$

$$C_1 = 10\,600 \times \frac{(1,06)^{12} - 1}{0,06},$$

$$C_1 \approx 178\,821,376\,7.$$

Par conséquent, au bout de douze années, Monsieur Dupont dispose de 178 821,38 euros, au centime près.

• Placement de Monsieur Durand

30 000 euros ont été placés pendant exactement 12 ans,

30 000 euros ont été placés pendant exactement 9 ans,

30 000 euros ont été placés pendant exactement 6 ans,

30 000 euros ont été placés pendant exactement 3 ans.

Le capital C_2 , en euros, de Monsieur Durant, vérifie donc :

$$C_2 = (1,06)^{12} \times 30\,000 + (1,06)^9 \times 30\,000 + (1,06)^6 \times 30\,000 + (1,06)^3 \times 30\,000,$$

c'est-à-dire :

$$C_2 = (1,06)^3 \times 30\,000 \times [(1,06)^9 + (1,06)^6 + (1,06)^3 + 1].$$

On reconnaît à l'intérieur des crochets la somme des 4 premiers termes d'une suite géométrique de raison $(1,06)^3$ et de premier terme 1.

On a donc :

$$C_2 = (1,06)^3 \times 30\,000 \times \frac{1 - [(1,06)^3]^4}{1 - (1,06)^3}$$

$$C_2 = 35\,730,48 \times \frac{(1,06)^{12} - 1}{0,191\,016}$$

$$C_2 \approx 189\,336,316\,3.$$

Par conséquent, au bout de douze années, Monsieur Durant dispose de 189 336,32 euros, au centime près.

LE COURS

Échantillonnage

Lorsque l'effectif de la population est très important, on peut étudier les différents caractères sur un **échantillonnage** de cette population.

► **Fluctuation d'échantillonnage**

On cherche l'influence sur les résultats d'une modification de l'échantillon, soit en prenant d'autres échantillons de même effectif que le premier échantillon, soit en considérant des échantillons d'effectifs très différents.

Paramètres de position d'une série quantitative

Considérons une série statistique $(x_i ; n_i)$, avec i entier naturel variant de 1 à p . L'effectif total, c'est-à-dire le nombre d'individus observés, sera noté n . La fréquence f_i est le quotient de l'effectif n_i par l'effectif total n .

On a les relations :

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p = \sum_{i=1}^p n_i$$

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^p f_i = 1$$

• Les **paramètres de position** « globalisent » la série en caractérisant un ordre de grandeur des observations et sont exprimés avec la même unité.

► **Mode**

• On appelle **mode(s) de la série statistique** $(x_i ; n_i)$, la (les) valeur(s) du caractère dont l'effectif est le plus grand. Il est à remarquer qu'une série peut avoir plusieurs modes.

• **Remarque**

Le mode est peu sensible à la valeur des termes extrêmes mais assez aux fluctuations d'échantillonnage. Il est facile à déterminer mais ne se prête pas aux calculs algébriques.

Moyenne

- On appelle **moyenne de la série statistique** $(x_i ; n_i)$, le nombre, en général noté $\bar{x}$, défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_p \times x_p}{n} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i \times x_i}{n} = \sum_{i=1}^p f_i \times x_i$$

Remarque

La moyenne peut être très sensible à la valeur des termes extrêmes et aux fluctuations d'échantillonnage. Elle est facile à calculer et se prête aux calculs algébriques, tout en ne coïncidant, que par hasard, avec une valeur observée du caractère.

Moyennes mobiles, lissage

Considérons une série chronologique de n valeurs y_i , i variant de 1 à n .

On construit le nuage de point $A_i(i ; y_i)$ représentant cette série ainsi que la ligne polygonale $A_1, A_2, \dots, A_n$ représentant l'évolution du phénomène.

On dégage une tendance, en lissant ce graphique par les moyennes mobiles. Les moyennes mobiles m_i d'ordre 3, par exemple, répondent aux définitions suivantes :

i	1	2	3	...	$n-1$	n
m_i		$m_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$	$m_3 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}$	...	$m_{n-1} = \frac{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{3}$	

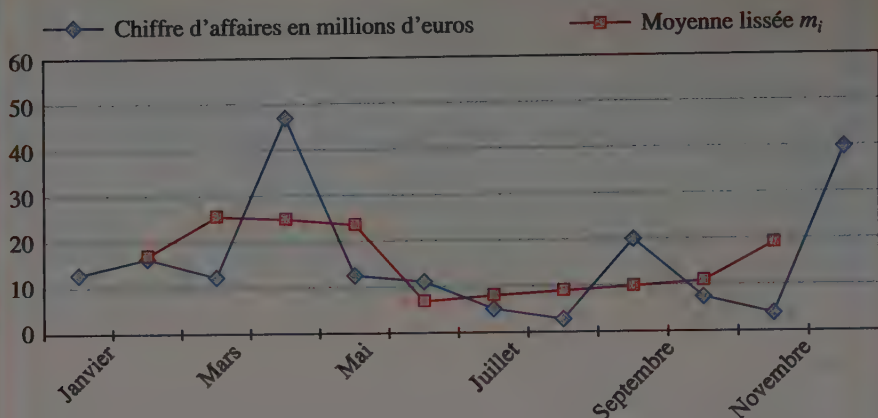
On lisse le graphique par la ligne polygonale $B_2, B_3, \dots, B_{n-1}$, où B_i a pour coordonnées $(i ; m_i)$. L'utilisation d'un tableur permet d'obtenir rapidement ces résultats. Nous mettrons en œuvre cette technique dans les exercices.

- Illustration concernant le chiffre d'affaires d'une entreprise au cours d'une année :

C3 =(B2+B3+B4)/3

	A	B	C	D
	Mois	Chiffre d'affaires en millions d'euros	Moyenne lissée m_i	
1	Janvier	12		
2	Février	14	12,7	
3	Mars	12	24,7	
4	Avril	48	24,0	
5	Mai	12	23,7	
6	Juin	11	9,3	
7	Juillet	5	6,3	
8	Août	3	9,3	
9	Septembre	20	10,3	
10	Octobre	8	11,3	
11	Novembre	6	18,0	
12	Décembre	40		

L'assistant graphique nous donne les courbes suivantes :



L'avantage d'une telle représentation est de rendre compte de la tendance générale de l'évolution, en tenant compte de toutes les valeurs, tout en « gommant » les résultats extrêmes.

Médiane

- On ordonne la série des observations (x_i) par ordre croissant ; la médiane souvent notée Me , est une valeur (réelle ou fictive) du caractère, qui partage la population en deux sous-populations de même effectif.

Remarque

La médiane est peu sensible à la valeur des termes extrêmes mais elle l'est aux fluctuations d'échantillonnage. Elle est facile à calculer mais ne se prête pas aux calculs algébriques.

Paramètres de dispersion d'une série quantitative

Les paramètres de dispersion d'une série quantitative (x_i ; n_i) évaluent la dispersion des valeurs, en général autour d'un des paramètres de position, $\bar{x}$ ou Me .

L'étendue

C'est la différence entre la plus grande valeur des x_i et la plus petite valeur des x_i .

Les quartiles et l'écart interquartile

Les valeurs sont rangées par ordre croissant.

- Le **premier quartile** est le plus petit élément Q_1 des valeurs du caractère tel qu'au moins 25 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- Le **troisième quartile** est le plus petit élément Q_3 des valeurs du caractère tel qu'au moins 75 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- L'**écart interquartile** est le réel $Q_3 - Q_1$.

- De manière générale, pour une série statistique à valeurs dans un intervalle I , on définit la fonction quantile Q , de $[0 ; 1]$ dans I , par :

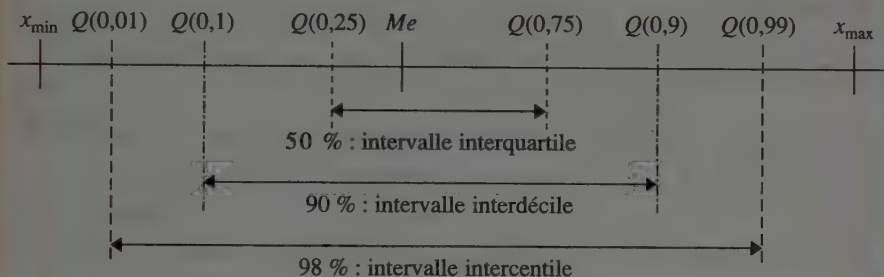
$$Q(u) = \inf \{ x, F(x) \geq u \}$$

où F désigne la fréquence des éléments inférieurs ou égaux à x .

On a alors :

$$Q_1 = Q(0,25) \text{ et } Q_3 = Q(0,75).$$

- On peut de manière analogue définir les déciles, les centiles, et les écarts correspondants.



La variance V

C'est la moyenne des carrés des écarts de chacune des valeurs à leur moyenne, c'est-à-dire la moyenne des $(x_i - \bar{x})^2$.

$$V = \frac{n_1 \times (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 \times (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p \times (x_p - \bar{x})^2}{n}$$

c'est-à-dire :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i \times (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

ou encore :

$$V = \sum_{i=1}^p f_i \times (x_i - \bar{x})^2.$$

On peut démontrer : $V = \frac{\sum_{i=1}^p n_i \times x_i^2}{n} - \bar{x}^2$. Cette formule facilite les calculs.

- L'écart type, noté s , est la racine carrée de la variance. Il est d'autant plus grand que les valeurs sont plus éloignées les unes des autres.

$$s = \sqrt{V}.$$

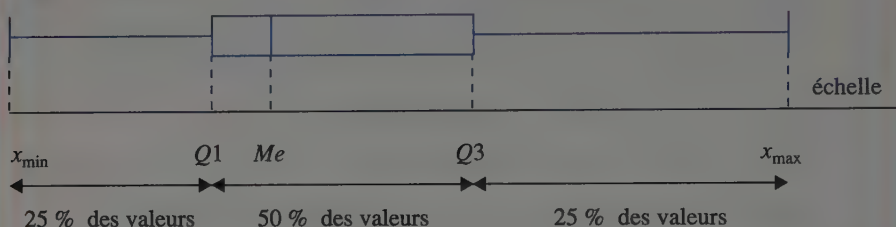
Les représentations graphiques

Rappelons pour mémoire les différents types de diagrammes.

- Pour les **caractères qualitatifs** nous disposons :
 - du diagramme en bandes ;
 - du diagramme à secteurs circulaires.
- Pour les **caractères quantitatifs** discrets, nous disposons :
 - du diagramme en bâtons ;
 - du diagramme à secteurs circulaires.
- Pour les **séries** dont les valeurs sont regroupées en classes, nous disposons de l'histogramme, l'aire d'un rectangle étant proportionnelle à l'effectif de la classe.

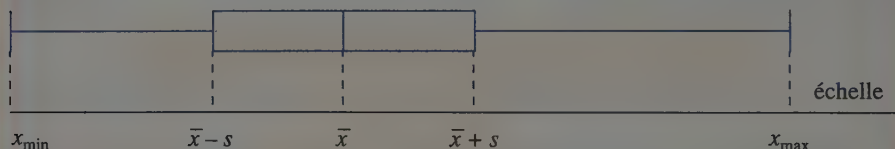
Diagrammes en boîte ou boîte-à-pattes ou boîte-à-moustaches

● Boîte médiane



Cette représentation donne simultanément des renseignements sur sa tendance centrale, sa dispersion, son asymétrie, et l'importance des valeurs extrêmes. Elle permet de comparer facilement plusieurs distributions statistiques.

● Boîte moyenne



EXERCICES

Vrai ou faux ?

1

(corrigés p. 226)

- 1° Dans une classe de 35 élèves, on étudie les notes du dernier contrôle de math.
- a) La note moyenne indique que la moitié de la classe a au moins cette note.
 - b) La note moyenne est la demi-somme des notes extrêmes.
 - c) La somme des notes est le produit de la moyenne par 35.
 - d) Si on augmente toutes les notes de 3 points, alors la moyenne est augmentée de 3 points.
- 2° Pour toute série statistique dont le caractère est quantitatif :
- a) Si toutes les valeurs du caractère sont multipliées par 10, alors la moyenne est multipliée par 10.
 - b) La médiane est la moyenne du premier quartile et du troisième quartile.
 - c) La moyenne est inférieure ou égale à la médiane.
 - d) La fréquence d'une valeur peut être égale à 1,5.
- 3° Pour toute série statistique de 400 valeurs :
- a) Au moins 100 valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 .
 - b) Exactement 100 valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 .
 - c) Au moins 300 valeurs sont strictement supérieures à Q_1 .
 - d) Au plus 100 valeurs sont strictement supérieures à Q_3 .

Mode, moyenne, médiane

2

★ 10 min

(corrigés p. 226)

Dans chacun des cas suivants, déterminer le ou les mode(s), la moyenne et la médiane.

- 1° De la série statistique brute : 12 ; 13 ; 10 ; 15 ; 15 ; 12 ; 11 ; 12 ; 15 ; 13.
- 2° De la série statistique brute : 4 ; 5 ; 1 ; 9 ; 2 ; 8 ; 7 ; 7 ; 2 ; 3 ; 7.

3

★ 15 min

(corrigés p. 227)

1° Déterminer le ou les mode(s), la moyenne et la médiane de la série statistique dépouillée $(x_i ; n_i)$ définie par :

x_i	3	-2	5	-4	0	2
n_i	15	10	22	17	10	1

2° a) Déterminer le ou les mode(s), la moyenne et la médiane de la série statistique, dont les valeurs ont été regroupées en classes, définie par :

Classes	Effectif
[0 ; 5[	15
[5 ; 10[	25
[10 ; 15[	7
[15 ; 20]	3

b) Pour cette dernière série, dessiner son histogramme.

4 ★★ 15 min

(corrigés p. 228)

Un centre de vacances, qui accueille des enfants de cinq à treize ans, les regroupe par tranche d'âge de la façon suivante :

Classes	Effectif
[5 ; 7[	10
[7 ; 9[	31
[9 ; 12[	33
[12 ; 14]	26

1° a) Compléter le tableau statistique suivant, où x_i désigne le centre d'une classe, a_i son amplitude, n_i son effectif et $n_i \uparrow$ l'effectif cumulé croissant.

Classes	x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i \uparrow$	n_i / a_i

b) En déduire la moyenne $\bar{x}$, la classe modale et la médiane Me de la série statistique.

2° Tracer l'histogramme.

Quartiles

5 ★★ 15 min

(corrigés p. 229)

Considérons une série de n valeurs $x_1, \dots, x_n$ rangées dans l'ordre croissant.

• La calculatrice adopte pour définition de la médiane Me la même que celle du cours :

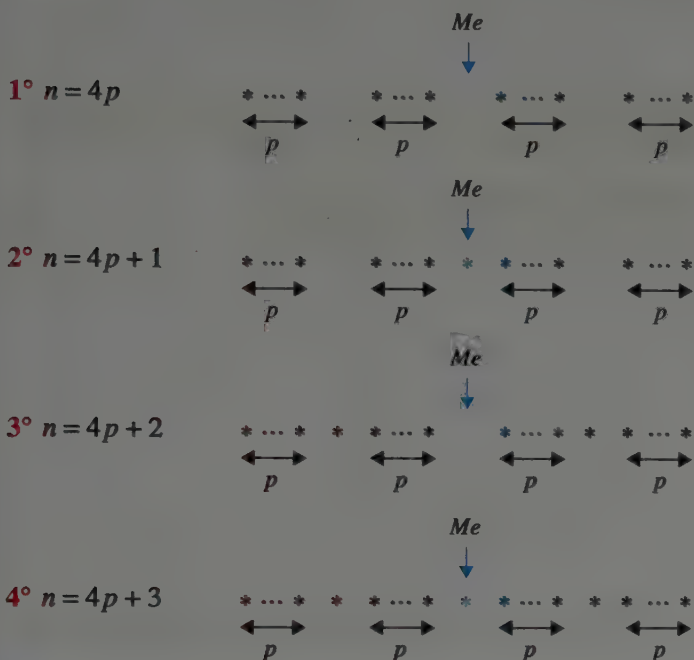
– si n est impair, en écrivant : $n = 2r + 1$, alors Me est la $r^{\text{ième}}$ valeur ;

– si n est pair, en écrivant : $n = 2r$, alors Me est la demi-somme des valeurs de rang r et $r + 1$.

• D'après la définition du cours, le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur dont le rang k vérifie : $k \geq \frac{n}{4}$.

La calculatrice adopte une autre définition : le premier quartile Q_1 est la médiane des valeurs situées à gauche de la médiane Me .

Placer Q_1 et Q_1 sur le schéma dans chacun des cas suivants (p désigne un entier naturel) :



Utilisation de la calculatrice

6 ★ 10 min

(corrigés p. 230)

1° Dans la première liste de la calculatrice, entrer successivement les valeurs suivantes : 2 ; 7 ; 3 ; 2 ; 5 ; 1 ; 3.

2° Comment trier les éléments de la liste par ordre croissant ?

3° Comment remplacer chaque terme x_i de cette liste par $10x_i - 1$?

4° Comment vider la liste ?

7 ★★ 15 min

(corrigés p. 231)

On demande aux vingt élèves d'une classe le nombre de CD qu'ils possèdent. La liste des réponses est la suivante :

6 ; 19 ; 5 ; 13 ; 50 ; 7 ; 14 ; 52 ; 49 ; 5 ; 7 ; 12 ;
17 ; 15 ; 8 ; 5 ; 6 ; 16 ; 48 ; 10.

À l'aide d'une calculatrice :

1° déterminer la moyenne $\bar{x}$ et une approximation à 10^{-2} près de l'écart type s de cette série de réponses ;

2° trier les réponses dans l'ordre croissant et déterminer la médiane Me , les quartiles Q_1 et Q_3 ;

3° afficher la boîte médiane.

8 ★★ 15 min

(corrigés p. 234)

Le nombre d'interventions journalières des pompiers d'une caserne, pour l'année, est distribué comme indiqué ci-dessous :

Nombre de sorties journalières	Effectif
0	84
1	95
2	80
3	58
4	29
5	14
6	5

À l'aide d'une calculatrice :

1° Déterminer :

a) une approximation à 10^{-2} près de la moyenne $\bar{x}$ et de l'écart type s de cette série de résultats ;

b) la médiane Me , les quartiles Q_1 et Q_3 .

2° Afficher le diagramme en bâtons.

9 ★★ 15 min

(corrigés p. 235)

On demande aux 20 élèves d'une classe le nombre de CD qu'ils possèdent. Les réponses sont les suivantes :

6, 10, 5, 10, 50, 5, 15, 50, 50 5, 6, 10, 17, 15, 10, 5, 6, 5, 50, 10.

1° Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le mode, la moyenne, la médiane, les quartiles et l'écart type de cette série.

2° Tracer les diagrammes en boîte (sur une feuille ou à l'aide de la calculatrice) et commenter la figure obtenue.

10 ★★ 15 min

(corrigés p. 237)

On choisit vingt fois de suite un chiffre au hasard.

1° Écrire un algorithme qui simule cette expérience aléatoire et qui affiche le nombre de chiffres 0.

2° Transcrire l'algorithme précédent sur la calculatrice.

11 ★★ 15 min

(corrigés p. 238)

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue n lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

1° Écrire un algorithme qui simule cette expérience aléatoire et donne en sortie le nombre de « côté face » obtenu.

2° Transcrire l'algorithme précédent sur la calculatrice.

Utilisation du tableur

12 ★★ 15 min

(corrigés p. 238)

On recense le nombre d'enfants des familles d'un quartier. On obtient les résultats ci-dessous :

0	1	1	3	2	4	2	1	1	2
3	1	2	2	1	0	1	0	0	1
3	1	2	2	2	3	0	1	2	5
4	2	2	4	5	3	2	1	1	2
1	1	0	2	2	1	3	2	4	2

1° Quelle est la population étudiée ? Quelle est la nature du caractère ?

Quelles sont les valeurs du caractère ?

2° À l'aide d'un tableur :

a) effectuer le dépouillement de cette série de résultats et préciser le nombre d'enfants dominant ;

b) calculer les fréquences en pourcentages ;

c) calculer la moyenne $\bar{x}$;

d) donner l'arrondi automatique à 10^{-2} près de l'écart type s ;

e) représenter la série de résultats par un diagramme circulaire.

13 ★★ 30 min

(corrigés p. 240)

Le but de l'exercice est de simuler le lancer d'un dé équilibré, avec un tableur.

1° • Sur une plage de format 100 lignes $\times$ 10 colonnes, simuler 1 000 lancers du dé.

• Dresser un tableau donnant les fréquences de chacun des six résultats sur les 10 premiers lancers, les 100 premiers lancers, les 1 000 premiers lancers.

• Tracer les trois courbes représentant l'évolution de ces six fréquences.

2° • Sur une colonne, afficher les fréquences d'apparition du 5 au bout de 10, 20, ..., 1 000 lancers.

• Tracer la courbe représentative de l'évolution de ces fréquences.

Transformation affine de données

14 ★★ 15 min

(corrigés p. 242)

1° Calculer l'écart interquartile EQ , la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type s_x de la série statistique brute dont les valeurs x_i sont les suivantes :

0 ; 11 ; 8 ; 5 ; 11 ; 10 ; 11 ; 7 ; 13 ; 5.

2° Dix fils sont soumis à des tests de résistance ; pour chacun d'eux, on note la charge (en kilogrammes) nécessaire pour obtenir la rupture. Les résultats y_i obtenus sont les suivants :

1,20 ; 1,31 ; 1,28 ; 1,25 ; 1,31 ; 1,30 ; 1,31 ; 1,27 ; 1,33 ; 1,25.

a) Trouver une relation simple entre les y_i et les x_i .

b) En déduire l'écart interquartile EQ' , la moyenne $\bar{y}$ et l'écart type s_y de la série statistique des y_i .

Boîte-à-moustaches

15 ★ 5 min

(corrigés p. 242)

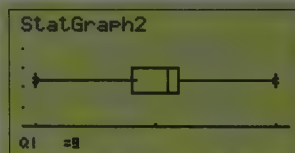
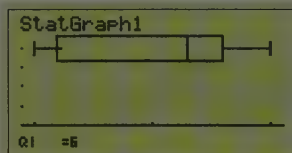
Xavier et Yohan ont eu respectivement pour notes aux devoirs de mathématiques :

• 5 ; 11 ; 5 ; 12 ; 13 ; 14 ; 13 ; 6 ; 7 ; 15.

• 9 ; 5 ; 9 ; 11 ; 11 ; 11 ; 10 ; 9 ; 15 ; 11.

Vérifier que les séries de notes de Xavier et Yohan ont les mêmes valeurs extrêmes et la même moyenne.

Voici les boîtes médianes correspondant aux deux séries de notes, obtenues à l'affichage d'une calculatrice :



Laquelle est celle de la série de notes de Xavier ?

16 ★ 10 min

(corrigés p. 243)

Le tableau ci-dessous donne les résultats d'une enquête sur les salaires mensuels bruts des techniciens de trois entreprises d'un même secteur industriel. Les salaires sont exprimés en euros et arrondis à la centaine la plus proche.

Entreprise	Effectif	$x_{\min}$	Q_1	Médiane	Q_3	$x_{\max}$
A	121	1 600	2 300	2 700	3 000	3 500
B	81	1 800	2 700	3 400	3 600	4 500
C	16	1 400	1 800	2 100	2 300	3 400

Représenter sur un même graphique les séries statistiques des salaires par une boîte-à-moustaches dont la largeur est proportionnelle à la racine carrée de l'effectif.

17 ★★ 20 min

(corrigés p. 243)

On considère la série statistique $(x_i ; n_i)$:

x_i	0	11	12	13	14	15	19	23	56
n_i	1	1	1	3	1	2	1	1	1

- 1° Déterminer la moyenne et l'écart type de la série.
- 2° Déterminer la médiane de cette série.
- 3° Déterminer le premier et le troisième quartile ainsi que l'écart interquartile.
- 4° a) Dessiner la boîte-à-moustaches correspondant à la moyenne.
b) Dresser la boîte-à-moustaches correspondant à la médiane en faisant apparaître s'il y a lieu les valeurs éloignées ou extrêmes.
- 5° Comparer les deux figures.

Lissage par moyennes mobiles

18 ★★ 20 min

(corrigés p. 244)

Le tableau ci-dessous donne les variations du chiffre d'affaires d'une entreprise, au cours d'une année, en millions d'euros.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
i	1	2	3	4	5	6
y_i : Chiffre d'affaires	75	125	55	45	110	85

Mois	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
i	7	8	9	10	11	12
y_i : Chiffre d'affaires	90	155	55	60	125	70

- 1° a) On considère les points $A_i(i ; y_i)$. Placer les points A_i dans un repère orthogonal et dessiner la ligne polygonale $A_1, A_2, \dots, A_{12}$.
b) Que représente cette ligne ?
c) Quel est le chiffre d'affaires moyen pour cette année ?

2° a) Compléter le tableau suivant avec les moyennes mobiles d'ordre 3, notées m_i , i variant de 2 à 11.

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m_i										

Placer sur la même figure que **1°a)** les points $B_i(i ; m_i)$, i variant de 2 à 11 et tracer la ligne polygonale $B_2, \dots, B_{11}$.

b) Comment peut-on interpréter cette nouvelle courbe ?

Remarque : on pourra traiter cet exercice à l'aide d'un tableur.

Les interrogations écrites

19 15 min

(corrigés p. 246)

Les 25 membres d'un club passent un test de 9 questions.

Le nombre de bonnes réponses de chacun des participants est donné par la liste suivante :

5, 1, 2, 4, 9, 8, 7, 4, 0, 0, 1, 5, 6, 8, 9, 9, 8, 6, 1, 7, 6, 5, 2, 8, 9.

1° Rechercher la médiane de cette série, puis calculer sa moyenne.

2° Cinq nouvelles personnes s'inscrivent au club ; elles ont respectivement 7, 8, 9, 9 et 8 bonnes réponses. Que deviennent la médiane et la moyenne ?

3° Le club connaissant un succès croissant, son effectif augmente de 10 à l'occasion de la grande fête annuelle. Les nouveaux arrivants obtiennent respectivement 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8 et 8 bonnes réponses.

a) Rechercher les quartiles et préciser l'intervalle interquartile.

b) Rechercher les déciles et préciser l'intervalle interdécile.

20 15 min

(corrigés p. 247)

Dans un quartier, on demande à 1 600 personnes (« Enfants », « Hommes » et « Femmes ») de choisir leur distraction favorite parmi le sport, le cinéma, la musique et la télévision.

Le tableau suivant donne les résultats du sondage.

Population Y \ Distraction X	Enfants	Hommes	Femmes
Sport	120	200	160
Cinéma	40	80	12
Musique	240	200	120
Télévision	80	128	112

- 1° a) Compléter ce tableau en ajoutant une ligne et une colonne « Total ».
- b) Combien y a-t-il de femmes ? de cinéphiles ? de femmes cinéphiles ?
- 2° a) Quelle est la fréquence, en pourcentage de la population interrogée, des femmes préférant le cinéma ?
- b) Établir le tableau des fréquences, en pourcentages, par rapport à l'effectif total.
- 3° a) Quel est, parmi les amateurs de sport, le pourcentage de femmes ?
- b) Quel est, parmi les hommes, le pourcentage de ceux qui préfèrent le cinéma ?
- 4° Dessiner l'histogramme (multiple) représentant les effectifs comparés des différentes activités selon la catégorie de population observée.

21 15 min

(corrigés p. 243)

On lance cinquante fois de suite un dé équilibré à six faces.

- 1° Écrire un algorithme qui simule cette expérience aléatoire et qui affiche la fréquence du 2.
- 2° Transcrire l'algorithme précédent sur la calculatrice.

Vrai ou faux ?

1 1° Dans une classe de 35 élèves, on étudie les notes du dernier contrôle de math.

a) La note moyenne indique que la moitié de la classe a au moins cette note.

Faux. En revanche, la moitié de la classe a au moins la note médiane. *Ne pas confondre moyenne et médiane.*

b) La note moyenne est la demi-somme des notes extrêmes.

Faux. La moyenne peut être 11 même si les notes extrêmes sont 0 et 20.

c) La somme des notes est le produit de la moyenne par 35.

