

Maths

DÉFIBAC

**PRÉPARER
ET RÉUSSIR LE BAC**

1^{re} S

Cours synthétique

Méthodes commentées

395 exercices progressifs et QCM

Corrigés détaillés

 Un **formulaire**

 **Bordas**

 Les conseils de
PHOSPHORE
et des infos métiers



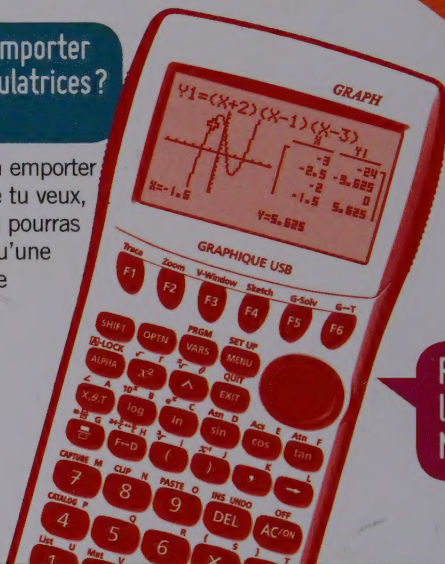
PHOSPHORE

vous aide le jour du Bac

Je peux emporter deux calculatrices ?

Marco

Tu peux en emporter autant que tu veux, mais tu ne pourras en sortir qu'une sur ta table d'examen.



Si je ne sais pas faire, et que je trouve le résultat sur ma calculatrice, aurai-je quand même quelques points ?

Mathilde

Très peu. C'est dans le barème : un résultat ne rapporte que des demi-points.

Peut-on appliquer le théorème de Chuck Norris ?

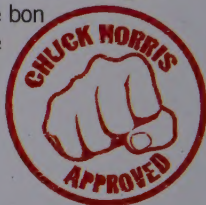
Martin

À part si on s'appelle soi-même Chuck Norris, mieux vaut ne pas le tenter. Sur Twitter circule une copie de DS, où un élève a répondu : « J'applique le théorème de Chuck Norris, ce qui me permet d'avoir tous les points des exercices 2 et 3. » Le prof a commenté en rouge : « Remarque inacceptable ! Il faut grandir ! Signature des parents. » Cela n'augure rien de bon pour le bac...

Peut-on entrer des formules dans notre calculatrice ?

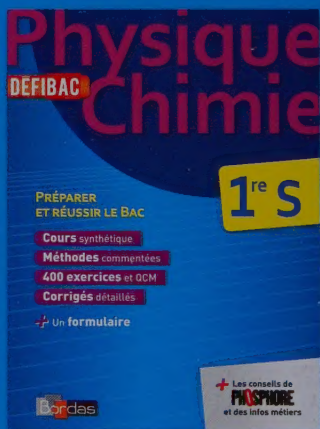
Juliette

Oui, tu as le droit. Mais la calculatrice peut théoriquement être interdite le jour de l'épreuve. Cela dépend du sujet et, ça, tu ne le découvriras que le jour J. Heureusement, on a appelé plusieurs profs de maths, qui nous disent tous qu'elle est toujours autorisée. L'interdire, ce serait le carnage assuré, et le ministère de l'Éducation nationale ne tient sans doute pas à voir s'écrouler les chiffres de réussite au bac. Mais c'est arrivé qu'en physique-chimie, elle soit interdite. Et comme nous le rappelle une enseignante, « cela dépend aussi de ce que vous ferez l'année prochaine. Après le bac, vous n'aurez plus le droit aux calculatrices, autant vous y habituer dès maintenant... »



Dans la même collection

► Première



► Terminale

- Philosophie T^{le} L-ES-S
- Maths T^{le} S
- Physique-Chimie T^{le} S
- SVT T^{le} S
- Histoire-Géographie T^{le} L-ES-S
- Croquis et schémas de géographie T^{le} L-ES-S
- SES T^{le} ES

Abonnez votre enfant à PHOSPHORE le magazine de ses années lycée !



1 an - 12 n^{os}

-8€

de remise*

soit 69,90€

au lieu de 78,00€

Choisissez
LE CADEAU PRÉFÉRÉ
de votre enfant :



Le sac de sport
et sa pochette



L'enceinte nomade

ou

« J'adore votre magazine ! J'y retrouve de l'actualité, des loisirs, des conseils pour bien s'orienter. En bref, un VRAI magazine intéressant où on s'amuse, on découvre, on s'instruit. »



Pauline, 16 ans

Et sur **phosphore.com**, des tests d'orientation, les écoles, les diplômes et un espace **toutpourlebac.com** !

Vous disposez d'un délai de 14 jours à compter de la réception de vos abonnements pour exercer votre droit de rétractation auprès de Bayard Presse - 18 rue Barbès - 92228 Montrouge cedex - S.A. Directrice et Caucel de surveillance au capital de 16 500 000€ - S24242486 RCS Nanterre. Ne pas jeter sur la voie publique. Crédits photo : Isabelle Franciosa.

Maths

DEFIBAC

1^{re} S

Gabriel Boissière

Professeur agrégé de mathématiques

Fabien Aoustin

Professeur agrégé de mathématiques



www.defibac.fr

Sommaire

Analyse

1 Fonctions polynômes du second degré

COURS

1. Fonctions polynômes
de degré deux..... 5
2. Équation du second degré 6
3. Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ 6

MÉTHODE

1. Étudier une fonction polynôme
de degré deux..... 8
2. Résoudre des équations
du second degré..... 9
3. Résoudre des inéquations
du second degré..... 10

ENTRAÎNEMENT

- 10 qcm pour réviser le cours 12
- Exercices 13

CORRIGÉS

- 19

2 Fonctions homographiques

COURS

1. Rappel : calcul avec des fractions 30
2. Étude des fonctions homographiques..... 30
3. Sens de variation de $u + k, \lambda u$ et $\frac{1}{u}$ 31

MÉTHODE

1. Calculer avec des fractions..... 33
2. Étudier une fonction homographique 34
3. Résoudre des équations
et des inéquations..... 35

ENTRAÎNEMENT

- 10 qcm pour réviser le cours 37
- Exercices 38

CORRIGÉS

- 45

3 Fonction racine carrée et fonction valeur absolue

COURS

1. Fonction racine carrée..... 58
2. Fonction valeur absolue..... 59

MÉTHODE

1. Calculer avec des racines carrées 60
2. Résoudre des inéquations
avec des racines carrées 60
3. Justifier les positions relatives
des courbes de $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ 61
4. Étudier le sens de variation de $\sqrt{u}$ 62
5. Calculer avec des valeurs absolues 63
6. Résoudre des équations
avec la fonction valeur absolue 63
7. Résoudre des inéquations
avec la fonction valeur absolue 64

ENTRAÎNEMENT

- 10 qcm pour réviser le cours 65
- Exercices 66

CORRIGÉS

- 72

4 Dérivation

COURS

1. Nombre dérivé 83
2. Calcul des dérivées..... 84
3. Utilisation des dérivées 85

MÉTHODE

1. Calculer un nombre dérivé 86
2. Tracer une tangente
connaissant le nombre dérivé 86
3. Calculer la dérivée d'une somme
et d'un produit 87
4. Calculer la dérivée d'un quotient 88

5. Étudier les variations d'une fonction.....	89
6. Exploiter le sens de variation pour obtenir des inégalités.....	90

ENTRAÎNEMENT

● 10 qcm pour réviser le cours	91
● Exercices	92
CORRIGÉS	98

5 Étude de fonctions numériques**COURS**

1. Définition d'une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle	113
2. Opérations sur les fonctions.....	113
3. Dérivée f' de f	113

MÉTHODE

1. Utiliser une calculatrice ou un logiciel... 114	
2. Utiliser les fonctions usuelles	115
3. Utiliser la dérivation	116

ENTRAÎNEMENT

● 10 qcm pour réviser le cours	118
● Exercices	119
CORRIGÉS	126

6 Suites**COURS**

1. Modes de génération d'une suite numérique.....	143
2. Suites arithmétiques	144
3. Suites géométriques.....	144
4. Sens de variation d'une suite.....	145
5. Notion de limite d'une suite.....	146

MÉTHODE

1. Modéliser et étudier une situation à l'aide d'une suite arithmétique	147
2. Modéliser et étudier une situation à l'aide d'une suite géométrique.....	148
3. Étudier les variations d'une suite.....	150
4. Conjecturer la limite d'une suite.....	151

ENTRAÎNEMENT

● 10 qcm pour réviser le cours	152
● Exercices	153
CORRIGÉS	163

Géométrie**7 Géométrie plane****COURS**

1. Vecteurs	181
2. Vecteurs colinéaires	182
3. Équations cartésiennes d'une droite	184

MÉTHODE

1. Utiliser la condition de colinéarité pour obtenir une équation de droite.....	185
2. Calculer une équation de droite connaissant un vecteur directeur et un point....	185
3. Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie par une équation...	186
4. Décomposer un vecteur	187

ENTRAÎNEMENT

● 10 qcm pour réviser le cours	189
● Exercices	190
CORRIGÉS	196

8 Trigonométrie**COURS**

1. Cercle trigonométrique Angle orienté	213
2. Radian. Mesures d'un angle orienté.....	213
3. Mesures d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls.....	214
4. Trigonométrie	215

MÉTHODE

1. Déterminer la mesure principale d'un angle orienté.....	217
2. Déterminer les cosinus et sinus d'angles associés	217
3. Résolution dans $\mathbb{R}$ d'une équation avec cos	218
4. Résolution dans $\mathbb{R}$ d'une équation avec sin	219

ENTRAÎNEMENT

10 qcm pour réviser le cours	220
Exercices	221
CORRIGÉS	227

9 Produit scalaire dans le plan**COURS**

1. Produit scalaire de deux vecteurs	243
2. Vecteur normal à une droite Équations de droites et cercles	244
3. Applications du produit scalaire	245

MÉTHODE

1. Calculer des produits scalaires	247
2. Utiliser le produit scalaire dans un repère pour calculer un angle...	248
3. Calculer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal	249
4. Déterminer une équation d'un cercle défini par son diamètre	250

ENTRAÎNEMENT

10 qcm pour réviser le cours	251
Exercices	252
CORRIGÉS	262

Statistiques et probabilités**10 Statistiques****COURS**

1. Moyenne, variance et écart-type	285
2. Médiane et écart interquartile	286

MÉTHODE

1. Calculer une moyenne et un écart-type	287
2. Construire un diagramme en boîte	288

ENTRAÎNEMENT

10 qcm pour réviser le cours	290
Exercices	291
CORRIGÉS	301

**11 Probabilités
Variable aléatoire****COURS**

1. Modélisation d'une expérience aléatoire	315
2. Variable aléatoire	316
3. Répétition d'expériences identiques et indépendantes	317

MÉTHODE

1. Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire	318
---	-----

2. Déterminer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire	319
3. Construire et utiliser un arbre pondéré	320

ENTRAÎNEMENT

10 qcm pour réviser le cours	322
Exercices	323
CORRIGÉS	333

**12 Loi binomiale
et échantillonnage****COURS**

1. Loi de Bernoulli	352
2. Loi binomiale	352
3. Échantillonnage	353

MÉTHODE

1. Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale	355
2. Utiliser un schéma de Bernoulli	356
3. Déterminer une loi binomiale	357
4. Déterminer un intervalle de fluctuation	359
5. Exploiter un intervalle de fluctuation	361

ENTRAÎNEMENT

10 qcm pour réviser le cours	362
Exercices	363
CORRIGÉS	370

Formulaire	381
------------	-----

Fonctions polynômes du second degré

1 Fonctions polynômes de degré deux

a. Définition et propriété

Soit a , b et c trois nombres réels, avec $a \neq 0$. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

■ On appelle **fonction polynôme de degré deux** toute fonction f qui peut s'écrire sous la **forme développée** $f(x) = ax^2 + bx + c$; on dit aussi que f est un **trinôme**.

■ Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, alors on peut écrire f sous la **forme canonique** :

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \gamma, \text{ où } \gamma = f\left(\frac{-b}{2a}\right).$$

b. Étude des variations

Soit $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \gamma$, avec $a \neq 0$.

■ Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $\left] -\infty ; -\frac{b}{2a} \right]$ et croissante sur $\left[\frac{-b}{2a} ; +\infty \right[$.

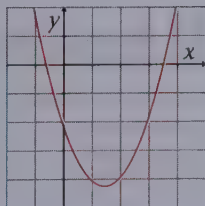
■ Si $a < 0$, alors f est croissante sur $\left] -\infty ; -\frac{b}{2a} \right]$ et décroissante sur $\left[\frac{-b}{2a} ; +\infty \right[$.

■ La fonction f admet pour extremum γ (minimum ou maximum) lorsque x vaut $\frac{-b}{2a}$.

c. Tableau de variations et courbes

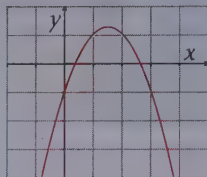
■ Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\swarrow \quad \gamma = f\left(\frac{-b}{2a}\right) \quad \nearrow$		



■ Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow \gamma = f\left(\frac{-b}{2a}\right) \searrow$		



d. Représentation graphique

■ Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La courbe représentative de la fonction f de forme canonique $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \gamma$ est une **parabole** de sommet $S\left(\frac{-b}{2a}; \gamma\right)$.

2 Équation du second degré

a. Discriminant

■ Soit la fonction polynôme f de degré deux définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Le nombre réel $b^2 - 4ac$, noté Δ , est appelé **discriminant** de $ax^2 + bx + c$.

b. Résolution

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

■ Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

■ Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

■ Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

c. Factorisation

■ Soit la fonction polynôme f de degré deux définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Si $\Delta > 0$, alors la **forme factorisée** de f est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

■ Si $\Delta > 0$, alors on peut factoriser : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Le signe de $ax^2 + bx + c$ s'obtient à l'aide d'un tableau de signes ou de la courbe de la fonction de degré deux ; il est du signe de $-a$ dans l'intervalle $]x_1; x_2[$ et du signe de a à l'extérieur de cet intervalle.

■ Si $\Delta = 0$, alors on peut factoriser : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

Le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a si $x \neq \frac{-b}{2a}$.

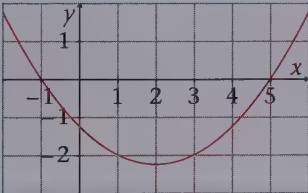
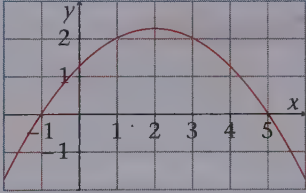
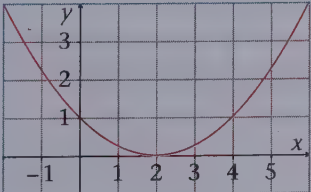
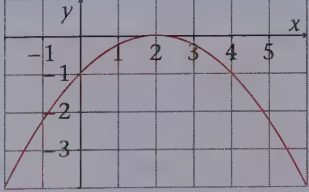
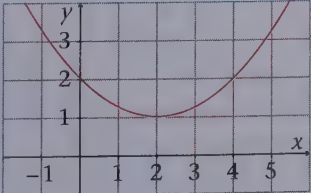
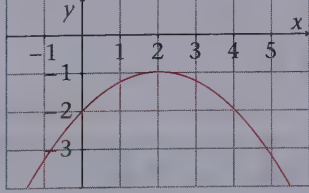
■ Si $\Delta < 0$, alors on ne peut pas factoriser $ax^2 + bx + c$.

■ Le polynôme garde toujours le même signe, celui de a .

À NOTER

La propriété donnant le signe du trinôme est utilisée pour résoudre les inéquations du second degré.

Exemples (avec les 6 possibilités) :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	 $f(x) = 0,25x^2 - x - 1,25$ $f(x) = 0,25(x - 2)^2 - 2,25$ $f(x) = 0,25(x + 1)(x - 5)$	 $f(x) = -0,25x^2 + x + 1,25$ $f(x) = -0,25(x - 2)^2 + 2,25$ $f(x) = -0,25(x + 1)(x - 5)$
$\Delta = 0$	 $f(x) = 0,25x^2 - x + 1$ $f(x) = 0,25(x - 2)^2$	 $f(x) = -0,25x^2 + x - 1$ $f(x) = -0,25(x - 2)^2$
$\Delta < 0$	 $f(x) = 0,25x^2 - x + 2$ $f(x) = 0,25(x - 2)^2 + 1$	 $f(x) = -0,25x^2 + x - 2$ $f(x) = -0,25(x - 2)^2 - 1$



Étudier une fonction polynôme de degré deux

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 6x - 1$.

1. Déterminer la forme canonique de f .
2. Étudier les variations de f . Dresser le tableau de variations de f .

Solution commentée

Savoir-faire

- On détermine la forme canonique du trinôme en utilisant la formule

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \gamma.$$

- On utilise ensuite la propriété « si $a > 0$, alors f est décroissante sur $\left] -\infty; -\frac{b}{2a} \right]$ et croissante sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty \right]$ » pour étudier les variations de f .

1. Les coefficients du trinôme sont $a = 2$; $b = 6$ et $c = -1$.

On a $\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{4} = -1,5$ et $f(-1,5) = 2 \times (-1,5)^2 + 6 \times (-1,5) - 1 = -5,5$.

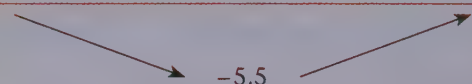
On en déduit la forme canonique $f(x) = 2(x + 1,5)^2 - 5,5$.

2. $a = 2$; $a > 0$.

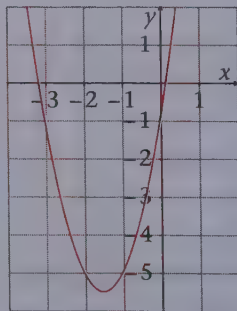
Donc f est décroissante sur $]-\infty; -1,5]$ et croissante sur $[-1,5; +\infty[$.

Le minimum de f est atteint pour $x = -1,5$ et vaut $f(-1,5) = -5,5$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-1,5$	$+\infty$
$f(x)$			

On vérifie en traçant la courbe représentant f sur l'écran d'une calculatrice.



2 Résoudre des équations du second degré

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $5x^2 + 10x = 0$. 2. $4x^2 - 9 = 0$. 3. $2x^2 + 6x - 1 = 0$. 4. $-3x^2 + 4x - 2 = 0$.

Solution commentée

Savoir-faire

- On sait résoudre les deux premières équations sans calculer le discriminant, les factorisations étant immédiates.
- Pour les deux autres, on calcule le discriminant et on utilise la propriété du cours.

1. $5x^2 + 10x = 5x(x + 2)$; $5x(x + 2) = 0$ équivaut à $5x = 0$ ou $x + 2 = 0$; l'équation admet deux solutions 0 et -2.

2. $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$; $(2x + 3)(2x - 3) = 0$ équivaut à $2x + 3 = 0$ ou $2x - 3 = 0$; l'équation admet deux solutions -1,5 et 1,5.

3. $a = 2$; $b = 6$ et $c = -1$. On calcule le discriminant : $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times (-1)$; $\Delta = 44$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{44}}{4} = \frac{-6 - 2\sqrt{11}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{11}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{44}}{4} = \frac{-6 + 2\sqrt{11}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{11}}{2}$$

Les solutions de l'équation sont $\frac{-3 - \sqrt{11}}{2}$ et $\frac{-3 + \sqrt{11}}{2}$.

4. $a = -3$; $b = 4$ et $c = -2$. On calcule le discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-3) \times (-2)$; $\Delta = -8$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

ATTENTION

Veillez à mémoriser et à écrire correctement les formules $\Delta = b^2 - 4ac$;

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

3 Résoudre des inéquations du second degré

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $-2x^2 - x \leq 0$. 2. $0,5x^2 - 2x + 2 > 0$. 3. $x^2 - 6x + 5 < 0$. 4. $-2x^2 + 10x - 8 \geq 0$.

Solution commentée

Savoir-faire

Pour résoudre des inéquations du second degré, on peut soit factoriser le trinôme et étudier son signe avec un tableau de signes ou la courbe, soit déterminer le signe du trinôme en utilisant le cours après avoir calculé le discriminant.

1. $-2x^2 - x = x(-2x - 1)$. On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-0,5$	0	$+\infty$
Signe de x		-	0	+
Signe de $-2x - 1$	+	0	-	-
Signe de $x(-2x - 1)$	-	0	+	-

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty; -0,5] \cup [0; +\infty[$.

2. $a = 0,5$; $b = -2$ et $c = 2$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (0,5) \times 2 = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation $0,5x^2 - 2x + 2 = 0$ admet une seule solution

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2.$$

Le signe du trinôme est celui de $a = 0,5$, donc ce trinôme est toujours positif.

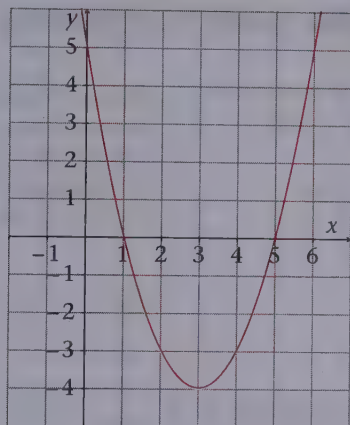
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

3. $a = 1$; $b = -6$ et $c = 5$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} = 5.$$



Comme $a > 0$, la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 5$ est décroissante, puis croissante ; d'après la courbe représentant f , l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]1 ; 5[$.

4. $a = -2$; $b = 10$ et $c = -8$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 10^2 - 4 \times (-2) \times (-8) = 36$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{36}}{2 \times (-2)} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{36}}{2 \times (-2)} = 1.$$

Comme $a < 0$, le signe de $-2x^2 + 10x - 8$ est donné dans le tableau :

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
Signe de $-2x^2 + 10x - 8$	-	0	+	0	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[1 ; 4]$.

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1 On considère le trinôme :

$$4x^2 - 4x - 4.$$

Sa forme canonique est :

- ☐ a. $4(x-1)^2 - 8.$
☐ b. $4(x-0,5)^2 - 5.$
☐ c. $4(x-0,5)^2 - 3.$

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 6x + 7.$$

Cette fonction admet pour extremum :

- ☐ a. 3.
☐ b. 7.
☐ c. 16.

3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 1$$

La fonction f est :

- ☐ a. croissante sur $[-5; 0].$
☐ b. décroissante sur $[-5; 0].$
☐ c. décroissante sur $\mathbb{R}.$

4 Le discriminant de $5x^2 + 8x - 7$ est égal à :

- ☐ a. 204.
☐ b. -76.
☐ c. 76.

5 Le discriminant de $x^2 - 3x$ est égal à :

- ☐ a. 5.
☐ b. -9.
☐ c. 9.

6 Soit l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0.$

Cette équation :

- ☐ a. n'a pas de solution.
☐ b. a une seule solution.
☐ c. a deux solutions.

7 La forme factorisée du trinôme $2x^2 - 4x - 30$ est :

- ☐ a. $2(x+5)(x-3).$
☐ b. $2(x+3)(x-5).$
☐ c. $2x(x-4).$

8 On considère l'équation :

$$0,5x^2 - 8x + 6 = 0.$$

Les solutions exactes de cette équation sont :

- ☐ a. 0,8 et 15,2.
☐ b. $8 - 2\sqrt{13}$ et $8 + 2\sqrt{13}.$
☐ c. $-8 - \sqrt{52}$ et $-8 + \sqrt{52}.$

9 On considère l'inéquation :

$$x^2 - 5x + 4 < 0.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

- ☐ a. $]-\infty; 0[.$
☐ b. $]0; 5[.$
☐ c. $]1; 4[.$

10 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -0,25x^2 + x + 1,25.$$

La fonction f est :

- ☐ a. négative sur $[5; +\infty[.$
☐ b. positive sur $[-2; 0].$
☐ c. décroissante sur $[-1; 0].$

Exercices

Forme canonique

Exercice 1 niveau 1

Corrigés p. 19

On considère le trinôme $x^2 - 6x - 4$.

1. Rappeler le produit remarquable $(a - b)^2$, puis compléter les égalités suivantes.

$$x^2 - 6x + \dots = (\dots - \dots)^2$$

$$x^2 - 6x = (\dots - \dots)^2 - \dots$$

$$x^2 - 6x - 4 = (\dots - \dots)^2 - \dots$$

2. Quelle est la forme canonique du trinôme $x^2 - 6x - 4$?

Vérifier avec les formules données dans le cours.

Exercice 2 niveau 1

Corrigés p. 19

On considère le trinôme $2x^2 + 16x - 5$.

1. Rappeler le produit remarquable $(a + b)^2$, puis compléter les égalités suivantes.

$$2x^2 + 16x - 5 = 2(x^2 + 8x - \dots)$$

$$x^2 + 8x + \dots = (\dots + \dots)^2$$

$$x^2 + 8x = (\dots + \dots)^2 - \dots$$

$$x^2 + 8x - \dots = (\dots + \dots)^2 - \dots$$

$$2x^2 + 16x - 5 = 2[(\dots + \dots)^2 - \dots]$$

2. Quelle est la forme canonique du trinôme $2x^2 + 16x - 5$?

Vérifier avec les formules données dans le cours.

Exercice 3 niveau 1

Corrigés p. 20

On considère les expressions suivantes :

$$A(x) = (x + 3)(2x - 7) \text{ et } B(x) = (x + 5)^2 - (2x - 1)^2.$$

1. Développer $A(x)$ et vérifier que $A(x)$ est un polynôme de degré deux.
Écrire la forme canonique de $A(x)$.

2. Développer (ou factoriser) $B(x)$ et vérifier que $B(x)$ est un polynôme de degré deux.

Écrire la forme canonique de $B(x)$.

Étude de fonctions

Exercice 4 niveau 1

► Corrigés p. 20

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 9x$.

1. Déterminer la forme canonique de f .
2. Étudier les variations de f . Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 5 niveau 1

► Corrigés p. 20

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 5$.

1. Déterminer la forme canonique de f .
2. Étudier les variations de f . Dresser le tableau de variations de f .

Résolution d'équations et d'inéquations

Exercice 6 niveau 1

► Corrigés p. 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $3x^2 + 2 = 0$.
2. $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Exercice 7 niveau 1

► Corrigés p. 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $2x^2 - x + 1 = 0$.
2. $-2x^2 + 5x - 4 = 0$.

Exercice 8 niveau 1

► Corrigés p. 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2 + x = -6x - 10$.
2. $x^2 = 2x - 1$.

Exercice 9 niveau 1

► Corrigés p. 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $0,5x^2 + 1 = x^2 - x$.
2. $(x - 3)(x + 2) = 2x + 4$.

Exercice 10 niveau 2

► Corrigés p. 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $x^2 + 3x + 2 \leq 0$.
2. $-x^2 + 5x - 7 < 0$.

Exercice 11

niveau 2

Corrigés p. 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $x^2 - 6x - 7 \geq 0$.

2. $-3x^2 + 12x \geq 0$.

Exercice 12

niveau 2

Corrigés p. 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $x^2 \leq x - 1$.

2. $0,25x^2 > 2x + 5$.

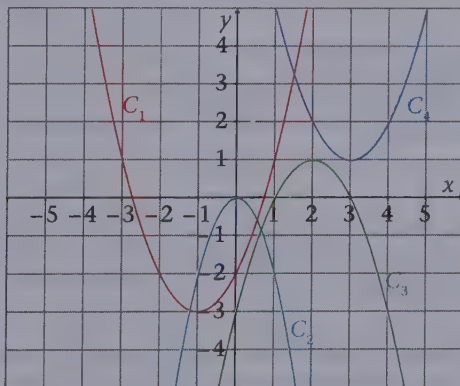
3. $x^2 + x < 1$.

Problèmes**Exercice 13**

niveau 1

Corrigés p. 24

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé les courbes C_1 , C_2 , C_3 , C_4 représentant quatre fonctions de degré deux.



Déterminer les équations de ces quatre courbes.

Exercice 14

niveau 2

Corrigés p. 24

On considère les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - 1 ; g(x) = 3x + 4 \text{ et } h(x) = (2x - 1)(3x + 4).$$

- Donner la nature des trois fonctions f , g et h .
- Étudier le sens de variation de f , g et h .
- Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante » ?

Exercice 15

niveau 2

Corrigés p. 25

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 8x \text{ et } g(x) = x + 6.$$

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Tracer dans un même repère la courbe C représentant f et la droite D représentant g .
3. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C et de la droite D .
4. Résoudre graphiquement et par le calcul l'inéquation $f(x) > g(x)$.

Exercice 16

niveau 2

Corrigés p. 25

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3 \text{ et } g(x) = 2x^2 - 4x - 3.$$

1. Tracer dans un même repère les courbes C et C' représentant f et g .
2. Déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes C et C' .
3. Résoudre graphiquement et par le calcul l'inéquation $f(x) > g(x)$.

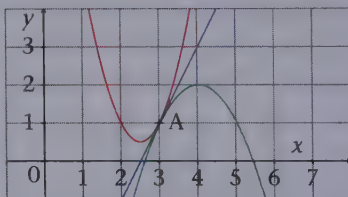
Exercice 17

niveau 3

Corrigés p. 26

Jérôme s'amuse avec un logiciel traceur de courbes.

Après avoir tracé les paraboles d'équations $y = 2x^2$ et $y = -x^2$, il les a déplacées dans le repère et a obtenu la situation représentée sur la figure (sans la droite).



Les deux courbes lui semblant alors « tangentes » au point A(3; 1). Il a eu une nouvelle idée : en faisant tourner une droite autour de ce point A, il a obtenu la droite entre les deux courbes.

Le logiciel lui donne les équations suivantes :

$$y = 2x^2 - 10x + 13 ; y = -x^2 + 8x - 14 \text{ et } y = 2x - 5.$$

Démontrer que le point A est le seul point commun aux deux courbes et que la droite coupe chacune des paraboles une seule fois en A.

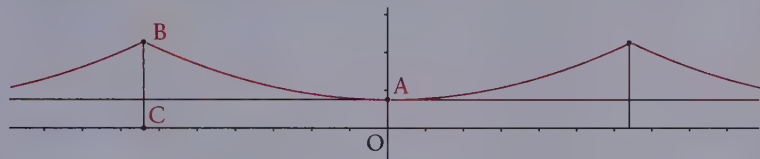
Exercice 18

niveau 3

Corrigés p. 26

Claire est en voyage en Californie et se trouve dans un petit canot au pied d'un pilier du Golden Gate Bridge. Elle se demande quelle est la hauteur du pilier.

La situation est schématisée dans le dessin ci-dessous où Claire se trouve au point C. L'axe des abscisses correspond au niveau de l'eau et le repère est orthonormé.



Claire dispose des données numériques suivantes : la longueur du tablier entre les deux piliers est de 1 280 m et $OA = 75,5$ m.

Un ami situé en A observe que s'il se déplace de 52 m vers la gauche ou vers la droite, le câble supérieur ne se trouve qu'un mètre plus haut qu'en A, c'est-à-dire à 76,5 m.

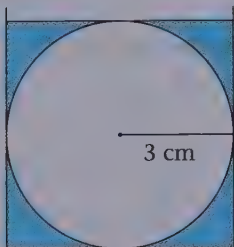
1. Sachant que la courbe décrite par le câble supérieur est une parabole, déterminer son équation.
2. En déduire la hauteur du pilier du pont au mètre près.

Exercice 19

niveau 3

Corrigés p. 27

Une sphère de rayon 3 cm est placée dans un cylindre de rayon 3 cm. L'espace vide est rempli d'eau de manière à ce que le liquide recouvre exactement la sphère, comme dans le dessin ci-contre.



Rémus pense que si on change le rayon de la sphère, le liquide ne la recouvrira plus exactement. Son frère Romulus est persuadé qu'il peut en être autrement.

1. Calculer le volume d'eau V_{eau} utilisé dans le problème.
2. Supposons que Romulus a raison et notons R un rayon pour lequel la sphère est exactement recouverte.

Montrer alors que $\frac{4}{3}R^3 - 18R + 18 = 0$.

3. Vérifier que $R = 3$ est bien une solution de l'équation précédente.
4. Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\frac{4}{3}R^3 - 18R + 18 = (R - 3)(aR^2 + bR + c).$$

5. Montrer finalement que Romulus a raison et déterminer toutes les valeurs exactes solutions du problème.

Exercice 20

niveau 3

Corrigés p. 28

Compléter l'algorithme suivant.

Début algorithme

Demander a Demander b Demander c x_0 prend la valeur ... extremum prend la valeur $a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c$ Si $a > 0$ alors

Afficher : « Le ... de votre fonction polynôme est : »

Afficher la variable : ...

Afficher : « et est atteint en : »

Afficher la variable : ...

Sinon

Afficher : « Le ... de votre fonction polynôme est : »

Afficher la variable : ...

Afficher : « et est atteint en : »

Afficher la variable : ...

Fin Si

Fin de l'algorithme

Exercice 21

niveau 3

Corrigés p. 28

Lors d'une expérience, on lance un projectile à côté de la basilique de Saint-Quentin (02).

L'altitude (en mètres) du projectile lancé à partir du sol est donnée à l'instant t (en secondes) par la formule $h(t) = -5t^2 + 51t$.

1. À quel instant le projectile retombe-t-il au sol ?

2. Quelle est la hauteur maximale du projectile ?

À quel instant est-elle atteinte ?

3. Sachant que la hauteur de la basilique est de 82 mètres, déterminer la période pendant laquelle le projectile est plus haut que l'édifice.

Exercice 22

niveau 3

Corrigés p. 28

On considère le cercle C de centre $A(5 ; 1)$ et de rayon 5.

1. Montrer que les coordonnées de tout point $M(x ; y)$ de C vérifient :

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + 1 = 0.$$

2. Montrer que la droite d_1 d'équation $y = 0,25x + 5$ ne coupe pas C .

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C et de la droite d_2 d'équation $y = 0,5x + 3$.

4. Montrer que la droite d_3 d'équation $y = -0,75x - 1,5$ est tangente à C .

QCM

- 1 b. $4(x - 0,5)^2 - 5 = 4(x^2 - x + 0,25) - 5 = 4x^2 - 4x - 4.$
- 2 c. $\frac{-b}{2a} = 3$; $f(3) = 16.$
- 3 a. $\frac{-b}{2a} = 0$; $a = -1 < 0$; f est croissante sur $]-\infty ; 0]$, donc sur $[-5 ; 0].$
- 4 a. $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times 5 \times (-7) = 204.$
- 5 c. $c = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times 0 = 9.$
- 6 c. $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0.$
- 7 b. $\Delta = 256 > 0$; $x_1 = -3$ et $x_2 = 5$; $2x^2 - 4x - 30 = 2(x+3)(x-5).$
- 8 b. $\Delta = 52 = 4 \times 13 > 0$; $b = -8$, donc $-b = 8.$
- 9 c. $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$; $a = 1 > 0.$
- 10 a. $\frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2 \times -0,25} = 2$; $a = -0,25 < 0$. f est croissante sur $]-\infty ; 2]$, donc sur $[-1 ; 0]$; on élimine c. $f(-2) = -1,75 < 0$; on élimine b.

Exercice 1

1. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$
 $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$; $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$; $x^2 - 6x - 4 = (x-3)^2 - 13.$
2. La forme canonique du trinôme $x^2 - 6x - 4$ est $(x-3)^2 - 13.$
 On utilise la formule $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \gamma$, avec $\gamma = f\left(\frac{-b}{2a}\right).$
 $a = 1$, $b = -6$ et $c = -4$; d'où $\frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ et $f(3) = 9 - 18 - 4 = -13.$

Exercice 2

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$
 $2x^2 + 16x - 5 = 2(x^2 + 8x - 2,5)$
 $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$
 $x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16$
 $x^2 + 8x - 2,5 = (x+4)^2 - 18,5$
 $2x^2 + 16x - 5 = 2[(x+4)^2 - 18,5]$
2. La forme canonique du trinôme $2x^2 + 16x - 5$ est $2(x+4)^2 - 37.$
 On utilise la formule $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \gamma$, avec $\gamma = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$
 $a = 2$, $b = 16$ et $c = -5$; d'où $\frac{-b}{2a} = \frac{-16}{4} = -4$ et $f(-4) = 32 - 64 - 5 = -37.$

Exercice 3

1. $A(x) = (x+3)(2x-7) = 2x^2 - 7x + 6x - 21 = 2x^2 - x - 21$.

$a = 2, b = -1, c = -21$; $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{4} = 0,25$; $A(0,25) = 3,25 \times (-6,5) = -21,125$.

La forme canonique est $A(x) = 2(x - 0,25)^2 - 21,125$.

2. En développant :

$B(x) = (x+5)^2 - (2x-1)^2 = x^2 + 10x + 25 - (4x^2 - 4x + 1) = -3x^2 + 14x + 24$.

En factorisant :

$B(x) = (x+5)^2 - (2x-1)^2 = [(x+5) + (2x-1)][(x+5) - (2x-1)]$
 $= (3x+4)(-x+6)$;

on développe : $B(x) = -3x^2 + 18x - 4x + 24 = -3x^2 + 14x + 24$.

$a = -3, b = 14, c = 24$; $\frac{-b}{2a} = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3}$;

$B\left(\frac{7}{3}\right) = -3 \times \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 14 \times \frac{7}{3} + 24 = -\frac{49}{3} + \frac{98}{3} + 24 = \frac{121}{3}$.

La forme canonique est $B(x) = -3\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{121}{3}$.

Exercice 4

1. Soit $f(x) = x^2 + 9x$; $a = 1, b = 9$,

$c = 0$; $\frac{-b}{2a} = \frac{-9}{2} = -4,5$;

$f(-4,5) = -20,25$.

La forme canonique est :

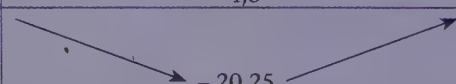
$f(x) = (x + 4,5)^2 - 20,25$.

2. $a = 1$; $a > 0$.

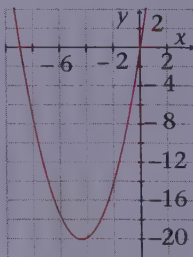
Donc f est décroissante sur $]-\infty; -4,5]$ et croissante sur $[-4,5; +\infty[$.

Le minimum de f est atteint pour $x = -4,5$ et vaut $f(-4,5) = -20,25$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-4,5$	$+\infty$
$f(x)$			

On vérifie en traçant la courbe représentant f sur l'écran d'une calculatrice.



Exercice 5

1. Soit $f(x) = -x^2 + 3x - 5$; $a = -1, b = 3, c = -5$; $\frac{-b}{2a} = \frac{-3}{-2} = 1,5$;

$f(1,5) = -2,75$.

La forme canonique est $f(x) = -(x - 1,5)^2 - 2,75$.

2. $a = -1$; $a < 0$.

Donc f est croissante sur $]-\infty ; 1,5]$ et décroissante sur $[1,5 ; +\infty[$.

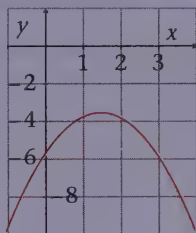
Le maximum de f est atteint pour $x = 1,5$ et vaut $f(1,5) = -2,75$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	$1,5$	$+\infty$
$f(x)$		$-2,75$	

Diagramme du tableau de variations : une flèche monte de $-\infty$ à $1,5$ et une flèche descend de $1,5$ à $+\infty$.

On vérifie en traçant la courbe représentant f sur l'écran d'une calculatrice.



À NOTER

On utilise la propriété « si $a < 0$, alors f est croissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$ et décroissante sur $]-\frac{b}{2a} ; +\infty[$ ».

Exercice 6

1. Pour tout réel x , $3x^2 + 2 > 0$; donc l'équation $3x^2 + 2 = 0$ n'a pas de solution.

2. $x^2 - 7x + 12 = 0$; $a = 1$, $b = -7$, $c = 12$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12$; $\Delta = 1$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{2} = 3$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Les solutions de l'équation sont 3 et 4.

ATTENTION

Veillez à mémoriser et à écrire correctement les formules : $\Delta = b^2 - 4ac$;

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exercice 7

1. $2x^2 - x + 1 = 0$; $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1$$
 ; $\Delta = -7$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

2. $-2x^2 + 5x - 4 = 0$; $a = -2$, $b = 5$, $c = -4$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-4)$$
 ; $\Delta = -7$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

Exercice 8

1. $x^2 + x = -6x - 10$ équivaut à $x^2 + 7x + 10 = 0$.

$$a = 1, b = 7, c = 10.$$

On calcule le discriminant : $\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 10$; $\Delta = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - 3}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + 3}{2} = -2.$$

Les solutions de l'équation sont -5 et -2 .

2. $x^2 = 2x - 1$ équivaut à $x^2 - 2x + 1 = 0$.

On reconnaît un produit remarquable : $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

L'équation a une seule solution : 1 .

Exercice 9

1. $0,5x^2 + 1 = x^2 - x$ équivaut à $0,5x^2 - x - 1 = 0$.

$a = 0,5$, $b = -1$, $c = -1$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0,5 \times (-1)$; $\Delta = 3$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 \times 0,5} = 1 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2 \times 0,5} = 1 + \sqrt{3}.$$

Les solutions de l'équation sont $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.

2. $(x - 3)(x + 2) = 2x + 4$ équivaut à $(x - 3)(x + 2) - 2(x + 2) = 0$;

on factorise : $(x + 2)[(x - 3) - 2] = 0$; $(x + 2)(x - 5) = 0$.

Les solutions de l'équation sont -2 et 5 .

Exercice 10

1. $x^2 + 3x + 2 \leq 0$; $a = 1$, $b = 3$ et $c = 2$.

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$ admet

$$\text{deux solutions : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 1}{2} = -1.$$

On en déduit la factorisation $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$.

Comme $a > 0$, le signe de $x^2 + 3x + 2$ est donné dans le tableau :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$		
Signe de $x^2 + 3x + 2$		+	0	-	0	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-2 ; -1]$.

2. $-x^2 + 5x - 7 < 0$; $a = -1$, $b = 5$

et $c = -7$.

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = -3.$$

RAPPEL

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Si $\Delta > 0$, alors la forme factorisée de f est :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

ATTENTION

Si $\Delta < 0$, alors on ne peut pas factoriser $ax^2 + bx + c$; le polynôme garde toujours le même signe, celui de a .

Comme $\Delta < 0$ et $a < 0$, le polynôme est strictement négatif pour tout réel x .
Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}$.

Exercice 11

1. $x^2 - 6x - 7 \geq 0$; $a = 1$, $b = -6$ et $c = -7$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (1) \times (-7) = 64$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation $x^2 - 6x - 7 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-8}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+8}{2} = 7.$$

On en déduit la factorisation $x^2 - 6x - 7 = (x+1)(x-7)$.

Comme $a > 0$, le signe de $x^2 - 6x - 7$ est donné dans le tableau :

x	$-\infty$	-1	7	$+\infty$	
Signe de $x^2 - 6x - 7$	+	0	-	0	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty ; -1] \cup [7 ; +\infty[$.

2. $-3x^2 + 12x \geq 0$; on factorise : $-3x^2 + 12x = 3x(-x+4)$.

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
Signe de x	$-$	0	$+$	$+$	
Signe de $-x + 4$	$+$	$+$	0	$-$	
Signe de $3x(-x + 4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[0 ; 4]$.

Exercice 12

1. $x^2 \leq x - 1$ équivaut à $x^2 - x + 1 \leq 0$; $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3.$$

Comme $\Delta < 0$ et $a > 0$, le polynôme $x^2 - x + 1$ est strictement positif pour tout réel x .

Donc l'inéquation n'a pas de solution.

2. $0,25x^2 > 2x + 5$ équivaut à $0,25x^2 - 2x - 5 > 0$; $a = 0,25$, $b = -2$ et $c = -5$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 0,25 \times (-5) = 9.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $0,25x^2 - 2x - 5 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-3}{0,5} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+3}{0,5} = 10.$$

Comme $a > 0$, le signe de $0,25x^2 - 2x - 5$ est donné dans le tableau :

x	$-\infty$	-2	10	$+\infty$	
Signe de $0,25x^2 - 2x - 5$	+	0	-	0	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty; -2[\cup]10; +\infty[$.

3. $x^2 + x < 1$ équivaut à $x^2 + x - 1 < 0$; $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Comme $a > 0$, le signe de $x^2 + x - 1$ est donné dans le tableau :

x	$-\infty$	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
Signe de $x^2 + x - 1$		+	-	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\left] \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right[.$$

Exercice 13

$$f_1(x) = (x+1)^2 - 3 = x^2 + 2x - 2; f_2(x) = -2x^2;$$

$$f_3(x) = -(x-2)^2 + 1 = -x^2 + 4x - 3; f_4(x) = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10.$$

Exercice 14

1. Les fonctions f et g sont des fonctions affines.

On développe $h(x)$ et on obtient $h(x) = 6x^2 + 5x - 4$; donc h est une fonction polynôme de degré deux avec $a = 6$, $b = 5$ et $c = -4$.

2. Le coefficient directeur 2 de la fonction affine f est positif, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. De même, le coefficient directeur 3 de g est positif, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

On écrit la forme canonique de h : $\frac{-b}{2a} = \frac{-5}{12}$;

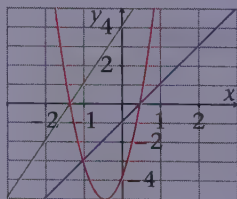
$$h\left(\frac{-5}{12}\right) = 6 \times \left(\frac{-5}{12}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{-5}{12}\right) - 4 = -\frac{121}{24}.$$

La forme canonique est $h(x) = 6\left(x + \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{121}{24}$.

Donc h est décroissante sur $]-\infty; -\frac{5}{12}]$ et croissante sur $[-\frac{5}{12}; +\infty[$.

3. L'affirmation « le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante » est fausse. On prend comme contre-exemples les fonctions f et g précédentes : ces deux fonctions sont croissantes, mais

la fonction h qui donne leur produit est décroissante sur $]-\infty; -\frac{5}{12}]$.

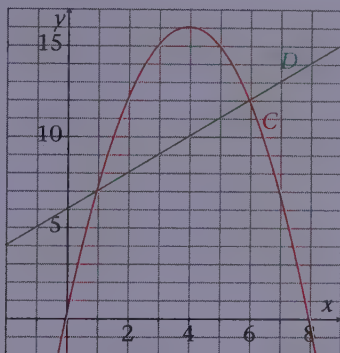


Exercice 15

1. La forme canonique de f est $f(x) = -(x - 4)^2 + 16$.

Comme le coefficient a est négatif ($a = -1$), la fonction f est croissante sur $]-\infty ; 4]$ et décroissante sur $[4 ; +\infty[$. Le maximum de f est atteint pour $x = 4$ et vaut $f(4) = 16$.

2.



3. Graphiquement, les abscisses des points d'intersection de la courbe C et de la droite D sont 1 et 6.

Par le calcul, on résout l'équation :

$$-x^2 + 8x = x + 6.$$

$$-x^2 + 8x = x + 5 \text{ équivaut à } 0 = x^2 - 7x + 6.$$

Les solutions 1 et 6 de l'équation $0 = x^2 - 7x + 6$ sont donc « évidentes ».

4. Graphiquement, la courbe C est au-dessus de la droite D sur l'intervalle $]1 ; 6[$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $]1 ; 6[$.

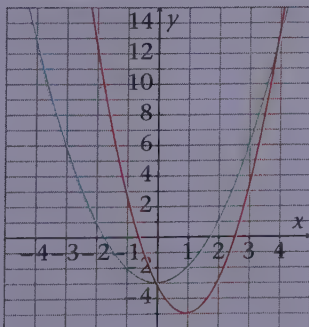
Par le calcul, $-x^2 + 8x > x + 6$ équivaut à $0 > x^2 - 7x + 6$, soit encore $(x - 1)(x - 6) < 0$.

CONSEIL

Vous pouvez observer que $(x - 1)(x - 6) = x^2 - 7x + 6$.

Exercice 16

1.



2. Pour déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes C et C' , on résout l'équation :

$$x^2 - 3 = 2x^2 - 4x - 3$$

$$-x^2 + 4x = 0$$

$$x(-x + 4) = 0$$

Cette équation admet deux solutions : 0 et 4.

Donc les deux courbes ont deux points communs de coordonnées (0 ; -3) et (4 ; 13).

3. Graphiquement, la courbe C est au-dessus de la courbe C' sur $]0 ; 4[$; donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est $]0 ; 4[$.

On résout $x^2 - 3 > 2x^2 - 4x - 3$;

$$x(-x + 4) > 0.$$

On retrouve le tableau de signes de l'exercice 11.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]0 ; 4[$.

Exercice 17

$$2x^2 - 10x + 13 = -x^2 + 8x - 14 \text{ équivaut à } 3x^2 - 18x + 27 = 0 ;$$

$$3(x^2 - 6x + 9) = 0 ; 3(x - 3)^2 = 0.$$

Cette équation a pour unique solution le nombre 3.

$$2x^2 - 10x + 13 = 2x - 5 \text{ équivaut à } 2x^2 - 12x + 18 = 0 ; 2(x^2 - 6x + 9) = 0 ;$$

$$2(x - 3)^2 = 0.$$

Cette équation a pour unique solution le nombre 3.

$$-x^2 + 8x - 14 = 2x - 5 \text{ équivaut à } -x^2 + 6x - 9 = 0 ; -(x^2 - 6x + 9) = 0 ;$$

$$-(x - 3)^2 = 0.$$

Cette équation a pour unique solution le nombre 3.

Le point A est donc bien le seul point commun aux deux courbes et à la droite.

Exercice 18

1. L'équation de la courbe est de la forme $y = P(x)$ avec $P(x) = ax^2 + bx + c$. Comme elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on en déduit que $b = 0$. Les données numériques donnent :

$$\begin{cases} a \times 0^2 + c = 75,5 \\ a \times 52^2 + c = 76,5 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve $c = 75,5$ et $a = \frac{1}{52^2} = \frac{1}{2704}$.

L'équation de la courbe est donc $y = \frac{x^2}{2704} + 75,5$.

2. La longueur du tablier est de 1 280 m, donc la hauteur du pilier est de :

$$P\left(\frac{1\,280}{2}\right) = P(640) = \frac{640^2}{2704} + 75,5 \approx 227 \text{ m.}$$

Exercice 19

1. Le volume d'eau est égal au volume du cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 6 cm auquel on soustrait le volume de la sphère de rayon 3 cm.

$$\text{On a donc } V_{\text{eau}} = \pi \times 3^2 \times 6 - \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 18\pi.$$

2. Si la sphère est exactement recouverte, la somme du volume de cette sphère et de V_{eau} est égale au volume du cylindre de rayon 3 cm et de hauteur $2R$. On a donc :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 + 18\pi = \pi \times 3^2 \times 2R \Leftrightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 + 18\pi = 18\pi R$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} R^3 - 18R + 18 = 0$$

3. $\frac{4}{3} \times 3^3 - 18 \times 3 + 18 = 36 - 54 + 18 = 0$, donc 3 est bien une solution de l'équation.

4. $(R-3)(aR^2 + bR + c) = aR^3 + (b-3a)R^2 + (c-3b)R - 3c$, donc, par identification, on a :

$$\begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b - 3a = 0 \\ c - 3b = -18 \\ -3c = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 4 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\text{D'où finalement, } \frac{4}{3} R^3 - 18R + 18 = (R-3) \left(\frac{4}{3} R^2 + 4R - 6 \right).$$

$$5. \frac{4}{3} R^3 - 18R + 18 = 0 \Leftrightarrow (R-3) \left(\frac{4}{3} R^2 + 4R - 6 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow R-3=0 \quad \text{ou} \quad \frac{4}{3} R^2 + 4R - 6 = 0$$

Résolvons l'équation. Calculons le discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times \frac{4}{3} \times (-6) = 48$.

Le discriminant est positif donc l'équation admet deux solutions :

$$R_1 = \frac{-4 + \sqrt{48}}{2 \times \frac{4}{3}} = \frac{3}{2} (-1 + \sqrt{3}) \approx 1,098$$

$$\text{et } R_2 = \frac{-4 - \sqrt{48}}{2 \times \frac{4}{3}} = \frac{3}{2} (-1 - \sqrt{3}) \approx -4,098.$$

Romulus a donc bien raison. La sphère est exactement recouverte si elle a un rayon de 3 cm ou de $\frac{3}{2}(-1 + \sqrt{3})$ cm.

Exercice 20

Dans l'ordre : $-b/(2a)$; *minimum* ; *extremum* ; x_0 ; *maximum* ; *extremum* ; x_0 .

Exercice 21

1. Si le projectile est au sol, c'est que $h(t) = 0$. Résolvons cette équation :

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 51t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(-5t + 51) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \quad \text{ou} \quad -5t + 51 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{-51}{-5} = 10,2$$

La première solution correspond au point de départ du projectile.
Le projectile retombe donc sur le sol au bout de 10,2 secondes.

2. Le maximum de h est atteint en $\frac{-51}{2 \times (-5)}$ et vaut $h(5,1) = 130,05$.

La hauteur maximale du projectile est de 130,05 mètres. Cette hauteur est atteinte au bout de 5,1 secondes.

3. Résolvons l'inéquation $h(t) \geq 82$.

$$h(t) \geq 82 \Leftrightarrow -5t^2 + 51t \geq 82$$

$$\Leftrightarrow -5t^2 + 51t - 82 \geq 0.$$

Calculons le discriminant : $\Delta = 51^2 - 4 \times (-5) \times (-82) = 961$.

Le discriminant est positif.

Les solutions de l'équation $-5t^2 + 51t - 82 = 0$ sont donc :

$$t_1 = \frac{-51 + \sqrt{961}}{2 \times (-5)} = 2 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-51 - \sqrt{961}}{2 \times (-5)} = 8,2.$$

Comme le coefficient devant t^2 est négatif, on en déduit que le projectile est au-dessus de la basilique entre 2 et 8,2 secondes après le lancement.

Exercice 22

1. $AM^2 = 5^2 = 25$, donc $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = 25$.

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 - 2y + 1 = 0$$

2. Il suffit de résoudre l'équation :

$$x^2 - 10x + (0,25x + 5)^2 - 2(0,25x + 5) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 0,0625x^2 + 2,5x + 25 - 0,5x - 10 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1,0625x^2 - 8x + 16 = 0$$

Calculons le discriminant : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1,0625 \times 16 = -4$.

Le discriminant est négatif, donc il n'y a pas de solution.

C et d_1 n'ont donc pas de point d'intersection.

3. Il suffit de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + (0,5x + 3)^2 - 2(0,5x + 3) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 0,25x^2 + 3x + 9 - x - 6 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1,25x^2 - 8x + 4 &= 0\end{aligned}$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1,25 \times 4 = 44.$$

Le discriminant est positif, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{8 - 2\sqrt{11}}{2,5} = 3,2 - 0,8\sqrt{11} \text{ et } x_2 = \frac{8 + 2\sqrt{11}}{2,5} = 3,2 + 0,8\sqrt{11}.$$

$$\text{On a alors } y_1 = 0,5(3,2 - 0,8\sqrt{11}) + 3 = 4,6 - 0,4\sqrt{11}$$

$$\text{et } y_2 = 0,5(3,2 + 0,8\sqrt{11}) + 3 = 4,6 + 0,4\sqrt{11}.$$

Les coordonnées des deux points d'intersection sont donc :

$$(3,2 - 0,8\sqrt{11}; 4,6 - 0,4\sqrt{11}) \text{ et } (3,2 + 0,8\sqrt{11}; 4,6 + 0,4\sqrt{11}).$$

4. Il suffit de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + (-0,75x - 1,5)^2 - 2(-0,75x - 1,5) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 0,5625x^2 + 2,25x + 2,25 + 1,5x + 3 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1,5625x^2 - 6,25x + 6,25 &= 0\end{aligned}$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-6,25)^2 - 4 \times 1,5625 \times 6,25 = 0.$$

Le discriminant est nul, donc il y a une seule solution.

Le cercle C et la droite d_3 n'ont donc qu'un seul point d'intersection.

La droite d_3 est donc tangente à C .

1 Rappel : calcul avec des fractions

Soit a, b, c et d des nombres fixés, avec b, c et d non nuls.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
---	--	--	---------------------------------------	--

2 Étude des fonctions homographiques

a. Fonction inverse

■ La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}$ privé de 0) par :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

■ Si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; si $a < b < 0$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

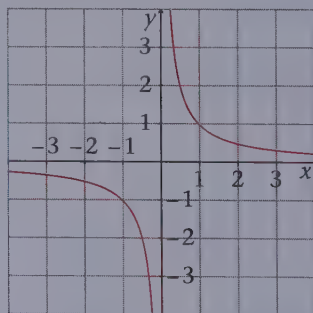
■ La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de $f(x)$			

■ La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole**.

L'origine O du repère est centre de symétrie.



b. Fonctions homographiques

■ Une fonction homographique est une fonction f qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

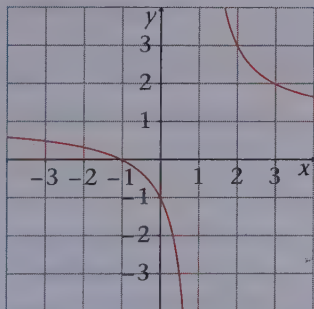
où a, b, c, d sont des réels fixés, avec c non nul.

Le dénominateur $cx + d$ s'annulant pour la valeur $-\frac{d}{c}$, cette fonction f est définie sur $]-\infty; -\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c}; +\infty[$.

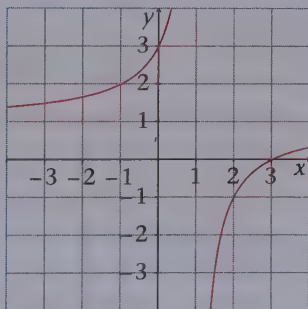
■ On peut toujours écrire cette fonction f sous la **forme réduite** $\alpha + \frac{\beta}{x + \gamma}$, où α, β, γ sont des nombres réels ; la fonction f est définie sur $]-\infty; -\gamma[\cup]-\gamma; +\infty[$.

Exemples :

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$$



$$f(x) = 1 - \frac{2}{x-1}$$



3 Sens de variation de $u + k$, λu et $\frac{1}{u}$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I .

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note C_u la courbe représentant u .

a. Fonction $u + k$

■ La fonction notée $u + k$ est la fonction définie sur I par $(u + k)(x) = u(x) + k$.

■ Les fonctions u et $u + k$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I .

La courbe C_{u+k} est l'image de la courbe C_u par la translation de vecteur $k \cdot \vec{j}$.

b. Fonction λu

■ La fonction notée λu est la fonction définie sur I par $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$.

■ Si $\lambda > 0$, alors les fonctions u et λu ont le même sens de variation sur l'intervalle I .

■ Si $\lambda < 0$, alors les fonctions u et λu ont des sens de variation contraires sur l'intervalle I .

■ Dans un repère, si M est le point d'abscisse x de la courbe C_u , on obtient le point M d'abscisse x de la courbe $C_{\frac{1}{u}}$ en multipliant l'ordonnée de M par λ .

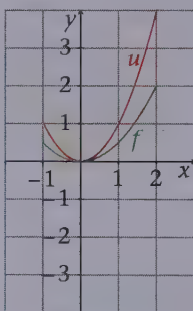
c. Fonction $\frac{1}{u}$

■ Si la fonction u ne s'annule pas sur l'intervalle I , la fonction notée $\frac{1}{u}$ est la fonction définie par $\frac{1}{u}(x) = \frac{1}{u(x)}$.

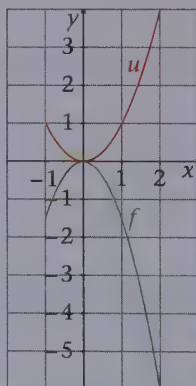
■ Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires.

Exemples :

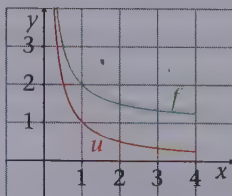
$$I = [-1 ; 2], u(x) = x^2, f(x) = 0,5u(x)$$



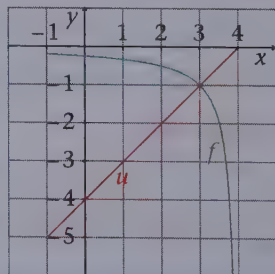
$$I = [-1 ; 2], u(x) = x^2, f(x) = -1,5u(x)$$



$$I =]0 ; 4], u(x) = \frac{1}{x}, f(x) = u(x) + 1$$



$$I = [-1 ; 4], u(x) = x - 4, f(x) = \frac{1}{u(x)}$$



1 Calculer avec des fractions

Énoncé

1. Mettre au même dénominateur l'expression $E(x) = \frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+1}$.
2. Simplifier la fraction $F(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}$.

Solution commentée

Savoir-faire

- Pour mettre au même dénominateur, on utilise la formule $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.
- Pour traiter la seconde question, il est nécessaire de mémoriser et d'écrire correctement les formules $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

1. L'expression $E(x)$ est définie si $x \neq 3$ et $x \neq -1$; $E(x)$ est la différence de deux fractions.

$$E(x) = \frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+1} = \frac{x(x+1) - 5(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x^2 + x - 5x + 15}{(x-3)(x+1)}$$

$$E(x) = \frac{x^2 - 4x + 15}{(x-3)(x+1)}$$

2. ■ L'expression $F(x)$ est définie si son dénominateur $x^2 - 2x - 3$ est non nul. $x^2 - 2x - 3$ est un trinôme du second degré ; $a = 1$; $b = -2$ et $c = -3$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)$; $\Delta = 16$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ si, et seulement si, $x = -1$ ou $x = 3$;

donc $x^2 - 2x - 3 \neq 0$ si, et seulement si, $x \neq -1$ et $x \neq 3$.

L'ensemble de définition de la fraction $F(x)$ est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 3\}$.

■ On en déduit aussi la forme factorisée du dénominateur :

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3).$$

■ Pour simplifier $F(x)$, on cherche ensuite à factoriser son numérateur.

$x^2 - x - 6$ est un trinôme du second degré ; $a = 1$, $b = -1$ et $c = -6$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)$; $\Delta = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3.$$

On en déduit la factorisation $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$.

Une nouvelle écriture de $F(x)$ est alors $F(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+1)(x-3)}$.

Pour $x \neq -1$ et $x \neq 3$, on obtient $F(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

RAPPEL

Si $b \neq 0$ et $k \neq 0$, $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$.

2 Étudier une fonction homographique

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $] -7 ; 3]$ par $f(x) = \frac{3x-9}{x+7}$.

1. Vérifier que la forme réduite de f est $f(x) = 3 - \frac{30}{x+7}$.

2. Soit a et b deux réels de $] -7 ; 3]$. Sachant que $a < b$, comparer $f(a)$ et $f(b)$. En déduire le sens de variation de f sur $] -7 ; 3]$ et dresser le tableau de variations de f .

Solution commentée

Savoir-faire

- Pour répondre à la première question, on peut partir de la forme réduite de f proposée et ramener l'ensemble des termes au même dénominateur.
- Dans la seconde question, pour comparer $f(a)$ et $f(b)$, on manipule des inégalités en partant de l'hypothèse $-7 < a < b$.

$$1. \text{ Pour tout réel } x \text{ de }] -7 ; 3], \quad 3 - \frac{30}{x+7} = \frac{3(x+7) - 30}{x+7} = \frac{3x + 21 - 30}{x+7} = \frac{3x - 9}{x+7}.$$

$$\text{Donc, pour tout réel } x \text{ de }] -7 ; 3], \quad f(x) = 3 - \frac{30}{x+7}.$$

2. On a successivement :

$$-7 < a < b$$

$$0 < a+7 < b+7$$

$$\frac{1}{a+7} > \frac{1}{b+7}, \text{ car la fonction inverse est décroissante sur }]0 ; +\infty[.$$

$$\frac{-1}{a+7} < \frac{-1}{b+7}, \text{ car on change le sens de l'inégalité en multipliant les deux membres par } -1.$$

$3 - \frac{1}{a+7} < 3 - \frac{1}{b+7}$, en ajoutant 3 dans les deux membres.

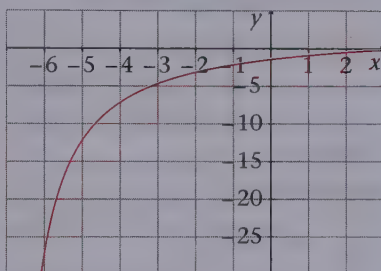
On a ainsi prouvé que si $-7 < a < b$, alors $f(a) < f(b)$.

Cela signifie que la fonction f est croissante sur $]-7; 3]$.

On dresse le tableau de variations :

x	-7	3
$f(x)$		0

On vérifie en traçant la courbe représentant f sur l'écran d'une calculatrice.



3 Résoudre des équations et des inéquations

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $f(x) = \frac{2x-5}{x-4}$.

Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ les équations et inéquations suivantes et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

1. $f(x) = 0$. 2. $f(x) = 2$. 3. $f(x) \leq 0$. 4. $f(x) > 10$.

Solution commentée

Savoir-faire

■ Pour résoudre les équations et inéquations proposées, on utilise la propriété suivante :

« $\frac{a}{b} = 0$ si, et seulement si, $a = 0$ et $b \neq 0$. »

1. $\frac{2x-5}{x-4} = 0$ si, et seulement si, $2x-5 = 0$ et $x-4 \neq 0$.

$2x-5 = 0$ si $x = 2,5$ et $x-4 \neq 0$ si $x \neq 4$.

L'équation $f(x) = 0$ a pour solution 2,5.

Sur le graphique (voir ci-après), la courbe C représentant f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2,5.

2. $\frac{2x-5}{x-4} = 2$ équivaut à $2x-5 = 2(x-4)$ et $x \neq 4$.

$2x - 5 = 2x - 8$ ou encore $0x = -3$; cette équation n'a pas de solution, donc l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution.

Sur le graphique (voir ci-après), la courbe C représentant f ne coupe jamais la droite d'équation $y = 2$.

3. Pour résoudre l'inéquation $\frac{2x-5}{x-4} \leq 0$, on dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	2,5	4	$+\infty$
Signe de $2x - 5$	-	0	+	+
Signe de $x - 4$	-	-	0	+
Signe de $\frac{2x-5}{x-4}$	+	0	-	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est l'intervalle $[2,5 ; 4[$.

Sur le graphique (voir ci-après), la courbe C représentant f est située sous l'axe des abscisses sur $[2,5 ; 4[$.

4. $\frac{2x-5}{x-4} > 10$ équivaut à $\frac{2x-5}{x-4} - 10 > 0$ et $x \neq 4$.

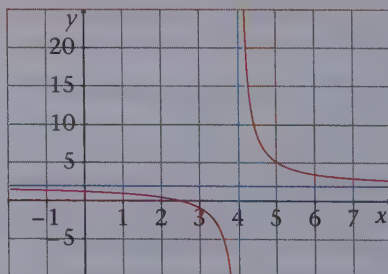
On met au même dénominateur : $\frac{2x-5-10(x-4)}{x-4} > 0$; $\frac{-8x+35}{x-4} > 0$.

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	4	4,375	$+\infty$
Signe de $-8x + 35$	+	+	0	-
Signe de $x - 4$	-	0	+	+
Signe de $\frac{-8x+35}{x-4}$	-	+	0	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 10$ est l'intervalle $]4 ; 4,375[$.

Sur le graphique, la courbe C représentant f est située au-dessus de la droite d'équation $y = 10$ sur $]4 ; 4,375[$.



Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1 On pose $A(x) = \frac{6}{x+2} - \frac{3}{x-2}$.
On a :

☐ a. $A(x) = \frac{3}{2x}$. ☐ b. $A(x) = \frac{x-6}{x^2-4}$.

☐ c. $A(x) = \frac{3x-18}{x^2-4}$.

2 La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$f(x) = \frac{4x-1}{x+1}$ a pour forme réduite :

☐ a. $f(x) = 4 - \frac{5}{x+1}$.

☐ b. $f(x) = 4 - \frac{1}{x+1}$.

☐ c. $f(x) = 4 - \frac{3}{x+1}$.

3 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x-1}$; l'image de $\sqrt{5}$ par g est :

☐ a. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. ☐ b. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. ☐ c. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4 La fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

par $g(x) = \frac{1}{x-1}$ est :

☐ a. croissante sur $]1; +\infty[$.

☐ b. toujours positive.

☐ c. négative sur $[0; 1[$.

5 L'équation $\frac{3x+12}{2x-10} = 0$:

☐ a. n'a pas de solution.

☐ b. a deux solutions : 5 et -4.

☐ c. a une solution : -4.

6 L'équation $\frac{3x+12}{2x-10} = -1$:

☐ a. n'a pas de solution.

☐ b. a une solution : -0,4.

☐ c. a une solution : -22.

7 La fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $h(x) = -2 + \frac{7}{x-3}$ est :

☐ a. croissante sur $]3; +\infty[$.

☐ b. décroissante sur $] -\infty; 3[$.

☐ c. décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

8 On pose $B(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

et $C(x) = \frac{x-4}{x+1}$.

On peut affirmer que :

☐ a. $B(x) = C(x)$.

☐ b. $B(x) = C(x)$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

☐ c. $B(x) = C(x)$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

9 L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{-x-5}{x-2} \geq 0$ est :

☐ a. $[-5; 2[$.

☐ b. $] -\infty; -5]$.

☐ c. $[-5; +\infty[$.

10 L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{-x-5}{x-2} \leq -1$ est :

☐ a. $] -\infty; -5] \cup]2; +\infty[$.

☐ b. $\mathbb{R}$.

☐ c. $]2; +\infty[$.

Exercices

Calculer avec des fractions

Exercice 1 niveau 1

Corrigés p. 45

Mettre au même dénominateur les expressions suivantes.

$$A(x) = \frac{5}{x+4} - \frac{7}{x-2} ; B(x) = -\frac{3}{2x} + \frac{1}{x-6} ; C(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}.$$

Exercice 2 niveau 1

Corrigés p. 45

Simplifier les fractions suivantes.

$$F(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} ; G(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 4} ; H(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}.$$

Fonction inverse

Exercice 3 niveau 1

Corrigés p. 46

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

En utilisant le sens de variation de f , compléter les inégalités suivantes.

1. Si $2 < x < 4$, alors ... $\frac{1}{x}$...
2. Si $-1 < x < -0,5$, alors ... $\frac{1}{x}$...
3. Si $x > 10$, alors ... $\frac{1}{x}$...
4. Si $\frac{1}{x} > 5$, alors ... x ...
5. Si $\frac{1}{x} < -2$, alors ... x ...

Fonctions homographiques

Exercice 4 niveau 1

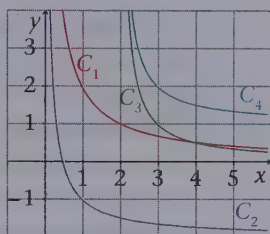
Corrigés p. 46

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé des portions des courbes C_1, C_2, C_3, C_4 représentant les quatre fonctions homographiques suivantes.

$$f(x) = \frac{2}{x}; \quad g(x) = \frac{1}{x-2}; \quad h(x) = \frac{x-1}{x-2};$$

$$l(x) = -2 + \frac{1}{x}.$$

Relier chacune des fonctions à sa courbe.



Exercice 5

niveau 1

Corrigés p. 46

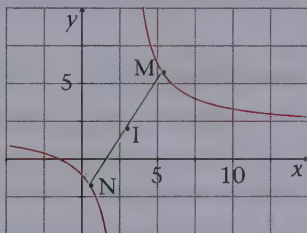
On a tracé sur un logiciel la courbe C représentant la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-3}.$$

Le point I a pour coordonnées $(3; 2)$.

Les points M et N sont sur la courbe C ; ils ont respectivement pour abscisses $a+3$ et $3-a$, où a est un nombre réel quelconque.

Démontrer que I est le milieu du segment $[MN]$.



Exercice 6

niveau 2

Corrigés p. 47

Soit la fonction f définie sur $]-\infty; 5[$ par $f(x) = \frac{-2x+5}{x-5}$.

- Vérifier que la forme réduite de f est $f(x) = -2 - \frac{5}{x-5}$.
- Soit a et b deux réels de $]-\infty; 5[$.

Sachant que $a < b$, comparer $f(a)$ et $f(b)$.

En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty; 5[$ et dresser le tableau de variations de f .

Exercice 7

niveau 2

Corrigés p. 47

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$ par $f(x) = \frac{-6x+8}{2x-1}$.

On cherche la forme réduite de f . On cherche donc les coefficients α , β , γ tels que, pour tout x , sauf $0, 5$, on ait $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+\gamma}$.

- Quelle est la valeur de γ ?

Deux élèves, Aricia et Lise, proposent des méthodes pour calculer les coefficients α et β . Suivre chacune de ces deux méthodes pour déterminer la forme réduite de f .

2. Méthode d'Arícia :

- calculer $f(0)$ et $f(1)$ avec les deux expressions de f ;
- résoudre le système d'équations à deux inconnues obtenu.

3. Méthode de Lise :

- écrire la forme réduite de f au même dénominateur ;
- mettre les deux fractions au même dénominateur ;
- identifier les numérateurs des deux expressions de f ;
- résoudre le système d'équations à deux inconnues obtenu.

4. Vérifier et conclure en donnant la forme réduite de f .

Exercice 8

niveau 2

Corrigés p. 48

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0,5\}$ par $f(x) = -3 + \frac{5}{2x-1}$.

1. Soit a et b deux réels de $] -\infty ; 0,5[$.

Sachant que $a < b$, comparer $f(a)$ et $f(b)$.

En déduire le sens de variation de f sur $] -\infty ; 0,5[$.

2. Soit a et b deux réels de $] 0,5 ; +\infty[$.

Sachant que $a < b$, comparer $f(a)$ et $f(b)$.

En déduire le sens de variation de f sur $] 0,5 ; +\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de f .

Résolution d'équations et d'inéquations

Exercice 9

niveau 1

Corrigés p. 49

Résoudre les équations suivantes.

1. $\frac{4x+8}{x-3} = 0$. 2. $\frac{4x+8}{x-3} = 2$. 3. $\frac{4x+8}{x-3} = 4$.

Exercice 10

niveau 2

Corrigés p. 49

Résoudre les équations suivantes.

1. $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x-3}{x+1}$. 2. $\frac{1}{2x-1} = x-1$.

Exercice 11

niveau 2

Corrigés p. 49

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\frac{-2x+3}{x+1} \geq 0$. 2. $\frac{-2x+3}{x+1} \geq 1$.

Sens de variation de $u + k$, λu et $\frac{1}{u}$

Exercice 12 niveau 1

Corrigés p. 50

Soit la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \frac{1}{x}$.

Étudier le sens de variation des fonctions f , g et h définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f = u - 3 ; g = 0,2u \text{ et } h = -0,5u.$$

Construire les courbes représentatives de ces quatre fonctions dans un même repère.

Exercice 13 niveau 2

Corrigés p. 51

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 7$.

1. Préciser le sens de variation de u et étudier le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x .

2. Soit la fonction f définie par $f = \frac{1}{u}$.

Quel est l'ensemble de définition de f ?

Étudier le sens de variation de f .

Exercice 14 niveau 2

Corrigés p. 51

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -x - 1$.

1. Préciser le sens de variation de u et étudier le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x .

2. Soit la fonction f définie par $f = \frac{1}{u}$.

Quel est l'ensemble de définition de f ?

Étudier le sens de variation de f .

Exercice 15 niveau 2

Corrigés p. 51

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$.

1. Préciser le sens de variation de u et étudier le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x .

2. Soit la fonction f définie par $f = \frac{1}{u}$.

Quel est l'ensemble de définition de f ?

Étudier le sens de variation de f .

Problèmes

Exercice 16 niveau 1

Corrigés p. 52

On rappelle que la tension U (en volts) aux bornes d'une résistance R (en ohms) est proportionnelle à l'intensité I (en ampères) qui la traverse. Plus précisément, on a $U = RI$.

Un circuit électrique est soumis à une tension de 220 V.

1. Exprimer I en fonction de R .
2. Sachant que la résistance mesurée sur ce circuit oscille entre 10 Ω et 110 Ω , déterminer l'intensité minimale et l'intensité maximale que l'on puisse mesurer.

Exercice 17 niveau 2

Corrigés p. 52

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = 2 + \frac{4}{x-1}$.

1. Quel est le sens de variation de la fonction v définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $v(x) = \frac{4}{x-1}$?

En déduire le sens de variation de f .

2. Soit la fonction g définie par $g = \frac{1}{f}$.

Quel est l'ensemble de définition D_g de g ?

Étudier le sens de variation de g .

3. Démontrer que, pour tout réel x de D_g , $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}$.
4. Tracer les courbes représentant f et g dans un même repère.
5. Résoudre graphiquement et par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 18 niveau 3

Corrigés p. 54

(Bac STG, France, juin 2008) Une entreprise a reçu une nouvelle machine dont la complexité nécessite un apprentissage progressif. Ainsi, la production évolue en fonction du temps. L'étude se fait sur les cinq premiers mois. On note x le nombre de mois écoulés depuis l'installation de l'appareil.

La fonction donne le nombre de pièces, en milliers, fabriqués mensuellement par cette machine. Cette fonction est définie par $f(x) = \frac{100x}{x+1}$ pour x variant dans $[0; 5]$.

1. Vérifier que f a pour forme réduite $f(x) = 100 - \frac{100}{x+1}$.

2. Soit a et b deux réels de $[0 ; 5]$. Sachant que $a < b$, comparer $f(a)$ et $f(b)$. En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; 5]$ et dresser le tableau de variations de f .
3. On estime que la machine est rentable si elle produit au moins 80 000 pièces par mois. Déterminer graphiquement et par le calcul la période pour laquelle la machine est rentable.

Exercice 19 niveau 3

 Corrigés p. 54

À la fin d'une guerre particulièrement meurtrière un pays comptait 10 300 000 hommes et 14 700 000 femmes. On remarque cependant que chaque année, le pays compte 175 000 hommes et 175 000 femmes de plus. On note x le nombre d'années écoulées depuis la fin de la guerre. On note f la fonction qui à x associe la proportion en pourcentage d'hommes dans la population totale.

1. Exprimer la proportion d'hommes dans la population totale au sortir de la guerre.
2. Montrer que $f(x) = \frac{20\,600 + 350x}{500 + 7x}$.
3. Montrer que $f(x) = 50 - \frac{4\,400}{500 + 7x}$.

En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

4. En supposant que le modèle décrit reste valable suffisamment longtemps, déterminer à l'aide du tableur de la calculatrice au bout de combien d'années la proportion d'hommes dépassera à nouveau les 45 % de la population totale.

Exercice 20 niveau 3

 Corrigés p. 55

Anne travaille dans le design. Chaque mois, ses frais fixes s'élèvent à 600 euros. Elle vend chaque création à 250 euros.

On note C la fonction qui au nombre x de créations réalisées associe le coût total de production. On note C_m la fonction qui à x associe le coût moyen de production :

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1. Montrer que le coût moyen de production est donné par :

$$C_m(x) = 250 + \frac{600}{x}.$$

2. Écrire un algorithme qui, étant donné un montant M , calcule le nombre de créations à réaliser par mois pour que le coût moyen de production soit égal à M .

Exercice 21

niveau 3

Corrigés p. 56

Dorothée joue du violon. Un ami lui dit que la fréquence f (en hertz), la tension T (en newton), la masse linéique m (en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$) et la longueur L (en mètres) d'une corde sont liés par la formule $f = \frac{\sqrt{\frac{T}{m}}}{2L}$.

1. Sachant que la corde LA du violon de Dorothée est bien accordée à 440 Hz, et que la longueur utilisée est de 33 cm, déterminer le rapport $\frac{T}{m}$.
2. En appuyant sur la corde, on change sa longueur. On note f la fonction qui à la longueur L (en m) de la corde LA mise en vibration associe la fréquence entendue (en Hz). Montrer que $f(L) = \frac{145,2}{L}$.
3. Déterminer de combien de centimètres Dorothée doit réduire la longueur de corde mise en vibration pour obtenir un MI (660 Hz).
4. Dorothée n'aime pas trop monter dans les aigus. La longueur de corde LA qu'elle laisse en vibration est toujours comprise entre 16,5 cm et 33 cm. Déterminer un encadrement des fréquences entendues.
5. Pour des raisons d'équilibre sonore et de répartition des forces sur la table du violon, les cordes sont toutes soumises à la même tension. Sachant que la corde SOL a une fréquence de 196 Hz, montrer qu'elle est environ 5 fois plus lourde que la corde LA.

Exercice 22

niveau 3

Corrigés p. 57

Soit x un nombre positif.

1. Montrer que $\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 = \left(x + \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2$.
2. De même, on montre que $\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2 = \left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2$.

On admettra dans la suite que si x est positif, alors $x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$ est positif aussi. On considère les points F_1 et F_2 de coordonnées respectives $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. Soit M un point de la courbe représentative de la fonction inverse dans un repère orthonormé.

Montrer que la différence $MF_2 - MF_1$ est constante et déterminer cette constante.

1 c. $A(x) = \frac{6}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{6(x-2) - 3(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x-18}{x^2-4}$.

2 a. $4 - \frac{5}{x+1} = \frac{4(x+1) - 5}{x+1} = \frac{4x-1}{x+1}$.

3 b. $g(\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

4 c. $g(2) = 1$ et $g(3) = 0,5$, donc g n'est pas croissante sur $]1; +\infty[$; $g(0) = -1$, donc g n'est pas toujours positive. On élimine les réponses a. et b.

5 c. $\frac{3x+12}{2x-10} = 0$ équivaut à $3x+12=0$ et $2x-10 \neq 0$.

6 b. $\frac{3x+12}{2x-10} = -1$ équivaut à $3x+12 = -(2x-10)$ et $x \neq 5$; puis $5x = -2$.

7 b. $h(4) = 5$ et $h(10) = -1$, on élimine a. ; $h(2) = -9$ et $h(4) = 5$, on élimine c.

8 c. $B(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \frac{(x-4)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-4}{x+1}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

9 a. On peut soit dresser un tableau de signes soit calculer la valeur de la fraction en choisissant des valeurs de x . On a $f(0) = 2,5 > 0$, donc 0 est solution de l'inéquation, ce qui élimine la réponse b. ;

$f(3) = -8 < 0$, donc 3 n'est pas solution, ce qui élimine la réponse c.

10 c. $\frac{-x-5}{x-2} \leq -1$ équivaut à $\frac{-x-5}{x-2} + 1 \leq 0$; $\frac{-x-5+x-2}{x-2} \leq 0$; $\frac{-7}{x-2} \leq 0$.

Exercice 1

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{5}{x+4} - \frac{7}{x-2} = \frac{5(x-2) - 7(x+4)}{(x+4)(x-2)} \\ &= \frac{5x-10-7x-28}{(x+4)(x-2)} = \frac{-2x-38}{(x+4)(x-2)} \end{aligned}$$

$$B(x) = -\frac{3}{2x} + \frac{1}{x-6} = \frac{-3(x-6) + 1 \times 2x}{2x(x-6)} = \frac{-x+18}{2x(x-6)}$$

$$C(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x} = \frac{x \times x - (x-1)(x+1)}{(x-1)x} = \frac{x^2 - (x^2-1)}{(x-1)x} = \frac{1}{x^2-x}$$

RAPPEL

Pour mettre au même dénominateur, on utilise la formule $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Exercice 2

$$F(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1}, \text{ si } x \neq 3 \text{ et } x \neq -1.$$

$$G(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \frac{x}{x-1},$$

si $x \neq 1$ et $x \neq 4$.

$$H(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x+1}{x+1},$$

si $x \neq -1$ et $x \neq 1$.

CONSEIL

Pour simplifier une fraction, on commence par factoriser le numérateur et le dénominateur, puis on utilise la propriété : si

$$b \neq 0 \text{ et } k \neq 0, \quad \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}.$$

Exercice 3

1. Si $2 < x < 4$, alors $0,25 < \frac{1}{x} < 0,5$.

2. Si $-1 < x < -0,5$, alors $-2 < \frac{1}{x} < -1$.

3. Si $x > 10$, alors $0 < \frac{1}{x} < 0,1$.

4. Si $\frac{1}{x} > 5$, alors $0 < x < 0,2$.

5. Si $\frac{1}{x} < -2$, alors $-0,5 < x < 0$.

Exercice 4

$f(x) = \frac{2}{x}$ correspond à C_1 .

$g(x) = \frac{1}{x-2}$ correspond à C_3 .

$h(x) = \frac{x-1}{x-2}$ correspond à C_4 .

$l(x) = -2 + \frac{1}{x}$ correspond à C_2 .

Exercice 5

$$\frac{x_M + x_N}{2} = \frac{(a+3) + (3-a)}{2} = 3 = x_1$$

$$y_M = \frac{2(a+3) + 3}{a+3-3} = \frac{2a+9}{a};$$

$$y_N = \frac{2(3-a) + 3}{3-a-3} = \frac{-2a+9}{-a} = \frac{2a-9}{a};$$

$$\frac{y_M + y_N}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2a+9}{a} + \frac{2a-9}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{a} \right) = 2 = y_1;$$

donc I est le milieu du segment [MN].

ATTENTION

Les coordonnées du point I milieu du segment [MN] sont

$$x_1 = \frac{x_M + x_N}{2} \text{ et } y_1 = \frac{y_M + y_N}{2}.$$

Exercice 6

1. Pour tout réel x de $]-\infty; 5[$, $-2 - \frac{5}{x-5} = \frac{-2(x-5)-5}{x-5} = \frac{-2x+5}{x-5} = f(x)$.

Donc la forme réduite de f est $f(x) = -2 - \frac{5}{x-5}$.