Vrai. La moyenne est le quotient de la somme des notes par 35.

d) Si on augmente toutes les notes de 3 points, alors la moyenne est augmentée de 3 points.

Vrai. La somme des notes est augmentée de 35×3 , donc la moyenne est augmentée de 3.

2° Pour toute série statistique dont le caractère est quantitatif :

a) Si toutes les valeurs du caractère sont multipliées par 10, alors la moyenne est multipliée par 10.

Vrai. La somme des valeurs est multipliée par 10, donc la moyenne (quotient de cette somme par l'effectif total) est multipliée par 10.

b) La médiane est la moyenne du premier quartile et du troisième quartile.

Faux. On sait seulement qu'entre le premier quartile et la médiane, il y a 25 % des valeurs et qu'entre la médiane et le troisième quartile, il y a aussi 25 % de valeurs.

c) La moyenne est inférieure ou égale à la médiane.

Faux. La moyenne peut être strictement supérieure à la médiane.

$$1; 1; \textcircled{2}; 2; 2 \quad \bar{x} = 1,6 \quad \bar{x} < Me$$

$$1; 1; \textcircled{1}; 2; 2 \quad \bar{x} = 1,4 \quad \bar{x} > Me$$

d) La fréquence d'une valeur peut être égale à 1,5.

Faux. La fréquence est toujours comprise entre 0 et 1.

La fréquence est le quotient de l'effectif par l'effectif total.

3° Pour toute série statistique de 400 valeurs :

a) Au moins 100 valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 .

Vrai. On a : $25 \% \times 400 = 100$, donc Q_1 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 100 valeurs lui soient inférieures ou égales.

b) Exactement 100 valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 .

Faux. Au moins 100 valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 , il peut y en avoir plus que 100.

$$\underbrace{1; 1; \dots; 1}_{120}; \underbrace{2; 2; \dots; 2}_{180} \quad Q_1 = 1$$

c) Au moins 300 valeurs sont strictement supérieures à Q_1 .

Faux. Au moins 100 valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 , donc au plus 300 valeurs sont strictement supérieures à Q_1 . Si 101 valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 , seulement 299 lui seront strictement supérieures.

d) Au plus 100 valeurs sont strictement supérieures à Q_3 .

Vrai. On a : $75 \% \times 400 = 300$, donc Q_3 est la plus petite valeur du caractère telle qu'au moins 300 valeurs lui soient inférieures ou égales. Par conséquent, au plus 300 valeurs sont strictement supérieures à Q_3 .

Mode, moyenne, médiane

2 1° Commençons par ranger les 10 valeurs par ordre croissant :

10; 11; 12; 12; 12; 13; 13; 15; 15; 15.

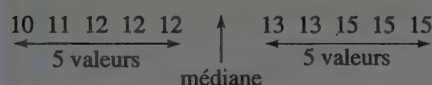
• Les valeurs que l'on rencontre le plus (3 fois chacune) sont 12 et 15.

Cette série a donc **deux modes : 12 et 15.**

- La moyenne $\bar{x}$ est telle que :

$$\bar{x} = \frac{10 + 11 + 3 \times 12 + 2 \times 13 + 3 \times 15}{10} = 12,8.$$

- $10 = 5 + 5$. La médiane sera donc une valeur laissant 5 valeurs de part et d'autre :



On peut prendre ici n'importe quelle valeur située entre la valeur de rang 5 et la valeur de rang 6 de la suite ordonnée, c'est-à-dire située entre 12 et 13 : 12,2 par exemple conviendrait. En fait, on

prend généralement la demi-somme de ces deux valeurs, soit 12,5.

2° Rangeons ces valeurs par ordre croissant : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 7 ; 7 ; 8 ; 9.

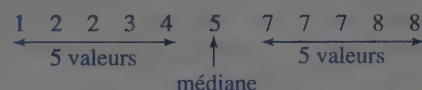
- Le mode est 7.

- Moyenne $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1+2+2+3+4+5+7+7+7+8+9}{11} = 5.$$

- $11 = 5 + 1 + 5$.

La médiane est donc la valeur de rang 6, c'est-à-dire 6.



3 1° Établissons un tableau statistique.

x_i	n_i	$n_i x_i$	n_i cumulés croissants	
-4	17	-68	17	de la valeur de rang 1 à celle de rang 17
-2	10	-20	27	de la valeur de rang 18 à celle de rang 27
0	10	0	37	de la valeur de rang 28 à celle de rang 37
2	1	2	38	la valeur de rang 38
3	15	45	53	de la valeur de rang 39 à celle de rang 53
5	22	110	75	de la valeur de rang 54 à celle de rang 75
	75	69		

L'effectif maximum (22) est atteint pour la valeur 5 du caractère.

Le mode est donc 5.

- Moyenne : $\bar{x} = \frac{69}{75} = 0,92$.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i x_i}{n}$$

• $75 = 37 + 1 + 37$. Donc la médiane est la 38^e valeur du caractère. Pour la trouver, on utilise des effectifs cumulés croissants (voir tableau). La médiane est donc 2.

2° a) Complétons ce tableau selon les besoins.

Classes	Effectifs n_i	Centre de la classe x_i	$n_i x_i$	Effectifs cumulés croissants
[0 ; 5[	15	2,5	37,5	15
[5 ; 10[	25	7,5	187,5	40
[10 ; 15[	7	12,5	87,5	47
[15 ; 20[	3	17,5	52,5	50
	50		365	

• La classe modale est la classe [5 ; 10[.

• Pour calculer la moyenne $\bar{x}$, on considère que tous les éléments d'une même classe sont égaux au centre de la classe, puis on procède comme pour un caractère discret.

Donc :

$$\bar{x} = \frac{365}{50} = 7,3.$$

• Pour la médiane, on prendra la 25^e valeur. Il s'agit de la classe [5 ; 10[, d'amplitude 5.

Pour préciser la médiane, on peut faire un ajustement linéaire, en appliquant l'hypothèse d'équirépartition des valeurs de la classe. On a 15 valeurs dans les classes précédentes. Il en manque 10 pour atteindre la 25^e valeur.

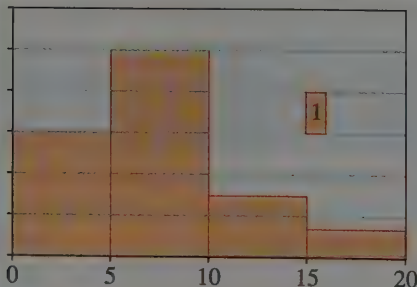
La classe médiane en comporte 25 pour une amplitude de 5, donc l'amplitude correspondant à 10 de ces valeurs est :

$$5 \times \frac{10}{25} = 2. \text{ La médiane est } 5 + 2, \text{ c'est-à-dire } 7.$$

b)

L'histogramme est composé de rectangles dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe.

Les classes ayant toutes la même amplitude (le même pas), la hauteur du rectangle sera ici proportionnelle à l'effectif. (Voir schéma ci-après.)



4 1^o a) On obtient le tableau statistique suivant :

Classes	x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i \uparrow$	n_i / a_i
[5 ; 7[	6	10	60	10	5
[7 ; 9[	8	31	248	41	15,5
[9 ; 12[	10,5	33	346,5	74	11
[12 ; 14[	13	26	338	100	13
		100	992,5		

b) • Moyenne

L'effectif total est égal à 100 et

$$\sum_i n_i x_i = 992,5,$$

$$\text{donc : } \bar{x} = \frac{992,5}{100} = 9,925,$$

et l'âge moyen des enfants est environ 10 ans.

Pour calculer la moyenne, on considère que tous les éléments d'une même classe sont égaux au centre de la classe, puis on procède comme pour un caractère discret.

• Classe modale

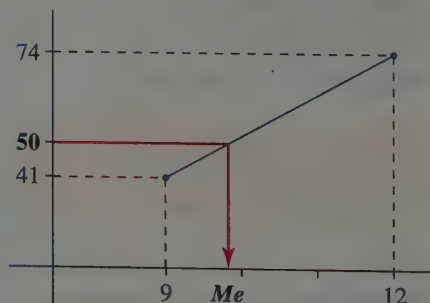
Dans la colonne des $\frac{n_i}{a_i}$, la valeur maximale est 15,5 ; cette valeur apparaît une seule fois et correspond à la classe [7 ; 9[.

Remarque que la classe modale n'est pas ici celle dont l'effectif est maximal.

Il vient : la classe modale est [7 ; 9[.

• Médiane

D'après la colonne des effectifs cumulés, la classe médiane est [9 ; 12[; on évalue généralement la médiane Me en procédant à un ajustement linéaire, les valeurs étant supposées équiréparties dans la classe.



En considérant le schéma ci dessus, la médiane Me vérifie :

$$\frac{Me - 9}{12 - 9} = \frac{50 - 41}{74 - 41},$$

soit : $\frac{Me - 9}{3} = \frac{9}{33},$

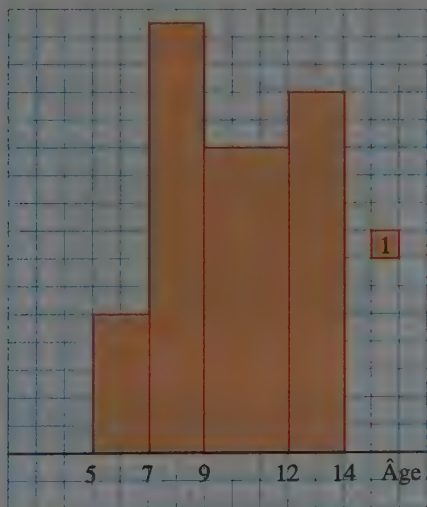
donc : $Me = 9 + \frac{9}{11} = \frac{108}{11}.$

Il vient : $Me \approx 9,82$

et l'âge médian des enfants est environ 10 ans.

2° Histogramme

Dans un histogramme, chaque classe est représentée par un rectangle d'aire proportionnelle à l'effectif de la classe ; la hauteur du rectangle associé à la classe de centre n_i est donc proportionnelle à n_i/a_i .



Le rectangle de hauteur maximale est celui de la classe modale.

Quartiles

5 1° $n = 4p.$

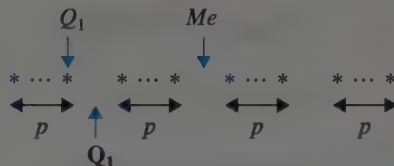
• Q_1 est la demi-somme des valeurs de rang p et $p + 1$:

$$Q_1 = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}.$$

• $k \geq \frac{n}{4} \Leftrightarrow k \geq p,$

donc Q_1 est la valeur de rang p : $Q_1 = x_p.$

$$Q_1 \leq Q_1$$



2° $n = 4p + 1.$

• Q_1 est la demi-somme des valeurs de rang p et $p + 1$:

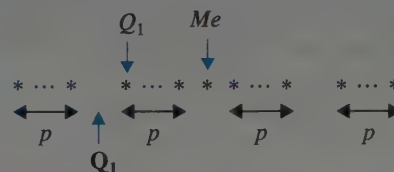
$$Q_1 = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}$$

• k étant un entier :

$k \geq \frac{n}{4} \Leftrightarrow k \geq p + \frac{1}{4} \Leftrightarrow k \geq p + 1,$ donc

Q_1 est la valeur de rang $p + 1$: $Q_1 = x_{p+1}.$

$$Q_1 \geq Q_1$$



3° $n = 4p + 2.$

• Q_1 est la valeur de rang $p + 1$:

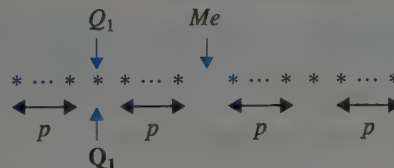
$$Q_1 = x_{p+1}.$$

• k étant un entier :

$k \geq \frac{n}{4} \Leftrightarrow k \geq p + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \geq p + 1,$ donc

Q_1 est la valeur de rang $p + 1$: $Q_1 = x_{p+1}.$

$$Q_1 = Q_1$$



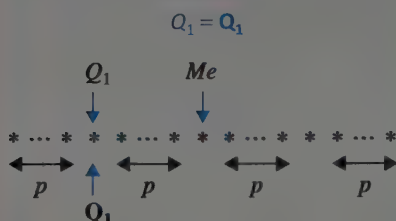
4° $n = 4p + 3.$

• Q_1 est la valeur de rang $p + 1$: $Q_1 = x_{p+1}.$

• k étant un entier :

$$k \geq \frac{n}{4} \Leftrightarrow k \geq p + \frac{3}{4} \Leftrightarrow k \geq p + 1, \text{ donc}$$

Q_1 est la valeur de rang $p + 1$: $Q_1 = x_{p+1}$.



• Les quatre cas $n = 4p$, $n = 4p + 1$, $n = 4p + 2$, $n = 4p + 3$ épuisent tous les cas possibles ;

on peut donc affirmer :

– Q_1 est une des deux valeurs consécutives de la série qui encadrent (au sens large) Q_1 ;

– si Q_1 est égal à un des x_i , alors : $Q_1 = Q_1$.

• Bien sûr, on obtiendrait des résultats analogues concernant le troisième quartile.

Utilisation de la calculatrice

6 1° Saisie des données

Si la première liste n'est pas vide, commencer par la vider (voir la question 4°).

TI	CASIO
- Sélectionner le menu STAT, puis EDIT : - Saisir les données dans la liste L1, en validant chaque entrée.	- Sélectionner le menu STAT : - Saisir les données dans la liste List1, en validant chaque entrée.

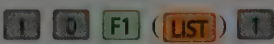
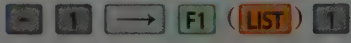
Utiliser les touches de déplacement , pour faire défiler l'écran.

2° Tri par ordre croissant

TI	CASIO
- Sélectionner le menu STAT : - Presser (TriCroi) puis	- Faire défiler le menu en pressant () - puis presser successivement : (nombre de listes à trier) (numéro de la liste)

Les éléments de la première liste sont alors rangés par ordre croissant.

3° Transformation affine des données

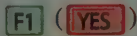
TI	CASIO
- Afficher la fenêtre d'édition de liste :  - placer le curseur sur L1 (en haut de l'écran), puis valider :  Le curseur est alors placé à droite de L1= (en bas de l'écran). - Taper : 	- Sélectionner le menu RUN :  - Taper :  puis :   et valider : 

Dans la première liste, chaque valeur x_i a été remplacée par $10x_i - 1$.

List 1	List 2	List 3	List 4
1	19		
2	19		
3	29		
4	29		
5	29		

GRAPH CALC TEST INTF DIST

4° Vider une liste

TI	CASIO
- Sélectionner les menus STAT, puis EDIT :  - Placer le curseur en haut de l'écran de façon à sélectionner L1. - Presser EFFLIST  - puis ENTER 	- Sélectionner le menu STAT :  - Placer le curseur dans la liste List1. - Presser F6 (▶) pour faire défiler le menu, puis F3 (DEL-A) enfin, confirmer la suppression : 

La première liste est alors vide.

Avant de saisir des données dans une liste, s'assurer que la liste est vide.

7 1° Calculs statistiques

TI	CASIO
- Sélectionner le menu STAT, puis EDIT :  - Saisir les données dans la liste L1, en validant chaque entrée.	- Sélectionner le menu STAT :  - Saisir les données dans la liste List1, en validant chaque entrée.

	List 1	List 2	List 3	List 4
1	6			
2	19			
3	5			
4	13			
5	50			

SRTA SRTD DEL DELP INS D

Si la première liste n'est pas vide, commencer par la vider (voir l'exercice 6), ou utiliser une autre liste.

TI	CASIO
- Presser STAT, puis déplacer le curseur vers la droite sur CALC et presser 1 pour lancer le calcul des statistiques à une variable. - Presser alors $((\text{2nd} 1 (1))$ puis ENTER; cela définit la liste L1 comme liste des données.	- Après avoir éventuellement pressé la touche F6 (►) pour faire défiler le bandeau inférieur, presser la touche F2 (CALC) puis F4 SET - Le curseur étant sur la première ligne, choisir List 1 F1 ; le curseur étant sur la deuxième ligne, choisir 1 (F1) ; cela définit la liste List 1 comme liste des données. - Utiliser la touche EXE pour quitter le paramétrage, puis presser la touche F1 (1VAR).

```

1-Variable
x̄=18.2
Σx=364
Σx²=11958
x̄σn=16.3297274
x̄σn-1=16.7539469
n=20
1VAR 2VAR REG SET

```

Utiliser les touches de déplacement **▲**, **▼** pour faire défiler l'écran.

On obtient : $\bar{x} = 18,2$ et $s_x \approx 16,3$.

2° • La fonction de tri croissant de la calculatrice (**TriCro**(pour la TI-82, **SRT.A** pour la Casio Graph 65) permet de ranger dans l'ordre croissant les éléments de la liste où ont été saisies les réponses.

Pour plus de détails, se reporter à l'exercice précédent.

On obtient que la liste des 20 réponses rangées dans l'ordre croissant est la suivante :

5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 14,
15, 16, 17, 19, 48, 49, 50, 52.

Médiane, premier et troisième quartiles

```

1-Variable
n=20
minX=5
Q1=6.5
Med=12.5
Q3=18
x̄-x̄σn=1.8702725
1VAR 2VAR REG SET

```

• La calculatrice prend pour définition de la médiane la même que celle adoptée dans le cours, donc :

$$Me = 12,5.$$

• En revanche, la calculatrice adopte pour les quartiles une définition analogue à celle de la médiane ; par exemple, la valeur du premier quartile donnée par la calculatrice est ici la demi-somme des termes de rang 5 et 6 :

$$\frac{6+7}{2} = 6,5,$$

alors que, selon la définition du cours, le premier quartile est la cinquième valeur du caractère :

$$Q_1 = 6.$$

La série étudiée comporte 20 termes, et :

$$20 \times \frac{1}{4} = 5.$$

• De même, selon le cours, le troisième quartile est la quinzième valeur du caractère, donc :

$$Q_3 = 17.$$

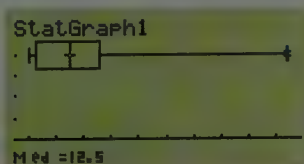
$$20 \times \frac{3}{4} = 15.$$

La valeur du premier quartile, selon le cours, est l'une des deux valeurs du caractère qui encadre la valeur du premier quartile affichée par la calculatrice ; il en est de même pour le troisième quartile.

3° Boîte médiane

TI	CASIO
- Ouvrir le menu STAT PLOT : $\boxed{2nd} \boxed{STAT PLOT}$ - En pressant la touche $\boxed{1}$, sélectionner le graphe Plot1, puis, en déplaçant le curseur et en validant à chaque fois, sélectionner : - On (graphe actif), - le diagramme en boîte dans la ligne Type, - L1 dans la ligne Liste X, 1 dans la ligne Liste Y. - Si d'autres graphes sont activés, penser à les désactiver. - Ouvrir la fenêtre de cadrage : $\boxed{WINDOW}$ - et ajuster les paramètres : Xmin=0 Xmax=55 Xscl=10 (Xmin et Xmax choisis de façon que toutes les valeurs de la série soient comprises entre Xmin et Xmax). - Presser $\boxed{GRPH}$	- Revenir à la fenêtre d'édition de liste en pressant deux fois $\boxed{EXIT}$ - Pour ouvrir le menu de représentation graphique, presser $\boxed{F1} (\boxed{GRPH})$, puis $\boxed{F6} (\boxed{SET})$ GPH1 est sélectionné (pour choisir GPH2 ou GPH3, presser $\boxed{F2}$ ou $\boxed{F3}$) - Déplacer le curseur sur la deuxième ligne (Graph Type), presser $\boxed{F6} (\boxed{\rightarrow})$ pour dérouler le menu, puis $\boxed{F2} (\boxed{BOX})$ pour choisir boîte médiane (MedBox). - Déplacer le curseur sur la troisième ligne (Xlist), presser $\boxed{F1} (\boxed{LIST1})$. - Déplacer le curseur sur la ligne suivante (Frequency), presser $\boxed{F1} (\boxed{1})$. - Enfin, appuyer sur $\boxed{EXE}$ pour revenir à la fenêtre d'édition de listes et presser $\boxed{F1} (\boxed{GPH1})$.

On obtient à l'affichage :



En activant la fonction **Trace** et en utilisant les touches de déplacement, $\boxed{\rightarrow}$

$\boxed{\leftarrow}$, les valeurs de $x_{\min}$, Q_1 , Me , Q_3 et $x_{\max}$ apparaissent à l'écran.

8 1° a) et b) Calculs statistiques

TI	CASIO
• Sélectionner le menu STAT, puis EDIT. • Saisir les modalités dans la liste L1, en validant chaque entrée. • Saisir dans la liste L2 l'effectif de chaque modalité en face de cette modalité.	• Sélectionner le menu STAT. • Saisir les modalités dans la liste List 1, en validant chaque entrée. • Saisir dans la liste List 2 l'effectif de chaque modalité en face de cette modalité.

List 1	List 2	List 3	List 4
1	0	84	
2	1	95	
3	2	80	
4	3	58	
5	4	29	

[SRTA] [SRTD] [DEL] [DEL] [INS] [D]

- Presser **STAT**, puis déplacer le curseur vers la droite sur **CALC** et presser **1** pour lancer le calcul des statistiques à une variable.

- Presser alors

1 **1** **2** **1**

puis **ENTER**; cela définit la liste **L1** comme liste des modalités et la liste **L2** comme liste des effectifs.

- Après avoir éventuellement pressé la touche **F6** (**▶**) pour faire défiler le bandeau inférieur, presser la touche **F2** (**CALC**) puis **F6** (**SET**).

- Le curseur étant sur la première ligne, choisir **List 1** (**F1**); cela définit la liste **List 1** comme liste des modalités.

- Le curseur étant sur la deuxième ligne, choisir **List 2** (**F3**); cela définit la liste **List 2** comme liste des effectifs.

- Utiliser la touche **EXE** pour quitter le paramétrage, puis presser la touche **F1** (**1VAR**).

```
1-Variable
x̄ = 1.76712328
Σx = 645
Σx² = 1931
xσn = 1.47230643
xσn-1 = 1.47432744
n = 365
1VAR 2VAR REG SET
```

```
1-Variable
minX = 0
Q1 = 1
Med = 2
Q3 = 3
x̄-xσn = 0.29481685
x̄+xσn = 3.23942972
1VAR 2VAR REG SET
```

- On obtient :

$$x \approx 1,77 \text{ et } s \approx 1,47 \text{ et } Me = 2.$$

- Les valeurs des premier et troisième quartiles fournies par la calculatrice sont respectivement 1 et 3 : ce sont des

valeurs du caractère, et, dans ce cas, la définition mathématique et celle adoptée par la calculatrice coïncident.

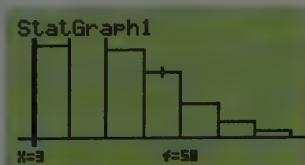
Il vient :

$$Q_1 = 1 \text{ et } Q_3 = 3.$$

2° Diagramme en bâtons

TI	CASIO
- Ouvrir le menu STAT PLOT : $\boxed{2nd} \boxed{STAT PLOT}$ - En pressant la touche $\boxed{1}$, sélectionner le graphe Plot1 (deux autres graphes peuvent être définis), puis, en déplaçant le curseur et en validant à chaque fois, sélectionner : – On (graphe actif), – l'histogramme dans la ligne Type, – L1 dans la ligne Liste X, < L2 dans la ligne Liste y. - Si d'autres graphes sont activés, penser à les désactiver. - Ouvrir la fenêtre de cadrage : $\boxed{WINDOW}$ - et ajuster les paramètres : $Xmin=0 \quad Xmax=7 \quad Xscl=1$ $Ymin=0 \quad Ymax=100 \quad Yscl=10$ (noter que Zoomstat ajuste Xmax et Xmin automatiquement). - Presser $\boxed{GRPH}$	- Presser deux fois la touche $\boxed{EXIT}$, puis les touches : $\boxed{F1} \boxed{GRPH} \boxed{F6} \boxed{SET}$ GPH1 est sélectionné (pour choisir GPH2 ou GPH3, presser $\boxed{F2}$ ou $\boxed{F3}$) - Le curseur étant sur la deuxième ligne, presser la touche $\boxed{F6} \boxed{\rightarrow}$ pour faire apparaître d'autres options, puis la touche $\boxed{F1} \boxed{Hist}$ - Déplacer le curseur sur la ligne Xlist, presser $\boxed{F1} \boxed{LIST1}$. - Déplacer le curseur sur la ligne Frequency, presser la touche $\boxed{F3} \boxed{LIST2}$ - Presser la touche $\boxed{EXIT}$ pour revenir à la fenêtre d'édition de listes et presser $\boxed{F1} \boxed{GPH1}$ - Régler les paramètres suivants : Start : 0 Pitch : 1 en validant les modifications. - Presser $\boxed{F6} \boxed{DRAW}$.

On obtient à l'affichage :



En activant la fonction **Trace**, on peut lire les modalités et les effectifs correspondant à chaque rectangle.

9 1°

TI	CASIO
Sélectionner le menu STAT	- Sélectionner le menu STAT - Sélectionner le menu EDIT
Introduire la liste des valeurs du caractère dans la liste 1 (List1) et celle des effectifs associés dans la liste (List2).	

- Sélectionner successivement (en bas de l'écran) **CALC**, **SET**

Régler la page de la manière suivante, sachant que **Freq** représente en fait l'effectif :

1Var Xlist : List 1
1Var Freq : List 2
2Var Xlist :
2Var Ylist :
2Var Freq :

- Sélectionner alors **1VAR**.

- **STAT**
- **CALC**
- **1-Var-Stat L₁, L₂**
- **Enter**

- La liste déroulante est la suivante :

	TI	CASIO
	1-Variable	1-VarStat
Moyenne	$\bar{x} = 17$	$\bar{x} = 17$
Somme des valeurs	$\sum x = 340$	$\sum x = 340$
Somme des carrés des valeurs	$\sum x^2 = 11472$	$\sum x^2 = 11472$
Écart type population	$\sigma_n = 16.8700918$	$\sigma_x = 16.8700918$
Écart type échantillon	$\sigma_{n-1} = 17.308349$	$S_x = 17.308349$
Effectif	$n = 20$	$S_n = 20$
Valeur minimale de la série	$\min X = 5$	$\min X = 5$
Premier quartile	$Q_1 = 5.5$	$Q_1 = 5.5$
Médiane	$\text{Med} = 10$	$\text{Med} = 10$
Troisième quartile	$Q_3 = 16$	$Q_3 = 16$
Intervalle gauche	$\bar{x} - \sigma_n = 0.12990812$	
Intervalle droit	$\bar{x} + \sigma_n = 33.8700918$	
Valeur maximale de la série	$\max X = 50$	$\max X = 50$
Mode	$\text{Mod} = 10$	

En conclusion, le mode de cette série statistique est 10 ;

la moyenne est égale à 17 ;

l'écart type vaut environ 16,87 ;

la médiane est 10 et les quartiles valent 5,5 et 16.

2° Boîte-à-moustaches avec une CASIO

- Pour construire la boîte médiane, procédons comme suit :

– régler V-Window pour que toutes les valeurs de la série soient comprises entre Xmin et Xmax ;

- sélectionner le menu **STAT** ;
- introduire la liste des valeurs du caractère dans la liste 1 (**List 1**) et celle des effectifs associés dans la liste (**List 2**) ;
- sélectionner successivement (en bas de l'écran) **GRPH**, puis **SET** ;
- l'écran **StatGraph1** apparaît ;
- dans **GraphType** sélectionner (en bas de l'écran) **Box**, c'est-à-dire **MedBox** ;
- **Exit**, puis **Gph1**.

• On procède de la même manière pour la boîte moyenne.

- Lorsque l'écran **StatGraph1** apparaît, on sélectionne **GPH2**.

- Dans **GraphType** on sélectionne la touche **Box**, c'est-à-dire **MeanBox**.

On termine de la même façon.

• Si on veut faire apparaître simultanément les deux boîtes :

- on sélectionne successivement **GRPH**, **SEL** ;

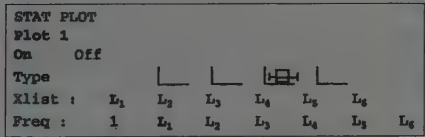
- pour **StatGraph1** et **StatGraph2**, on sélectionne **DrawOn** ;

• **Draw** permet d'obtenir la figure.

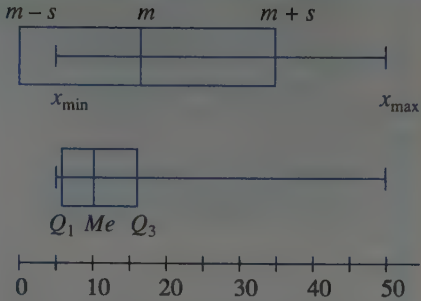
Boîte-à-moustaches avec une TI

• Dans le menu **STAT**, on choisit le menu **STAT PLOT**.

• L'écran suivant apparaît, on sélectionnera ce qui est en gras :



• On appuie sur **Graph** et on obtient la boîte médiane.



La comparaison des deux boîtes permet de constater à quel point la moyenne et l'écart type sont sensibles aux quatre valeurs extrêmes (50), à tel point que la boîte moyenne « sort » de l'intervalle des valeurs [5 ; 50].

Le rectangle de la boîte médiane contient 50 % de la population (25 % dans chacune des deux parties du rectangle). Dans l'exemple choisi, ces 50 % sont très groupés puisque l'écart interquartile ne vaut que 11,5 alors que l'étendue de la série est de 45.

10 On choisit vingt fois de suite un chiffre au hasard et on affiche le nombre de chiffres 0.

1°

Variables

k, a, i : entiers

Initialisation

k et a prennent la valeur 0

Traitement

Pour i variant de 1 à 20

a prend la valeur d'un nombre aléatoire entier entre 0 et 9

Si $a = 0$

alors k prend la valeur $k+1$

fin Si

fin Pour

Sortie

Afficher k

TI

```

: 0 → k
: 0 → a
: For (I,1,20)
: entAléat(0,9) → a
: If a=0
: Then
: k+1 → k
: End
: End
: Disp"NB 0",k

```

CASIO

```

0 → k ↓
0 → a ↓
For 1 → I To 20 ↓
Int(10Rand#) → a ↓
If a=0 ↓
Then k+1 → k ↓
IfEnd ↓
Next ↓
"NB 0": k ↓

```

11 On effectue n lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée et l'on compte le nombre de « côté face ».

1° On code par exemple FACE par 1 et Pile par 0.

Variables

k, a, i : entiers

Initialisation

Saisir n

k et a prennent la valeur 0

Traitement

Pour i variant de 1 à n

a prend la valeur d'un nombre aléatoire entier : 0 ou 1

Si $a = 1$

alors k prend la valeur $k+1$

fin Si

fin Pour

Sortie

Afficher k

2°

TI

```

: Input N
: 0 → k
: 0 → a
: For (I,1,N)
: entAléat(0,1) → a
: If a=1
: Then
: k+1 → k
: End
: End
: Disp"NB FACE",k

```

CASIO

```

? → N ↓
0 → k ↓
0 → a ↓
For 1 → I To N ↓
Int(2Rand#) → a ↓
If a=1 ↓
Then k+1 → k ↓
IfEnd ↓
Next ↓
"NB FACE": k ↓

```

Utilisation du tableur

12 1° La population est l'ensemble des cinquante familles du quartier.

- Le caractère étudié est le **nombre d'enfants par famille** ; c'est un caractère quantitatif discret.

- Les valeurs prises par le caractère sont **0, 1, 2, 3, 4 et 5**.

2° a) Saisir les résultats du recensement dans la plage de cellules A2:J6.

- Saisir les valeurs du caractère dans la plage de cellules K2:K7.

- Dans la cellule L2, saisir la formule :

=NB.SI(\$A\$2:\$J\$6 ; K2)

qui compte le nombre de cellules de la plage A2:J6 dont la valeur est celle de K2 ; tirer la poignée de recopie vers le bas jusqu'à la cellule L7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Résultats										Valeurs	Effectifs	Fréquences
2	0	1	1	3	2	4	2	1	1	2	0	6	12%
3	3	1	2	2	1	0	1	0	0	1	1	15	30%
4	3	1	2	2	2	3	0	1	2	5	2	17	34%
5	4	2	2	4	5	3	2	1	1	2	3	6	12%
6	1	1	0	2	2	1	3	2	4	2	4	4	8%
7											5	2	4%
8											Effectif total	50	
9											Moyenne	1,86	
10											Ecart-type	1,261842	
11													

Noter l'intérêt des références absolues et relatives :

- en utilisant la fonction de recopie vers le bas (ou vers la droite), la référence \$A\$2 n'est pas modifiée (ligne et colonne sont fixées) ;
- en utilisant la fonction de recopie vers le bas, l'indice de ligne de la référence K2 est automatiquement incrémenté, c'est-à-dire que la référence est remplacée successivement par K3, K4, ...

• Le plus grand effectif est 17, c'est celui de la valeur 2 du caractère ; on en déduit : **le nombre d'enfants dominant est 2.**

Le mode de la série statistique est 2.

b) • Pour calculer l'effectif total, entrer dans une cellule (ici, L8) la formule :

$$=SOMME(L2:L7)$$

• Pour calculer la fréquence de la valeur 0 du caractère, entrer dans la cellule M2 la formule :

$$=K2/L\$8$$

puis tirer la poignée de recopie vers le bas jusqu'à la cellule M7.

• Pour obtenir les fréquences en pourcentages, sélectionner la plage de cellules M2:M7, puis activer l'icône %.

c) Pour calculer la moyenne, entrer dans une cellule (ici, L9) la formule :

$$=MOYENNE(A2:J6)$$

On obtient :

$$\bar{x} = 1,86.$$

d) Pour calculer l'écart type, entrer dans une cellule (ici, L10) la formule :

$$=ECARTYPE(A2:J6)$$

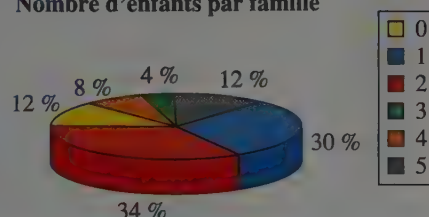
On obtient :

$$s \approx 1,26.$$

e) Sélectionner la plage de cellules L2:L7, puis activer l'assistant graphique ; le diagramme circulaire suivant a été obtenu avec Secteurs (sous-type Secteurs avec effet 3D).

En déplaçant le pointeur de la souris sur le graphique, on fait apparaître les pourcentages.

Nombre d'enfants par famille



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K			M	N	O	P	Q	R
1	Simulations													Fréquences					
2	6	4	3	1	3	3	1	2	2	3		n		1	2	3	4	5	6
3	6	2	6	5	2	6	4	6	6	3		10	0,20	0,20	0,40	0,10	0,00	0,10	
4	4	2	1	5	5	2	2	6	2	1		100	0,12	0,23	0,16	0,12	0,20	0,17	
5	4	3	5	6	3	3	2	3	5	3		1000	0,15	0,19	0,18	0,16	0,19	0,14	
6	1	2	6	6	5	5	1	5	5	2									
7	2	2	4	1	5	5	6	5	5	2									
8	5	6	4	2	6	3	3	4	2										
9	3	1	2	3	5	4	1	5	5	6									
10	6	6	3	4	4	4	1	5	5	1									
11	4	1	2	2	2	6	2	2	5	2									
12	2	1	2	3	1	3	1	4	5	5									
13	1	3	2	5	2	1	2	5	3	1									
14	5	5	1	5	1	6	6	5	5	4									
15	3	2	5	2	6	1	1	2	6	4									
16	5	3	3	4	5	1	4	3	6	3									
17	5	2	2	3	2	6	3	4	3	5									
18	1	2	4	4	2	5	6	3	1	1									
19	2	4	4	2	2	6	3	6	4	3									
20	1	1	4	1	5	4	2	5	5	2									
21	4	5	1	3	6	4	2	3	6	4									
22	1	2	3	6	2	1	1	6	4	4									
23	5	4	5	4	3	1	5	3	5	3									

■ Simulation

Étapes	Adresses	Formules et observations
Échantillon de 1 000 lancers	A2:J101	Dans A2, saisir la formule : =ENT(6*ALEA()+1) puis tirer la poignée de recopie vers la droite, vers le bas.
Cas possibles	M2:R2	Entrer 1 dans M2 et 2 dans N2 ; sélectionner les deux cellules, et tirer la poignée de recopie vers la droite.
Fréquences	M3:R5	Dans M3, saisir la formule : =NB.SI(\$A\$2:\$J\$2;M\$2)/10 puis tirer la poignée de recopie vers la droite. Procéder de même en entrant dans M4 : =NB.SI(\$A\$2:\$J\$11;M\$2)/100 et dans M5 : =NB.SI(\$A\$2:\$J\$101;M\$2)/1000

- La formule :

$$=ENT(6*ALEA()+1)$$

retourne un entier aléatoire compris entre 1 et 6.

- La formule :

$$=NB.SI(\$A\$2:\$J\$2;M\$2)/10$$

retourne la fréquence du nombre de cellules de la plage A2:J2 dont la valeur est égale à celle entrée dans M2.

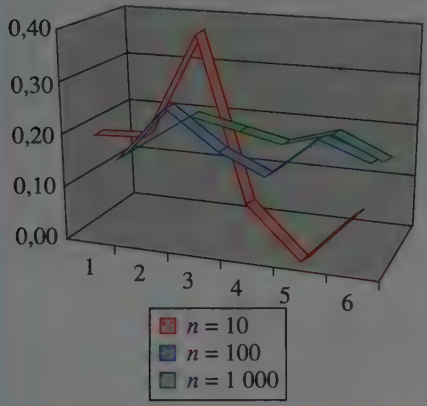
Noter l'utilisation des références absolues (\$A\$2) ou relatives (M dans M\$2) :

en utilisant la fonction de recopie rapide vers la droite, les références relatives de colonne sont automatiquement incrémentées (N\$2, O\$2, P\$2, Q\$2, R\$2), alors que les références absolues ne sont pas modifiées.

En appuyant sur la touche F9, une nouvelle simulation est effectuée.

■ Graphique

- Après avoir sélectionné la plage M3:R5, activer l'assistant graphique ; le schéma proposé a été obtenu avec **Courbes** (sous-type **Courbes 3D**).



En appuyant sur la touche **F9**, on peut observer les effets des fluctuations d'échantillonnage sur chacune des trois courbes : on s'aperçoit que, plus n est grand, moins la distribution des fréquences est sensible aux fluctuations d'échantillonnage.

De plus, la courbe correspondant à $n = 1\ 000$ est presque horizontale : les fréquences d'apparition de chacun des chiffres 1, 2, ..., 6 sont donc proches de $1/6$.

2° Voir tableau en bas de page.

■ Simulation

- Entrer 10 dans la cellule L2 et 20 dans la cellule L3.
Sélectionner ces deux cellules, puis tirer la poignée de recopie vers le bas jusqu'à la cellule L101 ; les valeurs 30, 40, ..., 1 000 sont alors entrées dans les cellules L4, L5, ..., L101.
- Pour obtenir la fréquence d'apparition du 5 sur les 10 premiers lancers, saisir dans la cellule M2 la formule :
$$=NB.SI(\$A\$2:\$J2;5)/L2$$

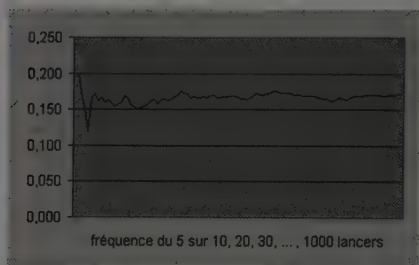
En tirant la poignée de recopie vers le bas jusqu'à la cellule M101, on obtient dans les cellules M3, M4, ..., M101 la fréquence d'apparition du 5 sur les 20 premiers lancers, 30 premiers lancers, ..., 1 000 lancers.

M2											=NB.SI(\$A\$2:\$J2;5)/L2				
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M		
1	Simulations											n	Frég du 5		
2	4	6	1	5	4	4	4	3	5	6		10	0,200		
3	5	2	5	6	4	4	6	4	3	1		20	0,200		
4	1	5	3	2	3	4	3	1	3	1		30	0,167		
5	2	6	4	3	1	4	4	5	3	4		40	0,150		
6	2	4	6	6	2	3	4	2	2	6		50	0,120		
7	5	4	5	4	6	4	6	6	5	5		60	0,167		
8	2	4	1	1	1	5	5	2	4	1		70	0,171		
9	4	4	2	6	4	5	3	4	2	2		80	0,163		
10	5	6	5	3	6	1	2	2	1	4		90	0,167		
11	3	6	2	1	5	6	3	4	3	6		100	0,160		
12	5	6	1	4	5	2	6	6	3	4		110	0,164		
13	2	1	5	4	4	2	1	3	4	4		120	0,158		
14	1	1	2	6	2	2	4	3	4	5		130	0,154		
15	5	1	6	3	6	2	5	6	6	2		140	0,157		
16	2	4	5	6	4	5	6	1	3	2		150	0,160		
17	4	5	5	1	6	3	2	3	2	5		160	0,169		
18	1	1	6	3	4	1	1	5	6	2		170	0,165		
19	3	1	4	4	6	1	4	3	4	2		180	0,156		
20	4	3	3	2	4	3	3	5	6	4		190	0,153		
21	5	2	2	1	4	6	6	2	6	3		200	0,150		
22	4	6	6	5	4	6	5	3	4	3		210	0,152		
23	2	4	3	6	5	4	6	3	6	5		220	0,155		

corrigés

■ Graphique

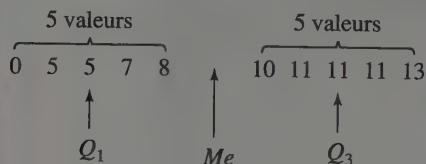
• Après avoir sélectionné la plage M2:M101, activer l'assistant graphique ; le schéma proposé a été obtenu avec **Courbes** (premier sous-type).



• En appuyant sur la touche **F9**, on peut observer les effets des fluctuations d'échantillonnage. On constate que, plus n est grand, moins la fréquence d'apparition du 5 sur les n premiers lancers est sensible à ces fluctuations d'échantillonnage ; de plus, comme on l'a déjà remarqué dans **1°**, la fréquence d'apparition du 5 sur les n premiers lancers a tendance à se rapprocher d'une valeur limite (1/6).

Transformation affine de données

14 1° • Rangeons les dix valeurs dans l'ordre croissant :



On en déduit l'écart interquartile EQ :

$$EQ = Q_3 - Q_1 = 11 - 5 = 6.$$

• La moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type s_x de la série statistique formée des dix valeurs x_i vérifient :

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(0 + 2 \times 5 + 7 + 8 + 10 + 3 \times 11 + 13) = 8,1 ;$$

$$s_x^2 = \frac{1}{10}(0^2 + 2 \times 5^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 + 3 \times 11^2 + 13^2) - \bar{x}^2,$$

donc :

$$s_x^2 = \frac{795}{10} - \left(\frac{81}{10}\right)^2 = \frac{7\,950 - 6\,561}{100} = \frac{1\,389}{100},$$

et finalement :

$$s_x = \frac{\sqrt{1\,389}}{10}.$$

$$s_x \approx 3,7.$$

2° a) On peut écrire, pour chaque valeur y_i de la série des résultats :

$$y_i = \frac{x_i}{100} + 1,2.$$

b) On en déduit :

donc :

$$• EQ' = \frac{EQ}{100} = \frac{6}{100} = 0,06 ;$$

$$• \bar{y} = \frac{\bar{x}}{100} + 1,20 = 0,081 + 1,200 = 1,281 ;$$

$$• s_y = \frac{s_x}{100} = \frac{\sqrt{1\,389}}{1\,000}$$

Plus généralement, si $y_i = ax_i + b$, alors :

• dans le cas où : $a > 0$, les premier et troisième quartiles de la série des y_i sont respectivement égaux à $aQ_1 + b$ et $aQ_3 + b$;

$$• \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i (ax_i + b) = a \times \left(\frac{1}{n} \sum_i x_i \right) + b,$$

donc $\bar{y} = a\bar{x} + b$;

$$• s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_i (ax_i + b - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_i a^2 (x_i - \bar{x})^2,$$

donc : $s_y^2 = a^2 s_x^2$ et $s_y = |a| s_x$.

Boîte-à-moustaches

15 • Xavier et Yohan ont tous deux pour note la plus basse 5, et pour note la plus haute 15 ; d'autre part, en notant $\bar{x}$ la moyenne des notes de Xavier et $\bar{y}$ celle des notes de Yohan :

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(2 \times 5 + 6 + 7 + 11 + 12 + 2 \times 13 + 14 + 15) = 10,1 ;$$

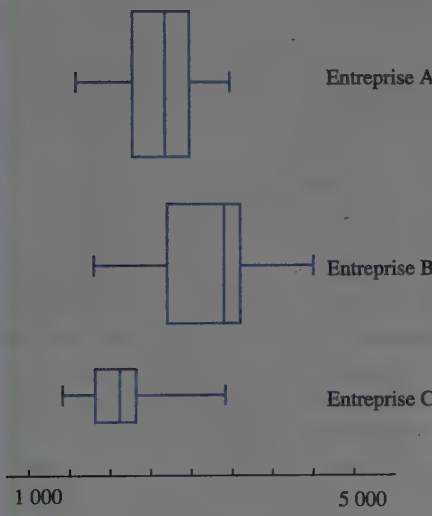
$$\bar{y} = \frac{1}{10}(5 + 3 \times 9 + 10 + 4 \times 11 + 15) = 10,1 ;$$

Les séries de notes de Xavier et Yohan ont donc bien les mêmes valeurs extrêmes et la même moyenne.

• **La première boîte médiane** est celle de la série dont les notes sont les plus dispersées ; c'est donc **celle de la série de notes de Xavier**.

Il est facile de vérifier que le premier quartile de la série de notes de Xavier est 6, et que celui de la série de notes de Yohan est 9.

16 Les racines carrées de l'effectif sont respectivement égales à 11, 9 et 4 ; on choisira donc pour hauteur des boîtes des valeurs proportionnelles à 11, 9 et 4. On obtient le diagramme comparatif suivant :



17 Dans la première partie de cet exercice, nous mènerons les calculs « manuellement ». Dans la seconde partie, nous établirons ces résultats à l'aide d'une calculatrice.

■ Première partie

1° La moyenne $\bar{x}$ est telle que :

$$\bar{x} = \frac{0 + 11 + 12 + 3 \times 13 + 14 + 2 \times 15 + 19 + 23 + 56}{12}$$

soit $\bar{x} = 17$.

La variance V est telle que :

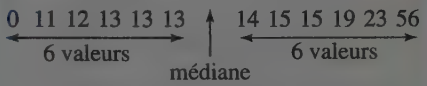
$$V = \frac{1}{12} [(0 - 17)^2 + (11 - 17)^2 + \dots + (56 - 17)^2],$$

soit $V \approx 164,67$.

L'écart type est tel que : $s = \sqrt{V}$,

soit $s \approx 12,8$.

2° $12 = 6 + 6$. La médiane sera donc une valeur du caractère laissant 6 valeurs de part et d'autre :



On prendra la demi-somme de 13 et 14, soit 13,5.

3° Par définition, le premier quartile est la plus petite valeur x_i du caractère pour laquelle la fréquence $F(x_i)$ des éléments de la série, qui sont inférieurs ou égaux à x_i , est supérieure ou égale à 0,25, c'est-à-dire telle que la fréquence cumulée croissante soit supérieure ou égale à $\frac{3}{12}$.

Établissons un tableau donnant les valeurs de $F(x_i)$:

x_i	0	11	12	13	14	15	19	23	56
$F(x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}$

On en déduit :

$$Q_1 = 12$$

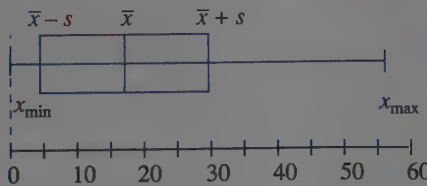
et de la même manière :

$$Q_3 = 15.$$

L'écart interquartile est :

$$EQ = Q_3 - Q_1 = 15 - 12 = 3.$$

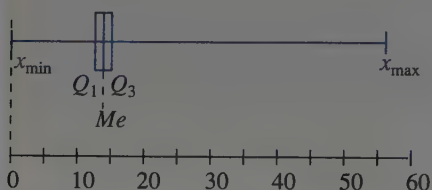
4° a)



Cette boîte-à-moustaches est composée de la manière suivante :

- un rectangle de largeur quelconque centré en $\bar{x}$, c'est-à-dire en 17 ;
- le rectangle s'étend de la valeur $\bar{x} - s \approx 17 - 12,8$, soit 4,2, à la valeur $\bar{x} + s \approx 17 + 12,8$, soit 29,8 ;
- les moustaches vont de la plus petite à la plus grande valeur de x , soit de 0 à 56 (en traversant le rectangle).

b)



Cette boîte-à-moustaches comporte :

- un rectangle de largeur quelconque, s'entendant de Q_1 à Q_3 , c'est-à-dire de 12 à 15, partagé par un trait à hauteur de la médiane 13,5 ;
- une moustache reliant Q_1 à la valeur minimale 0 et une autre reliant Q_3 à la valeur maximale 56.

■ Seconde partie

- La liste déroulante est la suivante :

	1-Variable
Moyenne	$\bar{x} = 17$
Somme des valeurs	$\sum x = 204$
Somme des carrés des valeurs	$\sum x^2 = 5\,444$
Écart type population	$\sigma_n = 12,832251$
Écart type échantillon	$\sigma_{n-1} = 13,402849$
Effectif	$n = 12$
Valeur minimale de la série	$\min X = 0$
Premier quartile	$Q_1 = 12,5$
Médiane	$Med = 13,5$
Troisième quartile	$Q_3 = 17$
Intervalle gauche	$\bar{x} - \sigma_n = 4,16774896$
Intervalle droit	$\bar{x} + \sigma_n = 29,832251$
Valeur maximale de la série	$\max X = 56$
Mode	$Mod = 13$

• Remarque

Rappelons que la calculatrice prend pour les quartiles une définition analogue à celle de la médiane. Donc pour l'exemple traité :

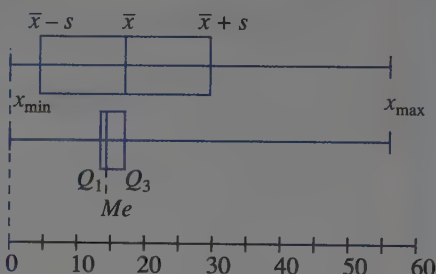
comme $12 = 3 + 3 + 3 + 3$, Q_1 sera la demi-somme des termes de rangs 3 et 4, le troisième quartile sera la demi-somme des termes de rangs 9 et 10.

$$\text{Soit : } Q_1 = \frac{12 + 13}{2} = 12,5$$

$$\text{et } Q_3 = \frac{15 + 29}{2} = 17 ;$$

$$\text{d'où } EQ = 17 - 12,5 = 4,5.$$

Les boîtes-à-moustaches données par la calculatrice sont reproduites ici :



5° La comparaison des deux boîtes, quels que soient le type de « moustaches » et la manière de calculer les quartiles, permet de constater à quel point la moyenne et l'écart type sont sensibles aux trois valeurs éloignées ou extrêmes.

Le rectangle de la boîte médiane contient 50 % de la population (25 % dans chacune des deux parties du rectangle).

Dans l'exemple choisi, ces 50 % sont très groupés puisque EQ vaut 3 ou 4,5 alors que l'étendue de la série est de 56.

Lissage par moyennes mobiles

18 1° a) et 2° a) Utilisons un tableur :

- Introduisons dans la colonne A le rang du mois : 1 en A2, 2 en A3, puis tirons la poignée jusqu'en A13.

- Introduisons les mois dans la colonne B : Janvier en B2, puis tirons la poignée jusqu'en B13.

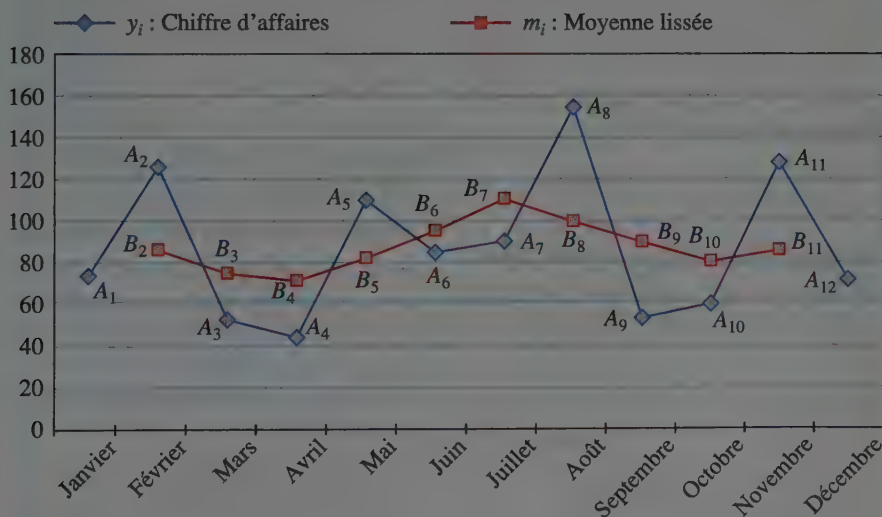
- Introduisons les valeurs dans la zone C2:C13.

• En D3, introduisons la première moyenne lissée $= (C2+C3+C4)/3$; puis tirons la poignée jusqu'en D12, nous obtenons ainsi le tableau des moyennes lissées.

D3 $= (C2+C3+C4)/3$

	A	B	C	D
1	Rang i du mois	Mois	y_i : Chiffre d'affaires	m_i : moyenne lissée
2	1	Janvier	75	
3	2	Février	125	85
4	3	Mars	55	75
5	4	Avril	45	70
6	5	Mai	110	80
7	6	Juin	85	95
8	7	Juillet	90	110
9	8	Août	155	100
10	9	Septembre	55	90
11	10	Octobre	60	80
12	11	Novembre	125	85
13	12	Décembre	70	

• Pour tracer les deux courbes sur la même figure, il suffit de sélectionner les zones B, C et D, puis de sélectionner dans l'assistant graphique les courbes avec marques affichées à chaque point.



1° b) La ligne polygonale $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ représente l'évolution du chiffre d'affaires au cours de cette année d'exercice.

$$\bar{y} = \frac{1}{12}(75 + 125 + 55 + 45 + 110 + 85 + 90 + 155 + 55 + 60 + 125 + 70)$$

soit : $\bar{y} = 87,5$.

c) Le chiffre d'affaires moyen est de 87,5 millions d'euros.

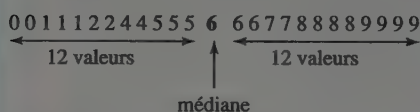
2° b) L'avantage d'une représentation à l'aide des moyennes lissées est de rendre compte de la tendance générale de l'évolution, en tenant compte de toutes les valeurs, tout en « gommant » les résultats extrêmes.

La tendance est une légère baisse en début d'année, puis une hausse sensible jusqu'à l'été, puis à nouveau une baisse qui ramène pratiquement le chiffre d'affaires à sa valeur initiale. Il semblerait que cette entreprise a un fonctionnement saisonnier marqué mais très régulier.

Les interrogations écrites

19 1° • Rangeons les 25 valeurs dans l'ordre croissant.

On a : $25 = 12 + 1 + 12$; donc celle située au 13^e rang est la médiane.



La médiane est 6.

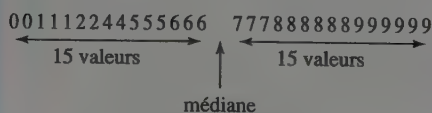
• La moyenne m vérifie :

$$m = \frac{2 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 5}{25} + \frac{3 \times 6 + 2 \times 7 + 4 \times 8 + 4 \times 9}{25} = \frac{130}{25}$$

donc **la moyenne est 5,2.**

2° Le club comporte maintenant 30 membres.