2. On a successivement :

$$a < b < 5$$

$$a-5 < b-5 < 0$$

$\frac{1}{a-5} > \frac{1}{b-5}$, car la fonction inverse est décroissante sur $] -\infty; 0[$.

$\frac{-5}{a-5} < \frac{-5}{b-5}$, car on change le sens de l'inégalité en multipliant les deux membres par -5 .

$-2 - \frac{5}{a-5} < -2 - \frac{5}{b-5}$, en ajoutant -2 aux deux membres.

On a ainsi prouvé que si $a < b < 5$, alors $f(a) < f(b)$.

Cela signifie que la fonction f est croissante sur $]-\infty; 5[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	5
$f(x)$		

Exercice 7

1. Valeur de γ : $2x-1=0$ si $x=0,5$; donc $\gamma = -0,5$. On a $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-0,5}$.

2. Méthode d'Aricia :

$$f(0) = -8, \text{ donc } \alpha + \frac{\beta}{0-0,5} = -8 ; \alpha - 2\beta = -8 ;$$

$$f(1) = 2, \text{ donc } \alpha + \frac{\beta}{1-0,5} = 2 ; \alpha + 2\beta = 2.$$

$$\text{On résout le système : } \begin{cases} \alpha - 2\beta = -8 \\ \alpha + 2\beta = 2 \end{cases}$$

Par addition, on obtient $2\alpha = -6$, d'où $\alpha = -3$;

par soustraction, on obtient $-4\beta = -10$, d'où $\beta = 2,5$.

3. Méthode de Lise :

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-0,5} = \frac{\alpha(x-0,5) + \beta}{x-0,5} = \frac{\alpha x - 0,5\alpha + \beta}{x-0,5}$$

$$\text{et } f(x) = \frac{-6x+8}{2x-1} = \frac{2(-3x+4)}{2(x-0,5)} = \frac{-3x+4}{x-0,5}.$$

Les deux fractions ont le même dénominateur ; elles sont égales si elles ont le même numérateur.

Pour tout x (sauf $0,5$), $\alpha x - 0,5 + \beta = 3x + 4$ équivaut à :

$$\begin{cases} \alpha = -3 \\ -0,5\alpha + \beta = 4. \end{cases}$$

On en déduit $\alpha = -3$ et $\beta = 2,5$.

4. On vérifie :

$$-3 + \frac{2,5}{x - 0,5} = \frac{-3(x - 0,5) + 2,5}{x - 0,5} = \frac{-3x + 1,5 + 2,5}{x - 0,5} = \frac{-3x + 4}{x - 0,5} = f(x).$$

La forme réduite de f est $f(x) = -3 + \frac{2,5}{x - 0,5}$.

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0,5\}$ par $f(x) = -3 + \frac{5}{2x - 1}$.

1. On a successivement :

$$a < b < 0,5$$

$$a - 0,5 < b - 0,5 < 0$$

$2a - 1 < 2b - 1 < 0$, en multipliant par 2.

$$\frac{1}{2a - 1} > \frac{1}{2b - 1}, \text{ car la fonction inverse est décroissante sur }]-\infty ; 0[.$$

$$\frac{5}{2a - 1} > \frac{5}{2b - 1} \text{ (on ne change pas le sens de l'inégalité en multipliant les deux membres par 5).}$$

$$-3 + \frac{5}{2a - 1} > -3 + \frac{5}{2b - 1}, \text{ en ajoutant } -3 \text{ aux deux membres.}$$

On a ainsi prouvé que si $a < b < 0,5$, alors $f(a) > f(b)$.

Cela signifie que la fonction f est décroissante sur $]-\infty ; 0,5[$.

2. On a successivement :

$$0,5 < a < b$$

$$0 < a - 0,5 < b - 0,5$$

$0 < 2a - 1 < 2b - 1$, en multipliant par 2.

$$\frac{1}{2a - 1} > \frac{1}{2b - 1}, \text{ car la fonction inverse est décroissante sur }]0 ; +\infty[.$$

$$\frac{5}{2a - 1} > \frac{5}{2b - 1} \text{ (on ne change pas le sens de l'inégalité en multipliant les deux membres par 5).}$$

$$-3 + \frac{5}{2a - 1} > -3 + \frac{5}{2b - 1}, \text{ en ajoutant } -3 \text{ aux deux membres.}$$

On a ainsi prouvé que si $0,5 < a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

Cela signifie que la fonction f est décroissante sur $]0,5 ; +\infty[$.

3. Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$0,5$	$+\infty$
Variations de $f(x)$			

Exercice 9

1. $\frac{4x+8}{x-3} = 0$ si, et seulement si, $4x + 8 = 0$
et $x - 3 \neq 0$.

$4x + 8 = 0$ si $x = -2$ et $x - 3 \neq 0$ si $x \neq 3$;

l'équation a pour solution -2 .

RAPPEL

$\frac{a}{b} = 0$ si, et seulement si,
 $a = 0$ et $b \neq 0$.

2. $\frac{4x+8}{x-3} = 2$ équivaut à $4x + 8 = 2(x - 3)$ et $x \neq 3$;

$4x + 8 = 2x - 6$ ou encore $2x = -14$, $x = -7$; **l'équation a pour solution -7 .**

3. $\frac{4x+8}{x-3} = 4$ équivaut à $4x + 8 = 4(x - 3)$ et $x \neq 3$;

$4x + 8 = 4x - 12$ ou encore $0x = -20$; **cette équation n'a pas de solution.**

Exercice 10

1. $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x-3}{x+1}$ équivaut à $(x+1)^2 = (x-3)^2$ et $x \neq 3$; $x \neq -1$;

$$(x+1)^2 - (x-3)^2 = 0 ;$$

$$[(x+1) - (x-3)][(x+1) + (x-3)] = 0 ; 4(2x-2) = 0 ;$$

l'équation a pour solution 1.

2. $\frac{1}{2x-1} = x-1$ équivaut à $1 = (x-1)(2x-1)$ et $x \neq 0,5$;

$$1 = 2x^2 - 3x + 1 ; 0 = 2x^2 - 3x ; 0 = x(2x-3) ;$$

l'équation a pour solutions 0 et 1,5.

Exercice 11

1. Pour résoudre l'inéquation $\frac{-2x+3}{x+1} \geq 0$, on dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	$1,5$	$+\infty$
Signe de $-2x+3$	+	+	0	-
Signe de $x+1$	-	0	+	+
Signe de $\frac{-2x+3}{x+1}$	-	+	0	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $]-1 ; 1,5]$.

2. $\frac{-2x+3}{x+1} \geq 1$ équivaut à $\frac{-2x+3}{x+1} - 1 \geq 0$ et $x \neq -1$.

On met au même dénominateur : $\frac{-2x+3-(x+1)}{x+1} \geq 0$; $\frac{-3x+2}{x+1} \geq 0$.

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
Signe de $-3x+2$	+	+	0	-
Signe de $x+1$	-	0	+	+
Signe de $\frac{-3x+2}{x+1} \geq 0$	-		+	0

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{-2x+3}{x+1} \geq 1$ est l'intervalle $\left]-1; \frac{2}{3}\right]$.

Exercice 12

RAPPEL

Les fonctions u et $u+k$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I .

La courbe C_{u+k} est l'image de la courbe C_u par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

Si $\lambda > 0$, alors les fonctions u et λu ont le même sens de variation sur l'intervalle I .

Si $\lambda < 0$, alors les fonctions u et λu ont des sens de variation contraires sur l'intervalle I .

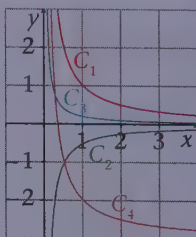
Si M est le point d'abscisse x de la courbe C_u , on obtient le point M d'abscisse x de la courbe $C_{\lambda u}$ en multipliant l'ordonnée de M par λ .

La fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$, donc la fonction f définie par $f = u - 3$ est aussi décroissante sur $]0; +\infty[$.

La courbe C_4 est l'image de celle de la fonction inverse par la translation de vecteur $-3\vec{j}$.

$g = 0,2u$; comme $0,2 > 0$, les fonctions u et $0,2u$ ont le même sens de variation ; donc g est décroissante sur $]0; +\infty[$.

$h = -0,5u$; comme $-0,5 < 0$, les fonctions u et $-0,5u$ ont des sens de variation contraires ; donc h est croissante sur $]0; +\infty[$.



Exercice 13

1. u est une fonction affine de coefficient directeur positif 2, donc u est croissante sur $\mathbb{R}$.

$2x - 7 = 0$ si $x = 3,5$; donc $u(x) < 0$ si $x < 3,5$ et $u(x) > 0$ si $x > 3,5$.

2. La fonction f est définie pour les valeurs de x telles que $u(x) \neq 0$, donc si $x \neq 3,5$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{3,5\}$.

Comme $f = \frac{1}{u}$ et que u est croissante sur

chacun des intervalles sur lesquels elle est

définie, la fonction f est décroissante sur

chacun des intervalles sur lesquels elle est définie.

Donc f est décroissante sur $]-\infty ; 3,5[$ et sur $]3,5 ; +\infty[$.

À NOTER

Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires.

Exercice 14

1. u est une fonction affine de coefficient directeur négatif -1 donc u est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$-x - 1 = 0$ si $x = -1$; donc $u(x) > 0$ si $x < -1$ et $u(x) < 0$ si $x > -1$.

2. La fonction f est définie pour les valeurs de x telles que $u(x) \neq 0$, donc si $x \neq -1$. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Comme $f = \frac{1}{u}$ et que u est décroissante sur chacun des intervalles sur

lesquels elle est définie, la fonction f est croissante sur chacun des intervalles sur lesquels elle est définie.

Donc f est croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$.

Exercice 15

1. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$; elle s'annule en 0 et est positive sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est définie pour les valeurs de x telles que $u(x) \neq 0$, donc si $x \neq 0$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

Comme u est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, la fonction f est croissante sur $]-\infty ; 0[$.

Comme u est croissante sur $]0 ; +\infty[$, la fonction f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

On dresse son tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $f(x)$			

Exercice 16

1. $I = \frac{U}{R}$, soit $I = \frac{220}{R}$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $J = [10 ; 110]$ par $f(x) = \frac{220}{x}$; f s'écrit sous la forme λu avec $\lambda = 220$; u étant la fonction inverse.

Comme $\lambda > 0$, les fonctions u et λu ont le même sens de variation sur l'intervalle J . Donc la fonction f est décroissante sur J .

On en déduit que si $10 \leq x \leq 110$, alors $f(10) \geq f(x) \geq f(110)$.

On a $f(10) = 22$ et $f(110) = 2$.

Sachant que la résistance mesurée sur ce circuit oscille entre 10Ω et 110Ω , l'intensité minimale et l'intensité maximale que l'on puisse mesurer sont respectivement 2 ampères et 22 ampères.

Exercice 17

1. On étudie le sens de variation de la fonction v définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$v(x) = \frac{4}{x-1}.$$

La fonction u définie par $u(x) = x - 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule pour $x = 1$. Donc la fonction $\frac{1}{u}$ est décroissante sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

Comme $v = 4 \times \frac{1}{u}$, v est aussi décroissante sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

Comme $f = v + 2$, f est décroissante sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

On dresse son tableau de variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$			

2. $g = \frac{1}{f}$, on recherche de l'ensemble de définition de g :

la fonction g est définie pour les valeurs de x telles que $f(x) \neq 0$.

On résout l'équation $f(x) = 0$:

$$\text{si } x \neq 1, 2 + \frac{4}{x-1} = 0 \text{ équivaut à } \frac{4}{x-1} = -2,$$

$$4 = -2(x-1), 4 = -2x + 2, x = -1.$$

La solution de l'équation $f(x) = 0$ est -1 .

Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

ATTENTION

Si $x = 1$, f n'est pas définie et $g(1) = 0$.

Comme $g = \frac{1}{f}$ et que f est décroissante sur chacun des intervalles sur lesquels elle est définie, la fonction g est croissante sur chacun des intervalles sur lesquels elle est définie.

Donc g est croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variations de $g(x)$			

3. On transforme l'écriture de f :

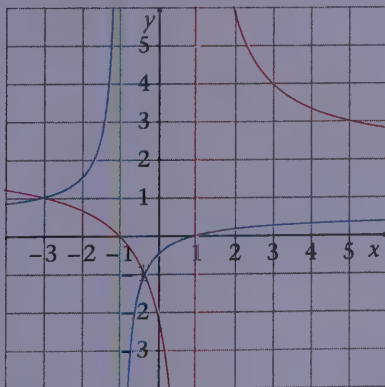
$$f(x) = 2 + \frac{4}{x-1} = \frac{2(x-1)+4}{x-1} = \frac{2x+2}{x-1}.$$

Comme $g = \frac{1}{f}$, $g(x) = \frac{x-1}{2x+2}$.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1 \times (x+1) - 1 \times 2}{2(x+1)} = \frac{x-1}{2(x+1)}.$$

Donc la forme réduite de g est $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}$.

4.



5. Graphiquement, les deux courbes se coupent en deux points d'abscisses -3 et $-\frac{1}{3}$, donc l'équation $f(x) = g(x)$ admet les solutions -3 et $-\frac{1}{3}$.

Si $x \neq 1$ et $x \neq -1$; $\frac{2x+2}{x-1} = \frac{x-1}{2x+2}$ équivaut à $(2x+2)^2 = (x-1)^2$

$$(2x+2)^2 - (x-1)^2 = 0$$

$$[(2x+2) + (x-1)][(2x+2) - (x-1)] = 0$$

$$(3x+1)(x+3) = 0$$

Ce produit est nul pour les valeurs $-\frac{1}{3}$ et -3 .

Exercice 18

$$1. 100 - \frac{100}{x+1} = \frac{100(x+1)-100}{x+1} = \frac{100x}{x+1} = f(x);$$

donc f a pour forme réduite $f(x) = 100 - \frac{100}{x+1}$.

2. On a successivement :

$$0 \leq a < b \leq 5$$

$$0 < a+1 < b+1$$

$$\frac{1}{a+1} > \frac{1}{b+1}, \text{ car la fonction inverse est décroissante sur }]0; +\infty[.$$

$$\frac{-100}{a+1} < \frac{-100}{b+1}, \text{ car on change le sens de l'inégalité en multipliant les deux membres par } -100.$$

$$100 - \frac{100}{a+1} < 100 - \frac{100}{b+1}, \text{ en ajoutant } 100 \text{ dans les deux membres.}$$

On a ainsi prouvé que si $0 \leq a < b \leq 5$, alors $f(a) < f(b)$.

Cela signifie que la fonction f est croissante sur $[0; 5]$.

On dresse le tableau de variations :

x	0	5
$f(x)$	0	$\frac{500}{6}$

3. Graphiquement, la courbe est au-dessus de la droite d'équation $y = 80$ sur l'intervalle $[4; 5]$.

On résout l'inéquation $f(x) \geq 80$ sur $[0; 5]$, en prenant la forme réduite de f .

$$100 - \frac{100}{x+1} \geq 80 \text{ équivaut à } 20 \geq \frac{100}{x+1};$$

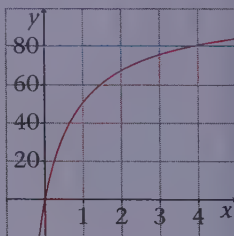
comme $x+1 > 0$ sur $[0; 5]$,

$$20 \geq \frac{100}{x+1} \text{ équivaut à } 20(x+1) \geq 100;$$

$$x+1 \geq 5, \text{ d'où } x \geq 4.$$

L'ensemble des solutions est $[4; 5]$.

La production devient donc rentable pendant le cinquième mois.



Exercice 19

1. Au sortir de la guerre, il y avait 10 300 000 hommes sur 25 000 000 habitants. La proportion en pourcentage d'hommes dans la population totale

était alors : $\frac{10\,300\,000}{25\,000\,000} \times 100 = 41,2$, soit **41,2 %**.

2. Si x est le nombre d'années écoulées depuis la fin de la guerre, alors, en millions d'habitants :

le nombre d'hommes est : $10,3 + 0,175x$;

la population totale est : $25 + 0,35x$;

la proportion en pourcentage d'hommes dans la population totale est

$$\text{alors : } f(x) = \frac{10,3 + 0,175x}{25 + 0,35x} \times 100 = \frac{1030 + 17,5x}{25 + 0,35x} = \frac{20600 + 350x}{500 + 7x}$$

(on a multiplié le numérateur et le dénominateur par 20).

$$3. 50 - \frac{4400}{500 + 7x} = \frac{50 \times (500 + 7x) - 4400}{500 + 7x} = \frac{20600 + 350x}{500 + 7x} = f(x).$$

Soit a et b deux réels de $[0 ; +\infty[$. Sachant que $a < b$, on compare $f(a)$ et $f(b)$.

On a successivement : $0 \leq a < b$

$$0 < 7a + 500 < 7b + 500$$

$$\frac{1}{7a + 500} > \frac{1}{7b + 500} \quad (\text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0 ; +\infty[)$$

$$\frac{-4400}{7a + 500} < \frac{-4400}{7b + 500}, \quad (\text{car on change le sens de l'inégalité en multipliant les deux membres par } -4400)$$

$$50 - \frac{4400}{7a + 500} < 50 - \frac{4400}{7b + 500} \quad \text{en ajoutant 50 dans les deux membres.}$$

On a ainsi prouvé que si $0 \leq a < b$, alors $f(a) < f(b)$.

Cela signifie que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	41,2	

4. En supposant que le modèle décrit reste valable suffisamment longtemps, la fonction étant croissante, l'extrait de tableau montre qu'il faudra 55 années pour que la proportion d'hommes dépasse les 45 % de la population totale.

53	44,95
54	44,99
55	45,03

Exercice 20

$$1. \text{ On a } C(x) = 600 + 250x, \text{ donc } C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{250x + 600}{x} = 250 + \frac{600}{x}.$$

2. Si on souhaite avoir un coût moyen de production égal à M , x doit vérifier l'équation :

$$250 + \frac{600}{x} = M \Leftrightarrow 250x + 600 = Mx \Leftrightarrow 600 = (M - 250)x \Leftrightarrow x = \frac{600}{M - 250}.$$

Notons que $C_m(x) = 250 + \frac{600}{x} > 250$.

Voici donc un algorithme possible :

Début de l'algorithme

Demander M

Si $M > 250$ alors

x prend la valeur $600/(M-250)$

Afficher : << Le nombre de créations à réaliser est d'environ : >>

Afficher x

Sinon

Afficher : << Montant impossible à atteindre. >>

Fin de l'algorithme

Exercice 21

1. On a $f = 440$ et $L = 0,33$, donc :

$$440 = \frac{\sqrt{\frac{T}{m}}}{2 \times 0,33} \Leftrightarrow 440 \times 2 \times 0,33 = \sqrt{\frac{T}{m}} \Leftrightarrow 290,4 = \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Comme $\frac{T}{m}$ est positif, on a donc $\frac{T}{m} = 290,4^2 = 84\,332,16$.

$$2. \text{ On a donc } f(L) = \frac{\sqrt{84\,332,16}}{2L} = \frac{290,4}{2L} = \frac{145,2}{L}.$$

3. Cherchons la longueur mise en vibration pour obtenir ce MI.

$$f(L) = 660 \Leftrightarrow \frac{145,2}{L} = 660 \Leftrightarrow L = \frac{145,2}{660} = 0,22. \text{ Comme la corde mesure } 33 \text{ cm, Dorothée doit la réduire de } 33 - 22 = 11 \text{ cm.}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ On a } 0,165 \leq L \leq 0,33 &\Leftrightarrow \frac{1}{0,165} \geq \frac{1}{L} \geq \frac{1}{0,33} \\ &\Leftrightarrow \frac{145,2}{0,165} \geq \frac{145,2}{L} \geq \frac{145,2}{0,33} \\ &\Leftrightarrow 880 \geq f(L) \geq 440. \end{aligned}$$

Les fréquences entendues seront comprises entre 440 et 880 Hz.

5. En reprenant la formule physique donnée dans l'énoncé, on voit que, pour la corde SOL, on a :

$$\sqrt{\frac{T}{m_{\text{SOL}}}} = 196 \times 2 \times 0,33 = 129,36 \text{ et donc } \frac{T}{m_{\text{SOL}}} = 16\,734,0096.$$

$$\text{On a donc } \frac{m_{\text{SOL}}}{m_{\text{LA}}} = \frac{\frac{T}{m_{\text{LA}}}}{\frac{T}{m_{\text{SOL}}}} = \frac{84\,332,16}{16\,734,0096} \approx 5, \text{ ce qui correspond au résultat annoncé.}$$

Exercice 22

1. On développe chacun des deux membres :

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + 2 \times x \times \sqrt{2} + 2 \times \frac{1}{x} \times \sqrt{2} \\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 + 2x\sqrt{2} + \frac{2}{x}\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$(x + \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 = x^2 + 2x\sqrt{2} + 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\sqrt{2} + 2.$$

On a donc bien $\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 = (x + \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2$.

2. On considère les points $F_1(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $F_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ et $M\left(x; \frac{1}{x}\right)$, avec $x > 0$. Montrons que la différence $MF_2 - MF_1$ est constante.

$$\begin{aligned}MF_2 &= \sqrt{(-\sqrt{2} - x)^2 + \left(-\sqrt{2} - \frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2}\end{aligned}$$

RAPPEL

La distance entre deux points A et B du plan est donnée par la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

D'après la question 1., $MF_2 = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2} = x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}$, car $x > 0$.

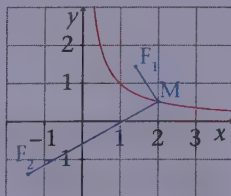
De même, $MF_1 = \sqrt{(\sqrt{2} - x)^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2}$

et on obtient $MF_1 = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2} = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$

(on admet que si x est positif, alors $x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$ est positif aussi).

On en déduit : $MF_2 - MF_1 = 2\sqrt{2}$.

La différence $MF_2 - MF_1$ est constante et vaut $2\sqrt{2}$.



1 Fonction racine carrée

a. Calcul avec les racines carrées

- La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif $\sqrt{a}$ dont le carré est a .
- Conséquences : $(\sqrt{a})^2 = a$; $\sqrt{a^2} = a$.
- Si a et b sont deux nombres positifs (avec b non nul), alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

b. Variations de la fonction racine carrée

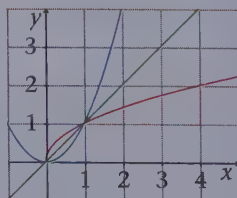
- La **fonction racine carrée** est la fonction qui, à tout nombre positif x , associe sa racine carrée $\sqrt{x}$. Son ensemble de définition est $[0 ; +\infty[$.
 - Si a et b sont deux nombres positifs tels que $0 \leq a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- La fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
Variation de $\sqrt{x}$	0	

c. Positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

- Si $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1$;
- si $1 < x$, alors $1 < \sqrt{x} < x < x^2$.
- La figure montre les courbes représentatives des trois fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.



d. Sens de variation de $\sqrt{u}$

On considère une fonction u définie et positive sur un intervalle I .

- La fonction notée $\sqrt{u}$ est la fonction qui à tout x de I associe $\sqrt{u(x)}$.
- Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I .

2 Fonction valeur absolue

- La **fonction valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

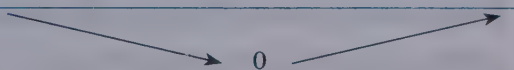
Si $x > 0$, $|x| = x$.

Si $x = 0$, $|x| = 0$.

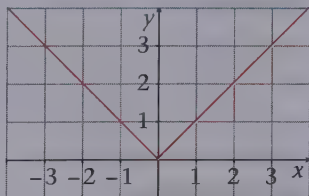
Si $x < 0$, $|x| = -x$.

La valeur absolue de x est un nombre positif ou nul.

- La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $ x $			

La courbe représentative de la fonction valeur absolue est la réunion des deux demi-droites d'équations respectives $y = -x$ sur $]-\infty ; 0]$ et $y = x$ sur $[0 ; +\infty[$; elle admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.



1 Calculer avec des racines carrées

Énoncé

Simplifier l'écriture $A = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{72}}{6}$.

Solution commentée

Savoir-faire

- Pour simplifier l'écriture de A , on commence par écrire les nombres entiers présents au dénominateur sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b le plus petit possible.
- Il faut se rappeler que $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$.

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} ; \sqrt{72} = 6\sqrt{2} ; \text{ donc } A = \frac{2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}{6} = \frac{-4\sqrt{2}}{6} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}.$$

2 Résoudre des inéquations avec des racines carrées

Énoncé

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\sqrt{x} < 0,5$. 2. $\sqrt{-1-x} > 10$.

Solution commentée

Savoir-faire

- La fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$. Cela signifie que si a et b sont deux nombres positifs, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ équivaut à $0 \leq a < b$.
- Le premier membre de la deuxième inéquation est écrit sous la forme $\sqrt{u}$; on commence par écrire l'ensemble des valeurs de x telles que $u(x) \geq 0$; c'est l'ensemble de définition I de l'inéquation. On applique alors l'équivalence appelée ci-dessus.

1. Comme $0,25 = 0,5^2$, l'inéquation s'écrit $\sqrt{x} < \sqrt{0,25}$, ce qui équivaut à $0 \leq x < 0,25$.

L'ensemble des solutions est l'intervalle $[0 ; 0,25[$.

2. On pose $u(x) = -1 - x$.

L'expression $\sqrt{-1-x}$ est définie si $-1-x \geq 0$, soit sur l'intervalle $I =]-\infty; -1]$.

$\sqrt{-1-x} > 10$ équivaut à $-1-x > 100$ et $x \in I$.

$-1-x > 100$ équivaut à $-x > 101$; $x < -101$.

L'intervalle $]-\infty; -101[$ est inclus dans l'intervalle I .

Donc l'ensemble des solutions est $]-\infty; -101[$.

3 Justifier les positions relatives des courbes de $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

Énoncé

1. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $x - \sqrt{x} = \frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$.

2. Étudier le signe de $x - \sqrt{x}$. En déduire les positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

Solution commentée

Savoir-faire

■ Pour obtenir l'égalité de la première question, on utilise l'expression conjuguée de $x - \sqrt{x}$ et l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

■ Pour étudier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, on étudie le signe de leur différence. La question 1. permet de retrouver le signe d'une fonction polynôme du second degré.

$$1. \quad x - \sqrt{x} = \frac{(x - \sqrt{x}) \times (x + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x}} = \frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}.$$

(Le dénominateur de cette fraction est non nul puisque x est strictement positif.)

2. Comme $x > 0$, $x + \sqrt{x} > 0$. Donc la fraction a le signe de son numérateur : $x^2 - x = x(x - 1)$.

Comme $x > 0$, ce produit a le signe de $x - 1$.

Par conséquent, $x - \sqrt{x} < 0$ si $0 < x < 1$ et $x - \sqrt{x} > 0$ si $x > 1$.

La courbe de $x \mapsto x$ est au-dessous de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; 1]$ et au-dessus sur $[1; +\infty[$.

Énoncé

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -2x + 12$.

1. Préciser le sens de variation de u et étudier le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x .

2. Soit la fonction f définie par $f = \sqrt{u}$.

Quel est l'ensemble de définition de f ?

Étudier le sens de variation de f .

Tracer les courbes représentant u et f dans un même repère.

Solution commentée

Savoir-faire

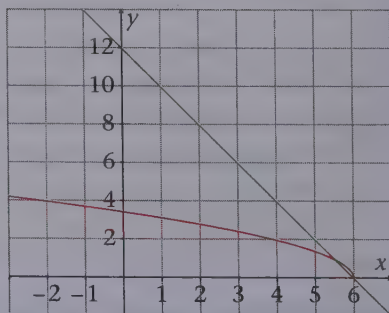
■ Dans la question 1., on détermine le sens de variation et le signe de la fonction u selon les valeurs de x .

■ Dans la question 2., l'ensemble des valeurs de x telles que $u(x) \geq 0$ est l'ensemble de définition I de la fonction f . On applique ensuite la propriété « si u est une fonction définie et positive sur un intervalle I , la fonction $\sqrt{u}$ est définie sur I et a le même sens de variation que u ».

1. La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur négatif -2 . Elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule pour la valeur 6 ; donc $u(x) > 0$ si $x < 6$ et $u(x) < 0$ si $x > 6$.

2. f est définie si u est positive, donc sur l'intervalle $]-\infty ; 6]$.

Comme la fonction u est décroissante sur $]-\infty ; 6]$, f est aussi décroissante sur $]-\infty ; 6]$.



5 Calculer avec des valeurs absolues

Énoncé

Calculer la valeur absolue des nombres 10^{-3} ; $-\sqrt{3}$ et $6 - 2\pi$.

Solution commentée

Savoir-faire

On commence par regarder le signe du nombre x ; puis si $x > 0$, on a $|x| = x$ et si $x < 0$, on a $|x| = -x$.

Le nombre 10^{-3} est positif, donc $|10^{-3}| = 10^{-3}$;

le nombre $-\sqrt{3}$ est négatif, donc $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$;

$\pi > 3$, donc $2\pi > 6$ et le nombre $6 - 2\pi$ est négatif.

On en déduit $|6 - 2\pi| = 2\pi - 6$.

6 Résoudre des équations avec la fonction valeur absolue

Énoncé

Résoudre les équations suivantes.

1. $|x - 4| = 2,5$. 2. $|x + 2| = |x - 4|$.

Solution commentée

Savoir-faire

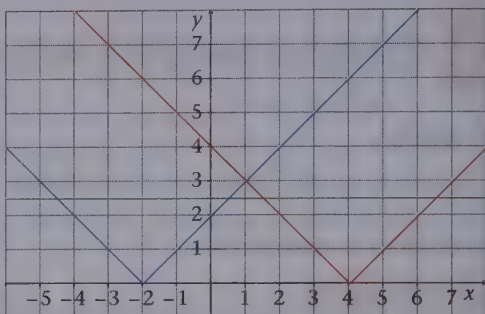
■ Graphiquement, on trace les courbes représentatives des fonctions et on lit les abscisses des solutions.

■ Géométriquement, une valeur absolue s'interprète comme une distance : si deux nombres réels a et b sont les abscisses de deux points sur une droite graduée, alors $|a - b|$ est la distance de a à b sur la droite.

1. L'écriture $|x - 4| = 2,5$ signifie que la distance de x à 4 est égale à 2,5 ; il y a donc deux possibilités : $4 - 2,5$ et $4 + 2,5$.

Donc l'équation $|x - 4| = 2,5$ a deux solutions : 1,5 et 6,5.

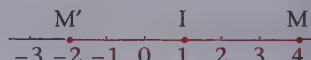
Graphiquement, la droite d'équation $y = 2,5$ coupe la courbe représentant la fonction $x \mapsto |x - 4|$ en deux points d'abscisses 1,5 et 6,5.



2. Pour résoudre graphiquement l'équation $|x + 2| = |x - 4|$, on trace les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto |x + 2|$ et $x \mapsto |x - 4|$. Ces deux courbes

se coupent une seule fois au point d'abscisse 1. Donc l'équation admet une seule solution : 1.

Géométriquement, on interprète l'égalité $|x - (-2)| = |x - 4|$ en disant que la distance



de x à -2 est égale à la distance de x à 4 .

La solution cherchée est donc le milieu d'un segment ou encore le centre de l'intervalle $[-2 ; 4]$: $x = \frac{(-2) + 4}{2}$, donc $x = 1$.



Résoudre des inéquations avec la fonction valeur absolue

Énoncé

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $|x - 4| \leq 2,5$. 2. $|x + 2| > 2,5$.

Solution commentée

Savoir-faire

Pour résoudre graphiquement ces inéquations, on trace les courbes représentatives des fonctions et on lit les abscisses des solutions.

1. La droite d'équation $y = 2,5$ coupe la courbe représentative de la fonction $x \mapsto |x - 4|$ en deux points d'abscisses 1,5 et 6,5 (voir graphique ci-dessus). Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - 4| \leq 2,5$ est l'intervalle $[1,5 ; 6,5]$.

2. La droite d'équation $y = 2,5$ coupe la courbe représentative de la fonction $x \mapsto |x + 2|$ en deux points d'abscisses $-4,5$ et $0,5$ (voir graphique ci-dessus). Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x + 2| > 2,5$ est l'intervalle $]-\infty ; -4,5[\cup]0,5 ; +\infty[$.

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1 On pose :

$$A = 5\sqrt{54} - 2\sqrt{150} + \sqrt{216}.$$

On a :

☐ a. $A = 11\sqrt{6}.$

☐ b. $A = -\sqrt{6}.$

☐ c. $A = 11.$

2 On pose :

$$B = \sqrt{200} - \sqrt{72}.$$

On a :

☐ a. $B = 2\sqrt{10} - 2\sqrt{6}.$

☐ b. $B = 4\sqrt{2}.$

☐ c. $B = \sqrt{128}.$

3 On pose :

$$C = \frac{1}{\sqrt{5} + 1}.$$

On a :

☐ a. $C = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

☐ b. $C = \frac{\sqrt{5}}{6}.$

☐ c. $C = \frac{\sqrt{5}+1}{6}.$

4 On pose :

$$D = (2\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{2})^2.$$

On a :

☐ a. $D = 0.$

☐ b. $D = -30.$

☐ c. $D = 70.$

5 L'équation $x^2 - 7 = 0$:

☐ a. a pas de solution.

☐ b. a une solution : $\sqrt{7}.$

☐ c. a deux solutions : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}.$

6 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{-2x + 9}.$$

La fonction est définie sur :

☐ a. $[0 ; +\infty[.$

☐ b. $[4,5 ; +\infty[.$

☐ c. $]-\infty ; 4,5[.$

7 Soit g la fonction définie sur

$[-5 ; 5]$ par :

$$g(x) = \sqrt{25 - x^2}.$$

La fonction g est :

☐ a. croissante sur $[0 ; 5].$

☐ b. croissante sur $[-5 ; 0].$

☐ c. décroissante sur $[-5 ; 5].$

8 $|7^2 - 4^3|$ est égal à :

☐ a. 15.

☐ b. $49 + 64.$

☐ c. $49 - 64.$

9 $|x + 7| = 1$ équivaut à :

☐ a. $x = -6.$

☐ b. $x = -8.$

☐ c. $x = -6$ ou $x = -8.$

10 $|x - 3| < 0,5$ équivaut à :

☐ a. $x < 3,5.$

☐ b. $-3,5 < x < 3,5.$

☐ c. $x \in]2,5 ; 3,5[.$

Exercices

Fonction racine carrée

Exercice 1

niveau 1

► Corrigés p. 72

Simplifier les écritures.

$$A = \frac{10 - \sqrt{50}}{10} ; B = 9\sqrt{50} - 6\sqrt{98} - \sqrt{162} ; C = \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} ; D = \frac{(2 \times \sqrt{3})^5}{(\sqrt{6})^3}$$

Exercice 2

niveau 1

► Corrigés p. 72

On pose $a = 2 + \sqrt{6}$ et $b = 2\sqrt{6}$.

1. Calculer a^2 et b^2 .

2. Calculer $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$.

Exercice 3

niveau 1

► Corrigés p. 73

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\sqrt{x} \leq 0,9$. 2. $\sqrt{x} > 1,5$.

Exercice 4

niveau 1

► Corrigés p. 73

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{9-x}$.

1. Calculer les images par f des nombres : -7 ; 0 ; 5 ; 9 .

Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Étudier le sens de variation de f .

Tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $[-7 ; 9]$.

3. Résoudre graphiquement et par le calcul l'inéquation $f(x) < 2$.

Exercice 5

niveau 2

► Corrigés p. 73

Soit f , g et h les fonctions définies par :

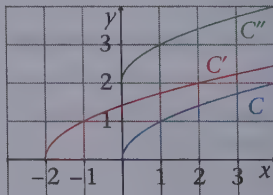
$$f(x) = \sqrt{x} ; g(x) = \sqrt{x} + 2 \text{ et } h(x) = \sqrt{x+2}.$$

1. Donner les ensembles de définition des fonctions f , g et h .

2. On donne les courbes représentant f , g et h dans un même repère.

Associer chacune des fonctions à la courbe qui la représente.

3. Démontrer que, pour tout réel positif x , $f(x) < h(x) < g(x)$.



Exercice 6

niveau 2

Corrigés p. 74

Soit f , g et h les fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{-x} ; g(x) = \sqrt{-x} - 1 \text{ et } h(x) = \sqrt{-x-1}.$$

1. Donner les ensembles de définition des fonctions f , g et h .
2. Tracer les courbes représentant f , g et h dans un même repère.
3. Résoudre les inéquations $f(x) < 3$; $g(x) < 0$ et $h(x) > 2$.

Exercice 7

niveau 3

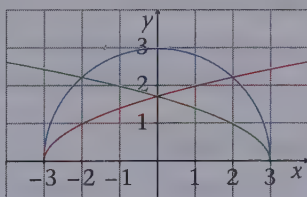
Corrigés p. 75

Soit f , g et h les fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{-x+3} ; g(x) = \sqrt{x+3} \text{ et } h(x) = \sqrt{-x+3} \times \sqrt{x+3}.$$

On donne les courbes représentant f , g et h dans un même repère.

1. Donner les ensembles de définition des fonctions f , g et h .
2. Étudier les variations de f et g ; dresser leurs tableaux de variation.
3. Étudier les variations de h ; dresser son tableau de variation.

**Exercice 8**

niveau 3

Corrigés p. 76

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier les variations de f ; dresser son tableau de variation.

Exercice 9

niveau 3

Corrigés p. 76

Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{-x^2 - 3x - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g .
2. Étudier les variations de g ; dresser son tableau de variation.

Exercice 10

niveau 3

Corrigés p. 77

On considère un cône de hauteur 10 cm, de rayon r et de volume V .

1. Rappeler la formule donnant le volume d'un cône.
2. Exprimer le rayon r en fonction du volume V .
3. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 100]$ qui à un volume V , en cm^3 , associe le rayon r , en cm. Quel est le sens de variation de f ?
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(V) = 20$.

Fonction valeur absolue

Exercice 11

niveau 1

Corrigés p. 77

1. Calculer la valeur absolue des nombres $a = -2 \times 10^{-3}$ et $b = 5 - 2\sqrt{7}$.
2. Écrire sans le symbole de la valeur absolue $|3 - x|$ et $|x + 1,5|$, où x est un nombre réel quelconque.

Exercice 12

niveau 1

Corrigés p. 77

Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = |5 - x|$.

Exercice 13

niveau 2

Corrigés p. 78

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = |x| - 2$ et $g(x) = |x - 2|$. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 14

niveau 2

Corrigés p. 78

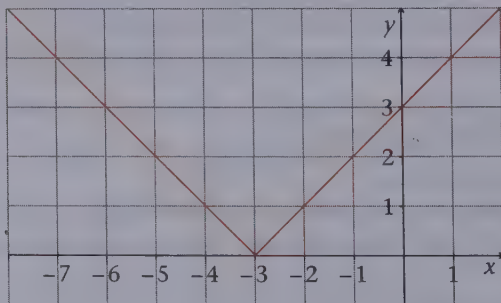
Résoudre l'équation $|x - 7| = 0,5$.

Exercice 15

niveau 2

Corrigés p. 79

1. Donner l'écriture de la fonction f représentée par la courbe C.



2. Résoudre l'équation $f(x) = 2$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) < 1$.

Exercice 16

niveau 2

Corrigés p. 79

1. Justifier que, pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$.
2. Simplifier les écritures $g(x) = \sqrt{(x-3)^2}$ et $h(x) = \sqrt{(x+2)^2}$.

Problèmes

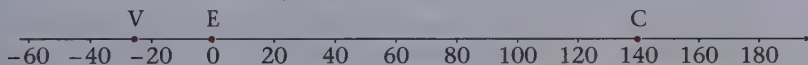
Exercice 17

niveau 3

Corrigés p. 79

Marie est étudiante à l'École nationale des Chartes. Elle a décidé de se mettre au sport et se rend à son école en vélo. Pour se changer les idées, elle prévoit d'aller voir un film au cinéma de quartier en sortant des cours. Le cinéma (C) et l'école (E) sont situés sur le même axe routier à 140 mètres l'un de l'autre. On note V l'endroit où Marie dépose son vélo et x l'abscisse de ce point V.

La situation est modélisée ainsi :



On note f la fonction qui à x associe la distance parcourue par Marie pour effectuer le parcours vélo-école-cinéma-vélo.

1. Parmi les algorithmes suivants, déterminer quel est le seul qui permet de calculer correctement la distance parcourue par Marie.

Algorithme n° 1

```
SI  $x < 0$  ALORS  
   $f(x)$  prend la valeur  $2x + 280$   
SINON  
  SI  $x > 140$  ALORS  
     $f(x)$  prend la valeur  $2x$   
  SINON  
     $f(x)$  prend la valeur 280  
Fin SI  
Fin SI
```

Algorithme n° 2

```
SI  $x > 140$  ALORS  
   $f(x)$  prend la valeur  $2x$   
SINON  
  SI  $x < 140$  ALORS  
     $f(x)$  prend la valeur 280  
  SINON  
     $f(x)$  prend la valeur  $-2x + 280$   
Fin SI  
Fin SI
```

Algorithme n° 3

```
SI  $x < 0$  ALORS  
   $f(x)$  prend la valeur  $-2x + 280$   
SINON  
  SI  $x < 140$  ALORS  
     $f(x)$  prend la valeur 280  
  SINON  
     $f(x)$  prend la valeur  $2x$   
Fin SI  
Fin SI
```

2. Après de laborieux calculs, Marie pense avoir établi une formule permettant de déterminer la distance qu'elle doit parcourir :

$$f(x) = \frac{1}{2} (x + |x| + 280 + |3x - |x|| - 280)$$

Calculer le résultat obtenu par ce procédé avec $x = -10$, $x = 50$ et $x = 150$. Cela est-il cohérent avec la situation réelle ?

Exercice 18

niveau 3

Corrigés p. 80

Jérôme est rentré en classe de seconde au lycée R.

Sa maison M, son club de basket B, la piscine P et le lycée R sont situés sur la même route.

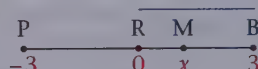
Chaque semaine, il se rend cinq jours au lycée (soit 5 trajets, car il est demi-pensionnaire), fait du basket le mercredi et le samedi et va à la piscine le dimanche.

Pour simplifier, on suppose que la route est rectiligne.

On sait que :

- le lycée R est à 3 km du club de basket B ;
- le lycée R est à égale distance de la piscine et du club de basket.

Sur le dessin, on a illustré le cas où la maison de Jérôme est située entre le lycée R et le club de basket B.



Soit x l'abscisse de la maison M de Jérôme en prenant comme origine son lycée R.

1. Exprimer en fonction de x les valeurs des distances MR, MB et MP. Quelle distance $f(x)$ parcourt Jérôme chaque semaine en allant au lycée, au club de basket et à la piscine ?

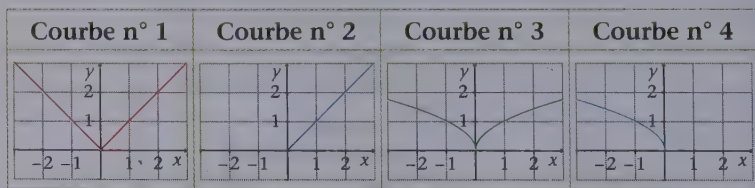
2. Déterminer la valeur de x telle que la distance hebdomadaire parcourue par Jérôme soit égale à 15 km.

Exercice 19

niveau 3

Corrigés p. 81

Associer chacune des courbes ci-dessous à la fonction qu'elle représente.



$$f_1 : x \mapsto \sqrt{-x} ; f_2 : x \mapsto (\sqrt{x})^2 ; f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2} ; f_4 : x \mapsto \sqrt{|x|}.$$

Exercice 20

niveau 3

Corrigés p. 81

Dorothée joue du violon. Un ami lui dit que la fréquence f (en hertz), la tension T (en newtons), la masse linéique m (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$) et la longueur L (en mètres) d'une corde sont liés par la formule

$$f = \frac{1}{2L} \times \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Dorothée essaie d'accorder la corde SOL de son violon. La longueur de cette corde mise en jeu est de 33 cm.

1. Sachant que la masse linéique de la corde SOL, dont la fréquence est de 196 Hz, est de $3,7 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ (soit $3,7 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$), déterminer la tension appliquée à 0,01 newton près quand elle est bien accordée.
2. Pendant la délicate phase d'accord, l'accordeur de Dorothée lui indique que la fréquence entendue a oscillé entre 194 Hz et 197 Hz. Déterminer un encadrement de la tension appliquée pendant la phase d'accord de l'instrument. On donnera des valeurs approchées en newtons à 10^{-3} près.

Exercice 21

niveau 3

Corrigés p. 81

On se place dans un repère orthonormé d'origine O. Soit M un point de coordonnées $(x; y)$. Soit N le point de coordonnées $(y; x)$.

1. a. Montrer que le milieu I de [MN] est sur la droite d d'équation $y = x$.
b. Montrer que $OM = ON$.

c. Quelle particularité ont les points M et N par rapport à la droite d ?

2. On considère maintenant la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$.

Montrer que les courbes représentatives des fonctions f et racine carrée sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d .

Exercice 22

niveau 3

Corrigés p. 82

Joseph est le meilleur plombier qu'on puisse trouver dans son département. Aujourd'hui, il doit installer une arrivée d'eau pour une douche chez une bonne cliente. Le diamètre intérieur d (en mm) du tuyau dépend du débit D (en $\text{L}\cdot\text{h}^{-1}$) et de la vitesse d'écoulement de

l'eau V (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). Il se calcule à l'aide de la formule $d = \sqrt{\frac{D}{2,826V}}$.

Sachant que la vitesse d'écoulement dans les tuyauteries domestiques est de 1 mètre par seconde et que le débit attendu pour une douche oscille entre 11 et 13 litres par minute, déterminer un encadrement (à 0,01 mm près) du diamètre intérieur du tuyau que Joseph doit installer.

QCM

- 1 a. $A = 5 \times 3\sqrt{6} - 2 \times 5\sqrt{6} + 6\sqrt{6} = 11\sqrt{6}$.
- 2 b. $B = \sqrt{200} - \sqrt{72} = \sqrt{10^2 \times 2} - \sqrt{6^2 \times 2} = 10\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
- 3 a. $C = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
- 4 b. $D = (2\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{2})^2 = 2^2 \times (\sqrt{5})^2 - 5^2 \times (\sqrt{2})^2 = 20 - 50 = -30$.
- 5 c. $x^2 - 7 = (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$.
- 6 c. $-2x + 9 \geq 0$ si $x \leq 4,5$.
- 7 b. La fonction du second degré $u : x \mapsto -x^2 + 25$ est croissante sur $[-5 ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; 5]$; les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation.
- 8 a. $|7^2 - 4^2| = |49 - 64| = |-15| = 15$.
- 9 c. $|x + 7| = 1$ signifie que la distance de x à -7 vaut 1 ; il y a deux possibilités : $-7 - 1 = -8$ et $-7 + 1 = -6$.
- 10 c. $|x - 3| < 0,5$ signifie que la distance de x à 3 est strictement inférieure à 0,5.

Exercice 1

$$A = \frac{10 - \sqrt{50}}{10} = \frac{2 \times 5 - 5\sqrt{2}}{2 \times 5} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = 9\sqrt{50} - 6\sqrt{98} - \sqrt{162} = 45\sqrt{2} - 42\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$$

$$C = \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})^2}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{14 - 6\sqrt{5}}{4} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$

$$D = \frac{(2 \times \sqrt{3})^5}{(\sqrt{6})^3} = \frac{2^5 \times 3^2 \times \sqrt{3}}{6\sqrt{6}} = \frac{2^4 \times 3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{2^4 \times 3}{\sqrt{2}} = 2^3 \times 3 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 24\sqrt{2}$$

Exercice 2

$$1. a^2 = (2 + \sqrt{6})^2 = 10 + 4\sqrt{6} ; b^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24.$$

$$2. \frac{a}{b} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{(2 + \sqrt{6}) \times \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6} + 6}{12} = \frac{\sqrt{6} + 3}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{2} ;$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}(2 - \sqrt{6})}{(2 + \sqrt{6})(2 - \sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{6} - 12}{-2} = 6 - 2\sqrt{6}.$$

Exercice 3

1. Comme $0,81 = 0,9^2$, l'inéquation s'écrit $\sqrt{x} \leq \sqrt{0,81}$, ce qui équivaut à $0 \leq x \leq 0,81$.

L'ensemble des solutions est l'intervalle $[0 ; 0,81]$.

2. Comme $2,25 = 1,5^2$, l'inéquation s'écrit $\sqrt{x} > \sqrt{2,25}$, ce qui équivaut à $x > 2,25$.

L'ensemble des solutions est l'intervalle $]2,25 ; +\infty[$.

Exercice 4

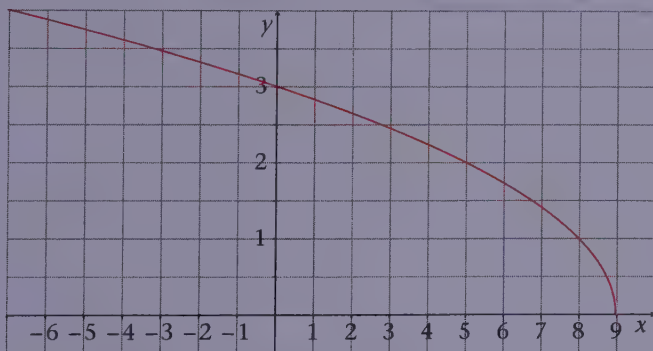
1. $f(x) = \sqrt{9-x}$; $f(-7) = \sqrt{9-(-7)} = \sqrt{16} = 4$; $f(0) = 3$; $f(5) = 2$; $f(9) = 0$.
L'ensemble de définition de f est $]-\infty ; 9]$.

2. On pose $u(x) = 9 - x$. La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur négatif -1 . Elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule pour la valeur 9 et est positive sur l'intervalle $]-\infty ; 9]$.

Comme la fonction u est décroissante sur $]-\infty ; 9]$, f est aussi décroissante sur $]-\infty ; 9]$.

RAPPEL

Si u est une fonction définie et positive sur un intervalle I , la fonction $\sqrt{u}$ est définie sur I et a le même sens de variation que u .



3. Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 2$ est $]5 ; 9]$.

$\sqrt{9-x} < 2$ équivaut à $9-x < 4$ et $x \in]-\infty ; 9]$;
 $x > 5$ et $x \in]-\infty ; 9]$.

On retrouve l'ensemble des solutions $]5 ; 9]$.

Exercice 5

1. La fonction racine carrée est définie sur $[0 ; +\infty[$, donc les ensembles de définition de f et g sont $D_f = [0 ; +\infty[$ et $D_g = [0 ; +\infty[$.

La fonction h est écrite sous la forme $\sqrt{u}$, avec $u(x) = x + 2$; l'ensemble de définition de h est l'ensemble des valeurs de x telles que $x + 2 \geq 0$; donc $D_h = [-2 ; +\infty[$.

2. C représente f , C' représente h et C'' représente g .

3. Pour tout réel x positif, $x < x + 2$; comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a $\sqrt{x} < \sqrt{x+2}$.

Pour comparer g et h , on compare leurs carrés :

$$(\sqrt{x+2})^2 = x + 4\sqrt{x} + 4 \text{ et } (\sqrt{x+2})^2 = x + 2.$$

Pour tout réel x positif, $x + 4\sqrt{x} + 4 > x + 2$, donc $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x+2}$.

Donc on a bien, pour tout réel positif x , $f(x) < h(x) < g(x)$.

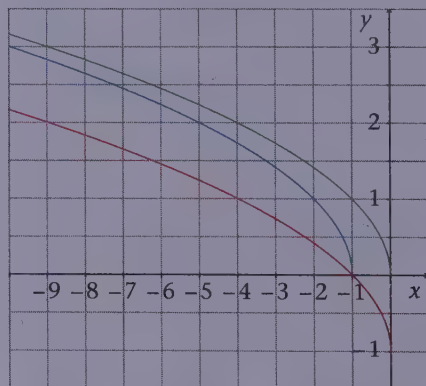
Exercice 6

1. La fonction f est écrite sous la forme $\sqrt{u}$, avec $u(x) = -x$; l'ensemble de définition de f est l'ensemble des valeurs de x telles que $-x \geq 0$; donc $D_f =]-\infty ; 0]$.

$g(x) = f(x) - 1$, donc g a le même ensemble de définition que f ; $D_g =]-\infty ; 0]$.

La fonction h est écrite sous la forme $\sqrt{u}$, avec $u(x) = -x - 1$; l'ensemble de définition de h est l'ensemble des valeurs de x telles que $-x - 1 \geq 0$; donc $D_h =]-\infty ; -1]$.

2.



3. $\sqrt{-x} < 3$ équivaut à $-x < 9$ et $x \in]-\infty ; 0]$;
 $x > -9$ et $x \in]-\infty ; 0]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 3$ est $] -9 ; 0]$.

$\sqrt{-x} - 1 < 0$ équivaut à $\sqrt{-x} < 1$, puis $-x < 1$ et $x \in]-\infty ; 0]$;
 $x > -1$ et $x \in]-\infty ; 0]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) < 0$ est $] -1 ; 0]$.

$$\sqrt{-x-1} > 2 \text{ équivaut à } -x-1 > 4 \text{ et } x \in]-\infty; -1] \\ x < -5 \text{ et } x \in]-\infty; -1].$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) > 2$ est $]-\infty; -5[$.

Exercice 7

1. La fonction f est écrite sous la forme $\sqrt{u}$, avec $u(x) = -x + 3$; l'ensemble de définition de f est l'ensemble des valeurs de x telles que $-x + 3 \geq 0$; donc $D_f =]-\infty; 3]$.

La fonction g est écrite sous la forme $\sqrt{u}$, avec $u(x) = x + 3$; l'ensemble de définition de g est l'ensemble des valeurs de x telles que $x + 3 \geq 0$; donc $D_g = [-3; +\infty[$.

La fonction h est le produit des fonctions f et g . Son ensemble de définition est l'ensemble des réels pour lesquels f et g sont définies.

Donc $D_h = D_f \cap D_g = [-3; 3]$.

2. On étudie le signe des variations de f et g définies par $f(x) = \sqrt{-x+3}$ et $g(x) = \sqrt{x+3}$: on pose $u(x) = -x + 3$. La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur négatif -1 . Elle est décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule pour la valeur 3 et est positive sur l'intervalle $]-\infty; 3]$.

Comme la fonction u est décroissante sur $]-\infty; 3]$, f est aussi décroissante sur $]-\infty; 3]$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	3
$f(x)$		

On pose $u(x) = x + 3$. La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur positif 1. Elle est croissante sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule pour la valeur -3 et est positive sur l'intervalle $[-3; +\infty[$.

Comme la fonction u est croissante sur $[-3; +\infty[$, g est aussi croissante sur $[-3; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	-3	$+\infty$
$g(x)$		

3. La fonction h est le produit des fonctions f et g . D'après le graphique, h est croissante sur $[-3; 0]$ et décroissante sur $[0; 3]$.

On transforme l'écriture de h : $h(x) = \sqrt{(-x+3) \times (x+3)} = \sqrt{-x^2+9}$.

On pose $u(x) = -x^2 + 9$. La fonction u est une fonction polynôme de degré 2; elle est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$; elle s'annule pour les valeurs -3 et 3 et est positive sur l'intervalle $[-3; 3]$.

Donc h est croissante sur $[-3; 0]$ et décroissante sur $[0; 3]$.

Tableau de variations :

x	-3	0	3
$h(x)$	0	3	0

Exercice 8

1. f est définie si $x^2 - 4 \geq 0$. Or $x^2 \geq 4$ équivaut à $x \leq -2$ ou $x \geq 2$.

Donc $D =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

2. On pose $u(x) = x^2 - 4$; la fonction u est une fonction polynôme de degré 2, décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$h(x)$		0	0	

Exercice 9

1. En posant $u(x) = -x^2 - 3x - 2$, on a $g = \sqrt{u}$.

g est définie si $u(x) \geq 0$. On étudie le signe de ce trinôme.

$a = -1$, $b = -3$, $c = -2$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (-2)$; $\Delta = 1$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{-2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{-2} = -2.$$

Les solutions de l'équation $-x^2 - 3x - 2 = 0$ sont -1 et -2 .

On factorise : $-x^2 - 3x - 2 = -(x+1)(x+2)$.

$-(x+1)(x+2) \geq 0$ équivaut à $-2 \leq x \leq -1$.

Donc $D = [-2; -1]$.

2. On commence par étudier les variations de u .

$a = -1$, $b = -3$, $c = -2$, donc $\frac{-b}{2a} = \frac{3}{-2} = -1,5$; $u(-1,5) = 0,25$.

La forme canonique de u est $u(x) = -(x+1,5)^2 + 0,25$.

Comme $a < 0$, la fonction u est croissante sur $]-\infty; -1,5]$ et décroissante sur $[-1,5; +\infty[$.

On en déduit que g est croissante sur $[-2 ; -1,5]$ et décroissante sur $[-1,5 ; -1]$.

Tableau de variations :

x	-2	$-1,5$	-1
$g(x)$	0	0,5	0

Exercice 10

1. Volume V d'un cône de rayon r et de hauteur h : $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

2. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ équivaut à $r^2 = \frac{3 \times V}{\pi h}$, puis à $r = \sqrt{\frac{3 \times V}{\pi h}}$.

Pour $h = 10$, on obtient $r = \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \sqrt{V}$.

3. La fonction f est définie sur $[0 ; 100]$ par $f(V) = \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \sqrt{V}$.

Elle est de la forme λu , en posant $\lambda = \sqrt{\frac{3}{10\pi}}$; u est la fonction racine carrée.

Comme $\lambda > 0$, les fonctions u et λu ont le même sens de variation ; donc la fonction f est bien strictement croissante sur $[0 ; 100]$.

4. Graphiquement, l'équation $f(V) = 20$ a une seule solution v_0 comprise entre 40 et 45. Donc le rayon vaut 20 cm quand le volume est égal à v_0 .

Exercice 11

1. $|a| = |-2 \times 10^{-3}| = 2 \times 10^{-3}$.

$5^2 = 25$ et $(2\sqrt{7})^2 = 28$; $25 < 28$, donc $2\sqrt{7} > 5$

et $|b| = |5 - 2\sqrt{7}| = 2\sqrt{7} - 5$.

2. Si $x \leq 3$, $|3 - x| = 3 - x$ et si $x \geq 3$, $|3 - x| = x - 3$;

$|x + 1,5| = |x - (-1,5)|$ si $x \leq -1,5$, $|x + 1,5| = -1,5 - x$ et si $x \geq -1,5$, $|x + 1,5| = x + 1,5$.

ATTENTION

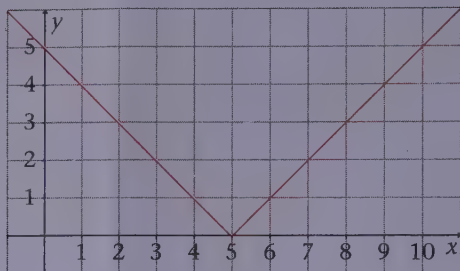
10^{-3} est un nombre positif ; il est égal à 0,001.

Exercice 12

Si $x \leq 5$, $|5 - x| = 5 - x$ et si $x \geq 5$, $|5 - x| = |x - 5| = x - 5$; $f(5) = 0$.

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty ; 5]$ et croissante sur $[5 ; +\infty[$.

La courbe représentative de f est la réunion des deux demi-droites d'équations $y = -x + 5$ sur $]-\infty ; 5]$ et $y = x - 5$ sur $[5 ; +\infty[$.



Exercice 13

On trace dans un même repère les courbes représentatives de $f(x) = |x| - 2$ et $g(x) = |x - 2|$.

Graphiquement, les deux courbes semblent confondues sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

Par le calcul, il faut écrire ces deux fonctions sans le symbole de la valeur absolue.

Si $x \leq 0$, $f(x) = |x| - 2 = -x - 2$
et si $x \geq 0$, $f(x) = |x| - 2 = x - 2$.

Si $x \leq 2$, $g(x) = |x - 2| = -x + 2$
et si $x \geq 2$, $g(x) = |x - 2| = x - 2$.

On distingue trois cas :

– sur l'intervalle $]-\infty; 0]$:

l'équation $f(x) = g(x)$ s'écrit $-x - 2 = -x + 2$, soit $0x = 4$; cette équation n'a pas de solution ;

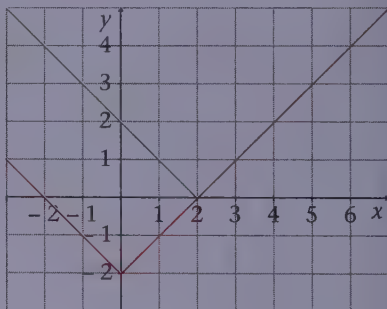
– sur l'intervalle $[0; 2]$:

l'équation $f(x) = g(x)$ s'écrit $x - 2 = -x + 2$, soit $2x = 4$; d'où $x = 2$;

– sur l'intervalle $[2; +\infty[$:

l'équation $f(x) = g(x)$ s'écrit $x - 2 = x - 2$; soit $0x = 0$; tous les réels x de $[2; +\infty[$ sont solutions.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est $[2; +\infty[$.



Exercice 14

Graphiquement, la droite d'équation $y = 0,5$ coupe la courbe représentant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 7|$ en deux points d'abscisses 6,5 et 7,5.

Si $x \leq 7$, $f(x) = 7 - x$ et si $x \geq 7$, $f(x) = x - 7$.

On distingue deux cas :

– sur l'intervalle $]-\infty ; 7]$:

l'équation $|x - 7| = 0,5$ s'écrit

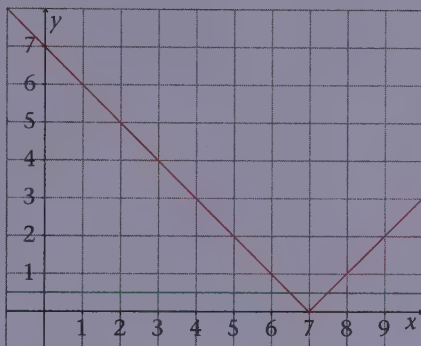
$7 - x = 0,5$, d'où $x = 6,5$;

– sur l'intervalle $[7 ; +\infty[$:

l'équation $|x - 7| = 0,5$ s'écrit

$x - 7 = 0,5$, d'où $x = 7,5$.

Donc l'équation $|x - 7| = 0,5$
a deux solutions 6,5 et 7,5.



Exercice 15

1. $f(-3) = 0$ et $f(0) = 3$; les deux demi-droites tracées ont pour équations $y = -x - 3$ et $y = x + 3$, donc $f(x) = |x + 3|$.

2. La droite d'équation $y = 2$ coupe la courbe aux points d'abscisses -5 et -1 ; donc l'équation $f(x) = 2$ a pour solutions -5 et -1 .

3. La droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe aux points d'abscisses -4 et -2 ; elle est au-dessus de la courbe sur l'intervalle $[-4 ; -2]$; donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 1$ est $]-4 ; -2[$.

Exercice 16

1. Si $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$ et $|x| = x$;

si $x \leq 0$, $\sqrt{x^2} = -x$ et $|x| = -x$.

Par conséquent, pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

2. D'après la question 1., $g(x) = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$, donc sur $]-\infty ; 3]$, $g(x) = -x + 3$ et sur $[3 ; +\infty[$, $g(x) = x - 3$.

$h(x) = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$, donc sur $]-\infty ; -2]$, $g(x) = -x - 2$ et sur $[-2 ; +\infty[$, $g(x) = x + 2$.

Exercice 17

1. On suppose que Marie dépose son vélo au point V d'abscisse -10 .

La distance qu'elle devra parcourir sera alors égale à :

$$VE + EC + CV = 10 + 140 + 150 = 300.$$

Avec l'algorithme n° 1, on obtient $f(-10) = 2 \times (-10) + 280 = 260$, donc l'algorithme n° 1 n'est pas le bon.

On applique l'algorithme n° 2 à la même valeur. La condition $x > 140$ n'est pas vérifiée et la condition $x < 140$ est vérifiée, donc $f(-10) = 280$.

L'algorithme n° 2 n'est pas le bon.

L'algorithme n° 3 est donc celui qui est correct.

2. On applique la formule de Marie :

$$\begin{aligned}
 f(-10) &= \frac{1}{2}(-10 + |-10| + 280 + |3 \times (-10) - |-10|| - 280|) \\
 &= \frac{1}{2}(-10 + 10 + 280 + |-30 - 10 - 280|) \\
 &= \frac{1}{2}(-10 + 10 + 280 + 320) = 300 \\
 f(50) &= \frac{1}{2}(50 + |50| + 280 + |3 \times 50 - |50| - 280|) \\
 &= \frac{1}{2}(50 + 50 + 280 + |150 - 50 - 280|) \\
 &= \frac{1}{2}(50 + 50 + 280 + 180) = 280
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(150) &= \frac{1}{2}(150 + |150| + 280 + |3 \times 150 - |150| - 280|) \\
 &= \frac{1}{2}(150 + 150 + 280 + |450 - 150 - 280|) \\
 &= \frac{1}{2}(150 + 150 + 280 + 20) = 300
 \end{aligned}$$

Tous ces résultats sont cohérents avec la situation concrète.

Exercice 18

1. $MR = |x|$, $MB = |x - 3|$, $MP = |x + 3|$.

La distance parcourue par Jérôme chaque semaine est :

$$f(x) = 5MR + 2MB + MP$$

$$f(x) = 5|x| + 2|x - 3| + |x + 3|.$$

2. Méthode graphique :

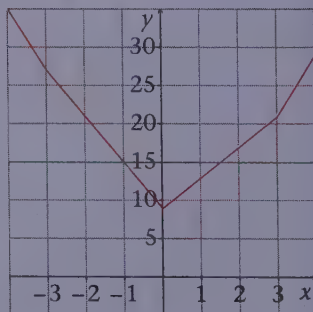
On trace la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = 15$ sur un logiciel.

Les solutions de l'équation $f(x) = 15$ sont -1 et $1,5$.

$$\begin{aligned}
 \text{On vérifie : } f(-1) &= 5|-1| + 2|-4| + |2| \\
 &= 5 + 8 + 2 = 15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(1,5) &= 5|1,5| + 2|-1,5| + |4,5| \\
 &= 7,5 + 3 + 4,5 = 15.
 \end{aligned}$$

Donc Jérôme doit habiter soit à 1 km du lycée entre la piscine et le lycée, soit à 1,5 km du lycée, entre le lycée et le club de basket.



Méthode avec calcul :

On écrit $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

On distingue 4 cas :

– sur l'intervalle $]-\infty ; -3]$, $f(x) = 5(-x) + 2(-x + 3) - x - 3 = -8x + 3$;

– sur l'intervalle $[-3 ; 0]$, $f(x) = 5(-x) + 2(-x + 3) + x + 3 = -6x + 9$;

– sur l'intervalle $[0 ; 3]$, $f(x) = 5x + 2(-x + 3) + x + 3 = 4x + 9$;

– sur l'intervalle $[3 ; +\infty[$, $f(x) = 5x + 2(x - 3) + x + 3 = 8x - 3$.

On résout l'équation $f(x) = 15$ dans chacun des intervalles :

$-8x + 3 = 15$ si $x = -2,25$, mais $-2,25 \notin]-\infty ; -3]$;

$-6x + 9 = 15$ si $x = -1$ et $-1 \in [-3 ; 0]$;

$4x + 9 = 15$ si $x = 1,5$ et $1,5 \in [0 ; 3]$;

$8x - 3 = 15$ si $x = 2,25$, mais $2,25 \notin [3 ; +\infty[$.

Exercice 19

La fonction f_1 est définie sur $]-\infty ; 0]$ et c'est la seule. Elle correspond donc à la courbe n° 4.

La fonction f_2 est définie sur $[0 ; +\infty[$ et c'est la seule. Elle correspond donc à la courbe n° 2.

Par ailleurs, $f_3(x) = |x|$ (voir l'exercice 16), donc cette fonction correspond à la courbe n° 1.

La fonction f_4 correspond donc à la courbe n° 3.

Exercice 20

1. En remplaçant par les valeurs numériques, on a :

$$196 = \frac{1}{2 \times 0,33} \times \sqrt{\frac{T}{3,7 \times 10^{-3}}} \Leftrightarrow 129,36 = \sqrt{\frac{T}{3,7 \times 10^{-3}}} \Leftrightarrow 129,36^2 = \frac{T}{3,7 \times 10^{-3}}$$

$$\Leftrightarrow 129,36^2 \times 3,7 \times 10^{-3} = T$$

Autrement dit, $T \approx 61,92$ N.

2. On a l'encadrement suivant :

$$194 \leq \frac{1}{2L} \times \sqrt{\frac{T}{m}} \leq 197 \Leftrightarrow 388L \leq \sqrt{\frac{T}{m}} \leq 394L \Leftrightarrow (388L)^2 \leq \frac{T}{m} \leq (394L)^2$$

$$\Leftrightarrow (388L)^2 m \leq T \leq (394L)^2 m$$

En remplaçant par les valeurs numériques données, on trouve que la tension est comprise entre 60,659 N et 62,549 N.

Exercice 21

$$1. a. x_i = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{x + y}{2} \text{ et } y_i = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{y + x}{2}.$$

On a bien $x_i = y_i$, donc **I** appartient à **d**.

$$\begin{aligned} \text{b. } OM &= \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{et } ON &= \sqrt{(x_N - x_O)^2 + (y_N - y_O)^2} = \sqrt{(y-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{y^2 + x^2}, \\ \text{donc } OM &= ON. \end{aligned}$$

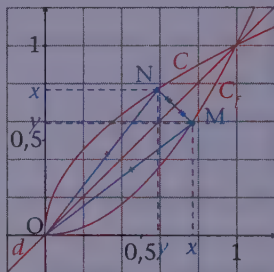
c. Les points M et N sont symétriques l'un de l'autre par rapport à d .

2. On note C la courbe représentative de la fonction racine carrée et C_f la courbe représentative la fonction f .

Soit $x > 0$ et soit $M(x; \sqrt{x})$ un point de C . Le symétrique de M par rapport à d a pour coordonnées $(\sqrt{x}; x)$ et il appartient à C_f car $\sqrt{x} > 0$

et $(\sqrt{x})^2 = x$. Le symétrique de la courbe C par rapport à d est donc inclus dans C_f . Réciproquement, si $M(x; x^2)$ est un point de C_f , son symétrique par rapport à d a pour coordonnées $(x^2; x)$ et il appartient bien à C car $x^2 > 0$ et

$\sqrt{x^2} = x$. Les deux courbes C et C_f sont donc bien symétriques l'une de l'autre par rapport à d .



Exercice 22

D'après l'énoncé, on a $V = 1$, donc $d = \sqrt{\frac{D}{2,826}}$ où le débit est exprimé en litres par heure.

$$\text{On a } 11 \times 60 \leq D \leq 13 \times 60, \text{ donc } \frac{11 \times 60}{2,826} \leq \frac{D}{2,826} \leq \frac{13 \times 60}{2,826}.$$

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que :

$$\sqrt{\frac{11 \times 60}{2,826}} \leq \sqrt{\frac{D}{2,826}} \leq \sqrt{\frac{13 \times 60}{2,826}}.$$

ATTENTION

Attention aux unités du débit !

Finalement, on trouve un diamètre compris entre 15,28 et 16,61 mm.

1 Nombre dérivé

a. Taux d'accroissement d'une fonction

■ Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a et b deux réels distincts de I . On pose $h = b - a$, ce qui permet d'écrire $b = a + h$.

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a + h$ est le nombre $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

b. Nombre dérivé d'une fonction en un point

■ Le **nombre dérivé** de f en a est la limite, si elle existe, du taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0. On le note $f'(a)$.

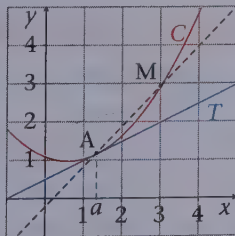
■ On dit alors que f est **dérivable** en a .

c. Tangente à une courbe

■ Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.

Soit A le point de C d'abscisse a et M le point de C d'abscisse $a + h$.

Le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ donne le coefficient directeur de la droite (AM).



■ Si la fonction f est dérivable en a , alors la droite T passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$ est la **tangente** à la courbe C au point A .

■ Une équation de T est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

2 Calcul des dérivées

a. Fonction dérivée

■ Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable pour tout x de I , on dit que f est dérivable sur I . La fonction dérivée de f est la fonction f' qui à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.

b. Dérivées des fonctions usuelles

Intervalle I	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	k (k constante réelle)	0
$\mathbb{R}$	x	1
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$
$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$
$\mathbb{R}$	x^n (n entier, $n \geq 1$)	nx^{n-1}
$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$] 0 ; +\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

c. Dérivée d'une somme, d'un produit

■ Soit u et v deux fonctions dérivables sur le même intervalle I et soit λ un nombre réel.

La fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

La fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

■ Conséquences :

La fonction u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2uu'$.

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

d. Dérivée d'un quotient

■ Soit u et v deux fonctions dérivables sur le même intervalle I .

Si v ne s'annule pas sur I (cela signifie que, pour tout réel x de I , $v(x) \neq 0$), alors :

– la fonction inverse $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$;

– la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

■ **Conséquence** : Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur tout intervalle où elle est définie.

3 Utilisation des dérivées

a. Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

■ f est croissante sur I si, et seulement si, f' est positive sur I .

■ f est décroissante sur I si, et seulement si, f' est négative sur I .

■ f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I .

b. Extremum local d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et c un élément de I .

■ Si $f(c)$ est un extremum local de f , alors $f'(c) = 0$.

■ Si la dérivée s'annule et change de signe en c , alors f admet un extremum local en ce point.



Calculer un nombre dérivé

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $[-1 ; 4]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

Calculer le nombre dérivé de f en 1.

Solution commentée

Savoir-faire

- On commence par calculer les images par f de a et $a + h$.
- On calcule $f(a + h) - f(a)$ et le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- On simplifie, pour h non nul, ce taux d'accroissement.
- On calcule la limite de l'expression obtenue lorsque h tend vers 0, ce qui revient à calculer la valeur de cette expression pour $h = 0$.

$$f(1) = -1 ;$$

$$f(1 + h) = (1 + h)^2 - 4(1 + h) + 2 = h^2 + 2h + 1 - 4 - 4h + 2 = h^2 - 2h - 1 ;$$

$$f(1 + h) - f(1) = h^2 - 2h = h(h - 2).$$

Le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$ est :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h(h-2)}{h} = h - 2.$$

Lorsque h tend vers 0, l'expression $h - 2$ tend vers -2 .

Donc la fonction f est dérivable en 1 et a pour nombre dérivé $f'(1) = -2$.



Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $[-1 ; 4]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 2$ et C sa courbe représentative.

1. Sachant que $f'(1) = -2$, tracer la tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 1.
2. Déterminer une équation de cette tangente.

Solution commentée

Savoir-faire

- Le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C représentant f au point A d'abscisse a .
- On place donc le point A et on trace la droite passant par A et de coefficient directeur -2 .
- Une équation de la tangente T est ensuite donnée par la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

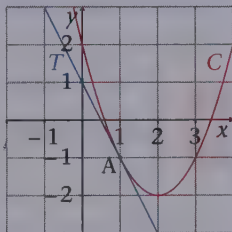
1. Le coefficient directeur de la tangente T en A est égal au nombre dérivé ; il vaut donc -2 .

Comme $f(1) = -1$, on trace la droite passant par le point $A(1 ; -1)$ et de coefficient directeur -2 .

2. Pour déterminer une équation de la tangente T , on remplace a par 1 dans la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

On obtient $y = -2(x - 1) + (-1)$.

Une équation de T est $y = -2x + 1$.



3 Calculer la dérivée d'une somme et d'un produit

Énoncé

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 9$. Calculer la dérivée de f .
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x^2(x^2 - 7x + 9)$. Calculer la dérivée de g .

Solution commentée

Savoir-faire

- On écrit les formules que l'on va utiliser et on pose clairement l'expression à laquelle correspond chaque lettre d'une formule.
 $(u + v)' = u' + v'$; $(\lambda u)' = \lambda u'$; $(u v)' = u'v + uv'$.
- On calcule les dérivées des fonctions usuelles qui apparaissent.
- On applique les formules et on simplifie l'écriture de l'expression obtenue.

1. f se présente sous la forme d'une somme de trois fonctions :

$$u : x \mapsto x^2, v : x \mapsto -7x \text{ et } w : x \mapsto 9.$$

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées. Or $u'(x) = 2x$; $v'(x) = -7$ et $w'(x) = 0$. Donc $f'(x) = 2x - 7$.

2. g se présente sous la forme d'un produit de deux fonctions (la deuxième étant la fonction f de la question 1.). On applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$. On pose $u(x) = -3x^2$ et $v(x) = x^2 - 7x + 9$; la fonction u est le produit de la fonction carré par un réel, donc $u'(x) = -3 \times 2x$ et $v'(x) = 2x - 7$.

$$g'(x) = (-6x)(x^2 - 7x + 9) + (-3x^2)(2x - 7).$$

$$\text{On développe : } g'(x) = -6x^3 + 42x^2 - 54x - 6x^3 + 21x^2.$$

$$\text{Donc } g(x) = -12x^3 + 63x^2 - 54x.$$



4 Calculer la dérivée d'un quotient

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $[-7 ; 3[$ par $f(x) = \frac{5x-2}{2x-6}$. Calculer la dérivée de f .

Solution commentée

Savoir-faire

- La fonction f est une fonction homographique ; son dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle donné.
- La fonction f est donc dérivable sur $[-7 ; 3[$; on utilise la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

On applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ en posant $u(x) = 5x - 2$ et $v(x) = 2x - 6$;

on a alors $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 2$.

$$f'(x) = \frac{5 \times (2x - 6) - (5x - 2) \times 2}{(2x - 6)^2} ;$$

$$f'(x) = \frac{10x - 30 - 10x + 4}{(2x - 6)^2} ; \text{ donc } f'(x) = \frac{-26}{(2x - 6)^2}.$$

$$(2x - 6)^2 = (2(x - 3))^2 = 4(x - 3)^2 \text{ et } \frac{-26}{(2x - 6)^2} = -\frac{13 \times 2}{4(x - 3)^2} = -\frac{13}{2(x - 3)^2}.$$

ATTENTION

Un logiciel de calcul

formel donne $-\frac{13}{2(x-3)^2}$.

Vous devez vérifier avec votre calcul !

5 Étudier les variations d'une fonction

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $[-6 ; 2]$ par $f(x) = -0,25x^2 - 2x + 1$.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. Construire la courbe représentative de f .

Solution commentée

Savoir-faire

Pour étudier les variations d'une fonction f , on suit les étapes suivantes :

- on calcule la dérivée ;
- on étudie le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x ;
- on en déduit le sens de variation de f par intervalle ;
- on dresse un tableau de variations en indiquant tous les résultats obtenus.

1. La fonction f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Elle a pour dérivée $f'(x) = -0,25 \times 2x - 2$, d'où $f'(x) = -0,5x - 2$.

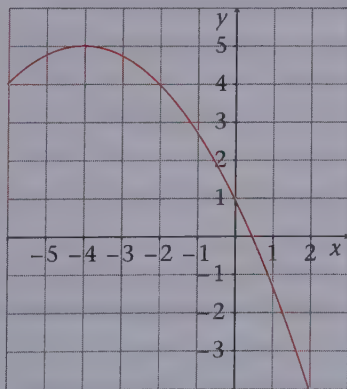
La fonction dérivée est une fonction affine qui s'annule pour la valeur -4 ; son coefficient directeur $-0,5$ étant négatif, $f'(x)$ est positif si $x < -4$ et négatif si $x > -4$.

Donc f est croissante sur $[-6 ; -4]$ et décroissante sur $[-4 ; 2]$.

On dresse le tableau de variations :

x	-6	-4	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	4	5	-4

2. La courbe donnée par la calculatrice est une portion de parabole de sommet $(-4 ; 5)$; on constate la cohérence avec le tableau de variations.



Exploiter le sens de variation pour obtenir des inégalités

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $[-7 ; 3[$ par :

$$f(x) = \frac{5x-2}{2x-6}.$$

Déterminer un encadrement de $f(x)$ lorsque x décrit $[-2 ; 2]$.

Solution commentée

Savoir-faire

- Pour déterminer un encadrement de $f(x)$ sur un intervalle $[a ; b]$, on ne peut pas se contenter de calculer les images $f(a)$ et $f(b)$. Il est nécessaire de commencer par l'étude des variations de la fonction.
- On peut calculer la dérivée, étudier le signe de la fonction dérivée pour déduire les variations de f .
- On peut alors en déduire un encadrement.

On a calculé la dérivée de cette fonction à la page 88 :

$$f'(x) = \frac{-26}{(2x-6)^2}.$$

La dérivée étant négative, la fonction f est décroissante sur $[-7 ; 3[$.

On en déduit que si $-2 \leq x \leq 2$, alors $f(-2) \geq f(x) \geq f(2)$.

Or $f(-2) = 1,2$ et $f(2) = -4$.

Donc lorsque x décrit $[-2 ; 2]$, on obtient $-4 \leq f(x) \leq 1,2$.

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1 Soit $f(x) = x^2$.

Le nombre dérivé de f en -1 vaut :

- ☐ a. 1. ☐ b. -1 . ☐ c. -2 .

2 Soit $f(x) = \frac{1}{x}$.

Le nombre dérivé de f en 2 vaut :

- ☐ a. $-0,25$. ☐ b. $0,5$. ☐ c. $-0,5$.

3 Soit $f(x) = \sqrt{x}$.

La fonction dérivée de f est :

- ☐ a. $f'(x) = \frac{1}{x}$. ☐ b. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- ☐ c. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4 Soit une fonction f dérivable sur $[0 ; 8]$; on sait que $f(5) = 1$ et $f'(5) = -3$. Une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 5 est :

- ☐ a. $y = -3x + 14$. ☐ b. $y = -3x + 16$.
☐ c. $y = x - 8$.

5 La dérivée f' de la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 + x - 1$ a pour expression :

- ☐ a. $f'(x) = -3x + 1$.
☐ b. $f'(x) = -6x + x - 1$.
☐ c. $f'(x) = -6x + 1$.

6 La dérivée f' de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$ a pour expression :

- ☐ a. $f'(x) = 3x^2 - 10x$.
☐ b. $f'(x) = x^2 - 5x$.
☐ c. $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$.

7 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = (x^2 - 9x)\sqrt{x}.$$

La dérivée f' de cette fonction a pour expression :

- ☐ a. $f'(x) = (2x - 9) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
☐ b. $f'(x) = \frac{5x^2 - 27x}{2\sqrt{x}}$.
☐ c. $f'(x) = \frac{3x^2 - 9x}{2\sqrt{x}}$.

8 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-3x}{x-4}.$$

La dérivée f' de cette fonction a pour expression :

- ☐ a. $f'(x) = \frac{12}{(x-4)^2}$.
☐ b. $f'(x) = \frac{3x^2 - 3x + 12}{(x-4)^2}$.
☐ c. $f'(x) = -3$.

9 Une fonction f a pour dérivée, sur $[-10 ; 10]$, $f'(x) = 3x^2 + 6x$:

- ☐ a. $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur $[-10 ; 10]$.
☐ b. pour tout x de $[-10 ; 0]$, $f(x) \leq f(-2)$.
☐ c. f est décroissante sur $[-10 ; 0]$.

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 - x - 1.$$

- ☐ a. pour tout réel x , $f'(x) < 0$.
☐ b. la fonction dérivée f' est décroissante sur $\mathbb{R}$.
☐ c. pour tout réel x , $f(x) < 0$.

Exercices

Nombre dérivé et tangente

Exercice 1

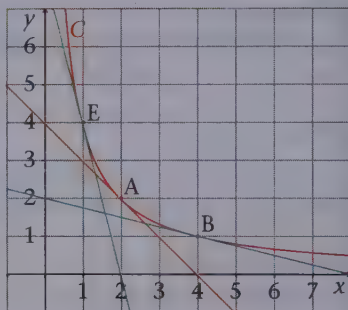
niveau 1

Corrigés p. 98

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; 8]$.

On donne sa courbe représentative C et les tangentes à la courbe C aux trois points A, B et E dans un repère.

Déterminer en utilisant des points du quadrillage le coefficient directeur, puis une équation de chacune de ces tangentes.



Exercice 2

niveau 1

Corrigés p. 99

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$, où h est un nombre réel quelconque.

En déduire le nombre dérivé de f en 2.

Exercice 3

niveau 1

Corrigés p. 99

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{x}$.

Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$, où h est un nombre réel quelconque.

En déduire le nombre dérivé de f en 1.

Exercice 4

niveau 1

Corrigés p. 100

Soit f la fonction définie sur $[-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Calculer le taux d'accroissement de f entre 3 et $3 + h$, où h est un nombre réel quelconque.

En déduire le nombre dérivé de f en 3.

Exercice 5

niveau 1

Corrigés p. 100

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$, où h est un nombre réel quelconque.

En déduire le nombre dérivé de f en 1.

2. Soit a un nombre réel quelconque. Calculer le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$, où h est un nombre réel quelconque.

En déduire le nombre dérivé de f en a .

Exercice 6

niveau 1

Corrigés p. 101

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative.

On donne un tableau de valeurs de la fonction f et de sa dérivée f' .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-0,5	2	3,5	4	3,5	2	-0,5	-4
$f'(x)$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Déterminer une équation de la tangente en chacun des neuf points donnés.

Tracer dans un même repère ces neuf tangentes et dessiner l'allure de la courbe C .

Exercice 7

niveau 2

Corrigés p. 101

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative.

1. Sachant que $f(3) = 2$ et $f'(3) = 0,7$, déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 3.

2. Calculer une valeur approchée de $f(3,1)$.

Exercice 8

niveau 2

Corrigés p. 101

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative.

1. Sachant que $f(-2) = 5$ et $f'(-2) = -1,5$, déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point A d'abscisse -2 .

2. Calculer une valeur approchée de $f(-2,1)$.

Exercice 9

niveau 2

Corrigés p. 102

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0 ; 5]$.

La tangente T à C au point $A(2 ; 3)$ passe par le point $B(0 ; 2)$.

1. Déterminer $f'(2)$ et écrire une équation de la tangente T .

2. En déduire des valeurs approchées de $f(1,8)$ et $f(2,1)$.

Fonctions dérivées

Exercice 10

niveau 1

Corrigés p. 102

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 1$.

2. g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = (4x+9)\sqrt{x}$.

3. h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0,5\}$ par $h(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$.

Exercice 11

niveau 1

Corrigés p. 103

Pour calculer les dérivées des fonctions suivantes, un élève utilise un logiciel de calcul formel.

Que peut-on dire dans chaque cas du résultat fourni par le logiciel ? Justifier.

Fonction	Dérivée
$f(x) = \frac{7x}{x+3}$	$f'(x) = \frac{21}{(x+3)^2}$
$f(x) = \frac{x-5}{4x+1}$	$f'(x) = \frac{16x^2 + 8x + 21}{(4x+1)^2}$

Exercice 12

niveau 1

Corrigés p. 103

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x + 3)^2$.

2. g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $g(x) = \frac{1}{5x-10}$.

Exercice 13

niveau 2

Corrigés p. 104

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^4 - 2x^3)^2$.

2. g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{-7}{x-1}$.

Exercice 14

niveau 2

Corrigés p. 104

Vérifier les résultats suivants fournis par un logiciel de calcul formel.

Fonction	Dérivée
$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-4}$	$f'(x) = \frac{2x^2 - 16x + 31}{(x-4)^2}$
$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 1}{x^2 + x + 1}$	$f'(x) = \frac{7(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$

Lectures graphiques

Exercice 15

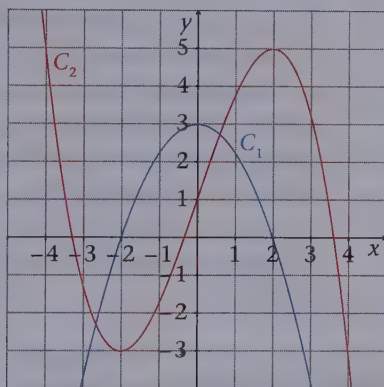
niveau 1

► Corrigés p. 105

On donne dans le même repère les courbes C_1 et C_2 représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Une des deux fonctions est la dérivée de l'autre.

Lire sur le graphique les informations qui permettent de choisir.



Étude de fonctions

Exercice 16

niveau 1

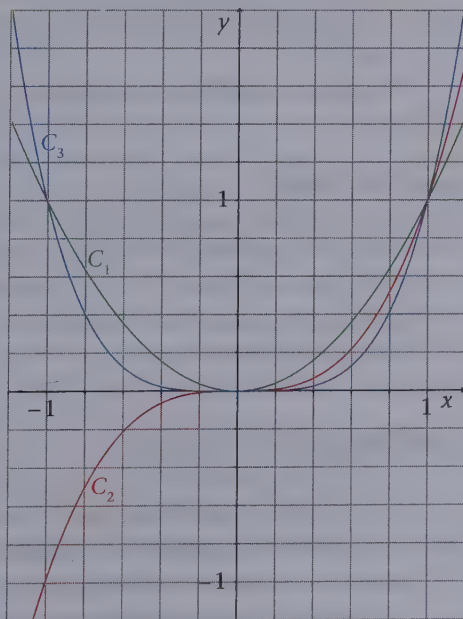
► Corrigés p. 105

On a tracé sur le même repère les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$.

1. Donner les dérivées de $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$.

2. En s'aidant du graphique, dresser les tableaux de variations des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$.

3. Justifier les positions relatives de ces trois courbes sur l'intervalle $[0 ; 1]$.



Exercice 17

niveau 1

Corrigés p. 106

Soit f la fonction définie sur $[-8; 2[$ par $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Calculer la dérivée f' de f . En déduire les variations de f .
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées.

Calculer les équations de tangentes en ces points.

3. Résoudre l'équation $f'(x) = -5$.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4. Tracer la courbe C et les tangentes obtenues aux questions précédentes.

Exercice 18

niveau 1

Corrigés p. 107

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$ par $f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Calculer la dérivée f' de f . En déduire les variations de f .
2. Étudier la position de la courbe C par rapport à la droite d d'équation $y = 1$.
3. Tracer la courbe C , la droite d et la droite d' d'équation $x = -1,5$.

Exercice 19

niveau 1

Corrigés p. 108

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Calculer la dérivée f' de f . En déduire les variations de f .
2. Tracer la courbe C , les deux tangentes horizontales et la tangente à C au point d'abscisse 0.

Exercice 20

niveau 2

Corrigés p. 109

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x^2 - 10$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Calculer la dérivée f' de f . En déduire les variations de f .
2. Tracer la courbe C et les tangentes horizontales à C .
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 21

niveau 3

Corrigés p. 110

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2(x^2+4x+3)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Calculer de deux manières la dérivée f' de f .
2. Étudier les variations de f .
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
4. Tracer la courbe C , la tangente T et les deux tangentes horizontales à C .

Problèmes

Exercice 22

niveau 3

Corrigés p. 111

Louis est étudiant en médecine. Il effectue un stage dans un service dans lequel des enfants reçoivent des greffes d'organes. Les médicaments antirejet sont dosés en fonction de la superficie corporelle de l'individu. Pour les enfants, cette superficie corporelle (en m^2) est donnée en fonction du poids x (en kg) de l'enfant par $S(x) = \frac{4x+7}{x+90}$.

Déterminer un encadrement de la surface corporelle des enfants pesant entre 10 kg et 35 kg.

Exercice 23

niveau 3

Corrigés p. 112

La courbe représentative de la fonction carrée est dessinée dans un repère orthonormé. Une fourmi se trouve au point A de coordonnées $(0 ; 1)$ et souhaite se rendre sur la parabole. Le but de cet exercice est de déterminer quels sont les points de la parabole les plus proches de la fourmi. Soit M un point d'abscisse x de la parabole. On note $d(x)$ le carré de la distance AM.

1. Montrer que $d(x) = x^4 - x^2 + 1$.
2. Dans un logiciel de calcul formel, on tape l'instruction suivante :
Factoriser(Dériver($x^4 - x^2 + 1, x$), x)

Quelle est la réponse affichée par l'ordinateur parmi les propositions suivantes ?

- a. $4x^3 - 2x$ b. $2x$ c. $2x*(2x - 1)$ d. $2x*(2x^2 - 1)$

3. Dresser le tableau de signes de d' et le tableau de variations de d .
4. Donner finalement les coordonnées des points de la parabole les plus proches de la fourmi.

QCM

- 1 c. $f'(x) = 2x$, donc $f'(-1) = -2$.
- 2 a. Soit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(2) = -0,25$.
- 3 c. Voir les dérivées des fonctions usuelles page 84.
- 4 b. $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- 5 c. $-3x^2$ a pour dérivée $-6x$ et $x - 1$ a pour dérivée 1.
- 6 a. x^3 a pour dérivée $3x^2$ et $-5x^2 + 7$ a pour dérivée $-10x$.
- 7 b. On utilise la formule permettant de calculer la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

$$f'(x) = (2x - 9)\sqrt{x} + (x^2 - 9x) \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{On met au même dénominateur } f'(x) = \frac{((2x - 9)\sqrt{x})(2\sqrt{x}) + (x^2 - 9x)}{2\sqrt{x}}.$$

Il reste à développer et à simplifier.

- 8 a. On utilise la formule permettant de calculer la dérivée d'un quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. $f'(x) = \frac{(-3) \times (x - 4) - (-3x) \times 1}{(x - 4)^2}$.

- 9 b. $f'(x) = 3x^2 + 6x$ s'annule en -2 et 0 , donc f' est positive sur $[-10 ; -2]$, négative sur $[-2 ; 0]$ et positive sur $[0 ; 10]$.

Tableau de variations :

x	-10	-2	0	10	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

- 10 a. $f'(x) = -3x^2 - 1$; ce polynôme de degré 2 est toujours négatif.

Exercice 1

Pour déterminer une équation de la droite sous la forme $y = mx + p$, on détermine l'ordonnée à l'origine p en remplaçant x et y par les coordonnées d'un des deux points. La tangente en $A(2 ; 2)$ passe par le point $(0 ; 4)$. Elle a pour coefficient directeur $\frac{4-2}{0-2} = -1$ et pour ordonnée à l'origine 4, d'où son équation $y = -x + 4$.

RAPPEL

Si A et B sont deux points distincts dans un repère du plan, le coefficient directeur m de la droite (AB) est donné par la formule

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

La tangente en B(4 ; 1) passe par le point (0 ; 2). Elle a pour coefficient directeur $\frac{2-1}{0-4} = -0,25$ et pour ordonnée à l'origine 2, d'où son équation $y = -0,25x + 2$.

La tangente en E(1 ; 4) passe par le point (2 ; 0). Elle a pour coefficient directeur $\frac{0-4}{2-1} = -4$.

On calcule p en utilisant les coordonnées de E : $4 = -4 \times 1 + p$, d'où $p = 8$; la tangente en E a pour équation $y = -4x + 8$.

Exercice 2

Soit $f(x) = x^2 + 3x - 4$. On calcule le taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$:

$$f(2) = 6 ;$$

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^2 + 3(2+h) - 4 \\ &= h^2 + 4h + 4 + 6 + 3h - 4 \\ &= h^2 + 7h + 6 \end{aligned}$$

$$f(2+h) - f(2) = h^2 + 7h = h(h+7).$$

Le taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$

$$\text{est } \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h(h+7)}{h} = h + 7.$$

On en déduit le nombre dérivé de f en 2 :

lorsque h tend vers 0, l'expression $h + 7$ tend vers 7.

Donc la fonction f est dérivable en 2 et a pour nombre dérivé $f'(2) = 7$.

RAPPEL

Le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Le nombre dérivé de f en a est la limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers 0.

Exercice 3

Soit $f(x) = \frac{4}{x}$. On calcule le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$:

$$f(1) = 4 ;$$

$$f(1+h) = \frac{4}{1+h} ;$$

$$f(1+h) - f(1) = \frac{4}{1+h} - 4 = \frac{4 - 4(1+h)}{1+h} = \frac{-4h}{1+h}.$$

Le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$ est :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{-4h}{1+h}}{h} = \frac{-4h}{h(1+h)} = \frac{-4}{1+h}.$$

On en déduit le nombre dérivé de f en 1 : lorsque h tend vers 0, l'expression

$$\frac{-4}{1+h} \text{ tend vers } -4.$$

Donc la fonction f est dérivable en 1 et a pour nombre dérivé $f'(1) = -4$.

Exercice 4

Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$. On calcule le taux d'accroissement de f entre 3 et $3+h$:
 $f(3) = 2$;

$$f(3+h) = \sqrt{(3+h)+1} = \sqrt{4+h} ;$$

$$f(3+h) - f(3) = \sqrt{4+h} - 2.$$

Le taux d'accroissement de f entre 3 et $3+h$ est :

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} ;$$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}.$$

On en déduit le nombre dérivé de f en 3 : lorsque h tend vers 0, l'expression $\frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}$ tend vers $\frac{1}{4}$.

Donc la fonction f est dérivable en 3 et a pour nombre dérivé $f'(3) = 0,25$.

Exercice 5

1. Soit $f(x) = x^3$. On calcule le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$:
 $f(1) = 1$;

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^3 = (1+h)^2(1+h) = (1+2h+h^2)(1+h) \\ &= 1+3h+3h^2+h^3 ; \end{aligned}$$

$$f(1+h) - f(1) = 3h+3h^2+h^3 = h(3+3h+h^2).$$

Le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ est :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h(3+3h+h^2)}{h} = 3+3h+h^2.$$

On en déduit le nombre dérivé de f en 1 : lorsque h tend vers 0, l'expression $3+3h+h^2$ tend vers 3.

Donc la fonction f est dérivable en 1 et a pour nombre dérivé $f'(1) = 3$.

2. On calcule le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$:

$$f(a) = a^3 ;$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h)^3 = (a+h)^2(a+h) = (a^2+2ah+h^2)(a+h) \\ &= a^3+3a^2h+3ah^2+h^3 ; \end{aligned}$$

$$f(a+h) - f(a) = 3a^2h+3ah^2+h^3 = h(3a^2+3ah+h^2).$$

Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{h(3a^2+3ah+h^2)}{h} = 3a^2+3ah+h^2.$$

On en déduit le nombre dérivé de f en a : lorsque h tend vers 0, l'expression $3a^2+3ah+h^2$ tend vers $3a^2$.

Donc la fonction f est dérivable en a et a pour nombre dérivé $f'(a) = 3a^2$.

Exercice 6

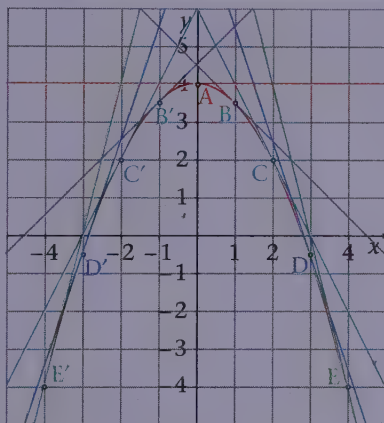
Une équation de la tangente T est donnée par la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour $a = -4$, on obtient :

$$y = 4(x - (-4)) + (-4) ; y = 4x + 12.$$

Le tableau suivant donne les équations des neuf tangentes.

a	Équation de la tangente
-4	$y = 4x + 12$
-3	$y = 3x + 8,5$
-2	$y = 2x + 6$
-1	$y = x + 4,5$
0	$y = 4$
1	$y = -x + 4,5$
2	$y = -2x + 6$
3	$y = -3x + 8,5$
4	$y = -4x + 12$



Sur la figure, on a tracé les neuf tangentes ; la courbe dessinée semble être une parabole ayant pour sommet le point $(0; -4)$.

Exercice 7

1. Une équation de la tangente T est donnée par la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour $a = 3$, on obtient $y = 0,7(x - 3) + 2$.

Une équation de T est $y = 0,7x - 0,1$.

2. Lorsque x est proche de 3, la courbe et sa tangente sont presque confondues. On calcule une valeur approchée de $f(3,1)$ en utilisant l'équation de la tangente au point d'abscisse 3 :

$$0,7 \times 3,1 - 0,1 = 2,07 ; \text{ donc } f(3,1) \approx 2,07.$$

RAPPEL

Le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C représentant f au point A d'abscisse a .

L'INFO EN +

La fonction ϕ (lettre grecque « phi ») définie par $\phi(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ est une approximation affine de la fonction f au voisinage de a . Pour h voisin de 0, une valeur approchée de $f(a + h)$ est $\phi(a + h) = f(a) + f'(a)(h)$.

Exercice 8

1. Une équation de la tangente T est donnée par la formule :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Pour $a = -2$, $f(-2) = 5$ et $f'(-2) = -1,5$;

on obtient $y = -1,5(x - (-2)) + 5$.

Une équation de T est $y = -1,5x + 2$.

2. Lorsque x est proche de $-2,1$, la courbe et sa tangente sont presque confondues. On calcule une valeur approchée de $f(-2,1)$ en utilisant l'équation de la tangente au point d'abscisse -2 :

$-1,5 \times (-2,1) + 2 = 5,15$; donc $f(-2,1) \approx 5,15$.

Exercice 9

$$1. f'(2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-3}{0-2} = 0,5.$$

Une équation de la tangente T est donnée par la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour $a = 2$, $f(2) = 3$ et $f'(2) = 0,5$;

on obtient $y = 0,5(x - 2) + 3$.

Une équation de T est $y = 0,5x + 2$.

2. Les nombres 1,8 et 2,1 sont proches de 2 ; pour calculer des valeurs approchées de $f(1,8)$ et $f(2,1)$, on utilise l'approximation affine de la fonction f au voisinage de 2.

$f(1,8) \approx 0,5 \times 1,8 + 2$, soit $f(1,8) \approx 2,9$;

$f(2,1) \approx 0,5 \times 2,1 + 2$, soit $f(2,1) \approx 3,05$.

RAPPEL

Le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C représentant f au point A d'abscisse a .

Si A et B sont deux points distincts dans un repère du plan, le coefficient directeur m de la droite (AB) est donné

$$\text{par la formule } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exercice 10

1. $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 1$, f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 7,$$

$$\text{d'où } f'(x) = 12x^2 - 10x + 7.$$

2. $g(x) = (4x + 9)\sqrt{x}$, g est un produit de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$.

On pose $u(x) = 4x + 9$ et $v(x) = \sqrt{x}$; d'où $u'(x) = 4$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$g'(x) = 4 \times \sqrt{x} + (4x + 9) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On met au même dénominateur : $g'(x) = \frac{(4\sqrt{x})(2\sqrt{x}) + (4x + 9)}{2\sqrt{x}}$;

$$g'(x) = \frac{8x + 4x + 9}{2\sqrt{x}}. \text{ Donc } g'(x) = \frac{12x + 9}{2\sqrt{x}}.$$

RAPPEL

On utilise les formules :

$$(u + v)' = u' + v'; (\lambda u)' = \lambda u';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

3. $h(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$, h est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{0,5\}$.

On pose $u(x) = 3x+1$ et $v(x) = 2x-1$; d'où $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$.

$$h'(x) = \frac{3 \times (2x-1) - (3x+1) \times 2}{(2x-1)^2};$$

$$h'(x) = \frac{6x-3-6x-2}{(2x-1)^2}; \text{ donc } h'(x) = \frac{-5}{(2x-1)^2}.$$

Exercice 11

$f(x) = \frac{7x}{x+3}$, f est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose $u(x) = 7x$ et $v(x) = x+3$; d'où $u'(x) = 7$ et $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{7 \times (x+3) - (7x) \times 1}{(x+3)^2};$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{21}{(x+3)^2}.$$

$f(x) = \frac{x-5}{4x+1}$, f est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-0,25\}$.

On pose $u(x) = x-5$ et $v(x) = 4x+1$; d'où $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 4$.

$$f'(x) = \frac{1 \times (4x+1) - (x-5) \times 4}{(4x+1)^2};$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{21}{(4x+1)^2}.$$

Pour trouver $f'(x) = \frac{16x^2 + 8x + 21}{(4x+1)^2}$, l'élève a écrit $x-5/(4x+1)$.

Il a oublié de mettre des parenthèses au numérateur en entrant la fonction dans le logiciel.

Exercice 12

1. $f(x) = (x^2 + x + 3)^2$, f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On utilise la formule $(u^2)' = 2uu'$.

On pose $u(x) = x^2 + x + 3$, d'où $u'(x) = 2x + 1$.

Donc $f'(x) = 2(x^2 + x + 3)(2x + 1)$.

Il reste à développer pour comparer le résultat avec celui du logiciel de calcul formel :

$$4x^3 + 6x^2 + 14x + 6$$

2. $g(x) = \frac{1}{5x-10}$; on pose $v(x) = 5x - 10$; g est l'inverse de v et est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

On utilise la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$.

On a $v'(x) = 5$, donc $g'(x) = \frac{-5}{(5x-10)^2}$.

Exercice 13

1. $f(x) = (x^4 - 2x^3)^2$, f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On utilise la formule $(u^2)' = 2uu'$.

On pose $u(x) = x^4 - 2x^3$, d'où $u'(x) = 4x^3 - 6x^2$.

D'où $f'(x) = 2(x^4 - 2x^3)(4x^3 - 6x^2)$.

2. $g(x) = \frac{-7}{x-1}$, g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Il existe deux possibilités pour calculer la dérivée de g .

Première méthode : On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose $u(x) = -7$ et $v(x) = x - 1$; d'où $u'(x) = 0$ et $v'(x) = 1$.

$g'(x) = \frac{0 \times (x-1) - (-7) \times 1}{(x-1)^2}$; donc $g'(x) = \frac{7}{(x-1)^2}$.

Seconde méthode : On transforme l'écriture $g(x) = -7 \frac{1}{x-1}$ et on utilise

les formules $(\lambda u)' = \lambda u'$ et $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$.

On pose $v(x) = x - 1$, d'où $v'(x) = 1$, donc $g'(x) = -7 \times \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{7}{(x-1)^2}$.

Exercice 14

$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-4}$, f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

La première fonction est une fonction affine et la deuxième fonction est l'inverse de $x - 4$.

On obtient $f'(x) = 2 + \frac{-1}{(x-4)^2} = \frac{2(x-4)^2 - 1}{(x-4)^2} = \frac{2(x^2 - 8x + 16) - 1}{(x-4)^2}$;

on a bien $f'(x) = \frac{2x^2 - 16x + 31}{(x-4)^2}$.

$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 1}{x^2 + x + 1}$, f est un quotient de deux trinômes et le dénominateur n'est jamais nul (le discriminant de $x^2 + x + 1$ est négatif (il vaut -3) ; donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose $u(x) = x^2 - 6x + 1$ et $v(x) = x^2 + x + 1$; d'où $u'(x) = 2x - 6$ et $v'(x) = 2x + 1$.

$$f'(x) = \frac{(2x-6)(x^2+x+1) - (x^2-6x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2},$$

après développement et factorisation du numérateur par 7, on trouve

$$\text{bien } f'(x) = \frac{7(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Exercice 15

Les courbes C_1 et C_2 représentent deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Une des deux fonctions est la dérivée de l'autre.

Sur le graphique, on observe que :

- la fonction f représentée par la courbe C_1 est négative sur $]-\infty; -2[$, positive sur $]-2; 2[$ et négative sur $]2; +\infty[$;

- la fonction g représentée par la courbe C_2 est décroissante sur $]-\infty; -2[$, croissante sur $]-2; 2[$ et décroissante sur $]2; +\infty[$.

On en déduit que $g' = f$ (la fonction f est la dérivée de la fonction g).

RAPPEL

Une fonction est croissante sur I si, et seulement si, sa dérivée est positive sur I ; une fonction est décroissante sur I si, et seulement si, sa dérivée est négative sur I .

Exercice 16

1. La dérivée de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 3x^2$ et la dérivée de $x \mapsto x^4$ est $x \mapsto 4x^3$.

2. La fonction $x \mapsto x^2$ est toujours positive, donc la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^3$ est négative sur $]-\infty; 0[$ et positive sur $]0; +\infty[$,

donc la fonction $x \mapsto x^4$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2$		+	
$x \mapsto x^3$			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$4x^3$	-	0	+
$x \mapsto x^4$			

3. Graphiquement, si $0 < x < 1$, on a $0 < x^4 < x^3 < x^2 < 1$.

Il suffit de prouver que, si $0 < x < 1$, on a $x^2 - x^3 > 0$ et $x^3 - x^4 > 0$.

$$x^2 - x^3 = x^2(1 - x) \text{ et } x^3 - x^4 = x^3(1 - x).$$

Comme $0 < x < 1$, $1 - x > 0$, donc on a bien $x^2 - x^3 > 0$ et $x^3 - x^4 > 0$.

Sur $[0 ; 1]$, la courbe de $x \mapsto x^2$ est donc au-dessus de la courbe de $x \mapsto x^3$, elle-même au-dessus de la courbe de $x \mapsto x^4$.

Exercice 17

1. On étudie les variations de $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ sur $[-8 ; 2[$: f est une fonction homographique ; $x-2$ ne s'annulant pas sur $[-8 ; 2[$, f est dérivable sur $[-8 ; 2[$.

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = x - 2$; d'où $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{3 \times (x-2) - (3x-1) \times 1}{(x-2)^2}, \text{ donc } f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}.$$

$f'(x)$ étant toujours négative, la fonction f est décroissante sur $[-8 ; 2[$.

Tableau de variations :

x	-8	2
$f'(x)$	-	
$f(x)$	2,5	

2. $f(0) = 0,5$; donc les coordonnées du point d'intersection de C avec l'axe des ordonnées sont $(0 ; 0,5)$.

Le coefficient directeur de la tangente T à C en 0 est $f'(0) = \frac{-5}{4}$.

Une équation de T est $y = -1,25x + 0,5$.

Pour déterminer l'abscisse du point d'intersection de C avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$.

$\frac{3x-1}{x-2} = 0$ équivaut à $3x - 1 = 0$ et $x \neq 2$; cette équation a pour unique solution $\frac{1}{3}$.

Les coordonnées du point d'intersection de C avec l'axe des abscisses sont $\left(\frac{1}{3} ; 0\right)$.

Le coefficient directeur de la tangente T' à C en $\frac{1}{3}$ est $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-9}{5} = -1,8$.

Une équation de T' est $y = -1,8\left(x - \frac{1}{3}\right) + 0$, soit $y = -1,8x + 0,6$.

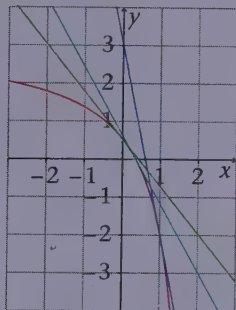
3. $f'(x) = -5$.

$\frac{-5}{(x-2)^2} = -5$ équivaut à $(x-2)^2 = 1$ et $x \neq 2$.

$(x-2)^2 - 1 = 0$ équivaut à $(x-2+1)(x-2-1) = 0$; $(x-1)(x-3) = 0$, d'où $x = 1$ et $x = 3$.

Dans l'intervalle $[-8; 2]$, l'équation $f'(x) = -5$ a une seule solution : 1. Ce résultat signifie qu'au point d'abscisse 1, la courbe C admet une tangente de coefficient directeur -5 .

4.



Exercice 18

1. On étudie les variations de $f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,5\}$: f est une fonction homographique, dérivable sur son ensemble de définition.

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = 2x + 3$; d'où $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2$.

$f'(x) = \frac{2 \times (2x+3) - (2x-1) \times 2}{(2x+3)^2}$, donc $f'(x) = \frac{8}{(2x+3)^2}$.

$f'(x)$ étant toujours positive, la fonction f est croissante sur $]-\infty; -1,5[$ et sur $] -1,5; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$-1,5$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

2. Pour étudier la position de la courbe C par rapport à la droite d d'équation $y = 1$, on étudie le signe de la différence $f(x) - 1$.

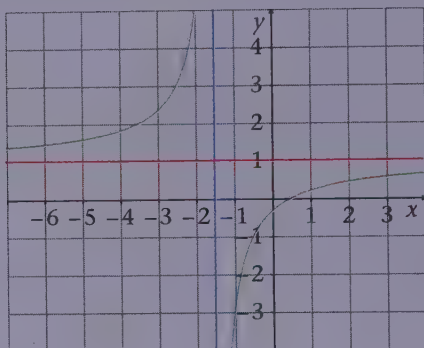
$$f(x) - 1 = \frac{2x-1}{2x+3} - 1 = \frac{2x-1-(2x+3)}{2x+3} = \frac{-4}{2x+3}$$

$2x+3 < 0$ si $x < -1,5$ et $2x+3 > 0$ si $x > -1,5$;

donc $f(x) - 1 > 0$ si $x < -1,5$ et $f(x) - 1 < 0$ si $x > -1,5$.

Donc la courbe C est au-dessus de d sur $]-\infty ; -1,5[$ et C est en-dessous de d sur $] -1,5 ; +\infty[$.

3.



Exercice 19

1. On étudie les variations de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$: la fonction f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Elle a pour dérivée $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

On étudie le signe de la dérivée : $3x^2 - 6x - 9$ est un trinôme ; on calcule son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 144$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation $3x^2 - 6x - 9 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-12}{6} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+12}{6} = 3.$$

On en déduit la factorisation $3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$.

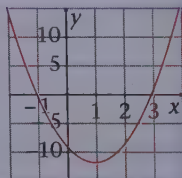
Comme $a > 0$ ($a = 3$), le signe de $3x^2 - 6x - 9$ est donné dans le tableau suivant.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$3x^2-6x-9$	+	0	-	0	+

CONSEIL

Au lieu de dresser le tableau de signe de ce trinôme, vous pouvez aussi observer l'allure de la parabole représentant ce polynôme de degré deux et en déduire son signe.

Voici la courbe de f' obtenue sur la calculatrice :



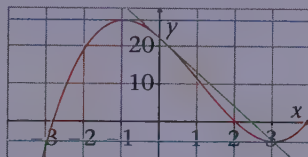
On en déduit que f' est positive sur $]-\infty; -1[$, négative sur $]-1; 3[$ et positive sur $]3; +\infty[$; donc f est croissante sur $]-\infty; -1]$, décroissante sur $]-1; 3]$ et croissante sur $]3; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

2. Aux points d'abscisses -1 et 3 , la dérivée s'annule, donc la courbe C admet des tangentes horizontales.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $f'(0) = -9$.



Exercice 20

1. On étudie les variations de $f(x) = x^4 - 3x^2 - 10$: la fonction f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Elle a pour dérivée $f'(x) = 4x^3 - 6x$.

Pour étudier le signe de la dérivée, on factorise :

$$f'(x) = x(4x^2 - 6) = x(2x - \sqrt{6})(2x + \sqrt{6}).$$

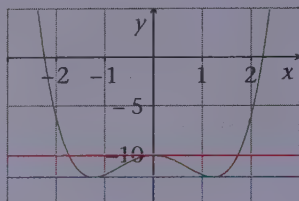
On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$2x - \sqrt{6}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x + \sqrt{6}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4x^3 - 6x$	$-$	0	$+$	0	$+$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$							

2.



3. Graphiquement, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions ; les valeurs lues sur la calculatrice sont $-2,2$ et $2,2$.

Pour résoudre l'équation $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$, on pose $X = x^2$ et on résout l'équation du second degré $X^2 - 3X - 10 = 0$.

$\Delta = 49 > 0$, l'équation $X^2 - 3X - 10 = 0$ admet deux solutions : $X_1 = -2$ et $X_2 = 5$.

$X_1 < 0$, donc l'équation $x^2 = X_1$ n'a pas de solution ;

l'équation $x^2 = 5$ admet deux solutions $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

Les solutions exactes de l'équation $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$ sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

Exercice 21

1. On calcule la dérivée de $f(x) = (x - 2)^2(x^2 + 4x + 3)$.

Première méthode :

f est un produit de fonctions dérivables :

on applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$ et $(u^2)' = 2uu'$.

On pose $u(x) = (x - 2)^2$ et $v(x) = x^2 + 4x + 3$; donc $u'(x) = 2(x - 2)$ et $v'(x) = 2x + 4$.

$$f'(x) = 2(x - 2)(x^2 + 4x + 3) + (x - 2)^2(2x + 4).$$

On factorise : $f'(x) = (x - 2)[2(x^2 + 4x + 3) + (x - 2)(2x + 4)]$;

$$\text{d'où } f'(x) = (x - 2)(4x^2 + 8x - 1).$$

Seconde méthode :

On développe : $f(x) = (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x + 3)$;

$$f(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12.$$

f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x^3 - 18x + 4$.

La première méthode a donné une factorisation de ce polynôme de degré 3.

$$\text{On vérifie : } (x - 2)(4x^2 + 8x - 2) = 4x^3 - 18x + 4.$$

2. On étudie les variations de f : on recherche les valeurs qui annulent la dérivée et on étudie son signe.

$$(x - 2)(4x^2 + 8x - 2) = 0 \text{ équivaut à } x - 2 = 0 \text{ ou } 4x^2 + 8x - 2 = 0.$$

$4x^2 + 8x - 2$ est un trinôme ; on calcule son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 4 \times (-2) = 96.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $4x^2 + 8x - 2 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{96}}{8} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{96}}{8}.$$

$$\sqrt{96} = \sqrt{16 \times 6} = 4\sqrt{6}, \text{ donc } x_1 = -1 - 0,5\sqrt{6} \text{ et } x_2 = -1 + 0,5\sqrt{6}.$$

(Des valeurs approchées de ces deux nombres sont $-2,2$ et $0,2$.)

On obtient les factorisations : $4x^2 + 8x - 2 = 4(x - x_1)(x - x_2)$;

$$f'(x) = 4(x - 2)(x - x_1)(x - x_2).$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	x_1	x_2	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	0	+
$x-x_1$	-	0	+	+	+
$x-x_2$	-	-	0	+	+
$f'(x)$	-	0	+	0	+

On en déduit le tableau de variations de f :

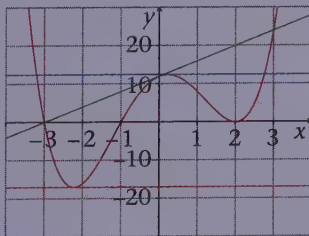
x	$-\infty$	x_1	x_2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$								

$f(x_1) \nearrow f(x_2) \searrow 0 \nearrow$

3. $f(0) = 12$; $f'(0) = 4$;

d'où une équation de T : $y = 4x + 12$.

4.



Exercice 22

$$S(x) = \frac{4x+7}{x+90} : \text{ la fonction } S \text{ n'est pas définie pour } x < 0 \text{ (on ne peut pas}$$

considérer un enfant ayant un poids négatif). C'est une fonction homographique dont le dénominateur ne s'annule pas pour $x > 0$, donc S est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On calcule la dérivée de la fonction S :

$$S'(x) = \frac{4 \times (x+90) - (4x+7) \times 1}{(x+90)^2} = \frac{4x+360-4x-7}{(x+90)^2} = \frac{353}{(x+90)^2}.$$

Cette dérivée est positive donc la fonction S est croissante sur $]0; +\infty[$.
On a donc $S(10) \leq S(x) \leq S(35)$. Par ailleurs, $S(10) = 0,47$ et $S(35) = 1,176$.
La surface corporelle d'un enfant pesant entre 10 et 35 kg est donc comprise entre 0,47 et 1,176 m².

Exercice 23

- Comme M est sur la parabole, ses coordonnées sont $(x; x^2)$. On a donc : $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = x^2 + (x^2 - 1)^2 = x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 - x^2 + 1$.
- On constate que $d'(x) = 4x^3 - 2x$. On a également demandé au logiciel de factoriser ce résultat, donc $d'(x) = 2x(2x^2 - 1)$.
- On note que $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

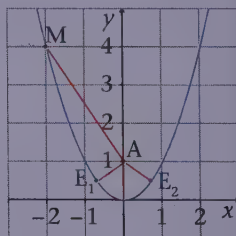
Voici le tableau complet :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$		
$2x$	-	-	0	+	+		
$2x^2-1$	+	0	-	-	0	+	
$d'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$d(x)$	</						

- On peut lire dans le tableau de variations que les abscisses des points de la parabole répondant au problème sont $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Les coordonnées des points cherchés sont donc

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right).$$



Pour étudier une fonction, on cherche à déterminer son sens de variation. Voici un rappel des définitions et propriétés à connaître.

1 Définition d'une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle

■ Soient deux nombres réels a et b dans l'intervalle.

On suppose que $a < b$. Pour déterminer le sens de variation d'une fonction f , on compare $f(a)$ et $f(b)$ soit en manipulant des inégalités, soit en étudiant le signe de la différence $f(b) - f(a)$.

2 Opérations sur les fonctions

■ On considère une fonction usuelle u définie sur un intervalle I .

Soit k un nombre réel.

Les fonctions u et $u + k$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I .

■ Soit λ un nombre réel.

Si $\lambda > 0$, alors les fonctions u et λu ont le même sens de variation sur l'intervalle I .

Si $\lambda < 0$, alors les fonctions u et λu ont des sens de variation contraires sur l'intervalle I .

■ On considère une fonction u définie et ne s'annulant pas sur un intervalle I . Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires.

■ On considère une fonction u définie et positive sur un intervalle I .

Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I .

3 Dérivée f' de f

■ Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

Théorème : f est croissante sur I si, et seulement si, f' est positive sur I ;

f est décroissante sur I si, et seulement si, f' est négative sur I ;

f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I .

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $[-3 ; 3]$ par $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$.

1. Afficher la représentation graphique de f et conjecturer son sens de variation.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

Solution commentée

Savoir-faire

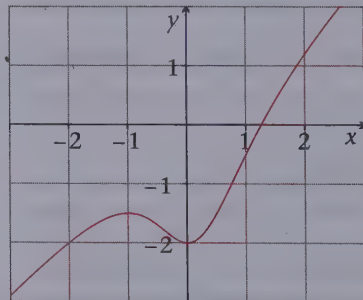
■ La calculatrice permet d'obtenir « point par point » la courbe représentative d'une fonction. Après avoir tapé la fonction f dans l'éditeur de fonctions, on adapte la fenêtre graphique à l'intervalle d'étude et aux valeurs prises par la fonction. On peut suivre le point « clignotant » sur l'écran avec « trace ».

■ On affiche au choix un tableau ou la courbe pour conjecturer le sens de variation de la fonction, l'existence d'un extremum, la résolution d'une équation $f(x) = k$ où k est un nombre fixé.

1. La fonction f semble croissante sur $[-3 ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 0]$ et croissante sur $[0 ; 3]$.

Elle admet un maximum relatif $-1,5$ en -1 et un minimum relatif -2 en 0 .

2. La courbe coupe une seule fois l'axe des abscisses entre 1 et 2 , donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $[-3 ; 3]$.



Une valeur approchée de cette solution donnée par la calculatrice est 1,3.

2 Utiliser les fonctions usuelles

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $[-4 ; 6]$ par $f(x) = \sqrt{25 - (x-1)^2}$.

1. On note u la fonction définie sur $[-4 ; 6]$ par $u(x) = -(x-1)^2 + 25$. Étudier les variations de u et dresser son tableau de variations.
2. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

Solution commentée

Savoir-faire

- On connaît le sens de variation des fonctions affines, de la fonction carrée, de la fonction inverse et de la fonction racine carrée.
- On a utilisé cette méthode dans les chapitres 1 et 3 pour étudier des fonctions polynômes de degré deux et des fonctions racines carrées (voir p. 8 et p. 62). Cette méthode peut s'appliquer chaque fois que la fonction à étudier s'exprime sous la forme $u + k$, λu , $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$, la fonction u étant connue.

1. La fonction u est une fonction polynôme de degré deux ; elle est donnée sous sa forme canonique. Le coefficient a devant x^2 vaut -1 ; il est négatif. Donc u est croissante sur $[-4 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; 6]$; son maximum 25 est atteint lorsque x vaut 1.

Tableau de variations de u :

x	-4	1	6
$u(x)$	0	25	0

2. Par définition, $f = \sqrt{u}$, la fonction u étant positive sur $[-4 ; 6]$. La fonction u et la fonction $\sqrt{u}$ ayant le même sens de variation, on déduit de la question 1. que f est croissante sur $[-4 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; 6]$.
Tableau de variations de f :

x	-4	1	6
$f(x)$	0	5	0

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}.$$

Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Solution commentée

Savoir-faire

Pour étudier les variations d'une fonction f :

- on commence par calculer la dérivée ;
- on étudie le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x ;
- on en déduit le sens de variation de f par intervalle ;
- on dresse un tableau de variations en indiquant tous les résultats obtenus.

La fonction f est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes), dérivable sur son ensemble de définition.

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose $u(x) = x^3 - 2$ et $v(x) = x^2 + 1$; d'où $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2 \times (x^2 + 1) - (x^3 - 2) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de son numérateur.

On pose $g(x) = x^4 + 3x^2 + 4x$.

La factorisation par x est évidente : $g(x) = x(x^3 + 3x + 4)$.

On observe que $g(-1) = 0$; on peut donc aussi factoriser par $(x + 1)$.

Un logiciel de calcul formel propose la factorisation $x(x + 1)(x^2 - x + 4)$.

On la vérifie en développant :

$$\begin{aligned} x(x+1)(x^2-x+4) &= x(x^3+x^2-x^2-x+4x+4) \\ &= x(x^3+3x+4) \\ &= x^4+3x^2+4x. \end{aligned}$$

Le trinôme x^2-x+4 a son discriminant négatif ($\Delta = -15$) ; il garde donc toujours le même signe ; or pour $x=0$, il vaut 4 ; donc pour tout x , $x^2-x+4 > 0$.

Le signe de $g(x)$ dépend donc du signe du produit $x(x+1)$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$x(x+1)$	+	0	-	0	+

On en déduit que f' est positive sur $]-\infty ; -1[$, négative sur $]-1 ; 0[$ et positive sur $]0 ; +\infty[$.

Donc f est croissante sur $]-\infty ; -1]$, décroissante sur $]-1 ; 0]$ et croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$					

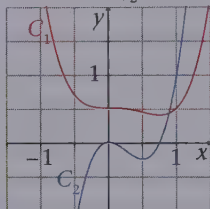
Ces résultats sont cohérents avec ceux conjecturés sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ dans le premier point méthode de ce chapitre.

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

QCM 1 à 4

Sur un logiciel, on a tracé les courbes C_1 et C_2 représentant respectivement une fonction f et sa fonction dérivée f' .

$$f_1(x) = x^4 - x^3 + 0,5 \text{ et } f_2(x) = x^2(4x - 3)$$



1 L'équation $f'(x) = 0$ admet :

- ☐ a. zéro solution. ☐ b. une solution.
☐ c. deux solutions.

2 La tangente à la courbe C_1 au point d'abscisse 0 a pour équation :

- ☐ a. $y = 0$. ☐ b. $y = 0,5$. ☐ c. $y = 0,5x$.

3 On peut affirmer que :

- ☐ a. f est décroissante sur $[-1; 1]$.
☐ b. f' est positive sur $[0,5; 1,5]$.
☐ c. Le minimum de f est obtenu pour une valeur de x comprise entre 0,5 et 1.

4 La tangente à la courbe C_1 au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur :

- ☐ a. 0. ☐ b. 1. ☐ c. 0,5.

5 Soit u la fonction définie par $u(x) = 3 - x$. La fonction $\sqrt{u}$ est :

- ☐ a. croissante sur $]-\infty; 3]$.
☐ b. décroissante sur $]-\infty; 3]$.
☐ c. décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

6 Soit u la fonction définie par $u(x) = 3 - x$. La fonction $\frac{1}{u}$ est :

- ☐ a. croissante sur $]-\infty; 3]$.
☐ b. décroissante sur $]-\infty; 3]$.
☐ c. décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

7 Soit u la fonction définie par $u(x) = \frac{1}{x}$. La fonction f définie par $f = -2u - 1$ est :

- ☐ a. croissante sur $]-\infty; 0]$.
☐ b. décroissante sur $]-\infty; 0]$.
☐ c. négative sur $\mathbb{R}^*$.

8 La dérivée f' de la fonction f définie par $f(x) = \frac{7}{x^2 - x}$ est :

- ☐ a. $f'(x) = \frac{7}{2x - 1}$.
☐ b. $f'(x) = \frac{-14x + 7}{(x^2 - x)^2}$.
☐ c. $f'(x) = \frac{7x^2 - 21x}{(x^2 - x)^2}$.

9 La dérivée f' de la fonction f définie par $f(x) = (3\sqrt{x} - 6)^2$ est :

- ☐ a. $f'(x) = 2(3\sqrt{x} - 6)$.
☐ b. $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$.
☐ c. $f'(x) = \frac{9(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x}}$.

10 Les courbes C_f et C_g représentent les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 3x + 3$ et $g(x) = \frac{2x + 3}{x + 2}$.

- ☐ a. C_f et C_g ont une tangente commune au point d'abscisse -1.
☐ b. C_f est toujours située au-dessus de C_g .
☐ c. $f'(-1,5) > g'(-1,5)$.

Exercices

Étude de fonctions polynômes

Exercice 1

niveau 1

Corrigés p. 126

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq -12$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Étudier les variations de f .
3. Calculer les équations des tangentes à la courbe C aux points d'intersection de C et de l'axe des abscisses.
4. Tracer la courbe C , sa tangente horizontale et les tangentes obtenues à la question 3.

Exercice 2

niveau 2

Corrigés p. 128

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 + 3x^2 + 8x + 6$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Calculer la dérivée f' de f . Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f .
2. Calculer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0. En déduire une valeur approchée de $f(0,05)$.
3. Tracer la courbe C , ses tangentes horizontales et la tangente en 0.

Exercice 3

niveau 2

Corrigés p. 129

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 5)(-x^2 + 3x - 4)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

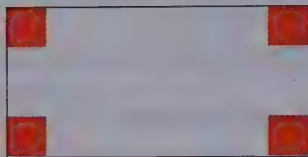
1. Calculer la dérivée f' de f . Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f .
2. Calculer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 2,5.
3. Tracer la courbe C et la tangente T . La droite T recoupe la courbe C en un point A.
Calculer l'abscisse de A.

Exercice 4

niveau 2

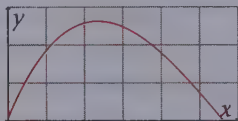
Corrigés p. 129

On dispose d'un carton de 120 cm sur 60 cm. On cherche à construire une boîte sans couvercle ayant le plus grand volume possible. Pour cela, on découpe dans chaque angle un carré de côté x .



Soit $V(x)$ le volume de la boîte obtenue après pliage, en cm^3 .

1. Préciser l'ensemble I des valeurs possibles de x .
2. Calculer $V(10)$ et $V(20)$.
3. Montrer que, pour tout x de I , $V(x) = 4(x^3 - 90x^2 + 1\,800x)$.
4. En observant la courbe affichée sur une calculatrice, conjecturer une valeur approchée de x permettant d'obtenir le volume maximal.
5. Déterminer la valeur exacte de x permettant d'obtenir le volume maximal et calculer ce volume maximal.

**Exercice 5**

niveau 2

Corrigés p. 131

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3 \text{ et } g(x) = x^2 - 2x + 3.$$

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal.

1. Étudier les variations de f .
2. Étudier les variations de g .
3. Tracer les courbes C_f et C_g .
4. Déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g .

Exercice 6

niveau 3

Corrigés p. 132

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = x^2 - 4x + 13.$$
3. En déduire le sens de variation de f .

Exercice 7

niveau 3

Corrigés p. 132

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^2$.

1. Étudier les variations de f .

2. Tracer la courbe C représentative de f .

3. Soit d la droite d'équation $y = 1$.

Déterminer les abscisses des points d'intersection de C et d .

Exercice 8

niveau 3

Corrigés p. 133

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 2x + 2$.

Étudier les variations de u et dresser son tableau de variations.

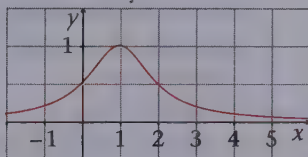
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = \frac{1}{u}$; la fonction f est donc définie, pour tout réel x , par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère.

a. Dédire de la question 1. les variations de f et dresser son tableau de variations.

b. Montrer que, pour tout réel x , $0 < f(x) \leq 1$.

3. Vérifier la cohérence de vos réponses avec la courbe C affichée sur une calculatrice.



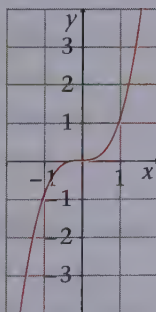
Exercice 9

niveau 3

Corrigés p. 134

1. Pour résoudre l'équation $x^3 = 2$, un élève utilise sa calculatrice. Il a affiché la courbe représentative de la fonction cube et des tableaux de valeurs.

	A	B	C	D	E
1	x	x^3		x	x^3
2	1	1		1.2	1.7280
3	1.1	1.33		1.21	1.7716
4	1.2	1.73		1.22	1.8158
5	1.3	2.2		1.23	1.8609
6	1.4	2.74		1.24	1.9066
7	1.5	3.38		1.25	1.9531
8	1.6	4.1		1.26	2.0004
9	1.7	4.91		1.27	2.0484
10	1.8	5.83		1.28	2.0972
11	1.9	6.86		1.29	2.1467
12	2	8		1.3	2.1970



a. Graphiquement, l'équation $x^3 = 2$ admet une seule solution c . Déterminer des encadrements de c d'amplitudes 0,1 et 0,01.

b. Développer $(x - c)(x^2 + cx + c^2)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x + 1$.

a. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

b. Donner la valeur exacte de $f(c)$ et en déduire un encadrement du minimum de f .

c. Vérifier vos résultats en traçant la courbe représentative de la fonction f .

Étude de fonctions rationnelles

Exercice 10

niveau 1

Corrigés p. 135

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{-x+1}{x-2}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 5x + 4$.

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal.

1. Montrer que C_f et C_g sont tangentes au point d'abscisse 3. Donner une équation de la tangente commune T en ce point.

2. Déterminer les coordonnées du second point d'intersection de C_f et C_g . Donner les équations des tangentes aux deux courbes en ce point.

Exercice 11

niveau 1

Corrigés p. 136

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Résoudre les inéquations $f(x) \geq 10$ et $3 < f(x) \leq 3,01$.

2. Vérifier que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = 3 + \frac{5}{x-2}$.

3. Étudier les variations de f .

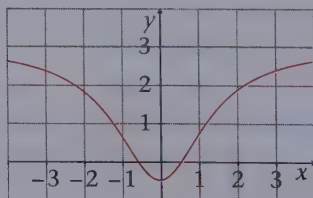
Exercice 12

niveau 2

Corrigés p. 137

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 2}$.

En observant sa courbe représentative C , on conjecture que, pour tout réel x , $-0,5 \leq f(x) < 3$.



1. Résoudre les inéquations $f(x) < 3$ et $f(x) \geq -0,5$.
2. Étudier les variations de f et vérifier la cohérence avec la courbe affichée sur la calculatrice.

Exercice 13

niveau 3

Corrigés p. 138

On considère la famille de fonctions f_m définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f_m(x) = \frac{mx+2}{x+1}, \text{ où } m \text{ est un nombre réel quelconque.}$$

1. Discuter, selon les valeurs de m , le sens de variation de la fonction f_m .
2. On appelle C_m la courbe représentative de la fonction f_m dans un repère. Montrer que toutes les courbes passent par un point fixe A.
3. Déterminer m pour que C_m admette au point A une tangente de coefficient directeur 3.
4. Tracer dans un même repère les courbes C_0 et C_5 .

Exercice 14

niveau 3

Corrigés p. 139

L'affirmation « si $x \in [-1 ; 2]$, alors $\frac{-1}{2} \leq \frac{2x+1}{x^2+1} \leq 1$ » est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Exercice 15

niveau 3

Corrigés p. 139

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3x+3}$ et C sa courbe

représentative dans un repère orthonormal. Un élève étudie cette fonction avec un logiciel.

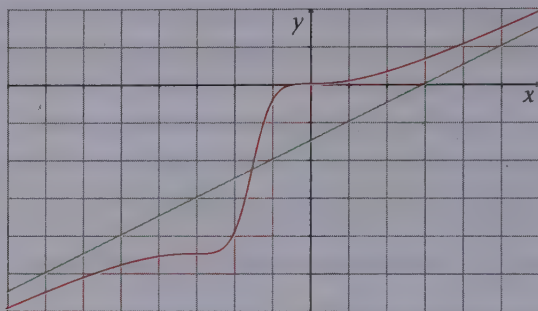
Ce logiciel propose une deuxième écriture pour la fonction f :

$$x-3 + \frac{6x+9}{x^2+3x+3}, \text{ et donne le résultat suivant pour la dérivée}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)^2}{(x^2+3x+3)^2}.$$

On donne la courbe C et la droite d d'équation $y = x - 3$ affichées par ce logiciel (voir page suivante).

1. Résoudre l'inéquation $f(x) - x + 3 < 0$.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Vérifier le calcul de la dérivée. En déduire les variations de f .



Exercice 16

niveau 3

Corrigés p. 140

1. On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

a. Étudier les variations de P .

b. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique c et que $c \in]1,6 ; 1,7[$.

c. En déduire le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

2. Soit f la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

Étudier les variations de f .

Problèmes

Exercice 17

niveau 3

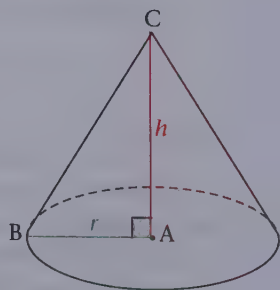
Corrigés p. 141

Un ethnologue s'est intéressé à la construction des tipis dans plusieurs tribus nord-amérindiennes des Grandes Plaines. Il a remarqué que le diamètre est pratiquement toujours égal à 6,50 m et que la hauteur s'élève en général à 4,50 m. Cet exercice a pour but de montrer que le choix de ces dimensions n'est pas le fruit du hasard.

On assimile un tipi à un cône parfait.

Supposons que les Indiens cherchent à construire un tipi d'un volume de 50 m^3 .

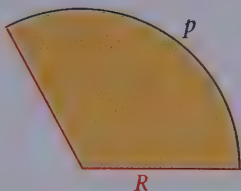
On note r le rayon du tipi et h sa hauteur.



1. Montrer que $r^2 = \frac{150}{\pi h}$.

On note S la fonction définie sur $]1; 10[$ qui à h associe le carré de l'aire en m^2 de peau de bison nécessaire pour recouvrir la surface latérale du tipi.

On rappelle que l'aire d'un secteur circulaire de rayon R et de longueur d'arc p est égale à $\frac{1}{2}pR$.



2. Montrer que $S(h) = 150\pi \left(\frac{150}{\pi} \times \frac{1}{h^2} + h^2 \right)$.

3. Montrer que $S'(h) = 150\pi \left(1 - \frac{300}{\pi} \times \frac{1}{h^3} \right)$.

4. Soit h_0 tel que $h_0^3 = \frac{300}{\pi}$.

Montrer que si $h \in [1; h_0]$, alors $S'(h) \leq 0$.

Indication : On admettra que la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

De même, on peut montrer que si $h \in [h_0; 10]$, alors $S'(h) \geq 0$.

5. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de h_0 .

6. Expliquer pourquoi les tipis ont presque toujours les dimensions indiquées dans l'énoncé.

QCM

- ❶ **c.** L'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions, car la courbe représentant f' coupe deux fois l'axe des abscisses.
- ❷ **b.** $\gamma = 0,5$, car $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0,5$.
- ❸ **c.** La dérivée s'annule pour une valeur c de x comprise entre 0,5 et 1 ; elle est négative si $0 < x < c$ et positive si $x > c$.
- ❹ **b.** car $f'(1) = 1$.
- ❺ **b.** u est décroissante et positive sur $]-\infty ; 3]$; de plus, les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation.
- ❻ **a.** u et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires.

ATTENTION

$$\frac{1}{u}(0) = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{u}(4) = -1.$$

- ❼ **a.** u est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, donc $-2u$ est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et $f = -2u - 1$ aussi. On élimine la réponse **c.** car $f(-1) = 1$.
- ❽ **b.** $f'(x) = 7 \times \frac{-2x+1}{(x^2-x)^2}$.

❾ **c.** $f = u^2$, donc $f' = 2uu'$; $f'(x) = 2 \times (3\sqrt{x} - 6) \times \frac{3}{2\sqrt{x}} = \frac{9(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x}}$.

- ❿ **a.** On observe les courbes affichées sur la calculatrice.

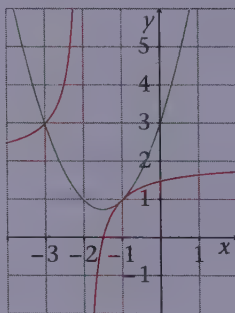
On élimine la réponse **b.** pour $-3 < x < -2$;

on élimine la réponse **c.** car $f'(-1,5) = 0$ ($-1,5$ est l'abscisse du sommet de la parabole) et $g'(-1,5) > 0$ (la fonction homographique est croissante).

Autre méthode : On calcule les dérivées.

$$f'(x) = 2x + 3 \text{ et } g'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} ;$$

$$\text{on a } f'(-1) = g'(-1) = 1.$$



Exercice 1

1. $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$. On résout l'inéquation $f(x) \leq -12$:

$$f(x) \leq -12 \text{ équivaut à } -2x^2 + 6x + 20 \leq 0.$$

Le premier membre de l'inéquation est un trinôme avec $a = -2$; $b = 6$ et $c = 20$.

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 36 + 160 = 196 = 14^2$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation $-2x^2 + 6x + 20 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 14}{-4} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 14}{-4} = -2.$$

Comme $a < 0$, le signe de $-2x^2 + 6x + 20$ est donné dans le tableau :

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$-2x^2 + 6x + 20$	$-$	0	$+$	0	$-$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq -12$ est :

$$]-\infty; -2] \cup [5; +\infty[.$$

Cela signifie, que dans les intervalles $]-\infty; -2]$ et $[5; +\infty[$, la courbe C est située au-dessous de la droite d'équation $y = -12$.

2. $f(x)$ est un trinôme ; l'étude de f peut se faire de deux manières : à partir de la forme canonique ou en utilisant la dérivée.

Première méthode :

$$\text{On a } \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-4} = 1,5; f(1,5) = 12,5.$$

On en déduit la forme canonique :

$$f(x) = -2(x - 1,5)^2 + 12,5.$$

$$a = -2; a < 0.$$

Donc f est croissante sur $]-\infty; 1,5]$ et décroissante sur $[1,5; +\infty[$.

RAPPEL

La forme canonique du trinôme

$$\text{est } f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \gamma.$$

Seconde méthode :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x) = -4x + 6$.

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = 1,5; f'(x) > 0 \text{ si } x < 1,5 \text{ et } f'(x) < 0 \text{ si } x > 1,5.$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$1,5$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$12,5$	$\searrow$

3. Les abscisses des points d'intersection de C et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$-2x^2 + 6x + 8 = 0$ est un trinôme avec $a = -2$; $b = 6$ et $c = 8$.

RAPPEL

Le coefficient directeur d'une tangente à une courbe en un point d'abscisse a est égal au nombre dérivé $f'(a)$.

$\Delta = 36 + 64 = 100 = 10^2 > 0$, donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 10}{-4} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 10}{-4} = -1.$$

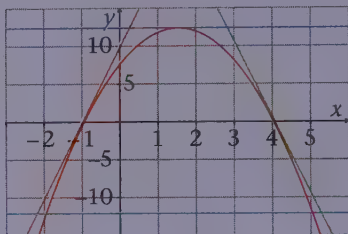
Une équation de la tangente est donnée par la formule :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Pour $a = -1$, $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = 10$; une équation de la tangente au point d'abscisse -1 est $y = 10(x + 1)$.

Pour $a = 4$, $f(4) = 0$ et $f'(4) = -10$; une équation de la tangente au point d'abscisse 4 est $y = -10(x - 4)$.

4.



Exercice 2

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x) = -2x^2 + 6x + 8$.

Le trinôme $-2x^2 + 6x + 8$ a été étudié dans l'exercice précédent ; il s'annule pour les valeurs -1 et 4 .

D'après sa courbe représentative, il est positif sur $]-1 ; 4[$ et négatif à l'extérieur de cet intervalle.

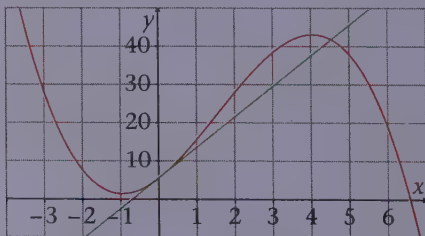
On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$ $\frac{5}{3}$ $\nearrow$ $\frac{130}{3}$ $\searrow$				

2. Pour $a = 0$, $f(0) = 6$ et $f'(0) = 8$; une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = 8x + 6$.

$0,05$ est très proche de 0 ; une valeur approchée de $f(0,05)$ est obtenue en prenant l'équation de la tangente en 0 : $8 \times 0,05 + 6 = 6,4$, donc $f(0,05) \approx 6,4$.

3.



Exercice 3

1. f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = 2x - 5$ et $v(x) = -x^2 + 3x - 4$;
d'où $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2x + 3$.

$$f'(x) = 2(-x^2 + 3x - 4) + (2x - 5)(-2x + 3)$$

$$f'(x) = -6x^2 + 22x - 23$$

$f'(x)$ est un trinôme avec $a = -6$, $b = 22$ et $c = -23$.

$$\Delta = 22^2 - 4 \times (-6) \times (-23) = -68.$$

$\Delta < 0$, donc l'équation $-6x^2 + 22x - 23 = 0$ n'a pas de solution et le trinôme garde un signe constant ; $a = -6 < 0$, donc, pour tout réel x , $-6x^2 + 22x - 23 < 0$.

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $a = 2,5$, $f(2,5) = 0$ et $f'(2,5) = -5,5$;

une équation de la tangente au point d'abscisse 2,5 est $y = -5,5(x - 2,5)$;
 $y = -5,5x + 13,75$.

3. Sur le dessin, la droite T recoupe la courbe C en un point A.

Pour calculer l'abscisse de A, on résout l'équation $f(x) = -5,5x + 13,75$.

$$(2x - 5)(-x^2 + 3x - 4) = -5,5(x - 2,5)$$

$$(2x - 5)(-x^2 + 3x - 4) + 2,75(2x - 5) = 0$$

$$(2x - 5)[-x^2 + 3x - 4 + 2,75] = 0$$

$$(2x - 5)[-x^2 + 3x - 1,25] = 0$$

Le discriminant du trinôme $-x^2 + 3x - 1,25$ vaut :

$$\Delta = 9 - 5 = 4 > 0,$$

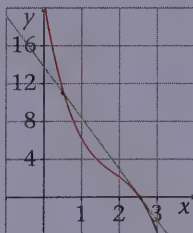
donc l'équation $-x^2 + 3x - 1,25 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 2}{-2} = 2,5 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 2}{-2} = 0,5.$$

L'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la tangente est donc 0,5.

À NOTER

On utilise la formule
 $(uv)' = u'v + uv'$.



Exercice 4

1. $I = [0 ; 30]$.

2. Si $x = 10$, les dimensions, en cm, de la boîte sont :

hauteur : 10, largeur : $60 - 2 \times 10 = 40$, longueur : $120 - 2 \times 10 = 100$;

la boîte a pour volume, en cm^3 : $V(10) = 10 \times 40 \times 100 = 40\,000$.

Si $x = 20$, les dimensions, en cm, de la boîte sont :

hauteur : 20, largeur : $60 - 2 \times 20 = 20$, longueur : $120 - 2 \times 20 = 80$;

la boîte a pour volume, en cm^3 : $V(20) = 20 \times 20 \times 80 = 32\,000$.

3. Si la hauteur est x , les dimensions, en cm, de la boîte sont :

hauteur : x , largeur : $60 - 2x$, longueur : $120 - 2x$;

la boîte a pour volume, en cm^3 : $V(x) = x \times (60 - 2x) \times (120 - 2x)$

$$V(x) = 4x \times (30 - x) \times (60 - x)$$

$$V(x) = 4x (1\,800 - 30x - 60x + x^2)$$

On en déduit que, pour tout x de I , $V(x) = 4(x^3 - 90x^2 + 1\,800x)$.

4. D'après la figure, la fonction V est croissante puis décroissante.

Si on a affiché la courbe sur la calculatrice, on peut conjecturer que V admet un maximum supérieur à 40 000 lorsque x est compris entre 10 et 20.

5. La fonction V est une fonction polynôme ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $V'(x) = 4(3x^2 - 180x + 1\,800) = 12(x^2 - 60x + 600)$.

$x^2 - 60x + 600$ est un trinôme avec $a = 1$; $b = -60$ et $c = 600$.

$\Delta = 3\,600 - 2\,400 = 1\,200 > 0$, donc l'équation $x^2 - 60x + 600 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{60 - \sqrt{1\,200}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{60 + \sqrt{1\,200}}{2}.$$

$$1\,200 = 20^2 \times 3, \text{ donc } \sqrt{1\,200} = 20\sqrt{3} ;$$

$$\text{d'où } x_1 = 30 - 10\sqrt{3} \text{ et } x_2 = 30 + 10\sqrt{3}.$$

Comme $a > 0$, le signe de $x^2 - 60x + 600$ est donné dans le tableau suivant.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$x^2 + 60x + 600$	+	0	-	0	+

$$x_1 \approx 12,7 \text{ et } x_2 > 30.$$

Le tableau suivant donne le signe de $V'(x)$ et les variations de la fonction V dans $[0 ; 30]$:

x	0	x_1	30
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$			

La valeur exacte de x permettant d'obtenir le volume maximal est $30 - 10\sqrt{3}$ cm.

Le volume maximal est :

$$V(30 - 10\sqrt{3}) = 4(30 - 10\sqrt{3})(10\sqrt{3})(30 + 10\sqrt{3}) = 24\,000\sqrt{3}.$$

Le volume maximal est d'environ $41\,569 \text{ cm}^3$.

Exercice 5

1. La fonction f est une fonction polynôme ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée : $f'(x) = 4x^3 - 8x$.

On factorise : $f'(x) = 4x(x^2 - 2) = 4x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.

On étudie le signe de la dérivée à l'aide du tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
$4x$		-	-	0	+	+		
x^2-2		+	0	-	-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

On en déduit le tableau de variations de f :

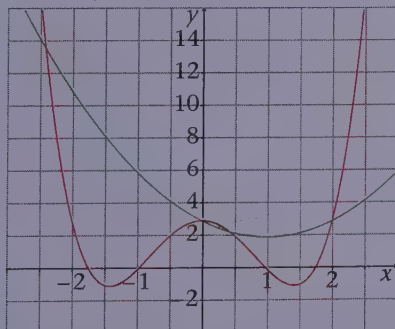
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

2. La forme canonique de ce trinôme est immédiate : $g(x) = (x - 1)^2 + 2$.

On dresse le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$		2	

3. Tracé des courbes C_f et C_g :



4. Graphiquement, on voit que les deux courbes ont quatre points d'intersection, dont les points d'abscisses 0 et 2.

Pour déterminer les valeurs exactes des abscisses des autres points, on résout l'équation $f(x) = g(x)$.

$$x^4 - 4x^2 + 3 = x^2 - 2x + 3 \text{ équivaut à } x^4 - 5x^2 + 2x = 0.$$

Un logiciel de calcul formel donne la factorisation $x(x-2)(x^2+2x-1)$.

Il reste à résoudre $x^2 + 2x - 1 = 0$:

$\Delta = 8 > 0$, donc cette équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}.$$

Les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g sont dans l'ordre croissant $-1 - \sqrt{2}$; 0 ; $-1 + \sqrt{2}$; 2 .

CONSEIL

Vous pouvez vérifier la factorisation en développant.

Exercice 6

1. f est définie si $x^2 - 4x + 13 \geq 0$. Le discriminant du trinôme est $\Delta = -36$, $\Delta < 0$, donc l'équation $x^2 - 4x + 13 = 0$ n'a pas de solution.

Comme $a = 1 > 0$, pour tout réel x , $x^2 - 4x + 13 > 0$.

Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. On étudie les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2 - 4x + 13$.

La forme canonique de ce trinôme est $u(x) = (x - 2)^2 + 9$.

On dresse son tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$u(x)$			

3. Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation ; on en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

Exercice 7

1. On étudie les variations de $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^2$: la fonction f s'écrit sous la forme $f = u^2$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $2uu'$.

Donc $f'(x) = 2(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)$.

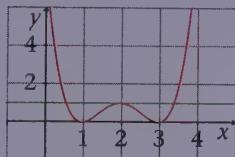
Les valeurs qui annulent le trinôme $x^2 - 4x + 3$ sont 1 et 3 ;

on en déduit la forme factorisée de la dérivée $f'(x) = 4(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Le signe de $f(x)$ et les variations de f sont donnés dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$ 0 $\nearrow$ 1 $\searrow$ 0 $\nearrow$						

2. Courbe C représentative de f :



3. Graphiquement, on voit que la courbe et la droite d'équation $y = 1$ ont trois points en commun, dont le point d'abscisse 2.

Pour déterminer les valeurs exactes des abscisses des autres points, on résout l'équation $f(x) = 1$.

$(x^2 - 4x + 3)^2 = 1$ équivaut à $x^2 - 4x + 3 = 1$ ou $x^2 - 4x + 3 = -1$.

$x^2 - 4x + 3 = 1$ équivaut à $x^2 - 4x + 2 = 0$; $\Delta = 8 > 0$, donc cette équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}.$$

$x^2 - 4x + 3 = -1$ équivaut à $x^2 - 4x + 4 = 0$, soit $(x - 2)^2 = 0$, d'où $x = 2$.

Les abscisses des points d'intersection de C et d sont $2 - \sqrt{2}$; 2 ; $2 + \sqrt{2}$.

Exercice 8

1. On étudie les variations de $u(x) = x^2 - 2x + 2$. La forme canonique de ce trinôme est $u(x) = (x - 1)^2 + 1$. On dresse son tableau de variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u(x)$	$\searrow$ 1 $\nearrow$		

2. a. Première méthode : les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires. On déduit de la question 1. le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ 1 $\searrow$		

Seconde méthode : On calcule la dérivée de f en utilisant la formule

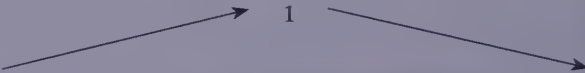
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}.$$

On a $u(x) = x^2 - 2x + 2$, d'où $u'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$.

$$\text{On en déduit } f'(x) = \frac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x + 2)^2}.$$

La dérivée s'annule pour $x = 1$ et a le signe de $-x + 1$.

On dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

b. D'après son tableau de variations, pour tout réel x , on a $f(x) \leq 1$.

De plus, pour tout x , $x^2 - 2x + 2 \geq 1$, donc $x^2 - 2x + 2 > 0$; on en déduit

$$\text{que } \frac{1}{x^2 - 2x + 2} > 0.$$

Par conséquent, pour tout réel x , $0 < f(x) \leq 1$.

3. Sur le graphique, on voit que la courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses et que la fonction est croissante sur $]-\infty; 1]$, décroissante sur $[1; +\infty[$ et qu'elle présente le maximum 1 lorsque x vaut 1.

L'INFO EN PLUS

On dit que la fonction f est **majorée** par 1 et **minorée** par 0; on en déduit que la fonction f est **bornée**.

Exercice 9

1. a. Encadrement de c d'amplitude $0,1$: $1,2 < c < 1,3$;

encadrement de c d'amplitude $0,01$: $1,25 < c < 1,26$.

b. On développe $(x - c)(x^2 + cx + c^2)$
 $= x^3 - cx^2 + cx^2 - c^2x + c^2x - c^3 = x^3 - c^3$.

2. a. La fonction f est une fonction polynôme; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Elle a pour dérivée $f'(x) = x^3 - 2$.

D'après la question 1. c., on a la factorisation :

$$f'(x) = (x - c)(x^2 + cx + c^2), \text{ } c \text{ étant la racine cubique de } 2.$$

Le trinôme $x^2 + cx + c^2$ a pour discriminant $\Delta = -3c^2$, il garde donc toujours le même signe; or pour $x = 0$, il vaut c^2 ; donc, pour tout x , $x^2 + cx + c^2 > 0$.

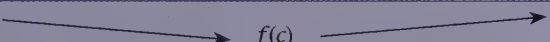
L'INFO EN PLUS

Le nombre c tel que $c^3 = 2$ est la racine cubique de 2; on peut le noter $2^{\frac{1}{3}}$. Avec la calculatrice : $1,26^3 \approx 2,000376$; une valeur approchée de c est 1,26.

La dérivée a donc le signe de $x - c$; elle est négative sur $]-\infty ; c[$ et positive sur $]c ; +\infty[$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty ; c[$ et croissante sur $]c ; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	c	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

b. Valeur exacte de $f(c)$:

$$f(c) = \frac{c^4}{4} - 2c + 1 = \frac{c^3 \times c}{4} - 2c + 1 = \frac{2c}{4} - 2c + 1 = -1,5c + 1.$$

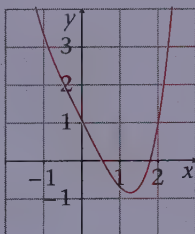
Comme $1,25 < c < 1,26$, on a :

$$-1,5 \times 1,25 + 1 > -1,5c + 1 > -1,5 \times 1,26 + 1 ;$$

$$\text{soit } -0,875 > f(c) > -0,89.$$

Un intervalle d'encadrement du minimum de f est donc $]-0,89 ; -0,875[$.

c.



Exercice 10

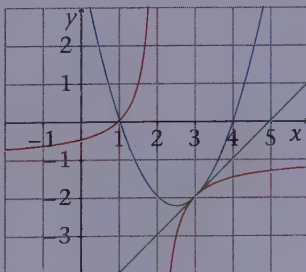
1. On peut commencer par observer les deux courbes dans un même repère : les deux courbes ont les points d'abscisses 1 et 3 en commun et il semble que la droite d'équation $y = x - 5$ soit tangente aux deux courbes au point d'abscisse 3.

Pour le prouver, on résout l'équation $f(x) = g(x)$, on calcule les dérivées des deux fonctions et on calcule les nombres dérivés en 3.

On utilise la forme factorisée de g : $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$.

$$\frac{-x+1}{x-2} = (x-1)(x-4) \text{ équivaut à } -\frac{x-1}{x-2} - (x-1)(x-4) = 0 ;$$

$$(x-1) \left(\frac{-1}{x-2} - (x-4) \right) = 0 ;$$



$$(x-1)\left(\frac{-1-(x-4)(x-2)}{x-2}\right) = 0 ; -\frac{(x-1)(-x+3)^2}{x-2} = 0.$$

On en déduit les solutions 1 et 3.

$$f'(x) = \frac{-(x-2)-(-x+1)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}, \text{ d'où } f'(3) = 1 ;$$

$$g'(x) = 2x - 5, \text{ d'où } g'(3) = 1.$$

Par conséquent, C_f et C_g sont tangentes au point d'abscisse 3.

Une équation de la tangente commune T en ce point est :

$$y = 1(x-3) + (-2), \text{ soit } y = x - 5.$$

2. Le second point d'intersection de C_f et C_g a pour abscisse 1.

$f'(1) = 1$; une équation de la tangente à C_f en ce point est :

$$y = 1(x-1) + 0, \text{ soit } y = x - 1.$$

$g'(1) = -3$; une équation de la tangente à C_g en ce point est :

$$y = -3(x-1) + 0, \text{ soit } y = -3x + 3.$$

Exercice 11

$$1. f(x) \geq 10 ; \frac{3x-1}{x-2} \geq 10 \text{ équivaut à } \frac{3x-1}{x-2} - 10 \geq 0 ;$$

$$\frac{3x-1-10(x-2)}{x-2} \geq 0 ; \frac{-7x+19}{x-2} \geq 0.$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	2	$\frac{19}{7}$	$+\infty$	
$-7x + 19$	+	+	0	-	
$x - 2$	-	0	+	+	
$\frac{-7x + 19}{x - 2}$	-		+	0	-

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left] 2 ; \frac{19}{7} \right]$.

$$3 < f(x) \leq 3,01 \text{ équivaut à } 3 < f(x) \text{ et } f(x) \leq 3,01.$$

$$3 < f(x) \text{ équivaut à } 3 - \frac{3x-1}{x-2} < 0 ;$$

$$\frac{3(x-2)-(3x-1)}{x-2} < 0 ; \frac{-5}{x-2} < 0 ; x-2 > 0, \text{ soit } x > 2.$$

$$f(x) \leq 3,01 \text{ équivaut à } \frac{3x-1}{x-2} - 3,01 \leq 0 ;$$

$$\frac{3x-1-3,01(x-2)}{x-2} \leq 0 ; \frac{-0,01x+5,02}{x-2} \leq 0.$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	2	502	$+\infty$	
Signe de $-0,01x + 5,02$	+	+	0	-	
Signe de $x - 2$	-	0	+	+	
Signe de $\frac{-0,01x + 5,02}{x - 2}$	-		+	0	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty ; 2[\cup [502 ; +\infty[$.

Donc l'ensemble des solutions de $3 < f(x) \leq 3,01$ est $[502 ; +\infty[$.

$$2. 3 + \frac{5}{x-2} = \frac{3(x-2)+5}{x-2} = \frac{3x-1}{x-2} = f(x).$$

3. f est dérivable sur son ensemble de définition et a pour dérivée

$$f'(x) = -\frac{5}{(x-2)^2}.$$

La dérivée est toujours négative, donc f est décroissante sur $]-\infty ; 2[$ et sur $]2 ; +\infty[$.

Exercice 12

$$1. f(x) < 3 \text{ équivaut à } \frac{3x^2-1}{x^2+2} - 3 < 0; \frac{3x^2-1-3(x^2+2)}{x^2+2} < 0; \frac{-7}{x^2+2} < 0; x^2+2 > 0.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathbb{R}$.

$f(x) \geq -0,5$ équivaut à :

$$\frac{3x^2-1}{x^2+2} + 0,5 \geq 0;$$

$$\frac{3x^2-1+0,5(x^2+2)}{x^2+2} \geq 0; \frac{3,5x^2}{x^2+2} \geq 0.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathbb{R}$.

2. Pour étudier les variations de f , on calcule sa dérivée.

f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition.

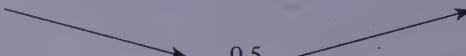
On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$

On pose $u(x) = 3x^2 - 1$ et $v(x) = x^2 + 2$; d'où $u'(x) = 6x$ et $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{6x \times (x^2+2) - (3x^2-1) \times 2x}{(x^2+2)^2}, \text{ donc } f'(x) = \frac{14x}{(x^2+2)^2}.$$

$f'(x)$ est du signe de $14x$, la fonction f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Exercice 13

1. $f_m(x) = \frac{mx+2}{x+1}$, où m est un nombre réel quelconque.

f_m est une fonction homographique de la variable x , elle est dérivable sur son ensemble de définition.

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose $u(x) = mx + 2$ et $v(x) = x + 1$; d'où $u'(x) = m$ et $v'(x) = 1$.

$$f'_m(x) = \frac{m \times (x+1) - (mx+2) \times 1}{(x+1)^2}, \text{ donc } f'_m(x) = \frac{m-2}{(x+1)^2}.$$

$f'(x)$ est du signe de $m-2$:

- si $m < 2$, alors, pour tout x sauf -1 , $f'_m(x) < 0$;

f_m est décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $] -1 ; +\infty[$.

- si $m = 2$, alors pour tout x sauf -1 , $f'_m(x) = 0$;

f_m est constante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $] -1 ; +\infty[$; on a $f_2(x) = 2$.

- si $m > 2$, alors pour tout x sauf -1 , $f'_m(x) > 0$;

f_m est croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $] -1 ; +\infty[$.

2. Quelle que soit la valeur de m , $f_m(0) = 2$; donc toutes les courbes C_m passent par le point fixe $A(0 ; 2)$.

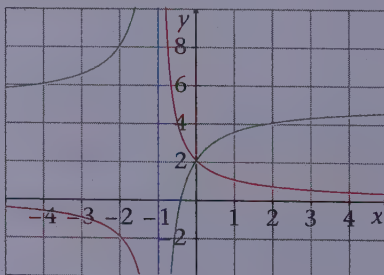
3. C_m admet au point A une tangente de coefficient directeur 3 si, et seulement si, $f'(0) = 3$.

$$f'_m(0) = m - 2.$$

On résout l'équation $m - 2 = 3$, d'où $m = 5$.

Donc la valeur de m pour laquelle C_m admet au point A une tangente de coefficient directeur 3 est $m = 5$.

4.



Exercice 14

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$.

On a $f(-1) = -0,5$ et $f(2) = 1$; mais cela ne suffit pas pour affirmer que si $-1 \leq x \leq 2$, alors $f(-1) \leq f(x) \leq f(2)$; en effet, on ne connaît pas le sens de variation de la fonction f .

On étudie les variations de f : f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition.

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2 + 1$; d'où $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{2 \times (x^2 + 1) - (2x + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}, \text{ donc } f'(x) = \frac{-2(x^2 + x - 1)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Le trinôme $x^2 + x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 5 > 0$, donc l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,62 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,62.$$

Le signe de la dérivée est l'opposé du signe du trinôme $x^2 + x - 1$.

On dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow f(x_1) \nearrow -0,5 \nearrow f(x_2) \searrow 1$					

On a ainsi prouvé que sur l'intervalle $[-1 ; 2]$, la fonction présente un maximum supérieur à 1 ; donc l'affirmation de l'énoncé est fausse.

Exercice 15

1. $f(x) - (x - 3) = \frac{6x + 9}{x^2 + 3x + 3}$, en utilisant l'écriture fournie par le logiciel.

On résout donc l'inéquation $\frac{6x + 9}{x^2 + 3x + 3} < 0$.

Le trinôme du dénominateur étant strictement positif pour tout réel x , on résout $6x + 9 < 0$; l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty ; -1,5[$.

La courbe C est située en-dessous de la droite d sur l'intervalle $]-\infty ; -1,5[$.

2. f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition.

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose $u(x) = x^3$ et $v(x) = x^2 + 3x + 3$; d'où $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 2x + 3$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \times (x^2 + 3x + 3) - (x^3) \times (2x + 3)}{(x^2 + 3x + 3)^2};$$

$$f'(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2}{(x^2 + 3x + 3)^2}; f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 6x + 9)}{(x^2 + 3x + 3)^2}; f'(x) = \frac{x^2(x+3)^2}{(x^2 + 3x + 3)^2}.$$

La dérivée s'annule deux fois pour les valeurs 0 et -3 ; elle est toujours positive.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	+	0	+
$f(x)$					

Exercice 16

1. a. On étudie les variations de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

$$P'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1).$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$P'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$P(x)$					

b. D'après son tableau de variations, le maximum de la fonction P sur $]-\infty; 1]$ est -1 ; donc l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty; 1]$. Sur $]1; +\infty[$, P est strictement croissante ; on a $P(1) = -2$ et $P(2) = 3$; donc la courbe représentant P traverse une fois l'axe des abscisses entre 1 et 2. Cela signifie que l'équation $P(x) = 0$ admet une seule solution c et que cette solution est comprise entre 1 et 2.

Avec un tableur, on trouve :

x	$P(x)$
1,6	-0,49
1,7	0,16

, donc $c \in]1,6; 1,7[$.

c. On en déduit le signe de $P(x)$: si $x < c$, $P(x) < 0$ et si $x > c$, $P(x) > 0$.

2. On étudie sur $] -1; +\infty[$ la fonction f telle que $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition.

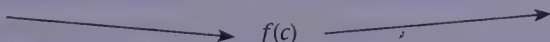
On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = 1 + x^3$; d'où $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 3x^2$.

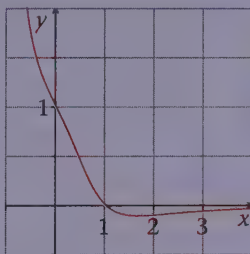
$$f'(x) = \frac{(-1) \times (1 + x^3) - (1 - x) \times (3x^2)}{(1 + x^3)^2};$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1 + x^3)^2}.$$

On reconnaît au numérateur la fonction P étudiée à la question 1., donc le signe de $f'(x)$ est celui de $P(x)$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		c		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$					

On peut vérifier la cohérence de ce tableau avec la courbe donnée par un logiciel.



Exercice 17

1. Le volume du tipi est de 50 m^3 , donc on a :

$$\frac{1}{3} \pi \times r^2 h = 50 \Leftrightarrow r^2 h = \frac{50 \times 3}{\pi} \Leftrightarrow r^2 = \frac{150}{\pi h}.$$

2. On utilise les notations du rappel et du dessin donnés dans l'exercice. Le rayon R de la portion de disque correspond à la longueur BC .

On a donc $R^2 = r^2 + h^2$. La longueur d'arc p correspond au périmètre de la base du tipi, donc $p = 2\pi r$. D'où :

$$\begin{aligned} S(h) &= \left(\frac{1}{2} \times \pi r \times \sqrt{r^2 + h^2} \right)^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) \\ &= \pi^2 \times \frac{150}{\pi h} \left(\frac{150}{\pi h} + h^2 \right) = 150\pi \left(\frac{150}{\pi} \times \frac{1}{h^2} + h \right) \end{aligned}$$

$$3. S'(h) = 150\pi \left(\frac{150}{\pi} \times \frac{-2}{h^3} + 1 \right) = 150\pi \left(1 - \frac{300}{\pi} \times \frac{1}{h^3} \right).$$

4. Soit h_0 tel que $h_0^3 = \frac{300}{\pi}$. Supposons que $1 < h < h_0$. Comme la fonction cube est croissante, on a $1 < h^3 < h_0^3$.

Comme la fonction inverse est décroissante sur $[0; +\infty[$, on a $1 > \frac{1}{h^3} > \frac{1}{h_0^3}$.

On a alors :

$$-\frac{300}{\pi} < -\frac{300}{\pi} \times \frac{1}{h^3} < -\frac{300}{\pi} \times \frac{1}{h_0^3}.$$

Ce qui implique : $1 - \frac{300}{\pi} \times \frac{1}{h^3} < 1 - \frac{300}{\pi} \times \frac{1}{h_0^3}$;

$$150\pi \left(1 - \frac{300}{\pi} \times \frac{1}{h^3} \right) < 150\pi \left(1 - \frac{300}{\pi} \times \frac{1}{h_0^3} \right).$$

On obtient $S'(h) < S'(h_0)$.