• Les valeurs étant toujours rangées dans l'ordre croissant, la médiane sera une valeur fictive quelconque prise entre la valeur de rang 15 et celle de rang 16.



On prend, en général, la **demi-somme**, soit **6,5**.

• En utilisant les résultats du **1°**, la nouvelle moyenne m' vérifie :

$$m' = \frac{25 \times 5,2 + 1 \times 7 + 2 \times 8 + 2 \times 9}{30} = \frac{171}{30},$$

donc **$m' = 5,7$.**

3° a) Établissons un tableau donnant les fréquences cumulées croissantes de cette série.

Valeur	Effectif	Fréquence cumulée croissante
0	2	0,05
1	3	0,125
2	2	0,175
4	3	0,25
5	6	0,4
6	6	0,55
7	4	0,65
8	8	0,85
9	6	1

La plus petite valeur pour laquelle cette fréquence est supérieure ou égale à 0,25 est 4 ; celle pour laquelle cette fréquence est supérieure ou égale à 0,75 est 8.

Donc : $Q_1 = 4$ et $Q_3 = 8$.

La médiane sera : $Me = 6$ (pour 5, la fréquence est inférieure à 0,5 et pour 6 elle lui est supérieure).

L'écart interquartile est :

$$Q_3 - Q_1 = 4 ;$$

il comprend 50 % de l'effectif total.

La calculatrice prendra :

- Q_1 compris entre la valeur de rang 10 et celle de rang 11, soit $Q_1 = 4,5$;
- Q_3 compris entre la valeur de rang 30 et celle de rang 31, soit $Q_3 = 8$.

b) On peut de la même façon évaluer les déciles.

La plus petite valeur pour laquelle cette fréquence est supérieure ou égale à 0,1 est 1 ; celle pour laquelle cette fréquence est supérieure ou égale à 0,9 est 9.

Donc : $Q(0,1) = 1$ et $Q(0,9) = 9$.

Les déciles valent successivement :

1 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 8 et 9.

L'intervalle interdécile est 8 ($9 - 1 = 8$).

Donc 80 % de la population s'étend sur une amplitude de 8, l'étendue de la série étant 9. On peut en conclure que les 20 % négligés ne sont pas ici des valeurs aberrantes.

20 1° a) Le tableau complet des effectifs est le suivant.

Population Y				
	Enfants	Hommes	Femmes	Total
Distraction X				
Sport	120	200	160	480
Cinéma	40	80	120	240
Musique	240	200	120	560
Télévision	80	128	112	320
Total	480	608	512	1 600

b) La population comporte **512 femmes, 240 cinéphiles et 120 femmes cinéphiles**.

La colonne « Total » nous indique que parmi les 1 600 personnes interrogées, on a 480 amateurs de sport, 240 de cinéma, 560 de musique et 320 de télévision.

Par ailleurs, cette population se compose de 480 enfants, 608 hommes et 512 femmes.

2° a) Parmi les 1 600 personnes interrogées, 120 sont des femmes cinéphiles. Leur fréquence est le nombre f tel que :

$$f = \frac{120}{1\,600} = 0,075.$$

Les femmes préférant le cinéma représentent donc 7,5 % de la population interrogée.

b) En procédant comme à la question a), on établit le tableau des fréquences.

Population Y				
	Enfants	Hommes	Femmes	Total
Distraction X				
Sport	7,5 %	12,5 %	10 %	30 %
Cinéma	2,5 %	5 %	7,5 %	15 %
Musique	15 %	12,5 %	7,5 %	35 %
Télévision	5 %	8 %	7 %	20 %
Total	50 %	38 %	32 %	100 %

3° a) Parmi les 480 amateurs de sport, on a 160 femmes. De plus :

$$\frac{160}{480} \times 100 \approx 33,33.$$

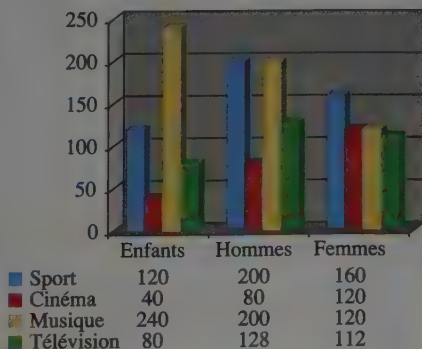
On en déduit que, parmi les amateurs de sport, le pourcentage de femmes est environ 33,33 %.

b) Parmi les 608 hommes, on a 80 cinéphiles. De plus :

$$\frac{80}{608} \times 100 \approx 13,2.$$

Par conséquent, parmi les hommes, le pourcentage de ceux qui préfèrent le cinéma est environ 13,2 %.

4° L'histogramme représentant les effectifs de chaque activité selon la catégorie de population est le suivant :



21 On lance cinquante fois de suite un dé équilibré à six faces et on affiche la fréquence du 2.

1°

Variables

k, a, i : entiers

f : réel de $[0 ; 1]$

Initialisation

k et a prennent la valeur 0

Traitement

Pour i variant de 1 à 50

a prend la valeur d'un nombre aléatoire entier entre 0 et 6

Si $a = 0$

alors k prend la valeur $k + 1$

fin Si

fin Pour

f prend la valeur $\frac{k}{50}$

Sortie

Afficher f

2°

TI

```
: 0 → k
: 0 → a
: For (I,1,50)
: entAléat(0,6) → a
If a=2
: Then
: k+1 → k
: End
: End
: k/50 → f
: Disp "Freq 2", f
```

CASIO

```
: 0 → k ↓
0 → a ↓
For 1 → I To 50 ↓
Int(6Rand# + 1) → a
If a=2 ↓
Then k+1 → k ↓
IfEnd ↓
Next ↓
k/50 → f ↓
"Freq 2": f ↓
```

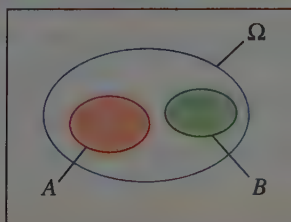
Loi de probabilité sur un ensemble fini

- Une **distribution de probabilité** sur un ensemble Ω dont les éléments sont notés $\omega_1, \dots, \omega_r$ est définie par la donnée des probabilités respectives $p_1, \dots, p_r$ de ces éléments.
- Un **événement** est une partie de l'ensemble Ω .
- La **probabilité** $P(A)$ d'un événement A est la somme des probabilités des éléments qui le constituent.

Propriétés

- Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
- Pour tous événements A et B incompatibles :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

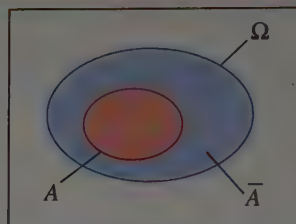


- Pour tous événements A et B :

$$\text{si } A \subset B, \text{ alors } P(A) \leq P(B)$$

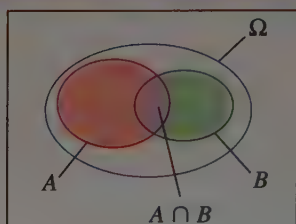
- Pour tout événement A , la probabilité de son événement contraire $\bar{A}$ vérifie :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



- Pour tous événements A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire modélisée par une loi de probabilité P sur un ensemble fini Ω des issues.

On appelle variable aléatoire toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x est un événement, noté $\{X = x\}$.

L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X (c'est l'ensemble des valeurs prises par X).

Loi de probabilité

Déterminer la loi de probabilité de X , c'est déterminer :

- les différentes valeurs $x_1, \dots, x_n$ prises par X ,
- pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.

Posons, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, $p_i = P(X = x_i)$

(les réels $p_1, \dots, p_n$ ont pour somme 1).

Espérance, variance, écart-type

- L'espérance mathématique de X est le réel noté $E(X)$ et défini par :

$$E(X) = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

(c'est la valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions).

- La variance de X est le réel noté $V(X)$ et défini par :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$$

- L'écart-type de X est le réel noté $\sigma(X)$ et défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

- Pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad V(aX + b) = a^2V(X)$$

Modélisations d'expériences aléatoires de référence

- Soit Ω un ensemble fini qui possède r éléments.
- Ω^2 désigne l'ensemble des couples (x, y) d'éléments de Ω , et Ω^2 possède r^2 éléments.
- Ω^3 désigne l'ensemble des triplets (x, y, z) d'éléments de Ω , et Ω^3 possède r^3 éléments.
- Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul, Ω^n désigne l'ensemble des n -listes $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de Ω , et Ω^n possède r^n éléments.
- Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité sur l'ensemble des issues possibles. On peut généralement trouver une expérience de référence qui, à un recodage près des issues possibles, est régie par le même modèle.

Expérience aléatoire	Un modèle adapté
Choix d'un élément au hasard dans Ω .	Ω muni de la loi de probabilité équirépartie.
Choix de n éléments au hasard dans Ω .	Ω^n muni de la loi de probabilité équirépartie.
Choix d'un élément au hasard dans Ω^n .	
Lancer d'un dé équilibré.	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la loi de probabilité équirépartie.
n lancers d'un dé équilibré.	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$ muni de la loi de probabilité équirépartie.
Lancer de n dés équilibrés discernables.	
Lancer d'une pièce de monnaie équilibrée.	$\{0; 1\}$ muni de la loi de probabilité équirépartie.
n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée.	$\{0; 1\}^n$ muni de la loi de probabilité équirépartie.
Lancer de n pièces de monnaie équilibrées discernables.	
Tirage d'une boule au hasard dans une urne contenant N_1 boules rouges et N_2 boules blanches.	$\{0; 1\}$ muni de la loi de probabilité $\left(\frac{N_1}{N_1 + N_2}, \frac{N_2}{N_1 + N_2}\right)$.

Utilisation d'une calculatrice, d'un tableur

Les calculatrices et les tableurs disposent d'un générateur de nombre aléatoire qui produit un décimal (possédant un nombre fixe de chiffres après la virgule, qui dépend du matériel) pris au hasard dans $[0 ; 1[$, par exemple :

TI	NbrAléat
CASIO	Ran#
Excel	ALEA()

Si n est un entier naturel non nul et x un nombre aléatoire de l'intervalle $[0 ; 1[$, alors nx est un nombre aléatoire de l'intervalle $[0 ; n[$, la partie entière de nx est un entier aléatoire de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ et la partie entière de $nx + 1$ est un entier aléatoire de $\{1, 2, \dots, n\}$.

En associant le générateur de nombre aléatoire et la fonction « partie entière » :

Obtention d'un	TI	CASIO	Excel
chiffre aléatoire (choix d'un chiffre au hasard)	entAléat(0,9)	Int(10Ran#)	ENT(10*ALEA())
chiffre aléatoire parmi 0 et 1 (lancer d'une pièce de monnaie équilibrée)	entAléat(0,1)	Int(2Ran#)	ENT(2*ALEA())
entier aléatoire compris entre 1 et 6 (lancer d'un dé équilibré)	entAléat(1,6)	Int(6Ran#+1)	ENT(6*ALEA()+1)

On peut aussi utiliser la fonction `alea.entre.bornes` du logiciel Excel ; par exemple, `alea.entre.bornes(1,6)` retourne un entier aléatoire parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Un exemple

Intéressons-nous à l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux pièces de monnaie équilibrées, et simulons la loi de probabilité de la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de côtés face obtenus.

En codant « face » par 1 et « pile » par 0, la variable aléatoire étudiée associe à tout couple (i, j) de nombres 0 ou 1 la somme $i + j$.

Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont :

0 (« double pile »), 1 (« pile et face ») et 2 (« double face »).

Calculatrices

Utilisons une liste de trois éléments (c'est un triplet) ; dans les premier, deuxième et troisième éléments de cette liste seront cumulés les nombres de résultats égaux respectivement à 0, 1, 2.

Programmons l'algorithme suivant :

- entrer le nombre N d'expériences,
- initialiser à $(0, 0, 0)$ une liste L ,
- pour I variant de 1 à N :
 - calculer la somme de deux entiers aléatoires de $\{0 ; 1\}$,
 - ajouter 1,
 - et affecter le résultat à la variable A(A contient alors le rang de l'élément de la liste auquel il faut ajouter 1),
- ajouter 1 à l'élément de la liste L de rang A ,

- afficher les fréquences d'apparition des résultats 0, 1 et 2.

Variable	Utilisation	Valeur initiale
N	Nombre d'expériences	Fourni par l'utilisateur
I	Compteur de boucle	I
A	Nombre de côtés face + 1	
L1 ou List 1	Liste à 3 éléments	(0, 0, 0)

TI

```

:3→dim L1:Fill(0,L1)
:Prompt N
:For (I, 1, N)
:entAléat(0,1)
:entAléat(0,1)+1→A
:L1(A)+1→L1(A)
:End
:L1/N→L1
:Disp "FRQ 0", L1 (1)
:Disp "FRQ 1", L1 (2)
:Disp "FRQ 2", L1 (3)

```

CASIO

```

{0, 0, 0}→List 1
"NB EXP"?→N
For 1→I To N
Int (2Ran#)
+ Int(2Ran#)+1→A
List 1[A]+1→List 1[A]
Next
List 1÷N→List 1
"FRQ 0":List 1 [1]
"FRQ 1":List 1 [2]
"FRQ 2":List 1 [3]

```

Voici un exemple de résultat, pour 400 expériences :

```

400
FRQ 0      0.265
FRQ 1      0.5175
FRQ 2      0.2175

```

Tableurs

Échantillon 200 expériences										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	0	1	1	0	2	2	1	2	2
2	1	0	2	1	1	0	2	0	1	1
3	2	0	1	1	1	1	2	1	0	2
4	2	1	0	0	0	1	0	0	0	2
5	1	1	0	2	1	1	0	2	1	1
6	2	0	0	1	0	0	0	2	0	1
7	2	1	0	2	1	1	1	2	1	1
8	2	2	1	1	2	2	2	1	1	1
9	0	1	1	1	0	1	0	0	2	2
10	0	1	2	2	2	1	1	1	0	1
11	1	1	2	2	2	1	1	2	2	1
12	1	0	1	1	0	1	0	1	2	2
13	2	2	1	1	0	1	1	1	2	1
14	1	1	0	1	1	1	2	0	1	2
15	1	1	1	1	1	1	1	2	0	1
16	1	0	1	1	0	1	0	1	0	2
17	0	1	0	1	2	0	0	0	0	2
18	1	1	1	2	2	2	1	0	2	1
19	2	1	2	2	1	1	2	2	1	1
20	1	1	1	0	0	1	1	2	1	0

Étapes	Adresses	Formules	Observations
Échantillon de 200 expériences	A2:J21	=ENT(2*ALEA()) +ENT(2*ALEA())	Entrer cette formule dans A2, puis tirer la poignée de recopie rapide, vers la droite, vers le bas.
Sommes possibles	L2:L4		Entrer 0, 1 et 2.
Effectifs	K2:K4	=NB.SI(\$A\$2:\$J\$21;L2)	Entrer cette formule dans K2, et tirer la poignée de recopie rapide vers le bas.
Moyenne	K7	=MOYENNE(A2:J21)	
Fréquences expérimentales	M2:M4	=L2/200	Entrer cette formule dans M2, puis tirer la poignée de recopie rapide, vers le bas.

La formule :

=NB.SI(\$A\$2:\$J\$21;L2)

retourne le nombre de cellules de la plage A2:J21 dont la valeur est égale à celle entrée dans L2 ; noter l'utilisation des références absolues (\$A\$2) ou relatives (L2), qui permettent d'utiliser la fonction de recopie rapide en incrémentant automatiquement les références relatives, et en ne modifiant pas les références absolues.

En appuyant sur la touche **F9**, une nouvelle simulation est effectuée.

Pour une meilleure lisibilité de la feuille de calcul Excel, les tailles des dix premières colonnes ont été diminuées (sélectionner les colonnes A à J, dérouler le menu **Format**, choisir les options **Colonne**, **Largeur**).

EXERCICES

Vrai ou faux ?

1 (corrigés p. 265)

On considère une expérience aléatoire modélisée par une loi de probabilité P sur un ensemble Ω dont les éléments, deux à deux distincts, sont $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$.

1° a) $\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ est un événement.

b) ω_2 est un événement.

c) $\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$ et $\{\omega_2, \omega_5\}$ sont des événements contraires.

2° Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont les valeurs prises sont 1, 2 et 3.

a) $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$.

b) $1 \leq E(X) \leq 3$.

c) $E(-2X - 3) = -2E(X) - 3$.

d) $V(-2X - 3) = -2V(X) - 3$.

Loi de probabilité

2 ★ 5 min (corrigés p. 265)

On considère une expérience aléatoire modélisée par la loi de probabilité équirépartie P sur un ensemble Ω dont les quatre éléments sont notés $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 . Donner un exemple :

1° d'événement A tel que $P(A) = \frac{3}{4}$;

2° d'événement A tel que $P(A) = P(\bar{A})$;

3° d'événements A et B tels que $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$.

3 ★ 5 min (corrigés p. 265)

Dans une expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard une boule d'une urne comportant des boules rouges et des boules bleues, la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{2}{3}$.

Que peut-on dire des nombres N_1 de boules rouges et N_2 de boules bleues contenues dans l'urne ?

4 ★ 5 min (corrigés p. 266)

Chacune des expériences aléatoires proposées ci-dessous peut-elle être modélisée par la loi équirépartie sur l'ensemble $\{0; 1\}$?

1° Lancer d'une pièce de monnaie équilibrée.

2° Tirage d'une boule au hasard dans une urne contenant dix boules rouges et dix boules blanches.

3° Jet d'un dé équilibré et relevé du caractère « pair » ou « impair » du numéro porté par le dé.

4° Lancer d'une punaise, et relevé de la position ($\perp$ ou λ).

5 ★ 10 min

(corrigés p. 266)

Proposer un modèle de chacune des expériences aléatoires suivantes.

1° Deux jets successifs d'un dé équilibré.

2° Jet de deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre bleu.

3° Trois lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

4° Jet de trois pièces équilibrées indiscernables.

5° Tirage d'une boule au hasard dans une urne contenant dix boules blanches et trente boules vertes.

6 ★ 5 min

(corrigés p. 267)

On choisit un chiffre selon une loi de probabilité P telle que la probabilité de sortie du chiffre i est proportionnelle à $i + 1$.

Calculer $P(0)$.

7 ★★ 10 min

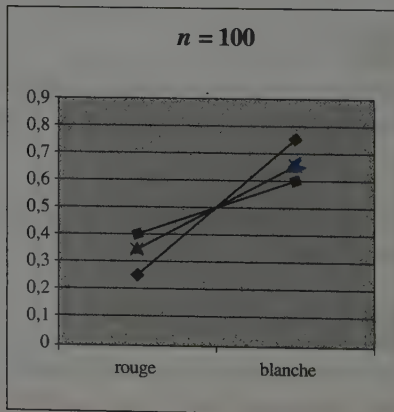
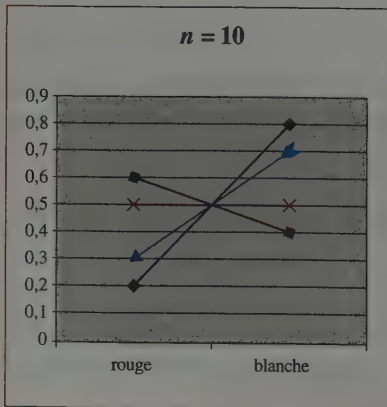
(corrigés p. 267)

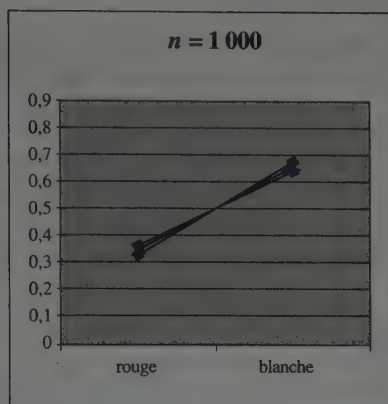
Une expérience aléatoire consiste à tirer une boule au hasard dans une urne contenant six boules, certaines étant rouges et les autres blanches.

Les trois graphiques suivants, obtenus avec un tableur, représentent quatre distributions des fréquences d'apparition d'une boule rouge et d'une boule blanche lors de la répétition de n expériences, respectivement pour :

$$n = 10, \quad n = 100 \quad \text{et} \quad n = 1\,000.$$

Commenter ces graphiques ; peut-on savoir combien l'urne comporte de boules rouges ?





Simulation d'expériences aléatoires

8 ★★ 15 min

(corrigés p. 267)

On effectue cinq lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

1° Écrire un algorithme qui simule cette expérience aléatoire et donne en sortie le nombre de côtés face obtenus.

2° Transcrire l'algorithme précédent sur la calculatrice.

9 ★★ 20 min

(corrigés p. 268)

On effectue quatre jets successifs d'un dé équilibré.

1° Éditer un programme sur la calculatrice qui simule cette expérience aléatoire et affiche le minimum des points amenés par le dé.

2° Éditer un programme sur la calculatrice qui prend en entrée un entier naturel n non nul, simule n répétitions de l'expérience aléatoire étudiée, et donne en sortie la moyenne des minima des points amenés par le dé.

10 ★★ 20 min

(corrigés p. 268)

On effectue cinquante tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise dans une urne contenant trois boules rouges et cinq boules bleues.

Éditer un programme sur la calculatrice qui simule cette expérience aléatoire et affiche le nombre de boules rouges obtenues.

Probabilité d'un événement

11 ★★ 20 min

(corrigés p. 269)

On dispose d'une urne contenant des boules rouges et des boules bleues, et on effectue dans cette urne trois tirages au hasard successifs d'une boule avec remise. On note R_i les événements « obtenir une boule rouge au i -ème tirage » pour i valant 1, 2 ou 3.

1° Décrire chacun des événements $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $\bar{R}_1 \cap R_2 \cap R_3$.

2° Écrire à l'aide des événements R_i chacun des événements suivants :

• A : « obtenir trois boules rouges » ;

• B : « obtenir au moins une boule rouge » ;

• C : « obtenir une boule rouge au premier tirage et une boule bleue au deuxième ».

3° Décrire l'événement contraire de chacun des événements :

$$R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2.$$

12 ★ 10 min

(corrigés p. 270)

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, D, E et F définis ci-dessous.

1° A : « tirer un cœur ».

2° B : « tirer un roi ».

3° C : « tirer le roi de cœur ».

4° D : « tirer une dame rouge ».

5° E : « tirer un roi ou un cœur ».

6° F : « tirer une carte qui ne soit ni un roi ni un cœur ».

13 ★ 10 min

(corrigés p. 270)

On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à choisir trois lettres au hasard, les deux premières parmi les lettres A, B et C , la troisième parmi A et B .

Un résultat possible est une liste de trois lettres ; on notera par exemple CAB celui pour lequel la première lettre est C , la deuxième A et la troisième B .

1° Construire un arbre permettant d'obtenir tous les résultats possibles.

2° Calculer la probabilité des événements E, F, G, H suivants :

E : « obtenir trois lettres identiques » ;

F : « obtenir au plus une lettre A » ;

G : « obtenir trois lettres distinctes » ;

H : « obtenir au moins une lettre C ».

3° Montrer que la probabilité de l'événement $F \cap H$ est égale à $\frac{4}{9}$.

En déduire la probabilité de l'événement $F \cup H$.

(Les résultats des calculs de probabilités seront présentés sous forme de fraction irréductible.)

Variables aléatoires

14 ★ 5 min

(corrigés p. 271)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x	-2	1	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$

Calculer l'espérance et la variance de chacune des variables aléatoires X et $-3X + 2$.

15 ★★ 10 min

(corrigés p. 271)

On dispose de deux boîtes B_1 et B_2 dans chacune desquelles sont placés un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1.

On tire aléatoirement un jeton de chacune des boîtes, et on les échange. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe le nombre de jetons numérotés 1 dans la boîte B_1 .

Déterminer la loi de probabilité de X .

16 ★★ 15 min

(corrigés p. 271)

Un joueur lance un dé équilibré, et :

- il gagne 1 € si le dé amène 1, 2 ou 3,
0,5 € si le dé amène 4,
- il perd 2 € si le dé amène 5 ou 6.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat amené par le dé, associe le gain en euros (positif ou négatif) du joueur.

1° Déterminer la loi de probabilité de X .

2° Calculer l'espérance et l'écart-type de X .

3° Utiliser le menu Statistiques de la calculatrice pour retrouver les résultats de la question précédente.

17 ★★ 15 min

(corrigés p. 272)

On dispose d'une urne contenant quatre boules, numérotées de 1 à 4. On effectue dans cette urne deux tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise, et on appelle X la variable aléatoire qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe la différence entre le plus grand nombre de points et le plus petit nombre de points portés par les boules tirées.

1° Déterminer la loi de probabilité de X .

2° Calculer l'espérance de X .

18 ★★ 20 min

(corrigés p. 273)

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer quatre lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

Le modèle est la loi équirépartie sur l'ensemble Ω des 4-listes d'éléments de $\{P, F\}$. On adoptera une notation simplifiée des résultats, par exemple le résultat (P, F, F, P) se notera PFFP.

1° Représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre.

2° Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe la longueur de la plus grande chaîne de côtés pile obtenue.

Par exemple : $X(\{FPPF\}) = 2$, $X(\{FPFP\}) = 1$.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance de X .

3° Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe 0 si aucun pile n'apparaît, le rang d'apparition du dernier pile sinon.

Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance.

4° Quelle est la probabilité de l'événement $\{X = 2\} \cup \{Y = 3\}$?

19 ★★ 15 min

(corrigés p. 274)

On effectue trois lancers successifs d'un dé équilibré et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si aucun 6 n'apparaît, qui sinon donne le numéro du lancer où apparaît le premier 6.

1° Déterminer la loi de probabilité de X à l'aide d'un arbre.

Calculer l'espérance de X .

2° Écrire un algorithme qui simule l'expérience aléatoire étudiée et donne en sortie la valeur prise par X .

20 ★★ 15 min

(corrigés p. 275)

On effectue deux lancers successifs d'un dé tétraédrique, dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

Le modèle est la loi équirépartie sur l'ensemble Ω des 2-listes d'éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe le plus grand des deux numéros amenés par le dé.

1° Déterminer la loi de probabilité de X .

Calculer l'espérance de X .

2° On considère l'algorithme suivant :

Variables

S, n, x, y : entiers

Entrées

Saisir n

Initialisation

S prend la valeur 0

Traitement

Pour k variant de 1 à n , faire

x prend la valeur d'un nombre aléatoire entier
 entre 1 et 4

y prend la valeur d'un nombre aléatoire entier
 entre 1 et 4

 Si $x > y$

 alors S prend la valeur $S + x$

 sinon S prend la valeur $S + y$

 fin Si

fin Pour

Sortie

Afficher S/n

Que calcule cet algorithme ?

Que peut-on dire de la valeur en sortie pour de grandes valeurs de n ?

2★ ★ ★ 30 min

(corrigés p. 276)

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer neuf lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

En considérant qu'un résultat est la 9-liste $(x_1, \dots, x_9)$ où, pour tout entier i compris au sens large entre 1 et 9, x_i vaut 1 si la pièce a amené pile au i -ème lancer, 0 sinon, le modèle est la loi équirépartie sur l'ensemble Ω des 9-listes d'éléments de l'ensemble $\{0; 1\}$, le nombre d'éléments de Ω étant égal à 2^9 .

On s'intéresse à la variable aléatoire X qui, à tout résultat de l'expérience aléatoire, associe le nombre « d'alternances ». Par exemple, si les neuf lancers ont donné successivement :

pile, pile, pile, face, face, pile, face, face, pile,

alors l'événement $\{X = 4\}$ est réalisé, autrement dit le résultat $(1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ réalise l'événement $\{X = 4\}$.

1° a) Déterminer les résultats qui réalisent l'événement $\{X = 0\}$, puis ceux qui réalisent l'événement $\{X = 8\}$.

b) Déterminer le nombre de résultats qui réalisent l'événement $\{X = 1\}$.

c) En déduire la probabilité de chacun des événements $\{X=0\}$, $\{X=8\}$, $\{X=1\}$ (on donnera la valeur exacte et l'arrondi automatique à 10^{-3} près).

2° Compléter l'algorithme suivant qui simule l'expérience aléatoire et donne en sortie le nombre d'alternances.

Variables

 a, b, x

Initialisation

 $x \leftarrow 0$

Traitement

a prend aléatoirement la valeur 0 ou 1

Pour i variant de $\blacksquare$ à 9, faire

b prend aléatoirement la valeur 0 ou 1

Si $a \neq b$, alors

 $x \leftarrow$
$$a \leftarrow \text{■}$$

fin Si

fin Pour

Sortie

x

3° Compléter l'algorithme suivant qui simule N expériences aléatoires et donne en sortie la fréquence de réalisation des événements $\{X = 0\}, \{X = 1\}, \dots, \{X = 8\}$. On a noté **algo1 la valeur en sortie de l'algorithme de la question 2°.**

Variables N, n L : 9-listeLes composantes de L seront notées $L[1], L[2], \dots, L[9]$.**Entrée**Saisir N **Initialisation** $x \leftarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ **Traitement**Pour i variant de , faire $n \leftarrow \text{algo1} + 1$ $L[n] \leftarrow$

fin Pour

Pour i variant de 1 à 9, faire

fin Pour

SortieAfficher L

4° Après avoir programmé l'algorithme précédent, trois exécutions en prenant successivement $N = 1\,000$, $N = 10\,000$ et $N = 100\,000$ ont donné en sortie les listes suivantes (valeurs arrondies au millième).

 $N = 1\,000$:

0,005 0,034 0,113 0,217 0,235 0,250 0,112 0,031 0,003

 $N = 10\,000$:

0,005 0,034 0,108 0,221 0,275 0,218 0,106 0,033 0,004

 $N = 100\,000$:

0,004 0,031 0,109 0,216 0,274 0,221 0,110 0,031 0,004

Ces résultats sont-ils en accord avec ceux de la question 1° c) ?

22 ★★★ 30 min

(corrigés p. 277)

Dans un jeu de pile ou face avec une pièce de monnaie équilibrée, on gagne le double de la mise sur pile et on perd la mise sur face.

Un joueur qui dispose de 1 000 € commence par miser un euro, double sa mise quand il perd et ne s'arrête que s'il gagne ou s'il ne peut plus miser.

On modélisera n lancers de la pièce de monnaie (n entier supérieur ou égal à 1) par la loi équirépartie sur les n -listes dont les éléments valent 0 ou 1 (on code « le joueur gagne » par 1 et « le joueur perd » par 0).

1° On suppose que le joueur mise n fois.

- Quelle est la probabilité que le joueur gagne au n -ième coup ?
- Calculer la somme des mises successives, du premier au n -ième coup.
- Calculer le gain du joueur lorsqu'il gagne au n -ième coup.

2° Déterminer le nombre maximal de coups.

3° Soit G la variable aléatoire qui donne le gain en euros (positif ou négatif) du joueur.

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire G ?

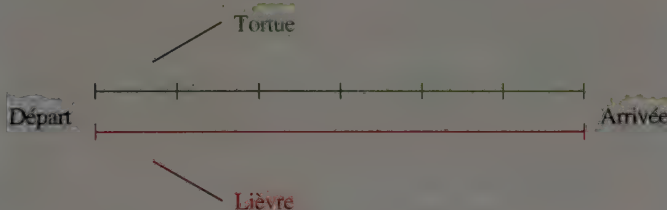
Déterminer la loi de probabilité de G .

b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire G .

23 ★★★ 30 min

(corrigés p. 278)

Le lièvre et la tortue



Il y a six étapes du départ à l'arrivée. On lance un dé.

Si un 6 sort, alors le lièvre franchit les six étapes d'un coup et gagne la course.

Sinon, la tortue franchit une étape.

On recommence, jusqu'à ce qu'il y ait un vainqueur.

1° Justifier que l'on peut modéliser l'expérience aléatoire par la probabilité équirépartie sur l'ensemble des 6-listes de nombres entiers compris entre 1 et 6.

2° Calculer la probabilité que la tortue gagne ; en déduire la probabilité que le lièvre gagne.

3° Écrire un programme qui simule n répétitions de cette expérience aléatoire.

Ce programme :

- demandera le nombre d'expériences à réaliser ;
- affichera la fréquence du cas où la tortue gagne.

Exécuter le programme pour un grand nombre d'expériences. Commenter.

4° Simuler avec un tableur 400 expériences aléatoires et calculer la fréquence du cas où la tortue gagne.

L'interrogation écrite

24 30 min

(corrigés p. 279)

On distribue au hasard trois jetons dans trois boîtes notées B_1, B_2, B_3 et on appelle X la variable aléatoire qui, à tout résultat de l'expérience aléatoire, associe le nombre de boîtes restées vides.

1° Proposer un modèle pour cette expérience aléatoire où tous les résultats sont équiprobables.

2° Déterminer la loi de probabilité de X .

3° Calculer l'espérance de X .

4° Compléter l'algorithme suivant, qui simule l'expérience aléatoire étudiée et fournit en sortie le nombre de boîtes restées vides.

À la fin de l'algorithme, la i -ème composante de L ($1 \leq i \leq 3$) vaudra 1 si au moins un jeton a été placé dans la boîte B_i , 0 sinon.

Variables

x, k, alea : entiers

L : liste de 3 éléments

Initialisation

x prend la valeur 3

L prend la valeur [0, 0, 0]

Traitement

Pour k variant de ■, faire

alea prend la valeur d'un nombre aléatoire entier
 entre 1 et 3

 Si $L[\text{alea}] = 0$, alors

$L[\text{alea}]$ prend la valeur 1

x prend la valeur ■

 fin Si

fin Pour

Sortie

Afficher x

CORRIGÉS

Vrai ou faux ?

1 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

1° a) $\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ est un événement.

Vrai, car $\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ est une partie de Ω .

On peut écrire :

$$\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} \subset \Omega.$$

b) ω_2 est un événement.

Faux, car ω_2 n'est pas une partie de Ω , mais un élément de cet ensemble. On peut écrire : $\omega_2 \in \Omega$.

c) $\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$ et $\{\omega_2, \omega_5\}$ sont des événements contraires.

Vrai, car l'un est réalisé si, et seulement si, l'autre ne l'est pas. En effet :

• $\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\} \cap \{\omega_2, \omega_5\} = \emptyset$ (les deux événements ne peuvent pas se réaliser simultanément),

• $\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\} \cup \{\omega_2, \omega_5\} = \Omega$ (au moins un des deux événements se réalise).

2° X : variable aléatoire définie sur Ω dont les valeurs prises sont 1, 2 et 3.

a) $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$.

Vrai, car les seules valeurs prises par X sont 1, 2 et 3.

b) $1 \leq E(X) \leq 3$.

Vrai, car les valeurs prises par X sont comprises au sens large entre 1 et 3, et que l'espérance d'une variable aléatoire est une moyenne pondérée des valeurs prises, à coefficients positifs.

c) $E(-2X - 3) = -2E(X) - 3$.

Vrai

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

d) $V(-2X - 3) = -2V(X) - 3$.

Faux, $V(-2X - 3) = 4V(X)$

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

Noter aussi qu'une variance est toujours positive.

Loi de probabilité

2 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, P est la loi équirépartie sur Ω .

P étant la loi équirépartie sur un ensemble à quatre éléments, on sait que, pour tout événement A , la probabilité $P(A)$ de A est égale au nombre d'éléments de A divisé par 4.

1° Posons : $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Le nombre d'éléments de A étant égal à 3, on a : $P(A) = \frac{3}{4}$.

On dit aussi : « le nombre de résultats qui réalisent A est égal à 3 ».

Trois autres réponses étaient également correctes :

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

2° Posons : $A = \{\omega_1, \omega_2\}$. Alors son événement contraire $\bar{A}$ est égal à $\{\omega_3, \omega_4\}$, et comme A et $\bar{A}$ ont le même nombre d'éléments :

$$P(A) = P(\bar{A}).$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3° On a l'embarras du choix ! Il suffit que les événements A et B ne soient pas incompatibles, c'est-à-dire que les ensembles A et B aient au moins un élément en commun, pour que $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$.

Posons : $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$.

Alors :

• $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, donc

$$P(A) + P(B) = 1,$$

• $A \cup B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, donc

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

et on a bien :

$$P(A \cup B) \neq P(A) + P(B).$$

3 Les événements « tirer une boule rouge » et « tirer une boule bleue » sont des événements contraires, donc la somme de leurs probabilités est égale à 1 ; la probabilité de tirer une boule rouge étant $\frac{2}{3}$, celle de tirer une boule bleue est

donc $\frac{1}{3}$. La probabilité de tirer une boule d'une des deux couleurs rouge ou bleu est égale à la proportion de boules de cette couleur dans l'urne.

$$\frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{N_2}{N_1 + N_2} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité de tirer une boule rouge (2/3) étant le double de celle de tirer une boule bleue (1/3), l'urne contient deux fois plus de boules rouges que de boules bleues :

$$N_1 = 2N_2.$$

4 1° Lancer d'une pièce de monnaie équilibrée.

La pièce de monnaie étant équilibrée, chacun des deux côtés pile ou face a la même probabilité d'apparaître. En codant par exemple pile par 0 et face par 1, l'expérience aléatoire peut être modélisée par la loi équirépartie sur l'ensemble $\{0; 1\}$.

2° Tirage d'une boule au hasard dans une urne contenant dix boules rouges et dix boules blanches.

L'urne contenant autant de boules rouges que de boules blanches, les proportions de boules rouges et de boules blanches sont égales à $\frac{1}{2}$.

En codant par exemple l'obtention d'une boule rouge par 0 et l'obtention d'une boule blanche par 1, l'expérience aléatoire peut être modélisée par la loi équirépartie sur l'ensemble $\{0; 1\}$.

3° Jet d'un dé équilibré et relevé du caractère « pair » ou « impair » du numéro porté par le dé.

Parmi les entiers compris entre 1 et 6, il y en a autant de pairs (2, 4 et 6) que d'impairs (1, 3 et 5). Le dé étant équilibré, la probabilité qu'il amène un chiffre pair et la probabilité qu'il amène un chiffre impair sont donc égales à 1/2. En codant par exemple l'obtention d'un chiffre pair par 0 et l'obtention d'un chiffre impair par 1, l'expérience aléatoire peut être modélisée par la loi équirépartie sur l'ensemble $\{0; 1\}$.

4° Lancer d'une punaise, et relevé de la position ($\perp$ ou $\wedge$).

Rien ne permet d'affirmer que chacune des deux éventualités $\perp$ ou $\wedge$ a la même probabilité de se réaliser.

Une étude statistique permettrait de déterminer un modèle adapté.

5 1° Deux jets successifs d'un dé équilibré.

L'ensemble Ω des issues possibles est celui des couples (i, j) de nombres entiers entre 1 et 6 (i : numéro porté par le dé au premier jet, j : numéro porté par le dé au second jet).

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}^2, \text{ card}(\Omega) = 6^2 = 36.$$

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est souvent noté $\text{card}(E)$.

Le dé étant équilibré, l'expérience aléatoire est modélisée par l'équiprobabilité sur Ω .

2° Jet de deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre bleu.

L'expérience aléatoire peut se modéliser de la même façon que dans la question 1°, en considérant, par exemple, que l'issue (i, j) correspond à :

le dé rouge amène le chiffre i

et le dé bleu amène le chiffre j .

3° Trois lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

En codant par exemple pile par 0 et face par 1, l'ensemble Ω des issues possibles est celui des triplets (i, j, k) de nombres 0 ou 1.

La pièce de monnaie étant équilibrée, l'expérience aléatoire est modélisée par l'équiprobabilité sur Ω .

$$\Omega = \{0; 1\}^3, \text{ card}(\Omega) = 2^3 = 8.$$

4° Jet de trois pièces équilibrées indiscernables.

En codant par exemple pile par 0 et face par 1, les résultats observables de cette expérience aléatoire sont « triple 0 », « triple 1 », « 1 et double 0 », « 0 et double 1 », et on peut démontrer que le choix de la distribution de probabilité

$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$ sur ces quatre résultats est adapté. Mais, pour parvenir à cette

conclusion, on est amené à partir du modèle de la loi équiréparti sur $\{1; 0\}^3$ et à introduire, par exemple, la variable aléatoire « nombre de côtés face obtenus », qui suit une loi binomiale (voir chapitre 12).

Pour certaines expériences aléatoires, on est amené à choisir un modèle calculé à partir d'un modèle d'équiprobabilité sur un ensemble qui n'est pas celui des issues observables.

5° Tirage d'une boule au hasard dans une urne contenant dix boules blanches et trente boules vertes.

La proportion de boules blanches contenues dans l'urne est égale à $\frac{1}{4}$, celle de boules vertes est égale à $\frac{3}{4}$.

$$\frac{10}{10+30} = \frac{1}{4}, \quad \frac{30}{10+30} = \frac{3}{4}.$$

En codant par exemple l'obtention d'une boule blanche par B et celle d'une boule verte par V, l'expérience aléatoire peut être modélisée par la distribution de probabilité $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ sur la liste de résultats (B, V).

6 Par définition de la loi de probabilité P , définie sur l'ensemble $\{0, 1, \dots, 9\}$, il existe un nombre réel k tel que : pour tout nombre entier i compris entre 0 et 9, $P(i) = k(i+1)$, et en particulier :

$$P(0) = k.$$

$$\text{De plus : } \sum_{i=0}^9 P(i) = 1,$$

$$\text{c'est-à-dire : } \sum_{i=0}^9 k(i+1) = 1,$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^9 k(i+1) &= k \times 1 + k \times 2 + \dots + k \times 10 \\ &= k \times (1 + 2 + \dots + 10) \\ &= 55k. \end{aligned}$$

On en déduit : $k = \frac{1}{55}$, autrement dit :

$$P(0) = \frac{1}{55}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

7 Les trois graphiques mettent en évidence des fluctuations d'échantillonnage, d'autant plus faibles que le nombre n d'expériences est grand.

Le troisième graphique fait apparaître une stabilisation de la distribution des fréquences de sortie d'une boule rouge et d'une boule blanche sur $(p, 1-p)$, où p est entre 0,3 et 0,4. Il est donc raisonnable d'affirmer que l'urne contient des boules rouges et blanches dans les proportions $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, autrement dit, l'urne contenant six boules, il est raisonnable d'affirmer que l'urne contient deux boules rouges et quatre boules blanches.

Simulation d'expériences aléatoires

8 Expérience aléatoire : cinq lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée. Relevé du nombre de côtés face.

1° On choisit de coder l'obtention de face par 1 et l'obtention de pile par 0. Dans le compteur x , initialisé à 0, on ajoutera 1 à chaque fois que « la pièce amène face ».

Variables

a, x

Initialisation

x prend la valeur 0

Traitement

Pour i variant de 1 à 5, faire
 a prend aléatoirement la valeur 0 ou 1
 Si $a = 1$, alors
 $x \leftarrow x + 1$
 fin Si
 fin Pour

Sortie

x

```

:0→X
:For (I, 1, 5)
:If Ent Aléat(0,1)=1
:Then
:x+1→x
:End
:End
:Disp"NB FACE", x

```

CASIO

```

0→X
For 1→I To 5
If Int(2Ran#)=1
Then x+1→x
If End
Next
"NB FACE":X

```

En choisissant un nombre au hasard dans [0 ; 1], il y a une chance sur deux qu'il soit inférieur à 0,5.

9 Expérience aléatoire : quatre jets successifs d'un dé équilibré. Relevé du minimum des points amenés par le dé.

1° Programmons l'algorithme suivant :

- définir une liste à quatre éléments,
- à l'aide de quatre passages dans une boucle **Pour**, remplir la liste par des entiers choisis au hasard dans { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 },
- afficher le minimum de la liste.

TI

```

:4→Dim L1
:For (I, 1, 4)
:entAléat(1,6)→L1[I]
:End
:Min (L1)→X
:Disp"MIN",X

```

CASIO

```

4→Dim List 1
For 1→I To 4
Int(6Ran#+1)→List 1[I]
Next
Min (List1)→X
"MIN":X

```

En vue de son utilisation dans la question suivante, ce programme sera sauvegardé sous le nom MINDE.

2° Programmons l'algorithme suivant :

- entrer la valeur n du nombre d'expériences à réaliser,
- initialiser une variable S à 0,
- à chacun des n passages dans une boucle **Pour**, appeler le programme MINDE et ajouter la valeur de sortie x à S ,
- afficher $\frac{S}{n}$.

Pour pouvoir appeler le programme MINDE dans ce second programme, remplacer la dernière ligne de MINDE (commande d'affichage) par la commande RETURN.

TI

```

:Prompt N
:0→S
:For (J,1,N)
:prgm MINDE
:S+X→S
:End
:Disp"MOY",S/N

```

CASIO

```

"NB EXP" ?→N
0→S
For 1→J To N
Prog "MINDE"
S+X→S
Next
"MOY":S÷N

```

Pour de grandes valeurs de n , l'exécution du programme donne à l'affichage une valeur proche de 1,8.

En effet, cette valeur fluctue autour de l'espérance de la variable aléatoire X qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe le minimum des points amenés par le dé, et on peut démontrer :

$$E(X) = \frac{2\,275}{1\,296} \approx 1,76.$$

10 Expérience aléatoire : cinquante tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise dans une urne contenant trois boules rouges et cinq boules bleues. Relevé du nombre de boules rouges.

Les cinquante tirages aléatoires successifs d'une boule dans l'urne se faisant avec remise, la composition de l'urne ne varie pas au cours des tirages ; à chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule rouge est égale à la proportion de boules rouges dans l'urne, c'est-à-dire $\frac{3}{8}$.

Structure du programme :

- initialiser un compteur x à 0 (dans lequel seront cumulées les boules rouges obtenues), une variable p à $\frac{3}{8}$;
- à chacun des cinquante passages dans une boucle Pour, si le générateur de nombre aléatoire fournit un nombre inférieur à p , alors ajouter 1 à x ;
- afficher x .

En choisissant un nombre au hasard dans $[0 ; 1[$, la probabilité que ce nombre soit inférieur à $\frac{3}{8}$ est égale à $\frac{3}{8}$.

TI

```
0→X
For (I,1,50)
If NbrAléat<3/8
Then
X+1→X
End
End
Disp"NB ROUGES",X
```

CASIO

```
0→X
For 1→I To 50
If Ran#<3/8
Then x+1→x
IfEnd
Next
"NB ROUGES":x
```

Probabilité d'un événement

11 R_i : « obtenir une boule rouge au i -ième tirage ».

1° • $R_1 \cap R_2$ est l'événement « obtenir une boule rouge au premier et au deuxième tirage ».

• $R_1 \cup R_2$ est l'événement « obtenir une boule rouge au premier ou au deuxième tirage ».

• $\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3$ est l'événement « obtenir une boule bleue au premier et une boule rouge aux deuxième et troisième tirages ».

2° • L'événement A : « obtenir trois boules rouges » est réalisé si, et seulement si, R_1, R_2 et R_3 le sont, donc :

$$A = R_1 \cap R_2 \cap R_3.$$

• L'événement B : « obtenir au moins une boule rouge » est réalisé si, et seulement si, R_1 ou R_2 ou R_3 est réalisé, donc :

$$B = R_1 \cup R_2 \cup R_3.$$

• L'événement C : « obtenir une boule rouge au premier tirage et une boule bleue au deuxième » est réalisé si, et seulement si, R_1 et l'événement contraire de R_2 sont réalisés, donc :

$$C = R_1 \cap \overline{R_2}.$$

3° • La négation de « obtenir une boule rouge au premier et au deuxième tirage » est « ne pas obtenir une boule rouge au premier tirage ou ne pas obtenir une boule rouge au deuxième tirage », donc l'événement contraire de $R_1 \cap R_2$ est l'événement « obtenir une boule bleue au premier ou au deuxième tirage ».

$$\overline{R_1 \cap R_2} = \overline{R_1} \cup \overline{R_2}.$$

• La négation de « obtenir une boule rouge au premier ou au deuxième tirage » est « ne pas obtenir une boule rouge au premier tirage et ne pas obtenir une boule rouge au deuxième tirage », donc l'événement contraire de $R_1 \cup R_2$ est l'événement « obtenir une boule bleue au premier tirage et au deuxième tirage ».

$$\overline{R_1 \cup R_2} = \overline{R_1} \cap \overline{R_2}.$$

12 L'expérience aléatoire est modélisée par la loi équirépartie P sur l'ensemble des 32 cartes du jeu.

La probabilité d'un événement est alors égale au nombre de ses éléments divisé par 32.

1° A : « tirer un cœur ».

Un jeu de 32 cartes comprend huit cœurs, donc :

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

A possède 8 éléments : $\text{card}(A) = 8$.

2° B : « tirer un roi ».

Quatre cartes sont des rois, donc :

$$P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

$\text{card}(B) = 4$.

3° C : « tirer le roi de cœur ».

Le jeu comporte un seul roi de cœur, donc :

$$P(C) = \frac{1}{32}.$$

4° D : « tirer une dame rouge ».

La dame de carreau et la dame de cœur sont les deux dames rouges du jeu, donc :

$$P(D) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}.$$

5° E : « tirer un roi ou un cœur ».

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

On remarque :

$$E = A \cup B \text{ et } C = A \cap B,$$

donc :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A) + P(B) - P(C) \\ &= \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32}, \end{aligned}$$

d'où :

$$P(E) = \frac{11}{32}.$$

Un jeu de 32 cartes comprend huit cœurs, dont le roi de cœur, et trois autres rois, donc : $\text{card}(E) = 11$, et on retrouve bien :

$$P(E) = \frac{11}{32}.$$

6° F : « tirer une carte qui ne soit ni un roi ni un cœur ».

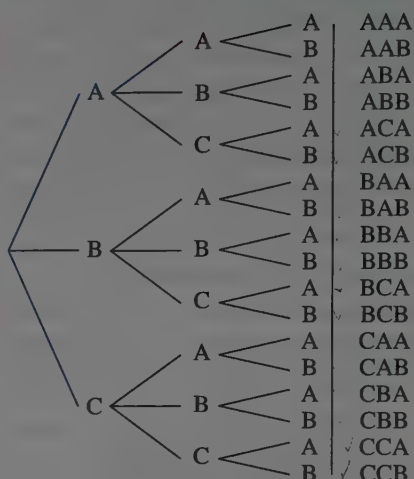
F est l'événement contraire de l'événement E , donc :

$$P(F) = 1 - P(E) = 1 - \frac{11}{32},$$

$$\text{d'où : } P(F) = \frac{21}{32}.$$

13 1°

Résultats



D'après l'arbre ci-dessus, les résultats sont au nombre de 18, ce qui correspond au calcul suivant :

trois choix possibles
pour la première lettre,

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$

le premier choix étant fait, trois choix possibles pour la deuxième lettre,

les deux premiers choix étant faits, deux choix possibles pour la troisième lettre.

2° La loi de probabilité P associée à l'expérience aléatoire est l'équiprobabilité sur l'ensemble des 18 listes obtenues précédemment :

la probabilité d'un événement est donc le quotient par 18 du nombre de listes qui réalisent cet événement.

• E : « obtenir trois lettres identiques ».

$E = \{AAA, BBB\}$, donc :

$$P(E) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

• F : « obtenir au plus une lettre A ».

Les listes qui réalisent l'événement F sont au nombre de 12, donc :

$$P(F) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

• G : « obtenir trois lettres distinctes ».

Seules quatre listes réalisent l'événement G : ACB, BCA, CAB et CBA, donc :

$$P(G) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

• H : « obtenir au moins une lettre C ». Exactement dix listes réalisent l'événement H , donc :

$$P(H) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

3° • $F \cap H$ est l'événement : « obtenir au plus une lettre A et au moins une lettre C » ; les listes qui le réalisent sont au nombre de 8 :

ACB, BCA, BCB, CAB, CBA, CBB, CCA, CCB, donc :

$$P(F \cap H) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

• De l'égalité :

$$P(F \cup H) = P(F) + P(H) - P(F \cap H),$$

on déduit :

$$P(F \cup H) = \frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{6+5-4}{9} = \frac{7}{9}.$$

Variables aléatoires

14 Commençons par observer que le tableau donné dans l'énoncé est bien le tableau de la loi de probabilité d'une variable aléatoire car les nombres $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{5}$ sont positifs, de somme 1.

• D'après la définition de l'espérance :

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{3}{5},$$

$$E(X) = \frac{-2+5+27}{15} = \frac{30}{15} = 2.$$

• D'après la définition de la variance :

$$V(X) = (-2-2)^2 \times \frac{1}{15} + (1-2)^2 \times \frac{1}{3} + (3-2)^2 \times \frac{3}{5},$$

$$V(X) = \frac{16+5+9}{15} = \frac{30}{15} = 2.$$

• D'après les propriétés de l'espérance et de la variance :

$$E(-3X+2) = -3E(X) + 2,$$

$$E(-3X+2) = -3 \times 2 + 2 = -4;$$

$$V(-3X+2) = (-3)^2 V(X),$$

$$V(-3X+2) = 9 \times 2 = 18.$$

15 Expérience aléatoire : les boîtes B_1 et B_2 contiennent chacune un jeton numéroté 0 et un jeton numéroté 1, on tire aléatoirement un jeton de chacune des boîtes, et on les échange.

Variable aléatoire X : le nombre de jetons numérotés 1 dans la boîte B_1 .

Quatre cas sont possibles, et ils sont équiprobables :

• soit dans chacune des deux boîtes a été tiré le jeton numéroté 0, et le contenu des boîtes est inchangé ;

• soit dans chacune des deux boîtes a été tiré le jeton numéroté 1, et le contenu des boîtes est inchangé ;

• soit on a tiré de la boîte B_1 le jeton numéroté 0, de la boîte B_2 celui numéroté 1, et la boîte B_1 contient alors deux jetons numérotés 1 ;

• soit on a tiré de la boîte B_1 le jeton numéroté 1, de la boîte B_2 celui numéroté 0, et la boîte B_1 contient alors deux jetons numérotés 0.

La loi équirépartie sur l'ensemble :

$$\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

est un modèle adapté.

On en déduit que les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et :

$$P(X=0) = \frac{1}{4}, \quad P(X=1) = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4}.$$

16 **1°** Le dé étant équilibré, chacun des numéros 1, 2, 3, 4, 5 et 6 apparaît avec la même probabilité $\frac{1}{6}$. D'après la définition de la variable aléatoire X , les valeurs prises par X sont -2, 0,5 et 1, avec respective-

ment la probabilité $2 \times \frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$ et $3 \times \frac{1}{6}$, ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

x	-2	0,5	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

2° • D'après la définition de l'espérance :

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{3} + 0,5 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-8 + 1 + 6}{12},$$

$$E(X) = \frac{-1}{12} \approx -0,0833.$$

• D'après la définition de la variance :

$$V(X) = \left(-2 + \frac{1}{12}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(0,5 + \frac{1}{12}\right)^2 \times \frac{1}{6}$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2 \times \frac{1}{2},$$

$$\text{donc : } V(X) = \frac{23^2 \times 2 + 7^2 + 13^2 \times 3}{12^2 \times 6}$$

$$= \frac{1\,614}{144 \times 6}$$

$$= \frac{269}{144},$$

et, d'après la définition de l'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{269}{144}} = \frac{\sqrt{269}}{12} \approx 1,367.$$

3° Il s'agit de construire une liste, de composantes -2, 0,5 et 1 dans les proportions respectives $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$. La liste $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ étant proportionnelle à la liste d'entiers (2, 1, 3), calculer l'espérance et l'écart-type de X revient à calculer la moyenne et l'écart-type de la série statistique :

$$\underbrace{(-2, -2)}_2, \underbrace{0,5}_1, \underbrace{1, 1, 1}_3.$$

Avec la calculatrice en mode Statistiques, on édite la liste [-2, -2, 0,5, 1, 1, 1], et la commande de calculs statistiques sur cette liste donne en particulier à l'affichage :

$\bar{X} = -0,833333333$
 $SX = 1,366768289$

17 Expérience aléatoire : deux tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant quatre boules numérotées de 1 à 4.