Or $S'(h_0) = 150\pi \left(1 - \frac{300}{\pi} \times \frac{\pi}{300} \right) = 0$, donc on a bien le résultat voulu.

5. En dressant le tableau de valeur de la fonction $x \mapsto x^3$

sur la calculatrice et en remarquant que $\frac{300}{\pi} \approx 95,49$,

on voit que $h_0 \approx 4,57$.

x	x³
4.55	94.196
4.56	94.818
4.57	95.449
4.58	96.071

6. On note r_0 le rayon correspondant à la hauteur h_0 .

On a $r_0 = \sqrt{\frac{150}{\pi h_0}} \approx 3,23$.

D'après la question 4., la dérivée de S est négative sur $[1; h_0]$ et positive sur $[h_0; 10]$, donc S est décroissante sur $[1; h_0]$ et croissante sur $[h_0; 10]$. Autrement dit, S atteint son minimum en h_0 .

Le carré de l'aire de la surface latérale du tipi est donc minimal pour h_0 . C'est donc avec cette hauteur d'environ 4,57 m et un rayon d'environ 3,23 m qu'on utilise le moins de peaux de bison pour construire le tipi.

1 Modes de génération d'une suite numérique

a. Définition d'une suite

■ Une suite numérique est une fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou sur une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

■ On note $u(n)$, ou encore u_n , l'image du nombre entier naturel n .

u_n est le terme général de la suite, appelé aussi le terme d'indice n .

À NOTER

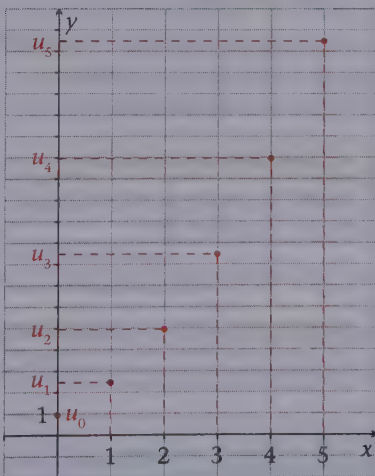
La suite u se note aussi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou encore (u_n) .

b. Modes de génération

■ La suite u est définie de manière explicite lorsque chaque terme u_n s'exprime directement en fonction de n .

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x^2 + x + 1$; on définit la suite u de manière explicite en posant, pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$.

Le graphique représente les six premiers termes de la suite dans un repère du plan.



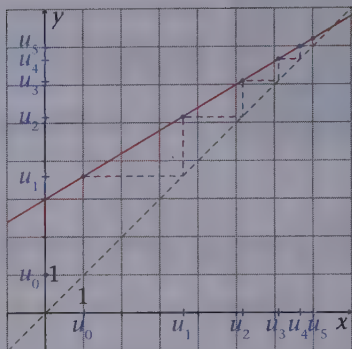
■ La suite u est définie par une relation de récurrence lorsqu'on donne le premier (ou les premiers termes) et une relation permettant de connaître un terme en fonction du (ou des) terme(s) précédent(s).

Exemple : Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,6u_n + 3$.

Pour représenter les six premiers termes de la suite dans un repère du plan, on trace la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,6x + 3$ et la droite d'équation $y = x$.

On a $u_1 = f(u_0)$; $u_2 = f(u_1)$...

On construit successivement les points de coordonnées $(u_0 ; u_1)$; $(u_1 ; u_2)$...



c. Suites majorées, minorées, bornées

- Une suite u est **majorée** par un nombre réel M si, pour tout n , $u_n \leq M$.
- Une suite u est **minorée** par un nombre réel m si, pour tout n , $u_n \geq m$.
- Une suite u est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

2 Suites arithmétiques

a. Définition

- On dit qu'une suite u est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique.

b. Écriture explicite

- Si u est une suite arithmétique de raison r , alors, pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p)r$.
- Si on prend $p = 0$, alors on obtient $u_n = u_0 + nr$.

c. Somme des n premiers entiers naturels

- Pour tout entier naturel n non nul : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3 Suites géométriques

a. Définition

- On dit qu'une suite u est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique.

b. Écriture explicite

■ Si u est une suite géométrique de raison q , alors, pour tous entiers naturels n et p :

$$u_{n+p} = u_n \times q^{n+p}.$$

■ Si on prend $p = 0$, alors on obtient $u_n = u_0 q^n$.

c. Somme des $n + 1$ premières puissances d'un nombre réel q ($q \neq 0$ et $q \neq 1$)

■ Pour tout nombre réel q non nul et différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

4 Sens de variation d'une suite

a. Définitions

- La suite u est **croissante** si, pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite u est **strictement croissante** si, pour tout n , $u_{n+1} > u_n$.
- La suite u est **décroissante** si, pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite u est **strictement décroissante** si, pour tout n , $u_{n+1} < u_n$.
- La suite u est **constante** si, pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

b. Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

■ **Méthode 1** : On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

- si pour tout n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite u est croissante ;
- si pour tout n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite u est décroissante.

■ **Méthode 2** : Si la suite u est définie à partir d'une fonction f connue, c'est-à-dire que, pour tout entier n , $u_n = f(n)$, alors elle a le même sens de variation que f sur $[0 ; +\infty]$.

■ **Méthode 3** : Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, on compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ au nombre 1 :

- si pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite u est croissante ;
- si pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, la suite u est décroissante.

c. Sens de variation d'une suite arithmétique

- Une suite arithmétique est **croissante** si sa raison r est positive.
- Une suite arithmétique est **décroissante** si sa raison r est négative.

d. Sens de variation d'une suite géométrique

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 positif.

- Si $q > 0$, alors la suite u est monotone.
- Si $q = 1$, alors u est constante.
- Si $u_0 > 0$ et si $q > 1$, alors u est strictement croissante.
- Si $u_0 > 0$ et si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.
- Si $u_0 < 0$ et si $q > 1$, alors u est décroissante.
- Si $u_0 < 0$ et si $0 < q < 1$, alors u est croissante.

5 Notion de limite d'une suite

a. Limite infinie

Soit une suite u .

- Si pour un nombre A aussi grand que l'on veut, on peut trouver un seuil N tel que, à partir de N , tous les termes de la suite soient supérieurs à A , on dit que la suite u a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

- On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exemples : Les suites de terme général $\sqrt{n}$, n^2 , n^3 ont pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Les suites géométriques de terme initial $u_0 > 0$ et de raison q , telle que $q > 1$, ont pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Limite nulle

Soit une suite u .

- Si pour un nombre strictement positif a aussi proche de 0 que l'on veut, on peut trouver un seuil N tel que, à partir de N , la distance entre le terme u_n et 0 soit inférieure à a , pour tout entier n , on dit que la suite u a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

- On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exemples : Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. Les suites géométriques de raison q , telle que $-1 < q < 1$, ont pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

1 Modéliser et étudier une situation à l'aide d'une suite arithmétique

Énoncé

Dans une ville, la population au dernier recensement en janvier 2010 était de 19 000 habitants. On a constaté que la ville croît de 350 habitants par an et on souhaite étudier l'évolution de cette population pour prévoir les investissements futurs.

On note P_n la population de cette ville en janvier 2010 + n .

On utilise un tableur. Le tableau ci-contre représente l'écran.

	A	B
1	n	P_n
2	0	19 000
3	1	19 350
4	2	19 700
5	3	20 050
6	4	20 400
7	5	20 750
8	6	21 100
9	7	21 450

1. Quelle formule faut-il entrer en B3 pour obtenir, par recopie vers le bas, les valeurs de la suite (P_n) ?
2. Justifier que (P_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison. Exprimer P_n en fonction de n .
3. Déterminer le seuil N à partir duquel la population dépassera 25 000 habitants.

Solution commentée

Savoir-faire

- Par définition, une suite u est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$. Le terme général de la suite u en fonction de n et du premier terme u_0 s'écrit $u_n = u_0 + nr$.
- Pour trouver la formule écrite en B3, on utilise la deuxième phrase de l'énoncé : « on a constaté que la population croît de 350 habitants par an... ».
- Pour justifier que la suite (P_n) est arithmétique, on l'exprime sous la forme $u_{n+1} = u_n + r$. On utilise ensuite l'écriture explicite d'une suite arithmétique pour exprimer P_n en fonction de n .
- Pour déterminer le seuil N à partir duquel la population dépassera 25 000 habitants, on peut soit résoudre l'inéquation $P_n \geq 25\,000$, soit utiliser le tableur.

1. La formule écrite en B3 est : =B2+350.
2. Pour tout nombre entier naturel n , la population de l'année de rang $n + 1$

s'obtient à partir de la population de l'année n par la formule : $P_{n+1} = P_n + 350$.
On reconnaît dans cette écriture une suite arithmétique de raison $r = 350$.
La formule explicite donnant la population de l'année n en fonction de n et de P_0 est alors $P_n = P_0 + 350n$, d'où, pour tout n , $P_n = 19\,000 + 350n$.

3. On détermine le seuil N en résolvant l'inéquation suivante :
 $19\,000 + 350n \geq 25\,000$; d'où $350n \geq 6\,000$.

Le nombre N cherché est le plus petit entier naturel vérifiant $n \geq \frac{6\,000}{350}$.

Or $\frac{6\,000}{350} \approx 17,14$, donc $N = 18$.

En 2018, la population de cette ville devrait dépasser 25 000 habitants.

Avec le tableur :

n	P_n
17	24 950
18	25 300

2 Modéliser et étudier une situation à l'aide d'une suite géométrique

Énoncé

Le jour de la naissance de Jérôme, son père a placé 1 500 euros à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %. Cette année, Jérôme a 16 ans et rentre en classe de première S. Il souhaite s'acheter un scooter qui coûte 2 300 euros. Peut-il le faire ?

Solution commentée

Savoir-faire

- On cherche ici à déterminer le patrimoine de Jérôme après 16 années de placement.
- On modélise cette situation en l'exprimant sous la forme d'une suite. Par définition, une suite u est géométrique s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$. Le terme général d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , s'écrit $u_n = u_0 q^n$.
- On détermine alors la valeur u_{16} de cette suite avant de conclure.

On note $u_0 = 1\,500$ et u_n le capital acquis par Jérôme après n années.

Le capital acquis la $(n + 1)^{\text{e}}$ année est :

$$u_{n+1} = u_n + 0,025 \times u_n, \text{ soit } u_{n+1} = 1,025 \times u_n.$$

On reconnaît dans cette écriture une suite géométrique de raison $q = 1,025$.

La formule explicite donnant le capital de l'année n en fonction de n et de u_0 est alors :

$$u_n = u_0 \times 1,025^n, \text{ d'où, pour tout } n, u_n = 1\,500 \times 1,025^n.$$

À 16 ans, le capital u_{16} acquis par Jérôme est $u_{16} = 1\,500 \times 1,025^{16}$, soit $u_{16} \approx 2\,226,76$ euros.

Il manque environ 73 euros à Jérôme pour l'achat de ce scooter.

Le tableau suivant représente l'écran du tableur utilisé par Jérôme pour vérifier ses calculs.

	A	B
1	n	P_n
2	0	1500
3	1	1537,50
4	2	1575,94
5	3	1615,34
6	4	1655,72
7	5	1697,11
8	6	1739,54
9	7	1783,03
10	8	1827,60
11	9	1873,29
12	10	1920,13
13	11	1968,13
14	12	2017,33
15	13	2067,77
16	14	2 119,46
17	15	2 172,45
18	16	2 226,76

3 Étudier les variations d'une suite

Énoncé

Soit u la suite définie sur $[4 ; +\infty[$ par :

$$u_n = \frac{n^2}{n-3}.$$

Étudier le sens de variation de u .

Solution commentée

Savoir-faire

- Si la suite u est définie à partir d'une fonction f connue, c'est-à-dire que, pour tout entier n , $u_n = f(n)$, alors elle a le même sens de variation que f sur $[0 ; +\infty[$. On exprime donc la suite u_n à partir d'une fonction f .
- On étudie ensuite les variations de la fonction f en étudiant le signe de sa dérivée (voir le chapitre 4).

Soit f la fonction définie sur $[4 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3}.$$

La fonction f est une fonction rationnelle ; elle est dérivable sur son ensemble de définition. Sa dérivée calculée par un logiciel de calcul formel

$$\text{est } f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

Sur l'intervalle $[4 ; +\infty[$, la dérivée a le signe de $x - 6$.

On dresse le tableau de variations de f :

x	4	6	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	16	12	

La fonction f est croissante sur $[6 ; +\infty[$, donc la suite u est croissante à partir du rang $n = 6$.

4 Conjecturer la limite d'une suite

Énoncé

On reprend la suite u définie sur $[4 ; +\infty[$ par :

$$u_n = \frac{n^2}{n-3}.$$

Déterminer un entier N à partir duquel, si $n > N$, alors $u_n > 100$.

Conjecturer la limite de la suite u .

Solution commentée

Savoir-faire

■ Une suite u a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour un nombre A aussi grand que l'on veut, on peut trouver un seuil N tel que, à partir de N , tous les termes de la suite soient supérieurs à A .

■ Pour chercher le nombre N tel que $u_n > 100$, on utilise, par exemple, la calculatrice ou un tableur.

$$u_{96} \approx 99,1 ; u_{97} \approx 100,1.$$

La suite étant croissante, le seuil N à partir duquel $u_n > 100$ est $N = 97$.

On peut conjecturer qu'en remplaçant 100 par un nombre A aussi grand que l'on veut, on trouvera un seuil N tel que, à partir de N , tous les termes de la suite soient supérieurs à A .

On conjecture que la suite u a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

À NOTER

Dans cet exemple, on résout l'inéquation

$$\frac{n^2}{n-3} > 100.$$

Pour $n > 3$, on peut écrire $n^2 > 100(n-3)$, $n^2 - 100n + 300 > 0$.

$$\Delta = 8800 = 20\sqrt{22}$$

Les solutions de $n^2 - 100n + 300 = 0$ sont $50 - 10\sqrt{22}$ et $50 + 10\sqrt{22}$.

Dans $]3 ; +\infty[$, les solutions de $n^2 - 100n + 300 > 0$ sont comprises dans l'intervalle $]50 + 10\sqrt{22} ; +\infty[$. Or $50 + 10\sqrt{22} \approx 96,9$.

Le plus petit entier N à partir duquel $u_n > 100$ est donc $N = 97$.

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 5x - 2.$$

Le nombre $f(f(f(1)))$ est égal à :

- ☐ a. 27.
- ☐ b. - 1.
- ☐ c. 63.

2 Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 7n - 9.$$

La suite u est :

- ☐ a. arithmétique de raison - 9.
- ☐ b. arithmétique de raison 7.
- ☐ c. géométrique de raison 7.

3 Soit la suite u définie par :

$$u_0 = 100 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \\ u_{n+1} - 0,3u_n = u_n.$$

La suite u :

- ☐ a. est arithmétique.
- ☐ b. est géométrique.
- ☐ c. n'est ni arithmétique, ni géométrique.

4 Les deux premiers termes d'une suite arithmétique sont - 3 et 4.

Le dixième terme vaut :

- ☐ a. 60.
- ☐ b. 67.
- ☐ c. 53.

5 La somme $1 + 2 + 3 + \dots + 49$ est égale à :

- ☐ a. 50.
- ☐ b. 1 225.
- ☐ c. 1 275.

6 Soit u la suite géométrique de premier terme $u_1 = 1\,000$ et de raison 0,5.

Alors :

- ☐ a. $u_3 = 250$.
- ☐ b. pour tout n , $u_n = 1\,000 \times 0,5^n$.
- ☐ c. pour tout n , $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 0,5$.

7 La somme $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10}$ est égale à :

- ☐ a. 59 049.
- ☐ b. 29 524.
- ☐ c. 88 573.

8 Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{-n-1}.$$

La suite u est :

- ☐ a. croissante.
- ☐ b. décroissante.
- ☐ c. non monotone.

9 Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 5 \times (-2)^n.$$

La suite u est :

- ☐ a. croissante.
- ☐ b. décroissante.
- ☐ c. non monotone.

10 Soit la suite u définie par :

$$u_0 = 100 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \\ u_{n+1} - 0,3u_n = u_n.$$

La suite u est :

- ☐ a. croissante.
- ☐ b. décroissante.
- ☐ c. non monotone.

Exercices

Mode de génération d'une suite

Exercice 1

niveau 1

Corrigés p. 163

On considère la suite u définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = -3n + 20$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Exprimer en fonction de n :
 - le terme de rang $n + 1$;
 - le terme de rang $n - 1$;
 - le terme de rang $2n$.

Exercice 2

niveau 1

Corrigés p. 163

On considère la suite u définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n^2 - 3n + 1$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite. Utiliser une calculatrice ou un tableur pour donner les dix premiers termes de la suite.
2. Exprimer en fonction de n :
 - le terme de rang $n + 1$;
 - le terme de rang $2n$.

Exercice 3

niveau 1

Corrigés p. 164

On considère la suite u définie, pour tout entier naturel n , par

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Exprimer en fonction de n le terme de rang $n + 4$.
3. La suite u est-elle bornée ?

Exercice 4

niveau 2

Corrigés p. 164

On considère la suite u définie, pour tout entier naturel n strictement supérieur à 3, par $u_n = \frac{5n+4}{n-3}$.

1. Calculer les termes u_4 , u_5 et u_6 .
2. Exprimer en fonction de n les termes u_{n+1} et u_{2n} .
3. Démontrer que la suite u est majorée par 24 et minorée par 5.

Exercice 5

niveau 2

Corrigés p. 165

On considère la suite u définie, pour tout entier naturel n , par le premier terme $u_0 = 0,5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 - u_n$.

1. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
2. Utiliser une calculatrice ou un tableur pour donner les dix premiers termes de la suite.

Exercice 6

niveau 2

Corrigés p. 165

On considère la suite v définie, pour tout entier naturel n , par le premier terme $v_0 = 0,5$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = (v_n)^2 - v_n + 1$.

1. Calculer les termes v_1 , v_2 et v_3 .
2. Utiliser une calculatrice ou un tableur pour donner les dix premiers termes de la suite.

Exercice 7

niveau 2

Corrigés p. 165

On considère la suite w définie, pour tout entier naturel n , par le premier terme $w_0 = 7$ et la relation de récurrence $w_{n+1} = w_n + n^2 + 1$.

1. Calculer les termes w_1 , w_2 et w_3 .
2. On utilise un tableur. Voici un tableau représentant l'écran :

	A	B
1	n	w_n
2	0	7
3	1	8
4	2	10
5	3	15
6	4	25
7	5	42
8	6	68

Quelle formule faut-il entrer en B3 pour obtenir, par recopie vers le bas, les valeurs des termes de la suite (w_n) ?

Exercice 8

niveau 3

Corrigés p. 166

1. On considère la suite u définie, pour tout entier naturel n , par le premier terme $u_0 = -1,5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$.

a. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .

b. Utiliser une calculatrice ou un tableur pour donner les dix premiers termes de la suite.

2. On modifie le premier terme u_0 et on garde la même relation de récurrence.

Étudier le comportement de la suite (u_n) dans les cas suivants.

a. $u_0 = \sqrt{3}$. b. $u_0 = 8$. c. $u_0 = -3$.

Suites arithmétiques

Exercice 9

niveau 1

Corrigés p. 167

Parmi les suites proposées, trouver celles qui sont arithmétiques.

1. u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3n + 20$.

2. u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{9}{2^n}$.

3. u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5^n + 2n + 1$.

Exercice 10

niveau 1

Corrigés p. 167

Calculer la raison r et le premier terme u_0 de la suite arithmétique u sachant que $u_3 = 37$ et $u_7 = 5$.

Exercice 11

niveau 1

Corrigés p. 167

u est la suite arithmétique de raison 5 telle que $u_0 = 100$.

Calculer la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{14}$.

Exercice 12

niveau 1

Corrigés p. 168

Calculer les sommes suivantes.

$$A = 1 + 2 + 3 + \dots + 500$$

$$B = 5 + 8 + 11 + \dots + 41$$

Exercice 13

niveau 2

Corrigés p. 168

Soit a , b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

1. Démontrer que $b = \frac{a+c}{2}$.

(Le nombre b est la moyenne arithmétique des nombres a et c .)

2. Déterminer a , b et c sachant que $a + b + c = 45$ et $c - a = 16$.

Suites géométriques

Exercice 14

niveau 2

Corrigés p. 169

Soit la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

1. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
2. Calculer u_9 .

Exercice 15

niveau 1

Corrigés p. 169

Parmi les suites proposées, trouver celles qui sont géométriques.

1. u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3^n + 5n$.
2. u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{9}{2^n}$.
3. u définie sur $\mathbb{N}$ par $7u_{n+1} - 10u_n = 0$.

Exercice 16

niveau 1

Corrigés p. 169

Soit la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $0,75$.

1. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
2. Exprimer le terme général u_n en fonction de n . En déduire u_{10} .
3. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit indice n tel que $u_n < 2$.

Exercice 17

niveau 1

Corrigés p. 170

Soit la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $1,2$.

1. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
2. Exprimer le terme général u_n en fonction de n . En déduire u_{10} .
3. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit indice n tel que $u_n > 30\,000$.

Exercice 18

niveau 1

Corrigés p. 170

u est la suite géométrique de raison $1,1$ telle que $u_0 = 100$.

Calculer la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_7$.

(Écrire la formule utilisée et donner le résultat à 10^{-4} près.)

Exercice 19

niveau 1

Corrigés p. 170

Calculer les sommes suivantes.

$$A = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 512$$

$$B = 1 + 0,9 + 0,9^2 + \dots + 0,9^{10}$$

Exercice 20

niveau 3

Corrigés p. 171

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par le premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,25u_n + 3$.

1. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 . La suite u est-elle arithmétique ? géométrique ?

2. Soit v la suite de terme général $v_n = u_n - 4$.

Démontrer que la suite v est géométrique.

Exprimer v_n en fonction de n .

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

4. Calculer la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

Sens de variation et limites**Exercice 21**

niveau 1

Corrigés p. 171

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -n^2 + 5n - 2$.

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .

2. Étudier le sens de variation de la suite u .

Exercice 22

niveau 1

Corrigés p. 172

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{n}{2n-1}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2. Étudier le sens de variation de la suite u .

3. Montrer que la suite u est bornée.

Exercice 23

niveau 2

Corrigés p. 173

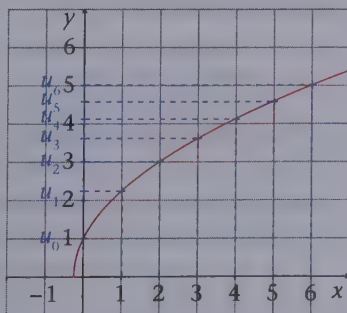
Sur la figure, on donne la représentation graphique des 7 premiers termes de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{4n+1}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite u .

2. À partir de la figure, on peut conjecturer que la suite u est croissante. Démontrer cette conjecture.

3. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, déterminer un entier N tel que, pour tout $n > N$, $u_n > 10$.

4. Conjecturer la limite de la suite u .



Exercice 24

niveau 2

Corrigés p. 173

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2^n}{n+1}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 .
2. Étudier le sens de variation de la suite u .
3. Conjecturer la limite de la suite u .

Exercice 25

niveau 2

Corrigés p. 174

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2^n}{5^n}$.

1. Étudier le sens de variation de u .
2. Conjecturer la limite de la suite u quand n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer un entier N tel que, pour tout $n > N$, $0 < u_n < 10^{-4}$.

Exercice 26

niveau 3

Corrigés p. 174

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 .
2. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal et la droite d d'équation $y = x$.
3. En utilisant la courbe C et la droite d , placer sur la courbe les points dont les abscisses sont les termes de la suite $u_0, u_1, u_2, \dots$.
4. Conjecturer la limite de la suite u quand n tend vers $+\infty$.

Problèmes**Exercice 27**

niveau 1

Corrigés p. 175

Un étudiant se préparant à faire 8 années d'études supérieures, dans la même université, s'interroge sur le coût global de location d'un studio pendant la durée de ses études. Il envisage d'emménager le 1^{er} juillet 2013 et de rester dans le même studio jusqu'au 30 juin 2019. Le propriétaire du studio lui donne le choix entre deux contrats :

Contrat A : le loyer initial est de 4 560 euros pour la première année (soit 380 euros par mois). Chaque année, le loyer annuel augmente de 120 euros par rapport au loyer de l'année précédente (soit 10 euros par mois).

Contrat B : le loyer initial est de 4 560 euros pour la première année (soit 380 euros par mois). Chaque année, le loyer annuel augmente de 2,5 % par rapport au loyer de l'année précédente.

1. Traduire les deux contrats en langage de suites.
2. Calculer pour chaque contrat, en utilisant les formules du cours, la somme des loyers payés durant 8 années.
3. Quel contrat lui conseillez-vous ?

Exercice 28

niveau 2

Corrigés p. 176

Un violon Stradivarius est vendu en 1802. Il est alors estimé à l'équivalent actuel de 10 000 €.

Tous les 10 ans, la valeur de l'instrument augmente de 28,7 %.

On note u_n la valeur de l'instrument au bout de n décennies.

1. Donner la nature de la suite u et l'expression de u_n en fonction de n .
2. Quelle est la valeur de l'instrument en 2012 au centime près ? Justifier clairement.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année le violon sera estimé à plus de 15 millions d'euros.

Exercice 29

niveau 3

Corrigés p. 177

On considère un polygone convexe ayant n côtés.

On note u_n le nombre de diagonales de ce polygone. On définit ainsi une suite u , pour $n \geq 3$.

1. Calculer les termes u_3 , u_4 et u_5 .
2. Justifier que, pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} = u_n + n - 1$.
3. Conjecturer une formule donnant u_n en fonction de n .
4. Un polygone possède 90 diagonales. Combien a-t-il de côtés ?

Exercice 30

niveau 3

Corrigés p. 178

Un biologiste étudie une population de bactéries *Escherichia Mathematica* dans une boîte de Petri.

On note u_n le nombre de bactéries supplémentaires au bout de n jours. Ainsi, au bout d'un jour, il y a $u_0 + u_1$ bactéries ; au bout de 2 jours, il y a $u_0 + u_1 + u_2$ bactéries et ainsi de suite.

On admet que, pour des raisons biologiques, $u_n = 2\,000\,000 \times 0,98^n$.

1. À combien de bactéries s'élève la population initiale ?
2. On se demande quelle est la durée de mise en culture nécessaire pour que la population dépasse les 50 000 000 d'individus. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il permette au biologiste de répondre à ce problème.

```
Début de l'algorithme
S prend la valeur ...
n prend la valeur 0
TANT QUE S < ... FAIRE
    n prend la valeur n + 1
    S prend la valeur ...
Fin TANT QUE
Afficher : « Nombre de jours à attendre : »
Afficher ...
Fin de l'algorithme
```

3. Démontrer que la population ne peut pas dépasser les 100 millions d'individus.
4. Compléter l'algorithme suivant qui permet d'indiquer combien de jours on doit attendre pour que la population dépasse un nombre d'individus N donné par l'utilisateur.

```
Début de l'algorithme
S prend la valeur ...
n prend la valeur 0
Afficher : « Effectif à atteindre : »
LIRE N
SI ... ALORS
    TANT QUE S < ... FAIRE
        n prend la valeur n + 1
        S prend la valeur ...
    Fin TANT QUE
    Afficher : « Nombre de jours à attendre : »
    Afficher ...
SINON
    Afficher : « Cet effectif ne sera jamais atteint. »
Fin de l'algorithme
```

Exercice 31

niveau 3

Corrigés p. 179

Les évolutions simultanées de deux espèces animales (proies et prédateurs) peuvent être modélisées par des suites construites sur le principe suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bu_nv_n \\ v_{n+1} = cv_n + du_nv_n \end{cases}$$

On ne s'intéressera ici qu'au mode de construction des termes de telles suites. Pour simplifier, on fixera $a = b = 1$, $c = -1$, $d = 3$ et $u_0 = v_0 = 0,5$.

1. Calculer u_1 , v_1 , u_2 , v_2 , u_3 et v_3 .

2. a. Exécuter l'algorithme suivant avec $n = 1$.

```
Début de l'algorithme
u prend la valeur 0,5
v prend la valeur 0,5
i prend la valeur 0
TANT QUE i < n FAIRE
    u prend la valeur u + uv
    v prend la valeur - 1,1v + 3uv
    i prend la valeur i + 1
Fin TANT QUE
Afficher u
Afficher v
Fin de l'algorithme
```

b. Modifier l'algorithme pour qu'il affiche correctement les valeurs u_n et v_n .

Exercice 32

niveau 3

Corrigés p. 179

On se propose d'étudier la suite de Fibonacci définie de la façon suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

1. Calculer à la main F_n pour n allant de 2 à 10.

2. Parmi les algorithmes de la page suivante, lequel permet d'afficher les n termes successifs de la suite de Fibonacci ($n > 2$) ?

3. On définit maintenant la suite R par $R_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$.

Déterminer à la main les dix premiers termes de la suite R (on arrondira à 0,001 près).

On constate que les termes de la suite R semblent se rapprocher d'une certaine valeur ϕ .

Algorithme n° 1

Début de l'algorithme
 Fm2 prend la valeur 1
 Afficher Fm2
 Fm1 prend la valeur 1
 Afficher Fm1
 POUR i allant de 2 à $n - 1$ FAIRE
 F prend la valeur Fm1 + Fm2
 Afficher F
 Fin POUR
 Fin de l'algorithme

Algorithme n° 2

Début de l'algorithme
 Fm1 prend la valeur 1
 Afficher Fm1
 Fm2 prend la valeur 1
 Afficher Fm2
 POUR i allant de 2 à $n - 1$ FAIRE
 F prend la valeur Fm1 + Fm2
 Afficher F
 Fm1 prend la valeur F
 Fm2 prend la valeur Fm1
 Fin POUR
 Fin de l'algorithme

Algorithme n° 3

Début de l'algorithme
 Fm1 prend la valeur 1
 Afficher Fm1
 Fm2 prend la valeur 1
 Afficher Fm2
 POUR i allant de 2 à $n - 1$ FAIRE
 F prend la valeur Fm1 + Fm2
 Afficher F
 Fm2 prend la valeur Fm1
 Fm1 prend la valeur F
 Fin POUR
 Fin de l'algorithme

4. a. Montrer que $R_{n+1}R_n - R_n = 1$.

b. Résoudre l'équation $x^2 - x = 1$.

c. Conjecturer la valeur exacte de φ .

5. Modifier l'algorithme choisi à la question 2. pour qu'il affiche les termes successifs de la suite R .

QCM

- 1 c. $f(1) = 3$; $f(3) = 13$; $f(13) = 63$.
- 2 b. $u_{n+1} - u_n = 7$.
- 3 b. $u_{n+1} = 1,3 u_n$; la suite u est géométrique de raison 1,3.
- 4 a. $4 - (-3) = 7$; la suite est arithmétique de raison 7 ; le 10^e terme vaut $-3 + 7 \times 9 = 60$.
- 5 b. $n = 49$; $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{49 \times 50}{2} = 49 \times 25 = 1225$.
- 6 a. Attention, la suite commence au terme d'indice 1 ; $u_3 = 1\,000 \times 0,5^2$.
- 7 c. $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10} = \frac{1-3^{11}}{1-3} = \frac{-177\,146}{-2}$.
- 8 a. On pose, pour x positif, $f(x) = \frac{1}{-x-1}$; on calcule la dérivée avec la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$, on obtient $f'(x) = \frac{1}{(-x-1)^2}$; la dérivée est positive, donc f est croissante sur $[0 ; +\infty[$. Par conséquent la suite u définie par $u_n = f(n)$ est croissante.
- 9 c. $u_0 = 5$, $u_1 = -10$, $u_n = 20$, $u_3 = -40$.
- 10 a. $u_{n+1} = 1,3u_n$; la suite u est géométrique de raison 1,3 et le premier terme est positif.

Exercice 1

1. $u_n = -3n + 20$.

Les cinq premiers termes de la suite sont $u_0 = 20$; $u_1 = 17$; $u_2 = 14$; $u_3 = 11$; $u_4 = 8$.

2. $u_{n+1} = -3(n+1) + 20 = -3n - 3 + 20 = -3n + 17$.

$u_{n+1} = -3(n-1) + 20 = -3n + 3 + 20 = -3n + 23$.

$u_{2n} = -3(2n) + 20 = -6n + 20$.

CONSEIL

Pour calculer les termes d'indice $n+1$, $n-1$ et $2n$, on remplace l'indice n par $n+1$, $n-1$ et $2n$ dans l'écriture du terme général de la suite.

Exercice 2

1. $u_n = n^2 - 3n + 1$.

Les trois premiers termes de la suite sont $u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = -1$.

Tableau donnant les dix premiers termes de la suite :

n	u_n
0	1
1	-1
2	-1
3	1
4	5
5	11

n	u_n
6	19
7	29
8	41
9	55
10	71

$$2. u_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 = n^2 - n - 1.$$

$$u_{2n} = (2n)^2 - 3(2n) + 1 = 4n^2 - 6n + 1.$$

Exercice 3

$$1. u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right); \quad u_0 = \sin(0) = 0;$$

$$u_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad u_2 = \sin(\pi) = 0;$$

$$u_3 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 3\right) = -1; \quad u_4 = \sin(2\pi) = 0.$$

2. Terme de rang $n+4$:

$$\begin{aligned} u_{n+4} &= \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+4)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}n + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = u_n. \end{aligned}$$

L'INFO EN +

Pour tout n , on a $u_{n+4} = u_n$; on dit que la suite u est périodique de période 4.

3. Pour tout réel x , on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc la suite u est bornée par -1 et 1 .

Exercice 4

$$1. u_n = \frac{5n+4}{n-3};$$

$$u_4 = 24; u_5 = 14,5 \text{ et } u_6 = \frac{34}{3}.$$

$$2. u_{n+1} = \frac{5(n+1)+4}{(n+1)-3} = \frac{5n+9}{n-2};$$

$$u_{2n} = \frac{5(2n)+4}{2n-3} = \frac{10n+4}{2n-3}.$$

$$\begin{aligned} 3. u_n - 24 &= \frac{5n+4-24(n-3)}{n-3} \\ &= \frac{-19n+76}{n-3} \end{aligned}$$

Pour $n \geq 4$, $-19n+76 \leq 0$ et $n-3 > 0$; donc pour $n \geq 4$, $u_n - 24 \leq 0$: la suite est majorée par 24.

$$u_n - 5 = \frac{5n+4-5(n-3)}{n-3} = \frac{19}{n-3}$$

Pour $n \geq 4$, $n-3 > 0$; donc, pour $n \geq 4$, $u_n - 5 \geq 0$: la suite est minorée par 5.

CONSEIL

Pour montrer que u est majorée par 24, il suffit de prouver que, pour tout entier n , $n \geq 4$, $u_n \leq 24$; on étudie donc le signe de $u_n - 24$.

Pour montrer que u est minorée par 5, il suffit de prouver que, pour tout entier n , $n \geq 4$, $u_n \geq 5$; on étudie donc le signe de $u_n - 5$.

Exercice 5

1. La suite u est définie par $u_0 = 0,5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 - u_n$.

Pour $n = 0$, on obtient $u_1 = u_{0+1} = (u_0)^2 - u_0 = 0,5^2 - 0,5 = -0,25$;

pour $n = 1$, $u_2 = u_{1+1} = (u_1)^2 - u_1 = (-0,25)^2 - (-0,25) = 0,3125$;

pour $n = 2$, $u_3 = u_{2+1} = (u_2)^2 - u_2 = (0,3125)^2 - (0,3125) = -0,21484375$.

2. Tableur donnant les dix premiers termes de la suite, à 0,000 1 près :

n	v_n
0	0,5000
1	-0,2500
2	0,3125
3	-0,2148
4	0,2610
5	-0,1929
6	0,2301
7	-0,1771
8	0,2085
9	-0,1650

Exercice 6

1. La suite v est définie par $v_0 = 0,5$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = (v_n)^2 - v_n + 1$.

Pour $n = 0$, on obtient $v_1 = v_{0+1} = (v_0)^2 - v_0 + 1 = 0,5^2 - 0,5 + 1 = 0,75$;

pour $n = 1$, $v_2 = v_{1+1} = (v_1)^2 - v_1 + 1 = 0,75^2 - 0,75 + 1 = 0,8125$;

pour $n = 2$, $v_3 = v_{2+1} = (v_2)^2 - v_2 + 1 = 0,8125^2 - 0,8125 + 1 = 0,84765625$.

2. Tableur donnant les dix premiers termes de la suite, à 0,000 1 près :

n	v_n
0	0,5000
1	0,7500
2	0,8125
3	0,8477
4	0,8709
5	0,8875
6	0,9002
7	0,9102
8	0,9182
9	0,9249

Exercice 7

1. La suite w est définie par $w_0 = 7$ et la relation de récurrence $w_{n+1} = w_n + n^2 + 1$.

Pour $n = 0$, on obtient $w_1 = w_{0+1} = (w_0) + 0^2 + 1 = 7 + 1 = 8$;
 pour $n = 1$, $w_2 = w_{1+1} = (w_1) + 1^2 + 1 = 8 + 2 = 10$;
 pour $n = 2$, $w_3 = w_{2+1} = (w_2) + 2^2 + 1 = 10 + 4 + 1 = 15$.

2. Formule entrée en B3 : $=B2+A2^2+1$.

Exercice 8

1. a. La suite u est définie par $u_0 = -1,5$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}.$$

Pour $n = 0$, on obtient $u_1 = u_{0+1} = \frac{2u_0 + 3}{u_0 + 2} = \frac{2 \times (-1,5) + 3}{-1,5 + 2} = 0$;

pour $n = 1$, $u_2 = u_{1+1} = \frac{2u_1 + 3}{u_1 + 2} = \frac{2 \times 0 + 3}{0 + 2} = 1,5$;

pour $n = 2$, $u_3 = u_{2+1} = \frac{2u_2 + 3}{u_2 + 2} = \frac{2 \times (1,5) + 3}{1,5 + 2} = \frac{6}{3,5} = \frac{12}{7}$.

b. Tableur donnant les dix premiers termes de la suite, à 10^{-6} près :

n	v_n
0	-1,500000
1	0,000000
2	1,500000
3	1,714286
4	1,730769
5	1,731959
6	1,732044
7	1,732050
8	1,732051
9	1,732051

Cette suite semble croissante.

2. On observe les premiers termes obtenus dans un tableur en modifiant u_0 et en gardant la même relation de récurrence.

	a.	b.	c.
n	u_n	u_n	u_n
0	1,732051	8	-3
1	1,732051	1,9	3
2	1,732051	1,743590	1,8
3	1,732051	1,732877	1,736842
4	1,732051	1,732110	1,732394
5	1,732051	1,732055	1,732075
6	1,732051	1,732051	1,732053
7	1,732051	1,732051	1,732051
8	1,732051	1,732051	1,732051
9	1,732051	1,732051	1,732051

Dans le cas **a.**, $u_0 = \sqrt{3}$, la suite semble constante. Prouvons-le :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2u_0 + 3}{u_0 + 2} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 2} = \frac{(2\sqrt{3} + 3)(\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)} \\ &= \frac{6 - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 6}{3 - 4} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

En réitérant le même procédé, on trouve que, pour tout n , $u_n = \sqrt{3}$.

Dans le cas **b.**, $u_0 = 8$, la suite semble décroissante et tendre vers $\sqrt{3}$ quand n augmente.

Dans le cas **c.**, $u_0 = -3$, la suite semble décroissante à partir de $n = 1$ et tendre vers $\sqrt{3}$ quand n augmente.

L'INFO EN +

En classe de terminale, vous démontrerez ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 9

1. $u_n = -3n + 20$;

$$u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 20 - (-3n + 20) = -3.$$

Donc, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = -3.$$

La suite u est donc une suite arithmétique de raison -3 .

2. $u_n = \frac{9}{2^n}$; $u_0 = 9$; $u_1 = 4,5$; $u_2 = 2,25$.

On observe que $u_1 - u_0 = -4,5$ et $u_2 - u_1 = -2,25$.

$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, donc la suite u n'est pas arithmétique.

3. $u_n = 5^n + 2n + 1$; $u_0 = 2$; $u_1 = 8$; $u_2 = 30$.

On observe que $u_1 - u_0 = 6$ et $u_2 - u_1 = 22$.

$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, donc la suite u n'est pas arithmétique.

CONSEIL

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut calculer $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 10

La suite u est arithmétique, donc, pour tous entiers n et p , $u_n = u_p + (n-p)r$.

Pour $n = 7$ et $p = 3$, on obtient $u_7 = u_3 + 4r$, soit $5 = 37 + 4r$.

On en déduit $r = -8$.

On a aussi $u_3 = u_0 + 3r$, soit $37 = u_0 + 3 \times (-8)$; on en déduit $u_0 = 61$.

Exercice 11

On calcule la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{14}$ où u est la suite arithmétique de raison 5 et $u_0 = 100$.

La suite u est arithmétique, donc, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$, soit $u_n = 100 + 5n$.

RAPPEL

Pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{14} &= 100 + (100 + 5 \times 1) \\
 &\quad + (100 + 5 \times 2) + \dots + (100 + 5 \times 14) \\
 &= 100 \times 15 + 5 (1 + 2 + \dots + 14) \\
 &= 1500 + 5 \times \frac{14(14+1)}{2}
 \end{aligned}$$

Donc $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{14} = 2\,025$.

Exercice 12

A est la somme des 500 premiers nombres entiers naturels.

On applique la formule $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, en prenant $n = 500$.

$$A = \frac{500(500+1)}{2}, \text{ d'où } A = 125\,250.$$

On reconnaît dans B la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 3. Pour connaître le nombre de termes de cette suite, on cherche l'indice n correspondant au dernier terme 41.

Le nombre n est solution de l'équation $41 = 5 + 3n$; on trouve $n = 12$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 B &= 5 + (5 + 3 \times 1) + (5 + 3 \times 2) + \dots + (5 + 3 \times 12) \\
 &= 5 \times 13 + 3 \times (1 + 2 + \dots + 12) \\
 &= 65 + 3 \times \frac{12(12+1)}{2}
 \end{aligned}$$

D'où $B = 299$.

Exercice 13

1. Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $b - a = c - b$.

D'où $2b = a + c$; on en déduit $b = \frac{a+c}{2}$.

2. *Première méthode* : d'après la question 1., en remplaçant b par $\frac{a+c}{2}$,

on obtient $a + \frac{a+c}{2} + c = 45$.

D'où $\frac{3a+3c}{2} = 45$; $3a + 3c = 90$ ou encore $a + c = 30$.

On cherche donc a et c en résolvant le système $\begin{cases} a + c = 30 \\ c - a = 16 \end{cases}$.

Par addition, on trouve $2c = 46$, d'où $c = 23$.

Par soustraction, on trouve $2a = 14$, d'où $a = 7$.

On en déduit $b = \frac{a+c}{2} = \frac{7+23}{2}$; $b = 15$.

Seconde méthode : on pose $a = b - r$ et $c = b + r$.

Les deux conditions s'écrivent $3b = 45$ et $2r = 16$.

On en déduit $b = 15$ et $r = 8$, puis $a = 7$ et $c = 23$.

Les trois nombres cherchés sont $a = 7$, $b = 15$ et $c = 23$.

Exercice 14

1. Soit la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

On a $u_1 = 2 \times 3 = 6$; $u_2 = 6 \times 3 = 18$;
 $u_3 = 18 \times 3 = 54$.

2. Pour calculer u_9 , on applique la formule $u_n = u_0 q^n$:

$u_9 = 2 \times 3^9$; on en déduit $u_9 = 39\,366$.

RAPPEL

Dire qu'une suite u est géométrique de raison q signifie que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

Si u est géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors pour tout entier n , $u_n = u_0 q^n$.

Exercice 15

1. $u_n = 3^n + 5n$; $u_0 = 1$; $u_1 = 8$; $u_2 = 19$.

On observe que $\frac{u_1}{u_0} = 8$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{19}{8} = 2,375$.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$, donc la suite u n'est pas géométrique.

2. $u_n = \frac{9}{2^n}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{9}{2^{n+1}}}{\frac{9}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$; donc, pour tout n , $u_{n+1} = 0,5 u_n$.

La suite u est donc géométrique de raison 0,5.

3. $7u_{n+1} - 10u_n = 0$ entraîne, pour tout n , $7u_{n+1} = 10u_n$, puis $u_{n+1} = \frac{10}{7} u_n$.

La suite u est donc géométrique de raison $\frac{10}{7}$.

Exercice 16

1. Soit la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 100$ et de raison 0,75. On a :

$u_1 = 100 \times 0,75 = 75$; $u_2 = 75 \times 0,75 = 56,25$; $u_3 = 56,25 \times 0,75 = 42,1875$.

2. Le terme général u_n en fonction de n est $u_n = u_0 q^n$.

$u_{10} = 100 \times 0,75^{10}$; on en déduit $u_{10} = 5,631\,351\,471$.

3. La calculatrice donne :

n	u_n
13	2,38
14	1,78

On en déduit que le plus petit indice n tel que $u_n < 2$ est 14.

Exercice 17

1. Soit la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 100$ et de raison 1,2. On a $u_1 = 100 \times 1,2 = 120$; $u_2 = 120 \times 1,2 = 144$; $u_3 = 144 \times 1,2 = 172,8$.

2. Le terme général u_n en fonction de n est $u_n = u_0 q^n$:

$u_{10} = 100 \times 1,2^{10}$; on en déduit $u_{10} \approx 619,7$.

3. La calculatrice donne :

n	u_n
31	28 485,16
32	34 182,19

On en déduit que le plus petit indice n tel que $u_n > 30\,000$ est 32.

Exercice 18

On calcule la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_7$, où u est la suite géométrique de raison 1,1 et $u_0 = 100$.

La suite u est géométrique, donc, pour tout entier n , $u_n = u_0 q^n$, soit $u_n = 100 \times 1,1^n$.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_7 &= 100 + 100 \times 1,1 + 100 \times 1,1^2 + \dots + 100 \times 1,1^7 \\ &= 100 \times (1 + 1,1 + 1,1^2 + \dots + 1,1^7) \end{aligned}$$

On applique la formule avec $q = 1,1$ et $n = 7$:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_7 = 100 \times \frac{1 - 1,1^8}{1 - 1,1} = 100 \times \frac{1,1^8 - 1}{0,1} = 1000(1,1^8 - 1) ;$$

donc $u_0 + u_1 + \dots + u_7 = 1\,143,588\,8$.

RAPPEL

Pour tout nombre réel q non nul et différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 19

On reconnaît la somme des puissances consécutives de 2 :

$$A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9.$$

On applique la formule $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, avec $q = 2$ et $n = 9$:

$$A = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1, \text{ donc } A = 1\,023.$$

$$B = \frac{1 - 0,9^{11}}{1 - 0,9} = \frac{1 - 0,9^{11}}{0,1} = 10 \times (1 - 0,9^{11}) = 10 - 10 \times 0,9^{11},$$

donc $B = 6,861\ 894\ 039$.

Exercice 20

1. La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,25u_n + 3$.

$$u_1 = 0,25u_0 + 3, \text{ d'où } u_1 = 4,25.$$

$$u_2 = 0,25u_1 + 3, \text{ d'où } u_2 = 4,0625.$$

$$u_3 = 0,25u_2 + 3, \text{ d'où } u_3 = 4,015625.$$

On observe que $u_1 - u_0 = -0,75$ et $u_2 - u_1 = -0,1875$.

$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, donc la suite u n'est pas arithmétique.

On observe que $\frac{u_1}{u_0} = 0,85$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{19}{8} \approx 0,956$.

$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$, donc la suite u n'est pas géométrique.

2. Soit v la suite de terme général $v_n = u_n - 4$.
Démontrons que la suite v est géométrique.

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4} = \frac{0,25u_n + 3 - 4}{u_n - 4} = \frac{0,25u_n - 1}{u_n - 4} \\ &= \frac{0,25(u_n - 4)}{u_n - 4} = 0,25. \end{aligned}$$

Pour tout n , $v_{n+1} = 0,25 v_n$, donc la suite v est géométrique de raison $0,25$.

La suite v a pour premier terme $v_0 = u_0 - 4 = 5 - 4 = 1$.

On en déduit que son terme général est $v_n = v_0 \times 0,25^n$, soit $v_n = 0,25^n$.

3. Comme $v_n = u_n - 4$, alors $u_n = v_n + 4$; d'où, pour tout n , $u_n = 0,25^n + 4$.

4. On pose $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

$$S = v_0 + 4 + v_1 + 4 + v_2 + 4 + \dots + v_{10} + 4$$

$$S = 1 + 0,25 + 0,25^2 + \dots + 0,25^{10} + 4 \times 11$$

$$\text{Or } 1 + 0,25 + 0,25^2 + \dots + 0,25^{10} = \frac{1 - 0,25^{11}}{1 - 0,25},$$

$$\text{donc } S = 44 + \frac{4}{3}(1 - 0,25^{11}); \text{ d'où } S \approx 45,33.$$

CONSEIL

Pour montrer que la suite v est géométrique, on peut calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Exercice 21

$$1. u_n = -n^2 + 5n - 2.$$

$$u_0 = -2; u_1 = 2; u_2 = 4 \text{ et } u_3 = 4.$$

2. *Première méthode* : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 - (-n^2 + 5n - 2)$$

$$u_{n+1} - u_n = -n^2 - 2n - 1 + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2$$

$$u_{n+1} - u_n = -2n + 4$$

Pour tout $n > 3$, $-2n + 4 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$;

on en déduit que la suite u est décroissante à partir du rang $n = 3$.

Seconde méthode : soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 5x - 2$.

La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et a pour dérivée $f'(x) = -2x + 5$;

la dérivée s'annule pour $x = 2,5$ et est négative si $x > 2,5$.

On en déduit que f est décroissante sur $[2,5 ; +\infty[$.

Par conséquent, la suite u est décroissante à partir du rang $n = 3$.

RAPPEL

La suite u définie par $u_n = f(n)$ a le même sens de variation que f .

Exercice 22

1. $u_n = \frac{n}{2n-1}$; $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{2}{3}$ et $u_3 = \frac{3}{5}$.

2. *Première méthode* : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2(n+1)-1} - \frac{n}{2n-1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{n}{2n-1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(2n-1) - n(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n^2 - n + 2n - 1 - 2n^2 - n}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)}$$

Pour tout $n > 0$, $(2n+1)(2n-1) > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

On en déduit que la suite u est décroissante à partir du rang $n = 1$.

Seconde méthode : soit f la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2x-1}$.

La fonction f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et a pour dérivée

$$f'(x) = \frac{1 \times (2x-1) - x \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2} ; \text{ la dérivée est négative.}$$

On en déduit que f est décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

Par conséquent, la suite u est décroissante à partir du rang $n = 1$.

3. D'après la question 2., la suite est décroissante ; on en déduit que : $u_1 > u_2 > \dots > u_n$, pour tout n ; donc la suite u est majorée par son premier terme u_1 .

Pour $n \geq 1$, tous les termes de la suite sont positifs ; donc la suite u est minorée par 0.

Finalement, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq 1$: la suite u est bornée.

Exercice 23

1. $u_n = \sqrt{4n+1}$; $u_0 = 1$; $u_1 = \sqrt{5}$; $u_2 = 3$; $u_3 = \sqrt{13}$; $u_4 = \sqrt{17}$.

2. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{4(n+1)+1} - \sqrt{4n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{4n+5} - \sqrt{4n+1}.$$

Pour tout entier naturel n , $4n+5 > 4n+1 > 0$;

or la fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$;

donc $\sqrt{4n+5} > \sqrt{4n+1}$;

d'où $u_{n+1} - u_n > 0$.

On en déduit que la suite u est croissante.

3. On détermine un entier N tel que, pour tout $n > N$, $u_n > 10$.

n	u_n
24	9,85
25	10,05

On en déduit que le plus petit indice n tel que $u_n > 10$ est 25.

4. D'après la question 3., on peut conjecturer que la suite u a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 24

1. $u_n = \frac{2^n}{n+1}$; $u_0 = 1$; $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{4}{3}$ et $u_3 = 2$.

$$2. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+2}}{\frac{2^n}{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Pour tout entier naturel n , $2n+2 > n+2 > 0$;

donc $\frac{2(n+1)}{n+2} > 1$;

on en déduit que la suite u est croissante.

CONSEIL

Tous les termes de la suite étant positifs, pour étudier le sens de variation de u , on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

3. Avec la calculatrice, on trouve $u_{10} \approx 93,09$; $u_{20} \approx 49932,19$: le seuil 10^6 est dépassé au rang $n = 25$. On peut donc conjecturer que la suite u a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 25

$$1. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{2^n} = \frac{2}{5}.$$

$\frac{2}{5} = 0,4 < 1$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$; on en déduit que la suite u est décroissante.

2. Lorsque n augmente, les puissances de 0,4 diminuent et tendent vers 0 ; on peut donc conjecturer que la suite u a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. On détermine un entier N tel que, pour tout $n > N$, $0 < u_n < 10^{-4}$.

La suite u est géométrique de raison 0,4 et on a $u_0 = 1$, donc pour tout n , $u_n = 0,4^n$.

Avec la calculatrice, on trouve $u_{10} \approx 0,000105$; $u_{11} \approx 0,000042$: on passe en-dessous du seuil 10^{-4} à partir du rang $n = 11$.

L'INFO EN +

Vous avez remarqué que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est indépendant de n ; il

est toujours égal à 0,4 ; cela signifie que la suite u est géométrique de raison 0,4. La raison étant comprise entre 0 et 1, on retrouve que la suite u est décroissante.

Exercice 26

1. $f(x) = \frac{2x}{x-1}$; u est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

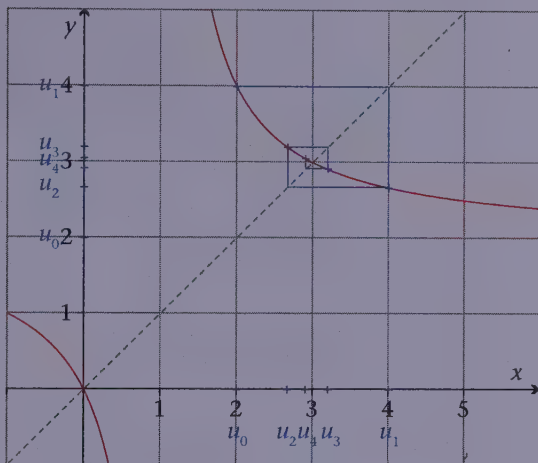
$$u_1 = f(u_0) = f(2) = 4 ; u_2 = f(u_1) = f(4) = \frac{8}{3} ;$$

$$u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{16}{5} = 3,2.$$

2. et 3. Soit $M(x ; y)$ un point quelconque du plan. M appartient à la courbe représentative de f si, et seulement si, $y = f(x)$.

On place donc successivement les points de coordonnées $(u_0 ; u_1)$, $(u_1 ; u_2)$, $(u_2 ; u_3)$... (Voir le graphique de la page suivante).

4. Sur le graphique de la page suivante, les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots$ s'approchent du nombre 3, abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = x$. On peut donc conjecturer que la suite u a pour limite 3 quand n tend vers $+\infty$.



Exercice 27

1. On traduit les contrats en langage de suites.

Contrat A : on note u_1 le loyer en euros de la première année, u_2 celui de la deuxième année... u_8 celui de la huitième année. On a $u_2 = u_1 + 120 = 4\,680$...

La suite u ainsi définie est arithmétique de premier terme $u_1 = 4\,560$ et de raison 120.

Contrat B : on note v_1 le loyer en euros de la première année, v_2 celui de la deuxième année... v_8 celui de la huitième année.

On a $v_2 = v_1 + 0,025 \times v_1 = 1,025v_1 = 4\,674$...

La suite v ainsi définie est géométrique de premier terme $v_1 = 4\,560$ et de raison 1,025.

2. **Contrat A :** la suite u est arithmétique, donc, pour tout entier n , $u_n = u_1 + (n-1)r$, soit $u_n = 4\,560 + 120(n-1)$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_8 &= 4\,560 + (4\,560 + 120 \times 1) \\ &\quad + (4\,560 + 120 \times 2) + \dots \\ &\quad + (4\,560 + 120 \times 7) \end{aligned}$$

$$= 4\,560 \times 8 + 120 \times (1 + 2 + \dots + 7)$$

$$= 36\,480 + 120 \times \frac{7(7+1)}{2}$$

Donc $u_1 + u_2 + \dots + u_8 = 39\,840$.

Contrat B : la suite v est géométrique, donc, pour tout entier n , $v_n = v_1 q^{n-1}$, soit $v_n = 4\,560 \times 1,025^{n-1}$.

RAPPEL

Pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 v_1 + v_2 + \dots + v_8 &= 4\,560 + 4\,560 \times 1,025 + 4\,560 \times 1,025^2 \\
 &\quad + \dots + 4\,560 \times 1,025^7 \\
 &= 4\,560 \times (1 + 1,025 + 1,025^2 + \dots + 1,025^7)
 \end{aligned}$$

On applique la formule avec $q = 1,025$ et $n = 7$:

$$\begin{aligned}
 v_1 + v_2 + \dots + v_8 &= 4560 \times \frac{1 - 1,025^8}{1 - 1,025} \\
 &= 4560 \times \frac{1,025^8 - 1}{0,025} \\
 &= 182\,400(1,025^8 - 1)
 \end{aligned}$$

RAPPEL

Pour tout nombre réel q non nul et différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Donc $v_1 + v_2 + \dots + v_8 = 39\,836,69$.

L'utilisation d'un tableur donne directement tous les résultats :

	A	B	C
1		Contrat A	Contrat B
2	<i>n</i>	<i>u_n</i>	<i>v_n</i>
3	1	4560,00	4560,00
4	2	4680,00	4674,00
5	3	4800,00	4790,85
6	4	4920,00	4910,62
7	5	5040,00	5033,39
8	6	5160,00	5159,22
9	7	5280,00	5288,20
10	8	5400,00	5420,41
11	somme	39840,00	39836,69

3. La somme des loyers payés avec le contrat A est de 39 840 € et avec le contrat B de 39 836,69 €. La différence est de 3,31 € en faveur du contrat B. **On conseillera le contrat B.**

Exercice 28

1. La suite u est géométrique

$$\text{et } u_n = u_0 \times q_n = 10\,000 \times \left(1 + \frac{28,7}{100}\right)^n = 10\,000 \times 1,287^n.$$

2. $2\,012 - 1\,802 = 210$, donc, de 1 802 à 2 012, il y a eu 21 décennies.

Le prix actuel du violon est donc de $u_{21} = 10\,000 \times 1,287^{21} = 2\,000\,550,34$ €.

3. À l'aide du tableur, on trouve que le premier terme supérieur à 15 millions est u_{29} . Ce terme correspond à l'année $1\,802 + 29 \times 10 = 2\,092$.

Exercice 29

1. Dans un triangle, le nombre de diagonales est 0, donc $u_3 = 0$.

Dans un quadrilatère, on peut tracer deux diagonales, donc $u_4 = 2$.

Dans un pentagone, on peut tracer deux diagonales à partir de chaque sommet ; il y a cinq sommets ; lorsqu'on fait le tour des cinq sommets, chaque diagonale est rencontrée deux fois, donc $u_5 = 5$.

2. Soit un polygone T de n sommets ; son nombre de diagonales est u_n . On peut considérer un polygone T' de $n + 1$ sommets comme étant le polygone T des n sommets précédents auquel on ajoute un point M (ce point n'appartenant à aucun des côtés du polygone T).

T' possède toutes les diagonales de T et il possède en plus la diagonale qui relie les deux sommets adjacents à M (c'était un côté de T) et les $(n + 1) - 3$ diagonales que l'on peut tracer à partir du dernier sommet M . Le nombre de diagonales de T' est donc :

$$u_{n+1} = u_n + 1 + n - 2, \text{ d'où } u_{n+1} = u_n + n - 1.$$

Par exemple, $u_6 = u_5 + 4 = 9$.

3. On reprend le raisonnement fait avec le pentagone : chacun des n sommets peut être relié à $n - 3$ sommets, soit $n - 3$ diagonales partant d'un sommet donné, mais chaque diagonale est comptée deux fois.

$$\text{D'où } u_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

On peut vérifier que cette formule est compatible avec la relation de récurrence donnée à la question 2. :

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}$$

$$\text{et } u_n + n - 1 = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 2(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}.$$

4. Pour chercher n tel que $u_n = 90$, on résout l'équation $\frac{n(n-3)}{2} = 90$,

ce qui équivaut à $n^2 - 3n - 180 = 0$, n étant un nombre entier naturel. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 729$ et les solutions de l'équation sont 15 et -12.

On en déduit qu'un polygone possédant 90 diagonales a 15 côtés.

RAPPEL

Une diagonale est une droite qui joint deux sommets non consécutifs d'un polygone.

CONSEIL

Vous pouvez vérifier mentalement que cette formule est valable pour n valant 3, 4, 5 et 6.

Exercice 30

1. $u_0 = 2\,000\,000 \times 0,98^0 = 2\,000\,000$.

La population initiale compte 2 000 000 d'individus.

2. Voici l'algorithme complété :

```

Début de l'algorithme
S prend la valeur 2 000 000
n prend la valeur 0
TANT QUE S < 50 000 000 FAIRE
    n prend la valeur n + 1
    S prend la valeur S + 2 000 000 × 0,98^n
Fin TANT QUE
Afficher : « Nombre de jours à attendre : »
Afficher n
Fin de l'algorithme

```

3. On note S_n l'effectif de la population au bout de n jours. La suite u est une suite géométrique. On a donc :

$$\begin{aligned}
 S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 2\,000\,000 \times \frac{1 - 0,98^{n+1}}{1 - 0,98} \\
 &= 100\,000\,000 \times (1 - 0,98^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Or on a $0 < 0,98 < 1 \Rightarrow 0 < 0,98^{n+1} < 1 \Rightarrow -1 < -0,98^{n+1} < 0$
 $\Rightarrow 0 < 1 - 0,98^{n+1} < 1$.

On a donc bien $S_n \leq 100\,000\,000$.

4. Voici l'algorithme complété :

```

Début de l'algorithme
S prend la valeur 2 000 000
n prend la valeur 0
Afficher : « Effectif à atteindre : »
LIRE N
SI N < 100 000 000 ALORS
    TANT QUE S < N FAIRE
        n prend la valeur n + 1
        S prend la valeur S + 2 000 000 × 0,98^n
    Fin TANT QUE
    Afficher : « Nombre de jours à attendre : »
    Afficher n
SINON
    Afficher : « Cet effectif ne sera jamais atteint. »
Fin de l'algorithme

```

Exercice 31

$$1. u_1 = u_0 + u_0 v_0 = 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,75$$

$$\text{et } v_1 = -1,1v_0 + 3u_0v_0 = -1,1 \times 0,5 + 3 \times 0,5 \times 0,5 = 0,2.$$

$$u_2 = u_1 + u_1 v_1 = 0,75 + 0,75 \times 0,2 = 0,9$$

$$\text{et } v_2 = -1,1v_1 + 3u_1v_1 = -1,1 \times 0,2 + 3 \times 0,75 \times 0,2 = 0,23.$$

$$u_3 = u_2 + u_2 v_2 = 0,9 + 0,9 \times 0,23 = 1,107$$

$$\text{et } v_3 = -1,1v_2 + 3u_2v_2 = -1,1 \times 0,23 + 3 \times 0,9 \times 0,23 = 0,368.$$

2. a. Comme i est d'abord fixé à 0, on doit exécuter les instructions de la boucle « tant que ».

La variable u prend alors la valeur $0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,75$.

La variable v prend donc la valeur $-1,1 \times 0,5 + 3 \times 0,75 \times 0,5 = 0,575$ car u vaut 0,75.

La variable i prend la valeur $i + 1$, c'est-à-dire 1. La condition de la boucle « tant que » n'est plus vérifiée. L'algorithme affiche donc 0,75 et 0,575.

b. Il faut supprimer les instructions de la boucle « tant que » et les remplacer par :

TANT QUE $i < n$ FAIRE

p prend la valeur uv

u prend la valeur $u + p$

v prend la valeur $-1,1v + 3p$

i prend la valeur $i + 1$

Fin TANT QUE

Exercice 32

1. On trouve : $F_2 = F_1 + F_0 = 2$; $F_3 = F_2 + F_1 = 3$; $F_4 = F_3 + F_2 = 5$; $F_5 = 8$; $F_6 = 13$; $F_7 = 21$; $F_8 = 34$; $F_9 = 55$ et $F_{10} = 89$.

2. On teste les algorithmes avec $n = 4$. Avec l'algorithme n° 1, on obtient : 1, 1, 2, 2.

Avec l'algorithme n° 2, on obtient : 1, 1, 2, 4.

Le bon algorithme est donc le n° 3.

$$3. R_1 = \frac{F_1}{F_0} = 1 ; R_2 = \frac{F_2}{F_1} = 2 ; R_3 = 1,5 ; R_4 \approx 1,667 ; R_5 = 1,6 ; R_6 = 1,625 ;$$

$$R_7 \approx 1,615 ; R_8 \approx 1,619 ; R_9 \approx 1,618 \text{ et } R_{10} \approx 1,618.$$

$$4. a. R_{n+1} R_n - R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \times \frac{F_n}{F_{n-1}} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1} - F_n}{F_{n-1}}$$

$$= \frac{F_n + F_{n-1} - F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}}{F_{n-1}} = 1.$$

b. $x^2 - x = 1$ équivaut à $x^2 - x + 1 = 0$.

On calcule le discriminant associé à cette équation :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5.$$

Les solutions sont donc :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

c. La relation démontrée à la question **4. a.** montre que si les termes R_n se rapprochent d'une valeur φ , alors $\varphi^2 - \varphi = 1$. De plus, φ est positif car les termes de la suite de Fibonacci le sont. Ainsi, on peut conjecturer

$$\text{que } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ce nombre est appelé « nombre d'or ».

5. Voici l'algorithme modifié :

```

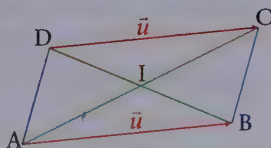
Début de l'algorithme
  Fm1 prend la valeur 1
  Fm2 prend la valeur 1
POUR i allant de 2 à n - 1 FAIRE
  R prend la valeur Fm1/Fm2
  Afficher R
  F prend la valeur Fm1 + Fm2
  Fm2 prend la valeur Fm1
  Fm1 prend la valeur F
Fin POUR
Fin de l'algorithme
  
```

1 Vecteurs

a. Rappels sur les vecteurs

On considère un parallélogramme ABCD de centre I.

- Les segments [AB] et [DC] ont la même direction, le même sens et la même longueur ; on dit qu'ils représentent le même vecteur $\vec{u}$.



On note $\overrightarrow{AB}$, le vecteur d'origine A et d'extrémité B.

- Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$; on écrit :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul ; on le note $\vec{0}$.

b. Addition des vecteurs

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit A un point du plan.

- Il existe un seul point B du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; on dit que B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.



De même, il existe un seul point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$; C est l'image de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.

- La **somme** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ ayant pour représentant le segment [AC].

On note $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

- La relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelée **relation de Chasles**.

- **Conséquence** : soit A, B, C et D quatre points du plan.

ABCD est un **parallélogramme** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

c. Repérage dans le plan

Soit O, I et J trois points non alignés.

On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Le repère (O ; I, J) du plan est noté (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

■ Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

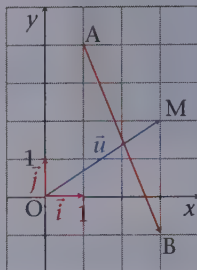
■ Soit un vecteur $\vec{u}$ et un point M de coordonnées $(x ; y)$.

Si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, alors $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y)$.

■ Soit deux vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$.

Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x' ; y + y')$.

■ Deux vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ sont égaux si, et seulement si :

$$x = x' \text{ et } y = y'.$$


d. Calcul de distances dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J).

■ Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan.

La longueur du segment [AB] est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

■ Soit $\vec{u}(x ; y)$ un vecteur du plan.

La longueur du vecteur $\vec{u}$, appelée **norme de $\vec{u}$** et notée $\|\vec{u}\|$, est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

e. Multiplication d'un vecteur par un nombre

■ Soit un vecteur $\vec{u}(x ; y)$ dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) et k un nombre réel.

Le **produit de k par $\vec{u}$** est le vecteur noté $k \cdot \vec{u}$ ayant pour coordonnées $(kx ; ky)$.

2 Vecteurs colinéaires

a. Milieu d'un segment

Soit deux points distincts A et B.

■ Les égalités vectorielles suivantes caractérisent le point I milieu du segment [AB] :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AI} \quad \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

- Si I est le milieu de [AB], alors, pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI}.$$

- Dans un repère, soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$; les coordonnées de I sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

b. Vecteurs colinéaires

- On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

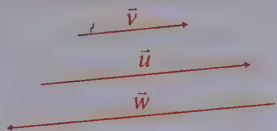
Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

- Soit un vecteur $\vec{u}$ non nul et un nombre réel k non nul.

Le vecteur $k \cdot \vec{u}$ a :

- la même direction que $\vec{u}$;
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$
- et le sens contraire si $k < 0$;
- une longueur égale à $|k|$ fois la longueur de $\vec{u}$.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $k = 0$, alors $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$.



- **Conséquences** : deux droites (AB) et (EF) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

Trois points A, B et E sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

c. Condition de colinéarité

- Dans un repère, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$xy' - x'y = 0.$$

d. Expression d'un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires

- Soit A, B et C trois points non alignés et M un point quelconque du plan.

Il existe un couple unique $(a; b)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{AM} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC}$.

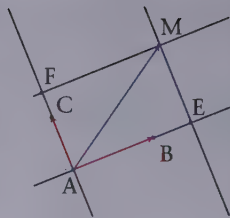
Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est exprimé de façon unique en fonction des vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$; les nombres a et b sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- Sur le dessin, la droite passant par M et parallèle à (AC) coupe (AB) en E ; la droite passant par M et parallèle à (AB) coupe (AC) en F.

AEMF étant un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$. Les points A, B et E étant alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires ; il existe donc un nombre réel a tel que $\overrightarrow{AE} = a \cdot \overrightarrow{AB}$.

De même, il existe un nombre réel b tel que $\overrightarrow{AF} = b \cdot \overrightarrow{AC}$.

On en déduit $\overrightarrow{AM} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC}$.



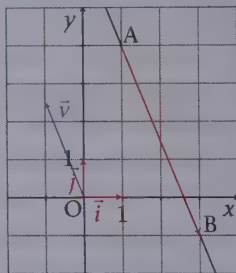
3 Équations cartésiennes d'une droite

a. Vecteur directeur d'une droite

- Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère deux points distincts A et B et la droite (AB).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Tout vecteur $\vec{v}$, non nul, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).



b. Équation cartésienne d'une droite

- La droite (AB) admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, appelée équation cartésienne de la droite, où a , b et c sont des réels tels que a ou b soient non nuls.

■ Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a , b et c sont des réels tels que a ou b soient non nuls, est une équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{v}(-b; a)$.

- Si le coefficient b est non nul, on retrouve l'équation réduite de la droite (AB) sous la forme $y = mx + p$, avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

■ *Rappel* : m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine de la droite.

c. Droites parallèles

- Soit d et d' deux droites d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, avec a ou b non nuls, a' ou b' non nuls.

Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si :

$$ab' - a'b = 0.$$

1 Utiliser la condition de colinéarité pour obtenir une équation de droite

Énoncé

Dans un repère, on considère les points $A(1 ; 4)$ et $B(3 ; -1)$.

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points A et B .

(Voir la figure de la page précédente.)

Solution commentée

Savoir-faire

Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite d , on peut calculer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de d , puis en créant un point $M(x ; y)$, on applique la condition de colinéarité pour les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$, soit $\overrightarrow{AB}(2 ; -5)$.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite d .

Soit $M(x ; y)$ un point quelconque du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x_M - x_A ; y_M - y_A)$, soit $\overrightarrow{AM}(x - 1 ; y - 4)$.

Le point M appartient à la droite d si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à :

$$(x - 1) \times (-5) - (y - 4) \times 2 = 0,$$

$$\text{soit } -5x - 2y + 13 = 0.$$

Une équation cartésienne de d est $-5x - 2y + 13 = 0$.

2 Calculer une équation de droite connaissant un vecteur directeur et un point

Énoncé

Dans un repère, on considère le point $A(1 ; 4)$ et le vecteur $\vec{v}(-1 ; 2,5)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Solution commentée

Savoir-faire

- Une droite du plan de vecteur directeur $\vec{v}(-b; a)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.
- Les nombres a et b sont connus avec les coordonnées de $\vec{v}$; on calcule donc la valeur de c avec les coordonnées de A.

$\vec{v}(-1; 2,5)$ est un vecteur directeur de d ; donc $a = 2,5$ et $b = 1$.

Une équation de d est de la forme $2,5x + y + c = 0$.

$A(1; 4)$ appartient à d , donc $2,5 \times 1 + 1 \times 4 + c = 0$, soit $c = -6,5$.

Une équation cartésienne de d est $2,5x + y - 6,5 = 0$.

À NOTER

En multipliant le résultat par -2 , on trouve $-5x - 2y + 13 = 0$, qui est l'équation trouvée dans le point méthode précédent.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de la même droite d .

3 Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie par une équation

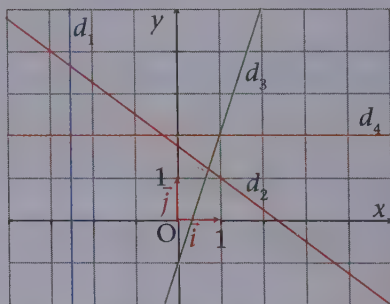
Énoncé

On donne une équation cartésienne de chacune des droites dessinées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$d_1 : 2x + 5 = 0 ; d_2 : 3x + 4y - 7 = 0 ;$$

$$d_3 : y = 3x - 1 ; d_4 : y - 2 = 0.$$

Déterminer un vecteur directeur de chacune de ces droites.



Solution commentée

Savoir-faire

- Un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{v}(-b; a)$.
- On ramène donc chacune des équations proposées à une équation de cette forme afin de pouvoir déterminer un vecteur directeur de chacune des quatre droites.

Pour d_1 , $a = 2$ et $b = 0$; donc un vecteur directeur est $\vec{v}_1(0 ; 2)$.

La droite d_1 étant parallèle à l'axe des ordonnées, on peut aussi prendre comme vecteur directeur le vecteur $\vec{j}$.

Pour d_2 , $a = 3$ et $b = 4$; donc un vecteur directeur est $\vec{v}_2(-4 ; 3)$.

Pour d_3 , on transforme l'écriture : $3x - y - 1 = 0$; $a = 3$ et $b = -1$;
donc un vecteur directeur est $\vec{v}_3(1 ; 3)$.

Pour d_4 , $a = 0$ et $b = 1$; donc un vecteur directeur est $\vec{v}_4(-1 ; 0)$.

d_4 étant parallèle à l'axe des abscisses, un vecteur directeur de d_4 est le vecteur $\vec{i}$.

L'INFO EN +

Lorsqu'on connaît l'équation réduite d'une droite sous la forme $y = mx + p$, un vecteur directeur de cette droite est $\vec{v}(1 ; m)$, où m est le coefficient directeur de la droite.

4 Décomposer un vecteur

Énoncé

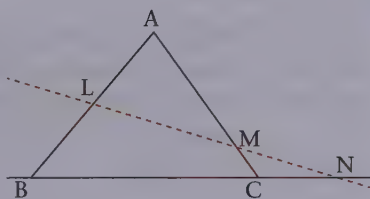
ABC est un triangle.

L, M et N sont respectivement définis par :

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM} = \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BN} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Démontrer que les points L, M et N sont alignés.



Solution commentée

Savoir-faire

- Pour décomposer les vecteurs, on utilise la relation de Chasles.
- Pour démontrer que les trois points sont alignés, on démontre que deux vecteurs formés avec ces trois points sont colinéaires.

$$1. \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(1 - \frac{4}{3}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{-4}{5} + \frac{4}{3}\right) \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{8}{15}\right) \cdot \overrightarrow{AC}.$$

2. Première méthode : on a exprimé les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

En observant les couples de réels obtenus, $\left(\frac{-1}{2}; \frac{4}{5}\right)$ et $\left(\frac{-1}{3}; \frac{8}{15}\right)$, on constate que $\frac{-1}{2} \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ et $\frac{8}{15} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$.

On en déduit que $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \overrightarrow{LM}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires ; par conséquent, les points L, M et N sont alignés.

Seconde méthode : les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont pour coordonnées dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) respectivement $\left(\frac{-1}{2}; \frac{4}{5}\right)$ et $\left(\frac{-1}{3}; \frac{8}{15}\right)$.

À NOTER

On peut aussi démontrer la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{MN}$ en utilisant la condition de colinéarité dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) du plan.

$$\text{On a } \left(\frac{-1}{2}\right) \times \frac{8}{15} - \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{-1}{3}\right) = -\frac{8}{30} + \frac{4}{15} = 0,$$

donc $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

10 qcm pour réviser le cours

Corrigés p. 196

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 Soit $A(5; 7)$, $B(2; -3)$ et I le milieu de $[AB]$. On a :

☐ a. $\overline{AB}(3; 10)$.

☐ b. $AB = \sqrt{109}$.

☐ c. $I(1,5; 2)$.

2 Soit $A(5; 7)$, $B(2; -3)$ et $M(x; y)$ le point défini par $3 \cdot \overline{MA} + 2 \cdot \overline{MB} = \vec{0}$.

☐ a. Les coordonnées de M sont $(3,8; 3)$.

☐ b. $\overline{AM} = \frac{1}{5} \cdot \overline{AB}$.

☐ c. $\overline{MA} = \frac{2}{5} \cdot \overline{AB}$.

3 Soit $\vec{v}(3; 2)$ et $\vec{w}(m; -1)$. Si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, alors :

☐ a. $m = -1,5$.

☐ b. $m = 1,5$.

☐ c. $m = \frac{2}{3}$.

4 Soit $A(5; 7)$, $B(2; -3)$, $E(0; -9)$ et $F(2,9; 0)$:

☐ a. Les points A , B et E sont alignés.

☐ b. Les points A , B et F sont alignés.

☐ c. $(AE) // (BF)$.

5 Soit $A(5; 7)$ et $B(2; -3)$. Une équation cartésienne de la droite (AB) est :

☐ a. $3x + 10y - 55 = 0$.

☐ b. $10x - 3y = 0$.

☐ c. $10x - 3y - 29 = 0$.

6 Soit $A(0; -4)$ et $\vec{v}(2; -3)$. Une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$ est :

☐ a. $2x - 3y - 4 = 0$.

☐ b. $3x + 2y + 8 = 0$.

☐ c. $-3x + 2y + 8 = 0$.

7 Soit d la droite d'équation cartésienne $-5x + 4y - 9 = 0$:

☐ a. $\vec{v}(-5; 4)$ est un vecteur directeur de d .

☐ b. $\vec{v}(4; -5)$ est un vecteur directeur de d .

☐ c. $\vec{v}(-4; -5)$ est un vecteur directeur de d .

8 Soit d et d' les droites d'équations respectives :

$3x - 2y + 23 = 0$ et $3x + 2y - 5 = 0$.

☐ a. d et d' sont parallèles.

☐ b. d et d' sont sécantes en $K(3; 16)$.

☐ c. d et d' sont sécantes en $K(-3; 7)$.

9 Le coefficient directeur de la droite d d'équation $5x + 4y + 7 = 0$ est :

☐ a. $0,8$.

☐ b. $1,25$.

☐ c. $-1,25$.

10 Soit d la droite d'équation $y = -0,25x + 2$. La droite d' passant par $F(9; -8)$ et parallèle à d a pour équation :

☐ a. $x + 4y + 23 = 0$.

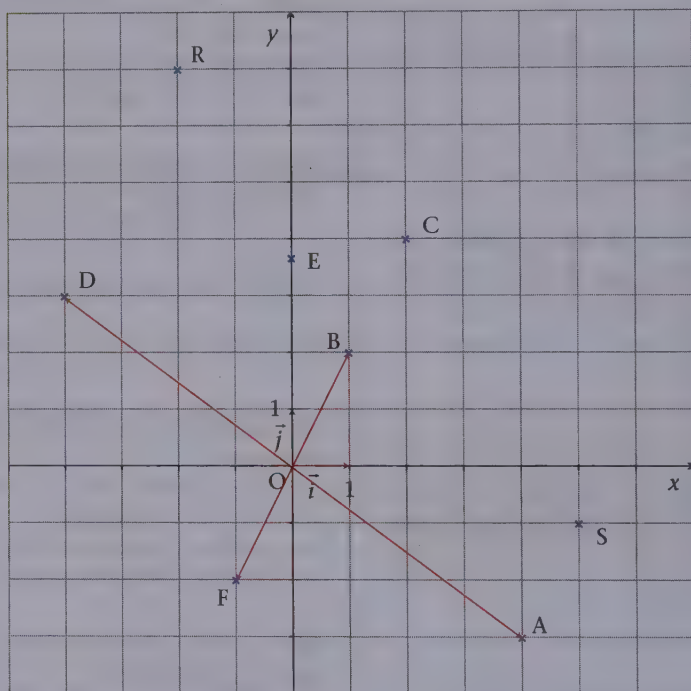
☐ b. $x - 4y - 41 = 0$.

☐ c. $y = -0,25x + 10,25$.

Exercices

Vecteurs

Dans les exercices 1 à 7, le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on utilise les points placés sur la figure.



Exercice 1

niveau 1

Corrigés p. 197

1. Écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OF}$.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$.
Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 2

niveau 1

Corrigés p. 197

On considère les points $A(4; -3)$ et $B(1; 2)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit I le milieu de $[AB]$. Calculer les coordonnées de I.
3. Calculer les distances AB, OA et OB.

Exercice 3

niveau 1

Corrigés p. 198

On considère les points $A(4 ; -3)$ et $B(1 ; 2)$.

1. Soit S le point défini par $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Calculer les coordonnées de S . Quelle est la nature du quadrilatère $OASB$?

2. Soit R le point défini par $\overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$. Calculer les coordonnées de R .

3. On considère les points $C(2 ; 4)$, $D(-4 ; 3)$ et $R(-2 ; 7)$.

Démontrer que le quadrilatère $OCRD$ est un parallélogramme.

Exercice 4

niveau 1

Corrigés p. 198

On considère les points $A(4 ; -3)$, $B(1 ; 2)$, $E\left(0 ; \frac{11}{3}\right)$ et $R(-2 ; 7)$.

1. Démontrer que A , B , E et R sont alignés.

2. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{ER}$ en fonction du vecteur $\vec{u}$.

Exercice 5

niveau 1

Corrigés p. 199

On considère les points $B(1 ; 2)$ et $F(-1 ; -2)$.

Soit $\vec{v}$ le vecteur défini par $\vec{v} = 3 \cdot \overrightarrow{OB}$.

1. Calculer les coordonnées de $\vec{v}$.

2. On pose $\overrightarrow{FC} = \vec{v}$. Calculer les coordonnées $(x ; y)$ de C .

Exercice 6

niveau 2

Corrigés p. 199

On considère les points $A(4 ; -3)$, $C(2 ; 4)$, $D(-4 ; 3)$ et $R(-2 ; 7)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CR}$.

2. Démontrer que les droites (AD) et (CR) sont parallèles.

Quelle est la nature du quadrilatère $ACRD$?

3. On sait que le point $E\left(0 ; \frac{11}{3}\right)$ appartient à la droite (AR) (voir exercice 4).

Démontrer que E est le point d'intersection des diagonales de $ACRD$.

Exercice 7

niveau 2

Corrigés p. 199

On considère les points $C(2 ; 4)$, $D(-4 ; 3)$, $F(-1 ; -2)$ et $R(-2 ; 7)$.

1. Démontrer que le quadrilatère $FCRD$ est un trapèze.

2. On appelle L le point d'intersection de la droite (DR) avec l'axe des ordonnées, c'est-à-dire le point de la droite (DR) ayant pour abscisse 0.

On note γ l'ordonnée de L.

- En utilisant la colinéarité des vecteurs $\overline{DR}$ et $\overline{DL}$, trouver une relation vérifiée par γ .
- Calculer γ .

Exercice 8

niveau 2

Corrigés p. 200

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit $\vec{u}(4; 1)$, $\vec{v}(-10; -2,5)$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- Soit $\vec{w}(1; m)$. Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.

- Calculer la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 9

niveau 3

Corrigés p. 200

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le vecteur $\vec{u}(-2; 4)$.

Déterminer les vecteurs $\vec{u}_0$ vérifiant les deux conditions suivantes :
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_0$ sont colinéaires et $\|\vec{u}_0\| = 1$.

Équations de droites

Dans les exercices 10 à 15, le plan est muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 10

niveau 1

Corrigés p. 201

On considère les points $A(5; 2)$ et $B(-3; 6)$.

Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan.

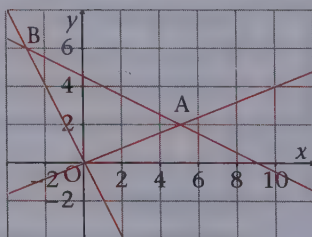
- En utilisant la colinéarité des vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AM}$, trouver une relation vérifiée par x et y .

En déduire une équation cartésienne de la droite (AB) .

- Parmi les points suivants, trouver ceux qui appartiennent à la droite (AB) :

$$E(3; 3), F(12; -2), G(7 - 2\sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}).$$

- Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (OA) et (OB) .