Variable aléatoire X : la différence entre le plus grand nombre de points et le plus petit nombre de points portés par les boules tirées.

1° En considérant qu'un résultat est la liste (x_1, x_2) où x_1 est le numéro porté par la boule obtenue au premier tirage et x_2 est celui porté par la boule obtenue au second tirage, le modèle est la loi équirépartie sur l'ensemble Ω des 2-listes d'éléments de l'ensemble $\{1; 2; 3; 4\}$, le nombre d'éléments de Ω étant égal à 2^4 , c'est-à-dire 16.

Pour déterminer facilement la loi de probabilité de X , complétons un tableau à double entrée de telle sorte que le nombre placé dans la case de la ligne numérotée i et de la colonne numérotée j soit égal à la valeur prise par X lorsque la première boule tirée porte le numéro i et la seconde le numéro j .

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

Pour le résultat « la première boule tirée porte le numéro 3, la seconde le numéro 4 », X prend la valeur 1 car $4 - 3 = 1$.

Six résultats réalisent l'événement $\{X = 1\}$:

(2, 1), (3, 2), (4, 3), (1, 2), (2, 3) et (3, 4).

Le tableau met en évidence que les valeurs prises par X sont 0, 1, 2, 3 et :

$$P(X = 0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},$$

$$P(X = 1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8},$$

$$P(X = 2) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},$$

$$P(X = 3) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2° L'espérance de X est donnée par la relation :

$$E(X) = \sum_{k=0}^3 kP(X=k),$$

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3),$$

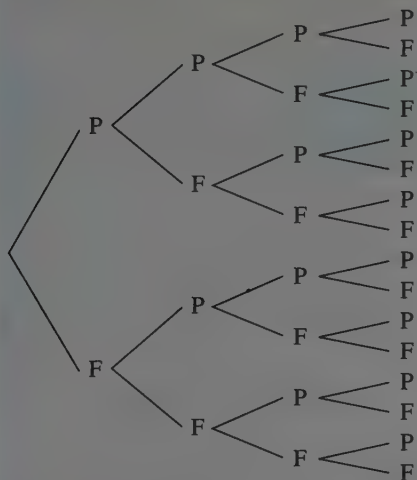
d'où :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} \\ = \frac{1}{8}(3 + 4 + 3) = \frac{10}{8},$$

$$E(X) = \frac{5}{4} = 1,25.$$

13 Expérience aléatoire : quatre lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

1° On peut représenter l'expérience aléatoire par l'arbre suivant :



2° Variable aléatoire X : longueur de la plus grande chaîne de côtés pile.

a) ■ Les valeurs prises par X sont les entiers de 0 (aucun pile n'apparaît) à 4.

■ On obtient facilement à l'aide de l'arbre de la question **1°** :

• FFFF est le seul résultat qui réalise l'événement $\{X=0\}$,

• les résultats qui réalisent $\{X=1\}$ sont au nombre de 7 :

PFPP, PFFP, PFFF, FPFP, FPFF, FFPP, FFFP ;

$\{X=1\}$ est l'événement : « il n'y a pas deux P consécutifs ».

• les résultats qui réalisent $\{X=2\}$ sont au nombre de 5 :

PPFP, PPFF, PFPP, FPFF, FFPP ;

• les résultats qui réalisent $\{X=3\}$ sont au nombre de 2 :

PPFP et FPPP ;

• PPPP est le seul résultat qui réalise $\{X=4\}$.

Le modèle étant la loi équirépartie sur un ensemble à 16 éléments ($2^4 = 16$), on obtient le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

On a bien $\sum_{k=0}^4 P(X=k) = 1$.

b) L'espérance de X est donnée par la relation :

$$E(X) = \sum_{k=0}^4 kP(X=k),$$

d'où :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{2}{16} + 4 \times \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{16} (7 + 10 + 6 + 4),$$

$$E(X) = \frac{27}{16} = 1,6875.$$

3° Variable aléatoire Y : rang d'apparition du dernier pile (0 si aucun pile n'apparaît).

Par la même méthode que celle développée dans la question précédente, on obtient :

- le tableau de la loi de probabilité de Y suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(Y = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{8}{16}$

- l'espérance Y :

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{2}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{8}{16},$$

$$E(Y) = \frac{49}{16} = 3,0625.$$

- 4° On a l'égalité :

$$\begin{aligned} P(\{X = 2\} \cup \{Y = 3\}) \\ = P(X = 2) + P(Y = 3) \\ - P(\{X = 2\} \cap \{Y = 3\}), \end{aligned}$$

et :

- $P(X = 2) = \frac{5}{16}$ d'après la question 2°,

- $P(Y = 3) = \frac{4}{16}$ d'après la question 3°,

- $P(\{X = 2\} \cap \{Y = 3\}) = \frac{1}{16}$, car, parmi

les résultats qui réalisent $\{X = 2\}$, FPPF est le seul qui réalise aussi $\{Y = 3\}$;

donc :

$$\begin{aligned} P(\{X = 2\} \cup \{Y = 3\}) \\ = \frac{5}{16} + \frac{4}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

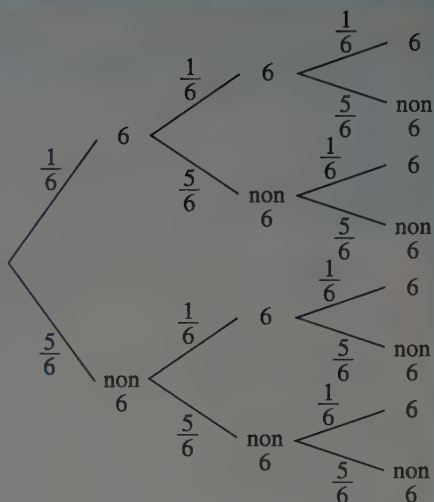
19 Expérience aléatoire : trois lancers successifs d'un dé équilibré.

Variable aléatoire X : numéro du lancer où apparaît le premier 6 (0 si aucun 6 n'apparaît).

1° • À chaque lancer, le dé étant équilibré, la probabilité d'obtenir 6 est égale à $\frac{1}{6}$,

et celle de ne pas obtenir 6 est égale à $\frac{5}{6}$.

Construisons l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire :



- – Les valeurs prises par X sont clairement les entiers de 0 à 3.

– La probabilité du résultat auquel conduit un chemin étant le produit des probabilités rencontrées le long du chemin :

$$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3, \quad P(X = 1) = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6},$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}.$$

Dressons le tableau de la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{30}{216}$	$\frac{25}{216}$

On a bien $\sum_{k=0}^3 P(X = k) = 1.$

– L'espérance de X est donnée par la relation :

$$E(X) = \sum_{k=0}^3 kP(X = k),$$

d'où :

$$\begin{aligned} E(X) = 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{36}{216} + 2 \times \frac{30}{216} \\ + 3 \times \frac{25}{216}, \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{1}{216}(36 + 60 + 75) = \frac{171}{216},$$

$$E(X) = \frac{19}{24} \approx 0,792.$$

2° L'algorithme suivant simule l'expérience aléatoire étudiée et donne en sortie la valeur prise par X :

Variables

x, k, alea : entiers

Initialisation

k et alea prennent la valeur 0

Traitement

Tant que alea est différent de 6
et $k < 3$

k prend la valeur $k + 1$
 alea prend la valeur d'un
nombre aléatoire entier entre
1 et 6

fin Tant que

Si $\text{alea} = 6$

alors x prend la valeur k
sinon x prend la valeur 0
fin Si

Sortie

Afficher x

20 Expérience aléatoire : deux lancers successifs d'un dé tétraédrique (faces numérotées de 1 à 4).

Variable aléatoire X : le plus grand des deux numéros amenés par le dé.

1° ■ Les valeurs prises par X sont clairement les entiers de 1 à 4.

■ • (1, 1) est le seul résultat qui réalise l'événement $\{X = 1\}$,

• les résultats qui réalisent $\{X = 2\}$ sont au nombre de 3 :

(1, 2), (2, 1), (2, 2);

• les résultats qui réalisent $\{X = 3\}$ sont au nombre de 5 :

(1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3);

• les résultats qui réalisent $\{X = 4\}$ sont au nombre de 7 :

(1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4).

Vous pouvez vous aider d'un tableau comme dans l'exercice 17.

Le modèle étant la loi équirépartie sur un ensemble à 16 éléments ($2^4 = 16$), on obtient le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

k	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

On a bien $\sum_{k=1}^4 P(X = k) = 1$.

a) L'espérance de X est donnée par la relation :

$$E(X) = \sum_{k=1}^4 kP(X = k),$$

$$E(X) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4),$$

d'où :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{7}{16} \\ &= \frac{1}{16}(1 + 6 + 15 + 28) \\ &= \frac{50}{16}, \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{25}{8} = 3,125.$$

2° L'algorithme proposé simule n répétitions de l'expérience aléatoire ; dans la variable S sont cumulées les valeurs prises par X .

Donc la valeur en sortie S/n est la moyenne des valeurs prises par X lors de n répétitions de l'expérience aléatoire étudiée.

On sait que cette moyenne fluctue autour de l'espérance de X , dans un intervalle de fluctuation d'autant plus petit que n est grand.

21 Expérience aléatoire : neuf lancers d'une pièce de monnaie équilibrée.

Variable aléatoire X : nombre d'alternances.

1° a) Les résultats qui réalisent l'événement $\{X = 0\}$ (aucune alternance) sont les listes :

(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

et (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).

Ceux qui réalisent l'événement $\{X = 8\}$ sont les listes :

(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)

et (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0).

8 est le nombre maximal d'alternances.

b) Les résultats qui réalisent l'événement $\{X = 1\}$ sont les listes :

(0, 1, ..., 1), (0, 0, 1, ..., 1), ...,
huit chiffres 1 sept chiffres 1

(0, ..., 0, 1)
huit chiffres 0
et un seul 1

et les listes obtenues en échangeant 0 et 1 dans les huit listes précédentes.

Donc **16 résultats réalisent l'événement $\{X = 1\}$.**

c) On déduit de **a)** et **b)** :

$$\begin{aligned} \bullet P(X = 0) &= \frac{2}{2^9} \\ &= \frac{1}{2^8} \\ &= \frac{1}{256}, \end{aligned}$$

$P(X = 0) \approx 0,004$ à 10^{-3} près ;

• de même : $P(X = 8) = \frac{1}{256},$

$P(X = 8) \approx 0,004$ à 10^{-3} près ;

$$\begin{aligned} \bullet P(X = 1) &= \frac{16}{2^9} \\ &= \frac{1}{2^5} \\ &= \frac{1}{32}, \end{aligned}$$

$P(X = 1) \approx 0,031$ à 10^{-3} près.

2° Pour fixer les idées, on peut considérer que la valeur 1 code « la pièce amène pile » et que la valeur 0 code « la pièce amène face ».

Variables

a, b, x

Initialisation

$x \leftarrow 0$

Traitement

a prend aléatoirement la valeur 0 ou 1 (premier lancer)

Pour i variant de 2 à 9, faire

(il reste huit lancers à effectuer)

b prend aléatoirement la valeur 0 ou 1

Si $a \neq b$, alors

(il y a alternance)

$x \leftarrow x + 1$

(a prend la valeur correspondant au dernier lancer)

$a \leftarrow b$

fin Si

fin Pour

Sortie

x

3° Simulation de N expériences aléatoires.

À la fin de la première boucle **Pour**, les composantes $L[1], L[2], \dots, L[9]$, de L contiennent le nombre de fois où **algo1** a donné en sortie respectivement 0, 1, ..., 8.

Variables

N, n, L

Entrée

Saisir N

Initialisation

$x \leftarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Traitement

Pour i variant de 1 à N , faire

(Simulation de N expériences)

$n \leftarrow \text{algo1} + 1$

(Si **algo1** donne en sortie p , alors l'événement $\{X = p\}$ est réalisé et on ajoute 1 à la $(p + 1)$ -ième composante de L)
(Fréquences sur N expériences)

$L[n] \leftarrow L[n] + 1$

fin Pour

Pour i variant de 1 à 9, faire

$L[i] \leftarrow L[i]/N$

fin Pour

Sortie

Afficher L

4° Quand le nombre d'expériences augmente, la distribution des fréquences se rapproche de la loi de probabilité, ce que l'on observe en comparant les résultats obtenus à la question 1° c) :

$$P(X = 0) \approx 0,004,$$

$$P(X = 1) \approx 0,031,$$

$$P(X = 8) \approx 0,004,$$

avec les deux premières et la dernière des valeurs de chacune des trois listes :

$$N = 1\ 000 : 0,005 \quad 0,034 \quad \text{et} \quad 0,003$$

$$N = 10\ 000 : 0,005 \quad 0,034 \quad \text{et} \quad 0,004$$

$$N = 100\ 000 : 0,004 \quad 0,031 \quad \text{et} \quad 0,004.$$

On peut donc considérer que les résultats obtenus par simulation sont en accord avec ceux obtenus par le calcul à la question 1° c).

22 1° On suppose que le joueur mise n fois.

a) Le modèle est l'équipartition sur les n -listes dont les éléments valent 0 ou 1 (on code « le joueur perd » par 0 et « le joueur gagne » par 1). Le nombre de telles n -listes est égal à 2^n , et la seule n -liste qui réalise l'événement « le joueur gagne au n -ième coup » est la liste (0, ..., 0, 1) dont tous les éléments sont des 0, sauf le n -ième qui est 1.

On en déduit que la probabilité que le joueur gagne au n -ième coup est égale

$$\text{à } \frac{1}{2^n}.$$

b) Le joueur doublant sa mise tant qu'il perd, et la première mise s'élevant à 1 €, il a misé successivement 1 €, 2 €, ..., 2^{n-1} €, et :

$$1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1;$$

$1 + 2 + \dots + 2^{n-1}$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

la somme des mises successives du premier au n -ième coup est donc égale à $(2^n - 1)$.

c) La mise au n -ième coup est de 2^{n-1} € ; en gagnant au n -ième coup, le joueur reçoit 2^n €, et son gain s'élève à 2^n € - $(2^n - 1)$ €, c'est-à-dire à 1 €.

2° Le joueur n'a pu miser n fois que si :

$$1\ 000 \geq 2^n - 1,$$

$$\text{or : } 2^9 = 512 \text{ et } 2^{10} = 1\ 024,$$

donc le nombre maximal de coups est 9.

3° Soit G la variable aléatoire qui donne le gain en euros (positif ou négatif) du joueur.

a) • Soit le gain du joueur s'élève à 1 €, lorsqu'il gagne au 1^{er}, 2-ième, ..., ou 9-ième coup, soit le joueur joue 9 fois et perd, auquel cas il perd la somme de ses mises, c'est-à-dire $(2^9 - 1)$ €.

La variable aléatoire G prend donc deux valeurs : 1 et $1 - 2^9$.

• L'événement $\{G = 1\}$ est réalisé si, et seulement si, le joueur gagne au 1^{er}, 2-ième, ..., ou au 9-ième coup, donc la probabilité de l'événement $\{G = 1\}$ est égale à :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9},$$

$$\text{c'est-à-dire à : } 1 - \frac{1}{2^9}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{2}\right)^k, \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}}, \\ &= 1 - \frac{1}{2^9}. \end{aligned}$$

• L'événement $\{G = 1 - 2^9\}$ est réalisé si, et seulement si, le joueur perd du 1^{er} au 9-ième coup (la seule éventualité qui réalise $\{G = 1 - 2^9\}$ est la 9-liste nulle (0, ..., 0)), donc la probabilité de l'événement $\{G = 1 - 2^9\}$ est égale à $\frac{1}{2^9}$.

$\{G = 1\}$ et $\{G = 1 - 2^9\}$ sont des événements contraires, donc la somme de leurs probabilités est égale à 1.

i	1	$1 - 2^9$
$P(G = i)$	$1 - \frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^9}$

b) L'espérance de la variable aléatoire G vérifie :

$$\begin{aligned} E(G) &= 1 \times \left(1 - \frac{1}{2^9}\right) + (1 - 2^9) \times \frac{1}{2^9} \\ &= 1 - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^9} - 1, \end{aligned}$$

donc : $E(G) = 0$;

autrement dit, le gain moyen du joueur est nul.

23 1° Le nombre maximal de fois où le dé est lancé est 6 ; admettons que, quels que soient les résultats des lancers, on effectue six lancers du dé ; en considérant qu'une issue est une 6-liste de nombres entiers compris entre 1 et 6, toutes les issues sont équiprobables (le dé est équilibré) ; par exemple, les 6-listes (1, 2, 1, 6, 4, 6), et (5, 1, 3, 6, 1, 1) correspondent toutes les deux au cas où le lièvre gagne au quatrième lancer du dé, car le nombre 6 apparaît pour la première fois en quatrième position dans chacune des 6-listes, et, contrairement à la description de l'expérience aléatoire, on continue à lancer le dé deux fois (les résultats des deux derniers lancers du dé n'ayant aucune influence sur le jeu).

L'expérience aléatoire est donc modélisée par la loi de probabilité équirépartie sur l'ensemble Ω des 6^6 issues possibles.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1; 2; \dots; 6\}^6, \\ \text{card}(\Omega) &= 6^6 = 46\,656. \end{aligned}$$

2° • La tortue gagne si, et seulement si, le dé n'amène jamais 6 en six coups ; les issues qui réalisent l'événement « la tortue gagne » sont les 6-listes de nombres entiers compris entre 1 et 5, et il y a 5^6 telles 6-listes.

$$\text{card}(\{1; 2; \dots; 5\}^6) = 5^6.$$

La probabilité que la tortue gagne est donc $\frac{5^6}{6^6}$, c'est-à-dire $\left(\frac{5}{6}\right)^6$.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,335.$$

• L'événement « le lièvre gagne » étant l'événement contraire de l'événement « la tortue gagne », la probabilité que le lièvre gagne est égale à $1 - \frac{5^6}{6^6}$.

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,665.$$

3° Simulation sur calculatrice

Remarquons que la tortue gagne si, et seulement si, aucun 6 ne sort en six coups, c'est-à-dire si, et seulement si, le maximum des chiffres amenés par le dé en six coups est strictement inférieur à 6. Voici l'algorithme que nous allons programmer :

- définir une liste à six éléments, initialiser la variable A à 0, entrer la valeur du nombre d'expériences souhaité dans la variable N ,
- à chacun des N passages dans une boucle **Pour**, remplir la 6-liste par des entiers choisis au hasard dans $\{1, 2, \dots, 6\}$, et ajouter 1 à la variable A si le maximum des éléments de la liste est strictement inférieur à 6,
- afficher le quotient A/N .

TI

```

:6→dim L1
:0→A
:Prompt N
:For (I, 1, N)
:For (J, 1, 6)
:ent Aléat (1, 6)→L1(J)
:End
:If max(L1)<6
:Then
:A+1→A
:End
:End
:Disp "FRQ T GAGNE", A/N

```

CASIO

```

6→Dim List 1↵
0→A↵
"NB EXP"? →N↵
For 1→I To N↵
For 1→J To 6↵
Int(6Ran#+1)→List1[J]↵
Next↵
If Max(List1) <6↵
Then A+1→A↵
IfEnd↵
Next↵
"FRQ TORTUE GAGNE":A÷N
    
```

Pour 50 et 500 expériences, on a obtenu :

```

50
FRQ TORTUE GAGNE          0.3

NB EXP?
500
FRQ TORTUE GAGNE          0.334
    
```

Pour un grand nombre d'expériences, la fréquence du cas où la tortue gagne se rapproche de la probabilité de l'événement « la tortue gagne ».

4° Simulation avec un tableur

Pour simuler le lancer d'un dé équilibré, on entre dans la cellule A2 la formule =ALEA.ENTRE.BORNES(1,6), puis on étire la formule vers la droite jusqu'à F2 (les six étapes d'une expérience).

Dans la cellule G2, on entre la formule =SI(MAX(A2:F2)=6;0;1), qui retourne la valeur 0 (la tortue perd) si le maximum des valeurs de la plage A2:F2 est égal à 6, et la valeur 1 (la tortue gagne) sinon. Ensuite, on étire vers le bas la plage A2:G2 jusqu'à la ligne 401 pour simuler 400 expériences.

Enfin, dans la cellule H2, on entre la formule =MOYENNE(G2:G401) qui calcule la moyenne des cellules de la plage G2:G401. En actionnant la touche **F9**, une nouvelle simulation est exécutée.

	G2						=SI(MAX(A2:F2)=6;0;1)		
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	400 expériences							Moyenne	
2	1	4	5	2	5	2	1	0,315	
3	5	5	1	4	2	5	1		
4	4	3	2	5	1	1	1		
5	6	3	4	4	1	6	0		
6	4	1	3	2	6	6	0		
7	3	4	5	5	4	1	1		

L'interrogation écrite

24 Expérience aléatoire : distribution au hasard de trois jetons dans trois boîtes B_1, B_2, B_3 .

Variable aléatoire X : nombre de boîtes restées vides.

1° Numérotons les jetons de 1 à 3 (ou, ce qui revient au même, considérons que l'on place aléatoirement dans B_1, B_2 ou B_3 un

premier jeton, puis un deuxième, puis un troisième).

En prenant pour résultat la liste (x_1, x_2, x_3) , où, pour tout entier i compris au sens large entre 1 et 3, x_i est le numéro de la boîte où est placé le i -ème jeton, tous les résultats sont équiprobables d'après la description de l'expérience aléatoire.

Les résultats sont alors les 3-listes d'éléments de $\{1, 2, 3\}$, il y en a 3^3 , c'est-à-dire 27.

En conclusion, la loi équirépartie sur l'ensemble des trois listes d'éléments de $\{1, 2, 3\}$, est un modèle adapté.

2° • Il est clair que seuls les trois cas suivants sont possibles :

- aucune boîte ne reste vide,
- une seule boîte reste vide,
- deux boîtes restent vides.

Les valeurs prises par X sont donc les entiers 0, 1 et 2.

• – Les résultats qui réalisent l'événement $\{X = 2\}$ sont (1, 1, 1), (2, 2, 2) et (3, 3, 3) (tous les jetons sont placés dans une même boîte, exactement deux boîtes sont vides), donc :

$$P(X = 2) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}.$$

– Les résultats qui réalisent l'événement $\{X = 0\}$ sont (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) et (3, 2, 1) (un seul jeton par boîte, aucune boîte n'est vide), donc :

$$P(X = 0) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

– De l'égalité

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1,$$

on déduit :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 2) \\ &= 1 - \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Noter que la méthode utilisée pour calculer $P(X = 1)$ n'est pas sans danger : mieux vaut être sûr des valeurs trouvées pour $P(X = 2)$ et $P(X = 0)$!

On aurait bien sûr pu également déterminer tous les résultats qui réalisent l'événement $\{X = 1\}$ (il y en a 27), mais c'était nettement plus long.

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{1}{9}$

3° On a :

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{6}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

4° L'algorithme proposé repose sur les observations suivantes :

- avant l'expérience aléatoire, les trois boîtes sont vides ;
- à chaque fois que l'on place aléatoirement un jeton dans une des trois boîtes, le nombre de boîtes vides ne diminue d'une unité que si la boîte où est placé le jeton était inoccupée.

Variables

x, k , alea : entiers

L : liste de 3 éléments

Initialisation

x prend la valeur 3

L prend la valeur [0, 0, 0]

Traitement

Pour k variant de 1 à 3, faire

alea prend la valeur d'un nombre aléatoire entier entre 1 et 3

Si $L[\text{alea}] = 0$, alors

$L[\text{alea}]$ prend la valeur 1

x prend la valeur $x - 1$

fin Si

fin Pour

Sortie

Afficher x

CHAPITRE 12

Loi binomiale

LE COUP

Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience à deux issues :

- l'une, appelée succès, de probabilité p ($0 < p < 1$),
- l'autre, appelée échec, de probabilité $1 - p$.

La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès, 0 en cas d'échec, suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p(1 - p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$$

Modèle de Bernoulli, loi binomiale

On appelle modèle (ou schéma) de Bernoulli la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ($n \in \mathbb{N}^*$), de même paramètre de succès p .

La probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

La variable aléatoire X qui compte les succès suit la loi binomiale de paramètre (n, p) .

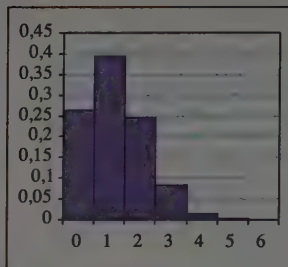
Alors :

- les valeurs prises par X sont les entiers de 0 à n ;
- pour tout entier k compris au sens large entre 0 et n :

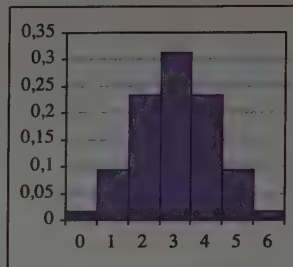
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$$

- $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

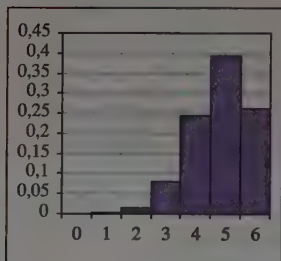
Représentations graphiques de lois binomiales



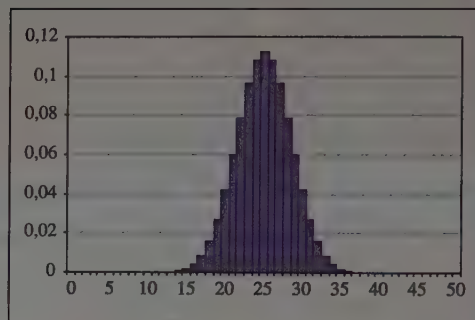
$(n, p) = (6, 0,2)$



$(n, p) = (6, 0,5)$



$(n, p) = (6, 0,8)$



$(n, p) = (50, 0,5)$

Coefficients binomiaux, triangle de Pascal

Dans la représentation d'un modèle de Bernoulli à l'aide d'un arbre, $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de chemins conduisant à k succès pour n répétitions.

Propriétés

- Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, et, si $n \geq 1$: $\binom{n}{1} = n$.
- Pour tous entiers n et k tels que $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Formule de Pascal

Pour tous entiers n et k tels que $0 \leq k < n$: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Triangle de Pascal

La formule de Pascal permet de construire les lignes successives du triangle de Pascal.

À la $(n+1)^{\text{e}}$ ligne, on trouve successivement : $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$.

Par exemple :

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15.$$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Calculatrices

Comment éditer le calcul d'un coefficient binomial : exemple de $\binom{6}{2}$.

• Avec une TI

Taper la suite de touches : **6** **MATH**, sélectionner le menu **PRB**, taper **1** (ou sélectionner la troisième commande), et enfin taper **2**.

On lit à l'écran : **6 Combinaison 2**, qui donne **15** après validation.

• Avec une CASIO

Taper la suite de touches : **6** **OPTN** **F6** **1** **▶** **F3** (menu **PROB**) **F3** (commande **nCr**), et enfin taper **2**.

On lit à l'écran : **6 C 2**, qui donne **15** après validation.

Échantillonnage

Définition

L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n , d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres n et p , est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ défini par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Pour $n \geq 30$, $n \times p \geq 5$ et $n \times (1 - p) \geq 5$, l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ est sensiblement le même que l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ proposé en classe de Seconde.

Règle de décision

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un certain caractère est p . On prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère.

On choisit de fixer le seuil de décision de sorte que la probabilité de rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie, soit inférieure à 5 %.

Si f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation à 95 %, on rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion du caractère étudié est p .

Sinon, on l'accepte.

EXERCICES

Vrai ou faux ?

1 ★ 10 min

(corrigés p. 292)

1° Des variables aléatoires qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres p et $1 - p$ ont la même variance.

2° Si une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , alors la variable aléatoire $1 - X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - p$.

3° $\binom{100}{1} = 100$ et $\binom{100}{0} = 1$.

4° $\binom{15}{9}$ et $\binom{15}{12}$ sont des coefficients binomiaux situés dans une même colonne du triangle de Pascal.

5° $\binom{14}{12} + \binom{14}{11} = \binom{15}{11}$.

6° $\binom{10}{8} = \binom{10}{2}$.