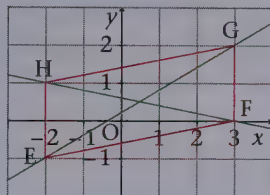
Exercice 11

niveau 1

Corrigés p. 202

On considère les points $E(-2; -1)$, $F(3; 0)$, $G(3; 2)$ et $H(-2; 1)$.

- Démontrer que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.
- Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (EF) et (EH).
- En déduire une équation cartésienne de chacune des droites (HG) et (FG).
- Déterminer une équation cartésienne de chacune des diagonales (EG) et (FH) de EFGH.

**Exercice 12**

niveau 1

Corrigés p. 203

- Soit d la droite passant par $A(7; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2; -5)$. Déterminer une équation de d .
- Soit d' la droite passant par $A(7; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}'(4; 1)$. Déterminer une équation de d' .

Exercice 13

niveau 1

Corrigés p. 203

Soit d la droite d'équation cartésienne $3x + 2y = 0$.

- Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de d .
- Soit d' la droite passant par $R(4; 2)$ et parallèle à d . Déterminer une équation de la droite d' .
- Soit d'' la droite passant par $S(5; 2)$ et parallèle à d . Déterminer une équation de la droite d'' .

Exercice 14

niveau 2

Corrigés p. 204

On donne les équations cartésiennes de trois droites :

$$d_1: -x + 3y - 4 = 0; \quad d_2: 2x - y + 5 = 0; \quad d_3: 2x + 5y - 25 = 0.$$

- Préciser un point et un vecteur directeur pour chacune de ces droites, puis construire les trois droites dans un même repère.
- Vérifier que d_1 et d_2 sont sécantes en utilisant des vecteurs directeurs de ces deux droites.
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2 .
- Lire graphiquement les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_3 et celui des droites d_2 et d_3 .

Exercice 15 niveau 3

Corrigés p. 205

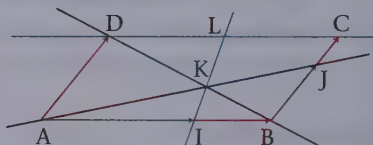
- Placer les points $A(2; 0)$, $B(10; 0)$ et $C(0; 6)$ dans un repère.
Construire les trois médianes du triangle ABC .
Déterminer une équation cartésienne de chacune de ces médianes.
- Résoudre le système formé par les trois équations ainsi obtenues.
Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 16 niveau 3

Corrigés p. 206

On considère un parallélogramme $ABCD$ non aplati ; on a placé les points I et J définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC}.$$



Les droites (AJ) et (BD) se coupent en K ; les droites (IK) et (CD) se coupent en L .

L'objectif de ce problème est de déterminer la position du point L sur le segment $[DC]$.

On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

- Écrire les coordonnées des points A , B , D , C , I et J .
- a. Déterminer une équation de chacune des droites (AJ) et (BD) .
b. En déduire les coordonnées de K .
- a. Déterminer une équation de chacune des droites (IK) et (CD) .
b. En déduire les coordonnées de L .

Décomposition d'un vecteur

Exercice 17 niveau 1

Corrigés p. 207

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Placer les points $A(-2; -1)$, $B(3; -1)$, $C(3; 2)$ et $D(-2; 3)$.

- Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

- a. Construire les points I , K , L et M tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AL} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.$$

- b. Démontrer que le quadrilatère $ABLC$ est un parallélogramme.

Exercice 18

niveau 1

Corrigés p. 208

Soit A et B deux points distincts du plan. On définit les points E et F par les égalités vectorielles : $-3 \cdot \overrightarrow{EA} + 5 \cdot \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ et $3 \cdot \overrightarrow{FA} + 5 \cdot \overrightarrow{FB} = \vec{0}$.

1. Construire les points E et F.
2. Déterminer le nombre a tel que $\overrightarrow{EF} = a \cdot \overrightarrow{AB}$.
3. Soit I le milieu du segment [EF].
Déterminer le nombre b tel que $\overrightarrow{AI} = b \cdot \overrightarrow{AB}$.

Exercice 19

niveau 2

Corrigés p. 209

Soit A, B et C trois points non alignés. Soit L, M et N les points définis par $2 \cdot \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{8}{7} \cdot \overrightarrow{BC}$.

1. Construire les points L, M et N.
2. Démontrer que les points L, M et N sont alignés.
3. Déterminer le nombre x tel que $\overrightarrow{LN} = x \cdot \overrightarrow{LM}$.

Exercice 20

niveau 3

Corrigés p. 210

Soit A, B et C trois points non alignés.

Soit G le point défini par $2 \cdot \overrightarrow{AG} + 3 \cdot \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Construire le point G.

2. Démontrer que, pour tout point M du plan :
 $-2 \cdot \overrightarrow{MA} + 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{MG}$.

3. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité (E) :

$$\left\| -2 \cdot \overrightarrow{MA} + 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\|.$$

Exercice 21

niveau 3

Corrigés p. 211

Soit [AB] et [CD] deux segments quelconques. On appelle I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. Soit x un nombre réel différent de -1 . On considère les points M et N définis par $\overrightarrow{MA} + x \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{NB} + x \cdot \overrightarrow{ND} = \vec{0}$.

1. Soit G le milieu de [MN].
Démontrer que $\overrightarrow{GI} + x \cdot \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$. Faire une figure dans le cas $x = 2$.
2. a. Démontrer que, si $x \neq -1$, $\overrightarrow{IG} = \frac{x}{1+x} \cdot \overrightarrow{IJ}$.
- b. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

QCM

1 b. $\overline{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$, soit $(-3; -10)$.

Les coordonnées de I sont $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$, soit $I(3,5; 2)$.

2 a. $3 \cdot \overline{MA} + 2 \cdot \overline{MB} = 3 \cdot \overline{MA} + 2 \cdot \overline{MA} + 2 \cdot \overline{AB} = 5 \cdot \overline{MA} + 2 \cdot \overline{AB}$,
 $5 \cdot \overline{MA} + 2 \cdot \overline{AB} = \vec{0}$ équivaut à $\overline{AM} = \frac{2}{5} \cdot \overline{AB}$, ce qui élimine b. et c.

On peut aussi résoudre les deux équations avec les coordonnées :
 $3(5 - x) + 2(2 - x) = 0$ et $3(7 - y) + 2(-3 - y) = 0$, d'où $x = 3,8$ et $y = 3$.

3 a. On résout $3 \times (-1) - 2 \times m = 0$, d'où $m = -1,5$.

4 b. Soit A(5; 7), B(2; -3), E(0; -9) et F(2,9; 0).

$\overline{AB}(-3; -10)$, $\overline{AE}(-5; -16)$; $(-3) \times (-16) - (-10) \times (-5) = -2 \neq 0$.

$\overline{AF}(-2,1; -7)$; $(-3) \times (-7) - (-10) \times (-2,1) = 0$; donc AB et AF sont colinéaires, donc A, B et F sont alignés.

5 c. $\overline{BA}(3; 10)$ est un vecteur directeur de (AB); on peut poser $a = 10$ et $b = -3$ ce qui élimine a.; les coordonnées de A éliminent b.

6 b. $3x + 2y + 8 = 0$ équivaut à $-3x - 2y - 8 = 0$.

7 c. d a pour équation cartésienne $-5x + 4y - 9 = 0$, donc $a = -5$ et $b = 4$.

ATTENTION

Un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{v}(-b; a)$.

8 c. d et d' ont pour vecteurs directeurs $\vec{v}(2; 3)$ et $\vec{v}'(-2; 3)$; ces vecteurs ne sont pas colinéaires, ce qui élimine a.

Sans résoudre le système formé par les deux équations, on élimine b. car le couple (3; 16) ne vérifie pas l'équation de d'.

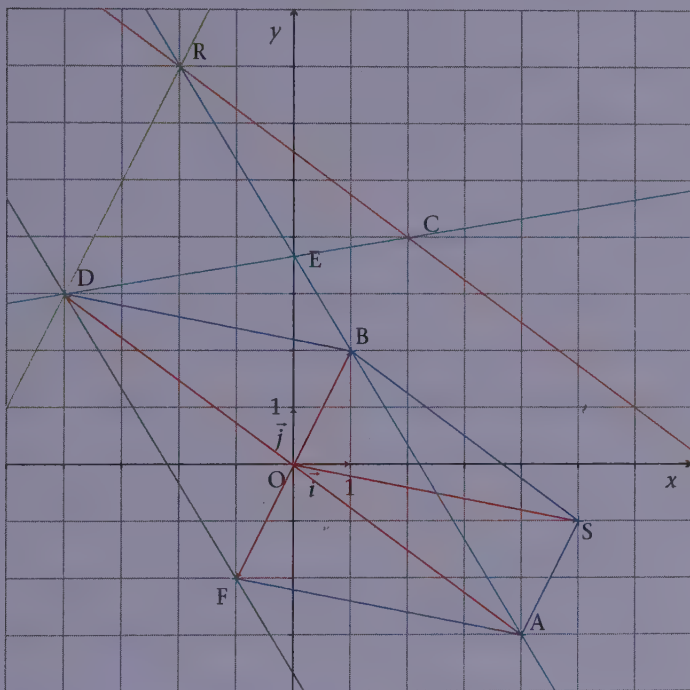
9 c. $5x + 4y + 7 = 0$ équivaut à $y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{4}$.

10 a. Dans $y = -0,25x + 10,25$, on retrouve le même coefficient directeur $-0,25$; mais $(-0,25) \times 9 + 10,25 = 8 \neq -8$; on élimine c.

Un vecteur directeur de d est $\vec{v}(1; -0,25)$; en multipliant par -4 , on trouve un autre vecteur directeur $\vec{v}'(-4; 1)$, ce qui élimine b.

On peut vérifier que le couple (9; -8) vérifie l'équation $x + 4y + 23 = 0$.

La figure suivante a été complétée pour les exercices de 1 à 7.



Exercice 1

1. Les coordonnées du point A sont $(4; -3)$ et O est l'origine du repère ; donc le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(4; -3)$.

De même, on a $B(1; 2)$, donc $\overrightarrow{OB}(1; 2)$; $D(-4; 3)$, donc $\overrightarrow{OD}(-4; 3)$; $F(-1; -2)$, donc $\overrightarrow{OF}(-1; -2)$.

2. Les coordonnées de $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ sont $(4 + (-4); -3 + 3)$, soit $(0; 0)$; donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

De même, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$ a pour coordonnées $(0; 0)$; donc $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

On en déduit que le point O est le milieu des segments $[AD]$ et $[BF]$; le quadrilatère ABDF est donc un parallélogramme.

Exercice 2

1. $A(4; -3)$ et $B(1; 2)$; $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$, soit $(-3; 5)$.

2. I est le milieu de [AB]. Les coordonnées de I sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}, \text{ soit } x_I = \frac{4+1}{2} = 2,5 \text{ et } y_I = \frac{(-3)+2}{2} = -0,5,$$

donc $I(2,5; -0,5)$.

3. On applique la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{34}; \quad OA = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$OB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Exercice 3

1. $A(4; -3)$ et $B(1; 2)$; S est défini par $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ sont $(4 + 1; -3 + 2)$, donc $\overrightarrow{OS}$ a pour coordonnées $(5; -1)$ et S a pour coordonnées $(5; -1)$.

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ signifie que $OASB$ est un parallélogramme.

2. R est le point défini par $\overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{OR}$ sont $(-4 + 2 \times 1; 3 + 2 \times 2)$, soit $(-2; 7)$; donc $R(-2; 7)$.

3. $C(2; 4)$ et $D(-4; 3)$.

$OCRD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DR}$.

Or $\overrightarrow{OC}(2; 4)$ et $\overrightarrow{DR}(2; 4)$; on a $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DR}$, donc $OCRD$ est un parallélogramme.

Exercice 4

1. $A(4; -3)$, $B(1; 2)$, $E\left(0; \frac{11}{3}\right)$, donc

$\overrightarrow{AB}(-3; 5)$ et $\overrightarrow{AE}\left(-4; \frac{20}{3}\right)$; on observe

que $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont

colinéaires, d'où A , B et E sont alignés.

$A(4; -3)$ et $R(-2; 7)$, donc $\overrightarrow{AR}(-6; 10)$; on observe que $\overrightarrow{AR} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AR}$ sont colinéaires, donc A , B et R sont alignés.

Donc les quatre points A , B , E et R sont alignés.

2. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On exprime $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{ER}$ en fonction du vecteur $\vec{u}$.

$$\overrightarrow{AR} = 2 \cdot \vec{u}.$$

$$\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AR} = -\frac{4}{3} \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{u} = \left(\frac{-4}{3} + 2\right) \cdot \vec{u}, \text{ donc } \overrightarrow{ER} = \frac{2}{3} \cdot \vec{u}.$$

RAPPEL

Trois points A , B et E sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

Exercice 5

1. $\overline{OB}(1; 2)$, donc $\overline{v}(3; 6)$.

2. On pose $\overline{FC} = \overline{v}$. On calcule les coordonnées $(x; y)$ de C :

$F(-1; -2)$ et $C(x; y)$, donc $\overline{FC}(x+1; y+2)$; or $\overline{v}(3; 6)$.

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

On résout les équations $x+1=3$ et $y+2=6$, d'où $x=2$ et $y=4$.

Le point C a pour coordonnées $(2; 4)$.

Exercice 6

1. $A(4; -3)$ et $D(-4; 3)$, donc $\overline{AD}(-8; 6)$.

$C(2; 4)$, et $R(-2; 7)$, donc $\overline{CR}(-4; 3)$.

2. $\overline{AD}(-8; 6)$ et $\overline{CR}(-4; 3)$; on constate que $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{CR}$; les vecteurs $\overline{AD}$ et $\overline{CR}$ sont donc colinéaires; donc les droites (AD) et (CR) sont parallèles.

Le quadrilatère ACRD ayant deux côtés parallèles est un trapèze.

3. On sait déjà que le point E appartient à la droite (AR).

Pour montrer que E appartient à la droite (DC), il suffit de prouver que les vecteurs $\overline{DE}$ et $\overline{DC}$ sont colinéaires.

$C(2; 4)$, $D(-4; 3)$ et $E\left(0; \frac{11}{3}\right)$, donc $\overline{DC}(6; 1)$ et $\overline{DE}\left(4; \frac{2}{3}\right)$;

on constate que $\overline{DE} = \frac{2}{3} \cdot \overline{DC}$, donc les vecteurs $\overline{DE}$ et $\overline{DC}$ sont colinéaires,

d'où les points D, E et C sont alignés.

Le point E est donc bien le point d'intersection des droites (AR) et (DC).

RAPPEL

Deux droites (AB) et (EF) sont parallèles si, et seulement si, $\overline{AB}$ et $\overline{EF}$ sont colinéaires.

Exercice 7

1. Sur le dessin, les droites (FC) et (RD) semblent parallèles. On le démontre en prouvant que les vecteurs $\overline{FC}$ et $\overline{RD}$ sont colinéaires.

$C(2; 4)$ et $F(-1; -2)$, donc $\overline{FC}(3; 6)$.

$D(-4; 3)$ et $R(-2; 7)$, donc $\overline{RD}(-2; -4)$.

On a $3 \times (-4) - 6 \times (-2) = 0$, donc $\overline{FC}$ et $\overline{RD}$ sont colinéaires. Les droites (FC) et (RD) sont parallèles et FCRD est un trapèze.

RAPPEL

Dans un repère, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

2. a. L est le point d'intersection de (DR) avec l'axe des ordonnées.

Par hypothèse, les points D, R et L sont alignés ; les vecteurs $\overrightarrow{DR}$ et $\overrightarrow{DL}$ sont donc colinéaires.

On sait que $\overrightarrow{DR}(2; 4)$ et $\overrightarrow{DL}(4; \gamma - 3)$.

La condition de colinéarité s'écrit $2 \times (\gamma - 3) - 4 \times 4 = 0$, soit $2\gamma - 22 = 0$.

b. L'équation précédente a pour solution $\gamma = 11$. Donc L a pour coordonnées $(0; 11)$.

Exercice 8

1. $\vec{u}(4; 1)$, $\vec{v}(-10; -2,5)$.

On a $4 \times (-2,5) - 1 \times (-10) = -10 + 10 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. $\vec{u}(4; 1)$, $\vec{w}(1; m)$.

La condition de colinéarité s'écrit $4 \times m - 1 \times 1 = 0$; $4m = 1$, d'où $m = 0,25$.

3. $\vec{u}(4; 1)$, donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

$\vec{v}(-10; -2,5)$, donc :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-10)^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{106,25}.$$

$\vec{w}(1; 0,25)$, donc :

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2 + (0,25)^2} = \sqrt{1,0625}.$$

RAPPEL

La norme de $\vec{u}(x; y)$ est le nombre noté $\|\vec{u}\|$, défini par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; c'est la longueur du vecteur $\vec{u}$.

Exercice 9

La norme du vecteur $\vec{u}(-2; 4)$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Soit $(a; b)$ les coordonnées de $\vec{u}_0$.

La condition « les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_0$ sont colinéaires » se traduit par $-2b - 4a = 0$; donc $b = -2a$; la condition $\|\vec{u}_0\| = 1$ se traduit par $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, ou encore $a^2 + b^2 = 1$.

On a alors $a^2 + (-2a)^2 = 1$; $5a^2 = 1$, d'où $a^2 = \frac{1}{5}$.

On en déduit $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; pour $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Il y a donc deux vecteurs satisfaisant les conditions demandées :

$$\vec{u}_0\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ ou } \vec{u}_0\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

CONSEIL

Plus rapidement, on cherche k tel que $\vec{u}_0 = k \cdot \vec{u}$ et $\|k \cdot \vec{u}\| = 1$.

On peut démontrer et appliquer la formule :

$$\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|.$$

Autre méthode : Sachant que

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$\|k \cdot \vec{u}\| = 1 \text{ équivaut à } |k| \times \|\vec{u}\| = 1, \text{ soit } |k| = \frac{1}{2\sqrt{5}};$$

$$\text{donc } k = \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{ ou } k = -\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

$$\text{On retrouve } \vec{u}_0 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \text{ ou } \vec{u}_0 \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Exercice 10

1. A(5 ; 2) et B(-3 ; 6), donc $\overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, $\overline{AB}(-8; 4)$.

$\overline{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

M(x ; y), donc $\overline{AM}(x_M - x_A; y_M - y_A)$, $\overline{AM}(x - 5; y - 2)$.

Le point M appartient à la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AM}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à $(x - 5) \times 4 - (y - 2) \times (-8) = 0$, soit $4x + 8y - 36 = 0$.

En divisant par 4, une équation cartésienne de (AB) est $x + 2y - 9 = 0$.

2. Pour savoir si un point appartient à la droite (AB), on remplace x et y par les coordonnées du point et on vérifie si l'équation de la droite est ou non satisfaite.

E(3 ; 3) ; $3 + 2 \times 3 - 9 = 0$, donc $E \in (AB)$.

F(12 ; -2) ; $12 + 2 \times (-2) - 9 = -1$, donc $F \notin (AB)$.

G($7 - 2\sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$) ; $7 - 2\sqrt{2} + 2(1 + \sqrt{2}) - 9 = 7 - 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 9 = 0$, donc $G \in (AB)$.

3. $\overline{OA}(5; 2)$; en divisant les coordonnées par 5, on peut prendre comme vecteur directeur de la droite (OA) le vecteur $\vec{u}(1; 0,4)$. Le coefficient directeur de la droite (OA) est alors 0,4 ; comme la droite passe par l'origine O, elle a pour équation $y = 0,4x$.

On peut écrire d'autres équations cartésiennes de (OA) : $0,4x - y = 0$; $2x - 5y = 0$; etc.

$\overline{OB}(-3; 6)$; en divisant les coordonnées par -3, on peut prendre comme vecteur directeur de la droite (OB) le vecteur $\vec{v}(1; -2)$. Le coefficient directeur de la droite (OB) est alors -2 ; comme la droite passe par l'origine O, elle a pour équation $y = -2x$.

On peut écrire d'autres équations cartésiennes de (OB) : $2x + y = 0$; $6x - 3y = 0$; etc.

Exercice 11

1. EFGH est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

$E(-2; -1)$, $F(3; 0)$, donc $\overrightarrow{EF}(5; 1)$.

$G(3; 2)$, $H(-2; 1)$, donc $\overrightarrow{HG}(5; 1)$.

On a $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, donc EFGH est un parallélogramme.

2. $\overrightarrow{EF}(5; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (EF).

$M(x; y)$, donc $\overrightarrow{EM}(x+2; y+1)$.

Le point M appartient à (EF) si, et seulement si, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à $(x+2) \times 1 - (y+1) \times 5 = 0$, soit $x - 5y - 3 = 0$.

Une équation cartésienne de (EF) est $x - 5y - 3 = 0$.

$E(-2; -1)$, $H(-2; 1)$; $\overrightarrow{EH}(0; 2)$ est un vecteur directeur de la droite (EH).

$M(x; y)$, donc $\overrightarrow{EM}(x+2; y+1)$.

Le point M appartient à (EH) si, et seulement si, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à $(x+2) \times 2 - (y+1) \times 0 = 0$, soit $2x + 4 = 0$.

Une équation cartésienne de (EH) est $x = -2$.

3. On a prouvé que EFGH est un parallélogramme ; on en déduit que les droites (EF) et (HG) sont parallèles et que les droites (EH) et (FG) sont parallèles. (EF) et (HG) étant parallèles, $\overrightarrow{EF}(5; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (HG). $M(x; y)$, donc $\overrightarrow{HM}(x+2; y-1)$.

Le point M appartient à (HG) si, et seulement si, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à $(x+2) \times 1 - (y-1) \times 5 = 0$, soit $x - 5y - 8 = 0$.

Une équation cartésienne de (EF) est $x - 5y - 8 = 0$.

(EH) et (FG) étant parallèles, $\overrightarrow{EH}(0; 2)$ est un vecteur directeur de la droite (FG) ; (FG) est donc parallèle à l'axe des ordonnées, donc une équation cartésienne de (FG) est $x = 3$.

4. $E(-2; -1)$, $G(3; 2)$, donc $\overrightarrow{EG}(5; 3)$ est un vecteur directeur de la droite (EG). $M(x; y)$, donc $\overrightarrow{EM}(x+2; y+1)$.

Le point M appartient à (EG) si, et seulement si, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à $(x+2) \times 3 - (y+1) \times 5 = 0$, soit $3x - 5y + 1 = 0$.

Une équation cartésienne de (EG) est $3x - 5y + 1 = 0$.

$F(3; 0)$, $H(-2; 1)$ donc $\overrightarrow{FH}(-5; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (FH).

$M(x; y)$, donc $\overrightarrow{FM}(x-3; y)$.

Le point M appartient à (FH) si, et seulement si, $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à $(x-3) \times 1 - y \times (-5) = 0$, soit $x + 5y - 3 = 0$.

Une équation cartésienne de (FH) est $x + 5y - 3 = 0$.

L'INFO EN +

Ayant remarqué que $\overrightarrow{EH} = 2 \cdot \vec{j}$, la droite (EH) est parallèle à l'axe des ordonnées ; tous les points de cette droite ont la même abscisse que les points E et H. On retrouve $x = -2$.

Exercice 12

1. Soit d la droite passant par $A(7; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2; -5)$.

Première méthode : $M(x; y)$, donc $AM(x-7; y-3)$.

Le point M appartient à d si, et seulement si, AM et $\vec{v}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à $(x-7) \times (-5) - (y-3) \times 2 = 0$, soit $-5x - 2y + 41 = 0$.

Une équation cartésienne de d est $-5x - 2y + 41 = 0$.

Seconde méthode : $\vec{v}(2; -5)$ est un vecteur directeur de d ; donc $a = -5$ et $b = 2$.

Une équation de d est de la forme :

$$-5x - 2y + c = 0.$$

$A(7; 3)$ appartient à d ,

donc $-5 \times 7 - 2 \times 3 + c = 0$, soit $c = 41$.

Une équation cartésienne de d est :

$$-5x - 2y + 41 = 0.$$

2. Soit d' la droite passant par $A(7; 3)$

et de vecteur directeur $\vec{v}'(4; 1)$.

$\vec{v}'(4; 1)$ est un vecteur directeur de d' ;

donc $a = 1$ et $b = -4$.

Une équation de d' est de la forme $x - 4y + c = 0$.

$A(7; 3)$ appartient à d' , donc $7 - 4 \times 3 + c = 0$, soit $c = 5$.

Une équation cartésienne de d' est $x - 4y + 5 = 0$.

CONSEIL

Une droite du plan de vecteur directeur $\vec{v}(-b; a)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Les nombres a et b sont connus avec les coordonnées de $\vec{v}$; on calcule la valeur de c avec les coordonnées d'un point de la droite.

Exercice 13

1. On pose $a = 3$ et $b = 2$; donc un vecteur directeur $\vec{u}$ de d est $\vec{u}(-2; 3)$.

2. Les droites d et d' étant parallèles, le vecteur directeur $\vec{u}$ de d est aussi un vecteur directeur de d' .

Une équation de d' s'écrit alors :

$$3x + 2y + c = 0.$$

On détermine c avec les coordonnées de R : $3 \times 4 + 2 \times 2 + c = 0$, soit $c = -16$.

Une équation cartésienne de d' est :

$$3x + 2y - 16 = 0.$$

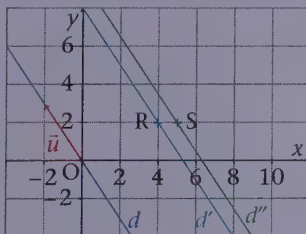
3. On reprend la même méthode : une équation de d'' s'écrit alors $3x + 2y + c = 0$.

On détermine c avec les coordonnées de S : $3 \times 5 + 2 \times 2 + c = 0$, soit $c = -19$.

Une équation cartésienne de d'' est $3x + 2y - 19 = 0$.

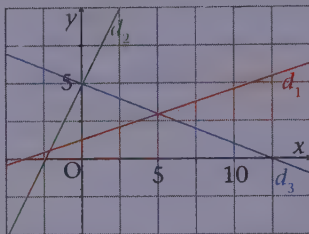
RAPPEL

Si une droite du plan a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur de cette droite est : $\vec{v}(-b; a)$.



Exercice 14

1. La figure montre les trois droites d'équations $d_1: -x + 3y - 4 = 0$; $d_2: 2x - y + 5 = 0$; $d_3: 2x + 5y - 25 = 0$, affichées sur l'écran d'une calculatrice.



Pour les construire, on peut utiliser les points et vecteurs suivants :

Droite	Point	Vecteur directeur
d_1	A(-1 ; 1)	$\vec{u}_1(-3 ; -1)$
d_2	B(0 ; 5)	$\vec{u}_2(1 ; 2)$
d_3	C(12,5 ; 0)	$\vec{u}_3(-5 ; 2)$

2. Pour justifier que d_1 et d_2 sont sécantes, on doit démontrer que des vecteurs directeurs de d_1 et d_2 ne sont pas colinéaires.

On applique la condition de colinéarité avec $\vec{u}_1(-3 ; -1)$ et $\vec{u}_2(1 ; 2)$.

On a $(-3) \times 2 - (-1) \times 1 = -5 \neq 0$, donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles ; **elles sont donc sécantes.**

3. Pour déterminer les coordonnées exactes du point d'intersection de d_1 et d_2 , on doit résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} -x + 3y - 4 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

On peut utiliser la méthode de substitution : dans la deuxième ligne, on obtient $y = 2x + 5$; on reporte cette valeur de y dans la première ligne.

$$-x + 3(2x + 5) - 4 = 0$$

$$-x + 6x + 15 - 4 = 0$$

$$5x + 11 = 0$$

$$\text{D'où } x = \frac{-11}{5}, \text{ ou encore } x = -2,2.$$

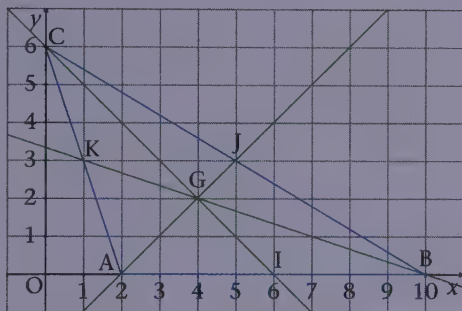
$$\text{On calcule } y : y = 2 \times (-2,2) + 5 = 0,6.$$

Le point d'intersection de d_1 et d_2 a pour coordonnées $(-2,2 ; 0,6)$.

4. Graphiquement, le point d'intersection des droites d_1 et d_3 a pour coordonnées $(5 ; 3)$; celui des droites d_2 et d_3 a pour coordonnées $(0 ; 5)$.

Exercice 15

1.



On commence par chercher les coordonnées des milieux des trois côtés.

Soit I le milieu de $[AB]$; $A(2 ; 0)$, $B(10 ; 0)$; donc

$$x_I = \frac{2+10}{2} \text{ et } y_I = 0, \text{ d'où } I(6 ; 0).$$

Soit J le milieu de $[BC]$; $B(10 ; 0)$, $C(0 ; 6)$; donc

$$x_J = \frac{10}{2} \text{ et } y_J = \frac{6}{2}, \text{ d'où } J(5 ; 3).$$

Soit K le milieu de $[AC]$; $A(2 ; 0)$, $C(0 ; 6)$; donc

$$x_K = \frac{2}{2} \text{ et } y_K = \frac{6}{2}, \text{ d'où } K(1 ; 3).$$

RAPPEL

Une médiane dans un triangle est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé. Les coordonnées de I milieu de $[AB]$ sont $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$

$$\text{et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AJ}(3 ; 3)$, $\overrightarrow{BK}(-9 ; 3)$ et $\overrightarrow{CI}(6 ; -6)$ sont respectivement des vecteurs directeurs des droites (AJ), (BK) et (CI).

$\overrightarrow{AJ}(3 ; 3)$ est un vecteur directeur de (AJ) ; donc $a = 3$ et $b = -3$.

Une équation de (AJ) est de la forme $3x - 3y + c = 0$.

$A(2 ; 0)$ appartient à (AJ), donc $3 \times 2 - 3 \times 0 + c = 0$, soit $c = -6$.

Une équation cartésienne de (AJ) est $3x - 3y - 6 = 0$, ou encore $x - y - 2 = 0$.

$\overrightarrow{BK}(-9 ; 3)$ est un vecteur directeur de (BK) ; donc $a = 3$ et $b = 9$.

Une équation de (BK) est de la forme $3x + 9y + c = 0$.

$B(10 ; 0)$ appartient à (BK), donc $3 \times 10 + 9 \times 0 + c = 0$, soit $c = -30$.

Une équation cartésienne de (BK) est $3x + 9y - 30 = 0$, ou encore $x + 3y - 10 = 0$.

$\overrightarrow{CI}(6 ; -6)$ est un vecteur directeur de (CI) ; donc $a = -6$ et $b = -6$.

Une équation de (CI) est de la forme $-6x - 6y + c = 0$.

$C(0 ; 6)$ appartient à (CI), donc $-6 \times 0 - 6 \times 6 + c = 0$, soit $c = 36$.

Une équation cartésienne de (CI) est $-6x - 6y + 36 = 0$, ou encore $-x - y + 6 = 0$.

2. On résout le système de trois équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + 3y - 10 = 0. \\ -x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux premières lignes, on élimine l'inconnue x .

On obtient $-4y + 8 = 0$, d'où $y = 2$.

On remplace y par 2 dans la première (ou la deuxième) ligne et on trouve $x = 4$.

On vérifie que le couple $(4; 2)$ satisfait la troisième équation $-4 - 2 + 6 = 0$.

Le système a donc un seul couple solution $(4; 2)$.

Géométriquement, les trois droites sont concourantes. **On a trouvé les coordonnées du centre de gravité G du triangle** (point de concours des médianes du triangle).

Exercice 16

1. A(0; 0), B(1; 0), D(0; 1).

ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, d'où C(1; 1);

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}, \text{ donc } I\left(\frac{2}{3}; 0\right); \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC}, \text{ donc } J\left(1; \frac{2}{3}\right).$$

2. a. Équation de (AJ) : le coefficient directeur de (AJ) est $\frac{2}{3}$ et la droite passe par le point A choisi comme origine du repère ; donc une équation de (AJ) est $y = \frac{2}{3}x$, ou encore $2x - 3y = 0$.

Équation de (BD) : $y = -x + 1$, ou encore $x + y - 1 = 0$.

b. Les droites (AJ) et (BD) se coupent en K, donc K satisfait les équations des deux droites.

$$\text{On résout le système } \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

On utilise la méthode de substitution :

$$2x - 3(-x + 1) = 0, \text{ d'où } x = 0,6, \text{ puis } y = 0,4.$$

Les coordonnées de K sont (0,6; 0,4).

$$3. a. \text{ Équation de (IK) : } I\left(\frac{2}{3}; 0\right) \text{ et } K\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right), \overrightarrow{IK} = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}; \frac{2}{5}\right); \overrightarrow{IK} = \left(\frac{-1}{15}; \frac{2}{5}\right).$$

Donc $15 \cdot \overrightarrow{IK}(-1; 6)$ est un vecteur directeur de (IK) ; donc $a = 6$ et $b = 1$.

Une équation de (BK) est de la forme $6x + y + c = 0$.

K(0,6; 0,4) appartient à (IK), donc $6 \times 0,6 + 0,4 + c = 0$, soit $c = -4$.

RAPPEL

Une droite du plan de vecteur directeur $\vec{v}(-b; a)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Une équation cartésienne de (IK) est $6x + y - 4 = 0$.

Équation de (CD) : $y = 1$.

b. Les droites (IK) et (CD) se coupent en L. Pour déterminer les coordonnées de L, on résout le système :

$$\begin{cases} 6x + y - 4 = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

On a $6x = 3$, d'où $x = 0,5$. D'où $L(0,5 ; 1)$.

Le point L est donc le milieu de [CD].

Exercice 17

1. $B(3 ; -1)$, $C(3 ; 2)$, donc $\overrightarrow{BC}(0 ; 3)$;

$A(-2 ; -1)$, $D(-2 ; 3)$, donc $\overrightarrow{AD}(0 ; 4)$.

On observe que $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

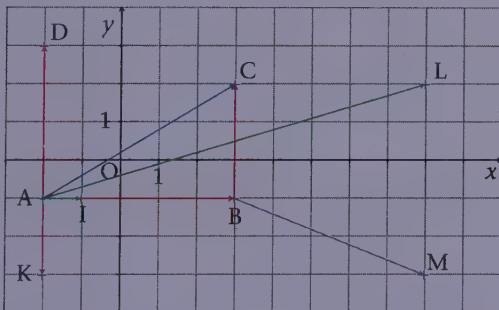
On exprime $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$: on décompose le vecteur $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

On en déduit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AD}$.

2. a. Les points I, K, L et M tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AL} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$$

ont pour coordonnées $I(-1 ; -1)$, $K(-2 ; -3)$, $L(8 ; 2)$, $M(8 ; -3)$.



b. Par construction, $\overrightarrow{AL} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, puis, en utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Cette dernière égalité vectorielle signifie que ABLC est un parallélogramme.

Exercice 18

1. En utilisant la relation de Chasles, $-3 \cdot \overrightarrow{EA} + 5 \cdot \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ équivaut à $-3 \cdot \overrightarrow{EA} + 5 \cdot (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$$-3 \cdot \overrightarrow{EA} + 5 \cdot \overrightarrow{EA} + 5 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{EA} + 5 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{EA} = -5 \cdot \overrightarrow{AB}$$

On en déduit $\overrightarrow{AE} = 2,5 \cdot \overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires et les points A, B et E sont alignés.

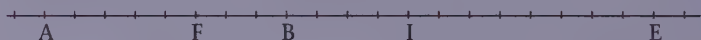
$$3 \cdot \overrightarrow{FA} + 5 \cdot \overrightarrow{FB} = \vec{0} \text{ équivaut à } 3 \cdot \overrightarrow{FA} + 5 \cdot (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$3 \cdot \overrightarrow{FA} + 5 \cdot \overrightarrow{FA} + 5 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$8 \cdot \overrightarrow{FA} + 5 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$8 \cdot \overrightarrow{FA} = -5 \cdot \overrightarrow{AB}$$

On en déduit $\overrightarrow{AF} = -\frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{AB}$. Le point F est donc sur la droite (AB).



2. Pour déterminer le nombre a tel que $\overrightarrow{EF} = a \cdot \overrightarrow{AB}$, on applique la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{5}{2} + \frac{5}{8} \right) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{EF} = -\frac{15}{8} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Donc } a = -\frac{15}{8}.$$

3. Dire que I est le milieu de [EF] équivaut à $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$.

On applique la relation de Chasles : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = \vec{0}$.

$$2 \cdot \overrightarrow{IA} + \frac{5}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{IA} + \frac{25}{8} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{AI} = -\frac{25}{16} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Donc } b = -\frac{25}{16}.$$

Exercice 19

1. $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$, donc M appartient au segment [AC].

$\overrightarrow{BN} = \frac{8}{7} \cdot \overrightarrow{BC}$, donc N appartient à la demi-droite [BC).

2. $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$, donc L appartient au segment [AB].

2. $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AL} = -\frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{8}{7} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{8}{7} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(1 - \frac{8}{7}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{4}{5} + \frac{8}{7}\right) \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{7} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{12}{35} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Dans le plan muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, les vecteurs $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont respectivement pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{5}\right)$ et $\left(-\frac{1}{7}; \frac{12}{35}\right)$.

On applique la condition de colinéarité de deux vecteurs :

$$\frac{1}{3} \times \frac{12}{35} - \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{4}{35} - \frac{4}{35} = 0.$$

Donc $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

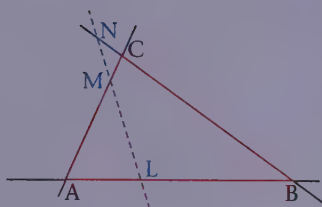
On en déduit que **les points L, M et N sont alignés**.

3. $\overrightarrow{LM} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{-1}{7} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{12}{35} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{LN} = -\frac{10}{21} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{40}{35} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

En mettant $\frac{10}{7}$ en facteur, on obtient $\overrightarrow{LN} = \frac{10}{7} \cdot \overrightarrow{LM}$. Donc $x = \frac{10}{7}$.



CONSEIL

En utilisant le calcul vectoriel, on doit prouver, par exemple, que les vecteurs $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

Exercice 20

1. $2 \cdot \overrightarrow{AG} + 3 \cdot \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ équivaut à :

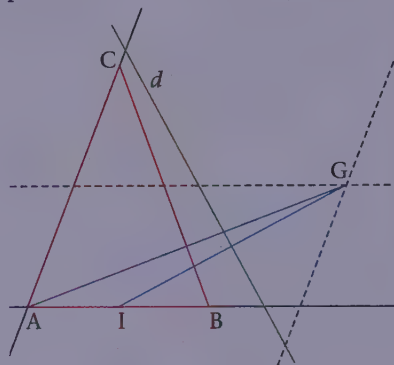
$2 \cdot \overrightarrow{AG} + 3 \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}) = \vec{0}$, en appliquant la relation de Chasles

$2 \cdot \overrightarrow{AG} + 3 \cdot \overrightarrow{GA} + 3 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

$2 \cdot \overrightarrow{AG} - 3 \cdot \overrightarrow{AG} + 3 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA})$ ou encore $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$.

G est le point de coordonnées (1,5 ; 0,5) dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan.



CONSEIL

Pour construire le point G défini par $-2 \cdot \overrightarrow{GA} + 3 \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ sur un logiciel de géométrie, vous pouvez demander la construction du **barycentre** des points pondérés $(A, -2)$, $(B, 3)$ et $(C, 1)$.

2. On introduit le point G de la question précédente, en appliquant la relation de Chasles :

$$-2 \cdot \overrightarrow{MA} + 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -2 \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 3 \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$$

$$-2 \cdot \overrightarrow{MA} + 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -2 \cdot \overrightarrow{MG} - 2 \cdot \overrightarrow{GA} + 3 \cdot \overrightarrow{MG} + 3 \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$$

$$-2 \cdot \overrightarrow{MA} + 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (-2 + 3 + 1) \cdot \overrightarrow{MG} - 2 \cdot \overrightarrow{GA} + 3 \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

$$\text{Or } -2 \cdot \overrightarrow{GA} + 3 \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Donc, pour tout point M du plan, $-2 \cdot \overrightarrow{MA} + 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{MG}$.

3. D'après la question 2., on sait que

$$-2 \cdot \overrightarrow{MA} + 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{MG};$$

si on appelle I le milieu du segment

[AB], alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI}$.

L'égalité (E) s'écrit alors $\|2 \cdot \overrightarrow{MG}\| = \|2 \cdot \overrightarrow{MI}\|$, $2 \times \|\overrightarrow{MG}\| = 2 \times \|\overrightarrow{MI}\|$,

ou encore $MG = MI$.

L'ensemble des points M du plan tels que $MG = MI$ est la médiatrice d du segment [GI].

Donc l'ensemble cherché est la médiatrice d du segment [GI].

RAPPEL

$\|\vec{u}\|$ est la norme du vecteur $\vec{u}$;

si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Exercice 21

1. Soit G le milieu de $[MN]$.

I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2 \cdot \overrightarrow{GI}$.

J est le milieu de $[CD]$, donc $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2 \cdot \overrightarrow{GJ}$.

$$2(\overrightarrow{GI} + x \cdot \overrightarrow{GJ}) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + x \cdot (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$$

$$2(\overrightarrow{GI} + x \cdot \overrightarrow{GJ}) = \overrightarrow{GA} + x \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} + x \cdot \overrightarrow{GD}$$

On applique la relation de Chasles en introduisant les points M et N :

$$2(\overrightarrow{GI} + x \cdot \overrightarrow{GJ}) = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + x \cdot (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NB} + x \cdot (\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{ND})$$

$$2(\overrightarrow{GI} + x \cdot \overrightarrow{GJ}) = (1+x) \cdot \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + x \cdot \overrightarrow{MC} + (1+x) \cdot \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NB} + x \cdot \overrightarrow{ND}$$

$$2(\overrightarrow{GI} + x \cdot \overrightarrow{GJ}) = (1+x) \cdot (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) + \overrightarrow{MA} + x \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + x \cdot \overrightarrow{ND}$$

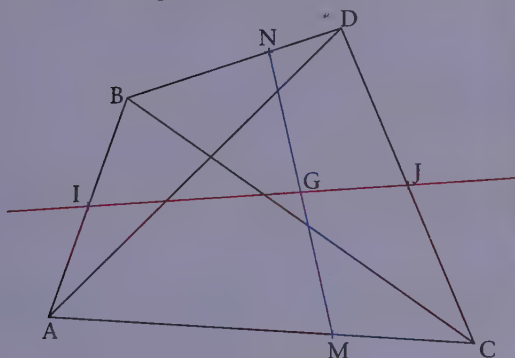
Or M et N sont tels que $\overrightarrow{MA} + x \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{NB} + x \cdot \overrightarrow{ND} = \vec{0}$,

et G étant le milieu de $[MN]$, on a $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

On en déduit $2 \cdot (\overrightarrow{GI} + x \cdot \overrightarrow{GJ}) = \vec{0}$,

ou encore $\overrightarrow{GI} + x \cdot \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$.

Figure dans le cas $x = 2$



L'INFO EN +

Un logiciel de géométrie dynamique montre que lorsque x décrit l'ensemble des nombres réels, sauf -1 , le point G se déplace sur la droite (IJ) privée du point J .

2. a. On démontre que, si $x \neq -1$, $\overrightarrow{IG} = \frac{x}{1+x} \cdot \overrightarrow{IJ}$.

$$\overrightarrow{GI} + x \cdot \overrightarrow{GJ} = \vec{0} ;$$

$$\text{donc } \overrightarrow{GI} + x \cdot (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IJ}) = \vec{0} ;$$

$$(1+x) \cdot \overrightarrow{GI} + x \cdot \overrightarrow{IJ} = \vec{0} ;$$

$$(1+x) \cdot \overrightarrow{IG} = x \cdot \overrightarrow{IJ} ;$$

$$\text{donc, si } x \neq -1, \overrightarrow{IG} = \frac{x}{1+x} \cdot \overrightarrow{IJ}.$$

b. On étudie les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

f est une fonction homographique, dérivable sur son ensemble de définition.

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = 1 + x$;

d'où $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{1 \times (1+x) - x \times 1}{(1+x)^2},$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

$f'(x)$ étant toujours positive, la fonction f est croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $] -1 ; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$-1,5$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

1 Cercle trigonométrique. Angle orienté

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Cercle trigonométrique

■ Le cercle trigonométrique C de centre O est le cercle de rayon 1, orienté positivement (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).

b. Angle orienté

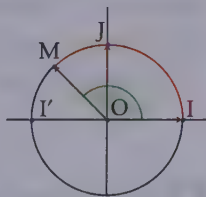
■ On appelle I, J et I' les points définis par :

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI}; \vec{j} = \overrightarrow{OJ}; -\vec{i} = \overrightarrow{OI'}.$$

■ Soit M un point du cercle trigonométrique.

Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ dans cet ordre définissent un **angle orienté** de vecteurs noté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

■ L'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI})$ est l'opposé de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

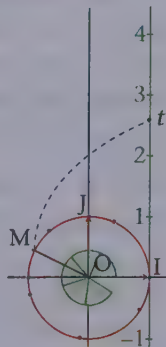


2 Radian. Mesures d'un angle orienté

a. Repérage d'un point

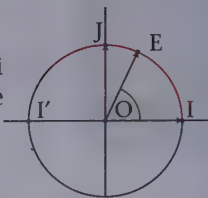
■ Pour repérer un point M sur le cercle trigonométrique, on imagine l'enroulement d'une droite graduée (avec la même unité que celle des axes du repère) autour du cercle à partir du point I .

■ Soit un réel t , abscisse d'un point de la droite s'appliquant sur M . Ce réel t repère M sur le cercle trigonométrique C .



b. Le radian

■ On appelle **radian** la mesure d'angle telle que, si le point E du cercle trigonométrique est repéré par le nombre 1, l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE})$ mesure 1 radian.



c. Mesures d'un angle orienté

■ Les angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI'})$ mesurent respectivement $\frac{\pi}{2}$ et π radians (on retrouve les « longueurs » d'un quart de cercle et d'un demi-cercle de rayon 1).

■ Si un point M du cercle trigonométrique C est repéré par un réel t , le nombre t est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

■ La **mesure principale** de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est l'unique mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ qui appartient à l'intervalle $] -\pi ; \pi]$.

■ Si t est une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$, alors toutes les mesures de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ s'écrivent sous la forme $t + k \times 2\pi$, où k est un nombre entier relatif.

3 Mesures d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls

a. Angle orienté de deux vecteurs non nuls

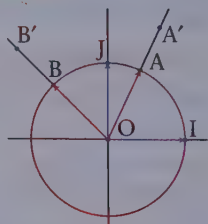
■ Soit A et B deux points du cercle trigonométrique C. Si a est une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ et b une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, alors les mesures en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ sont les nombres réels $b - a + k \times 2\pi$, où k est un nombre entier relatif.

On note $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = b - a + k \times 2\pi$.

On écrit souvent, pour simplifier, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = b - a$.

■ Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On pose $(\overrightarrow{OA'} = \vec{u}, \overrightarrow{OB'} = \vec{v})$.

Si A et B sont les points d'intersection respectifs des demi-droites $[OA')$ et $[OB')$ avec le cercle trigonométrique, alors les mesures en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ sont celles de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



b. Propriétés

■ Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si, et seulement si, $(\vec{u}, \vec{v}) = k \times 2\pi$, où k est un nombre entier relatif.

■ Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si, et seulement si, $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi + k \times 2\pi$, où k est un nombre entier relatif.

■ **Relation de Chasles** : si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls, alors :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}).$$

■ **Conséquences** :

$$(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

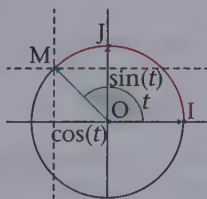
$$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$$

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$$

4 Trigonométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et C est le cercle trigonométrique.



a. Cosinus et sinus

■ Soit t un nombre réel et M le point repéré par le nombre t sur le cercle C .

Le **cosinus** de t , noté $\cos(t)$, et le **sinus** de t , noté $\sin(t)$, sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto \cos(t) \text{ et } t \mapsto \sin(t)$$

s'appellent les fonctions cosinus et sinus.

On les obtient sur la calculatrice réglée en mode « radian » par les touches cos et sin.

■ Pour tout réel t :

$$(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1 ;$$

$$-1 \leq \cos(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(t) \leq 1.$$

■ Pour tout réel t et pour tout entier relatif k :

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos(t) \quad \text{et} \quad \sin(t + 2k\pi) = \sin(t).$$

b. Cosinus et sinus d'angles associés

■ Soit t un nombre réel et M le point du cercle C repéré par t (t est une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$).

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, M a pour coordonnées $(\cos(t); \sin(t))$.

■ Si M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, alors :

- une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1})$ est $-t$;
- $\cos(-t) = \cos(t)$ et $\sin(-t) = -\sin(t)$.

■ Si M_2 est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées, alors :

- une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_2})$ est $\pi - t$;
- $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$.

■ Si M_3 est le symétrique de M par rapport à O , alors :

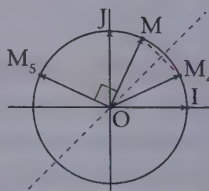
- une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_3})$ est $\pi + t$;
- $\cos(\pi + t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi + t) = -\sin(t)$.

■ Si M_4 est le symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = x$, alors :

- une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_4})$ est $\frac{\pi}{2} - t$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$.

■ Si M_5 est le point image de M en tournant d'un quart de tour dans le sens direct autour de O , alors :

- une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_5})$ est $\frac{\pi}{2} + t$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin(t)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos(t)$.



c. Équations $\cos(x) = \cos(a)$ et $\sin(x) = \sin(a)$

■ Soit a un nombre réel quelconque.

$\cos(x) = \cos(a)$ équivaut à $x = a + k \times 2\pi$ ou $x = -a + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin(x) = \sin(a)$ équivaut à $x = a + k \times 2\pi$ ou $x = \pi - a + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1 Déterminer la mesure principale d'un angle orienté

Énoncé

M est le point du cercle trigonométrique tel qu'une mesure x en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est $x = \frac{47\pi}{10}$.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Solution commentée

Savoir-faire

- La mesure principale d'un angle est l'unique mesure de cet angle qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.
- On cherche un nombre t appartenant à $]-\pi; \pi]$ tel que $x = t + k \times 2\pi$; pour $x = \frac{47\pi}{10}$, on effectue la division euclidienne de 47 par 20 ; il suffit ensuite de diviser les deux membres par 10 et de les multiplier par π .

$$47 = 20 \times 2 + 7, \text{ donc } \frac{47\pi}{10} = \frac{(20 \times 2 + 7)\pi}{10} = \frac{20 \times 2\pi}{10} + \frac{7\pi}{10},$$

$$\text{d'où } x = \frac{47\pi}{10} = \frac{7\pi}{10} + 2 \times 2\pi.$$

Comme $\frac{7\pi}{10}$ appartient à $]-\pi; \pi]$, la mesure principale de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est $\frac{7\pi}{10}$.

2 Déterminer les cosinus et sinus d'angles associés

Énoncé

Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Solution commentée

Savoir-faire

- On commence par transformer l'écriture de l'angle pour faire apparaître un angle remarquable dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- On utilise ensuite la formule adaptée.

$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

On applique $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

donc $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 Résolution dans $\mathbb{R}$ d'une équation avec cos

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution commentée

Savoir-faire

■ Pour résoudre une équation du type $\cos(x) = m$, avec $m \in [-1; 1]$, on repère un point d'abscisse m sur le cercle trigonométrique.

■ On applique ensuite la propriété :

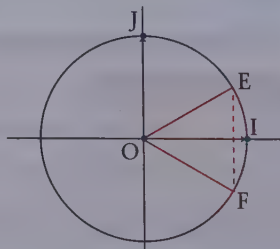
$\cos(x) = \cos(a)$ équivaut à $x = a + k \times 2\pi$ ou $x = -a + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'équation s'écrit $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les nombres $\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ces nombres sont repérés par les points E et F sur le cercle trigonométrique.



Résolution dans $\mathbb{R}$ d'une équation avec sin

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Solution commentée

Savoir-faire

■ Pour résoudre une équation du type $\sin(x) = m$, avec $m \in [-1; 1]$, on repère un point d'ordonnée m sur le cercle trigonométrique.

■ On applique ensuite la propriété :

$\sin(x) = \sin(a)$ équivaut à $x = a + k \times 2\pi$ ou $x = \pi - a + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

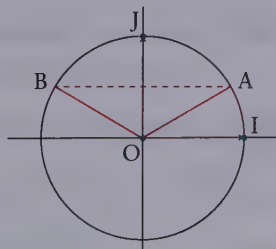
On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

L'équation s'écrit $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les nombres $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

ou encore $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ces nombres sont repérés par les points A et B sur le cercle trigonométrique.



10 qcm pour réviser le cours

Corrigés p. 227

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

1 On considère les points A, B et C du cercle trigonométrique tels que

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}; (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4};$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = \frac{-\pi}{6}.$$

☐ a. La droite (OA) est la médiatrice du segment [BC].

$$\text{b. } (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{11\pi}{12}.$$

$$\text{c. } (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{-11\pi}{12}.$$

2 Un angle mesure $\frac{100\pi}{3}$. La mesure principale de cet angle est :

$$\text{a. } \frac{\pi}{3}. \quad \text{b. } \frac{2\pi}{3}. \quad \text{c. } \frac{-2\pi}{3}.$$

3 La valeur exacte de $\cos(3\pi)$ est :

$$\text{a. } -1. \quad \text{b. } -3. \quad \text{c. } 3.$$

4 La valeur exacte de $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ est :

$$\text{a. } \frac{-3\sqrt{2}}{2}. \quad \text{b. } \frac{-\sqrt{2}}{2}. \quad \text{c. } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5 On considère le point B du cercle trigonométrique tel que

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}. \text{ Les coordonnées}$$

$(x; y)$ de B sont telles que :

$$\text{a. } x = y. \quad \text{b. } x^2 + y^2 = 1.$$

$$\text{c. } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6 Si t est un nombre réel,

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ est égal à :}$$

$$\text{a. } \cos(t). \quad \text{b. } \cos(t) - 1.$$

$$\text{c. } -\cos(t).$$

7 Si un nombre réel t vérifie

$$\cos(t) = 0,1 \text{ et } t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], \text{ alors :}$$

$$\text{a. } \sin(t) = 0,9. \quad \text{b. } \sin(t) = -\sqrt{0,99}.$$

$$\text{c. } \sin(t) = \sqrt{0,99}.$$

$$8 \text{ Soit } A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos(\pi - t) + \cos(-t) + \cos(\pi + t).$$

$$\text{a. } A = \sin(t) - \cos(t).$$

$$\text{b. } A = \sin(t) + \cos(t).$$

$$\text{c. } A = \sin(t) - 3\cos(t).$$

9 Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ sont les nombres réels :}$$

$$\text{a. } \frac{-\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{b. } \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \text{ et } \frac{-5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{c. } \frac{5\pi}{6} \text{ et } \frac{-5\pi}{6}.$$

10 Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$\sqrt{2} \sin(t) - 1 = 0 \text{ sont :}$$

$$\text{a. } \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \text{ et } \frac{-\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{b. } \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{c. } \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \text{ et } \frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Plus de QCM sur

www.defibac.fr

Exercices

Dans tous les exercices, le plan orienté est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Cercle trigonométrique

Exercice 1

niveau 1

Corrigés p. 228

Placer les points E, F, G et H du cercle trigonométrique repérés respectivement par les nombres réels $\frac{\pi}{6}$, $\frac{-5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{8}$.

Exercice 2

niveau 1

Corrigés p. 228

Soit M un point du cercle trigonométrique. On note t la mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ appartenant à $[0; 2\pi[$ et α la mesure en degrés de l'angle au centre $\widehat{IOM}$.

Les nombres t et α sont liés par la formule $\frac{t}{2\pi} = \frac{\alpha}{360}$.

- Donner la mesure en degrés des angles dont une mesure en radians est $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$.
- Donner une mesure en radians des angles dont une mesure en degrés est 135° , 210° , 300° .
- Calculer la mesure, en degrés, de l'angle au centre $\widehat{IOM}$ correspondant à la position du point M sur le cercle trigonométrique lorsque la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est 1 radian.

Exercice 3

niveau 1

Corrigés p. 229

Déterminer, dans chaque cas, la mesure principale en radians de l'angle dont une mesure en radians est :

- $\frac{-7\pi}{2}$
- $\frac{19\pi}{6}$
- $\frac{37\pi}{5}$
- $\frac{-27\pi}{4}$

Exercice 4

niveau 1

Corrigés p. 229

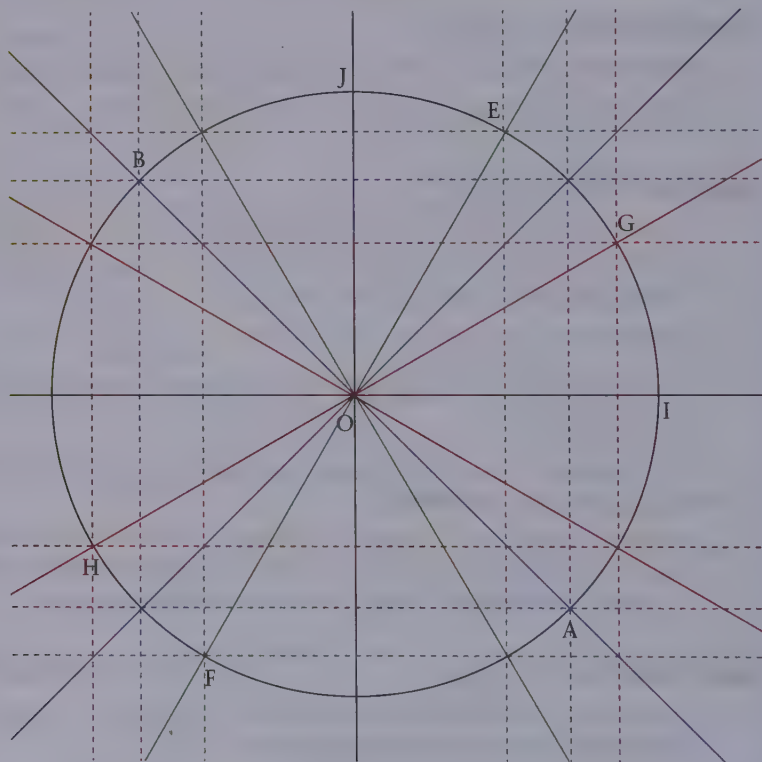
Sur la figure suivante, on a tracé le cercle trigonométrique, ainsi que les droites d'équations :

$$y = x; y = -x; y = x\sqrt{3}; y = -x\sqrt{3}; y = \frac{x}{\sqrt{3}}; y = -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

On a nommé A, B, E, F, G et H les points d'intersection entre le cercle et certaine de ces droites. On a aussi tracé les parallèles aux axes de coordonnées passant par ces points.

1. Quelles sont les coordonnées des points A, B, E, F, G et H ?
2. Donner la mesure principale en radians de chacun des angles orientés :

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OG})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OH})$.



Exercice 5

niveau 1

Corrigés p. 230

Dans le plan orienté, on a construit :

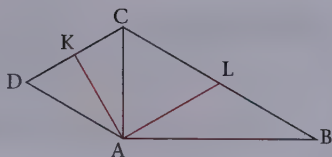
- un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$;
- un triangle ACD équilatéral tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$.

Le point L est le milieu de [BC] et le point K est le milieu de [DC].

1. Donner la mesure principale en radians de chacun des angles orientés $(\overline{AB}, \overline{AC})$, $(\overline{AB}, \overline{AD})$, $(\overline{CD}, \overline{CB})$.

2. Démontrer que le triangle ALK est rectangle en A.

3. Le triangle ALK est-il isocèle ? Justifier.



Trigonométrie

Exercice 6

niveau 1

Corrigés p. 231

Soit t un nombre réel vérifiant $\sin(t) = 0,25$ et $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

1. À l'aide du cercle trigonométrique, donner le signe de $\cos(t)$. Calculer la valeur exacte de $\cos(t)$.

2. Mettre la calculatrice en mode radian et donner une valeur approchée du nombre t .

Exercice 7

niveau 1

Corrigés p. 232

Soit t un nombre réel vérifiant $\cos(t) = \frac{1}{3}$ et $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

1. À l'aide du cercle trigonométrique, donner le signe de $\sin(t)$. Calculer la valeur exacte de $\sin(t)$.

2. Mettre la calculatrice en mode radian et donner une valeur approchée du nombre t .

Exercice 8

niveau 1

Corrigés p. 232

1. Rappeler la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Calculer $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Exercice 9

niveau 1

Corrigés p. 232

Soit le nombre réel t tel que $\cos(t) = 0,4$ et $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Calculer $\sin(t)$, $\cos(\pi - t)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

Exercice 10 niveau 1

Corrigés p. 233

Soit le nombre réel t tel que $\sin(t) = -\frac{2}{3}$ et $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$.

Calculer $\cos(t)$, $\cos(\pi + t)$ et $\sin(\pi + t)$.

Exercice 11 niveau 1

Corrigés p. 233

Calculer les expressions suivantes en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

$$A = \cos(t + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + \cos(7\pi - t).$$

$$B = \sin(\pi - t) + \sin(t - 4\pi) + \sin(t + 3\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right).$$

Exercice 12 niveau 2

Corrigés p. 233

On donne $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Déterminer $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.

Équations

Exercice 13 niveau 1

Corrigés p. 234

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ 2. $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 14 niveau 1

Corrigés p. 234

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes.

1. $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ 2. $\sin(x) + 0,5 = 0$.

Exercice 15 niveau 1

Corrigés p. 235

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes.

1. $\cos(x) - \sin(x) = 0$ 2. $\cos(x) + \sin(x) = 0$.

Exercice 16

niveau 2

Corrigés p. 236

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes.

$$1. \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad 2. \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

Exercice 17

niveau 2

Corrigés p. 237

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les équations suivantes.

$$1. 4(\cos(x))^2 - 3 = 0. \quad 2. (\sin(x))^2 + \sin(x) = 0. \\ 3. 2(\cos(x))^2 + \cos(x) - 1 = 0. \quad 4. 4(\sin(x))^2 - 2(1 + \sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} = 0.$$

Exercice 18

niveau 3

Corrigés p. 238

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ les équations suivantes.

$$1. \cos(2x) = \cos(x). \quad 2. \sin(3x) = 1.$$

Exercice 19

niveau 3

Corrigés p. 239

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$1. \cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \quad 2. \sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Problèmes**Exercice 20**

niveau 2

Corrigés p. 240

On trace le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.

Pour construire la figure, on utilise un logiciel de géométrie.

On construit le point A image du point

I par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

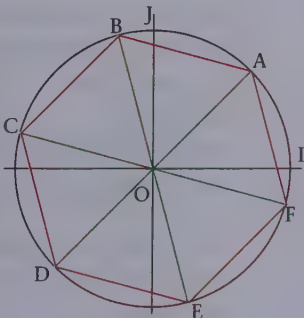
(cela signifie que A est sur le cercle trigonométrique et qu'une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ est $\frac{\pi}{4}$).

On construit successivement les points

B, C, D, E et F images de A, B, C, D et E

par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Le polygone ABCDEF obtenu est un hexagone régulier.



1. Déterminer une mesure de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF})$.

2. On donne $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Calculer les coordonnées des points B, C, E et F.

3. Quelle est le périmètre de ABCDEF ? Calculer l'apothème de cet hexagone régulier. (L'apothème d'un polygone régulier est la longueur d'un segment joignant le centre du polygone au milieu d'un côté.)

Exercice 21

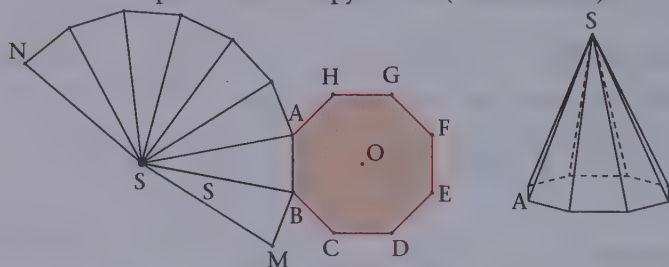
niveau 3

Corrigés p. 242

On considère une pyramide régulière à base octogonale,

On suppose que le rayon du cercle dans laquelle la base est inscrite est de 5 mètres et que la hauteur de la pyramide est de 10 mètres.

On donne le patron de cette pyramide (en réduction).



1. On considère l'octogone régulier ABCDEFGH inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 5.

a. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

b. Soit I le milieu du segment [AB].

Calculer une valeur approchée de OI et de AI.

c. Calculer le périmètre de l'octogone ABCDEFGH.

d. Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire l'aire de l'octogone ABCDEFGH.

2. Calculer le volume de la pyramide.

3. On souhaite calculer l'aire latérale de la pyramide (c'est la surface couverte).

a. Le point S désignant le sommet de la pyramide et I le milieu de [AB], calculer une valeur approchée de l'angle géométrique $\widehat{ASI}$. En déduire une valeur approchée de l'angle géométrique $\widehat{MSN}$.

b. Calculer l'aire latérale de la pyramide.

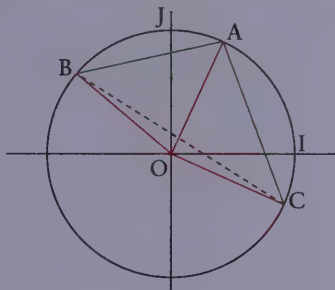
QCM

1 c. On élimine la réponse **a.** car l'angle $\widehat{COA}$ est un angle droit, mais les points C, O et B ne sont pas alignés.

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}),$$

d'après la relation de Chasles ;

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{-3\pi}{4} + \frac{-\pi}{6} = \frac{-11\pi}{12}.$$



2 c. $\frac{100\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3} + 17 \times 2\pi.$

3 a. $\cos(3\pi) = \cos(\pi + 2\pi) = \cos(\pi).$

4 b. $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$

5 b. Le point B est sur le cercle trigonométrique de rayon 1 ; donc ses coordonnées x et y vérifient $x^2 + y^2 = 1$.

ATTENTION

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{et } \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6 c. $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$

7 c. Si $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$, alors $\sin(t) > 0$.

On utilise $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$, donc $(\sin(t))^2 = 1 - (\cos(t))^2$.

$(\sin(t)) = 0,99$, donc $\sin(t) = \sqrt{0,99}$.

8 a. Soit $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos(\pi - t) + \cos(-t) + \cos(\pi + t)$.

$$A = \sin(t) - \cos(t) + \cos(t) - \cos(t); A = \sin(t) - \cos(t).$$

9 b. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}.$

10 c. L'équation s'écrit $\sin(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 1

Pour placer le point E : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; E est dans le premier

quadrant du cercle trigonométrique et le triangle OEJ est équilatéral de sens direct.

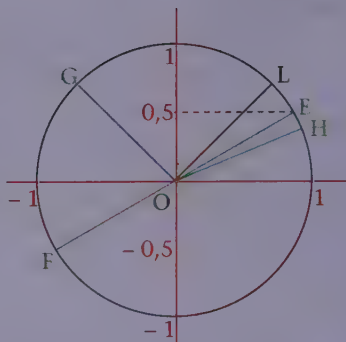
Pour placer le point F : $\frac{-5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \pi$,

F est le symétrique de E par rapport à O.

Pour placer le point G : $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$. On

place le point L image de $\frac{\pi}{4}$; G est le symétrique de L par rapport à l'axe des ordonnées. On peut aussi écrire $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$; l'angle $\widehat{LOG}$ est droit.

Pour placer le point H : $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}$; le point H est dans le premier quadrant et sur la bissectrice de l'angle $\widehat{IOL}$.



Exercice 2

$$1. \frac{t}{2\pi} = \frac{\alpha}{360} \text{ équivaut à } \alpha = \frac{t}{2\pi} \times 360.$$

$$\text{Si } t = \frac{\pi}{6} \text{ radian, } \alpha = \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} \times 360 = \frac{1}{12} \times 360, \text{ donc } \alpha = 30^\circ.$$

$$\text{Si } t = \frac{5\pi}{6} \text{ radians, } \alpha = \frac{\frac{5\pi}{6}}{2\pi} \times 360 = \frac{5}{12} \times 360, \text{ donc } \alpha = 150^\circ.$$

$$\text{Si } t = \frac{11\pi}{6} \text{ radians, } \alpha = \frac{\frac{11\pi}{6}}{2\pi} \times 360 = \frac{11}{12} \times 360, \text{ donc } \alpha = 330^\circ.$$

$$2. \frac{t}{2\pi} = \frac{\alpha}{360} \text{ équivaut à } t = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi.$$

$$\text{Si } \alpha = 135^\circ, t = \frac{135}{360} \times 2\pi = \frac{3}{8} \times 2\pi, \text{ donc } t = \frac{3\pi}{4} \text{ radians.}$$

$$\text{Si } \alpha = 210^\circ, t = \frac{210}{360} \times 2\pi = \frac{7}{12} \times 2\pi, \text{ donc } t = \frac{7\pi}{6} \text{ radians.}$$

$$\text{Si } \alpha = 300^\circ, t = \frac{300}{360} \times 2\pi = \frac{5}{6} \times 2\pi, \text{ donc } t = \frac{5\pi}{3} \text{ radians.}$$

$$3. \text{ Si } (\widehat{OI}; \widehat{OM}) = 1 \text{ radian, } \widehat{IOM} = \frac{1}{2\pi} \times 360, \text{ donc } \widehat{IOM} \approx 57,3^\circ.$$

Exercice 3

$$1. \frac{-7\pi}{2} = \frac{(1-8)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2 \times 2\pi.$$

Comme $\frac{\pi}{2}$ appartient à $]-\pi; \pi]$, la mesure principale de $\frac{-7\pi}{2}$ est $\frac{\pi}{2}$.

$$2. \frac{19\pi}{6} = \frac{(24-5)\pi}{6} = \frac{-5\pi}{6} + 2 \times 2\pi; \frac{-5\pi}{6} \in]-\pi; \pi],$$

donc la mesure principale de $\frac{19\pi}{6}$ est $\frac{-5\pi}{6}$.

$$3. \frac{37\pi}{5} = \frac{(40-3)\pi}{5} = \frac{-3\pi}{5} + 4 \times 2\pi; \frac{-3\pi}{5} \in]-\pi; \pi],$$

donc la mesure principale de $\frac{37\pi}{5}$ est $\frac{-3\pi}{5}$.

$$4. \frac{-27\pi}{4} = \frac{(-24-3)\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4} - 3 \times 2\pi; \frac{-3\pi}{4} \in]-\pi; \pi],$$

donc la mesure principale de $\frac{-27\pi}{4}$ est $\frac{-3\pi}{4}$.

RAPPEL

La mesure principale d'un angle est l'unique mesure de cet angle qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Exercice 4

1. A et B appartiennent au cercle trigonométrique et à la droite d'équation $y = -x$. Les coordonnées de A et B satisfont donc le système de deux

$$\text{équations : } \begin{cases} y = -x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

On a donc $2x^2 = 1$, d'où $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit A $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et B $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

E et F appartiennent au cercle trigonométrique et à la droite d'équation $y = x\sqrt{3}$.

Les coordonnées de E et F satisfont donc le système de deux équations :

$$\begin{cases} y = x\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

On a donc $4x^2 = 1$, d'où $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

On en déduit E $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et F $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

G et H appartiennent au cercle trigonométrique et à la droite d'équation $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Les coordonnées de G et H satisfont donc le système de deux

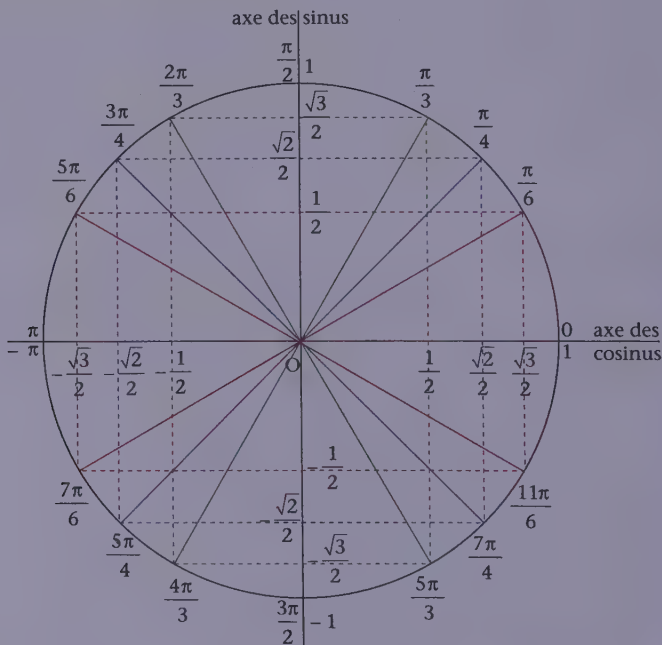
$$\text{équations : } \begin{cases} y = \frac{x}{\sqrt{3}} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

On a donc $\frac{4x^2}{3} = 1$, d'où $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit $G\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $H\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

$$2. (\overline{OI}, \overline{OA}) = -\frac{\pi}{4}; (\overline{OI}, \overline{OB}) = \frac{3\pi}{4}; (\overline{OI}, \overline{OE}) = \frac{\pi}{3}; (\overline{OI}, \overline{OF}) = -\frac{2\pi}{3};$$

$$(\overline{OI}, \overline{OG}) = \frac{\pi}{6}; (\overline{OI}, \overline{OH}) = -\frac{5\pi}{6}.$$



Exercice 5

1. On applique la relation de Chasles.

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = (\overline{AB}, \overline{BA}) + (\overline{BA}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{AC});$$

$(\overline{AB}, \overline{BA}) = \pi$, car ces deux vecteurs sont opposés ;

RAPPEL

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls, alors $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$.

$$(\overline{BA}, \overline{BC}) = -(\overline{BC}, \overline{BA}), \text{ car } (\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}); \text{ d'où } (\overline{BA}, \overline{BC}) = -\frac{\pi}{6};$$

$$(\overline{BC}, \overline{AC}) = (\overline{CB}, \overline{CA}), \text{ car } (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}); \text{ d'où } (\overline{BC}, \overline{AC}) = -\frac{\pi}{3};$$

$$\text{donc } (\overline{AB}, \overline{AC}) = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \pi \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right); (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc le triangle ABC est rectangle en A.

$$(\overline{AB}, \overline{AD}) = (\overline{AB}, \overline{AC}) + (\overline{AC}, \overline{AD}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}; (\overline{AB}, \overline{AD}) = \frac{5\pi}{6}.$$

$$(\overline{CD}, \overline{CB}) = (\overline{CD}, \overline{CA}) + (\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}; (\overline{CD}, \overline{CB}) = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Le point L est le milieu du segment [BC] dans le triangle rectangle ABC, donc (AL) est la médiane issue de A et $AL = \frac{BC}{2}$.

On en déduit que le triangle ALC est isocèle de sommet L.

Comme $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$, le triangle ALC est équilatéral. On a alors $\widehat{CAL} = \frac{\pi}{3}$.

Le point K est le milieu du segment [DC] dans le triangle équilatéral ACD, donc la médiane (AK) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{CAD}$.

$$\text{Donc } \widehat{CAK} = \frac{\pi}{6}.$$

Dans le plan orienté, on peut alors écrire :

$$(\overline{AL}, \overline{AK}) = (\overline{AL}, \overline{AC}) + (\overline{AC}, \overline{AK}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \text{ donc } (\overline{AL}, \overline{AK}) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc le triangle ALK est rectangle en A.

3. Le triangle ALK n'est pas isocèle.

En effet, (AK) est aussi une hauteur du triangle équilatéral ACD et, en utilisant le théorème de Pythagore, on montre que $AK = AC \times \frac{\sqrt{3}}{2}$; comme $AL = AC$, on a $AK \neq AL$.

Exercice 6

1. Si $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, alors $\cos(t) < 0$.

Pour tout réel t , $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$, donc $(\cos(t))^2 = 1 - (\sin(t))^2$.

$(\cos(t))^2 = 1 - (0,25)^2$; $(\cos(t))^2 = 0,9375$; ce qui équivaut à :

$$\cos(t) = \sqrt{0,9375} \text{ ou } \cos(t) = -\sqrt{0,9375}.$$

Comme $\cos(t) < 0$, on obtient $\cos(t) = -\sqrt{0,9375}$.

2. Une valeur approchée de t est **2,889 radians** (soit environ $165,5^\circ$).

Exercice 7

1. Si $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$, alors $\sin(t) < 0$.

Pour tout réel t , $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$, donc $(\sin(t))^2 = 1 - (\cos(t))^2$.

$(\sin(t))^2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $(\sin(t))^2 = \frac{8}{9}$; ce qui équivaut à :

$$\sin(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ ou } \sin(t) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Comme $\sin(t) < 0$, on obtient $\sin(t) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. Une valeur approchée de t est $-1,23$ radian.

Exercice 8

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

2. On applique les formules adaptées avec les angles associés.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 9

Si $t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$, alors $\sin(t) > 0$. Pour tout réel t , $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$, donc $(\sin(t))^2 = 1 - (\cos(t))^2$; $(\sin(t))^2 = 1 - 0,4^2$; $(\sin(t))^2 = 0,84$; ce qui équivaut à $\sin(t) = \sqrt{0,84}$ ou $\sin(t) = -\sqrt{0,84}$.

Comme $\sin(t) > 0$, on obtient $\sin(t) = \sqrt{0,84}$.

On applique les formules adaptées avec les angles associés :

$$\cos(\pi - t) = -\cos(t) = -0,4; \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin(t) = -\sqrt{0,84};$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t) = 0,4.$$

Exercice 10

Si $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right]$, alors $\cos(t) > 0$.

Pour tout réel t , $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$, donc $(\cos(t))^2 = 1 - (\sin(t))^2$.

$(\cos(t))^2 = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2$; $(\cos(t))^2 = \frac{5}{9}$; ce qui équivaut à :

$$\cos(t) = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ ou } \cos(t) = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Comme $\cos(t) > 0$, on obtient $\cos(t) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\cos(\pi + t) = -\cos(t) = -\frac{\sqrt{5}}{3}; \sin(\pi + t) = -\sin(t) = \frac{2}{3}.$$

Exercice 11

On applique les formules sur les angles associés.

$$A = \cos(t + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + \cos(7\pi - t)$$

$$A = -\cos(t) + \sin(t) - \sin(t) + \cos(3 \times 2\pi + \pi - t)$$

$$A = -\cos(t) + \cos(\pi - t)$$

$$A = -2\cos(t)$$

$$B = \sin(\pi - t) + \sin(t - 4\pi) + \sin(t + 3\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$$

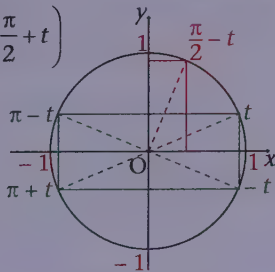
$$B = \sin(t) + \sin(t) + \sin(t + \pi) + \cos(t)$$

$$B = \sin(t) + \sin(t) - \sin(t) + \cos(t)$$

$$B = \sin(t) + \cos(t)$$

CONSEIL

Vous pouvez visualiser les formules en dessinant le cercle trigonométrique.



Exercice 12

On donne $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Pour tout réel t , $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$, donc $(\sin(t))^2 = 1 - (\cos(t))^2$.

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 = 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16};$$

or $\frac{\pi}{5} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$; on en déduit $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$.

On applique les formules adaptées avec les angles associés :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Exercice 13

1. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ équivaut à $x = \frac{\pi}{7} + k \times 2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{7} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres :

$$\frac{\pi}{7} + k \times 2\pi \text{ et } -\frac{\pi}{7} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ces nombres sont repérés par les points E et F sur le cercle trigonométrique.

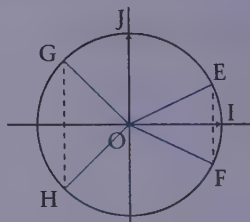
2. On sait que $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'équation s'écrit $\cos(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres :

$$\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi \text{ et } \frac{-3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ces nombres sont repérés par les points G et H sur le cercle trigonométrique.



Exercice 14

1. $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ équivaut à $x = \frac{\pi}{9} + k \times 2\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{9} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation dans $]-\pi; \pi]$ sont $\frac{\pi}{9}$ et $\frac{8\pi}{9}$.

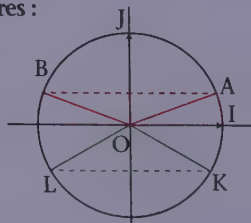
Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres :

$$\frac{\pi}{9} + 2k\pi \text{ et } \frac{8\pi}{9} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ces nombres sont repérés par les points A et B sur le cercle trigonométrique.

2. $\sin(x) + 0,5 = 0$ équivaut à $\sin(x) = -0,5$.

On sait que $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.



L'équation s'écrit $\sin(x) = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$, ce qui équivaut à :

$$x = -\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \text{ ou } x = \pi - \left(\frac{-\pi}{6}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de l'équation dans $]-\pi; \pi]$ sont donc $\frac{-\pi}{6}$ et $\frac{-5\pi}{6}$ (on donne à k successivement les valeurs 0 et -1).

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les nombres $\frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ et $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ces nombres sont repérés par les points K et L sur le cercle trigonométrique.

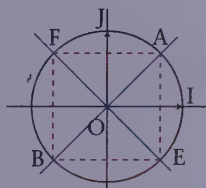
Exercice 15

1. $\cos(x) - \sin(x) = 0$ équivaut à $\cos(x) = \sin(x)$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\pi}{4}$ est donc une solution de cette équation.

On remarque un deuxième point sur le cercle trigonométrique qui a même abscisse et même ordonnée ;

il est repéré par $\frac{5\pi}{4}$ ou par $\frac{-3\pi}{4}$.



Les solutions de l'équation dans $]-\pi; \pi]$ sont donc $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{-3\pi}{4}$.

Ces nombres sont repérés par les points A et B sur le cercle trigonométrique.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Pour résoudre cette équation par le calcul, on applique par exemple la formule des angles associés : pour tout réel x , $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

L'équation s'écrit $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ce qui équivaut à :

$$x = \frac{\pi}{2} - x + k \times 2\pi \text{ ou } x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ou encore } 2x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \text{ ou } 0x = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$0x = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \text{ n'a pas de solution.}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ équivaut à } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{En donnant à } k \text{ la valeur } 0, \text{ on retrouve la solution } x = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{En donnant à } k \text{ la valeur } 1, \text{ on retrouve la solution } x = \frac{5\pi}{4}.$$

2. Graphiquement, les solutions de $\cos(x) = -\sin(x)$ sont les points du cercle trigonométrique ayant des abscisses et ordonnées opposées.

Les solutions de l'équation dans $]-\pi; \pi]$ sont $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Ces nombres sont repérés par les points E et F sur le cercle trigonométrique.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les nombres $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour résoudre cette équation par le calcul, on applique par exemple la formule des angles associés : pour tout réel x , $-\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

L'équation s'écrit $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, ce qui équivaut à :

$$x = \frac{\pi}{2} + x + k \times 2\pi \text{ ou } x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{ou encore } 0x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \text{ ou } 0x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$0x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \text{ n'a pas de solution.}$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ équivaut à } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{En donnant à } k \text{ la valeur } 0, \text{ on retrouve la solution } x = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{En donnant à } k \text{ la valeur } 1, \text{ on retrouve la solution } x = \frac{3\pi}{4}.$$

Exercice 16

1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ équivaut à :

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + k \times 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

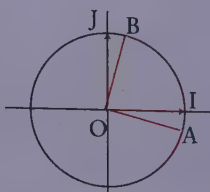
Les solutions de l'équation dans $]-\pi; \pi]$ sont

$$-\frac{\pi}{12} \text{ et } \frac{5\pi}{12}.$$

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres

$$-\frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ et } \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ces nombres sont repérés par les points A et B sur le cercle trigonométrique.

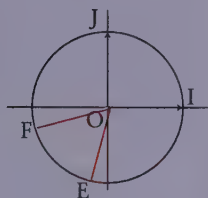


2. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ équivaut à :

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{13\pi}{12} + k \times 2\pi \text{ ou } x = -\frac{7\pi}{12} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Les solutions de l'équation dans $]-\pi; \pi]$ sont $-\frac{11\pi}{12}$ et $-\frac{7\pi}{12}$ (on

donne à k successivement les valeurs -1 et 0).

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres

$$-\frac{11\pi}{12} + k \times 2\pi \text{ et } -\frac{7\pi}{12} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ces nombres sont repérés par les points E et F sur le cercle trigonométrique.

Exercice 17

1. $4(\cos(x))^2 = 3$ équivaut à $(\cos(x))^2 = \frac{3}{4}$;

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les deux équations s'écrivent $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ équivaut à } x = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{ équivaut à } x = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de l'équation dans $]-\pi; \pi]$ sont $\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$.

2. On factorise : $\sin(x)(\sin(x) + 1) = 0$;

cette équation équivaut à $\sin(x) = 0$ ou $\sin(x) + 1 = 0$.

Les solutions dans $]-\pi; \pi]$ de $\sin(x) = 0$ sont 0 et π .

La seule solution dans $]-\pi; \pi]$ de $\sin(x) = -1$ est $-\frac{\pi}{2}$.

L'équation a donc trois solutions dans $]-\pi; \pi]$: $-\frac{\pi}{2}, 0$ et π .

3. On pose $X = \cos(x)$ et on résout l'équation : $2X^2 + X - 1 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 9$.

$\Delta > 0$; l'équation $2X^2 + X - 1 = 0$ a deux solutions : $X_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$ et $X_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$.

On résout les deux équations $\cos(x) = -1$ et $\cos(x) = 0,5$.

La seule solution dans $]-\pi; \pi]$ de $\cos(x) = -1$ est π .

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$. Les solutions dans $]-\pi; \pi]$ de $\cos(x) = 0,5$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

L'équation a donc trois solutions dans $]-\pi; \pi]$: π ; $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

4. On pose $X = \sin(x)$ et on résout l'équation

$$(E) : 4X^2 - 2(1+\sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 4(1+\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times \sqrt{3} = 4(1-\sqrt{3})^2.$$

$\Delta > 0$; l'équation (E) a deux solutions :

$$X_1 = \frac{2(1+\sqrt{3}) - 2(1-\sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } X_2 = \frac{2(1+\sqrt{3}) + 2(1-\sqrt{3})}{8} = \frac{1}{2}.$$

On résout les deux équations $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) = 0,5$.

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions dans $]-\pi; \pi]$ de $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5$. Les solutions dans $]-\pi; \pi]$ de $\sin(x) = 0,5$ sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

L'équation a donc quatre solutions dans $]-\pi; \pi]$: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 18

1. $\cos(2x) = \cos(x)$ équivaut à :

$$2x = x + k \times 2\pi \text{ ou } 2x = -x + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} ;$$

$$x = k \times 2\pi \text{ ou } 3x = k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} ;$$

$$x = k \times 2\pi \text{ ou } x = \frac{k \times 2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

CONSEIL

Il n'y a pas de factorisation immédiate ; on observe qu'en posant $X = \cos(x)$, on se ramène à la résolution d'une équation du second degré.

CONSEIL

Il n'y a pas de factorisation immédiate ; on observe qu'en posant $X = \sin(x)$, on se ramène à la résolution d'une équation du second degré.

RAPPEL

$\cos(a) = \cos(b)$ équivaut à $a = b + k \times 2\pi$ ou $a = -b + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

On donne à k successivement les valeurs 0, 1 et 2.

Les solutions de l'équation dans $[0 ; 2\pi[$ sont 0 ; $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

2. On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

L'équation s'écrit $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ce qui équivaut à :

$$3x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

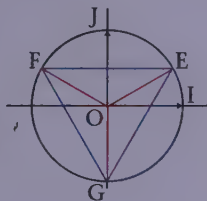
$$\text{D'où } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k \times 2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

On donne à k successivement les valeurs 0, 1 et 2.

Les solutions de l'équation dans $[0 ; 2\pi[$ sont :

$$\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \text{ et } \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}, \text{ soit } \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \text{ et } \frac{3\pi}{2}.$$

On peut observer que les points E, F et G qui repèrent ces trois nombres sur le cercle trigonométrique forment un triangle équilatéral.



Exercice 19

1. $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ équivaut à :

$$3x - \frac{2\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \text{ ou } 3x - \frac{2\pi}{3} = -\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$2x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \text{ ou } 4x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres :

$$\frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ et } \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

2. $\sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ équivaut à :

$$3x + \frac{5\pi}{6} = x - \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$$

$$\text{ou } 3x + \frac{5\pi}{6} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \text{ ou } 4x = \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

RAPPEL

$\sin(a) = \sin(b)$ équivaut
à $a = b + k \times 2\pi$ ou
 $a = \pi - b + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$2x = -\frac{4\pi}{3} + k \times 2\pi \text{ ou } 4x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les nombres :

$$-\frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ et } \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 20

1. Par construction du point B, on a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$.

Ensuite, on applique la relation de Chasles :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) = \frac{15\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) = \frac{19\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{23\pi}{12}$$

2. Le point B est repéré par $\frac{7\pi}{12}$; il a pour coordonnées

$$\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right); \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right).$$

$$\text{On a } \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}.$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, on peut calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Pour tout réel t , $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$, donc $(\sin(t))^2 = 1 - (\cos(t))^2$;

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = 1 - \frac{8 + 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{16} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 ;$$

CONSEIL

On applique les formules des angles associés :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin(t)$$

$$\text{et } \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos(t).$$

or $\frac{\pi}{12} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$; on en déduit $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Donc B $\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$.

Le point C est repéré par $\frac{11\pi}{12}$; il a pour coordonnées :

$\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right); \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$.

On a $\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$.

Donc C $\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$.

CONSEIL

On applique les formules des angles associés :
 $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$
 et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$.

Le point E est repéré par $\frac{19\pi}{12}$; il a pour coordonnées :

$\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right); \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$.

On a $\frac{19\pi}{12} = \pi + \frac{7\pi}{12}$. (Le point E est diamétralement opposé à B sur le cercle.)

Donc E $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$.

CONSEIL

On applique les formules des angles associés :
 $\cos(\pi + t) = -\cos(t)$
 et $\sin(\pi + t) = -\sin(t)$.

Le point F est repéré par $\frac{23\pi}{12}$ et aussi par $\frac{-\pi}{12}$, car on a $\frac{23\pi}{12} = 2\pi - \frac{\pi}{12}$.

F a pour coordonnées :

$\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right); \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$.

Donc F $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$.

CONSEIL

On applique les formules des angles associés :
 $\cos(-t) = \cos(t)$
 et $\sin(-t) = -\sin(t)$.

3. L'hexagone régulier ABCDEF est formé de six triangles équilatéraux : OAB, OAC, etc.

Donc $AB = BC = CD = DE = EF = FA = 1$; le périmètre de ABCDEF est égal à 6.

L'apothème a de l'hexagone régulier est la hauteur d'un de ces triangles équilatéraux.

Comme le côté mesure 1, la hauteur mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$; donc $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 21

L'INFO EN +

L'Église Saint-Ours (datant du ^{xiii}e siècle), dans la cité royale de Loches, présente un modèle de pyramide régulière à base octogonale.

1. a. Une mesure, en radian, de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

b. Le triangle OAB est isocèle en O. Le point I étant le milieu du segment [AB], (OI) est la médiane, la bissectrice et la hauteur issue de O dans ce triangle. Le triangle OAI est donc

rectangle en I et l'angle géométrique $\widehat{AOI}$ mesure $\frac{\pi}{8}$ radian, soit $22,5^\circ$.

On utilise la trigonométrie dans un triangle rectangle pour calculer OI et AI :

$$\frac{OI}{OA} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \text{ donc } OI = OA \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \text{ soit } OI \approx 4,6194 \text{ m.}$$

$$\frac{AI}{OA} = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \text{ donc } AI = OA \times \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \text{ soit } AI \approx 1,9134 \text{ m.}$$

c. Calcul du périmètre p de l'octogone ABCDEFGH : $p = 8 \times AB = 16 \times AI$, donc $p \approx 30,6 \text{ m}$.

d. Calcul de l'aire a du triangle OAB : $a = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AB \times OI}{2}$, soit $a \approx 8,8388 \text{ m}^2$.

L'aire de l'octogone ABCDEFGH est donc $8a \approx 70,71 \text{ m}^2$.

2. On applique la formule $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

$$V = \frac{\text{aire (octogone)} \times OS}{3} = \frac{(70,71) \times 10}{3}, \text{ soit } V \approx 235,7 \text{ m}^3.$$

3. a. La pyramide étant régulière, le point S est à la verticale du point O. Le triangle SOA est donc rectangle en O. On connaît $OS = 10$ et $OA = 5$. On peut donc calculer SA en appliquant le théorème de Pythagore :

$$SA^2 = OA^2 + OS^2, \text{ donc } SA^2 = 5^2 + 10^2 = 125; \text{ d'où } SA = 5\sqrt{5} \approx 11,18 \text{ m.}$$

Le triangle SAB est isocèle en S, donc SAI est rectangle en I.

On connaît $\widehat{SAI}$ et AI (voir question 1.) :

$$\sin(\widehat{ASI}) = \frac{AI}{AS} \approx 0,17, \text{ donc } \widehat{ASI} \approx 9,85^\circ.$$

On en déduit que $\widehat{ASB} \approx 19,71^\circ$, puis $\widehat{MSN} \approx 158^\circ$.

b. On applique le théorème de Pythagore pour calculer SI :

$$SI^2 = SA^2 - AI^2, \text{ d'où } SI \approx 11,0154 \text{ m.}$$

L'aire du triangle SAB est $SI \times AI \approx 21,08 \text{ m}^2$.

L'aire latérale de la pyramide est $8 \times 21,08 \approx 168,61 \text{ m}^2$.

1 Produit scalaire de deux vecteurs

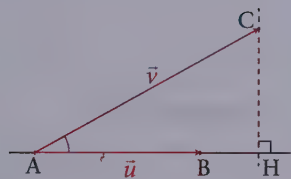
a. Définition du produit scalaire

■ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$



■ Si l'un des deux vecteurs est nul, alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à 0.

■ **Conséquences** : Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux** si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Si $\vec{v} = \vec{u}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{u} = AB \times AB \times \cos(0) = AB^2$.

On note $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$.

$\vec{u}^2$ est le **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$.

b. Produit scalaire et projection

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

■ Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$.

■ Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.

■ Dans les deux cas, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

c. Expression analytique du produit scalaire

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

■ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

■ **Conséquence** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx' + yy' = 0$.

d. Norme et produit scalaire

■ Si $\vec{v} = \vec{u}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

■ Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

e. Règles de calcul

■ Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et quel que soit le réel k :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(k \cdot \vec{u}) \cdot (\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

■ Conséquences :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

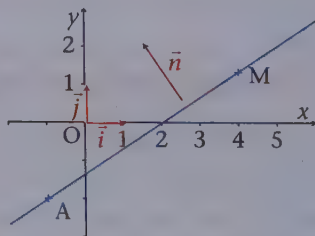
2 Vecteur normal à une droite Équations de droites et cercles

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Vecteur normal à une droite

■ On dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal à une droite d** s'il est orthogonal à la direction de d .

■ La droite d passant par un point A et admettant le vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



b. Équation cartésienne d'une droite

Soit a , b et c des nombres réels.

■ Si une droite d a pour vecteur normal $\vec{n}(a; b)$, alors une équation de d s'écrit $ax + by + c = 0$.

■ Si une droite d a pour équation $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à la droite d .

c. Équations de cercles

■ Soit $\Omega(a; b)$ un point du plan et R un nombre réel strictement positif. Le cercle C de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $\Omega M^2 = R^2$.

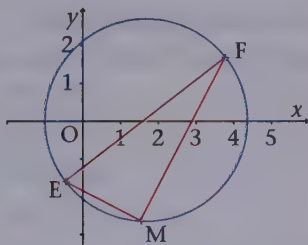
Une équation de C s'écrit $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

■ Soit E et F deux points du plan.

Le cercle C' de diamètre $[EF]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$.

Une équation de C' s'écrit :

$$(x_E - x)(x_F - x) + (y_E - y)(y_F - y) = 0.$$



3 Applications du produit scalaire

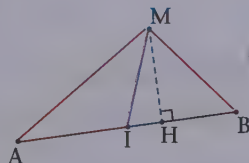
a. Théorème de la médiane

■ Soit A et B deux points du plan, I le milieu de $[AB]$ et H le projeté orthogonal de M sur (AB) .

Pour tout point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$$

$$MA^2 - MB^2 = 2 \times \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$$



b. Calculs d'angles et de longueurs

Soit ABC un triangle.

Formule d'Al-Kashi

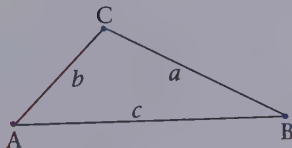
■ Si on pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$, alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}).$$

■ On a de même :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C})$$



Aire d'un triangle

L'aire S du triangle ABC est $S = \frac{1}{2} bc \sin(\hat{A})$.

Formule des sinus

Dans tout triangle ABC, $\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})} = \frac{abc}{2S}$.

c. Trigonométrie

Formules d'addition

- Quels que soient les nombres réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Formules de duplication

- Quel que soit le nombre réel a :

$$\cos(2a) = (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

- Conséquences :

$$\cos(2a) = 2(\cos(a))^2 - 1 ; \text{ d'où } (\cos(a))^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a)).$$

$$\cos(2a) = 1 - 2(\sin(a))^2 ; \text{ d'où } (\sin(a))^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a)).$$

1 Calculer des produits scalaires

Énoncé

On considère les triangles ABC et ABD tels que :

$$AB = 3 ; AC = AD = 3 ; \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3} ;$$

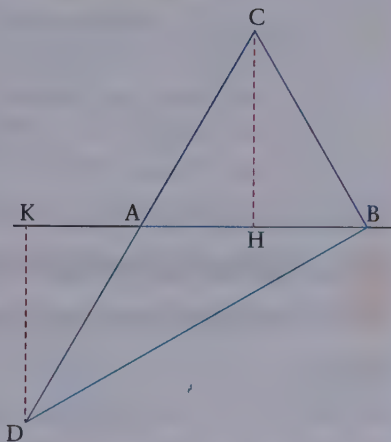
$$\widehat{BAD} = \frac{2\pi}{3} ;$$

H et K sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB).

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$.

3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HD}$.



Solution commentée

Savoir-faire

■ Pour répondre à la première question, on applique la formule du produit scalaire avec les longueurs et le cosinus de l'angle.

■ Pour les questions 2. et 3., on applique l'une des deux formules qui utilise le projeté orthogonal K de D sur la droite (AB) en faisant attention au sens des vecteurs.

$$1. \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9 \times 0,5 ;$$

$$\text{donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4,5.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 9 \times (-0,5) ;$$

$$\text{donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -4,5.$$

2. K est le projeté orthogonal de D sur (AB) et les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont de même sens, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \times BK$.

On peut calculer AK, puis BK.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont de sens contraires, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -AB \times AK$.

D'après la question 1., $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -4,5$.

On a donc $-4,5 = -3 \times AK$, d'où $AK = 1,5$, puis $BK = BA + AK$, soit $BK = 4,5$.
On a alors $\overline{BA} \cdot \overline{BD} = BA \times BK = 3 \times 4,5$, donc $\overline{BA} \cdot \overline{BD} = 13,5$.

3. Le triangle ABC étant équilatéral, le point H est le milieu de [AB], donc $BH = 1,5$.

K est le projeté orthogonal de D sur (HB) et les vecteurs $\overline{HB}$ et $\overline{HK}$ sont de sens contraires, alors $\overline{HB} \cdot \overline{HD} = -HB \times HK$.

$HB = 1,5$ et $HK = 3$, donc $\overline{HB} \cdot \overline{HD} = -4,5$.

2 Utiliser le produit scalaire dans un repère pour calculer un angle

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(-3; 2)$, $B(2; -1)$ et $C(3; 3)$.

Calculer le produit scalaire $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

En déduire une valeur approchée de la mesure en radians (et en degrés) de l'angle BAC.

Solution commentée

Savoir-faire

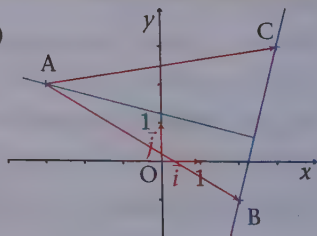
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. En calculant le produit scalaire de deux manières, on peut déterminer un angle.
- On commence par utiliser l'expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé.
- On connaît alors la valeur du produit scalaire des deux vecteurs.
- On utilise alors la formule avec les longueurs et le cosinus de l'angle pour déterminer l'angle.

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\overline{AB}(5; -3)$ et $\overline{AC}(6; 1)$,

donc $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 5 \times 6 + (-3) \times 1 = 27$.

On a aussi $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$AB = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$ et $AC = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$.



On en déduit $27 = \sqrt{34} \times \sqrt{37} \times \cos(\widehat{BAC})$,

$$\text{d'où } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{27}{\sqrt{34} \times \sqrt{37}} \approx 0,761.$$

Une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$ donnée par la calculatrice est 0,71 radian, ou encore $40,4^\circ$.

3

Calculer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(-3; 2)$, $B(2; -1)$ et $C(3; 3)$ du point méthode précédent.

Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Solution commentée

Savoir-faire

■ On commence par chercher les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite.

■ On applique ensuite l'une des propriétés suivantes.

– Soit $M(x; y)$ un point du plan.

Le point M appartient à la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

– Sachant que la droite a pour vecteur normal $\vec{n}(a; b)$, une équation de la droite s'écrit $ax + by + c = 0$. On calcule le coefficient c à l'aide des coordonnées de A.

Soit d la hauteur issue de A. Les droites d et (BC) étant perpendiculaires, on peut choisir le vecteur $\overrightarrow{BC}$ comme vecteur normal à la droite d .

Première méthode : Soit $M(x; y)$ un point du plan.

M appartient à d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$$\overrightarrow{AM}(x+3; y-2), \overrightarrow{BC}(1; 4); \text{ donc } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = (x+3) \times 1 + (y-2) \times 4 = x + 4y - 5.$$

Une équation de d est donc $x + 4y - 5 = 0$.

Seconde méthode : $\overrightarrow{BC}(1; 4)$ est un vecteur normal de d ; donc une équation de d s'écrit $x + 4y + c = 0$.

$A(-3; 2)$ appartient à d , donc $-3 + 4 \times 2 + c = 0$; on trouve $c = -5$.

Une équation de d est donc $x + 4y - 5 = 0$.

4 Déterminer une équation d'un cercle défini par son diamètre

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $E(1; 5)$ et $F(6; 2)$.

Déterminer une équation du cercle de diamètre $[EF]$.

Solution commentée

Savoir-faire

■ Pour déterminer l'équation d'un cercle, connaissant son diamètre, on utilise la propriété suivante :

« Soit $M(x; y)$ un point du plan.

Le point M appartient au cercle de diamètre $[EF]$ si, et seulement si, $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$. »

$$\overrightarrow{ME}(1-x; 5-y), \quad \overrightarrow{MF}(6-x; 2-y);$$

$$\text{donc } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = (1-x) \times (6-x) + (5-y) \times (2-y).$$

Une équation du cercle de diamètre $[EF]$ est $(1-x)(6-x) + (5-y)(2-y) = 0$.

Après développement et réduction, on trouve $x^2 + y^2 - 7x - 7y + 16 = 0$.

L'INFO EN +

La forme canonique de $x^2 - 7x$ est $(x - 3,5)^2 - 3,5^2$.

L'équation du cercle peut s'écrire $(x - 3,5)^2 - 3,5^2 + (y - 3,5)^2 - 3,5^2 + 16 = 0$,
soit $(x - 3,5)^2 + (y - 3,5)^2 = 8,5$.

Ce cercle a pour centre $\Omega(3,5; 3,5)$ et pour rayon $\sqrt{8,5}$.

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1 ABCD est un carré de côté $AB = 10$ et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

☐ a. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

☐ b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 20$.

☐ c. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 100$.

2 ABCD est un carré de centre E de côté $AB = 10$ et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

☐ a. $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$.

☐ b. $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED} = 10\sqrt{2}$.

☐ c. $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED} = 50$.

3 ABCD est un carré de centre E de côté $AB = 10$ et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

☐ a. $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.

☐ b. $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BA} = -50$.

☐ c. $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BA} = 50$.

4 ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 6$, $BC = 5$ et $AC = 5$.

☐ a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -18$.

☐ b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 30$.

☐ c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 25$.

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(0; 3)$, $B(6; 0)$ et $C(5; 2)$.

☐ a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 27$.

☐ b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -21$.

☐ c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 33$.

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La droite passant par $E(7; 5)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; 3)$ a pour équation :

☐ a. $3x - 2y - 11 = 0$.

☐ b. $2x + 3y - 29 = 0$.

☐ c. $7x + 5y - 29 = 0$.

7 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $E(7; 5)$ et $F(-3; 0)$. Le cercle de diamètre $[EF]$ a pour équation :

☐ a. $x^2 + y^2 - 4x - 5y - 21 = 0$.

☐ b. $(x - 2)^2 + (y - 2,5)^2 = 125$.

☐ c. $x^2 - y^2 - 4x + 5x - 21 = 0$.

8 MNP est un triangle tel que $MN = 4$, $MP = 7$ et $\widehat{NMP} = \frac{2\pi}{3}$.

☐ a. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = -14$.

☐ b. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 14$.

☐ c. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = -14\sqrt{3}$.

9 MNP est un triangle tel que $MN = 4$, $MP = 7$ et $\widehat{NMP} = \frac{2\pi}{3}$.

☐ a. $NP = \sqrt{93}$.

☐ b. $NP = \sqrt{37}$.

☐ c. $NP = 11 - 2\sqrt{7}$.

10 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$ est égal à :

☐ a. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$ ☐ b. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

☐ c. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Exercices

Dans tous les exercices, le plan orienté est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

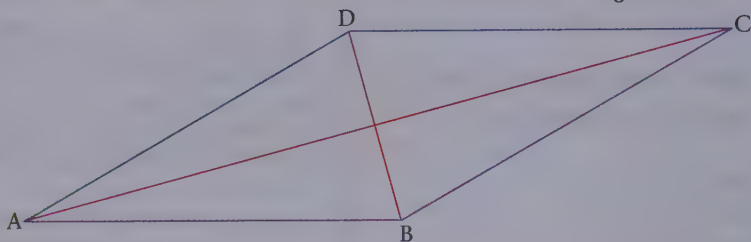
Calculs de produits scalaires

Exercice 1

niveau 1

Corrigés p. 263

Soit un losange ABCD de côté 5 cm tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{6}$.



1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Exercice 2

niveau 1

Corrigés p. 263

Soit un triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8$.

Calculer $\cos(\widehat{BAC})$.

En déduire une valeur approchée en degrés, à 0,1 près, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Exercice 3

niveau 1

Corrigés p. 263

Soit un triangle EFG tel que $EF = 3$, $EG = 10$ et $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = 15$.

Calculer la valeur exacte, en radians, de l'angle géométrique $\widehat{FEG}$.

Exercice 4

niveau 1

Corrigés p. 263

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les vecteurs $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(-1; 4)$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Calculer les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. En déduire la norme du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 5

niveau 1

Corrigés p. 264

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(5; 2)$, $B(-1; 4)$, $C(0; -3)$ et $D(m; 1)$.

Calculer la valeur du nombre réel m sachant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Exercice 6

niveau 1

Corrigés p. 264

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(3; 0)$, $B(6; 3)$, $C(1; 4)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les distances AB et AC .
3. Déterminer une valeur approchée en degrés, à 0,1 près, de l'angle $\widehat{BAC}$.
4. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7

niveau 2

Corrigés p. 264

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\| = 5; \|\vec{v}\| = 4 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = -10.$$

1. Calculer $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.
2. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.
3. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Calculer BC .
4. Calculer la valeur exacte, en radians, de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 8

niveau 3

Corrigés p. 265

Soit un triangle ABC isocèle en A et I le milieu de $[BC]$. On donne $AB = 8$ et $BC = 12$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Équations de droites et cercles

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 9

niveau 1

Corrigés p. 265

On considère le point $A(0; 4)$ et le vecteur $\vec{n}(-2; 3)$.

1. Déterminer une équation de la droite d passant par A et ayant pour vecteur normal $\vec{n}$.

- Déterminer une équation de la droite d' passant par A et ayant pour vecteur directeur $\vec{n}$.
- Donner les équations réduites de ces deux droites.

Exercice 10 niveau 1

Corrigés p. 266

On considère les trois points A(-2 ; 1), B(4 ; -1) et C(2 ; 5).

- Déterminer une équation de la droite d passant par A et perpendiculaire à (BC).
- Déterminer une équation de la droite (BC).
- Soit H le point d'intersection de d et de (BC).
Déterminer les coordonnées de H.
- Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 11 niveau 1

Corrigés p. 267

Soit d et d' les droites d'équations $2x + 3y + 6 = 0$ et $1,5x - y - 1 = 0$.

- Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à d et un vecteur normal $\vec{n}'$ à d' .
- Démontrer que les droites d et d' sont perpendiculaires.
- Soit E le point d'intersection de d et d' .
Déterminer les coordonnées de E.

Exercice 12 niveau 1

Corrigés p. 268

Soit les points A(2 ; -3) et B(6 ; 1).

- Déterminer une équation du cercle de centre A passant par B.
- Déterminer une équation du cercle de centre B passant par A.

Exercice 13 niveau 1

Corrigés p. 268

On donne deux points E(3 ; 1) et F(0 ; 4).

- Déterminer une équation de la médiatrice de [EF].
- Déterminer une équation du cercle C de diamètre [EF].
- Vérifier que le point A(0 ; 1) appartient au cercle C et déterminer une équation de la tangente au cercle C au point A.

Exercice 14 niveau 2

Corrigés p. 269

Soit le cercle C d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$.

- Trouver son centre et son rayon. Tracer le cercle.
- Étudier l'intersection de C et de l'axe des ordonnées.

3. Étudier l'intersection de C et de l'axe des abscisses.

4. Étudier l'intersection de C et de la droite (OA) .

Exercice 15

niveau 2

Corrigés p. 270

1. Écrire une équation du cercle C de centre O (origine du repère) et de rayon 2.

2. Soit M le point du cercle tel qu'une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est $\frac{5\pi}{6}$.

Donner les coordonnées de M et déterminer une équation de la tangente T en M au cercle C .

Exercice 16

niveau 2

Corrigés p. 271

On donne le cercle C de centre $\Omega(1 ; 3)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

1. Déterminer une équation de C . Vérifier que le point O appartient au cercle C .

2. Déterminer une équation de la tangente T en O à ce cercle.

Exercice 17

niveau 2

Corrigés p. 271

On considère les équations suivantes :

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y + 10 = 0 ;$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 7 = 0 ;$$

$$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0.$$

Chercher si ces équations représentent des équations de cercles dont on déterminera, le cas échéant, le centre et le rayon.

Exercice 18

niveau 2

Corrigés p. 271

On donne les points $A(7 ; 0)$ et $B(1 ; 3)$.

Soit $M(x ; y)$ un point quelconque du plan.

1. Calculer en fonction de x et y le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

2. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Calculs de longueurs, d'angles et d'aires

Exercice 19

niveau 1

Corrigés p. 272

Soit un triangle ABC tel que $AB = 6$, $BC = 10$ et $AC = 5$.

Soit I le milieu de $[AB]$.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2.$$

2. Calculer CI.

3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 26$.

Exercice 20

niveau 1

► Corrigés p. 273

Soit un triangle ABC tel que $AB = 6$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.

1. Calculer BC.

2. Calculer une mesure approchée en degrés des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Exercice 21

niveau 1

► Corrigés p. 273

Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB = 10$, $BC = 4$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{5}$ radian. Calculer les longueurs des diagonales AC et BD.

Exercice 22

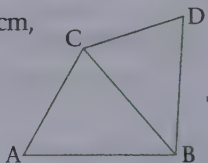
niveau 1

► Corrigés p. 274

Soit ABCD un quadrilatère tel que $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm,

$BD = 4$ cm, $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\overline{BC}, \overline{BD}) = -\frac{\pi}{4}$.

Calculer l'aire de ABCD.



Exercice 23

niveau 2

► Corrigés p. 274

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 10$ cm et I le milieu de [AB].

1. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 68$.

2. Étudier, selon les valeurs du nombre réel positif k, l'ensemble E_k des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

Exercice 24

niveau 3

► Corrigés p. 275

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 10$ cm et I le milieu de [AB].

1. Démontrer que $MA^2 - MB^2 = 2 \times \overline{IM} \cdot \overline{AB}$.

2. Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB), démontrer que $\overline{IM} \cdot \overline{AB} = \overline{IH} \cdot \overline{AB}$.

3. En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 = 24.$$

Trigonométrie

Exercice 25

niveau 1

Corrigés p. 275

1. En utilisant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. En utilisant $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 26

niveau 1

Corrigés p. 276

Soit a et b deux nombres réels appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos(a) = 0,8$ et $\cos(b) = 0,2$.

Calculer $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$.

Exercice 27

niveau 1

Corrigés p. 276

Vérifier que pour tout nombre réel x :

$$\sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

Exercice 28

niveau 1

Corrigés p. 277

Soit a un nombre réel tel que $\sin(a) = 0,9$ et $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculer $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$.

Exercice 29

niveau 2

Corrigés p. 277

Soit a un nombre réel tel que $\cos(a) = \frac{1}{3}$ et $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculer $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$.

Exercice 30

niveau 2

Corrigés p. 278

Utiliser les formules de duplication pour calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 31

niveau 2

Corrigés p. 278

1. En remplaçant $3x$ par $2x + x$ et en utilisant les formules d'addition et de duplication, exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

2. Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.

Exercice 32

niveau 3

Corrigés p. 279

1. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. Exprimer $\sin(4x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Exercice 33

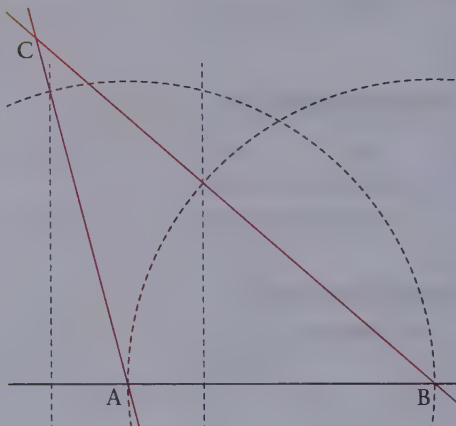
niveau 3

Corrigés p. 279

Sur un logiciel de géométrie, Aricia a construit un triangle ABC tel que

$$AB = 4 \text{ cm}, \cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{4}$$

$$\text{et } \cos(\widehat{ABC}) = \frac{3}{4}.$$



1. Calculer $\cos(\widehat{BCA})$ et $\sin(\widehat{BCA})$.
2. Calculer l'aire S du triangle ABC.

Problèmes**Exercice 34**

niveau 1

Corrigés p. 280

Soit un triangle isocèle ABC de côtés $BC = 2x$, $AB = AC = 3x$, x désignant un nombre réel strictement positif.

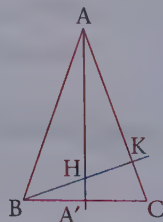
On note A' le milieu de $[BC]$ et H l'orthocentre du triangle ABC.

1. Soit t une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Montrer que $\cos(t) = \frac{7}{9}$.

2. Soit K le projeté de B sur la droite (AC) .

Calculer $\frac{KA}{KC}$.



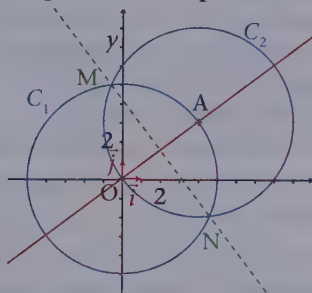
Exercice 35

niveau 1

Corrigés p. 281

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, Alessandra a tracé le cercle C_1 de centre O et de rayon 5 et le cercle C_2 de centre A(4 ; 3) et de rayon 5.

Ces deux cercles se coupent en deux points nommés M et N.



1. À l'aide du graphique ou d'un logiciel de géométrie, donner des valeurs approchées des coordonnées de M et N.

2. Donner une équation du cercle C_1 et une équation du cercle C_2 . Calculer les abscisses exactes des points d'intersection de ces deux cercles.

3. Samuel dit qu'il est possible de trouver l'équation de la droite (MN) sans connaître les coordonnées de M et de N. En effet, la droite (MN) est la médiatrice d du segment [OA].

Déterminer une équation cartésienne puis l'équation réduite de d .

4. Calculer les abscisses des points d'intersection du cercle C_1 et de la droite d .

Exercice 36

niveau 2

Corrigés p. 282

On considère un cercle C de centre O et de rayon r .

Soit M un point quelconque du plan et d une droite passant par M et coupant le cercle en deux points A et B.

On désigne par E le point diamétralement opposé à A sur le cercle C.

1. Démontrer que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA} \cdot \overline{ME}$.

2. Démontrer que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - r^2$.

3. En déduire que le nombre $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ est indépendant de la droite D passant par M et sécante au cercle C. Ce nombre est appelé « puissance du point M par rapport au cercle C ».

4. Étudier le signe de $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ selon la position du point M dans le plan.

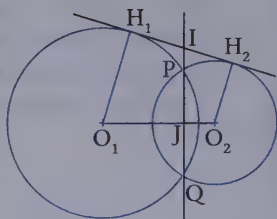
Exercice 37

niveau 3

Corrigés p. 282

On considère deux cercles C_1 et C_2 de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 qui se coupent en deux points P et Q .

On considère une tangente commune à ces deux cercles. On appelle H_1 et H_2 les points de contact de cette tangente avec C_1 et C_2 . Soit I l'intersection de (H_1H_2) et (PQ) .



On se propose de démontrer que I est le milieu du segment $[H_1H_2]$.

On appelle J l'intersection des droites (O_1O_2) et (PQ) .

Soit M un point de (PQ) .

1. a. Montrer que $(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{O_2M}) \cdot (\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) = O_1M^2 - O_2M^2$.

b. En remarquant que $\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_1O_2}$, montrer que :

$$(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{O_2M}) \cdot (\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) = O_1O_2(O_1J - O_2J).$$

c. En choisissant un point M particulier, montrer que :

$$O_1O_2(O_1J - O_2J) = R_1^2 - R_2^2.$$

2. a. En utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles O_1IH_1 et O_2IH_2 , montrer que $H_1I^2 - H_2I^2 = 0$.

b. En déduire que I est le milieu de $[H_1H_2]$.

Exercice 38

niveau 3

Corrigés p. 283

Delphine est professeur des écoles en CM1 et entraîne ses élèves aux rudiments de la géométrie.

Elle leur a demandé de reproduire la figure de la page suivante avec les données suivantes : $AB = 2$ cm, $AC = 6$ cm et $CD = 4$ cm.

Elle leur a ensuite demandé de mesurer la longueur PQ à l'aide d'une règle graduée.

Ses deux meilleurs élèves ne sont pas d'accord sur la réponse : Kévin a trouvé 5,8 cm et Emmanuel a trouvé 5,9 cm.

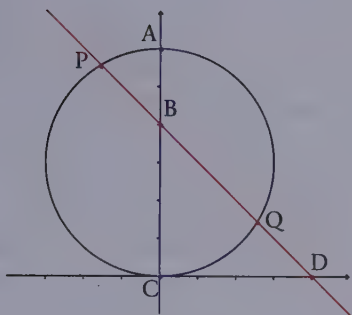
On se propose ici de départager Emmanuel et Kévin.

On se place dans le repère indiqué sur la figure.

Les points A , B , C et D ont donc pour coordonnées respectives $(0 ; 6)$, $(0 ; 4)$, $(0 ; 0)$ et $(4 ; 0)$.

Soit M un point de (PQ) .

On note x son abscisse et y son ordonnée.



1. a. Exprimer y en fonction de x .
- b. Exprimer $\overline{MA} \cdot \overline{MC}$ en fonction de x .
2. a. Que vaut $\overline{MA} \cdot \overline{MC}$ si M est confondu avec P ? avec Q ?
- b. En déduire l'abscisse du point P et l'abscisse du point Q.
- c. Déterminer la longueur PQ.
- d. Lequel des deux élèves de Delphine était le plus proche de la réalité ?

Exercice 39

niveau 3

Corrigés p. 284

On considère un triangle ABC. On note I le milieu de [AB], J le milieu de [BC] et K le milieu de [AC]. On suppose que les médianes [AJ], [BK] et [CI] mesurent toutes 1 cm.

Montrer que ABC est équilatéral et donner la longueur de ses côtés.

Exercice 40

niveau 3

Corrigés p. 284

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

1. a. Exprimer $AB^2 + BC^2$ en fonction de OB et AC à l'aide du théorème de la médiane.
- b. Exprimer $CD^2 + AD^2$ en fonction de OD et AC à l'aide du théorème de la médiane.
2. En déduire que la somme des carrés des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

QCM

① **c.** Le point D est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AD), donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 = 100$.

② **a.** Les diagonales du carré sont perpendiculaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux ; d'où $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$.

③ **b.** Le point E est le milieu du segment [AC], donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE}$; le point B se projette orthogonalement en E sur la diagonale (AE) du carré. D'où $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AE} \cdot (-\overrightarrow{AB}) = -AE^2 = -(5\sqrt{2})^2 = -50$.

④ **a.** On applique la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2) ;$$

ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2) = \frac{1}{2}(25 - 36 - 25), \text{ donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -18.$$

⑤ **c.** $\overrightarrow{AB}(6 ; -3)$ et $\overrightarrow{AC}(5 ; -1)$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 6 + (-3) \times (-1) = 33$.

⑥ **b.** Si une droite a pour vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$, alors une équation de la droite s'écrit $ax + by + c = 0$; on élimine donc les réponses **a.** et **c.** ; on peut vérifier que les coordonnées de E vérifient cette équation.

⑦ **a.** On élimine la réponse **c.** en raison du signe - devant y^2 . On élimine la réponse **b.** qui donne l'équation du cercle ayant pour centre le milieu de [EF] et de rayon EF.

Vous pouvez aussi prendre un point M(x ; y) du plan et utiliser $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$.

$$\textcircled{8} \text{ a. } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = MN \times MP \times \cos(\widehat{NMP}) = 4 \times 7 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 28 \times (-0,5) = -14.$$

⑨ **a.** On utilise la formule d'Al-Kashi :

$$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2 \times MN \times MP \times \cos(\widehat{NMP}) ;$$

$$NP^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 65 - 56 \times (-0,5) = 93,$$

donc $NP = \sqrt{93}$.

⑩ **b.** On applique la formule $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) ;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 1

1. ABCD est un losange de côté 5 cm et $(\overline{AB}, \overline{AD}) = \frac{\pi}{6}$.

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = 5 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 25 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donc $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 12,5\sqrt{3}$.

ABCD est un losange, donc un parallélogramme ; on en déduit que $\overline{CD} = \overline{BA} = -\overline{AB}$;

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot (-\overline{AB}) = -AB^2, \text{ donc } \overline{AB} \cdot \overline{CD} = -25.$$

$$2. \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AD}, \text{ car } \overline{BC} = \overline{AD} ;$$

donc, d'après la question 1.,

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 25 + 12,5\sqrt{3}.$$

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$.

CONSEIL

On commence par écrire $\overline{AC}$ sous la forme d'une somme de vecteurs à l'aide de la relation de Chasles, puis on applique les règles de calcul du produit scalaire.

Exercice 2

ABC est tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -8$.

En utilisant la formule

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}), \text{ on obtient}$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \times AC}.$$

$$\text{On a alors } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-8}{5 \times 4} = -\frac{2}{5} = -0,4.$$

Avec la calculatrice, une valeur approchée en degrés, à 0,1 près, de $\widehat{BAC}$ est $113,6^\circ$.

ATTENTION

Le produit scalaire est négatif ; cela implique que l'angle est obtus.

Exercice 3

EFG est tel que $EF = 3$, $EG = 10$ et $\overline{EF} \cdot \overline{EG} = 15$.

On sait que $\overline{EF} \cdot \overline{EG} = EF \times EG \times \cos(\widehat{FEG})$.

On remplace par les données de l'exercice : $15 = 3 \times 10 \times \cos(\widehat{FEG})$;

on en déduit $\cos(\widehat{FEG}) = 0,5$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$, donc $\widehat{FEG} = \frac{\pi}{3}$ radians.

Exercice 4

1. $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(-1; 4)$, donc

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 3 \times 4 ;$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 10.$$

CONSEIL

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$, on applique les formules $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

2. $\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$.

$\|\vec{v}\|^2 = (-1)^2 + 4^2 = 17$, donc $\|\vec{v}\| = \sqrt{17}$.

3. On a $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$, donc $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 13 + 2 \times 10 + 17 = 50$, d'où $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Exercice 5

A(5 ; 2), B(-1 ; 4), donc $\overline{AB}(-6 ; 2)$.

C(0 ; -3), D(m ; 1), donc $\overline{CD}(m ; 4)$.

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = -6 \times m + 2 \times 4 = -6m + 8$.

$\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $-6m + 8 = 0$, soit pour $m = \frac{4}{3}$.

RAPPEL

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 0$.

Exercice 6

1. A(3 ; 0), B(6 ; 3), C(1 ; 4), donc $\overline{AB}(3 ; 3)$ et $\overline{AC}(-2 ; 4)$.

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3 \times (-2) + 3 \times 4 = 6$.

2. $\overline{AB}(3 ; 3)$, donc $AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$\overline{AC}(-2 ; 4)$, donc $AC = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

3. En utilisant la formule $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, on obtient $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \times AC}$.

On a alors $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{6}{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Avec la calculatrice, une valeur approchée en degrés, à 0,1 près, de $\widehat{BAC}$ est $71,6^\circ$.

4. $\overline{OB}(6 ; 3)$ et $\overline{AC}(-2 ; 4)$, donc $\overline{OB} \cdot \overline{AC} = 6 \times (-2) + 3 \times 4 = 0$; on en déduit que les vecteurs $\overline{OB}$ et $\overline{AC}$ sont orthogonaux.

Exercice 7

1. $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -10$.

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 + \vec{v} \cdot \vec{u}$, donc $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} = 5^2 + (-10) = 15$.

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$, donc $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 5^2 - 4^2 = 9$.

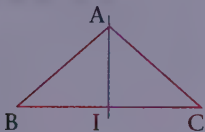
2. On a $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$, donc $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 25 + 2 \times (-10) + 16 = 21$, d'où $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{21}$.

3. On pose $\vec{u} = \overline{AB}$ et $\vec{v} = \overline{AC}$, donc $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \vec{v} - \vec{u}$. $BC = \|\vec{v} - \vec{u}\|$.

On a $(\vec{v} - \vec{u})^2 = \vec{v}^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u}^2$, donc $(\vec{v} - \vec{u})^2 = 16 - 2 \times (-10) + 25 = 61$, d'où $BC = \sqrt{61}$.

4. En utilisant la formule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$;
on sait que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{u} \cdot \vec{v} = -10$; $AB = \|\vec{u}\| = 5$, $AC = \|\vec{v}\| = 4$,
donc $-10 = 5 \times 4 \times \cos(\widehat{BAC})$; on obtient $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{10}{20} = -0,5$.
Donc la mesure en radians de $\widehat{BAC}$ est $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 8



CONSEIL

Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, on décompose les deux vecteurs en utilisant la relation de Chasles puis on applique les règles de calcul du produit scalaire.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) \\ &= \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} \\ &= \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IB}^2 \quad (\text{I étant le milieu de [AB], on a } \overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB} \\ &\quad \text{et } \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}) \\ &= \overrightarrow{AI}^2 - \overrightarrow{IB}^2.\end{aligned}$$

Le triangle ABC étant isocèle en A, la médiane (AI) est aussi la hauteur issue de A dans le triangle.

On calcule AI en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AIB rectangle en I :

$AB = 8$ et $BC = 12$, donc $IB = 6$;

$AI^2 = AB^2 - IB^2 = 8^2 - 6^2 = 28$, d'où $AI = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

On en déduit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28 - 36$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8$.

Exercice 9

1. *Première méthode* : Soit $M(x ; y)$ un point du plan.

M appartient à la droite d passant par $A(0 ; 4)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}(-2 ; 3)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

$\overrightarrow{AM}(x ; y - 4)$; donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= x \times (-2) + (y - 4) \times 3 \\ &= -2x + 3y - 12.\end{aligned}$$

Une équation de d est donc :

$$-2x + 3y - 12 = 0.$$

Seconde méthode : $\vec{n}(-2 ; 3)$ est un vecteur normal de d ; donc une équation de d s'écrit $-2x + 3y + c = 0$.

CONSEIL

Vous avez le choix entre deux méthodes.

■ Soit $M(x ; y)$ un point du plan. Le point M appartient à la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

■ Sachant que la droite a pour vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$, une équation de la droite s'écrit $ax + by + c = 0$. On calcule le coefficient c à l'aide des coordonnées de A.

$A(0; 4)$ appartient à d , donc $0 + 3 \times 4 + c = 0$; on trouve $c = -12$.

Une équation de d est donc $-2x + 3y - 12 = 0$.

2. Première méthode : Soit $M(x; y)$ un point du plan.

M appartient à la droite d' passant par $A(0; 4)$ et ayant pour vecteur directeur $\vec{n}(-2; 3)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AM}(x; y-4);$$

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires si, et seulement si, $x \times (3) - (y-4) \times (-2) = 0$.

Une équation de d' est donc :

$$3x + 2y - 8 = 0.$$

Seconde méthode : $\vec{n}(-2; 3)$ est un vecteur directeur de d' , donc $a = 3$ et $b = 2$;

une équation de d' s'écrit $3x + 2y + c = 0$.

$A(0; 4)$ appartient à d' , donc $0 + 2 \times 4 + c = 0$; on trouve $c = -8$.

Une équation de d' est donc $3x + 2y - 8 = 0$.

3. Les équations réduites des droites d

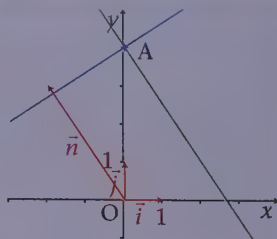
et d' sont respectivement $y = \frac{2}{3}x + 4$ et $y = -\frac{3}{2}x + 4$.

CONSEIL

Vous avez le choix entre deux méthodes.

■ Soit $M(x; y)$ un point du plan. Le point M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

■ Sachant que la droite a pour vecteur directeur $\vec{v}(-b; a)$, une équation de la droite s'écrit $ax + by + c = 0$.



Exercice 10

1. $B(4; -1)$, $C(2; 5)$; le vecteur $\overrightarrow{BC}(-2; 6)$ est un vecteur normal à d , donc une équation de d s'écrit $-2x + 6y + c = 0$.

$A(-2; 1)$ appartient à d , donc $(-2) \times (-2) + 6 \times 1 + c = 0$; on trouve $c = -10$.

Une équation de d est donc $-2x + 6y - 10 = 0$ ou encore $-x + 3y - 5 = 0$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{BC}(-2; 6)$ est un vecteur directeur de (BC) ; on prend $a = 6$ et $b = 2$.

Une équation de (BC) s'écrit $6x + 2y + c = 0$.

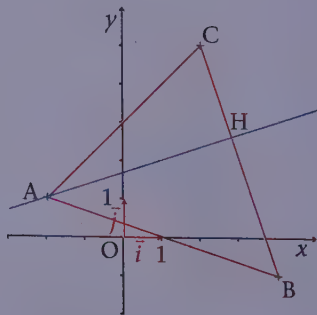
$C(2; 5)$ appartient à (BC) , donc $6 \times 2 + 2 \times 5 + c = 0$; on trouve $c = -22$.

Une équation de (BC) est

$$\text{donc } 6x + 2y - 22 = 0$$

$$\text{ou encore } 3x + y - 11 = 0.$$

3. Les coordonnées de H satisfont les équations des droites d et (BC) .



On résout le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} -x + 3y - 5 = 0 \\ 3x + y - 11 = 0 \end{cases}$$

On utilise la méthode par substitution ; on calcule y dans la deuxième ligne : $y = -3x + 11$; on reporte cette valeur dans la première ligne et on résout l'équation d'inconnue x obtenue :

$$-x + 3(-3x + 11) - 5 = 0$$

$$-10x + 28 = 0, \text{ d'où } x = 2,8.$$

On en déduit la valeur de y :

$$y = -3 \times 2,8 + 11 = 2,6.$$

Les coordonnées de H sont (2,8 ; 2,6). (On peut vérifier sur le dessin.)

4. La droite (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

$$\text{L'aire } S \text{ du triangle ABC est } S = \frac{AH \times BC}{2}.$$

$$\overline{AH}(4,8 ; 1,6), \text{ donc } AH = \sqrt{4,8^2 + 1,6^2} = \sqrt{25,6}.$$

$$\overline{BC}(-2 ; 6), \text{ donc } BC = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40}.$$

$$S = \frac{\sqrt{25,6} \times \sqrt{40}}{2} = \frac{\sqrt{25,6 \times 40}}{2} = 16.$$

Si l'unité de longueur est le cm, l'aire du triangle ABC est 16 cm².

Exercice 11

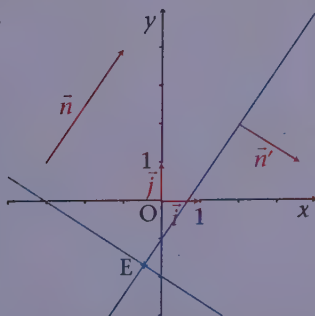
1. La droite d a pour équation $2x + 3y + 6 = 0$, donc $\vec{n}(2 ; 3)$ est un vecteur normal à la droite d .

La droite d' a pour équation $1,5x - y - 1 = 0$, donc $\vec{n}'(1,5 ; -1)$ est un vecteur normal à la droite d' .

RAPPEL

Si une droite d a pour équation $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\vec{n}(a ; b)$ est un vecteur normal à la droite d .

2.



CONSEIL

Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires, il suffit de démontrer que les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

On applique la propriété : « Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx' + yy' = 0$. »

$$\vec{n}(2 ; 3) \text{ et } \vec{n}'(1,5 ; -1).$$

$$\text{On a } 2 \times 1,5 + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0.$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux et les droites d et d' sont perpendiculaires.

3. Les coordonnées de E satisfont les équations des droites d et d' .

On résout le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6 = 0 \\ 1,5x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

On utilise la méthode par combinaison.

On multiplie la deuxième ligne par 3 et on additionne les deux lignes pour éliminer y :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6 = 0 \\ 4,5x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

On en déduit $6,5x + 3 = 0$, d'où $x = \frac{-3}{6,5} = -\frac{6}{13}$.

On multiplie la première ligne par 3 et la deuxième ligne par -4 et on additionne les deux lignes pour éliminer x :

$$\begin{cases} 6x + 9y + 18 = 0 \\ -6x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

On en déduit $13y + 22 = 0$, d'où $y = \frac{-22}{13}$.

Après vérification :

$$2 \times \left(\frac{-6}{13} \right) + 3 \times \left(\frac{-22}{13} \right) + 6 = -\frac{12}{13} - \frac{66}{13} + 6 = -\frac{78}{13} + 6 = 0 ;$$

$$1,5 \times \left(\frac{-6}{13} \right) - \left(\frac{-22}{13} \right) - 1 = -\frac{9}{13} + \frac{22}{13} - 1 = \frac{13}{13} - 1 = 0.$$

Les coordonnées de E sont $\left(\frac{-6}{13} ; \frac{-22}{13} \right)$.

Exercice 12

1. $A(2 ; -3)$ et $B(6 ; 1)$, donc :

$$AB = \sqrt{(6-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}.$$

On applique la formule $(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 32$.

Après développement, une équation du cercle de centre A passant par B est :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 19 = 0.$$

2. $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 32$.

Après développement, une équation du cercle de centre B passant par A est $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 5 = 0$.

RAPPEL

Une équation du cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon R s'écrit :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Exercice 13

1. Soit d la médiatrice de $[EF]$.

$E(3 ; 1)$, $F(0 ; 4)$; le vecteur $\overrightarrow{EF}(-3 ; 3)$ est un vecteur normal de d .

RAPPEL

Si une droite a pour vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$, une équation de la droite s'écrit $ax + by + c = 0$.

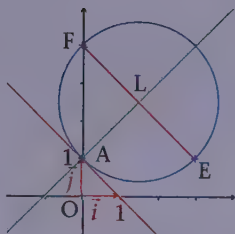
Donc une équation de d s'écrit $-3x + 3y + c = 0$.
Le point $L(1,5 ; 2,5)$, milieu de $[EF]$, appartient à d ,
donc $(-3) \times 1,5 + 3 \times 2,5 + c = 0$; on trouve $c = -3$.
Une équation de d est donc $-3x + 3y - 3 = 0$,
ou encore $-x + y - 1 = 0$, soit $y = x + 1$.

2. Première méthode : Soit $M(x ; y)$ un point du plan. On a $\overline{ME}(3 - x ; 1 - y)$ et $\overline{MF}(-x ; 4 - y)$.

M appartient au cercle C de diamètre $[EF]$ si, et seulement si, $\overline{ME} \cdot \overline{MF} = 0$, ce qui équivaut à $(x_E - x)(x_F - x) + (y_E - y)(y_F - y) = 0$.

On a donc $(3 - x)(-x) + (1 - y)(4 - y) = 0$.

Après développement, une équation du cercle C est $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 4 = 0$.



À NOTER

Le cercle de diamètre $[EF]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overline{ME} \cdot \overline{MF} = 0$.

Seconde méthode : Le cercle de diamètre $[EF]$ a pour centre le milieu L de $[EF]$ et pour rayon $\frac{EF}{2}$.

$EF = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18}$; le rayon du cercle est $R = \frac{\sqrt{18}}{2}$.

Une équation de C est alors $(x - 1,5)^2 + (y - 2,5)^2 = 4,5$.

Après développement, on retrouve le résultat précédent.

3. Les coordonnées de $A(0 ; 1)$ satisfont l'équation du cercle ($1 - 5 + 4 = 0$); donc A appartient au cercle C .

On remarque que le point A appartient aussi à la médiatrice de $[EF]$.

La tangente en A au cercle est la perpendiculaire d' au rayon $[LA]$ passant par A ; c'est aussi la perpendiculaire à la médiatrice de $[EF]$ passant par A .

À la question 1., on a donné une équation de cette droite d : $-x + y - 1 = 0$.

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(1 ; 1)$; ce vecteur est un vecteur normal de la tangente d' ; donc une équation de d' s'écrit $x + y + c = 0$.

Le point $A(0 ; 1)$ appartient à d' , donc $1 + c = 0$; on trouve $c = -1$.

Une équation de d' est donc $x + y - 1 = 0$ ou encore $y = -x + 1$.

Exercice 14

1. On cherche le centre et le rayon du cercle C d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$.

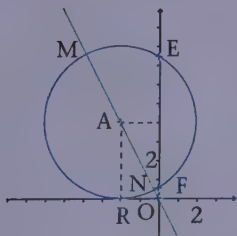
On utilise la forme canonique des trinômes du second degré :

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4 \text{ et } y^2 - 8y = (y - 4)^2 - 16.$$

L'équation du cercle peut s'écrire :

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 4)^2 - 16 + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$$



On reconnaît l'équation du cercle de centre $A(-2; 4)$ et de rayon 4.

2. On cherche les points du cercle ayant pour abscisse 0 ; on résout donc l'équation $y^2 - 8y + 4 = 0$.

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 48 ; y_1 = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{2} = 4 - 2\sqrt{3} \text{ et } y_2 = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Le cercle coupe l'axe des ordonnées en deux points : $E(0; 4 + 2\sqrt{3})$ et $F(0; 4 - 2\sqrt{3})$.

3. On cherche les points du cercle ayant pour ordonnée 0 ; on résout donc l'équation $x^2 + 4x + 4 = 0$, soit encore $(x + 2)^2 = 0$.

Cette équation a une seule solution : -2 .

Le cercle coupe l'axe des abscisses en un seul point : $R(-2; 0)$.

4. $A(-2; 4)$; donc une équation de la droite (OA) est $y = -2x$.

On résout le système :

$$\begin{cases} y = -2x \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0 \end{cases}$$

En reportant la valeur de y dans la deuxième ligne, on obtient :

$$x^2 + (2x)^2 + 4x + 8(2x) + 4 = 0, \text{ soit } 5x^2 + 20x + 4 = 0.$$

$$\Delta = 320 ; x_1 = \frac{-20 - 8\sqrt{5}}{10} = -2 - \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ et } x_2 = \frac{-20 + 8\sqrt{5}}{10} = -2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Le cercle coupe la droite (OA) aux points :

$$M\left(-2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}; 4 + \frac{8\sqrt{5}}{5}\right) \text{ et } N\left(-2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}; 4 - \frac{8\sqrt{5}}{5}\right).$$

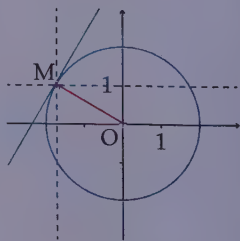
Exercice 15

1. Une équation du cercle C de centre O et de rayon 2 est $x^2 + y^2 = 4$.

2. Soit M le point du cercle tel qu'une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est $\frac{5\pi}{6}$.

Les coordonnées de M sont $x_M = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$

$$\text{et } y_M = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1.$$



La tangente T en M au cercle C est la droite passant par M et ayant pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{OM}(-\sqrt{3}; 1)$.

Une équation de T s'écrit $-\sqrt{3}x + y + c = 0$;

$M(-\sqrt{3} ; 1)$ appartient à T , donc $-\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + 1 + c = 0$, d'où $c = -4$.

Une équation de T est $-\sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

Exercice 16

1. On recherche l'équation du cercle C de centre $\Omega(1 ; 3)$ et de rayon $\sqrt{10}$: on applique la formule $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$.

Après développement, une équation de C est $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$.

Les coordonnées de $O(0 ; 0)$ satisfont l'équation, donc O appartient à C .

2. La tangente T en O au cercle C est la droite passant par O et ayant pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{O\Omega}(1 ; 3)$.

Une équation de T s'écrit $x + 3y + c = 0$.

O appartient à T , donc $c = 0$.

Une équation de T est $x + 3y = 0$.

RAPPEL

Une équation du cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon R s'écrit :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Exercice 17

On utilise la forme canonique des trinômes du second degré :

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y + 10 = 0 \text{ équivaut à } (x + 4)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 + 10 = 0.$$

$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 7$: on reconnaît l'équation du cercle de centre $(-4 ; -1)$ et de rayon $\sqrt{7}$.

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 7 = 0 \text{ équivaut à } (x + 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 + 7 = 0.$$

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = -5$: il n'existe pas de couple de nombres réels vérifiant cette équation, donc cette équation n'est pas une équation de cercle.

$$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \text{ équivaut à } x^2 + (y - 4)^2 - 16 - 9 = 0.$$

$x^2 + (y - 4)^2 = 25$: on reconnaît l'équation du cercle de centre $(0 ; 4)$ et de rayon 5.

Exercice 18

1. Soit $M(x ; y)$ un point quelconque du plan.

On calcule, en fonction de x et y , le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$:

on a $\overrightarrow{MA}(7 - x ; -y)$ et $\overrightarrow{MB}(1 - x ; 3 - y)$;

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (7 - x)(1 - x) + (-y)(3 - y) ;$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 + y^2 - 8x - 3y + 7.$$

2. L'ensemble E des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Il a pour équation $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$.

Son centre est le milieu de $[AB]$ de coordonnées $(4 ; 1,5)$.

Pour calculer le rayon, on peut utiliser la forme canonique des trinômes :

$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$ équivaut à $(x - 4)^2 - 16 + (y - 1,5)^2 - 2,25 + 7 = 0$.

$(x - 4)^2 + (y - 1,5)^2 = 11,25$.

Donc E est le cercle de centre $(4 ; 1,5)$ et de rayon $\sqrt{11,25}$.

Exercice 19

1. Démonstration du théorème de la médiane :

« Soit A et B deux points et I le milieu de $[AB]$; pour tout point M du plan, on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$. »

On sait que $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2$.

On décompose les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ à l'aide du point I en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2 \times \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2 \times \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$$

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2 \times \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$$

Or I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$.

On en déduit $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$.

2. Ce théorème permet de calculer la longueur d'une médiane lorsque l'on connaît les longueurs des trois côtés d'un triangle.

Le triangle ABC est tel que $AB = 6$, $BC = 10$ et $AC = 5$.

On applique le théorème de la médiane en remplaçant le point M par le point C :

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2} AB^2 ;$$

$$\text{donc } 2CI^2 = CA^2 + CB^2 - \frac{1}{2} AB^2 ;$$

$$2CI^2 = 25 + 100 - 18 = 107, \text{ soit } CI = \sqrt{53,5} \approx 7,3.$$

3. On sait que pour tout point M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$.

L'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 26$ est donc l'en-

semble des points M du plan tels que $2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2 = 26$, ce qui équivaut

à $2MI^2 + 18 = 26$, puis à $MI^2 = 4$.

L'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 26$ est le cercle de centre I et de rayon 2.

Exercice 20

1. Pour calculer BC, on applique la formule d'Al-Kashi.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$BC^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 45 - 36 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BC = \sqrt{45 - 18\sqrt{2}} = 3\sqrt{5 - 2\sqrt{2}},$$

soit environ **4,42**.

2. D'après la formule d'Al-Kashi :

$$\cos(\hat{A}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\text{On en déduit } \cos(\hat{B}) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{ et } \cos(\hat{C}) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{6^2 + (45 - 18\sqrt{2}) - 3^2}{2 \times 6 \times \sqrt{45 - 18\sqrt{2}}} = \frac{72 - 18\sqrt{2}}{36\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}$$

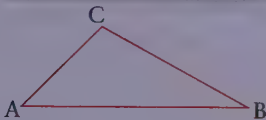
$$\cos(\hat{B}) = \frac{4 - \sqrt{2}}{2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}} \approx 0,877, \text{ d'où } \widehat{ABC} \approx 28,7^\circ.$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{(45 - 18\sqrt{2}) + 3^2 - 6^2}{2 \times \sqrt{45 - 18\sqrt{2}} \times 3} = \frac{18 - 18\sqrt{2}}{18\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}$$

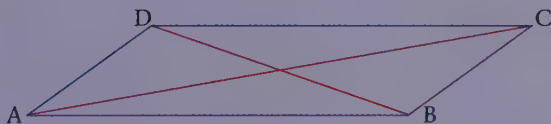
$$\cos(\hat{C}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}} \approx -0,281, \text{ d'où } \widehat{ACB} \approx 106,3^\circ.$$

RAPPEL

Si on pose $BC = a$,
 $CA = b$ et $AB = c$, alors
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$.



Exercice 21



ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Pour calculer AC, on peut utiliser la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}), \text{ d'où } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 40 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

$$\text{On a } 40 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2);$$

$$40 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}(AC^2 - 116), \text{ donc } AC^2 = 80 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 116;$$

d'où $AC \approx 13,44$.

Pour calculer BD, on applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABD.

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) ;$$

$$BD^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \times 10 \times 4 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 116 - 80 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) ;$$

d'où $BD \approx 7,16$.

Exercice 22

Soit ABCD tel que $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm, $BD = 4$ cm, $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\overline{BC}, \overline{BD}) = -\frac{\pi}{4}$.

Pour calculer l'aire de ABCD, on commence par calculer l'aire S du triangle ABC, en utilisant la formule qui fait le lien entre les côtés, l'aire et les angles du triangle.

$$S = \frac{1}{2} bc \sin(\hat{A})$$

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{ donc } S = 5\sqrt{3}.$$

On calcule BC dans le triangle ABC avec la formule d'Al-Kashi :

$$BC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 41 - 40 \times \frac{1}{2} = 21 ;$$

$$\text{donc } BC = \sqrt{21}.$$

On calcule l'aire S' du triangle BCD :

$$S' = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{21} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{21} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{42}, \text{ donc } S' = \sqrt{42}.$$

Finalement l'aire du quadrilatère ABCD est :

$$S + S' = 5\sqrt{3} + \sqrt{42}, \text{ soit environ } 15,14 \text{ cm}^2.$$

Exercice 23

1. A et B sont deux points tels que $AB = 10$ cm et I est le milieu de [AB].

Pour déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 68$, on utilise la formule de la médiane :

$$\text{pour tout point M du plan, } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2.$$

On cherche l'ensemble E des points M du plan tels que $2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2 = 68$.
 $AB = 10$, donc $2MI^2 = 18$, d'où $MI^2 = 9$.

Donc E est le cercle de centre I et de rayon 3.

2. D'après la question 1., on peut écrire $MI^2 = \frac{k-50}{2}$:

- si $k > 50$, E_k est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k-50}{2}}$;
- si $k = 50$, E_k est réduit au point I ;
- si $k < 50$, E_k est l'ensemble vide.

Exercice 24

1. Pour démontrer que $MA^2 - MB^2 = 2 \times \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$, on utilise les règles de calcul du produit scalaire : $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$.

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}$, d'après la relation de Chasles, et, comme I est le milieu de [AB], $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2 \cdot \overrightarrow{MI}$.

D'où $MA^2 - MB^2 = 2 \times \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$, ce qui équivaut à :

$$MA^2 - MB^2 = 2 \times \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2. Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB), on veut démontrer que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Comme H est le projeté orthogonal de M sur (AB), les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux et leur produit scalaire est nul.

On a donc bien $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$.

3. D'après les questions précédentes, l'ensemble F des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 24$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$, le point H étant le projeté orthogonal de M sur (AB).

L'égalité $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ signifie que l'ensemble F cherché est la droite passant par H et perpendiculaire à (AB).

Le produit scalaire $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$ est positif et le point H est sur la droite (AB), donc les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens.

Comme $AB = 10$, on en déduit $IH = 1,2$. Cela permet de tracer l'ensemble F.

Exercice 25

$$1. \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right);$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2},$$

$$\text{donc } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}, \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$2. \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}. \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right);$$

CONSEIL

Mémorisez correctement les formules d'addition : on utilise ces formules pour résoudre l'exercice.

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ donc } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right);$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ donc } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Exercice 26

On sait que $\cos(a) = 0,8$ et $\cos(b) = 0,2$ et que a et b appartiennent à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin(a)$ et $\sin(b)$ sont positifs.

On sait que, pour tout réel t , $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$.

$(\sin(a))^2 = 1 - 0,8^2 = 0,36$; donc $\sin(a) = 0,6$; $(\sin(b))^2 = 1 - 0,2^2 = 0,96$; donc $\sin(b) = 0,4\sqrt{6}$.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a+b) = 0,8 \times 0,2 - 0,6 \times 0,4\sqrt{6}$$

$$\text{donc } \cos(a+b) = 0,16 - 0,24\sqrt{6}, \text{ soit environ } -0,43.$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = 0,16 + 0,24\sqrt{6}, \text{ soit environ } 0,75.$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = 0,6 \times 0,2 + 0,8 \times 0,4\sqrt{6}$$

$$\sin(a+b) = 0,12 + 0,32\sqrt{6}, \text{ soit environ } 0,90.$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = 0,12 - 0,32\sqrt{6}, \text{ soit environ } -0,66.$$

Exercice 27

$$\text{On pose } A = \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Pour simplifier l'écriture de A , on utilise la formule :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

$$\begin{aligned} A &= \sin(x) + \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &\quad + \sin(x)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0,5;$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0,5 ;$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$A = \sin(x) - 0,5 \sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) - 0,5 \sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x).$$

Donc, pour tout nombre réel x , $\sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

Exercice 28

On sait que $\sin(a) = 0,9$ et $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,
donc $\cos(a) > 0$.

On sait que, pour tout réel t ,
 $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$.

$$(\cos(a))^2 = 1 - 0,9^2 = 0,19, \text{ donc } \cos(a) = \sqrt{0,19}.$$

$$\cos(2a) = (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2 = 0,19 - 0,81,$$

$$\text{donc } \cos(2a) = -0,62.$$

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a) = 2 \times 0,9 \times \sqrt{0,19},$$

$$\text{donc } \sin(2a) \approx 0,78.$$

CONSEIL

On applique les formules de duplication : quel que soit le nombre réel a , $\cos(2a) = (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2$ et $\sin(2a) = 2\sin(a) \cos(a)$.

Exercice 29

On sait que $\cos(a) = \frac{1}{3}$, donc

$$\text{donc } \cos(2a) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{2}{9} - 1,$$

$$\cos(2a) = \frac{-7}{9}.$$

Pour calculer $\sin(2a)$, on a le choix entre deux méthodes.

Première méthode : On sait que, pour tout réel t , $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$.

$$(\sin(2a))^2 = 1 - (\cos(2a))^2 = 1 - \left(\frac{-7}{9}\right)^2 = 1 - \frac{49}{81} = \frac{32}{81}.$$

On sait que $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $2a \in [0; \pi]$; on en déduit que $\sin(2a) > 0$.

$$\text{D'où } \sin(2a) = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

CONSEIL

Pour calculer $\cos(2a)$ sans calculer $\sin(a)$, on peut appliquer la formule de duplication : quel que soit le nombre réel a , $\cos(2a) = 2(\cos(a))^2 - 1$.

Seconde méthode : On commence par calculer $\sin(a)$ et on applique la formule $\sin(2a) = 2\sin(a) \cos(a)$.

$$(\sin(a))^2 = 1 - (\cos(a))^2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9};$$

$$\sin(a) > 0, \text{ donc } \sin(a) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a) = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3}, \text{ donc } \sin(2a) = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Exercice 30

On pose $a = \frac{\pi}{8}$, d'où $2a = \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(a) > 0$ et $\sin(a) > 0$.

On peut appliquer directement les formules :

$$(\cos(a))^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a)) \text{ et } (\sin(a))^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a));$$

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right), \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\text{donc } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \text{ soit environ } 0,92.$$

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right), \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\text{donc } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \text{ soit environ } 0,38.$$

Exercice 31

1. On applique la formule d'addition $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

$$\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$$

On applique les formules de duplication :

$$\cos(2a) = (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2 \text{ et } \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

$$\cos(3x) = ((\cos(x))^2 - (\sin(x))^2)\cos(x) - (2\sin(x)\cos(x))\sin(x)$$

$$\cos(3x) = (\cos(x))^3 - 3(\sin(x))^2\cos(x)$$

$$\cos(3x) = (\cos(x))^3 - 3(1 - (\cos(x))^2)\cos(x)$$

$$\text{d'où } \cos(3x) = 4(\cos(x))^3 - 3\cos(x).$$

2. On applique la formule d'addition $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

$$\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)$$

On applique les formules de duplication :

$$\cos(2a) = (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2 \text{ et } \sin(2a) = 2\sin(a) \cos(a).$$

$$\sin(3x) = (2 \sin(x) \cos(x)) \cos(x) + ((\cos(x))^2 - (\sin(x))^2) \sin(x)$$

$$\sin(3x) = 3 \sin(x) (\cos(x))^2 - (\sin(x))^3$$

$$\sin(3x) = 3 \sin(x) (1 - (\sin(x))^2) - (\sin(x))^3$$

$$\text{d'où } \sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 (\sin(x))^3.$$

Exercice 32

1. Pour calculer $\cos(4x)$, on a le choix entre deux méthodes.

Première méthode : On reprend les résultats de l'exercice précédent en écrivant $\cos(4x) = \cos(3x + x)$ et en utilisant la formule d'addition.

Seconde méthode : On applique la formule de duplication :

$$\cos(2a) = (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2, \text{ en posant } a = 2x.$$

$$\text{Avec cette seconde méthode, on a } \cos(4x) = 2(\cos(2x))^2 - 1.$$

$$\text{On applique ensuite la formule } \cos(2a) = 2(\cos(a))^2 - 1 :$$

$$\cos(4x) = 2[2(\cos(x))^2 - 1]^2 - 1.$$

$$\text{On développe : } \cos(4x) = 2(4(\cos(x))^4 - 4(\cos(x))^2 + 1) - 1 ;$$

$$\text{d'où } \cos(4x) = 8(\cos(x))^4 - 8(\cos(x))^2 + 1.$$

2. On applique la formule de duplication $\sin(2a) = 2\sin(a) \cos(a)$, en posant $a = 2x$: $\sin(4x) = 2 \sin(2x) \cos(2x)$.

$$\text{On applique la formule } \cos(2a) = 1 - 2(\sin(a))^2 ;$$

$$\sin(4x) = 4 \sin(x) \cos(x) (1 - 2(\sin(x))^2) ;$$

$$\text{d'où } \sin(4x) = -8(\sin(x))^3 \cos(x) + 4 \sin(x) \cos(x).$$

Exercice 33

1. Le triangle ABC est tel que $AB = 4 \text{ cm}$, $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{4}$ et $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{3}{4}$.

Dans un triangle, la somme des angles vaut 180° ou encore π radians.

On peut donc écrire $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$, d'où $\hat{C} = \pi - (\hat{A} + \hat{B})$.

On sait que, pour tout réel t , $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$.

On en déduit $\cos(\hat{C}) = -\cos(\hat{A} + \hat{B})$ et $\sin(\hat{C}) = \sin(\hat{A} + \hat{B})$.

On calcule d'abord $\sin(\hat{A})$ et $\sin(\hat{B})$.

(Les angles d'un triangle appartenant à $[0 ; \pi]$, $\sin(\hat{A})$ et $\sin(\hat{B})$ sont positifs.)

$$(\sin(\hat{A}))^2 = 1 - (\cos(\hat{A}))^2 = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} ; \text{ d'où } \sin(\hat{A}) = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$(\sin(\hat{B}))^2 = 1 - (\cos(\hat{B}))^2 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} ; \text{ d'où } \sin(\hat{B}) = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

On applique les formules d'addition : quels que soient les nombres réels a et b , $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

$$\cos(\hat{C}) = -\cos(\hat{A})\cos(\hat{B}) + \sin(\hat{A})\sin(\hat{B}).$$

$$\cos(\hat{C}) = -\frac{-1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{\sqrt{7}}{4}, \text{ d'où } \cos(\hat{C}) = \frac{3 + \sqrt{105}}{16}, \text{ soit environ } 0,83.$$

$$\sin(\hat{C}) = \sin(\hat{A})\cos(\hat{B}) + \cos(\hat{A})\sin(\hat{B}).$$

$$\sin(\hat{C}) = \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{-1}{4} \times \frac{\sqrt{7}}{4}, \text{ d'où } \sin(\hat{C}) = \frac{3\sqrt{15} - \sqrt{7}}{16}, \text{ soit environ } 0,56.$$

2. Pour calculer l'aire S du triangle ABC, on applique la formule $S = \frac{1}{2} bc \sin(\hat{A})$, dans laquelle $b = AC$ et $c = AB$.

Pour calculer b , on applique la formule des sinus : $\frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$.

$$\text{On a } b = \frac{c \times \sin(\hat{B})}{\sin(\hat{C})}; \quad b = \frac{4 \times \frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3\sqrt{15} - \sqrt{7}}{16}}; \quad b = \frac{16\sqrt{7}}{3\sqrt{15} - \sqrt{7}}.$$

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{16\sqrt{7}}{3\sqrt{15} - \sqrt{7}} \times 4 \times \frac{\sqrt{15}}{4}; \quad S = \frac{8\sqrt{7}\sqrt{15}}{3\sqrt{15} - \sqrt{7}};$$

$$S = \frac{(8\sqrt{7}\sqrt{15})(3\sqrt{15} + \sqrt{7})}{(3\sqrt{15} - \sqrt{7})(3\sqrt{15} + \sqrt{7})}; \quad S = \frac{8(45\sqrt{7} + 7\sqrt{15})}{128}, \text{ soit environ } 9,14 \text{ cm}^2.$$

Exercice 34

1. ABC est triangle isocèle de côtés $BC = 2x$, $AB = AC = 3x$, avec $x > 0$.
A' est le milieu de [BC] et H l'orthocentre du triangle ABC.

Soit t une mesure de l'angle BAC.

Pour calculer $\cos(t)$, on utilise la formule d'Al-Kashi.

Si on pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$, alors $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$.

$$\text{On en déduit } \cos(t) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos(t) = \frac{(3x)^2 + (3x)^2 - (2x)^2}{2(3x)(3x)}; \quad \cos(t) = \frac{14x^2}{18x^2}; \quad \text{d'où } \cos(t) = \frac{7}{9}.$$

2. Soit K le projeté de B sur la droite (AC).

Pour calculer $\overrightarrow{KA}$, on calcule de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

D'une part, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AC \times AK$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3x \times AK$;

d'autre part, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(t)$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (3x)^2 \times \frac{7}{9}$.

On en déduit $3x \times AK = (3x)^2 \times \frac{7}{9}$, d'où $AK = \frac{7}{3}x$.

Comme K appartient au segment [AC], $KC = AC - AK = 3x - \frac{7}{3}x$, d'où $KC = \frac{2}{3}x$.

Par conséquent, $\frac{KA}{KC} = \frac{\frac{7}{3}x}{\frac{2}{3}x}$; $\frac{KA}{KC} = 3,5$.

Exercice 35

1. Graphiquement, $M(-0,6; 4,96)$ et $N(4,6; -1,96)$.

2. Équation de C_1 : $x^2 + y^2 = 25$;

équation de C_2 : $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$;

après développement, on trouve $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.

Il s'agit de résoudre le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 25 - 8x - 6y = 0 \end{cases}$.

On calcule y dans la deuxième ligne: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{6}$; on reporte dans la première ligne:

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{25}{6}\right)^2 = 25$$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{100}{9}x + \frac{625}{36} = 25$$

$$\frac{25}{9}x^2 - \frac{100}{9}x - \frac{275}{36} = 0$$

$$100x^2 - 400x - 275 = 0$$

$$4x^2 - 16x - 11 = 0$$

Les solutions exactes de cette équation données par un logiciel de calcul

formel sont $x_1 = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions approchées sont $x_1 \approx -0,598$ et $x_2 \approx 4,598$.

(On retrouve bien les abscisses lues graphiquement.)

3. Le vecteur $\overrightarrow{OA}(4; 3)$ est un vecteur normal à la droite (MN).

Une équation cartésienne de (MN) peut donc s'écrire $4x + 3y + c = 0$.

La droite (MN) passe par le point $H(2; 1,5)$, milieu de [OA].

On a $4 \times 2 + 3 \times 1,5 + c = 0$; d'où $c = -12,5$.

Une équation cartésienne de (MN) est donc $4x + 3y - 12,5 = 0$;

l'équation réduite s'écrit $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{6}$.

4. On résout le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 4x + 3y - 12,5 = 0 \end{cases}$.

En multipliant la deuxième ligne par -2 , on retrouve le système résolu dans la question 2.

Exercice 36

Soit un cercle C de centre O et de rayon r .

1. A et B sont deux points du cercle C et E est le point diamétralement opposé à A ; donc le triangle ABE est rectangle en B . Le point B est donc le projeté orthogonal de E sur la droite (MA) . D'après la propriété « produit scalaire et projection », on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

2. On veut démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OM}^2 - r^2$.

Le point O est le milieu de $[AE]$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OE})$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2.$$

Comme $OA = r$, on en déduit, d'après la question 1., $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OM}^2 - r^2$.

3. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ s'exprime en fonction de la longueur OM et du rayon du cercle. Le calcul de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend donc pas des points A et B ; le nombre $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est indépendant de la droite D passant par M et sécante au cercle C .

4. On étudie le signe de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ selon la position du point M dans le plan. $\overrightarrow{OM}^2 - r^2 = (OM + r)(OM - r)$.

Il suffit de comparer OM avec le rayon du cercle :

- si M est à l'intérieur du cercle, $OM < r$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} < 0$;
- si M est sur le cercle, $OM = r$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;
- si M est à l'extérieur du cercle, $OM > r$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} > 0$.

Exercice 37

1. a. $(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{O_2M}) \cdot (\overrightarrow{O_1M})^2 - (\overrightarrow{O_2M})^2 = \overrightarrow{O_1M}^2 - \overrightarrow{O_2M}^2 = \overrightarrow{O_1M}^2 - \overrightarrow{O_2M}^2$.

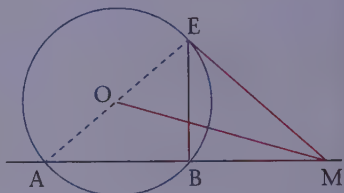
b. $(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{O_2M}) \cdot (\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) = (\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{O_2M}) \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$
 $(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{O_2M}) \cdot (\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) = \overrightarrow{O_1M} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M} \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$

Comme J est le projeté orthogonal de M sur (O_1O_2) , on a :

$$(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{O_2M}) \cdot (\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) = \overrightarrow{O_1J} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{O_2J} \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{O_2M}) \cdot (\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) = \overrightarrow{O_1J} \times \overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{O_2J} \times \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$(\overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{O_2M}) \cdot (\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) = \overrightarrow{O_1O_2} (\overrightarrow{O_1J} - \overrightarrow{O_2J})$$



c. En prenant comme point M le point P, on a :

$$O_1 O_2 (O_1 J - O_2 J) = (\overrightarrow{O_1 P} + \overrightarrow{O_2 P}) \cdot (\overrightarrow{O_1 P} - \overrightarrow{O_2 P}) = O_1 P^2 - O_2 P^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

2. a. Les triangles $O_1 I H_1$ et $O_2 I H_2$ étant rectangles en H_1 et H_2 , on a :

$$H_1 I^2 = O_1 I^2 - O_1 H_1^2 = O_1 I^2 - R_1^2 \quad \text{et} \quad H_2 I^2 = O_2 I^2 - O_2 H_2^2 = O_2 I^2 - R_2^2.$$

En prenant comme point M le point I, on a :

$$O_1 O_2 (O_1 J - O_2 J) = (\overrightarrow{O_1 I} + \overrightarrow{O_2 I}) \cdot (\overrightarrow{O_1 I} - \overrightarrow{O_2 I}) = O_1 I^2 - O_2 I^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

$$\text{Donc } H_1 I^2 - H_2 I^2 = O_1 I^2 - R_1^2 - O_2 I^2 + R_2^2 = O_1 I^2 - O_2 I^2 + R_2^2 - R_1^2 \\ = R_1^2 - R_2^2 + R_2^2 - R_1^2 = 0.$$

b. On a $H_1 I^2 - H_2 I^2 = 0$, donc $H_1 I^2 = H_2 I^2$; d'où $H_1 I = H_2 I$, ce qui montre bien que **I est le milieu du segment $[H_1 H_2]$.**

Exercice 38

1. a. Il suffit de donner l'équation de la droite (PQ). Elle est de la forme $y = ax + b$. Comme B est sur (PQ), on a $b = y_B = 4$. Comme D est sur (PQ), on a $y_D = ax_D + 4$. On a donc $0 = 4a + 4$, d'où $a = -1$ et $y = -x + 4$.

b. Les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$ sont :

$$(x_A - x ; y_A - y) = (-x ; 6 - (-x + 4)) = (-x ; x + 2).$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{MC}$ sont :

$$(x_C - x ; y_C - y) = (-x ; -(-x + 4)) = (-x ; x - 4).$$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (-x) \times (-x) + (x + 2)(x - 4) \\ = x^2 + x^2 - 4x + 2x - 8 = 2x^2 - 2x - 8.$$

2. a. Le triangle APC est rectangle en P car $[AC]$ est le diamètre du cercle circonscrit à APC. On a donc $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$. Le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ est donc nul si M est confondu avec P. Il en est de même si M est confondu avec Q.

b. On résout l'équation $2x^2 - 2x - 8 = 0$. C'est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-8) = 4 + 64 = 68$.

Le discriminant est positif, donc l'équation considérée a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{68}}{2 \times 2} = \frac{2 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{L'abscisse de P est donc } x_p = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{et celle de Q est } x_q = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{c. On a } y_p = -x_p + 4 = -\frac{1 - \sqrt{17}}{2} + 4 = \frac{7 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{et } y_q = -x_q + 4 = -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} + 4 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{On a donc } PQ = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} \\ = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2} - \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7 - \sqrt{17}}{2} - \frac{7 + \sqrt{17}}{2}\right)^2}.$$

$$PQ = \sqrt{17+17} = \sqrt{34}.$$

d. $\sqrt{34} \approx 5,83$, donc c'est Kévin le plus proche.

Exercice 39

D'après le théorème de la médiane, on a :

$$AC^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AB^2 = 2CP^2; AB^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AC^2 = 2BK^2 \text{ et } AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 = 2AJ^2.$$

Comme on sait que toutes les médianes mesurent 1 cm, on peut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2 \\ AB^2 - \frac{1}{2}AC^2 + BC^2 = 2 \\ AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -AB^2 + 2AC^2 + 2BC^2 = 4 \\ AB^2 - \frac{1}{2}AC^2 + BC^2 = 2 \\ AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -AB^2 + 2AC^2 + 2BC^2 = 4 \\ \frac{3}{2}AC^2 + 3BC^2 = 6 \\ 3AC^2 + \frac{3}{2}BC^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -AB^2 + 2AC^2 + 2BC^2 = 4 \\ 3AC^2 + 6BC^2 = 12 \\ 3AC^2 + \frac{3}{2}BC^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -AB^2 + 2AC^2 + 2BC^2 = 4 \\ 3AC^2 + 6BC^2 = 12 \\ \frac{9}{2}BC^2 = 6 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve $AB^2 = AC^2 = BC^2 = \frac{4}{3}$.

Le triangle ABC est donc bien équilatéral et ses côtés mesurent $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm.

Exercice 40

$$1. \text{ a. } AB^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AC^2 + 2OB^2. \quad \text{ b. } CD^2 + AD^2 = \frac{1}{2}AC^2 + 2OD^2.$$

$$\begin{aligned} 2. AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 &= \frac{1}{2}AC^2 + 2OB^2 + \frac{1}{2}AC^2 + 2OD^2 \\ &= AC^2 + 4OB^2 = AC^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \\ &= AC^2 + 4 \times \frac{1}{4}BD^2 = AC^2 + BD^2 \end{aligned}$$

La somme des carrés des quatre côtés d'un parallélogramme est donc bien égale à la somme des carrés de ses diagonales.

1 Moyenne, variance et écart-type

a. Moyenne

- On considère une population de N individus ; on étudie sur cette population un caractère quantitatif discret X , appelé aussi variable statistique.
- Le tableau suivant donne les valeurs x_i de X , distinctes et rangées par ordre croissant, les effectifs n_i associés à chacune de ces valeurs et les fréquences f_i correspondantes.