7° $\binom{13}{7} = \binom{14}{8} - \binom{13}{8}$.

8° La variance d'une variable aléatoire binomiale est toujours inférieure à sa moyenne.

9° Une variable aléatoire de Bernoulli est aussi une variable aléatoire binomiale.

10° Un carnet de loterie comporte soixante billets, dont trois sont gagnants. On choisit au hasard quatre billets dans ce carnet.

La variable aléatoire donnant le nombre de billets gagnants ainsi obtenus suit la loi binomiale de paramètre $(4 ; 0,05)$.

Variables aléatoires de Bernoulli

2 ★ 5 min

(corrigés p. 293)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p ($0 < p < 1$).

Démontrer que sa variance est au plus égale à $\frac{1}{4}$.

3 ★ 10 min

(corrigés p. 293)

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

k	-2	3
$P(X = k)$	0,7	0,3

On appelle Y la variable aléatoire $\frac{1}{5}X + \frac{2}{5}$.

Quelles sont les valeurs prises par Y ?

En déduire la variance de Y , puis celle de X .

4 ★★ 10 min

(corrigés p. 293)

On considère une expérience aléatoire qui consiste à répéter n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ($n \in \mathbb{N}^*$), de probabilité de succès p ($0 < p < 1$).

Pour tout entier i compris au sens large entre 1 et n , on note X_i la variable aléatoire qui, à tout résultat de l'expérience aléatoire, associe 1 en cas de succès à la i -ème épreuve, 0 sinon.

1° Quelle est la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$?

2° On pose : $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

Retrouver l'espérance d'une variable aléatoire binomiale de paramètre (n, p) .

Coefficients binomiaux

5 ★ 10 min

(corrigés p. 294)

1° À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de chacun des coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{8}{3}, \quad \binom{21}{9}, \quad \binom{36}{17}, \quad \binom{36}{18}.$$

2° Sans calculatrice, donner la valeur de $\binom{2012}{2011}$, $\binom{21}{12}$ et $\binom{37}{18}$.

6 ★ 10 min

(corrigés p. 294)

On peut démontrer que, pour tous entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}^{\text{produit de } k \text{ entiers consécutifs dont le plus grand est } n}}{\underbrace{k \times (k-1) \times \dots \times 1}_{\text{produit de } k \text{ entiers consécutifs dont le plus grand est } k}}.$$

1° Utiliser la formule précédente pour calculer $\binom{8}{3}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{8}{4}$.

2° Justifier que le nombre $\frac{100 \times 99 \times \dots \times 76}{25 \times 24 \times \dots \times 1}$ est un entier.

1° Écrire les neuf premières lignes du triangle de Pascal.

Préciser la valeur de $\binom{7}{3}$ et de $\binom{8}{4}$.

2° Calculer la somme des coefficients binomiaux de chacune des neuf lignes du tableau précédent.

Qu'observe-t-on ?

3° Calculer la somme des coefficients binomiaux de chacune des huit colonnes du triangle de Pascal, de la première à la huitième ligne.

Qu'observe-t-on ?

4° Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose :

$$K_n = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{n}{3}.$$

a) Justifier que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 4 :

$$\binom{k}{3} = -\binom{k}{4} + \binom{k+1}{4}.$$

b) En déduire une écriture plus simple de K_n .

Variables aléatoires binomiales

Représenter graphiquement la loi binomiale de paramètre $\left(4, \frac{1}{3}\right)$.

Dans une urne qui contient cinq boules rouges, deux boules blanches et une boule verte, on effectue quatre tirages successifs au hasard d'une boule avec remise.

1° On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe le nombre de boules rouges obtenues.

Quelle est la loi de probabilité de X ?

2° On appelle Y la variable aléatoire qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe le nombre de boules rouges ou vertes obtenues.

Quelle est la loi de probabilité de Y ?

1° Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre de succès p ($n \geq 1; 0 < p < 1$).

a) Préciser la valeur de $P(X = n)$.

b) On suppose, dans cette question, que $p = \frac{1}{2}$.

Soit k un entier compris au sens large entre 0 et n .

Expliciter $P(X = k)$.

Que peut-on dire de $P(X = k)$ et $P(X = n - k)$?

2° Chacun des trois tableaux proposés est le tableau de la loi de probabilité d'une variable aléatoire binomiale.

Préciser les paramètres de la loi de probabilité de ces variables aléatoires.

a)

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b)

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

c)

k	0	1	2	3	4
$P(Z = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

11 ★ 5 min

(corrigés p. 297)

On effectue dix lancers d'un dé équilibré et on appelle X la variable aléatoire qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe le nombre de 6 ainsi obtenus.

1° Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2° Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(X = 3)$.

12 ★ 15 min

(corrigés p. 297)

Un test se compose de dix questions ; pour chacune d'elles, trois réponses sont proposées, et une seule des trois est exacte.

Un candidat répond au hasard à chacune des dix questions, ses réponses étant indépendantes les unes des autres.

Quelle est la probabilité pour que le candidat donne les réponses exactes à :

1° exactement trois questions ?

2° toutes les questions ?

3° au plus huit questions ?

13 ★★ 20 min

(corrigés p. 298)

On jette un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1° Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois le 6 en douze lancers successifs.

2° En utilisant un tableur, simuler mille fois l'expérience qui consiste à lancer le dé douze fois de suite et donner la fréquence avec laquelle on obtient au moins deux fois le 6.

Une urne contient dix boules, dont trois sont blanches et sept sont rouges.

1° On effectue quatre tirages successifs d'une boule dans cette urne, avec à chaque fois remise de la boule tirée avant le tirage suivant, et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues.

Reconnaître la loi de X . Préciser son espérance et sa variance.

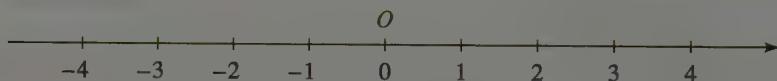
2° Dans la même urne, on effectue quatre tirages successifs d'une boule, sans remise de la boule tirée avant le tirage suivant, et on appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues.

a) Quel est l'ensemble E des valeurs prises par Y ?

b) On admet que, pour tout k de E :

$$P(Y = k) = \frac{1}{210} \binom{3}{k} \binom{7}{4-k}.$$

Vérifier l'égalité $\sum_{k \in E} P(Y = k) = 1$ et calculer l'espérance de Y .



Un mobile effectue n mouvements sur un axe gradué ($n \in \mathbb{N}^*$) ; à chaque mouvement, il se déplace d'une unité vers la gauche ou de deux unités vers la droite de façon équiprobable. Au départ, le mobile se trouve à l'origine O .

Soient X et Y les variables aléatoires qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associent respectivement l'abscisse du mobile et le nombre de mouvements vers la droite effectués par le mobile.

1° Écrire un algorithme qui simule l'expérience aléatoire et donne en sortie l'abscisse finale du mobile.

2° a) Exprimer X en fonction de Y .

b) Reconnaître la loi de probabilité de Y .

Préciser son espérance et sa variance.

c) En déduire l'espérance et la variance de X .

3° On suppose, dans cette question, que $n = 3$.

Dresser le tableau de la loi de probabilité de Y , puis celui de la loi de probabilité de X .

Une expérience aléatoire consiste à lancer trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

Soit T la variable aléatoire qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe le nombre de côtés face obtenus.

1° Déterminer la loi de probabilité de T . Quelle est son espérance ?

2° Écrire un programme pour la calculatrice qui simule la répétition de cette expérience aléatoire.

Ce programme :

- prendra en entrée le nombre d'expériences à réaliser ;

- cumulera dans une liste le nombre de fois où T prend chacune des valeurs 0, 1, 2, 3 ;
 - affichera la distribution des fréquences des valeurs prises par T .
- Exécuter le programme pour un grand nombre d'expériences.
Commenter.

Echantillonnage

17 ★★★ 30 min

(corrigés p. 301)

B2		=LOI.BINOMIALE(A2;200;0,25;VRAI)				
	A	B	C	D	E	
1	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$		
2	35	0,0073	50	0,5379		
3	36	0,0117	51	0,6017		
4	37	0,0182	52	0,6626		
5	38	0,0276	53	0,7192		
6	39	0,0405	54	0,7707		
7	40	0,0578	55	0,8162		
8	41	0,0804	56	0,8555		
9	42	0,1089	57	0,8885		
10	43	0,1438	58	0,9157		
11	44	0,1852	59	0,9375		
12	45	0,2332	60	0,9546		
13	46	0,2870	61	0,9677		
14	47	0,3458	62	0,9774		
15	48	0,4083	63	0,9846		
16	49	0,4729	64	0,9897		
17						

1° Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètre (200, 0,25).

Dans la feuille de calcul Excel dont une copie d'écran figure ci-dessus, sont donnés les arrondis au dix millième de $P(X \leq k)$, l'entier k variant de 35 à 64.

a) Donner a et b tels que :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

En déduire l'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille 200, d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres 200 et 0,25.

b) Donner α et β tels que :

- α est le plus petit entier tel que $P(X \leq \alpha) > 0,05$;
- β est le plus petit entier tel que $P(X \leq \beta) \geq 0,95$.

Justifier que la probabilité que X prenne une valeur comprise au sens large entre 40 et 60 est supérieure ou égale à 0,9.

En déduire un intervalle dans lequel se situe la fréquence de succès de 90 % (au moins) des échantillons de taille 200 d'un modèle de Bernoulli de probabilité de succès 0,25.

2° On propose un jeu : quatre gobelets sont renversés, un seul cache un objet placé au hasard sous l'un des gobelets, et il s'agit de deviner quel gobelet cache l'objet. À l'issue de 200 parties, le gobelet n° 1 est sorti 61 fois, et l'écart avec la valeur moyenne 50 semble important.

a) Au risque 5 % de se tromper, peut-on considérer que le jeu est truqué ?

b) Et au risque 10 % de se tromper ?

18 ★★ 10 min

(corrigés p. 303)

En 1 200 lancers, un dé a amené 172 fois le 6, et l'écart à la moyenne 200 semble important.

Au risque 5 % de se tromper, peut-on considérer que le dé est truqué ?

On utilisera la copie d'écran d'une feuille de calcul Excel qui figure ci-dessous. On y lit les arrondis au dix millième de $P(X \leq k)$, l'entier k variant de 173 à 229, X désignant une variable aléatoire binomiale de paramètre $\left(1\ 200, \frac{1}{6}\right)$.

B2		fx =LOI.BINOMIALE(A2;1200;1/6;VRAI)					
	A	B	C	D	E	F	G
1	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	
2	173	0,0187	192	0,2826	211	0,8140	
3	174	0,0226	193	0,3096	212	0,8337	
4	175	0,0273	194	0,3376	213	0,8520	
5	176	0,0328	195	0,3666	214	0,8689	
6	177	0,0391	196	0,3962	215	0,8844	
7	178	0,0463	197	0,4265	216	0,8985	
8	179	0,0546	198	0,4571	217	0,9113	
9	180	0,0640	199	0,4880	218	0,9228	
10	181	0,0746	200	0,5189	219	0,9332	
11	182	0,0864	201	0,5496	220	0,9424	
12	183	0,0996	202	0,5800	221	0,9506	
13	184	0,1142	203	0,6099	222	0,9579	
14	185	0,1302	204	0,6391	223	0,9642	
15	186	0,1476	205	0,6675	224	0,9697	
16	187	0,1666	206	0,6949	225	0,9745	
17	188	0,1870	207	0,7213	226	0,9787	
18	189	0,2088	208	0,7464	227	0,9822	
19	190	0,2321	209	0,7703	228	0,9852	
20	191	0,2567	210	0,7928	229	0,9878	
21							

19 ★★ 10 min

(corrigés p. 303)

En 2000, dans le village de Xicun, en Chine, il est né vingt enfants, parmi lesquels seize garçons, alors que, dans le monde, la proportion de garçons à la naissance, étonnamment stable, s'élève à 51,2 %.

Au risque 5 % de se tromper, peut-on considérer qu'une telle disparité n'est pas due au hasard ?

Dans la feuille de calcul Excel dont une copie d'écran figure ci-dessous, sont donnés les arrondis au dix millième de $P(X \leq k)$, l'entier k variant de 0 à 20, X désignant une variable aléatoire binomiale de paramètre $(20 ; 0,512)$.

	B2	=LOI.BINOMIALE(A2;20;0,512;VRAI)				
	A	B	C	D	E	F
1	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$		
2	0	0,0000	11	0,7125		
3	1	0,0000	12	0,8440		
4	2	0,0001	13	0,9288		
5	3	0,0009	14	0,9734		
6	4	0,0044	15	0,9921		
7	5	0,0159	16	0,9982		
8	6	0,0462	17	0,9997		
9	7	0,1099	18	1,0000		
10	8	0,2184	19	1,0000		
11	9	0,3702	20	1,0000		
12	10	0,5454				
13						

L'interrogation écrite

20 30 min

(corrigés p. 303)

Une compagnie aérienne dispose d'un avion de 150 places et vend 160 réservations. On suppose que toute personne réservant une place d'avion a une chance sur dix de ne pas se présenter à l'embarquement, et cela indépendamment des autres clients.

1° Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes ne se présentant pas à l'embarquement.

Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres et l'espérance. Préciser les valeurs prises par X et expliciter la formule donnant $P(X = k)$.

2° Soit p la probabilité que la compagnie aérienne effectue un surbooking.

a) Exprimer p à l'aide de la variable aléatoire X .

b) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de p à 10^{-3} près. On expliquera la méthode adoptée.

CORRIGÉS

Vrai ou faux ?

1 **1°** Des variables aléatoires qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres p et $1-p$ ont la même variance.

Vrai. La variance d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p est égale à $p(1-p)$, et comme $1-(1-p)=p$, elle est aussi égale à la variance d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1-p$.

$$(1-p)(1-(1-p)) = (1-p)p \\ = p(1-p).$$

2° Si une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , alors la variable aléatoire $1-X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1-p$.

Vrai. Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , alors elle prend les valeurs 1 et 0, avec respectivement les probabilités p et $1-p$; on en déduit que $1-X$ prend les valeurs 0 et 1, avec respectivement les probabilités $1-p$ et p , c'est-à-dire que $1-X$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1-p$.

$$P(1-X=1) = P(X=0) = 1-p,$$

$$P(1-X=0) = P(X=1) = p.$$

$$\mathbf{3^{\circ}} \quad \binom{100}{1} = 100 \text{ et } \binom{100}{0} = 1.$$

Vrai. Plus généralement :

pour tout entier naturel n non nul,

$$\binom{n}{1} = n;$$

pour tout entier naturel n , $\binom{n}{0} = 1$.

4° $\binom{15}{9}$ et $\binom{15}{12}$ sont des coefficients binomiaux situés dans une même colonne du triangle de Pascal.

Faux. Ces coefficients binomiaux sont situés dans la même ligne (la seizième), et dans des colonnes différentes (la dixième et la treizième).

$$\mathbf{5^{\circ}} \quad \binom{14}{12} + \binom{14}{11} = \binom{15}{11}.$$

Faux. La formule de Pascal permet

$$\text{d'écrire : } \binom{14}{12} + \binom{14}{11} = \binom{15}{12},$$

$$\text{et } \binom{15}{11} \neq \binom{15}{12}.$$

$$\binom{15}{11} = 1\,365, \quad \binom{15}{12} = 455.$$

$$\mathbf{6^{\circ}} \quad \binom{10}{8} = \binom{10}{2}.$$

Vrai. Plus généralement :

pour tous entiers n et k tels que

$$0 \leq k \leq n : \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$$\mathbf{7^{\circ}} \quad \binom{13}{7} = \binom{14}{8} - \binom{13}{8}.$$

Vrai. L'égalité proposée est une réécriture de

$\binom{13}{7} + \binom{13}{8} = \binom{14}{8}$, obtenue en appliquant la formule de Pascal.

8° La variance d'une variable aléatoire binomiale est toujours inférieure à sa moyenne.

Vrai. Si X est une variable aléatoire binomiale de paramètre (n, p) , alors :

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p),$$

donc : $V(X) = (1-p)E(X)$, et comme

$$0 < 1-p < 1 :$$

$$V(X) < E(X).$$

9° Une variable aléatoire de Bernoulli est aussi une variable aléatoire binomiale.

Vrai. Une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p est une variable aléatoire binomiale de paramètre $(1, p)$.

10° Un carnet de loterie comporte soixante billets, dont trois sont gagnants. On choisit au hasard quatre billets dans ce carnet.

La variable aléatoire donnant le nombre de billets gagnants ainsi obtenus suit la loi binomiale de paramètre $(4; 0,05)$.

Faux. Une variable aléatoire binomiale de paramètre $(4; 0,05)$ prend en particulier

la valeur 4 (elle prend toutes les valeurs entières de 0 à 4), alors qu'il est impossible d'obtenir quatre billets gagnants, le carnet n'en comportant que trois.

On effectue bien quatre épreuves de Bernoulli (elles sont d'ailleurs toutes de même paramètre 0,05), mais elles ne sont pas indépendantes, car la constitution du carnet évolue au cours des tirages, puisque les tirages se font bien évidemment sans remise.

Variables aléatoires de Bernoulli

2 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p ($0 < p < 1$).

On sait que sa variance $V(X)$ vérifie :

$$V(X) = p(1 - p).$$

Or, le maximum de la fonction polynôme du second degré $x \mapsto x(1 - x)$ sur $\mathbb{R}$ est

atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{4}$ est aussi

le maximum de cette fonction sur $]0; 1[$

(car $\frac{1}{2} \in]0; 1[$), donc : $V(X) \leq \frac{1}{4}$.

De plus, la variance $V(X)$ n'est égale à $\frac{1}{4}$ que

si $p = \frac{1}{2}$.

3	k	-2	3
	$P(X = k)$	0,7	0,3

$$Y = \frac{1}{5}X + \frac{2}{5}.$$

• Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont -2 et 3, donc les valeurs prises par la variable aléatoire $\frac{1}{5}X + \frac{2}{5}$ sont $\frac{1}{5} \times (-2) + \frac{2}{5}$ et $\frac{1}{5} \times 3 + \frac{2}{5}$; autrement dit, les valeurs prises par la variable aléatoire Y sont 0 et 1.

$$P(Y = 1) = P(X = 3) = 0,3$$

$$P(Y = 0) = P(X = -2) = 0,7.$$

• On en déduit que Y est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre 0,3, ce qui permet d'affirmer :

$$V(Y) = 0,3 \times (1 - 0,3) = 0,3 \times 0,7 = 0,21.$$

• Enfin, de l'égalité $Y = \frac{1}{5}X + \frac{2}{5}$, on

déduit : $V(Y) = \frac{1}{5^2}V(X)$, donc :

$$V(X) = 25V(Y) = 25 \times 0,21 = 5,25.$$

4 Expérience aléatoire : répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité de succès p . Variable aléatoire X_i : prend la valeur 1 en cas de succès à la i -ème épreuve, 0 sinon ($1 \leq i \leq n$).

1° Pour tout i de $\{1; 2; \dots; n\}$, la variable aléatoire X_i prend les valeurs 0 et 1, et :

$$P(X_i = 1) = p$$

(la probabilité d'un succès à la i -ème épreuve de Bernoulli est p),

$$P(X_i = 0) = 1 - p.$$

Donc, chacune des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

$$\mathbf{2^\circ} \quad X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

• Pour tout i de $\{1; 2; \dots; n\}$, la variable aléatoire X_i prend la valeur 1 en cas de succès à la i -ème épreuve de Bernoulli, 0 sinon, donc $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ compte les succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de même probabilité de succès p , donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) .

• On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= \underbrace{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)}_{n \text{ termes tous égaux à } p}, \end{aligned}$$

$$\text{donc :} \quad E(X) = np.$$

On retrouve ainsi que l'espérance d'une variable aléatoire binomiale de paramètre (n, p) est égale à np .

Coefficients binomiaux

5 1° À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$\binom{8}{3} = 56, \quad \binom{21}{9} = 293\,930,$$

$$\binom{36}{17} = 8\,597\,496\,600,$$

$$\binom{36}{18} = 9\,075\,135\,300.$$

Voir le cours page 283 pour éditer le calcul d'un coefficient binomial.

$$\begin{aligned} 2^\circ \cdot \binom{2\,012}{2\,011} &= \binom{2\,012}{2\,012 - 2\,011} \\ &= \binom{2\,012}{1} \\ &= 2\,012. \end{aligned}$$

pour tous entiers n et k tels que

$$0 \leq k \leq n: \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

pour tout entier naturel n non nul,

$$\binom{n}{1} = n.$$

• En remarquant que $12 + 9 = 21$:

$$\binom{21}{12} = \binom{21}{21-12} = \binom{21}{9},$$

donc, d'après la question 1° :

$$\binom{21}{12} = 293\,930.$$

• D'après la formule de Pascal :

$$\binom{37}{18} = \binom{36}{17} + \binom{36}{18},$$

donc, d'après la question 1° :

$$\begin{aligned} \binom{37}{18} &= 8\,597\,496\,600 + 9\,075\,135\,300 \\ &= 17\,672\,631\,900. \end{aligned}$$

Le calcul de $\binom{37}{18}$ dépasse souvent les capacités d'une calculatrice de niveau Lycée. Avec le tableur Excel, utiliser la formule :
=COMBIN(37 ; 18)

6 Pour tous entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \dots \times 1}.$$

Au numérateur et au dénominateur, les produits ont le même nombre de facteurs.

1° D'après la formule ci-dessus :

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56.$$

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 7 \times 3 = 21.$$

Comme $2 < 5$, il est plus simple de faire les calculs sur $\binom{7}{2}$ que sur $\binom{7}{5}$.

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 2 \times 5 = 70.$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ On peut écrire : } & \frac{100 \times 99 \times \dots \times 76}{25 \times 24 \times \dots \times 1} \\ &= \frac{100 \times 99 \times \dots \times (100 - 25 + 1)}{25 \times 24 \times \dots \times 1}, \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \frac{100 \times 99 \times \dots \times 76}{25 \times 24 \times \dots \times 1} = \binom{100}{25},$$

ce qui prouve que le nombre

$$\frac{100 \times 99 \times \dots \times 76}{25 \times 24 \times \dots \times 1} \text{ est un entier.}$$

Dans la représentation d'un modèle de Bernoulli à l'aide d'un arbre, $\binom{100}{25}$ est le nombre de chemins conduisant à 25 succès pour 100 répétitions.

7 1° On obtient, en utilisant la formule de Pascal :

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	

C'est une construction ligne par ligne.

On lit dans le tableau :

$\binom{7}{3} = 35$ (coefficient de la huitième ligne et quatrième colonne).

$\binom{8}{4} = 70$ (coefficient de la neuvième ligne et cinquième colonne).

2° En notant S_n la somme des coefficients binomiaux de la n -ième ligne du triangle de Pascal, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256

On observe que $S_1, S_2, \dots, S_9$ sont les puissances de 2 successives de 2^0 à 2^8 .

La somme des coefficients binomiaux de la $(n+1)$ -ième ligne du triangle de Pascal est égale au nombre total de chemins dans un arbre représentant un modèle de Bernoulli pour n répétitions. Le nombre de ces chemins est égal au nombre de n -listes d'éléments de l'ensemble $\{0; 1\}$, c'est-à-dire est égal à 2^n .

3° En notant T_n la somme des coefficients binomiaux de la n -ième colonne du triangle de Pascal, de la première à la huitième ligne, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
T_n	8	28	56	70	56	28	8	1

On reconnaît les coefficients binomiaux successifs $\binom{8}{1}, \binom{8}{2}, \dots, \binom{8}{8}$ de la neuvième ligne du triangle de Pascal.

Seul le premier, $\binom{8}{0}$, n'est pas dans la liste.

4° $K_n = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{n}{3}$ ($n \geq 3$).

a) D'après la formule de Pascal, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 4 :

$$\binom{k+1}{4} = \binom{k}{3} + \binom{k}{4},$$

c'est-à-dire :

$$\binom{k}{3} = -\binom{k}{4} + \binom{k+1}{4}.$$

b) En remplaçant chacun des termes de la somme définissant K_n , sauf le premier, selon la formule de la question précédente, on obtient :

$$K_n = \underbrace{\binom{3}{3}}_1 - \underbrace{\binom{4}{4}}_1 + \binom{5}{4} - \binom{5}{4} + \binom{6}{4} - \dots - \binom{n}{4} + \binom{n+1}{4},$$

et par télescopage additif, il ne reste plus que :

$$K_n = \binom{n+1}{4}.$$

On peut donc écrire :

$K_7 = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{7}{3} = \binom{8}{4}$, ce qui est bien le résultat obtenu à la question 2° :

$$T_4 = 70 = \binom{8}{4}.$$

Variables aléatoires binomiales

8 La loi binomiale de paramètre $(4, \frac{1}{3})$

est la loi de probabilité dont la distribution $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$ associée à la liste de résultats $(0, 1, 2, 3, 4)$ est définie par : pour tout entier k compris au sens large entre 0 et 4,

$$\begin{aligned} p_k &= \binom{4}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-k} \\ &= \binom{4}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k} \\ &= \frac{2^{4-k}}{3^4} \binom{4}{k}. \end{aligned}$$

On obtient, avec la calculatrice :

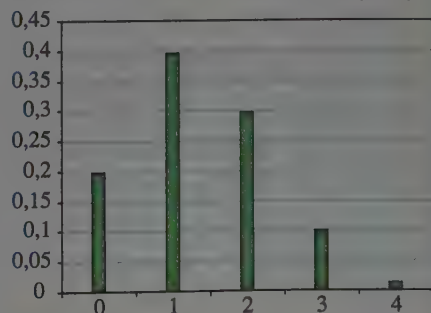
$$p_0 = \frac{16}{81}, \quad p_1 = \frac{32}{81}, \quad p_2 = \frac{24}{81} = \frac{8}{27},$$

$$p_3 = \frac{8}{81}, \quad p_4 = \frac{1}{81},$$

et, à 10^{-3} près :

$$p_0 \approx 0,198, \quad p_1 \approx 0,395, \quad p_2 \approx 0,296, \\ p_3 \approx 0,099, \quad p_4 \approx 0,012.$$

On en déduit la représentation graphique de la loi binomiale de paramètre $(4, \frac{1}{3})$:



9 Expérience aléatoire : quatre tirages successifs au hasard d'une boule avec remise dans une urne qui contient cinq boules rouges, deux boules blanches et une boule verte.

1° Variable aléatoire X : le nombre de boules rouges obtenues.

L'urne contient huit boules, dont cinq sont rouges. La proportion de boules rouges dans l'urne est égale à $\frac{5}{8}$.

La variable aléatoire X compte les succès lors de la répétition de quatre épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (les tirages se font avec remise, le contenu de l'urne est inchangé au fil des tirages),

de même probabilité de succès $\frac{5}{8}$ (la pro-

portion de boules rouges), succès étant « obtenir une boule rouge ». On en déduit que X est une variable aléatoire

binomiale de paramètre $\left(4, \frac{5}{8}\right)$.

On dit aussi que X suit la loi binomiale de paramètre $\left(4, \frac{5}{8}\right)$.

Les valeurs prises par X sont les entiers de 0 à 4, et, pour tout entier k compris au sens large entre 0 et 4 :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{4}{k} \left(\frac{5}{8}\right)^k \left(1 - \frac{5}{8}\right)^{4-k} \\ &= \binom{4}{k} \left(\frac{5}{8}\right)^k \left(\frac{3}{8}\right)^{4-k}, \end{aligned}$$

$$P(X = k) = \frac{5^k 3^{4-k}}{8^4} \binom{4}{k} = \left(\frac{5}{8}\right)^k \left(\frac{3}{8}\right)^{4-k} \binom{4}{k}.$$

2° Variable aléatoire Y : le nombre de boules rouges ou vertes obtenues.