Valeurs de X	x_1	x_2	...	x_p	Total
Effectifs	n_1	n_2	...	n_p	N
Fréquences	f_1	f_2	...	f_p	1

- La fréquence f_i de la valeur x_i du caractère est $f_i = \frac{n_i}{N}$.
- La moyenne de cette série statistique, notée $\bar{x}$, est définie par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N}$$

Ou encore avec les fréquences : $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_p x_p$.

b. Variance et écart-type

- La variance, notée V , de la série statistique est le nombre positif défini par :

$$V = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{N}$$

Ou encore avec les fréquences :

$$V = f_1 (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_p (x_p - \bar{x})^2$$

- L'écart-type, noté s , est la racine carrée de la variance : $s = \sqrt{V}$.

L'écart-type est un nombre réel positif : il mesure la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne.

À NOTER

La variance est aussi donnée par la formule :

$$V = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_p x_p^2}{N} - \bar{x}^2$$

c. Notation Σ

■ La lettre grecque Σ (on lit « sigma ») permet d'écrire des sommes de manière symbolique.

$N = \sum_{i=1}^p n_i$ se lit « somme de $i = 1$ à p de n_i » et signifie $N = n_1 + n_1 + \dots + n_p$.

Avec cette notation : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i$; $V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2$.

2 Médiane et écart interquartile

a. Médiane

■ On range les valeurs de la série statistique par ordre croissant.

La **médiane** M_e est la valeur qui partage la population étudiée en deux groupes de même effectif.

b. Quartiles

■ Le **premier quartile** Q_1 de la série est la plus petite valeur telle qu'au moins 25 % des données lui sont inférieures ou égales.

■ Le **troisième quartile** Q_3 de la série est la plus petite valeur telle qu'au moins 75 % des données lui sont inférieures ou égales.

■ L'intervalle **interquartile** est l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$. (Il contient 50 % des valeurs de la série statistique.)

■ L'écart **interquartile** est le nombre $Q_3 - Q_1$. Il mesure la dispersion de la série autour de la médiane.

c. Déciles

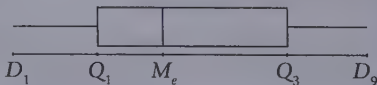
■ Le **premier décile** D_1 de la série est la plus petite valeur telle qu'au moins 10 % des données lui sont inférieures ou égales.

■ Le **neuvième décile** D_9 de la série est la plus petite valeur telle qu'au moins 90 % des données lui sont inférieures ou égales.

d. Diagramme en boîte

■ Le diagramme en boîte d'une série est un graphique permettant de résumer une série statistique par ses valeurs extrêmes, sa médiane, le premier quartile et le troisième quartile.

■ Sur un axe, on place les valeurs extrêmes du caractère (ou les déciles), puis la médiane et les quartiles. On construit, parallèlement à cet axe, un rectangle ayant pour longueur l'écart interquartile.



1 Calculer une moyenne et un écart-type

Énoncé

On considère la série statistique donnée dans le tableau suivant.

Valeurs	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	5	7	20	16	12	10	8	6	1

Pour calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série, on a utilisé un tableau.

	A	B	C	D	E	F
1	Effectifs n_i	Valeurs x_i	$n_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
2	5	2	10	-3,42	11,72	58,6
3	7	3	21	-2,42	5,87	41,11
4	20	4	80	-1,42	2,03	40,53
5	16	5	80	-0,42	0,18	2,87
6	12	6	72	0,58	0,33	3,99
7	10	7	70	1,58	2,49	24,85
8	8	8	64	2,58	6,64	53,11
9	6	9	54	3,58	12,79	76,75
10	1	10	10	4,58	20,94	20,94
11	85		461			322,75
12		moyenne	5,42		variance	3,8
13					écart-type	1,95

Justifier les résultats obtenus en commentant les formules écrites dans les cellules A11, C11, C12, D2, F2, F12 et F13.

Solution commentée

Savoir-faire

■ Pour justifier les résultats exprimés par le tableur, on cherche à les rapprocher de formules connues.

■ Pour calculer la moyenne, on applique la formule $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i$.

- Pour calculer la variance, on applique la formule :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}$$

- L'écart-type est la racine carrée de la variance.

Dans la cellule A11, on a écrit la formule : =SOMME(A2:A10) ;
l'effectif total est 85.

En C11 : =SOMME(C2:C10)

En C12 : =C11/A11

On trouve en C12 le résultat du calcul $\bar{x} = \frac{2 \times 5 + 7 \times 3 + \dots + 6 \times 9 + 1 \times 10}{85}$.

La moyenne est $\bar{x} \approx 5,42$.

En D2 : =B2-\$C\$12

En F2 : =A2*E2

En F12 : =F11/A11

En F13 : =RACINE(F12)

On trouve en F12 et F13 les valeurs de la variance et de l'écart-type : $V \approx 3,8$
et $s \approx 1,95$.

2 Construire un diagramme en boîte

Énoncé

Construire le diagramme en boîte de la série statistique suivante.

Valeurs	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	5	7	20	16	12	10	8	6	1

Solution commentée

Savoir-faire

- Pour construire un diagramme en boîte, on commence par déterminer la médiane et les quartiles.
- Puis, sur un axe gradué, on inscrit le minimum, la médiane, les quartiles et le maximum de la série statistique.
- On construit, parallèlement à cet axe, un rectangle ayant pour longueur l'écart interquartile.

La médiane M_e est une valeur qui partage la population étudiée en deux groupes de même effectif.

L'effectif total 85 est impair ; on prend pour médiane la 43^e valeur.

Or il y a 32 valeurs inférieures ou égales à 4 et 48 inférieures ou égales à 5 ; donc $M_e = 5$.

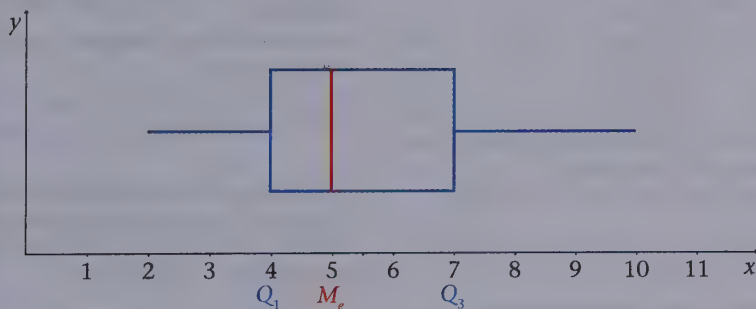
Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur telle qu'au moins 25 % des données lui sont inférieures ou égales.

$85 \times 25 \% = 21,25$; donc Q_1 est la 21^e valeur : $Q_1 = 4$.

Le troisième quartile Q_3 de la série est la plus petite valeur telle qu'au moins 75 % des données lui sont inférieures ou égales.

$85 \times 75 \% = 63,75$; donc Q_3 est la 64^e valeur : $Q_3 = 7$.

Sur un axe gradué, on a placé les valeurs extrêmes du caractère, la médiane et les quartiles et on a construit, parallèlement à cet axe, un rectangle ayant pour longueur l'écart interquartile.



Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

① Sachant que la moyenne de la série est 2 :

Valeurs x_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs n_i	9	9	13	9	6	n

☐ a. $n = 0$. ☐ b. $n = 1$. ☐ c. $n = 2$.

② Le tableau donne la répartition d'un groupe de stagiaires en formation selon leur âge.

Âge	Effectifs
[20 ; 25[	12
[25 ; 30[	19
[30 ; 35[	16
[35 ; 40[	8
[40 ; 45[	5

Le pourcentage de stagiaires âgés de moins de 35 ans est :

☐ a. 27 %. ☐ b. 78 %. ☐ c. 48 %.

③ On reprend les données de la question précédente.

L'âge moyen d'un stagiaire est :

☐ a. inférieur à 30 ans.
☐ b. environ 32 ans.
☐ c. environ 30,4 ans.

④ On a regroupé les individus d'une population par classes dont les centres sont 23 ; 29 ; 35 ; 41 ; 47 ; 53 ; 59 ; 65. L'amplitude des classes est :

☐ a. 6. ☐ b. 3. ☐ c. 12.

⑤ La médiane de la série {16, 11, 10, 14, 10, 6, 4, 9, 11, 12, 14, 14, 9, 13, 6, 12, 10} est :

☐ a. 9. ☐ b. 10. ☐ c. 11.

⑥ On reprend la série de la question 5. L'écart interquartile est :

☐ a. 4. ☐ b. 12. ☐ c. 8.

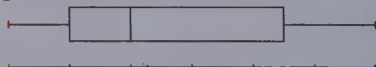
⑦ Dans une entreprise, le salaire moyen est de 1 660 € ; celui des hommes est de 1 700 € et celui des femmes de 1 600 €. Le pourcentage de femmes dans cette entreprise est de :

☐ a. 50 %.
☐ b. 33,3 %.
☐ c. 40 %.

⑧ Un professeur multiplie toutes les notes d'un devoir par le coefficient 1,1 :

☐ a. la moyenne et la médiane augmentent de 1 point.
☐ b. l'écart-type ne change pas.
☐ c. l'écart-type augmente de 10 %.

⑨ On donne le diagramme en boîte d'une série statistique prenant des valeurs entre 20 et 50. Le pas de la graduation sur l'axe est de 5.



La médiane de cette série vaut :

☐ a. 50.
☐ b. 50 %.
☐ c. 30.

⑩ On reprend le diagramme en boîte de la question précédente.

☐ a. L'écart interquartile est égal à 17,5.
☐ b. $[Q_1 ; Q_3]$ contient 3,5 fois plus de données que $[Q_1 ; M_e]$.
☐ c. Il y a plus de données à l'intérieur de $[Q_1 ; Q_3]$ qu'à l'extérieur de cet intervalle.

Exercices

Moyenne et écart-type

Exercice 1

niveau 1

Corrigés p. 301

On donne la distribution des notes d'un devoir de mathématiques dans une classe de 1^{re} S.

Notes	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	19
Effectifs	1	2	3	4	2	5	3	4	2	2	1	1	2	1

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$, puis donner l'écart-type s de cette série statistique à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice.

2. Donner la moyenne et l'écart-type de la série obtenue en retirant d'abord la meilleure note, puis à la fois la meilleure note et les trois notes les plus basses. Comparer avec les résultats obtenus à la question 1.

Exercice 2

niveau 1

Corrigés p. 302

Un organisateur de voyages a prévu les tarifs suivants pour un week-end, selon 7 destinations en Italie.

Ville	Florence	Milan	Naples	Rome	Sienne	Venise	Vérone
Tarif, en euros	290	284	391	290	342	312	342

1. Calculer le tarif moyen d'un week-end.

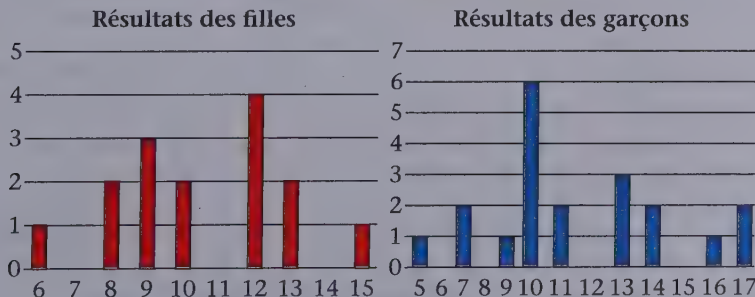
2. Calculer l'écart-type de cette série.

Exercice 3

niveau 1

Corrigés p. 302

Un professeur communique à une classe les résultats d'un devoir en distribuant les deux diagrammes en bâtons suivants.



1. Calculer la moyenne m_1 et l'écart-type s_1 des filles ; puis la moyenne m_2 et l'écart-type s_2 des garçons.
2. En déduire la moyenne m de la classe.
3. Calculer l'écart-type de l'ensemble des notes de la classe.

Exercice 4 niveau 1

Corrigés p. 303

Le tableau suivant donne l'âge des employés d'une entreprise.

Classes	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60]
Effectifs	17	29	32	12

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique. Interpréter les résultats obtenus.
2. Représenter cette série statistique par un histogramme.

Exercice 5 niveau 2

Corrigés p. 304

On rappelle que la variance V d'une série statistique prenant les valeurs x_i avec les effectifs n_i , i variant de 1 à p , N étant l'effectif total, est le nombre positif défini par :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}$$

Démontrer la formule $V = \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_px_p^2}{N} - \bar{x}^2$.

Médiane. Quartiles

Exercice 6 niveau 1

Corrigés p. 304

On considère les deux séries suivantes.

Valeurs	17	24	31	38	45	52	59	67	74
Effectifs	2	5	6	8	9	14	9	4	3

Valeurs	17	24	31	38	45	52	59	67	74
Effectifs	4	7	10	9	8	6	6	5	5

1. Déterminer dans chaque cas la médiane, les quartiles et l'écart interquartile.
2. Construire les diagrammes en boîtes correspondants.

Exercice 7

niveau 2

Corrigés p. 305

Le tableau suivant donne la répartition des salaires annuels (en milliers d'euros) des employés d'une entreprise.

Salaires	Effectifs	Fréquences	Fréquences cumulées croissantes
[12 ; 13,5[	9		
[13,5 ; 15[	12		
[15 ; 20[	41		
[20 ; 25[	27		
[25 ; 35[	18		
[35 ; 50[	13		
Total	120		

1. Compléter le tableau.
2. Représenter sur un graphique les points qui ont pour abscisses l'extrémité droite d'une classe et pour ordonnées la fréquence cumulée croissante de celle-ci. Relier le point de coordonnées (12 ; 0) et les points obtenus par des segments.
La courbe ainsi obtenue s'appelle le polygone des fréquences cumulées croissantes.
3. Déterminer, à l'aide du graphique, la médiane dans cette entreprise. Interpréter ce résultat.
4. Caractériser l'appartenance de la médiane à l'intervalle de salaires lu graphiquement par une équation. En déduire la valeur exacte de la médiane.
5. Déterminer le premier et le troisième quartiles. En déduire l'écart interquartile.

Problèmes**Exercice 8**

niveau 2

Corrigés p. 306

Une entreprise fabrique un fromage qui doit contenir 45 % de matières grasses. On donne les résultats de l'analyse d'un échantillon de 100 boîtes de ce fromage. x_i désigne le taux de matières grasses constaté et n_i le nombre de fromages.

x_i	42,5	43	43,5	44	44,5	45	45,5	46	46,5	47	47,5
n_i	3	4	7	11	19	24	14	8	5	3	2

1. a. Calculer la moyenne m et l'écart-type s de cet échantillon avec une calculatrice.
- b. Un critère de qualité exige qu'au moins 75 % de l'effectif de cet échantillon appartienne à l'intervalle $[m - 2s ; m + 2s]$. Ce critère est-il satisfait ?
2. a. Renseigner un tableau avec les fréquences cumulées croissantes.
- b. En déduire la médiane M_e , le premier quartile et le troisième quartile de cet échantillon.
- c. Commenter les résultats obtenus.
- d. Représenter le diagramme en boîte de cet échantillon.

Exercice 9

niveau 2

Corrigés p. 307

Le tableau suivant donne la distribution des fréquences de la rémunération mensuelle des employés d'une entreprise.

Salaire mensuel (en euros)	Fréquences f_i
1 200 à 1 300	0,04
1 300 à 1 400	0,20
1 400 à 1 500	0,24
1 500 à 1 700	0,26
1 700 à 2 000	0,20
2 000 à 2 500	0,06
Total	1

1. Calculer le salaire mensuel moyen des employés.
2. Calculer le salaire médian des employés.
3. Étudier l'incidence sur le salaire mensuel moyen et sur le salaire médian :
 - a. d'une majoration de 60 euros de tous les salaires recensés dans le tableau.
 - b. d'une multiplication de tous ces salaires par le coefficient 1,04 (c'est-à-dire d'une augmentation de 4 %).

Exercice 10

niveau 2

Corrigés p. 308

1 000 élèves de lycées différents ont mesuré la densité du lait par la méthode du flacon. Les résultats, arrondis au dixième, ont été regroupés dans le tableau suivant.

Densité	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9	9,1
Effectifs	4	20	43	100	200	250	190	113	50	19	6	5

1. a. À l'aide d'une calculatrice, calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type s de cette série.
- b. Quel est le pourcentage de résultats qui se trouvent dans l'intervalle $[\bar{x} - s ; \bar{x} + s]$? dans l'intervalle $[\bar{x} - 2s ; \bar{x} + 2s]$?
2. a. Calculer la médiane M_e , les quartiles Q_1 et Q_3 , les déciles D_1 et D_9 .
- b. Quel est le pourcentage de résultats qui se trouvent dans l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$? dans l'intervalle $[D_1 ; D_9]$?
- c. Construire le diagramme en boîte de cette série.

Exercice 11

niveau 2

Corrigés p. 309

Le tableau suivant donne l'âge des salariés d'une entreprise.

Âge	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 60[
Effectifs	21	12	18	15	24	18	12

1. Dresser un tableau donnant les centres des classes, les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.
2. Déterminer l'âge médian des salariés de cette entreprise à partir de la lecture graphique du polygone des fréquences cumulées croissantes (voir l'exercice 9) ou par interpolation linéaire. Déterminer le premier et le troisième quartiles.
3. Donner à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur les valeurs de la moyenne et de l'écart-type de cette série statistique.

En utilisant le polygone des fréquences cumulées croissantes de la question 2., déterminer graphiquement le pourcentage des salariés dont l'âge est compris dans l'intervalle $[\bar{x} - s ; \bar{x} + s]$.

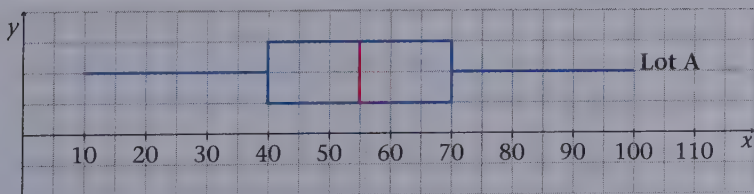
Exercice 12

niveau 2

Corrigés p. 310

(Bac L, Liban, 2011) Un jardinier a deux lots de bulbes de tulipes A et B. Il a posé un à un tous les bulbes.

1. On donne le diagramme en boîte qui résume les résultats des masses en grammes des bulbes du lot A.



- a. À partir de ce diagramme, donner les valeurs des premier et troisième quartiles, de la médiane et des extremums.
- b. Estimer le pourcentage des bulbes dont la masse est supérieure ou égale à 40 g.
- c. Donner l'intervalle interquartile et donner une interprétation de ce résultat.

2. Pour le lot B, voici le tableau des effectifs.

Masse, en g	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Nombre de bulbes	10	14	22	25	18	12	8	6	5

- a. Déterminer la masse moyenne au gramme près des bulbes du lot B.
- b. Déterminer la médiane, les premier et troisième quartiles du lot B.
- c. Construire le diagramme en boîte du lot B.
- d. Lequel des deux lots semble le mieux calibré ? Justifier la réponse.
- e. Quel est le pourcentage de bulbes dont la masse est strictement comprise entre 25 et 55 g ? Arrondir le résultat à 1 % près.

Exercice 13

niveau 2

Corrigés p. 311

(Bac L, France, 2011) Les tableaux ci-dessous donnent le nombre de naissances (en milliers) par an en France métropolitaine entre 1901 et 1920.

Année	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908
Nombre de naissances en milliers	917,1	904,4	884,5	877,1	856,6	864,7	829,6	849,0

Année	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916
Nombre de naissances en milliers	814,7	828,1	793,5	801,6	795,9	757,9	483	384,7

Année	1917	1918	1919	1920
Nombre de naissances en milliers	412,7	472,8	507,0	838,1

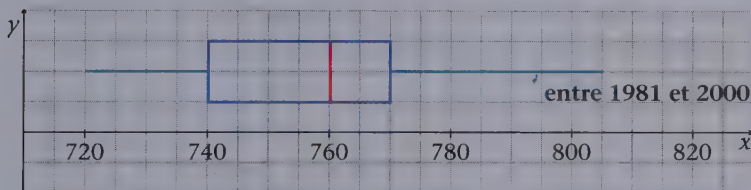
1. a. Donner le nombre moyen de naissances par an en France métropolitaine entre 1901 et 1920.

Arrondir la réponse à la centaine.

b. Donner la médiane, les premier et troisième quartiles de cette série statistique.

c. Construire le diagramme en boîte de cette série statistique. Les « moustaches » du diagramme représenteront les valeurs extrêmes de la série.

2. Sur le diagramme en boîte ci-dessous, on a représenté la série statistique du nombre annuel de naissances (en milliers) entre 1981 et 2000.



a. Lire et donner la médiane, les premier et troisième quartiles de cette série statistique.

b. Déterminer l'étendue de cette série.

3. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Justifier la réponse.

a. Entre 1981 et 2000, le nombre annuel de naissances est supérieur à 760 000 pendant plus de 16 ans.

b. L'étendue du nombre annuel de naissances est plus de 5 fois plus élevée entre 1901 et 1920 qu'entre 1981 et 2000.

4. Quel contexte historique pourrait justifier la différence d'étendue entre les deux séries ?

Exercice 14

niveau 2

Corrigés p. 312

Le tableau de la page suivante donne le montant de la taxe d'ordures ménagères dans les communes de plus de 8 000 habitants, en Normandie.

Résumer cette série statistique par les couples (moyenne ; écart-type) et (médiane ; écart interquartile).

Taxes d'ordures ménagères en 2011

Départements	Communes	Montant, en euros
Calvados	Bayeux	199
	Caen	159
	Falaise	151
	Hérouville-Saint-Clair	153
	Honfleur	184
	Ifs	187
	Lisieux	143
	Mondeville	138
	Ouistreham	147
	Vire	102
Manche	Avranches	103
	Cherbourg-Octeville	169
	Coutances	106
	Équeurdreville-Hainneville	184
	Granville	147
	Saint-Lô	120
	Tourlaville	192
Orne	Alençon	114
	Argentan	117
	Flers	113
	L'Aigle	146

Exercice 15

niveau 3

 Corrigés p. 312

Une variable statistique prend les valeurs 2, 3 et 7.

1. Calculer la moyenne et la médiane de cette série.
2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{(x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-7)^2}{3}.$$

Déterminer le nombre x qui minimise f .

Préciser la valeur de f pour la valeur de x trouvée.

3. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{|x-2| + |x-3| + |x-7|}{3}.$$

Simplifier l'écriture de $g(x)$ sur chacun des intervalles $[0 ; 2]$, $[2 ; 3]$, $[3 ; 7]$ et $[7 ; 10]$.

Tracer la représentation graphique de g .

En déduire le nombre x qui minimise g .

4. Les résultats observés sur cet exemple se généralisent.

Énoncer la propriété.

Exercice 16

niveau 3

Corrigés p. 314

1. Vérifier que les triangles T_1 , T_2 , T_3 et T_4 , dont les côtés mesurent respectivement (3 cm, 4 cm, 5 cm), (8 cm, 15 cm, 17 cm), (20 cm, 21 cm, 29 cm) et (11 cm, 60 cm, 61 cm), sont bien des triangles rectangles.

2. Déterminer les côtés du triangle moyen de cette série statistique, c'est-à-dire le triangle dont les côtés sont les moyennes des côtés de T_1 , T_2 , T_3 et T_4 (pris dans l'ordre donné). Que remarque-t-on ?

Exercice 17

niveau 3

Corrigés p. 314

1. Construire une série statistique d'effectif 7 et de moyenne nulle.

2. Construire une série statistique d'effectif 7 et d'écart-type nul.

3. Construire une série statistique d'effectif 9 dont la moyenne est supérieure au troisième quartile.

4. Construire une série statistique d'effectif 9 dont la moyenne est le double de la médiane.

Exercice 18

niveau 3

Corrigés p. 314

Voici la liste des communes de « Nantes métropole » et leurs populations respectives.

St-Léger-les-Vignes	1 406
Brains	2 523
Mauves-sur-Loire	2 931
St-Aignan-de-Grand-Lieu	3 480
Indre	3 761
Le Pellerin	4 214

St-Jean-de-Boiseau	4 716
Bouaye	5 672
La Montagne	5 999
Sautron	6 806
Les Sorinières	7 259
Thouaré-sur-Loire	7 406

Basse-Goulaine	7 927
Ste-Luce-sur-Loire	11 665
Bouguenais	16 698
La Chapelle-sur-Erdre	16 816
Carquefou	17 956
Couëron	18 392

Vertou	21 199
Orvault	24 562
St-Sébastien-sur-Loire	24 724
Rezé	37 846
St-Herblain	43 516
Nantes	283 025

1. Calculer la moyenne, l'écart-type, la médiane et l'écart interquartile de cette série.
2. Même question que précédemment en retirant les deux plus grandes et les deux plus petites valeurs de cette série.
3. Quel couple de paramètres est le plus sensible aux valeurs extrêmes : (moyenne ; écart-type) ou (médiane ; écart interquartile) ?

Exercice 19

niveau 3

Corrigés p. 314

Voici la répartition des salaires dans une entreprise.

Classe	Centre de la classe	Effectif
[1 000 ; 1 200[	1 100	120
[1 200 ; 1 400[	1 300	125
[1 400 ; 1 700[	1 550	105
[1 700 ; 2 000[	1 850	70
[2 000 ; 2 500[	2 250	52
[2 500 ; 3 000[	2 750	31
[3 000 ; 5 000[	4 000	12
[5 000 ; 10 000[	7 500	3
[10 000 ; 30 000]	20 000	1

1. Déterminer la moyenne, l'écart-type, le premier quartile, la médiane, le troisième quartile et l'écart interquartile de cette série statistique.
2. Un syndicat de cette entreprise souhaite mettre en évidence une répartition inégale des salaires. Quel couple de paramètres doit-il choisir : (moyenne ; écart-type) ou (médiane ; écart interquartile) ?

QCM

1 c. $\bar{x} = \frac{9 \times 0 + 9 \times 1 + 13 \times 2 + 9 \times 3 + 6 \times 4 + 5n}{9 + 9 + 13 + 9 + 6 + n}$; $2(46 + n) = 86 + 5n$;
 $3n = 6$; $n = 2$.

2 b. $12 + 19 + 16 = 47$; $\frac{47}{60} \approx 0,78$, soit environ 78 %.

3 c. $\bar{x} = \frac{12 \times 22,5 + 19 \times 27,5 + \dots + 5 \times 42,5}{60}$, soit environ 30,4 ans.

4 a. L'amplitude des classes est 6 ; en effet, la première classe est [20 ; 26[, la deuxième [26 ; 32[, etc.

5 b. La médiane est 10.

6 a. L'écart interquartile est 4 ; en effet, le premier quartile est 9, le troisième quartile est 13 ; $13 - 9 = 4$.

ATTENTION

N'oubliez pas de ranger les données par ordre croissant.

7 c. Le pourcentage de femmes est de 40 %.

$1\,600x + 1\,700(1 - x) = 1\,660$; $-100x = -40$; $x = 0,4$.

8 c. La moyenne, la médiane et l'écart-type sont multipliés par 1,1, ce qui correspond à une augmentation de 10 %.

9 c. La médiane est 30 ; il ne faut pas confondre avec le pourcentage des valeurs inférieures ou égales à la médiane.

10 a. $Q_1 = 25$; $Q_3 = 42,5$; $Q_3 - Q_1 = 17,5$.

$[Q_1 ; Q_3]$ contient 50 % des données et $[Q_1 ; M_e]$ 25 % des données, donc $[Q_1 ; Q_3]$ contient deux fois plus de données que $[Q_1 ; M_e]$. Il y a 50 % des données à l'extérieur de $[Q_1 ; Q_3]$.

Exercice 1

1. N est l'effectif total ; n_i est l'effectif correspondant à la note x_i ; l'indice i varie de 1 à $p = 14$, car il y a 14 notes différentes.

$N = \sum_{i=1}^p n_i$ ou encore $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

Donc $N = 1 + 2 + 3 + \dots + 14$; $N = 33$.

$\bar{x} = \frac{1}{33}(1 \times 4 + 2 \times 5 + \dots + 1 \times 19) \approx 9,97$.

L'écart-type donnée par la calculatrice est $s \approx 3,76$.

La moyenne et l'écart-type valent donc respectivement 9,97 et 3,76.

2. On retire la note 19. Il reste 32 élèves.

La nouvelle moyenne est $\bar{x} \approx 9,69$. L'écart-type est $s_1 \approx 3,45$.

Voici la distribution des notes après avoir retiré les notes 4, 5 et 19 :

ATTENTION

Il ne faut pas confondre les notations sur les calculatrices. L'écart-type est noté σn sur Casio et σx sur Texas Instrument.

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17
Effectifs	3	4	2	5	3	4	2	2	1	1	2

L'effectif total est de 30.

La moyenne est $\bar{x} \approx 10,2$. L'écart-type est $s_2 \approx 3,19$.

On observe que la moyenne baisse de 0,3 point lorsqu'on retire la meilleure note ; puis augmente de 0,5 point lorsqu'on retire en plus les trois notes les plus basses. La moyenne est donc sensible aux valeurs extrêmes de la série.

En retirant les 4 notes extrêmes, l'écart-type est passé de 3,76 à 3,19 ; il a diminué de presque 0,6 point. Il montre bien que la **dispersion autour de la moyenne est plus faible lorsqu'on retire les valeurs extrêmes**.

Exercice 2

1. La moyenne de cette série est :

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(290 + 284 + 391 + 290 + 342 + 213 + 342) \approx 321,57.$$

Donc le **tarif moyen d'un week-end est de 321,57 €**.

2. La valeur de l'écart-type donné par la calculatrice est $s \approx 36,16$.

Exercice 3

1. À partir des diagrammes en bâtons, on a renseigné sur un tableur les deux tableaux suivants.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i(x_i - m)^2$
6	1	6	20,52
8	2	16	12,8
9	3	27	7,02
10	2	20	0,56
12	4	48	8,64
13	2	26	12,2
15	1	15	19,98
Somme	15	158	81,73
Moyenne		10,53	5,45
Écart-type			2,33

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i(x_i - m)^2$
5	1	5	40,32
7	2	14	37,85
9	1	9	5,52
10	6	60	10,94
11	2	22	0,25
13	3	39	8,17
14	2	28	14,05
16	1	16	21,62
17	2	34	63,85
Somme	20	227	202,55
Moyenne		11,35	10,13
Écart-type			3,18

Pour le groupe des 15 filles :

– la moyenne est $m_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^p n_i x_i = \frac{158}{15}$, soit $m_1 \approx 10,53$;

– la variance est $V_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{81,73}{15}$, soit $V_1 \approx 5,45$;

– l'écart-type est $s_1 = \sqrt{V_1}$, soit $s_1 \approx 2,33$.

Pour le groupe des 20 garçons :

– la moyenne est $m_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^p n_i x_i = \frac{227}{20}$, soit $m_2 \approx 11,35$;

– la variance est $V_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{202,55}{20}$, soit $V_2 \approx 10,13$;

– l'écart-type est $s_2 = \sqrt{V_2}$, soit $s_2 \approx 3,18$.

2. La moyenne m de la classe s'obtient à partir des moyennes des deux sous-groupes en utilisant la formule $m = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{N_1 + N_2}$:

$$m = \frac{15 \times 10,53 + 20 \times 11,35}{35} ; m \approx 11.$$

La moyenne de la classe est de 11.

3. Pour calculer l'écart-type s de la classe, on peut refaire les calculs dans un tableur comme à la question 1., ou utiliser la calculatrice, après avoir regroupé toutes les notes dans un même tableau.

On obtient $s \approx 2,88$.

Exercice 4

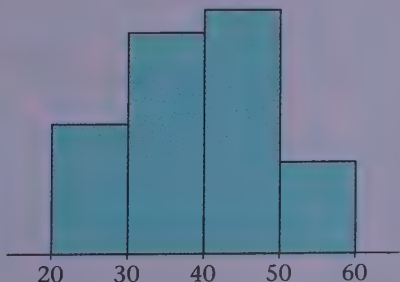
1. On remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série obtenue en gardant les mêmes effectifs. L'effectif total est de 90.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i ; \bar{x} = \frac{1}{90} (17 \times 25 + 29 \times 35 + 32 \times 45 + 12 \times 55) ; \bar{x} \approx 39,33.$$

L'écart-type est $s \approx 9,43$, soit environ 9,4.

On peut donc estimer que l'âge moyen des employés dans cette entreprise est d'environ 39 ans et 4 mois et l'écart-type de 9 ans et 5 mois.

2. Histogramme représentant l'âge des employés d'une entreprise (ci-contre)



Exercice 5

On développe V :

$$V = \frac{n_1(x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2) + n_2(x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2) + \dots + n_p(x_p^2 - 2x_p\bar{x} + \bar{x}^2)}{N}$$

$$V = \frac{n_1x_1^2 - 2n_1x_1\bar{x} + n_1\bar{x}^2 + n_2x_2^2 - 2n_2x_2\bar{x} + n_2\bar{x}^2 + \dots + n_px_p^2 - 2n_px_p\bar{x} + n_p\bar{x}^2}{N}$$

$$V = \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_px_p^2}{N} + \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_p)\bar{x}^2}{N}$$

$$- 2\bar{x} \frac{(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p)}{N}$$

Or $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$ et $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N}$;

donc $V = \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_px_p^2}{N} + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{x}$;

$$V = \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_px_p^2}{N} - \bar{x}^2.$$

Exercice 6

1. Les données sont rangées en ordre croissant. L'effectif total est de 60.

Première série : La médiane est comprise entre la 30^e et la 31^e donnée.

$2 + 5 + 6 + 8 + 9 = 30$ valeurs sont inférieures ou égales à 45, donc 30 valeurs sont supérieures ou égales à 52.

On prend pour médiane la demi-somme de 45 et 52 ; donc $M_e = 48,5$.

La 15^e donnée est 38 ; donc le premier quartile vaut 38.

La 45^e donnée est 59 ; donc le troisième quartile est 59.

L'écart interquartile est $59 - 38 = 21$.

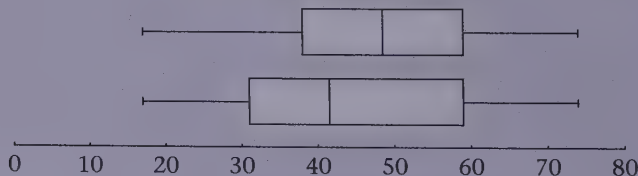
Deuxième série : La médiane vaut 41,5.

Le premier quartile vaut 31 ; le troisième quartile vaut 59.

L'écart interquartile est $59 - 31 = 28$.

2.

Diagrammes en boîtes
représentant les deux séries statistiques

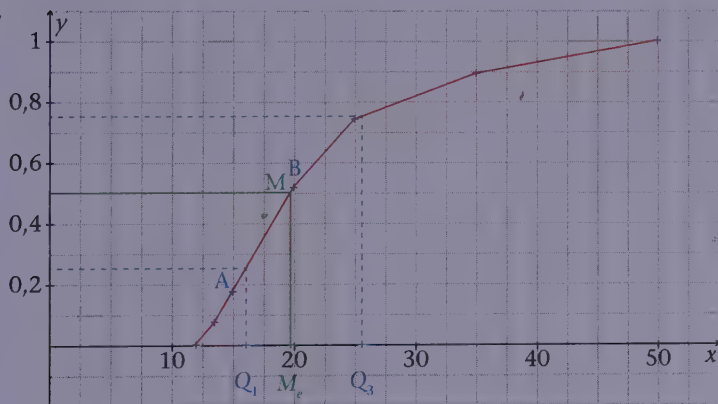


Exercice 7

1.

Salaires	Effectifs	Fréquences	Fréquences cumulées croissantes
[12 ; 13,5[	9	7,5 %	7,5 %
[13,5 ; 15[	12	10 %	17,5 %
[15 ; 20[	41	34,2 %	51,7 %
[20 ; 25[	27	22,5 %	74,2 %
[25 ; 35[	18	15 %	89,2 %
[35 ; 50[	13	10,8 %	100 %
Total	120	100 %	

2.



3. Graphiquement, la médiane vaut environ **19 milliers d'euros**.

Le salaire médian dans cette entreprise est d'environ 19 000 euros, c'est-à-dire que la moitié des salariés ont un salaire annuel inférieur ou égal à 19 000 euros.

4. La médiane M_e appartient à l'intervalle [15 ; 20[.

On considère les points A(15 ; 0,175) et B(20 ; 0,517).

La médiane est l'abscisse x du point M du segment [AB] ayant pour ordonnée 0,5.

Le coefficient directeur de la droite (AB) étant celui de la droite (AM), on peut écrire

$$\text{l'équation } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}.$$

À NOTER

Le raisonnement, qui consiste en la recherche de l'abscisse d'un point M d'un segment [AB] connaissant l'ordonnée de M et les coordonnées de A et B, s'appelle une **interpolation linéaire**.

$$\frac{0,342}{5} = \frac{0,5 - 0,175}{x - 15}$$

$$0,342(x - 15) = 5 \times 0,325$$

$$0,342 x = 1,625 + 5,13$$

$$x = \frac{6,755}{0,342}, \text{ soit } M_e \approx 19,75.$$

5. Le premier quartile vaut environ 16 100 € ; le troisième quartile 25 600 €.

L'écart interquartile est de 9 500 €.

Exercice 8

1. a. Avec une calculatrice, on obtient une moyenne m de 44,87 % de matières grasses et un écart-type s de 1,06 %.

b. L'intervalle $[m - 2s ; m + 2s]$ a pour extrémités :

$$44,87 - 2 \times 1,06 = 42,75 \text{ et } 44,87 + 2 \times 1,06 = 46,99.$$

L'intervalle $[43 ; 46,5]$ est inclus dans l'intervalle $[42,75 ; 46,99]$ et il contient : $4 + 7 + 11 + 19 + 24 + 14 + 8 + 5 = 92$ mesures sur 100, soit 92 % de l'effectif.

C'est beaucoup plus que les 75 % exigés.

2. a.

Taux de matières grasses	Fréquences	Fréquences cumulées croissantes
42,5	0,03	0,03
43	0,04	0,07
43,5	0,07	0,14
44	0,11	0,25
44,5	0,19	0,44
45	0,24	0,68
45,5	0,14	0,82
46	0,08	0,9
46,5	0,05	0,95
47	0,03	0,98
47,5	0,02	1

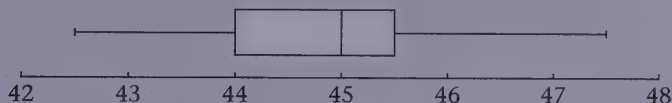
b. D'après la colonne des fréquences cumulées croissantes, 44 % des mesures sont au-dessous de 44,5 et 68 % des mesures sont au-dessous de 45. Donc la médiane, qui partage la population étudiée en deux groupes de même effectif, est 45.

Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur telle que 25 % au moins des données lui sont inférieures ou égales ; donc $Q_1 = 44$.

Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur telle que 75 % au moins des données lui sont inférieures ou égales ; donc $Q_3 = 45,5$.

c. 50 % des fromages contrôlés contiennent entre 44 % et 45,5 % de matières grasses. L'écart interquartile est de 1,5 %. La dispersion autour de la médiane semble assez faible.

d. Voici le diagramme en boîte obtenu avec une calculatrice :



Exercice 9

1. Pour calculer le salaire mensuel moyen des employés, on utilise la formule $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_p x_p$.

Les valeurs x_i sont les centres des classes.

$$\bar{x} = 0,04 \times 1\,250 + 0,2 \times 1\,350 + \dots + 0,06 \times 2\,250$$

Le salaire mensuel moyen est de 1 589 €.

2. Pour calculer le salaire médian des employés, on calcule d'abord les fréquences cumulées croissantes.

Salaire mensuel	Fréquences f_i	Fréquences cumulées croissantes
1 200 à 1 300	0,04	0,04
1 300 à 1 400	0,20	0,24
1 400 à 1 500	0,24	0,48
1 500 à 1 700	0,26	0,74
1 700 à 2 000	0,20	0,94
2 000 à 2 500	0,06	1

D'après ce tableau, la classe médiane est la classe [1 500 ; 1 700[.

Pour estimer la médiane M_e , on peut construire le polygone des fréquences cumulées croissantes ou utiliser la méthode d'interpolation linéaire (voir le corrigé de l'exercice 7).

Par interpolation linéaire :

$$\frac{0,74 - 0,48}{1\,700 - 1\,500} = \frac{0,5 - 0,48}{M_e - 1\,500}$$

$$\frac{0,26}{200} = \frac{0,02}{M_e - 1\,500}$$

$$0,26(M_e - 1\,500) = 0,02 \times 200$$

$$0,26 M_e = 4 + 1\,500 \times 0,26$$

$$M_e = \frac{4}{0,26} + 1500$$

Le salaire médian est donc environ de 1 515 €.

3. a. Avec une majoration de 60 € de tous les salaires recensés dans le tableau, la moyenne et la médiane sont aussi majorés de 60 € et valent alors respectivement 1 649 € et 1 575 €.

b. Avec une multiplication de tous ces salaires par le coefficient 1,04, la moyenne et la médiane sont aussi multipliés par 1,04 et valent alors respectivement 1 653 € et 1 576 €.

Exercice 10

1. a. Avec une calculatrice, les valeurs trouvées pour la moyenne et l'écart-type sont $\bar{x} \approx 8,51$ et $s \approx 0,18$.

b. L'intervalle $[\bar{x} - s ; \bar{x} + s]$ a pour extrémités :

$$8,51 - 0,18 = 8,33 \text{ et } 8,51 + 0,18 = 8,69.$$

L'intervalle $[8,4 ; 8,6]$ est inclus dans l'intervalle $[8,33 ; 8,69]$ et il contient :

$$200 + 250 + 190 = 640 \text{ mesures sur } 1\,000, \text{ soit } 64 \% \text{ des résultats.}$$

L'intervalle $[\bar{x} - 2s ; \bar{x} + 2s]$ a pour extrémités :

$$8,51 - 0,36 = 8,15 \text{ et } 8,51 + 0,36 = 8,87.$$

L'intervalle $[8,2 ; 8,8]$ est inclus dans l'intervalle $[8,15 ; 8,87]$ et il contient :

$$43 + 100 + 640 + 113 + 50 = 946 \text{ mesures sur } 1\,000, \text{ soit } 94,6 \% \text{ des résultats.}$$

2. a. On calcule les effectifs cumulés croissants :

Densité	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9	9,1
Effectifs	4	20	43	100	200	250	190	113	50	19	6	5
Effectifs cumulés croissants	4	24	67	167	367	617	807	920	970	989	995	1000

La moitié des résultats sont inférieurs ou égaux à 8,5 ; donc $M_e = 8,5$.

25 % des résultats sont inférieurs ou égaux à 8,4 ; donc $Q_1 = 8,4$.

75 % des résultats sont inférieurs ou égaux à 8,6 ; donc $Q_3 = 8,6$.

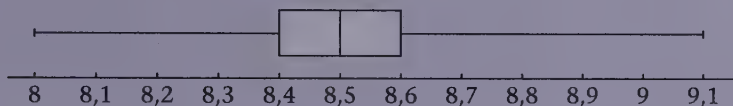
10 % des résultats sont inférieurs ou égaux à 8,3 ; donc $D_1 = 8,3$.

90 % des résultats sont inférieurs ou égaux à 8,7 ; donc $D_9 = 8,7$.

b. L'intervalle interquartile $[Q_1 ; Q_3]$ contient 50 % des résultats ; 50 % des mesures effectuées sont comprises entre 8,4 et 8,6 ; l'écart interquartile est de 0,2.

L'intervalle interdécile $[D_1 ; D_9]$ contient 80 % des résultats ; 80 % des mesures effectuées sont comprises entre 8,3 et 8,7.

c. Le diagramme en boîte montre la faible dispersion des mesures autour de la médiane.



Exercice 11

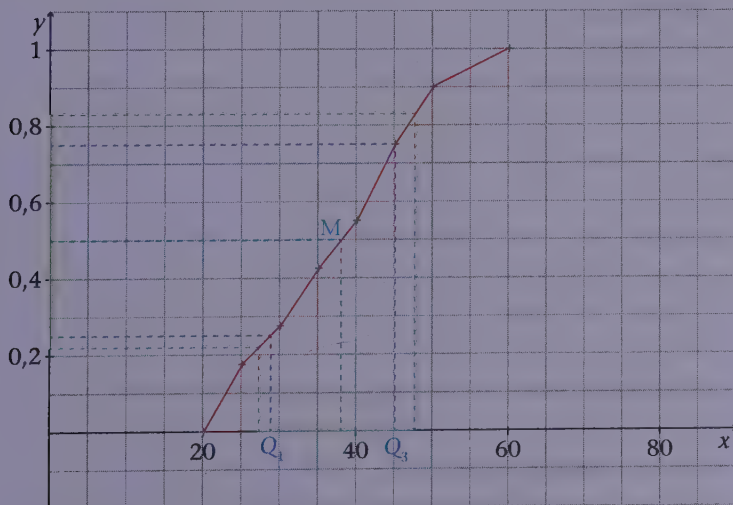
1. L'effectif total N est 120.

RAPPEL

La fréquence de la valeur x_i est donnée par la formule $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Âge	Centre de la classe	Effectifs	Fréquences	Fréquences cumulées croissantes
[20 ; 25[	22,5	21	0,175	0,175
[25 ; 30[	27,5	12	0,1	0,275
[30 ; 35[	32,5	18	0,15	0,425
[35 ; 40[	37,5	15	0,125	0,55
[40 ; 45[	42,5	24	0,2	0,75
[45 ; 50[	47,5	18	0,15	0,9
[50 ; 60[	55	12	0,1	1

2. On relie par des segments les points de coordonnées : (20 ; 0), (25 ; 0,175), (30 ; 0,275), (35 ; 0,425), (40 ; 0,55), (45 ; 0,75), (50 ; 0,9) et (60 ; 1).



Graphiquement, le point M du polygone d'ordonnée 0,5 a pour abscisse environ 38.

On en déduit que l'âge médian des salariés de cette entreprise est de 38 ans.

Par interpolation linéaire, le point M appartient au segment ayant pour extrémités les points de coordonnées (35 ; 0,425) et (40 ; 0,55).

Soit m l'abscisse de M ; m est solution de l'équation :

$$\frac{0,55 - 0,425}{40 - 35} = \frac{0,5 - 0,425}{m - 35}$$

$$0,125(m - 35) = 5 \times 0,075 ; \text{ d'où } m = 35 + \frac{0,375}{0,125}. \text{ On retrouve } m = 38.$$

Par lecture graphique, le point du polygone d'ordonnée 0,25 a pour abscisse 28,75 et le point du polygone d'ordonnée 0,75 a pour abscisse 45. Donc le premier quartile Q_1 vaut 28,75 et le troisième quartile Q_3 vaut 45.

3. Avec une calculatrice, les valeurs de la moyenne et de l'écart-type sont $\bar{x} \approx 37,4$ et $s \approx 10,2$.

$$\bar{x} - s \approx 27,2 \text{ et } \bar{x} + s \approx 47,6.$$

Sur le graphique, on fait correspondre à $]\bar{x} - s ; \bar{x} + s[$ l'intervalle $]0,22 ; 0,83[$ sur l'axe des ordonnées. L'amplitude de cet intervalle est de 0,61.

On en déduit que le pourcentage des salariés de l'entreprise dont l'âge appartient à l'intervalle $]\bar{x} - s ; \bar{x} + s[$ est de 61 %.

Exercice 12

1. Étude du lot A

a. Les valeurs des paramètres lues sur le diagramme en boîte sont :

Minimum	10
Premier quartile	40
Médiane	55
Troisième quartile	70
Maximum	100

b. Le pourcentage des bulbes dont la masse est supérieure ou égale à 40 g est de 75 % ; en effet, le premier quartile Q_1 vaut 40, ce qui signifie que 25 % des bulbes ont une masse inférieure ou égale à Q_1 et 75 % ont une masse supérieure ou égale à Q_1 .

c. L'intervalle interquartile est $[40 ; 70]$, ce qui signifie que 50 % des bulbes du lot A ont une masse comprise entre 40 g et 70 g.

2. Étude du lot B

a. La masse moyenne $\bar{x}$ des bulbes du lot B est :

$$\bar{x} = \frac{10 \times 20 + 14 \times 25 + \dots + 5 \times 60}{120} = \frac{4\,375}{120} \approx 36,46 ;$$

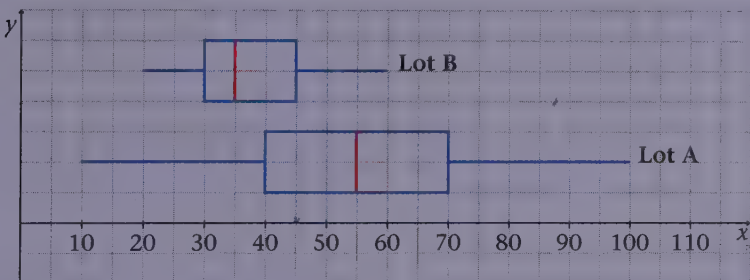
donc, au gramme près, la masse moyenne $\bar{x}$ des bulbes du lot B est 36 g.

b. L'effectif total 120 est pair ; on prend pour médiane la demi-somme des 60^e et 61^e valeurs. Or il y a 46 bulbes ayant une masse inférieure ou égale à 30 g et 71 bulbes ayant une masse inférieure ou égale à 35 g ; la médiane est donc 35.

$120 \times 25\% = 30$; donc Q_1 est la 30^e valeur : $Q_1 = 30$.

$120 \times 75\% = 90$; donc Q_3 est la 90^e valeur : $Q_3 = 45$.

c. Le diagramme en boîte du lot B est disposé au-dessus du diagramme en boîte du lot A.



d. Le lot B semble le mieux calibré ; dans ce lot, la moitié des bulbes ont une masse comprise entre 30 g et 45 g.

e. Le nombre de bulbes ayant une masse strictement comprise entre 25 et 55 g est :

$$22 + 25 + 18 + 12 + 8 = 85.$$

Le pourcentage de bulbes ayant une masse strictement comprise entre 25 et 55 g est :

$$\frac{85}{120} \times 100 \approx 70,83, \text{ soit à } 1\% \text{ près, } 70\%.$$

Exercice 13

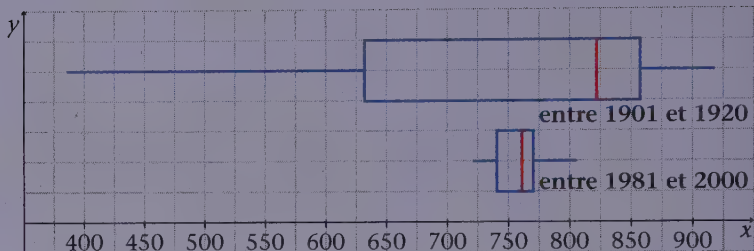
1. a. Le nombre moyen de naissances par an en France métropolitaine entre 1901 et 1920 est **743,6 milliers**.

b. En milliers, la médiane est 821, le premier quartile est 632, le troisième quartile est 860.

c. On a disposé le diagramme en boîte de cette série statistique au-dessus de celui donné pour la période 1981-2000.

À NOTER

Les « moustaches » du diagramme sont les segments horizontaux allant du minimum au premier quartile et du troisième quartile au maximum.



2. a. Entre 1981 et 2000, en milliers, la médiane est 760, le premier quartile est 740, le troisième quartile est 770.

b. Le minimum est 720 et le maximum est 805, donc l'étendue de cette série est 85.

3. a. Faux. Sur 20 années, la médiane étant de 760 000 naissances, le nombre annuel de naissances est supérieur à 760 000 pendant 10 ans.

b. Vrai. L'étendue du nombre annuel de naissances est plus de 5 fois plus élevée entre 1901 et 1920 qu'entre 1981 et 2000. En effet, l'étendue entre 1901 et 1920 est de 532 et elle est de 85 entre 1981 et 2000.

4. La **Première Guerre mondiale**, de 1914 à 1918, peut expliquer la différence d'étendue entre les deux séries.

Exercice 14

On étudie le montant de la taxe d'ordures ménagères dans les communes de France de plus de 8 000 habitants, en Normandie.

Un tableau donne les résultats suivants, en euros :

Moyenne	146,38
Écart-type	31,11
Premier quartile	117
Médiane	147
Troisième quartile	169

Le couple (moyenne ; écart-type) est (146 ; 31) ; on constate que sur les 21 communes concernées, 11 ont une taxe d'ordures ménagères comprise dans l'intervalle $[\bar{x} - s ; \bar{x} + s] = [115 ; 177]$, soit un pourcentage de 52 %.

Le couple (médiane ; écart interquartile) est (147 ; 52) ; 50 % des communes ont une taxe d'ordures ménagères comprise dans l'intervalle $[117 ; 169]$.

Exercice 15

1. La moyenne est $\frac{2+3+7}{3} = 4$; la médiane est 3.

2. On développe : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4 + x^2 - 6x + 9 + x^2 - 14x + 49}{3}$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 24x + 62}{3}$$

$$f(x) = x^2 - 8x + \frac{62}{3}$$

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$.

Le coefficient de x^2 est 1 ; il est positif.

Donc f admet un minimum lorsque x vaut $-\frac{b}{2a}$, soit $x = 4$.

Ce minimum vaut $f(4) = 4^2 - 8 \times 4 + \frac{62}{3} = \frac{14}{3}$.

On remarque que $f(\bar{x})$ est égale à la variance. Sur cet exemple, la valeur de x qui minimise la moyenne d'écart au carré de la série statistique est la moyenne ; le minimum obtenu est alors la variance.

3. $g(x) = \frac{|x-2| + |x-3| + |x-7|}{3}$

On rappelle que $|x-a|$ est la distance de x à a .

Si $x < a$, $|x-a| = a-x$; si $x > a$, $|x-a| = x-a$.

Sur $[0 ; 2]$, $g(x) = \frac{2-x+3-x+7-x}{3} = 4-x$;

sur $[2 ; 3]$, $g(x) = \frac{x-2+3-x+7-x}{3} = \frac{-x+8}{3}$;

sur $[3 ; 7]$, $g(x) = \frac{x-2+x-3+7-x}{3} = \frac{x+2}{3}$;

sur $[7 ; 10]$, $g(x) = \frac{x-2+x-3+x-7}{3} = x-4$.

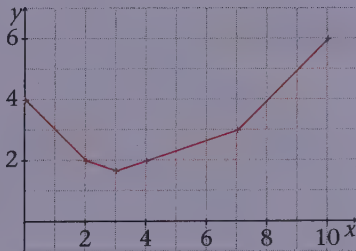
D'après le graphique, le minimum de g est atteint lorsque x vaut 3.

La valeur de x qui minimise la moyenne des écarts absolus de la série est la médiane.

4. Généralisation : soit une série prenant les valeurs x_i avec les effectifs n_i . Le nombre x qui minimise la somme $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - x)^2$, moyenne

des écarts au carré de la série, est la moyenne ; le minimum de cette somme est la variance.

Le nombre x qui minimise la somme $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i |x_i - x|$, moyenne des écarts absolus de la série, est la médiane.



Exercice 16

1. $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ et $5^2 = 25$, donc le triangle dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm est bien rectangle, d'après la réciproque du théorème de Pythagore. Il en est de même pour les autres.

2. On calcule les longueurs du triangle moyen :

$$\frac{3+8+20+11}{4} = 10,5 ; \frac{4+15+21+60}{4} = 25 ; \frac{5+17+29+61}{4} = 28.$$

Par ailleurs, $10,5^2 + 25^2 = 735,25$ et $28^2 = 784$, donc, d'après le théorème de Pythagore, le triangle moyen n'est pas rectangle.

Exercice 17

1. Les réponses possibles sont extrêmement nombreuses. La série $\{-12; -9; -6; -2; 4; 5; 20\}$ convient.

2. Il suffit de choisir une série dans laquelle toutes les valeurs sont égales : $4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4$.

3. Le troisième quartile correspond ici à la 7^e valeur. On prend une série dont les huit premiers termes sont : $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$ et 8 .

Le 9^e terme x doit être choisi de telle sorte que :

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+x}{9} \geq 7.$$

Il suffit donc de choisir une neuvième valeur supérieure à 27.

4. La médiane correspond ici à la 5^e valeur. On prend, par exemple, une série dont les huit premiers termes sont $2; 4; 6; 8; 10; 12; 14$ et 16 . La moyenne doit être égale à 20. Si on note x la 9^e valeur, on a :

$$\frac{2+4+6+8+10+12+14+16+x}{9} = 20.$$

Il suffit donc de choisir $x = 108$.

Exercice 18

1. $\bar{x} \approx 24187$ et $s \approx 55068$; $M_e = 7666,5$; $Q_3 - Q_1 = 21199 - 4716 = 16483$.

2. $\bar{x} \approx 12501$ et $s \approx 9189$; $M_e = 7666,5$; $Q_3 - Q_1 = 18392 - 5672 = 12720$.

3. Le couple de paramètres le plus sensible aux valeurs extrêmes est le couple (moyenne ; écart-type).

Exercice 19

1. $\bar{x} \approx 1695$ et $s \approx 1090$; $Q_1 = 1300$; $M_e = 1550$; $Q_3 = 1850$; $Q_3 - Q_1 = 550$.

2. Le syndicat a intérêt à utiliser le couple (moyenne ; écart-type). En effet, l'écart-type est bien plus grand que l'écart interquartile et ils pourront montrer que beaucoup de personnes touchent un salaire inférieur à la moyenne (plus de la moitié). Ce couple de paramètres est plus sensible aux valeurs extrêmes.

1 Modélisation d'une expérience aléatoire

a. Expérience aléatoire

- Une **expérience aléatoire** est une expérience ayant plusieurs issues et dont le résultat est imprévisible.

Une issue (ou résultat possible) est appelée **éventualité**.

- Soit $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ l'ensemble des n éventualités d'une expérience aléatoire.

Définir une **loi de probabilité** P sur E , c'est associer à chaque éventualité e_i de E un nombre réel p_i compris entre 0 et 1, avec la condition $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

- D'après la **loi des grands nombres**, le nombre p_i correspond à la fréquence théorique de l'éventualité e_i si l'on répétait l'expérience un très grand nombre de fois.

- **Modéliser** une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité sur l'ensemble E .

b. Calcul des probabilités

- Un **événement** A est un ensemble constitué d'une ou de plusieurs éventualités. Sa probabilité $p(A)$ est la somme des probabilités des éventualités qui le constituent.

- Un **événement impossible** (ensemble vide, noté $\emptyset$) ne contient aucune éventualité : $p(\emptyset) = 0$.

- Un **événement certain** contient toutes les éventualités : $p(E) = 1$.

- L'événement **contraire** d'un événement A , noté $\bar{A}$, est l'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A .

La probabilité de $\bar{A}$, événement contraire de A , est $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

- Soit A et B deux événements. L'intersection $A \cap B$ est l'ensemble constitué des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B .

- Si $A \cap B = \emptyset$, les événements A et B sont dits **incompatibles**.

- La réunion $A \cup B$ est l'ensemble constitué des éventualités qui appartiennent soit à A, soit à B, soit à $A \cap B$:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

c. Loi équirépartie

- Lorsque les n éventualités de E ont la même probabilité $\frac{1}{n}$, on est en situation d'équiprobabilité et on dit que la loi de probabilité sur E est équirépartie.

- Si un événement A contient m éventualités :

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{nombre de résultats favorables à A}}{\text{nombre de résultats possibles}}.$$

2 Variable aléatoire

a. Définition

- Soit E un ensemble sur lequel est définie une loi de probabilité.

Lorsqu'on associe à chaque issue de E un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire X sur l'ensemble E.

L'ensemble de ces réels, noté E', est l'ensemble des valeurs prises par X.

b. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

- La variable aléatoire X permet de transporter dans E' la loi de probabilité définie sur E.

Soit $E' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ les valeurs prises par la variable aléatoire X rangées par ordre croissant.

- L'événement noté $(X = x_i)$, où i est un nombre entier compris entre 1 et n , est l'ensemble des éléments de E associés à x_i par X.

- La probabilité de l'événement $(X = x_i)$ est la probabilité de l'événement de E formé avec toutes les issues associées à x_i .

- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est souvent donnée dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	somme
$P(X = x_i)$	p_1	p_1	...	p_n	1

c. Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

- L'espérance mathématique de X , notée $E(X)$, est $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$.
- La variance de X , notée $V(X)$, est $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$.
- L'écart-type de X , noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- Si a et b sont deux réels, alors $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX) = a^2 V(X)$.

3 Répétition d'expériences identiques et indépendantes

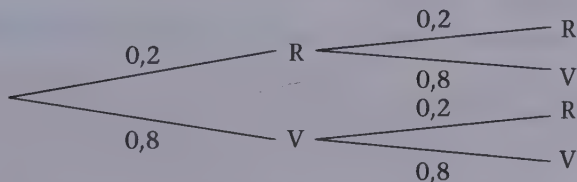
- On considère une expérience aléatoire à deux ou trois issues. On répète plusieurs fois de suite cette expérience dans les mêmes conditions de sorte que le résultat d'une expérience n'influe pas sur les résultats des autres expériences. On dit que ces expériences sont **indépendantes**.
- Les issues d'une répétition sont des listes de résultats.
- Un **arbre pondéré** permet de modéliser la répétition d'expériences identiques et indépendantes ; on inscrit la probabilité des issues sur les branches de l'arbre.

À chaque embranchement, la somme des probabilités est égale à 1.

- La probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple : Une urne contient 4 boules rouges et 16 boules vertes indiscernables au toucher. On tire une première boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'effectuer un second tirage.

On représente cette répétition par l'arbre pondéré suivant :



Les issues de la répétition sont les listes (R ; R), (R ; V), (V ; R) et (V ; V).

La probabilité de la liste (V ; R) est $0,8 \times 0,2 = 0,16$.



Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire

Énoncé

On propose le jeu suivant : pour une mise de 6 euros, on lance un dé parfaitement équilibré ; pour la sortie du 6, on reçoit 18 euros ; pour celle du 5, on reçoit 6 euros ; pour celle du 4, on reçoit 1 euro ; et dans les autres cas, on ne reçoit rien.

On appelle gain d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le gain à l'issue d'une partie. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Un joueur se présente ; il n'a que 10 euros en poche.

Quelle est la probabilité que ce joueur puisse jouer une deuxième partie ?

Solution commentée

Savoir-faire

■ Dans la question 1., on commence par déterminer l'ensemble des valeurs k prises par la variable aléatoire X ; puis, pour chaque événement $(X = k)$ possible, on cherche les issues correspondant à la valeur k et on calcule la probabilité de l'événement $(X = k)$. On résume la loi de probabilité de X dans un tableau.

■ Dans la question 2., on cherche le nombre k permettant d'écrire l'événement sous la forme $(X \geq k)$ et on exploite la loi de probabilité de X pour calculer la probabilité de l'événement $(X \geq k)$.

1. Pour la sortie du 6, le gain est de $18 - 6 = 12$; pour la sortie du 5, le gain est de $6 - 6 = 0$; pour la sortie du 4, le gain est de $1 - 6 = -5$; dans les autres cas, le gain est de $0 - 6 = -6$.

La variable aléatoire X prend donc les valeurs -6 ; -5 ; 0 et 12 .

L'événement $(X = 12)$ contient l'issue 6 ; donc $p(X = 12) = \frac{1}{6}$.

L'événement $(X = 0)$ contient l'issue 5 ; donc $p(X = 0) = \frac{1}{6}$.

L'événement $(X = -5)$ contient l'issue 4 ; donc $p(X = -5) = \frac{1}{6}$.

L'événement $(X = -6)$ contient les issues 1, 2 et 3 ; donc $p(X = -6) = \frac{3}{6}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est résumée dans le tableau suivant.

x_i	-6	-5	0	12	somme
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

2. Le joueur a 10 euros : il mise 6 euros pour la première partie, il lui reste donc 4 euros ; mais, pour jouer une deuxième partie, il doit posséder 6 euros. À la fin de la première partie, il n'y a que 4 possibilités : il peut disposer soit de $10 - 6 = 4$ euros, soit de $10 - 5 = 5$ euros, soit de $10 - 0 = 10$ euros, soit de $10 + 12 = 22$ euros.

On cherche la probabilité de l'événement $(X + 10 \geq 6)$, ou encore $(X \geq -4)$.
 $(X \geq -4) = (X = 0) \cup (X = 12)$.

$$\text{Donc } p(X \geq -4) = p(X = 0) + p(X = 12) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité que le joueur puisse jouer une deuxième partie est égale à $\frac{1}{3}$.

2 Déterminer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire

Énoncé

On donne le tableau représentant la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .

x_i	56	63	72	80	somme
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2	1

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X .

Solution commentée

Savoir-faire

■ Lorsque les données sont peu nombreuses, on applique les formules du cours :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) ; V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

■ On peut aussi utiliser un tableur ou l'éditeur de listes et le menu « stat » de la calculatrice.

L'espérance mathématique est :

$$E(X) = 56 \times 0,1 + 63 \times 0,3 + 72 \times 0,4 + 80 \times 0,2, \text{ soit } E(X) = 69,3.$$

La variance est :

$$V(X) = 0,1 \times (56 - 69,3)^2 + 0,3 \times (63 - 69,3)^2 + 0,4 \times (72 - 69,3)^2 + 0,2 \times (80 - 69,3)^2,$$

$$\text{soit } V(X) = 55,41.$$

L'écart-type est :

$$\sigma(X) = \sqrt{55,41} \approx 7,44.$$

On donne ci-dessous un tableau avec tous les calculs faits.

	A	B	C	D
1	x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	$(x_i - E(X))^2 \cdot p_i$
2	56	0,1	5,6	17,69
3	63	0,3	18,9	11,91
4	72	0,4	28,8	2,92
5	80	0,2	16	22,9
6	somme	1	69,3	55,41

Dans la cellule C6, on lit la valeur de l'espérance mathématique de X : $E(X) = 69,3$.

Dans la cellule D6, on lit la valeur de la variance de X : $V(X) = 55,41$.

Il reste à calculer l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{55,41}$, soit $\sigma(X) \approx 7,44$.

3 Construire et utiliser un arbre pondéré

Énoncé

Dans sa classe de 6^e, Claire, jeune professeur d'anglais, a une boîte dans laquelle elle a préparé 26 cartons : sur chaque carton est inscrite une lettre de l'alphabet (il y a dans l'alphabet 21 consonnes et 5 voyelles ; en anglais, le « Y » est considéré comme une consonne). Claire fait choisir à un élève un carton ; l'élève lit la lettre en anglais, repose le carton dans la boîte, choisit un deuxième carton et lit de nouveau la lettre en anglais.

1. Modéliser cette expérience par un arbre pondéré en indiquant, pour chaque tirage, si la lettre lue est une consonne ou une voyelle.

2. Déterminer la probabilité des événements :

A : « l'élève a lu deux voyelles » ;

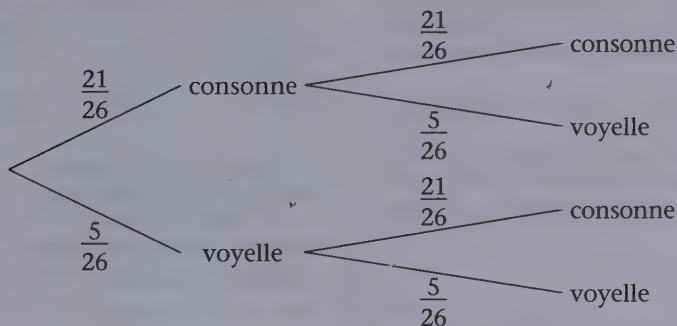
B : « l'élève a lu une seule consonne ».

Solution commentée

Savoir-faire

- Dans la question 1., on inscrit, à chaque tirage d'une lettre, les issues à l'extrémité des branches et la probabilité de chaque issue sur la branche de l'arbre qui conduit à cette issue.
- Dans la question 2., on écrit les listes de résultats qui réalisent l'événement.

1. On a construit l'arbre pondéré correspondant à la répétition du tirage de deux lettres dans la boîte avec remise de la première lettre tirée.



2. L'événement A est réalisé par la liste (voyelle ; voyelle).

D'après la règle de calcul dans les arbres pondérés, la probabilité de A est :

$$p(A) = \frac{5}{26} \times \frac{5}{26} = \frac{25}{676}, \text{ soit environ } 0,037.$$

L'événement B est réalisé par les listes (consonne ; voyelle) et (voyelle ; consonne).

$$p(B) = \frac{21}{26} \times \frac{5}{26} + \frac{5}{26} \times \frac{21}{26} = \frac{210}{676}, \text{ soit environ } 0,311.$$

10 qcm pour réviser le cours

Corrigés p. 333

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1 Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies. 40 % des auteurs de romans policiers sont français et 70 % des auteurs de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200. La probabilité qu'il choisisse un roman policier est :

- ☐ a. 0,4. ☐ b. 0,75. ☐ c. $\frac{1}{150}$.

2 A et B sont deux événements d'un univers E. Si $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$ et $p(A \cup B) = 0,65$, alors $p(A \cap B)$ est égal à :

- ☐ a. 0,1.
☐ b. 0,25.
☐ c. les données sont insuffisantes pour répondre.

3 Si A et B sont incompatibles et si $p(A) = 0,18$ et $p(B) = 0,42$, alors $p(A \cup B)$ est égal à :

- ☐ a. 0,6.
☐ b. 0,24.
☐ c. les données sont insuffisantes pour répondre.

4 Si A a pour probabilité $\frac{5}{8}$, alors la probabilité de l'événement contraire $\bar{A}$ est :

- ☐ a. 0,5.
☐ b. 0,375.
☐ c. les données sont insuffisantes pour répondre.

5 Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

x_i	1	2	4
p_i	0,5	0,25	0,25

L'espérance mathématique de X est :

- ☐ a. 3. ☐ b. 2. ☐ c. $\frac{7}{3}$.

6 On reprend le tableau de la question précédente donnant la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. L'écart-type de X est :

- ☐ a. 1,5. ☐ b. $\sqrt{1,5}$. ☐ c. 2.

7 Une variable aléatoire X a pour espérance mathématique 10.

La variable aléatoire $Y = 1,1X + 0,5$ a pour espérance mathématique :

- ☐ a. 10,5. ☐ b. 11. ☐ c. 11,5.

8 Une variable aléatoire X a pour espérance mathématique 10 et pour variance 9. La variable aléatoire $Y = 1,1X$ a pour variance :

- ☐ a. 9. ☐ b. 9,9. ☐ c. 10,89.

9 On lance deux fois de suite un dé équilibré à six faces.

La probabilité d'obtenir au moins un 6 est :

- ☐ a. $\frac{1}{6}$. ☐ b. $\frac{1}{36}$. ☐ c. $\frac{11}{36}$.

10 On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir exactement deux fois face est :

- ☐ a. $\frac{3}{8}$. ☐ b. $\frac{1}{8}$. ☐ c. $\frac{1}{4}$.

Exercices

Calculs de probabilités

Exercice 1

niveau 1

Corrigés p. 333

On donne la répartition d'une classe de 1^{re} S de 33 élèves.

Sexe \ Âge	16	17	18	Total
Filles	1	14	0	15
Garçons	1	15	2	18
Total	2	29	2	33

On dispose de la liste alphabétique de ces élèves, chacun d'eux étant repéré par un nombre de 1 à 33.

Pour interroger un élève au hasard, le professeur de mathématiques utilise un chapeau dans lequel il a placé 33 jetons portant les numéros de 1 à 33. On suppose ces jetons indiscernables au toucher.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

F : « le professeur interroge une fille » ;

G : « le professeur interroge un garçon » ;

C : « le professeur interroge une fille de 17 ans » ;

A : « le professeur interroge un élève de 17 ans » ;

B : « le professeur interroge un élève de 17 ans ou une fille ».

Exercice 2

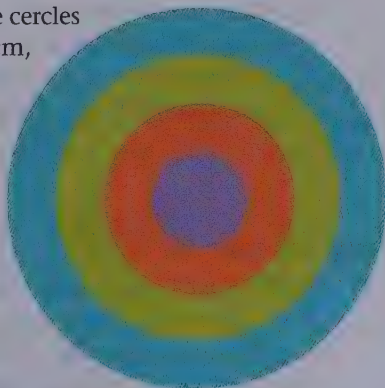
niveau 1

Corrigés p. 334

Une cible est constituée de quatre cercles concentriques de rayons 2,5 cm, 5 cm, 7,5 cm et 10 cm.

Les quatre zones ainsi délimitées, de l'intérieur du petit disque à la plus grande couronne, sont notées respectivement e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4 .

Une fléchette est lancée sur cette cible.



On admet que :

- l'événement « la fléchette atteint la cible » est un événement certain ;
- la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Définir une loi de probabilité P sur l'univers $E = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4\}$ permettant de modéliser cette expérience.

Exercice 3

niveau 1

Corrigés p. 335

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On extrait une carte au hasard. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

1. A : « tirer un roi ».
2. B : « tirer une carte de cœur ».
3. C : « tirer le roi de cœur ».
4. D : « tirer un roi ou un cœur ».

Exercice 4

niveau 1

Corrigés p. 336

On dispose d'un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Après avoir lancé ce dé 10 000 fois, on a obtenu la distribution de fréquences suivante :

Résultats e_i	1	2	3	4	5	6
Fréquences f_i	0,048	0,095	0,143	0,190	0,238	a

1. Calculer la valeur de a .
2. À partir des fréquences observées, on imagine que la probabilité d'une face est proportionnelle à son numéro.

Modéliser l'expérience d'un lancer avec ce dé, en définissant une loi de probabilité sur l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

3. Utiliser le tableau donnant la loi de probabilité de la question 2. pour calculer la probabilité des événements :

A : « le résultat est un multiple de 3 » ;

B : « le résultat est un nombre premier » ;

$C = \overline{B}$;

$D = A \cup B$.

Exercice 5

niveau 1

Corrigés p. 337

Soit A et B deux événements d'une expérience aléatoire tels que :

$p(A) = 0,63$, $p(B) = 0,51$ et $p(A \cup B) = 0,90$.

1. Calculer $p(\overline{A})$ et $p(\overline{B})$.
2. Soit $C = A \cap B$. Calculer $p(\overline{C})$.

Variables aléatoires

Exercice 6

niveau 1

Corrigés p. 337

Lors d'une animation dans un magasin, on distribue 500 enveloppes contenant des bons d'achat.

Une enveloppe contient un bon d'achat de 100 euros, neuf enveloppes contiennent un bon d'achat de 50 euros, vingt enveloppes contiennent un bon d'achat de 20 euros, les autres enveloppes contiennent un bon d'achat de 10 euros.

Une personne reçoit une enveloppe.

Soit X la variable aléatoire égale à la valeur du bon d'achat.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

Exercice 7

niveau 1

Corrigés p. 338

Une urne contient 3 boules blanches, 2 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher.

Le jeu consiste à tirer une boule de l'urne.

On marque 10 points si la boule est rouge, 1 point si elle est noire, - 2 points si elle est blanche.

Soit X la variable aléatoire égale aux points marqués par un joueur après un tirage.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

Exercice 8

niveau 2

Corrigés p. 338

Un enfant joue avec 20 billes, 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 billes rouges et 3 billes vertes dans une boîte cubique et 3 billes rouges et 4 billes vertes dans une boîte cylindrique.

Il choisit une bille au hasard dans la boîte cubique et une bille au hasard dans la boîte cylindrique.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance mathématique de X .

Répétition d'expériences

Exercice 9

niveau 1

Corrigés p. 339

Une urne contient 6 boules blanches, 3 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher.

On tire successivement, et avec remise, deux boules de l'urne.

1. Représenter cette expérience par un arbre pondéré.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 10

niveau 1

Corrigés p. 340

Jérôme s'entraîne à faire des lancers francs avant son prochain match de basket. Il évalue sa probabilité de réussite pour chaque lancer franc à 0,4 ; le résultat d'un lancer franc n'influençant pas le résultat des autres.

1. Quelle est la probabilité que Jérôme réussisse cinq lancers francs consécutifs ?
2. Quelle est la probabilité que Jérôme réussisse un seul lancer franc sur une série de cinq lancers ?

Exercice 11

niveau 2

Corrigés p. 341

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On extrait successivement, et avec remise, trois cartes.

Soit X la variable aléatoire égale au rang de la première figure obtenue.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 12

niveau 3

Corrigés p. 341

(Amérique du Nord, 2002) Dans un questionnaire à choix multiple (QCM) de 4 questions, pour une question donnée, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

1. Un candidat décide de répondre au hasard à une question.

La réponse exacte rapporte n points et une réponse fausse fait perdre m points.

Soit N la variable aléatoire qui associe à la réponse donnée par le candidat la note algébrique qui lui sera attribuée pour cette question.

- a. Donner la loi de probabilité de N .
- b. Quelle relation doit exister entre n et m pour que l'espérance mathématique de N soit nulle ?

2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des 4 questions.

Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à 3 questions exactement. (Donner cette probabilité sous forme de fraction irréductible, puis sa valeur arrondie au centième.)

Problèmes

Exercice 13

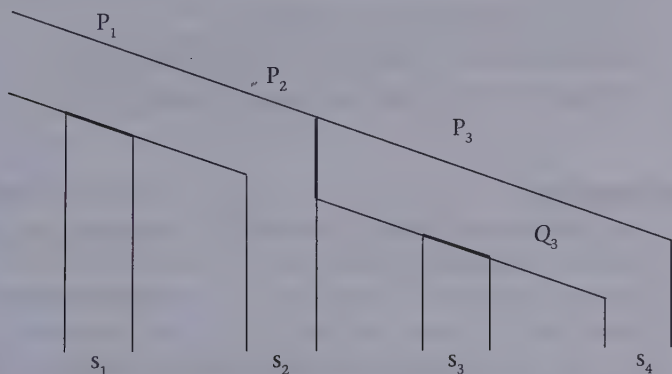
niveau 3

Corrigés p. 343

(Bac Génie électronique, sujet national, 2001) Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine.

Cette machine comporte trois portes (P_1, P_2, P_3) qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles (s_1, s_2, s_3, s_4).

Un système électronique positionne aléatoirement ces trois portes puis libère la bille.



NB : sur le schéma les portes P_1 et P_3 sont fermées, la porte P_2 est ouverte, la bille sortira par s_2 .

1. Énumérer dans un tableau toutes les positions simultanées possibles des trois portes et indiquer la sortie imposée à la bille pour chacune de ces configurations.

P_1	P_2	P_3	Sortie
...	...	...	...
F	O	F	s_2
...	...		

(Par convention, on notera F une porte fermée et O une porte ouverte.)

2. On suppose que les 8 événements élémentaires trouvés à la question 1. sont équiprobables.

a. Soit A l'événement $(F ; O ; F)$.

Quelle est la probabilité de A ?

b. Soit S_i l'événement « la bille sort par s_i », où i prend les valeurs 1, 2, 3 et 4.

Calculer les probabilités des événements S_1, S_2, S_3, S_4 .

3. Pour jouer, on doit miser 7 euros.

Si la bille sort par s_1 , on ne reçoit rien.

Si la bille sort par s_2 , on reçoit 5 euros.

Si la bille sort par s_3 , on reçoit 10 euros.

Si la bille sort par s_4 , on reçoit 20 euros.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque sortie possible associe le gain ou la perte en euros du joueur (en tenant compte de la mise des 7 euros).

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X .

Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

Exercice 14

niveau 3

Corrigés p. 344

(Bac Chimie de laboratoire et de procédés industriels, sujet national, 2001)

Une urne contient trois boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 3.

Un jeu consiste à extraire successivement deux boules de l'urne, la première boule étant remise avant d'extraire la seconde.

On appelle tirage, tout couple $(a ; b)$ où a est le numéro de la première boule extraite et b celui de la seconde.

On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. Préciser l'ensemble des neuf tirages possibles.

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage $(a ; b)$ associe le produit ab .

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Établir la loi de probabilité de X .

c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice 15

niveau 3

Corrigés p. 345

On place 3 boules rouges et n boules noires dans une urne.

On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet, puis on effectue un second tirage d'une boule.

1. On désigne par A, B et C les événements :

A : « obtenir deux boules rouges » ;

B : « obtenir une boule de chaque couleur » ;

C : « obtenir deux boules noires ».

Calculer la probabilité des événements A, B et C.

2. Dans la suite du problème, on note p_n la probabilité de l'événement B.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x}{(x+3)^2}.$$

a. Étudier les variations de f .

b. Représenter graphiquement f pour x appartenant à $[1 ; 10]$.

c. En déduire la valeur de n pour laquelle la probabilité p_n est maximum et donner la valeur maximale de p_n .

d. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'équation $f(x) = 0,375$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 16

niveau 3

Corrigés p. 347

On place 3 boules rouges et n boules noires dans une urne.

On tire au hasard successivement, sans remise, deux boules dans cette urne.

1. On désigne par A, B et C les événements :

A : « obtenir deux boules rouges » ;

B : « obtenir une boule de chaque couleur » ;

C : « obtenir deux boules noires ».

Calculer la probabilité des événements A, B et C.

2. Dans la suite du problème, on note p_n la probabilité de l'événement B.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{6x}{(x+3)(x+2)}.$$

a. Étudier les variations de g .

b. Représenter graphiquement g pour x appartenant à $[1 ; 10]$.

c. En déduire la valeur de n pour laquelle la probabilité p_n est maximum et donner la valeur maximale de p_n .

Exercice 17

niveau 3

Corrigés p. 349

(D'après Bac STI, Polynésie, 2006) Un commercial vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine.

Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité donnée par le tableau ci-dessous.

Nombre de voitures vendues x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	0,26	0,23		0,15	0,05

1. Calculer la probabilité de vendre exactement deux voitures en une semaine.
2. Calculer la probabilité de vendre au moins deux voitures en une semaine.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
En déduire le nombre moyen de voitures vendues en une année (c'est-à-dire en 52 semaines).
4. Le prix de vente d'une voiture est de 13 500. Le commercial perçoit une commission de 0,4 % sur le prix de vente pour chaque voiture vendue.
Déterminer le montant moyen de la commission perçue en un an.

Exercice 18

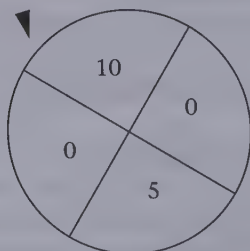
niveau 3

Corrigés p. 349

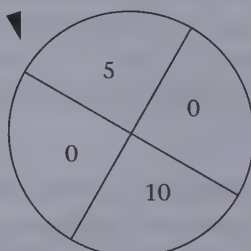
(D'après Bac STI, Métropole, 2006) Pour la fête de l'école, une association propose une loterie selon le principe suivant :

- le joueur mise 10 euros ;
- il fait tourner deux roues identiques, chacune s'arrêtant devant un repère.

Chaque roue est divisée en quatre quartiers sur lesquels sont indiqués les gains en euros.



Roue 1



Roue 2

Tous les quartiers ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère. Le gain obtenu par le joueur est égal à la somme des gains indiqués sur les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues.

Sur le dessin, la partie assure un gain de 15 €.

1. Étude du gain d'un joueur pour une mise de 10 euros.

On nomme G la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain du joueur en euros.

- a.** Construire un arbre pondéré pour modéliser cette expérience. Utiliser cet arbre pour donner les valeurs prises par la variable aléatoire G selon les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues.
- b.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G .
- c.** Calculer la probabilité, notée $p(G > 10)$, que le joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise.
- d.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G , puis donner son interprétation.

2. Étude du bénéfice de l'association pour une mise de m euros.

On suppose dans cette question que la mise du joueur est de m euros.

On note B la variable aléatoire qui à chaque partie associe le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'association, c'est-à-dire la différence entre la mise qu'elle a encaissée et le gain éventuel qu'elle a reversé au joueur.

- a.** Exprimer en fonction de m l'espérance mathématique de la variable aléatoire B .
- b.** Déterminer m pour que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5.

Exercice 19

niveau 3

Corrigés p. 350

Un jeu consiste à tirer des boules dans une urne qui contient des boules rouges, des boules vertes et des boules noires.

1. On admet que, lors de chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

On note :

p_R la probabilité de tirer une boule rouge ;

p_V la probabilité de tirer une boule verte ;

p_N la probabilité de tirer une boule noire.

On rappelle que, les boules contenues dans l'urne étant soit rouges, soit vertes, soit noires, on a l'égalité $p_R + p_V + p_N = 1$.

On suppose que le nombre de boules rouges, le nombre de boules vertes et le nombre de boules noires contenues dans l'urne sont tels que $p_R = 2 \times p_V$ et $p_V = 2 \times p_N$.

a. Calculer p_R , p_V et p_N .

b. Sachant que l'urne contient 5 boules noires, calculer le nombre total de boules dans l'urne, ainsi que le nombre de boules rouges et le nombre de boules vertes.

2. La règle du jeu indique que :

- si la boule tirée est rouge, l'organisateur donne 2 € au joueur ;
- si la boule tirée est verte, l'organisateur donne 1 € au joueur ;
- si la boule tirée est noire, l'organisateur donne 0,50 € au joueur.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage d'une boule associe la somme reçue par le joueur.

a. Donner la loi de probabilité de X , puis calculer l'espérance mathématique de X .

b. Si l'organisateur du jeu vendait 1,50 € un ticket donnant le droit d'effectuer un tirage, quel bénéfice pourrait-il espérer avoir réalisé à l'issue de 1 000 jeux ?

3. On suppose que l'organisateur a rajouté des boules noires dans l'urne : l'urne contient 20 boules rouges, 10 boules vertes et k boules noires.

a. Exprimer en fonction de k la probabilité de tirer une boule de chaque couleur.

b. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque tirage d'une boule associe la somme reçue par le joueur.