La proportion de boules rouges ou vertes dans l'urne étant égale à 0,75

$\left(\frac{5+1}{8} = \frac{3}{4} = 0,75\right)$, la variable aléatoire Y

compte les succès lors de la répétition de quatre épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de même probabilité de succès 0,75, donc Y est une variable aléatoire **binomiale de paramètre $(4 ; 0,75)$.**

Les valeurs prises par Y sont les entiers de 0 à 4, et, pour tout entier k compris au sens large entre 0 et 4 :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{4}{k} 0,75^k (1 - 0,75)^{4-k} \\ &= \binom{4}{k} 0,75^k 0,25^{4-k}. \end{aligned}$$

10 1° Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre de succès p ($n \geq 1$, $0 < p < 1$).

a) On sait, d'après le cours, que

les valeurs prises par X sont les entiers de 0 à n et que, pour tout entier k compris au sens large entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \binom{n}{n} p^n (1 - p)^{n-n} \\ &= 1 \times p^n \times 1 \\ &= p^n. \end{aligned}$$

b) $p = \frac{1}{2}$.

Soit k un entier compris au sens large entre 0 et n .

• On peut écrire :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

autrement dit : $P(X = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$.

• On sait que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, donc :

$$P(X = n - k) = P(X = k).$$

2° Sachant que chacune des variables aléatoires proposées est binomiale, il est facile d'en déterminer la taille n et le paramètre de succès p :

- $n + 1$ est le nombre de valeurs prises,
- p^n est la probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur n .

a)

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

X suit la loi binomiale de taille 3 et de paramètre de succès $\frac{1}{2}$.

(4 valeurs prises, $P(X = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.)

b)

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

Y suit la loi binomiale de taille 3 et de paramètre de succès $\frac{2}{3}$.

(4 valeurs prises, $P(Y=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.)

c)

k	0	1	2	3	4
$P(Z=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Z suit la loi binomiale de taille 4 et de paramètre de succès $\frac{1}{2}$.

(5 valeurs prises, $P(Z=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.)

11 Expérience aléatoire : dix lancers d'un dé équilibré. Variable aléatoire X : le nombre de 6 obtenus.

1° La variable aléatoire X compte les succès lors de la répétition de dix épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (les lancers du dé sont « physiquement » indépendants), de même probabilité de succès $\frac{1}{6}$ (le dé est équilibré, il y a une chance sur six qu'il amène 6) donc X suit la loi binomiale de taille 10 et de paramètre de succès $\frac{1}{6}$.

On dit aussi : X suit la loi binomiale de paramètre $\left(10, \frac{1}{6}\right)$.

2° D'après le cours :

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-3} \\ &= \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 \\ &= \frac{5^7}{6^{10}} \binom{10}{3}, \end{aligned}$$

or : $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4$,
donc :

$$P(X=3) = \frac{5^7 \times 5 \times 6 \times 4}{6^{10}} = \frac{5^8 \times 4}{6^9},$$

$$P(X=3) = \frac{5^8}{6^7 \times 3^2} = \frac{390\,625}{2\,519\,424},$$

et, à 10^{-3} près : $P(X=3) \approx 0,155$.

Avec le tableur Excel, utiliser la formule :
= LOI.BINOMIALE(3 ; 10 ; 1/6 ; FAUX)

12 Le nombre X de réponses exactes du candidat est le nombre de succès lors de la répétition de dix épreuves de Bernoulli indépendantes, la probabilité du succès étant $\frac{1}{3}$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} 1^\circ P(X=3) &= \binom{10}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7 \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times \frac{2^7}{3^{10}} \\ &= \frac{5\,120}{19\,683}, \end{aligned}$$

donc la probabilité pour que le candidat donne les réponses exactes à exactement trois questions est

$$\frac{5\,120}{19\,683} \quad \left(\frac{5\,120}{19\,683} \approx 0,26 \right).$$

$$\begin{aligned} 2^\circ P(X=10) &= \binom{10}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ &= \frac{1}{3^{10}} \\ &= \frac{1}{59\,049}, \end{aligned}$$

donc la probabilité pour que le candidat donne les réponses exactes à toutes les questions est $\frac{1}{59\,049}$

$$\left(\frac{1}{59\,049} \approx 0,000\,017 \right).$$

3° L'événement A : « le candidat donne au plus 8 réponses exactes » est l'événement contraire de l'événement : « le candidat donne 9 ou 10 réponses exactes », donc :

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(X=9) - P(X=10) \\ &= 1 - \binom{10}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(\frac{2}{3}\right)^1 - \frac{1}{3^{10}} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - 10 \times \frac{2}{3^{10}} - \frac{1}{3^{10}} \\ &= 1 - \frac{21}{3^{10}} \\ &= \frac{19\,676}{19\,683} \end{aligned}$$

Finalement, la probabilité pour que le candidat donne au plus huit réponses exactes est $\frac{19\,676}{19\,683} \left(\frac{19\,676}{19\,683} \approx 0,999\,6 \right)$.

13 1° Le nombre X de lancers où l'on obtient 6 est le nombre de succès dans la répétition de douze épreuves de Bernoulli indépendantes, la probabilité du succès étant $\frac{1}{6}$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres 12 et $\frac{1}{6}$.

L'événement A : « obtenir au moins deux fois le 6 » est l'événement contraire de l'événement : « obtenir 0 ou 1 fois le 6 », donc :

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) \\ &= 1 - \binom{12}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{11}, \end{aligned}$$

d'où :

$$P(A) = 1 - \frac{5^{12}}{6^{12}} - 12 \times \frac{5^{11}}{6^{12}} = \frac{1\,346\,704\,211}{2\,176\,782\,336};$$

en outre :

$$\frac{1\,346\,704\,211}{2\,176\,782\,336} \approx 0,618\,7 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Finalement :

à 10^{-4} près, la probabilité d'obtenir au moins deux fois le 6 en douze lancers successifs est 0,618 7.

2° Simulation avec le logiciel Excel.

Étapes	Adresses	Formules et observations
Échantillon de 1 000 lancers	A2:L1001	Dans A2, saisir la formule =ENT(6*ALEA())+1 puis tirer la poignée de recopie vers la droite, vers le bas
Nombre de 6	M2:M1001	Dans M2, saisir la formule =NB.SI(A2:L2;6) puis tirer la poignée de recopie vers le bas
Nombre de fois où l'on obtient au moins deux 6	N2:N1001	Dans N2, saisir la formule =SI(M2>1;1;0) puis tirer la poignée de recopie vers le bas
Fréquence de réalisation de « au moins deux 6 » sur les mille lancers	O2	Dans O2, saisir la formule =SOMME(N2:N1001)/1000

O2 =SOMME(N2:N1001)/1000												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	douze lancers d'un dé											
2	5	3	1	2	4	6	1	1	5	1	1	6
3	4	2	1	6	5	4	3	3	6	4	6	6
4	6	4	1	3	2	3	6	5	4	3	4	6
5	2	2	5	4	2	4	6	3	4	2	2	6
6	1	1	2	6	2	1	2	6	1	4	4	5
7	6	3	4	3	4	5	6	2	1	1	4	6
8	3	1	1	3	1	3	5	1	3	6	4	4
9	4	2	2	1	4	3	4	2	6	3	5	4
10	1	5	6	3	4	5	1	2	2	5	4	6
11	3	3	3	1	4	6	3	6	3	5	1	2
12	6	6	5	5	5	3	3	2	3	2	3	6
13	1	5	2	1	6	5	6	3	4	6	1	1
14	4	5	3	2	3	4	5	2	4	4	1	2
15	3	3	1	3	6	6	1	6	3	6	3	4
16	5	1	3	3	4	2	5	6	2	1	4	3
17	6	1	6	3	2	3	2	4	6	6	2	4
18	3	3	2	4	4	5	1	5	5	5	2	1
19	2	6	1	2	6	5	3	2	4	6	3	1

• La formule $\text{=ENT}(6*\text{ALEA}())+1$ retourne un entier aléatoire compris entre 1 et 6.

On pourrait aussi entrer la formule :

$\text{=ALEA.ENTRE.BORNES}(1,6)$

• La formule $\text{=NB.SI}(A2:L2;6)$ retourne le nombre de cellules de la plage A2:L2 dont la valeur est 6.

• La formule $\text{=SI}(M2>1;1;0)$ retourne la valeur 1 si le nombre de 6 obtenus est supérieur à 1, 0 sinon.

• La formule $\text{=SOMME}(N2:N1001)/1000$ retourne la moyenne des valeurs contenues dans les cellules de la plage N2:N1001.

On obtient une nouvelle simulation en appuyant sur la touche F9.

14 Une urne contient dix boules, dont trois sont blanches et sept sont rouges.

1° Expérience aléatoire : quatre tirages successifs au hasard d'une boule avec remise. Variable aléatoire X : le nombre de boules blanches obtenues.

L'urne contient dix boules, dont trois sont blanches. La proportion de boules blanches dans l'urne est égale à $\frac{3}{10}$.

La variable aléatoire X compte les succès lors de la répétition de quatre épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (les tirages se font avec remise, le contenu de l'urne est inchangé au fil des tirages), de même probabilité de succès $\frac{3}{10}$ (la proportion de boules blanches), donc X suit la

loi binomiale de paramètre $\left(4, \frac{3}{10}\right)$.

On sait qu'alors :

$$E(X) = 4 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5} = 1,2,$$

$$V(X) = 4 \times \frac{3}{10} \times \left(1 - \frac{3}{10}\right) = \frac{21}{25} = 0,84.$$

2° Expérience aléatoire : quatre tirages successifs au hasard d'une boule sans remise.

Variable aléatoire Y : le nombre de boules blanches obtenues.

a) Il est possible de ne tirer aucune boule blanche (les quatre boules tirées sont rouges), ..., de tirer trois boules blanches, mais il est impossible de tirer quatre boules blanches, puisque l'urne ne contient au départ que trois boules blanches et que les tirages se font sans remise. On en déduit que l'ensemble E des valeurs prises par Y est égal à $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

b) Pour tout k de E ,

$$P(Y = k) = \frac{1}{210} \binom{3}{k} \binom{7}{4-k}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \bullet P(Y=0) &= \frac{1}{210} \binom{3}{0} \binom{7}{4} = \frac{1}{210} \times 1 \times 35 \\ &= \frac{5}{30}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(Y=1) &= \frac{1}{210} \binom{3}{1} \binom{7}{3} = \frac{1}{210} \times 3 \times 35 \\ &= \frac{15}{30}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(Y=2) &= \frac{1}{210} \binom{3}{2} \binom{7}{2} = \frac{1}{210} \times 3 \times 21 \\ &= \frac{9}{30}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(Y=3) &= \frac{1}{210} \binom{3}{3} \binom{7}{1} = \frac{1}{210} \times 1 \times 7 \\ &= \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \sum_{k \in E} P(Y = k) = \sum_{k=0}^3 P(Y = k),$$

et on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in E} P(Y = k) &= \frac{5}{30} + \frac{15}{30} + \frac{9}{30} + \frac{1}{30} \\ &= \frac{5 + 15 + 9 + 1}{30} \\ &= \frac{30}{30}. \end{aligned}$$

On retrouve bien que

$$\sum_{k \in E} P(Y = k) = 1.$$

De plus, par définition de l'espérance :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^3 kP(Y = k),$$

donc :

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \times \frac{5}{30} + 1 \times \frac{15}{30} + 2 \times \frac{9}{30} + 3 \times \frac{1}{30} \\ &= \frac{15 + 18 + 3}{30} = \frac{36}{30} \\ &= \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Observer que l'espérance de la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches est la même, que les tirages se fassent avec ou sans remise.

15 Expérience aléatoire : un mobile initialement à l'origine effectue n déplacements sur un axe gradué, d'une unité sur la gauche ou de deux unités vers la droite de façon équiprobable.

Variable aléatoire X : abscisse finale du mobile.

Variable aléatoire Y : nombre de déplacements vers la droite.

1° L'algorithme suivant simule l'expérience aléatoire étudiée et donne en sortie l'abscisse finale du mobile.

Variables

n, x, k, alea : entiers

Entrée

Saisir n

Initialisation

x prend la valeur 0

Traitement

Pour k variant de 1 à n

k prend la valeur $k + 1$

 alea prend aléatoirement la valeur 0 ou 1

 Si alea = 0

 alors x prend la valeur $x - 1$

 sinon x prend la valeur $x + 2$

 fin Si

Fin Pour

Sortie

Afficher x

2° a) À l'issue de l'expérience aléatoire, le mobile s'est déplacé :

- Y fois vers la droite de deux unités, donc de $2Y$ unités,

- et de $(n - Y)$ unités vers la gauche.

L'abscisse X finale du mobile est donc égale à $2Y - (n - Y)$, autrement dit :

$$X = 3Y - n.$$

b) La variable aléatoire Y compte les succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de même probabilité de succès $\frac{1}{2}$, donc Y suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On en déduit :

$$E(Y) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2},$$

$$V(Y) = n \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4}.$$

c) De l'égalité $X = 3Y - n$, on déduit : $E(X) = 3E(Y) - n$, $V(X) = 3^2V(Y)$, donc, d'après la question précédente :

$$E(X) = 3 \times \frac{n}{2} - n = \frac{n}{2},$$

$$V(X) = 9 \times \frac{n}{4} = \frac{9n}{4}.$$

3° $n = 3$.

• La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètre $\left(3, \frac{1}{2}\right)$, donc les valeurs prises par Y sont les entiers de 0 à 3 et, pour tout entier k de l'ensemble $\{0; 1; 2; 3\}$:

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-k} \\ &= \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \frac{1}{2^3} \binom{3}{k}, \end{aligned}$$

donc : $P(Y = k) = \frac{1}{8} \binom{3}{k}.$

On en déduit le tableau de la loi de probabilité de Y :

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

La quatrième ligne du triangle de Pascal donne la valeur des coefficients binomiaux $\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$.

• D'après la question **2° a)** :

$$X = 3Y - n, \text{ donc : } X = 3Y - 3.$$

On en déduit que les valeurs prises par X sont les nombres $3 \times 0 - 3, 3 \times 1 - 3, 3 \times 2 - 3, 3 \times 3 - 3$, c'est-à-dire les entiers $-3, 0, 3, 6$.

De plus, pour tout x de l'ensemble $\{-3; 0; 3; 6\}$:

$$P(X=x) = P(3Y-3=x) \\ = P\left(Y=1+\frac{x}{3}\right).$$

On peut maintenant dresser le tableau de la loi de probabilité de X :

x	-3	0	3	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

16 Expérience aléatoire : trois lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

Variable aléatoire T : le nombre de côtés face obtenus.

1° La variable aléatoire T compte les succès lors de la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (les lancers sont « physiquement » indépendants), de même probabilité de succès $\frac{1}{2}$ (la pièce est équilibrée), donc X suit la loi binomiale de paramètre $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

On sait alors que son espérance $E(X)$ vérifie : $E(X) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

2° Simulation sur calculatrice

En adaptant l'exemple proposé page 252 à la situation ici étudiée :

TI

```

: 4 → dim(L1) : Remplir (0, L1)
: Prompt N
: For (I, 1, N)
: entAléat (0,1) +
entAléat (0,1) +
entAléat (0,1) + 1 → A
: L1(A) + 1 → L1 (A)
: End
: L1/N → L1
: Disp"FREQ 0", L1 (1)
: Pause
: Disp"FREQ 1", L1 (2)
: Disp"FREQ 2", L1 (3)
: Disp"FREQ 3", L1 (4)

```

CASIO

```

{0, 0, 0, 0} → List1 ↓
"NBEXP" ? → N ↓
For 1 → I To N ↓
Int (2Ran#) + Int (2Ran#) +
Int (2Ran#) + 1 → A ↓
List1 [A] + 1 → List1 [A] ↓
Next ↓
List1 ÷ N → List1 ↓
"FREQ 0" : List1 [1] ▲
"FREQ 1" : List1 [2] ▲
"FREQ 2" : List1 [3] ▲
"FREQ 3" : List1 [4] ▲

```

Pour 100 et 400 expériences, on a obtenu à l'affichage :

```

FRQ 1      0.13
FRQ 2      0.38
FRQ 3      0.44
FRQ 4      0.05

```

```

FRQ 1      0.125
FRQ 2      0.3775
FRQ 3      0.3725
FRQ 4      0.125

```

Quand n devient grand, les distributions de fréquences calculées sur n expériences se rapprochent de la distribution de probabilité.

Échantillonnage

17

B2 =LOI.BINOMIALE(A2;200;0.25;VRAI)				
	A	B	C	D
	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$
1				
2	35	0.0073	50	0.5379
3	36	0.0117	51	0.6017
4	37	0.0182	52	0.6626
5	38	0.0276	53	0.7192
6	39	0.0405	54	0.7707
7	40	0.0578	55	0.8162
8	41	0.0804	56	0.8555
9	42	0.1089	57	0.8885
10	43	0.1438	58	0.9157
11	44	0.1852	59	0.9375
12	45	0.2332	60	0.9546
13	46	0.2870	61	0.9677
14	47	0.3458	62	0.9774
15	48	0.4083	63	0.9846
16	49	0.4729	64	0.9897
17				

1° Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètre $(200, 0,25)$.

a) ■ • Soit a le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$.

D'après la feuille de calcul :

$$P(X \leq 37) \leq 0,025 \\ \text{et } P(X \leq 38) > 0,025,$$

donc : $a = 38$.

• Soit b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

D'après la feuille de calcul :

$$P(X \leq 61) < 0,975 \\ \text{et } P(X \leq 62) \geq 0,975,$$

donc : $b = 62$.

L'intervalle $[0; 200]$ est ainsi partagé en trois intervalles $[0; 37]$, $[38; 62]$, $[63; 200]$, de sorte que X prenne ses valeurs dans les deux intervalles extrêmes avec une probabilité proche de 0,025, sans dépasser cette valeur ; la probabilité que X prenne une valeur comprise au sens large entre 38 et 62 est donc au moins égale à 0,95 et la probabilité que X prenne une valeur hors de l'intervalle $[38; 62]$ ne dépasse pas 0,05.

■ D'après le cours, l'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille 200, d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres

200 et 0,25 est $\left[\frac{38}{200}; \frac{62}{200} \right]$, c'est-à-dire **$[0,19; 0,31]$** .

• Noter que cet intervalle de fluctuation est centré sur 0,25, ce que sa méthode de construction ne permettait pas *a priori* de prévoir.

• On a : $0,25 - \frac{1}{\sqrt{200}} \approx 0,1793$

et $0,25 + \frac{1}{\sqrt{200}} \approx 0,3207$, donc l'intervalle

de fluctuation centré sur 0,25 obtenu en classe de Seconde avec la formule

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ est, en arrondissant à}$$

10^{-3} près (par valeur inférieure pour la borne gauche et par valeur supérieure pour la borne droite), **$[0,179; 0,321]$** .

b) ■ • Soit α le plus petit entier tel que $P(X \leq \alpha) > 0,05$.

D'après la feuille de calcul :

$$P(X \leq 39) \leq 0,05 \\ \text{et } P(X \leq 40) > 0,05,$$

donc : $\alpha = 40$.

• Soit β le plus petit entier tel que $P(X \leq \beta) \geq 0,95$.

D'après la feuille de calcul :

$$P(X \leq 59) < 0,95 \\ \text{et } P(X \leq 60) \geq 0,95,$$

donc : $\beta = 60$.

■ L'intervalle $[0; 200]$ est ainsi partagé en trois intervalles $[0; 39]$, $[40; 60]$, $[61; 200]$, de sorte que X prenne ses valeurs dans les deux intervalles extrêmes avec une probabilité proche de 0,05, sans dépasser cette valeur.

Ainsi, la probabilité que X prenne une valeur hors de l'intervalle $[40; 60]$ ne dépasse pas 0,01 et la probabilité que X prenne une valeur comprise au sens large entre 40 et 60 est donc au moins égale à 0,9.

■ On a : $\frac{40}{200} = 0,2$ et $\frac{60}{200} = 0,3$, donc la fréquence de succès de 90 % (au moins) des échantillons de taille 200 d'un modèle de Bernoulli de probabilité de succès 0,25 se situe dans l'intervalle **$[0,2; 0,3]$** .

2° Les 200 parties du jeu constituent un échantillon aléatoire de taille 200 d'un modèle de Bernoulli de probabilité de succès 0,25, succès étant « sortie du gobelet n° 1 ».

a) La fréquence observée de sortie du gobelet n° 1 est $\frac{61}{200}$, c'est-à-dire 0,305,

valeur qui se situe dans $[0,19; 0,31]$, l'intervalle de fluctuation à 95 %, donc, **en n'acceptant qu'un risque de 5 % de se tromper, on ne peut pas considérer que le jeu est truqué** (et, ce faisant, on n'a pas les moyens d'évaluer la probabilité de se tromper).

b) En revanche, 0,305 ne se situe pas dans $[0,2; 0,3]$, l'intervalle de fluctuation à 90 %, donc, **au risque 10 % de se tromper, on peut considérer que le jeu est truqué**.

On peut se dispenser d'avoir recours à l'intervalle de fluctuation à 90 %. En effet, la relation $P(40 \leq X \leq 60) \geq 0,9$ prouve que la probabilité qu'en 200 parties, le nombre de sorties du gobelet n° 1 n'appartienne pas à l'intervalle $[40 ; 60]$ est inférieure à 0,1, donc, au risque 10 % de se tromper, on peut considérer que le jeu est truqué.

18 En 1 200 lancers, un dé a amené 172 fois le 6.

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer 1 200 lancers d'un dé équilibré, et notons X la variable aléatoire qui, à chaque résultat de l'expérience aléatoire, associe le nombre de 6 obtenus. La variable aléatoire X compte les succès lors de la répétition de 1 200 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes,

de paramètre de succès $\frac{1}{6}$, donc X suit la loi binomiale de paramètre $(1\,200 ; \frac{1}{6})$, et son espérance $E(X)$ vérifie :

$$E(X) = 1\,200 \times \frac{1}{6} = 200.$$

On lit dans la feuille de calcul :

• $P(X \leq 174) \leq 0,025$
et $P(X \leq 175) > 0,025$,

• $P(X \leq 225) < 0,975$
et $P(X \leq 226) \geq 0,975$,

d'où l'on déduit :

$$P(175 \leq X \leq 226) \geq 0,95.$$

Voir l'exercice 17 pour plus de détails.

La probabilité qu'en 1 200 lancers, un dé équilibré amène 6 un nombre de fois hors de l'intervalle $[175 ; 226]$ est donc inférieure à 0,05.

Le dé ayant amené en 1 200 lancers 172 fois le 6, **au risque 5 % de se tromper, on peut considérer que le dé est truqué.**

$$172 \notin [175 ; 226].$$

La fréquence $\frac{172}{1\,200}$ d'apparition du 6 n'appartient pas à $[\frac{175}{1\,200} ; \frac{226}{1\,200}]$, l'intervalle de fluctuation à 95 % :

$0,143 \notin [0,146 ; 0,189]$ (valeurs arrondies au millièmme par défaut pour la borne gauche, par excès pour la borne droite).

19 X désigne une variable aléatoire binomiale de paramètre $(20 ; 0,512)$.

On lit dans la feuille de calcul :

• $P(X \leq 5) \leq 0,025$
et $P(X \leq 6) > 0,025$,

• $P(X \leq 14) < 0,975$
et $P(X \leq 15) \geq 0,975$,

d'où l'on déduit :

$$P(6 \leq X \leq 15) \geq 0,95.$$

Voir l'exercice 17 pour plus de détails.

Sachant que la proportion de garçons à la naissance s'élève à 51,2 %, la probabilité que, sur vingt naissances, le nombre de garçons se trouve hors de l'intervalle $[6 ; 15]$ est donc inférieure à 0,05.

On fait implicitement l'hypothèse de l'indépendance (le fait qu'un nouveau-né soit un garçon ou une fille n'a pas d'influence sur le sexe des autres enfants).

Dans la situation étudiée, on compte seize garçons sur vingt naissances, donc, **au risque 5 % de se tromper, on peut considérer qu'une telle disparité n'est pas due au hasard.**

La fréquence $\frac{16}{20}$ de garçons n'appartient pas à $[\frac{6}{20} ; \frac{15}{20}]$, l'intervalle de fluctuation à 95 % :
 $0,8 \notin [0,3 ; 0,75]$.

L'interrogation écrite

20 Une compagnie aérienne vend 160 réservations pour 150 places.

Toute personne réservant une place d'avion a une chance sur dix de ne pas se présenter à l'embarquement, et cela indépendamment des autres clients.

1° Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes ne se présentant pas à l'embarquement.

La variable aléatoire X compte les succès lors de la répétition de 160 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (« indépendamment les uns des autres »),

de même probabilité de succès $\frac{1}{10}$ (« toute personne réservant une place d'avion a une chance sur dix de ne pas se présenter à l'embarquement »), succès étant : « la personne ne se présente pas à l'embarquement ». On en déduit que X suit la loi binomiale de paramètre $\left(160, \frac{1}{10}\right)$.

On sait qu'alors les valeurs prises par X sont les entiers de 0 à 160 et, pour tout entier k de $\{0 ; 1 ; \dots ; 160\}$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{160}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{160-k} \\ &= \binom{160}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{160-k}. \end{aligned}$$

On peut aussi écrire :

$$P(X = k) = \binom{160}{k} \frac{9^{160-k}}{10^{160}} = \binom{160}{k} \frac{(0,9)^{160}}{9^k},$$

formule plus facile à éditer sur la calculatrice.

De plus, l'espérance $E(X)$ vérifie :

$$E(X) = 160 \times \frac{1}{10} = 16.$$

2° p : la probabilité que la compagnie aérienne effectue un surbooking.

a) La compagnie aérienne effectue un surbooking si, et seulement si, plus de cent cinquante personnes se présentent à l'embarquement, c'est-à-dire si, et seulement si, moins de dix personnes ne se présentent pas à l'embarquement, donc :

$$\begin{aligned} p &= P(X < 10) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 9) \\ &= \sum_{k=0}^9 P(X = k). \end{aligned}$$

b) Pour éviter d'éditer sur la calculatrice le calcul direct de la somme $P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 9)$, long et périlleux, mieux vaut transcrire sur la calculatrice l'algorithme suivant :

Variables

p : réel

k : entier

Initialisation

p prend la valeur 0

Traitement

Pour k variant de 0 à 9

p prend la valeur $p + P(X = k)$

 Fin Pour

Sortie

Afficher p

TI

```
0 → P
For (K, 0, 9)
P + 160 Combinaison K / 9^K → P
End
P * 0.9^160 → P
Disp P
```

CASIO

```
0 → P ↓
For 0 → K To 9 ↓
P + 160 C K ÷ 9^K → P ↓
Next ↓
P × 0.9^160 → P ↓
P
```

Noter que le facteur $(0,9)^{160}$ étant constant, la multiplication par $(0,9)^{160}$ a été effectuée hors de la boucle.

Après exécution du programme, on lit à l'affichage :

0.03530465384

ce qui permet de conclure : $p \approx 0,0359$ à 10^{-3} près.

Avec le tableur Excel, utiliser la formule :
= LOI.BINOMIALE(9;160;0,1;VRAI)

L'option VRAI permet de cumuler les valeurs de $P(X = 0)$ à $P(X = 9)$.

Exos *résolus*

1^{res} ES/L

Le meilleur coach
pour s'entraîner et réussir !

Maths

La collection **Exos résolus** s'adresse à tous ceux qui veulent **réussir** dans les matières scientifiques, de la 3^e à la terminale, grâce à un **entraînement intensif**. Chaque titre présente des batteries d'**exercices minutés**, classés par thèmes et par niveaux de difficulté. Vous y trouverez :

- ▶ des **résumés de cours** pour réviser les connaissances indispensables ;
- ▶ des **exercices d'entraînement** pour s'exercer et se perfectionner ;
- ▶ **30 interrogations écrites** pour clore ses révisions en se plaçant dans les conditions d'un contrôle ;
- ▶ tous les **corrigés détaillés**, avec de nombreux conseils.

+ Formulaire de poche
détachable

	3 ^e	2 ^{de}	1 ^{re} S	1 ^{res} ES/L	Term S	Term ES
Mathématiques	▲	▲	▲	▲	▲	▲
Physique - Chimie	▲	▲				
Physique			▲		▲	
Chimie			▲		▲	
SVT			▲		▲	

GIBERT

EXOS 8
0293/7

ISBN 978-2-01-160293-0



9 782011 602930

hachette
ÉDUCATION

www.hachette-education.com

10,95 € TTC
France métropolitaine