Exprimer, en fonction de k , l'espérance mathématique de Y .

c. L'organisateur du jeu vend 1,50 € un ticket donnant le droit d'effectuer un tirage.

Comment peut-il choisir le nombre k de boules noires pour pouvoir réaliser un bénéfice de 500 € à l'issue de 1 000 jeux ?

QCM

1 b. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est 0,75. En effet, le lecteur choisit un livre au hasard, donc la loi de probabilité sur l'ensemble E des 200 livres est équirépartie. Il y a 150 romans policiers. L'événement A : « le lecteur choisit un roman policier » contient

150 éléments ; donc $p(A) = \frac{150}{200} = 0,75$.

2 b. On applique la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
 $p(A \cap B) = 0,25$.

3 a. $p(A \cup B) = 0,6$. En effet, si A et B sont incompatibles, on a $A \cap B = \emptyset$ et $p(A \cap B) = 0$. D'où $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

4 b. On applique la formule $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$; $p(\bar{A}) = 0,375$.

5 b. On applique la formule $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$;

$E(X) = 0,5 \times 1 + 0,25 \times 2 + 0,25 \times 4 = 2$; $E(X) = 2$.

6 b. L'écart-type est égal à $\sqrt{1,5}$.

On applique les formules $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
 D'après la question 5., $E(X) = 2$.

$V(X) = 0,5 \times (1-2)^2 + 0,25 \times (2-2)^2 + 0,25 \times (4-2)^2$;

$V(X) = 0,5 + 0 + 1 = 1,5$.

7 c. On applique la formule $E(aX + b) = aE(X) + b$; $E(Y) = 11,5$.

8 c. On applique la formule $V(aX) = a^2 V(X)$; $V(Y) = 10,89$.

9 c. $\frac{11}{36}$. L'événement contraire de l'événement « obtenir au moins un 6 » est « ne pas obtenir de 6 ». Lors du premier lancer, la probabilité de ne pas obtenir de 6 est $\frac{5}{6}$. On répète deux fois l'expérience ; la probabilité de « ne pas obtenir de 6 » après deux lancers est $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. La probabilité d'obtenir au moins un 6 est alors $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

10 a. $\frac{3}{8}$. L'événement A « obtenir deux fois face » contient les listes de résultats (F ; F ; P), (F ; P ; F) et (P ; F ; F) ; la probabilité de chaque liste est $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; donc $P(A) = 3 \times \frac{1}{8}$.

Exercice 1

Les jetons étant indiscernables au toucher, on est en situation d'équiprobabilité. L'univers E est l'ensemble des 33 élèves de la classe.

La probabilité pour chaque élève d'être interrogé est de $\frac{1}{33}$.

Pour calculer la probabilité d'un événement, on utilise la formule :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre de résultats possibles}}.$$

Il y a 15 filles dans la classe. Le nombre d'issues réalisant l'événement F est égal à 15.

$$\text{On a donc } p(F) = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}.$$

La probabilité que le professeur interroge une fille est $p(F) = \frac{5}{11}$.

$$\text{Il y a 18 garçons. Donc } p(G) = \frac{18}{33} = \frac{6}{11}.$$

La probabilité que le professeur interroge un garçon est $p(G) = \frac{6}{11}$.

L'événement G étant l'événement contraire de l'événement F, on peut aussi utiliser $p(G) = 1 - p(F)$.

Il y a 14 filles de 17 ans.

Donc la probabilité que le professeur interroge une fille de 17 ans est

$$p(C) = \frac{14}{33}.$$

Il y a 29 élèves de 17 ans.

Donc la probabilité que le professeur interroge un élève de 17 ans est

$$p(A) = \frac{29}{33}.$$

L'événement B est l'événement « A ou F », ou encore $B = A \cup F$.

L'événement $A \cap F$ est l'événement « le professeur interroge un élève de 17 ans et une fille ». Donc $A \cap F = C$.

CONSEIL

On utilise la formule

$$p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F).$$

$$\text{On en déduit } p(A \cup F) = \frac{29}{33} + \frac{5}{11} - \frac{14}{33} = \frac{30}{33} = \frac{10}{11}.$$

La probabilité que le professeur interroge un élève de 17 ans ou une fille est égale à $\frac{10}{11}$.

Exercice 2

L'aire d'un disque de rayon r est πr^2 .

L'aire du disque de rayon 2,5 est $\pi \times 2,5^2$.

L'aire du disque de rayon 10 est $\pi \times 10^2$.

La probabilité d'atteindre une zone étant proportionnelle à l'aire de cette zone, la probabilité de l'événement élémentaire e_1 « la fléchette atteint l'intérieur du petit disque » est :

$$p(e_1) = \frac{\pi \times 2,5^2}{\pi \times 10^2} = \frac{1}{16}.$$

L'aire de la première couronne est $\pi \times 5^2 - \pi \times 2,5^2 = \pi(5^2 - 2,5^2) = 18,75\pi$.
La probabilité de l'événement élémentaire e_2 « la fléchette atteint l'intérieur de la première couronne » est :

$$p(e_2) = \frac{\pi \times 18,75}{\pi \times 10^2} = \frac{3}{16}.$$

L'aire de la deuxième couronne est $\pi \times 7,5^2 - \pi \times 5^2 = \pi(7,5^2 - 5^2) = 31,25\pi$.
La probabilité de l'événement élémentaire e_3 « la fléchette atteint l'intérieur de la deuxième couronne » est :

$$p(e_3) = \frac{\pi \times 31,25}{\pi \times 10^2} = \frac{5}{16}.$$

L'aire de la troisième couronne est $\pi \times 10^2 - \pi \times 7,5^2 = \pi(10^2 - 7,5^2) = 43,75\pi$.
La probabilité de l'événement élémentaire e_4 « la fléchette atteint l'intérieur de la troisième couronne » est :

$$p(e_4) = \frac{\pi \times 43,75}{\pi \times 10^2} = \frac{7}{16}.$$

On vérifie que la somme des probabilités des 4 événements élémentaires est égale à 1 : $\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{7}{16} = \frac{16}{16} = 1$.

Le tableau suivant résume la loi de probabilité p sur l'univers E :

Issue e_i	e_1	e_2	e_3	e_4
Probabilités $p(e_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Exercice 3

L'hypothèse « on extrait une carte au hasard » permet d'utiliser la loi équirépartie sur l'ensemble E des 32 cartes du jeu.

1. L'événement A « tirer un roi » est réalisé si on extrait l'un des 4 rois.

$$\text{Donc } p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

2. L'événement B « tirer une carte de cœur » est réalisé si on extrait l'une des 8 cartes de cœur.

$$\text{Donc } p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

3. L'événement C « tirer le roi de cœur » est un événement élémentaire.

$$\text{Donc } p(C) = \frac{1}{32}.$$

4. L'événement D « tirer un roi ou un cœur » est la réunion des événements A et B .

$$p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

$A \cap B$ est l'événement « tirer une carte qui est un roi et un cœur » ; donc $A \cap B = C$.

$$\begin{aligned}
 p(D) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}.
 \end{aligned}$$

ATTENTION

On peut aussi dénombrer directement le nombre de cartes qui sont un roi ou un cœur, mais il ne faut pas compter deux fois le roi de cœur.

Exercice 4

1. La somme des fréquences de tous les résultats possibles est égale à 1. Le nombre a est alors solution de l'équation :

$$0,048 + 0,095 + 0,143 + 0,190 + 0,238 + a = 1. \text{ D'où } a = 0,286.$$

2. La probabilité d'une face est proportionnelle à son numéro.

Soit x la probabilité de la face 1, on note $p(1) = x$.

On a alors $p(2) = 2x$, $p(3) = 3x$, $p(4) = 4x$, $p(5) = 5x$, $p(6) = 6x$.

D'autre part, $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$.

Le nombre x est donc solution de l'équation :

$$x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1$$

$$21x = 1, \text{ donc } x = \frac{1}{21}.$$

On en déduit le tableau donnant la loi de probabilité de ce dé :

e_i	1	2	3	4	5	6
$p(e_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

3. L'événement A « le résultat est un multiple de 3 » contient les éventualités 3 et 6.

$$\text{La probabilité de A est } p(A) = p(3) + p(6) = \frac{9}{21}, \text{ d'où } p(A) = \frac{3}{7}.$$

L'événement B « le résultat est un nombre premier » contient les éventualités 2, 3 et 5.

$$\text{La probabilité de B est } p(B) = p(2) + p(3) + p(5) = \frac{10}{21}, \text{ d'où } p(B) = \frac{10}{21}.$$

L'événement C est l'événement contraire de B.

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{10}{21}, \text{ donc } p(C) = \frac{11}{21}.$$

L'événement D est l'événement « A ou B ».

On applique la formule :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Les événements A et B ont un seul élément en

$$\text{commun : } A \cap B = \{3\} \text{ et } p(3) = \frac{3}{21}.$$

$$p(A \cup B) = \frac{3}{7} + \frac{10}{21} - \frac{3}{21} = \frac{16}{21}, \text{ d'où } p(D) = \frac{16}{21}.$$

CONSEIL

On peut aussi calculer $p(D)$ directement avec $D = \{2; 3; 5; 6\}$.

Exercice 5

$$1. p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,63 = 0,37.$$

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0,51 = 0,49.$$

$$2. \text{ On applique la formule } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

$$\text{On a donc } p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B).$$

$$p(A \cap B) = 0,63 + 0,51 - 0,90$$

$$p(A \cap B) = 0,24.$$

$$\text{Comme } C = A \cap B, p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - 0,24, \text{ d'où } p(\bar{C}) = 0,76.$$

Exercice 6

1. La variable aléatoire X prend les valeurs 10, 20, 50 et 100.

On détermine la loi de probabilité de X .

1 enveloppe sur les 500 contient un bon d'achat de 100 euros, donc

$$P(X = 100) = \frac{1}{500}.$$

$$9 \text{ enveloppes contiennent un bon d'achat de 50 euros, } P(X = 50) = \frac{9}{500}.$$

$$20 \text{ enveloppes contiennent un bon d'achat de 20 euros, } P(X = 20) = \frac{20}{500}.$$

$$\text{Il reste } 500 - (1 + 9 + 20) = 470 \text{ enveloppes. Donc } P(X = 10) = \frac{470}{500}.$$

On en déduit le tableau donnant la loi de probabilité de X :

x_i	10	20	50	100
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{470}{500}$	$\frac{20}{500}$	$\frac{9}{500}$	$\frac{1}{500}$

2. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

$$E(X) = 10 \times \frac{470}{500} + 20 \times \frac{20}{500} + 50 \times \frac{9}{500} + 100 \times \frac{1}{500} = \frac{5\,650}{500}$$

$$E(X) = 11,30 \text{ €}.$$

Cela signifie que la valeur moyenne d'un bon d'achat est de 11,30 euros.

La variance de X est $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$.

$$V(X) = \frac{470}{500} \times (10 - 11,3)^2 + \frac{20}{500} \times (20 - 11,3)^2 + \frac{9}{500} \times (50 - 11,3)^2 + \frac{1}{500} \times (100 - 11,3)^2$$

$$V(X) = \frac{23\,655}{500}; V(X) = 47,31.$$

L'écart-type σ de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

$$\sigma(X) = \sqrt{47,31}, \text{ soit environ } 6,88 \text{ €}.$$

Exercice 7

1. Chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

La probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{1}{6}$, celle de tirer une boule noire est $\frac{2}{6}$ et celle de tirer une boule blanche est $\frac{3}{6}$.

La variable aléatoire X prend les valeurs -2 , 1 et 10 :

$X = -2$ si la boule est blanche ;

$X = 1$ si la boule est noire ;

$X = 10$ si la boule est rouge.

On en déduit le tableau donnant la loi de probabilité P de X :

x_i	-2	1	10	Total
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

2. L'espérance mathématique est $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

$$E(X) = -2 \times \frac{3}{6} + 1 \times \frac{2}{6} + 10 \times \frac{1}{6}, \text{ soit } E(X) = 1.$$

Cela signifie que la valeur moyenne de la variable aléatoire X est 1 point.

La variance de X est $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$.

$$V(X) = \frac{3}{6} \times (-2 - 1)^2 + \frac{2}{6} \times (1 - 1)^2 + \frac{1}{6} \times (10 - 1)^2, \text{ soit } V(X) = 18.$$

Exercice 8

1. Chaque bille a la même probabilité d'être tirée.

L'univers E associé à cette expérience aléatoire de choix de deux billes prises dans deux boîtes différentes est l'ensemble des couples du type (rouge ; rouge), (rouge ; vert), (vert ; rouge) et (vert ; vert) que l'on peut dénombrer avec la composition des deux boîtes.

Il y a 13 billes dans la boîte cubique et 7 billes dans la boîte cylindrique.

Donc l'univers contient $13 \times 7 = 91$ couples.

La variable aléatoire X prend les valeurs 0 , 1 et 2 :

$X = 0$ est l'événement « aucune des deux billes n'est rouge » ;

$X = 1$ est l'événement « une bille est rouge » ;

$X = 2$ est l'événement « les deux billes sont rouges ».

Il y a 10 billes rouges dans la boîte cubique et 3 billes rouges dans la boîte cylindrique. Donc l'événement $(X = 2)$ contient $10 \times 3 = 30$ couples.

On en déduit $P(X = 2) = \frac{30}{91}$.

Il y a 3 billes vertes dans la boîte cubique et 4 billes vertes dans la boîte cylindrique. Donc l'événement $(X = 0)$ contient $3 \times 4 = 12$ couples.

On en déduit $P(X = 0) = \frac{12}{91}$.

Comme $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$,

$$P(X = 1) = 1 - \frac{12}{91} - \frac{30}{91} = \frac{49}{91}.$$

CONSEIL

On peut aussi calculer le nombre d'éléments de l'événement $(X = 1)$:

$$10 \times 4 + 3 \times 3 = 49.$$

On en déduit le tableau donnant la loi de probabilité P de X :

x_i	0	1	2	Total
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{12}{91}$	$\frac{49}{91}$	$\frac{30}{91}$	1

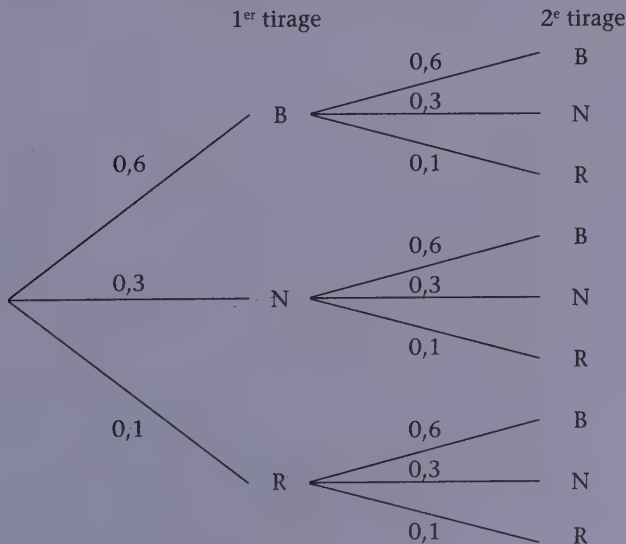
2. L'espérance mathématique est $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

$$E(X) = 0 \times \frac{12}{91} + 1 \times \frac{49}{91} + 2 \times \frac{30}{91} ; E(X) = \frac{109}{91} ; \text{soit environ } 1,2.$$

Cela signifie que le nombre moyen de billes rouges choisies est 1,2.

Exercice 9

1. On construit l'arbre pondéré modélisant la répétition du tirage d'une boule dans l'urne. On note B l'issue « la boule est blanche », N l'issue « la boule est noire » et R l'issue « la boule est rouge ».



2. X est la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues. Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

L'événement $(X = 2)$ est constitué par la liste $(R ; R)$.

La probabilité de la liste $(R ; R)$ est $0,1 \times 0,1 = 0,01$. Donc $P(X = 2) = 0,01$.

L'événement $(X = 1)$ est constitué par les listes $(B ; R)$, $(N ; R)$, $(R ; B)$ et $(R ; N)$.

D'après l'arbre, $P(X = 1) = 0,6 \times 0,1 + 0,3 \times 0,1 + 0,1 \times 0,6 + 0,1 \times 0,3$; donc $P(X = 1) = 0,18$.

On en déduit la probabilité de l'événement $(X = 0)$:

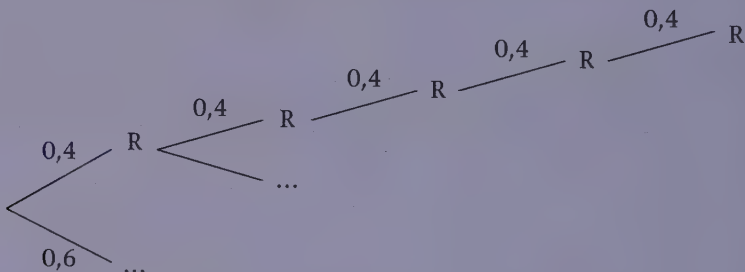
$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2)$; donc $P(X = 0) = 0,81$.

On en déduit le tableau donnant la loi de probabilité P de X :

x_i	0	1	2	Total
$P(X = x_i) = p_i$	0,81	0,18	0,01	1

Exercice 10

1. On peut commencer un arbre modélisant la répétition de cette expérience ; on note R l'issue « le lancer franc est réussi ».



L'événement J « Jérôme réussit cinq lancers francs consécutifs » correspond à la liste $(R ; R ; R ; R ; R)$.

La probabilité de cette liste est : $0,4 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,4$, soit 0,010 24.

Donc $p(J) \approx 0,01$.

2. Soit A l'événement « Jérôme réussit un seul lancer franc sur une série de cinq lancers ».

On note E l'issue « le lancer franc est raté ».

En complétant l'arbre précédent, l'événement A est constitué des listes :

$(R ; E ; E ; E ; E)$, $(E ; R ; E ; E ; E)$, $(E ; E ; R ; E ; E)$, $(E ; E ; E ; R ; E)$ et $(E ; E ; E ; E ; R)$.

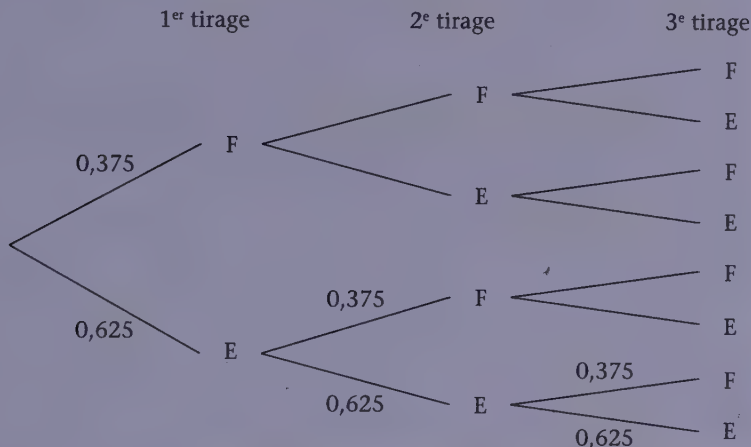
Chacune de ces listes a pour probabilité :

$0,4 \times 0,6 \times 0,6 \times 0,6 \times 0,6 = 0,051\ 84$.

Donc $p(A) = 5 \times 0,051\ 84 = 0,259\ 2$; $p(A) \approx 0,26$.

Exercice 11

1. On construit un arbre pour modéliser cette expérience ; on note F l'issue « la carte extraite est une figure » et E l'issue contraire. Il y a 12 figures dans un jeu de 32 cartes, donc, à chaque tirage, la probabilité de F est $\frac{12}{32} = \frac{3}{8} = 0,375$; celle de E est $\frac{5}{8} = 0,625$.



X est la variable aléatoire égale au rang de la première figure obtenue. Elle prend les valeurs 1, 2, 3 et 0 si l'on n'obtient pas de figure.

On détermine la loi de probabilité de X .

$$P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$$

$$P(X = 3) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{75}{512}$$

$$P(X = 0) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{15}{64} - \frac{75}{512} = \frac{125}{512}$$

2. L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{15}{64} + 3 \times \frac{75}{512} + 0 \times \frac{125}{512} = \frac{657}{512}, \text{ soit environ } 1,28.$$

Exercice 12

1. a. Le candidat répond au hasard à la question. La probabilité qu'il donne la réponse juste est $\frac{1}{3}$. C'est aussi la probabilité que la variable aléatoire N prenne la valeur n .

Voici le tableau donnant la loi de probabilité P de N :

x_i	n	m	Total
$P(N = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

b. L'espérance mathématique de N est :

$$E(X) = \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}m.$$

$E(X) = 0$ si, et seulement si, $n = -2m$.

Cela signifie par exemple que si l'on met 2 points pour la réponse juste et -1 pour une réponse fausse, l'espérance mathématique de N est nulle.

2. Le candidat répond au hasard à chacune des 4 questions. On note a , b et c les réponses proposées à chacune des questions.

CONSEIL

On peut construire un arbre modélisant la répétition de 4 expériences identiques et indépendantes à 3 issues. On peut aussi imaginer que le candidat remplit les quatre cases d'une grille en indiquant sa réponse.

Voici un exemple de réponses aux quatre questions :

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4
b	c	a	a

Il y a trois réponses possibles à chacune des questions ; donc l'ensemble des réponses possibles contient $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ éléments.

L'événement « le candidat répond à trois questions exactement » contient 8 éléments.

En effet, supposons que sa mauvaise réponse soit à la première question : il avait le choix entre 2 réponses fausses.

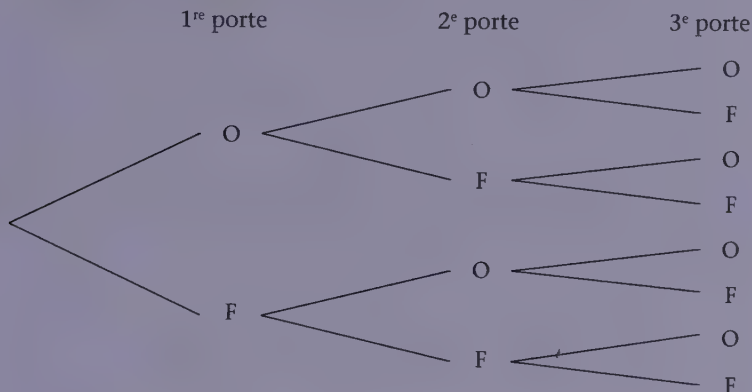
Il en est de même si la mauvaise réponse apparaît à la deuxième, troisième ou quatrième question : donc ses trois bonnes réponses peuvent être placées de 4 manières différentes. On trouve $2 \times 4 = 8$ grilles.

En situation d'équiprobabilité, la probabilité de l'événement « le candidat répond à trois questions exactement » est alors $\frac{8}{81}$, soit environ 0,10.

En langage courant, cela signifie qu'un candidat qui répond au hasard à un QCM de 4 questions a 10 chances sur 100 d'avoir exactement trois réponses exactes.

Exercice 13

1. Pour trouver toutes les positions simultanées possibles des trois portes, on construit un arbre de choix.



Cet arbre montre qu'il y a 8 positions simultanées possibles pour les trois portes.

Le tableau indique la sortie imposée à la bille pour chacune de ces configurations.

P_1	P_2	P_3	Sortie
O	O	O	s_1
O	O	F	s_1
O	F	O	s_1
O	F	F	s_1
F	O	O	s_2
F	O	F	s_2
F	F	O	s_3
F	F	F	s_4

2. a. Soit E l'ensemble des 8 configurations possibles. Elles sont équiprobables. Chacune d'elles a pour probabilité $\frac{1}{8}$.

Donc la probabilité de $A = (F ; O ; F)$ est $\frac{1}{8}$.

b. L'événement « la bille sort par s_1 » contient 4 configurations.

La probabilité de S_1 est $p(S_1) = \frac{4}{8}$, soit $p(S_1) = \frac{1}{2}$.

L'événement « la bille sort par s_2 » contient 2 configurations.

La probabilité de S_2 est $p(S_2) = \frac{2}{8}$, soit $p(S_2) = \frac{1}{4}$.

L'événement « la bille sort par s_3 » contient 1 configuration.

La probabilité de S_3 est $p(S_3) = \frac{1}{8}$.

L'événement « la bille sort par s_4 » contient 1 configuration.

La probabilité de S_4 est $p(S_4) = \frac{1}{8}$.

3. a. La mise est de 7 euros. X est la variable aléatoire qui à chaque sortie possible associe le gain ou la perte en euros du joueur (en tenant compte de la mise des 7 euros).

Si la bille sort par s_1 , on ne reçoit rien. Donc $X = -7$.

Si la bille sort par s_2 , on reçoit 5 euros. Donc $X = -2$.

Si la bille sort par s_3 , on reçoit 10 euros. Donc $X = 3$.

Si la bille sort par s_4 , on reçoit 20 euros. Donc $X = 13$.

L'ensemble des valeurs prises par X est $\{-7; -2; 3; 13\}$.

b. D'après la question **2. b.**, on a $P(X = -7) = p(S_1) = \frac{1}{2}$...

On en déduit le tableau donnant la loi de probabilité de X :

x_i	-7	-2	3	13
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

c. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

$$E(X) = (-7) \times \frac{1}{2} + (-2) \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 13 \times \frac{1}{8}, \text{ d'où } E(X) = -2.$$

Exercice 14

1. Pour trouver tous les tirages possibles, on peut construire un arbre ou utiliser un tableau à double entrée.

2 ^e boule b	1	2	3
1 ^e boule a			
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)

Les listes de l'univers associé à cette expérience sont les neuf couples ci-dessus. La probabilité de chacune des listes est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

2. a. X est la variable aléatoire qui à chaque tirage $(a ; b)$ associe le produit ab .

On refait le tableau précédent en indiquant, dans les neuf cases, le résultat du produit :

2 ^e boule b 1 ^e boule a	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

Les valeurs prises par X sont donc 1, 2, 3, 4, 6, 9.

b. On en déduit le tableau donnant la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	6	9
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

c. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + 6 \times \frac{2}{9} + 9 \times \frac{1}{9}, \text{ d'où } E(X) = 4.$$

Exercice 15

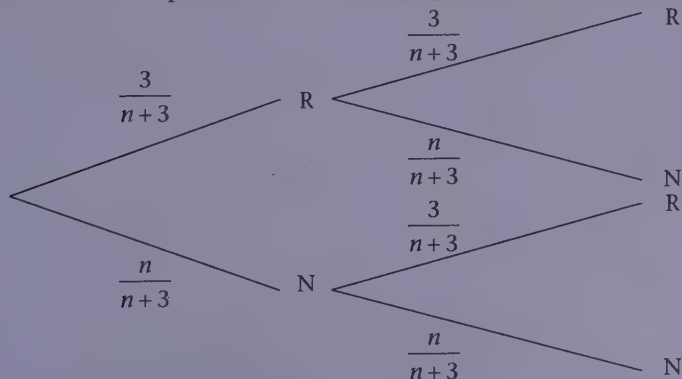
1. a. L'urne contient $n + 3$ boules, 3 rouges et n noires.

Comme elles sont indiscernables au toucher, à chaque tirage, on est en situation d'équiprobabilité.

On note R l'issue « la boule obtenue est rouge » et N l'issue « la boule obtenue est noire ».

Ces issues ont pour probabilité $p(R) = \frac{3}{n+3}$ et $p(N) = \frac{n}{n+3}$.

On modélise la répétition des deux tirages par l'arbre pondéré suivant :



L'événement A « obtenir deux boules rouges » est réalisé par la liste (R ; R).

Donc la probabilité de A est $p(A) = \frac{3}{n+3} \times \frac{3}{n+3}$; $p(A) = \frac{9}{(n+3)^2}$.

L'événement B « obtenir une boule de chaque couleur » est réalisé par les listes (R ; N) et (N ; R).

Donc la probabilité de B est $p(B) = \frac{3}{n+3} \times \frac{n}{n+3} + \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{n+3}$;

$$p(B) = \frac{6n}{(n+3)^2}.$$

L'événement C « obtenir deux boules noires » est réalisé par la liste (N ; N).

Donc la probabilité de C est $p(C) = \frac{n}{n+3} \times \frac{n}{n+3}$; $p(C) = \frac{n^2}{(n+3)^2}$.

On peut vérifier que $p(A) + p(B) + p(C) = 1$:

$$\frac{3^2}{(n+3)^2} + \frac{6n}{(n+3)^2} + \frac{n^2}{(n+3)^2} = \frac{3^2 + 6n + n^2}{(n+3)^2} = \frac{(n+3)^2}{(n+3)^2} = 1.$$

2. a. $f(x) = \frac{6x}{(x+3)^2}$

On pose $u(x) = 6x$, $v(x) = (x+3)^2$;

donc $u'(x) = 6$ et $v'(x) = 2(x+3)$.

$$f'(x) = \frac{6(x+3)^2 - 6x \times 2(x+3)}{(x+3)^4} ;$$

$$f'(x) = \frac{6(x+3)(x+3-2x)}{(x+3)^4}.$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{6(-x+3)}{(x+3)^3}.$$

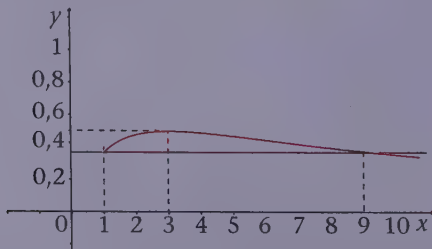
Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, la dérivée a la signe de son numérateur.

Donc $f'(x) > 0$ si $x < 3$ et $f'(x) < 0$ si $x > 3$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

b. Représentation graphique de f sur $[1 ; 10]$.



CONSEIL

La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$; elle est dérivable sur son ensemble de définition.

On applique la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

c. La fonction f atteint son maximum 0,5 lorsque x vaut 3.

Comme $p_n = f(n)$, on en déduit que la probabilité p_n de tirer une boule de chaque couleur est maximum lorsqu'il y a **trois boules noires** dans l'urne.

La valeur maximale est alors $p_3 = 0,5$.

d. Graphiquement, la droite d'équation $y = 0,375$ coupe la courbe représentative de f en deux points ayant pour abscisses 1 et 9.

$$\frac{6x}{(x+3)^2} = 0,375 \text{ équivaut à } \frac{6x}{0,375} = (x+3)^2.$$

$$16x = (x+3)^2$$

$$16x = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

On calcule le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 9 = 64.$$

$$\Delta > 0, \text{ l'équation admet deux solutions : } x_1 = \frac{10-8}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{10+8}{2} = 9.$$

La probabilité de tirer une boule de chaque couleur est égale à 0,375 lorsqu'il y a soit une boule noire, soit neuf boules noires dans l'urne.

Exercice 16

1. L'urne contient $n+3$ boules, 3 rouges et n noires.

Comme elles sont indiscernables au toucher, on est en situation d'équiprobabilité.

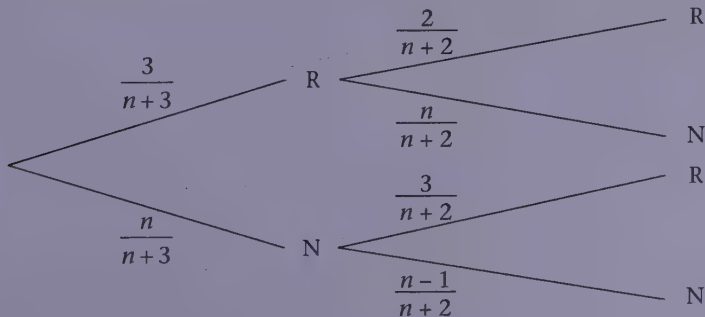
On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, **on ne la remet pas**, puis on effectue un second tirage d'une boule.

On note R l'issue « la boule obtenue est rouge » et N l'issue « la boule obtenue est noire ».

Au premier tirage, ces issues ont pour probabilité $p(R) = \frac{3}{n+3}$ et $p(N) = \frac{n}{n+3}$; mais au deuxième tirage, on doit tenir compte, dans la

composition de l'urne, du résultat du premier tirage.

On modélise la répétition des deux tirages par l'arbre pondéré suivant :



L'événement A « obtenir deux boules rouges » est réalisé par la liste (R ; R).

Donc la probabilité de A est $p(A) = \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{n+2}$; $p(A) = \frac{6}{(n+3)(n+2)}$.

L'événement B « obtenir une boule de chaque couleur » est réalisé par les listes (R ; N) et (N ; R).

Donc la probabilité de B est $p(B) = \frac{3}{n+3} \times \frac{n}{n+2} + \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{n+2}$;
 $p(B) = \frac{6n}{(n+3)(n+2)}$.

L'événement C « obtenir deux boules noires » est réalisé par la liste (N ; N).

Donc la probabilité de C est $p(C) = \frac{n}{n+3} \times \frac{n-1}{n+2}$; $p(C) = \frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$.

On peut vérifier que $p(A) + p(B) + p(C) = 1$:

$$\frac{6}{(n+3)(n+2)} + \frac{6n}{(n+3)(n+2)} + \frac{n^2 - n}{(n+3)(n+2)} = \frac{6 + 5n + n^2}{6 + 5n + n^2} = 1.$$

2. a. $g(x) = \frac{6x}{(x+3)(x+2)}$.

On pose $u(x) = 6x$, $v(x) = (x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$;

donc $u'(x) = 6$ et $v'(x) = 2x + 5$.

$$g'(x) = \frac{6(x^2 + 5x + 6) - 6x(2x + 5)}{((x+3)(x+2))^2}, \text{ d'où } g'(x) = \frac{6(-x^2 + 6)}{(x+3)^2(x+2)^2}.$$

$$-x^2 + 6 = (-x + \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$$

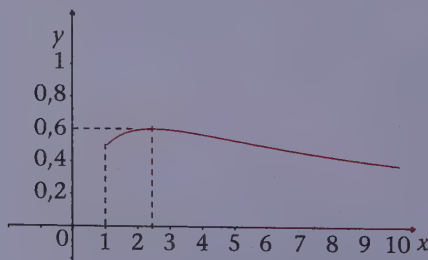
Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $g'(x) = 0$ si $x = \sqrt{6}$.

La dérivée a le signe de son numérateur, donc $g'(x) > 0$ si $x < \sqrt{6}$
 et $g'(x) < 0$ si $x > \sqrt{6}$.

On en déduit le tableau de variations de g :

x	1	$\sqrt{6}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0,5	$g(\sqrt{6})$	

b. Représentation graphique de g sur $[1 ; 10]$:



c. La fonction g atteint son maximum lorsque x vaut $\sqrt{6}$.

Les nombres entiers les plus proches sont 2 et 3 : $g(2) = 0,6$ et $g(3) = 0,6$. Comme $p_n = g(n)$, on en déduit que la probabilité p_n de tirer une boule de chaque couleur est maximum lorsqu'il y a deux ou trois boules noires dans l'urne.

La valeur maximale est alors 0,6.

Exercice 17

1. La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1. Soit y la probabilité de vendre exactement deux voitures en une semaine ; le nombre y est solution de l'équation $0,26 + 0,23 + y + 0,15 + 0,05 = 1$. D'où $y = 0,31$.

2. L'événement A « vendre au moins deux voitures en une semaine » est la réunion des événements élémentaires ($X = 2$), ($X = 3$) et ($X = 4$). Donc : $p(A) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,31 + 0,15 + 0,05$, soit $p(A) = 0,51$.

3. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

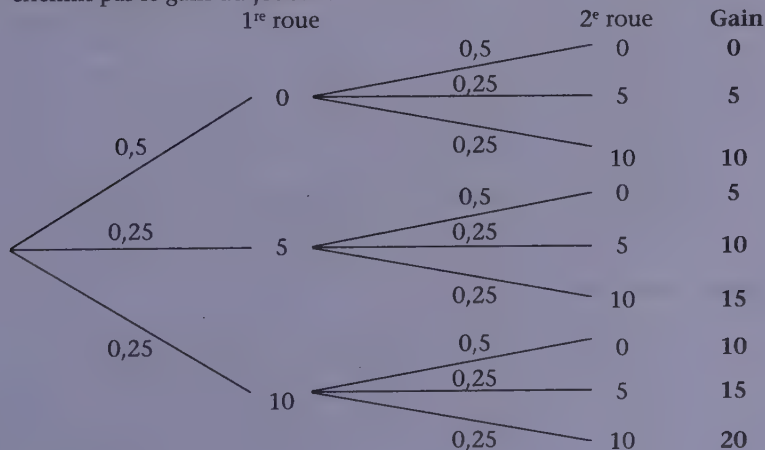
$E(X) = 0 \times 0,26 + 1 \times 0,23 + 2 \times 0,31 + 3 \times 0,15 + 4 \times 0,05$, soit $E(X) = 1,5$. On en déduit le nombre moyen de voitures vendues en une année : $52 \times 1,5 = 78$, soit **78 voitures**.

4. La commission du vendeur pour la vente d'une voiture de ce modèle est $13\,500 \times 0,004 = 54$ €.

Donc le montant moyen de la commission perçue en un an est $54 \times 78 = 4\,212$, soit **4 212 €**.

Exercice 18

1. a. On construit un arbre modélisant l'expérience, en complétant chaque chemin par le gain du joueur :



b. La variable aléatoire G prend les valeurs 0, 5, 10, 15 et 20.

L'événement ($G = 0$) est constitué par la liste (0 ; 0) ; il a pour probabilité $0,5 \times 0,5 = 0,25$.

L'événement ($G = 5$) est constitué par les listes (0 ; 5) et (5 ; 0) ;

$$P(G = 5) = 0,5 \times 0,25 + 0,25 \times 0,5 = 0,25.$$

L'événement ($G = 10$) est constitué par les listes (0 ; 10), (5 ; 5) et (10 ; 0) ;

$$P(G = 10) = 0,5 \times 0,25 + 0,25 \times 0,25 + 0,25 \times 0,5 = 0,3125.$$

L'événement ($G = 15$) est constitué par les listes (10 ; 5) et (5 ; 10) ;

$$P(G = 15) = 0,25 \times 0,25 + 0,25 \times 0,25 = 0,125.$$

L'événement ($G = 20$) est constitué par la liste (10 ; 10) ; il a pour probabilité $0,25 \times 0,25 = 0,0625$.

La loi de probabilité de G est résumée dans le tableau suivant :

Valeurs x_i	0	5	10	15	20
$P(G = x_i)$	0,25	0,25	0,3125	0,125	0,0625

(On vérifie que la somme des probabilités est bien égale à 1.)

c. L'événement ($G > 10$) est la réunion des événements incompatibles ($G = 15$) et ($G = 20$).

$$\text{Donc } P(G > 10) = P(G = 15) + P(G = 20) = 0,125 + 0,0625 = 0,1825.$$

La probabilité que le joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise de 10 euros est 0,1825.

d. L'espérance mathématique de G est $E(G) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

$$E(G) = 0 \times 0,25 + 5 \times 0,25 + 10 \times 0,3125 + 15 \times 0,125 + 20 \times 0,0625 = 7,5$$

On en déduit que l'espérance de gain d'un joueur est de 7,50 €.

2. a. La mise du joueur est m euros.

La variable aléatoire B prend les valeurs m , $m - 5$, $m - 10$, $m - 15$ et $m - 20$.

On a $B = -G + m$, donc $E(B) = -E(G) + m$.

D'après la question 1. d., $E(B) = m - 7,5$.

b. Les valeurs de m telles que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5 € sont solutions de l'inéquation :

$$m - 7,5 \geq 5 ; \text{ d'où } m \geq 12,5$$

L'espérance de bénéfice de l'association est supérieur ou égal à 5 € à condition que la mise du joueur soit supérieure ou égale à 12,50 €.

ATTENTION

On applique la propriété :
« Si a et b sont deux réels,
alors $E(aX + b) = aE(X) + b$. »

Exercice 19

1. a. En posant $p_N = x$, on peut écrire $p_V = 2x$ et $p_R = 4x$.

Le nombre x est solution de l'équation $4x + 2x + x = 1$, soit $7x = 1$,

ce qui donne $x = \frac{1}{7}$.

D'où $p_N = \frac{1}{7}$, $p_V = \frac{2}{7}$ et $p_R = \frac{4}{7}$.

b. Soit n le nombre total de boules dans l'urne.

Toutes les boules ayant la même probabilité d'être tirées, comme il y a 5 boules noires, $p_N = \frac{5}{n}$, donc $\frac{5}{n} = \frac{1}{7}$. On en déduit que $n = 35$.

Il y a 10 boules vertes et 20 boules rouges.

2. a. Tableau donnant la loi de probabilité de X :

Somme donnée par l'organisateur x_i	0,50	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

L'espérance mathématique de X est $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

$$E(X) = 0,50 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{2}{7} + 2 \times \frac{4}{7}, \text{ soit } E(X) = 1,50.$$

b. Si l'organisateur du jeu vendait 1,50 € un ticket donnant le droit d'effectuer un tirage, le bénéfice qu'il pourrait espérer avoir réalisé à l'issue de 1 000 jeux serait de 0 €.

$$\mathbf{3. a.} \quad p_N = \frac{k}{30+k}, p_V = \frac{10}{30+k} \text{ et } p_R = \frac{20}{30+k}.$$

$$\mathbf{b.} \quad E(Y) = 0,50 \times \frac{k}{30+k} + 1 \times \frac{10}{30+k} + 2 \times \frac{20}{30+k};$$

$$E(Y) = \frac{0,5k + 50}{k + 30}.$$

c. Le bénéfice moyen de l'organisateur à l'issue d'un tirage est $1,50 - E(Y)$. Pour réaliser un bénéfice de 500 € à l'issue de 1 000 jeux, le nombre k doit être solution de l'équation suivante :

$$\left(1,5 - \frac{0,5k + 50}{k + 30}\right) \times 1\,000 = 500$$

$$\frac{1,5(k + 30) - 0,5k - 50}{k + 30} = 0,5$$

$$k - 5 = 0,5(k + 30)$$

$$0,5k = 20, \text{ donc } k = 40.$$

Pour réaliser un bénéfice de 500 € à l'issue de 1 000 jeux, l'organisateur doit mettre 40 boules noires dans l'urne.

1 Loi de Bernoulli

- Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire n'ayant que deux résultats possibles appelés succès S et échec E . Si la probabilité d'avoir un succès est p , la probabilité d'avoir un échec est $1 - p$.
- La loi de probabilité pour cette épreuve est appelée **loi de Bernoulli**.

2 Loi binomiale**a. Schéma de Bernoulli**

- Lorsqu'on répète n fois dans les mêmes conditions et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli, on parle d'un **schéma de Bernoulli**.
- Si on note X le nombre de succès, X est une variable aléatoire prenant les valeurs entières de 0 à n .

b. Loi binomiale

- Soit k un nombre entier naturel inférieur ou égal à n .
Un schéma en arbre, pour de petites valeurs de n , permet de dénombrer les façons d'obtenir k succès et de calculer la probabilité de l'événement ($X = k$).
- La loi de probabilité pour cette répétition d'épreuves est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p .

c. Coefficients binomiaux

- Le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions d'un schéma de Bernoulli est appelé coefficient binomial ; on le note $\binom{n}{k}$ (on lit « k parmi n »). On l'obtient en comptant le nombre de chemins dans un schéma de Bernoulli ou à l'aide d'une calculatrice.

- Si $0 \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. (propriété de symétrie)
- Si $0 \leq k \leq n-1$, alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. (formule de Pascal)

d. Formule de la loi binomiale

■ La formule générale de la loi binomiale s'écrit, pour $n \geq 1$ et pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

e. Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale

Soit une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p .

■ L'espérance mathématique de X est $E(X) = np$.

■ Sa variance est $V(X) = np(1-p)$.

■ Son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

3 Échantillonnage

a. Intervalle de fluctuation d'une fréquence

■ On étudie un caractère sur une population ; à partir d'études statistiques, on émet l'hypothèse que la proportion de personnes présentant ce caractère dans la population est p .

On cherche à valider ou non cette hypothèse sur un échantillon de n individus, constitué par tirage au sort avec remise ; on calcule la fréquence f d'individus présentant ce caractère.

La variable aléatoire X égale au nombre d'individus présentant ce caractère suit la loi binomiale de paramètres n et p .

X prenant les valeurs entières entre 0 et n , on cherche deux nombres entiers a et b pour partager l'intervalle $[0 ; n]$ en trois intervalles $[0 ; a - 1]$, $[a ; b]$ et $[b + 1 ; n]$ de manière à ce que la probabilité que X appartienne à chacun des intervalles $[0 ; a - 1]$ et $[b + 1 ; n]$ soit inférieure ou égale à 0,025.

■ L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille n , d'une variable aléatoire

X de loi binomiale, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n} \right]$ défini par :

– a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$;

– b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

b. Prise de décision à partir d'un échantillon

- On émet l'hypothèse que la proportion d'un caractère est p .

On calcule la fréquence f sur un échantillon de taille n et on détermine l'intervalle de fluctuation à 95 % de cette fréquence. Cet intervalle contient au moins 95 % des fréquences observées sur des échantillons de taille n . Il y a donc un risque de 5 % pour une fréquence observée f de ne pas se trouver dans cet intervalle.

- On applique la règle de décision suivante :

- si $f \in \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$, alors on ne peut pas rejeter l'hypothèse au seuil de risque 5 % ;
- si $f \notin \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$, alors on rejette l'hypothèse au seuil de risque 5 %.

Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale

Énoncé

1. On place dans un sac cinq jetons jaunes et un jeton vert. On tire successivement deux jetons du sac sans remettre le premier jeton tiré.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de deux jetons le nombre de jetons verts obtenus.

Dire si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui, donner ses paramètres.

2. Une urne contient des boules jaunes et des boules vertes. On sait qu'il y a 20 % de boules vertes.

On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de quatre boules le nombre de boules vertes obtenues.

Dire si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui, donner ses paramètres.

Solution commentée

Savoir-faire

- On commence par regarder si on est dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux issues.
- Si oui, on reconnaît un schéma de Bernoulli et la loi suivie par la variable aléatoire X égale au nombre de succès est la loi binomiale de paramètres n et p , où n est le nombre de répétitions de l'épreuve et p la probabilité de succès dans une épreuve.

1. La première expérience consiste à tirer un jeton dans le sac qui contient 6 jetons et à regarder sa couleur ; la deuxième expérience consiste à tirer un jeton dans le sac qui contient 5 jetons puisqu'on n'a pas remis le jeton tiré dans le sac. Les deux expériences ne sont pas identiques. Il ne s'agit pas d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X égale au nombre de tirages d'un jeton vert ne suit pas une loi binomiale.

2. L'expérience consiste à tirer une boule de l'urne et à regarder sa couleur ; on appelle « succès » le tirage d'une boule verte et « échec » le tirage d'une boule jaune ; on répète cette expérience quatre fois de façon identique puisqu'on remet chaque fois la boule tirée dans l'urne avant de tirer la

suivante. On reconnaît donc un schéma de Bernoulli ; le nombre de répétitions est $n = 4$; la probabilité de succès à chaque tirage est la probabilité de tirer une boule verte, soit $p = 0,2$.

La variable aléatoire X égale au nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,2$.

2 Utiliser un schéma de Bernoulli

Énoncé

On reprend l'expérience du point méthode précédent : une urne contient des boules jaunes et des boules vertes. Il y a 20 % de boules vertes. On tire successivement, avec remise, quatre boules dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de quatre boules le nombre de boules vertes obtenues.

On a démontré que la variable aléatoire suivait la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,2$.

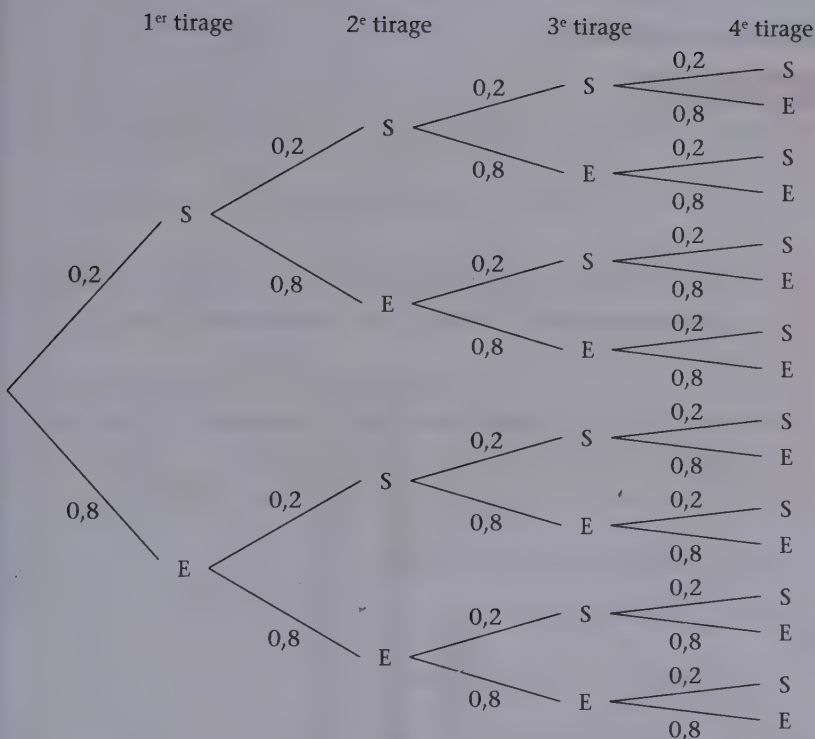
1. Représenter à l'aide d'un arbre pondéré le schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0,2$.
2. Utiliser l'arbre pour calculer la probabilité de l'événement $(X = 2)$.

Solution commentée

Savoir-faire

- Dans la question 1., on inscrit, à chaque tirage d'une lettre, les issues à l'extrémité des branches et la probabilité de chaque issue sur la branche de l'arbre qui conduit à cette issue.
- Dans la question 2., on écrit les listes de résultats qui réalisent l'événement.

1. On construit l'arbre pondéré correspondant à quatre répétitions du tirage de deux boules dans l'urne avec remise de la première boule tirée, le succès S dans chaque épreuve étant « tirer une boule verte », de probabilité $p = 0,2$, et l'échec E étant « tirer une boule jaune », de probabilité $0,8$.



2. L'événement $(X = 2)$ est constitué de six issues : SSEE, SESE, SEES, ESSE, ESES, EESS. Chacune de ces issues a la probabilité $0,2^2 \times 0,8^2$.

Donc $P(X = 2) = 6 \times 0,2^2 \times 0,8^2$, soit $p(X = 2) = 0,1536$. La probabilité de tirer exactement deux boules vertes en tirant 4 boules est égale à 0,1536.

3 Déterminer une loi binomiale

Énoncé

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,2$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer son espérance mathématique et son écart-type.
3. Représenter graphiquement cette loi.

Solution commentée

Savoir-faire

■ Dans la question 1., on peut utiliser la formule générale de la loi binomiale :

pour $n \geq 1$ et tout entier k , $0 \leq k \leq n$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (on lit « k parmi n ») s'obtient en comptant le nombre de chemins dans un schéma de Bernoulli ou à l'aide d'une calculatrice.

■ Dans la question 2., on utilise les formules donnant l'espérance mathématique et l'écart-type d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale : $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

■ Dans la question 3., on construit un diagramme en bâtons.

1. La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4.

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \times 0,2^0 \times 0,8^4 ;$$

$$\text{or } \binom{4}{0} = 1, \text{ donc } P(X = 0) = 0,8^4 = 0,4096.$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0,2^1 \times 0,8^3 ;$$

$$\text{or } \binom{4}{1} = 4, \text{ donc } P(X = 1) = 4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 0,4096.$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,2^2 \times 0,8^2 ;$$

$$\text{or } \binom{4}{2} = 6, \text{ donc } P(X = 2) = 6 \times 0,2^2 \times 0,8^2 = 0,1536.$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,2^3 \times 0,8^1 ;$$

$$\text{or } \binom{4}{3} = 4, \text{ donc } P(X = 3) = 4 \times 0,2^3 \times 0,8 = 0,0256.$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0,2^4 \times 0,8^0 ;$$

$$\text{or } \binom{4}{4} = 1, \text{ donc } P(X = 4) = 0,2^4 = 0,0016.$$

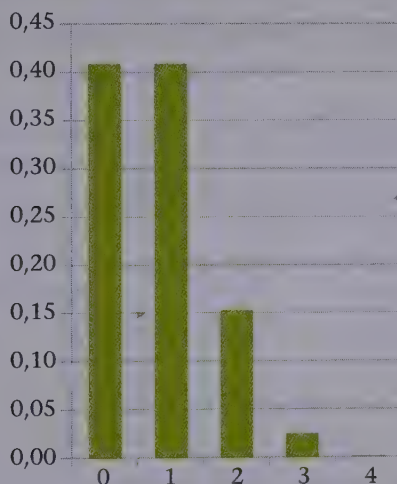
On résume ces résultats dans un tableau.

k	0	1	2	3	4	somme
$P(X = k)$	0,409 6	0,409 6	0,153 6	0,025 6	0,001 6	1

2. L'espérance mathématique est $E(X) = 4 \times 0,2 = 0,8$.

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{4 \times 0,2 \times 0,8} = 0,8$.

3. On construit, avec la calculatrice ou un tableur, le diagramme en bâtons représentant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,2$.



4 Déterminer un intervalle de fluctuation

Énoncé

On considère une urne contenant des boules jaunes et des boules vertes. On sait qu'il y a 20 % de boules vertes. On tire successivement, et avec remise, 40 boules dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de quarante boules le nombre de boules vertes obtenues. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,2$.

1. Créer sur un tableur une feuille de calcul donnant les probabilités $P(X \leq k)$, pour k compris entre 0 et 24.

2. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence f du nombre de boules vertes obtenues dans les échantillons de taille 40.

Solution commentée

Savoir-faire

- Dans la question 1., on donne l'instruction écrite dans la cellule B2.
- Dans la question 2., on commence par déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

L'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$.

1. En B2, on a écrit la formule :

=LOI.BINOMIALE(B2;40;0,2;1).

2. On lit en B4 et en B5 : $P(X \leq 2) \approx 0,0079$;
 $P(X \leq 3) \approx 0,0285$.

On en déduit que le plus petit entier a tel que
 $P(X \leq a) > 0,025$ est $a = 3$.

On lit en B14 et en B15 : $P(X \leq 12) \approx 0,957$;
 $P(X \leq 13) \approx 0,981$.

On en déduit que le plus petit entier b tel que
 $P(X \leq b) \geq 0,975$ est $b = 13$.

L'intervalle de fluctuation à 95 % de la
fréquence f est donc l'intervalle :

$\left[\frac{3}{40}; \frac{13}{40}\right]$, soit $[0,075 ; 0,325]$.

	A	B
1	k	$P(X \leq k)$
2	0	0,000133
3	1	0,001462
4	2	0,007942
5	3	0,028462
6	4	0,075914
7	5	0,161329
8	6	0,285891
9	7	0,437146
10	8	0,593127
11	9	0,731777
12	10	0,839231
13	11	0,912495
14	12	0,956758
15	13	0,980593
16	14	0,992084
17	15	0,997064
18	16	0,999009
19	17	0,999696
20	18	0,999915
21	19	0,999978
22	20	0,999995
23	21	0,999999
24	22	1,000000
25	23	1,000000
26	24	1,000000

5 Exploiter un intervalle de fluctuation

Énoncé

Une candidate à une élection affirme que 55 % des électeurs vont voter pour elle. Un sondage est réalisé auprès de 250 personnes.

Avec la loi binomiale de paramètres $p = 0,55$ et $n = 250$, on a déterminé l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f des personnes qui iront voter pour cette candidate dans un échantillon de 250 personnes ; on a trouvé $\left[\frac{122}{250} ; \frac{153}{250} \right] = [0,488 ; 0,612]$.

On observe que sur les 250 électeurs interrogés, 119 déclarent qu'ils voteront pour cette candidate.

Au seuil de risque de 5 %, que peut-on dire de l'affirmation de cette candidate ?

Solution commentée

Savoir-faire

Pour répondre à cette question, on applique la règle de décision suivante :

si $f \in \left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n} \right]$, alors on ne peut pas rejeter l'hypothèse, sinon on rejette l'hypothèse au seuil de risque 5 %.

La règle de décision est :

si $f \in [0,488 ; 0,612]$, l'hypothèse $p = 0,55$ est acceptable, sinon elle est rejetée, au seuil de 5 %.

La fréquence de l'échantillon est $f = \frac{119}{250} = 0,476$.

$0,476 \notin [0,488 ; 0,612]$, donc au seuil de risque 5 % on rejette l'affirmation de la candidate.

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

① Le nombre $\binom{6}{3}$ est égal à :

- ☐ a. 2. ☐ b. 20. ☐ c. 120.

② On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,8$.

- ☐ a. $P(X = 1) = 0,096$.
☐ b. $P(X = 1) = 0,032$.
☐ c. $P(X = 1) = 0,32$.

③ On reprend les mêmes données qu'à la question précédente.

- ☐ a. $P(X < 1) = 0$.
☐ b. $P(X < 1) = 0,008$.
☐ c. $P(X < 3) = 1$.

④ Un représentant propose un produit à la vente. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,1. Il voit 5 clients dans une matinée. La probabilité qu'il ait vendu exactement 2 produits est égale à :

- ☐ a. 0,2. ☐ b. 0,043 74. ☐ c. 0,072 9.

⑤ Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires. On tire au hasard une boule, on note sa couleur, on la remet ; on procède ainsi à 4 tirages successifs et indépendants. La probabilité d'obtenir 4 fois une boule noire est :

- ☐ a. $\left(\frac{1}{3}\right)^4$. ☐ b. $\left(\frac{3}{8}\right)^4$. ☐ c. $4 \times \frac{3}{8}$.

⑥ Un sac contient 10 billes indiscernables au toucher, dont 2 vertes. On tire au hasard une bille, on note sa couleur, on la remet ; on procède ainsi à 7 tirages successifs et indépendants. La probabilité d'obtenir exactement 3 billes vertes est :

- ☐ a. $35 \times 0,8^4 \times 0,2^3$.
☐ b. $4 \times 0,8 \times 3 \times 0,2$.
☐ c. 0.

⑦ À chacune des parties qu'il dispute avec Philippe, Jérôme a une probabilité de 0,3 de perdre. Au cours d'un trimestre, ils se sont affrontés 10 fois. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de victoires de Jérôme :

- ☐ a. $P(X = 5) = 0,3^5 \times 0,7^5$.
☐ b. $P(X \geq 9) = 7 \times 0,3^9$.
☐ c. $P(X > 0) \approx 0,97$.

⑧ Soit la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :

- ☐ a. 0,3. ☐ b. 10. ☐ c. 3.

⑨ On reprend les mêmes données qu'à la question précédente. L'écart-type de la variable aléatoire X est :

- ☐ a. 2,1. ☐ b. $\sqrt{2,1}$. ☐ c. $\sqrt{0,21}$.

⑩ Une étude affirme que la proportion de téléphones portables recyclés et réutilisés après un renouvellement est de 25 %. Un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f dans un échantillon de taille 100 est :

- ☐ a. $[0,17 ; 0,34]$. ☐ b. $[0,16 ; 0,35]$.
☐ c. $[0,17 ; 0,35]$.

Exercices

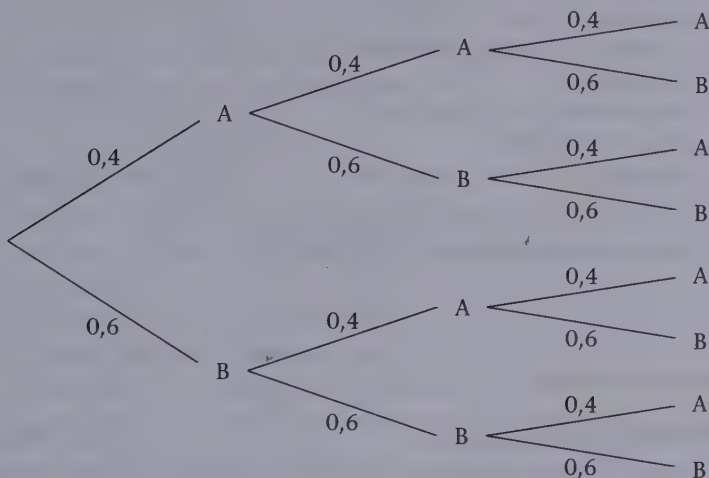
Schéma de Bernoulli

Exercice 1

niveau 1

Corrigés p. 371

On considère l'arbre pondéré suivant qui modélise la répétition d'une expérience aléatoire.



On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de A obtenus.

1. Préciser les valeurs prises par X .
2. Donner les issues de l'événement ($X = 1$). Quelle est la probabilité de l'événement ($X = 1$) ?
3. Déterminer, en utilisant l'arbre pondéré, la loi de probabilité de X .

Coefficients binomiaux

Exercice 2

niveau 1

Corrigés p. 371

1. Sans utiliser la calculatrice, donner les valeurs des nombres suivants :

$$\binom{3}{2}; \binom{6}{1}; \binom{5}{4}; \binom{9}{0}; \binom{8}{8}.$$

2. À l'aide d'un arbre ou d'une calculatrice, donner les valeurs des nombres $\binom{4}{2}; \binom{5}{2}; \binom{6}{3}; \binom{7}{4}; \binom{10}{6}.$

Exercice 3

niveau 1

Corrigés p. 371

On sait que, pour tous entiers n et k , si $0 \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$;

et si $0 \leq k \leq n-1$, alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Pour calculer les coefficients binomiaux, on peut utiliser le « triangle de Pascal » commencé sur un tableau.

	A	B	C	D	E	F
1	n^k	0	1	2	3	4
2	1	1	1			
3	2	1	2	1		
4	3	1	3	3	1	
5	4	1	4	6	4	1

1. Quelle est la formule écrite dans la cellule D5 ?

2. Continuer le triangle de Pascal jusqu'à $n = 10$.

3. Donner les valeurs de $\binom{8}{5}$, $\binom{8}{6}$ et $\binom{9}{6}$.

Loi binomiale**Exercice 4**

niveau 1

Corrigés p. 372

Dans une boîte, un professeur dispose de dix marqueurs dont trois rouges.

1. Il prend un marqueur sans regarder. Les élèves parient sur un marqueur rouge.

Reconnaissez-vous une épreuve de Bernoulli ? Si oui, définir le succès, l'échec et donner la loi de Bernoulli.

2. Le professeur prend successivement deux marqueurs dans la boîte, sans remettre le premier. On note X la variable aléatoire égale au nombre de marqueurs rouges extraits.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

3. Le professeur distrait prend un premier marqueur, ne le regarde pas (mais les élèves, eux sont attentifs !), le remet dans la boîte, puis reprend un marqueur.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de marqueurs rouges extraits.

La variable aléatoire Y suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

Renseigner le tableau donnant la loi de probabilité de Y .

Exercice 5 niveau 1

Corrigés p. 373

On dispose d'un dé cubique parfaitement équilibré possédant quatre faces rouges et deux faces vertes. Un jeu consiste à lancer trois fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Modéliser cette expérience par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu les trois faces obtenues soient vertes.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu les trois faces obtenues soient de la même couleur.

Exercice 6 niveau 1

Corrigés p. 374

On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de côtés face obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Représenter graphiquement cette loi.
3. Calculer la probabilité de l'événement $(X < 2)$.
4. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .

Exercice 7 niveau 2

Corrigés p. 375

(D'après Bac S, Nouvelle Calédonie, novembre 2011) Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ».

On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
2. Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.
3. Calculer l'espérance mathématique de X (on arrondira à l'entier le plus proche).
4. Calculer la variance et l'écart-type de X .

Exercice 8

niveau 2

Corrigés p. 375

(D'après Bac S, La Réunion, 2009) Une usine produit des sacs. On a établi que la probabilité, arrondie au centième, qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à une répétition de 100 tirages indépendants avec remise. On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 100 sacs associe le nombre de sacs défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X . Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Exercice 9

niveau 3

Corrigés p. 376

(D'après Bac S, Asie, 2007) Une fabrication artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à des contrôles. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que 93,4 % des jouets réussissent le test de solidité.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise. Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

Exercice 10

niveau 3

Corrigés p. 376

(D'après Bac S, Inde, 2007) Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est égale à 0,1. L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante. (On suppose que la quantité de personnes

fréquentant cette galerie commerçante est suffisamment importante pour que le choix des personnes puisse être assimilé à un tirage avec remise.)

On considère les événements :

A : « au moins une personne accepte de répondre » ;

B : « moins de trois personnes acceptent de répondre » ;

C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».

Calculer les probabilités des événements A, B et C. On arrondira au millième.

Exercice 11

niveau 3

Corrigés p. 377

(D'après Bac S, Amérique du Nord, 2010) Une urne contient des boules indiscernables au toucher ; 20 % des boules sont rouges.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne).

1. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours des n tirages.
2. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 12

niveau 3

Corrigés p. 377

(D'après Bac S, Métropole, septembre 2011) Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12.

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.

On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à une répétition de 20 tirages identiques et indépendants.

1. Calculer $\binom{20}{2}$.
2. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne durant la première année d'utilisation ?

Intervalles de fluctuation

Exercice 13

niveau 1

Corrigés p. 378

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,46$. On donne un extrait de la table de valeurs de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$, k étant un entier compris entre 0 et 35.

- Calculer $\binom{35}{10}$ et $\binom{35}{18}$.
- Calculer $P(X = 10)$ et $P(X = 18)$. Contrôler les réponses avec la table de valeurs fournie ci-contre.
- Les formules écrites en B2 et C2 sont respectivement :
 $\text{=LOI.BINOMIALE(A3;35;0,46;0)}$
 $\text{=LOI.BINOMIALE(A3;35;0,46;1)}$
 avec OpenOffice.
 Donner la signification du nombre écrit dans la cellule C22.
- En utilisant la table de valeurs, déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

	A	B	C
1	k	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
2	0	0,000000	0,000000
3	1	0,000000	0,000000
4	2	0,000000	0,000000
5	3	0,000002	0,000002
6	4	0,000012	0,000014
7	5	0,000063	0,000076
8	6	0,000267	0,000343
9	7	0,000942	0,001285
10	8	0,002808	0,004093
11	9	0,007176	0,011270
12	10	0,015894	0,027164
13	11	0,030772	0,057936
14	12	0,052427	0,110363
15	13	0,079013	0,189376
16	14	0,105769	0,295145
17	15	0,126139	0,421285
18	16	0,134315	0,555600
19	17	0,127877	0,683478
20	18	0,108933	0,792410
21	19	0,083027	0,875437
22	20	0,056581	0,932018
23	21	0,034428	0,966446
24	22	0,018663	0,985108
25	23	0,008986	0,994094
26	24	0,003827	0,997922
27	25	0,001435	0,999356

Exercice 14

niveau 1

Corrigés p. 378

Un professeur de mathématiques a calculé que la proportion d'élèves ayant la moyenne à un test de calcul passé en début d'année dans des classes de 1^{re} S est de 46 %.

Sa classe de 1^{re} S compte cette année 35 élèves.

- En utilisant la table de valeurs et les résultats de la quatrième question de l'exercice 13, donner l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f dans les échantillons de taille 35.
- Comparer avec l'intervalle de fluctuation obtenu en classe de seconde.

2. Le même professeur de mathématiques refait passer le même test à ses 35 élèves un mois plus tard. Il s'attend alors à ce que la proportion d'élèves ayant la moyenne au test soit de 85 %.

a. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,85$. En utilisant la calculatrice ou un tableur, déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

b. En déduire un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f dans les échantillons de taille 35.

Exercice 15

niveau 2

Corrigés p. 379

Suite à une étude de nutrition et santé à laquelle 206 000 internautes ont répondu, un chercheur a calculé que 84 % des 18-25 ans et 48 % des plus de 65 ans ne consomment pas, par jour, cinq fruits et légumes et trois produits laitiers.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des 18-25 ans ne consommant pas, par jour, cinq fruits et légumes et trois produits laitiers, dans un échantillon de taille 100.

2. Déterminer un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des plus de 65 ans ne consommant pas, par jour, cinq fruits et légumes et trois produits laitiers, dans un échantillon de taille 100.

Exercice 16

niveau 2

Corrigés p. 379

Jérôme a lancé 150 fois une pièce de 1 euro. Il dit qu'il a obtenu 63 fois le côté face. Ses parents lui disent qu'il a dû se tromper ou que la pièce est truquée. Au seuil de 5 %, que peut-on dire de l'hypothèse « Jérôme ne s'est pas trompé et la pièce n'est pas truquée » ?

Exercice 17

niveau 3

Corrigés p. 380

Un organisme d'écologie estime que 77 % des composants des petits appareils électriques sont recyclables. Un centre de recyclage reçoit en moyenne 700 petits appareils électriques par jour.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence de recyclage dans un échantillon de taille 700.

2. Un jour, le responsable du centre dit qu'il a pu recycler 73 % des composants des 700 appareils reçus. Peut-on accepter au seuil de risque 5 % l'hypothèse « 77 % des composants des petits appareils électriques sont recyclables » ?

3. Les pouvoirs publics ont fixé à 70 % le taux de recyclage minimum des appareils électriques. Peut-on dire que ce taux est respecté ?

1 b. Le nombre $\binom{6}{3}$ donne le nombre de chemins réalisant 3 succès en répétant 6 fois une expérience. On dénombre donc les listes de six éléments écrites avec 3 succès ; par exemple (S ; S ; S ; E ; E ; E), (S ; S ; E ; S ; E ; E), (S ; S ; E ; E ; S ; E)... On peut donc éliminer la réponse a. Si on continue l'écriture des listes, on arrive à 20.

À NOTER

On peut retrouver le résultat avec la calculatrice ou en lisant la ligne $n = 6$ du triangle de Pascal (voir page 372).

2 a. $P(X = 1) = \binom{3}{1} \times 0,8 \times 0,2^2 = 3 \times 0,8 \times 0,04 = 0,096$.

3 b. On élimine les réponses a. et c.

En effet, $P(X < 1) = P(X = 0) = 0,2^3 \neq 0$ et $P(X < 3) = 1 - P(X = 3) = 1 - 0,8^3 \neq 1$.

4 c. $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^3 = 10 \times 0,01 \times 0,729 = 0,0729$.

5 b. Attention à la confusion avec la réponse a. : on ne demande pas de tirer une boule parmi 3 boules noires. La réponse c. fournit un nombre supérieur à 1, ce qui est impossible.

6 a. On utilise la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,2$; $\binom{7}{3} = 35$;

$P(X = 3) = \binom{7}{3} \times 0,2^3 \times 0,8^4$. La réponse c. est un piège : dans un tirage avec remise, on peut obtenir 3 billes vertes, même si au départ on ne dispose que de deux billes vertes. La réponse b. est une erreur de raisonnement : on a effectivement le nombre 0,2 trois fois et le nombre 0,8 quatre fois ; mais la règle de calcul dans les arbres pondérés amène à utiliser des puissances. De plus, si on effectue le calcul, le résultat est supérieur à 1.

7 c. Dans la réponse a., on a oublié de multiplier par le nombre de chemins dans un arbre pondéré conduisant à 5 succès parmi 10 épreuves ; or $\binom{10}{5} = 252$. On élimine la réponse b. car :

$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = 10 \times 0,3^9 \times 0,7 + 0,3^{10}$.

Directement, $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,7^{10} \approx 0,97$.

8 c. On applique la formule $E(X) = np$.

9 b. On applique la formule $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$;

$\sigma(X) = \sqrt{10 \times 0,3 \times 0,7} = \sqrt{2,1}$.

10 a. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,25$. On construit la table de valeurs de $P(X \leq k)$ avec la calculatrice ou un tableur. Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 17 ; le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 34.

16	0,021111
17	0,037626
33	0,972405
34	0,983573

Exercice 1

1. La variable aléatoire X prend pour valeur le nombre de A obtenus ; on peut obtenir A zéro fois, une fois, deux fois ou trois fois. Donc X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

2. Les issues qui réalisent l'événement $(X = 1)$ sont les listes (A ; B ; B), (B ; A ; B) et (B ; B ; A).

Ces trois issues ont la même probabilité égale à $0,4 \times 0,6 \times 0,6$.

Donc la probabilité de l'événement $(X = 1)$ est $P(X = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,6^2$, soit $P(X = 1) = 0,432$.

3. D'après l'arbre pondéré, l'événement $(X = 2)$ est réalisé par les listes (A ; A ; B), (A ; B ; A) et (B ; A ; A), donc $P(X = 2) = 3 \times 0,4^2 \times 0,6$; soit $P(X = 1) = 0,288$.

L'événement $(X = 3)$ est réalisé par la liste (A ; A ; A) ; $P(X = 3) = 0,4^3 = 0,064$.

L'événement $(X = 0)$ est réalisé par la liste (B ; B ; B) ; $P(X = 0) = 0,6^3 = 0,216$.

Le tableau suivant résume la loi de probabilité de X .

k	0	1	2	3	somme
$P(X = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064	1

Exercice 2

1. Dans un arbre pondéré représentant un schéma de Bernoulli avec trois répétitions, il y a trois chemins qui conduisent à deux succès ;

donc $\binom{3}{2} = 3$.

De même, il y a 6 chemins qui conduisent à un succès quand on répète

six fois la même expérience ; donc $\binom{6}{1} = 6$.

Avec le même raisonnement, on trouve $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$; $\binom{9}{0} = 1$; $\binom{8}{8} = 1$.

2. $\binom{4}{2} = 6$; $\binom{5}{2} = 10$; $\binom{6}{3} = 20$; $\binom{7}{4} = 35$; $\binom{10}{6} = 210$.

Exercice 3

1. Formule écrite dans la cellule D5 : =C4+D4.

Cette formule traduit l'application de la formule de Pascal en prenant

$n = 3$ et $k = 1$: $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$.

2. Triangle de Pascal jusqu'à $n = 10$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	1	1									
3	2	1	2	1								
4	3	1	3	3	1							
5	4	1	4	6	4	1						
6	5	1	5	10	10	5	1					
7	6	1	6	15	20	15	6	1				
8	7	1	7	21	35	35	21	7	1			
9	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
10	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
11	10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

3. $\binom{8}{5} = 56$; $\binom{8}{6} = 28$; $\binom{9}{6} = 84$. (On retrouve bien $56 + 28 = 84$.)

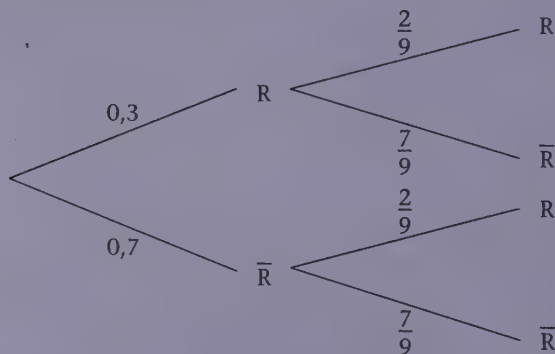
Exercice 4

1. Dans cette expérience, il n'y a que deux issues :

- succès, lorsque le professeur prend un marqueur rouge avec la probabilité 0,3 ;
- échec, lorsqu'il prend un marqueur d'une autre couleur avec la probabilité 0,7.

2. Lorsque le professeur prend le deuxième marqueur, il ne reste que 9 marqueurs dans la boîte ; la deuxième expérience n'est donc pas identique et indépendante de la première. La variable aléatoire X , égale au nombre de marqueurs rouges extraits, ne suit pas une loi binomiale.

On peut construire un arbre représentant cette expérience et en déduire la loi de probabilité de X :



$$P(X=0) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

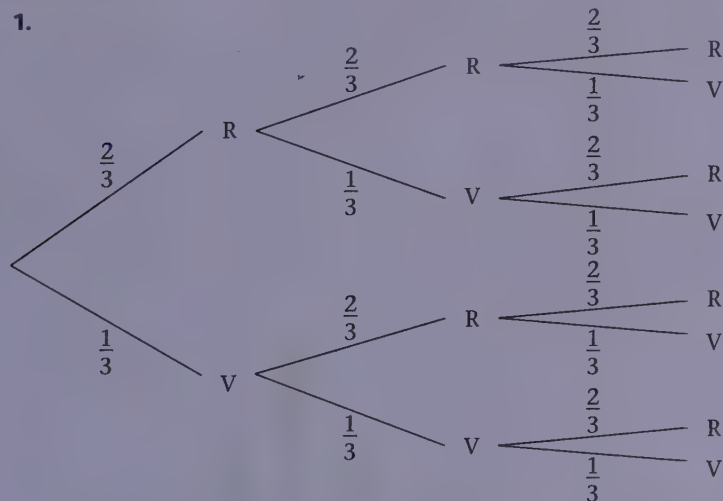
3. Lorsque le professeur prend le deuxième marqueur, la boîte a la composition qu'elle avait au départ ; la deuxième expérience est donc identique et indépendante de la première. La variable aléatoire Y , égale au nombre de marqueurs rouges extraits, suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0,3$.

Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

k	0	1	2	somme
$P(Y=k)$	$0,7^2 = 0,49$	$2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$	$0,3^2 = 0,09$	1

Exercice 5

1.



2. On reconnaît un schéma de Bernoulli. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de faces vertes obtenues.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$.

L'événement « les trois faces obtenues sont vertes » est l'événement $(X = 3)$.

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

La probabilité que les trois faces obtenues soient vertes est égale à $\frac{1}{27}$.

3. L'événement noté A « les trois faces obtenues sont de la même couleur » est réalisé lorsque les trois faces sont vertes ou lorsque les trois faces sont rouges. Il est donc la réunion des deux événements incompatibles ($X = 0$) et ($X = 3$).

$$p(A) = P(X = 0) + P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité que les trois faces obtenues soient de la même couleur est égale à $\frac{1}{3}$.

Exercice 6

1. On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée ; à chaque lancer, il n'y a que deux issues : pile ou face ; et les lancers successifs se font dans les mêmes conditions. On reconnaît un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0,5$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de côtés face obtenus est donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,5$.

CONSEIL

On applique la formule générale de la loi binomiale : pour $n \geq 1$ et tout entier k , avec $0 \leq k \leq n$,

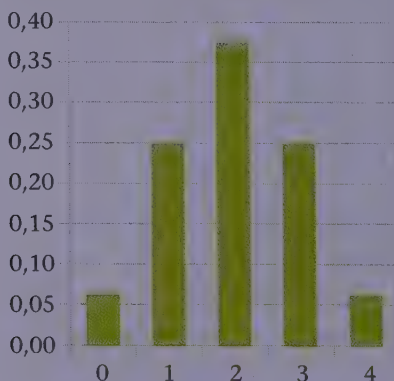
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On a, pour tout entier k , avec $0 \leq k \leq 4$, $P(X = k) = \binom{4}{k} \times 0,5^k \times 0,5^{4-k}$.

Le tableau ci-dessous a été obtenu avec un tableur.

k	0	1	2	3	4	somme
$P(X = k)$	0,062 5	0,250 0	0,375 0	0,250 0	0,062 5	1

2. Représentation graphique obtenue avec un tableur :



3. L'événement ($X < 2$) est la réunion des événements incompatibles ($X = 0$) et ($X = 1$).

Donc $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,062\,5 + 0,25$; $P(X < 2) = 0,312\,5$.

4. On applique les formules $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

$E(X) = 4 \times 0,5$, donc $E(X) = 2$; $\sigma(X) = \sqrt{4 \times 0,5 \times 0,5} = 1$.

Exercice 7

1. Les temps de fonctionnement sont supposés indépendants et de durée supérieure ou égale à 5 heures avec une probabilité égale à 0,52 ; leur durée est donc inférieure à 5 heures avec la probabilité 0,48.

La **variable aléatoire** X , égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures, suit la **loi binomiale de paramètres** $n = 8$ et $p = 0,52$.

2. En appliquant la formule de la loi binomiale, on a :

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} \times 0,52^3 \times 0,48^5 \approx 0,200\,6.$$

La probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures est égale à environ 0,20.

3. $E(X) = np = 8 \times 0,52 = 4,16$, donc $E(X) \approx 4$ (on arrondit à l'entier le plus proche).

4. $V(X) = np(1-p) = 8 \times 0,52 \times 0,48 = 1,996\,8$;

d'où $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,9968} \approx 1,4$.

Exercice 8

1. Le prélèvement de 100 sacs est assimilé à un tirage avec répétition de 100 expériences identiques et indépendantes. À chaque tirage, le sac est soit défectueux avec la probabilité $p = 0,03$, soit non défectueux avec la probabilité $1 - p = 0,97$.

On reconnaît un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$. Donc la **variable aléatoire** X , qui à tout prélèvement de 100 sacs associe le nombre de sacs défectueux, suit la **loi binomiale de paramètres** $n = 100$ et $p = 0,03$.

2. L'événement « au moins un sac est défectueux » se traduit par l'événement $(X \geq 1)$; il a pour événement contraire « aucun sac n'est défectueux », ce qui se traduit par $(X = 0)$.

On peut imaginer un arbre pour modéliser ce schéma de Bernoulli ; un seul chemin donne les 100 sacs non défectueux ; on en déduit $P(X = 0) = 0,97^{100}$.
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,97^{100}$, soit environ 0,952.

La probabilité d'obtenir au moins un sac défectueux dans un lot de 100 sacs est égale à 0,95 au centième près.

3. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$.

CONSEIL

On applique la formule
 $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

L'espérance mathématique de X est $E(X) = np$; donc $E(X) = 100 \times 0,03$; $E(X) = 3$.

Ce résultat signifie qu'en moyenne, dans un échantillon de 100 sacs, il y a 3 sacs défectueux.

Exercice 9

Le prélèvement d'un lot de 10 jouets est assimilé à la répétition de dix tirages avec remise d'un jouet. À chaque tirage, il n'y a que deux issues : soit le jouet a réussi le test de solidité (événement S de probabilité $p = 0,934$), soit le jouet n'a pas réussi le test de solidité (événement $\bar{S}$ de probabilité $1 - p = 0,066$). On reconnaît un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,934$.

La variable aléatoire X , égale au nombre de jouets subissant avec succès le test de solidité, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,934$. On applique la formule de la loi binomiale : pour tout entier k , $0 \leq k \leq 10$,

$$\text{on a } P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,934^k \times 0,066^{10-k}.$$

L'événement A « au moins 8 jouets du lot ont réussi le test de solidité » est l'événement $(X \geq 8)$; A est la réunion des événements incompatibles deux à deux : $(X = 8)$, $(X = 9)$ et $(X = 10)$.

$$\text{Donc } p(A) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$p(A) = \binom{10}{8} \times 0,934^8 \times 0,066^2 + \binom{10}{9} \times 0,934^9 \times 0,066 + \binom{10}{10} \times 0,934^{10}$$

$$p(A) = 45 \times 0,934^8 \times 0,066^2 + 10 \times 0,934^9 \times 0,066 + 0,934^{10}$$

$$p(A) \approx 0,9757.$$

La probabilité qu'un lot de 10 jouets contienne au moins 8 jouets ayant réussi le test de solidité est égale à environ 0,976.

Exercice 10

Dans cette situation, on reconnaît un schéma de Bernoulli ; le nombre de répétitions est $n = 50$; la probabilité de succès (événement S « la personne accepte de répondre ») est $p = 0,1$.

La variable aléatoire X égale au nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.

$$\text{On a, pour tout entier } k, 0 \leq k \leq 50, P(X = k) = \binom{50}{k} \times 0,1^k \times 0,9^{50-k}.$$

L'événement A « au moins une personne accepte de répondre » est l'événement $(X \geq 1)$; il a pour événement contraire $\bar{A} = (X = 0)$ (« aucune personne n'accepte de répondre »).

$$P(X = 0) = 0,9^{50}, \text{ donc } p(A) = 1 - 0,9^{50}; p(A) \approx 0,995.$$

L'événement B « moins de trois personnes acceptent de répondre » est l'événement $(X < 3)$.

$$p(B) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$p(B) = 0,9^{50} + \binom{50}{1} \times 0,1 \times 0,9^{49} + \binom{50}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^{48}$$

$$p(B) = 0,9^{50} + 50 \times 0,1 \times 0,9^{49} + 1\,225 \times 0,1^2 \times 0,9^{48} ; p(B) \approx 0,112.$$

L'événement C « trois personnes ou plus acceptent de répondre » est l'événement contraire de B.

$$p(C) = 1 - p(B), \text{ donc } p(C) \approx 0,888.$$

Exercice 11

1. À chaque tirage, on peut tirer soit une boule rouge avec la probabilité 0,2, soit une boule non rouge avec la probabilité 0,8. On effectue n tirages successifs identiques et indépendants.

La variable aléatoire X égale au nombre de succès (tirer une boule rouge) suit donc la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$.

L'événement « obtenir au moins une boule rouge au cours des n tirages », noté $(X \geq 1)$, a pour événement contraire l'événement $(X = 0)$, « obtenir zéro boule rouge ».

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,8^n.$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours des n tirages est $1 - 0,8^n$.

2. On cherche à déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

On cherche n tel que $1 - 0,8^n \geq 0,99$, ce qui équivaut à $0,8^n \leq 0,01$.

La suite de terme général $0,8^n$ est géométrique de raison 0,8 ; 0,8 étant compris entre 0 et 1, cette suite est décroissante.

On crée une table de valeurs avec la calculatrice.

Le plus petit entier naturel n vérifiant $0,8^n \leq 0,01$ est 21.

n	q^n
19	0,0144
20	0,0115
21	0,0092

Donc l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99 est 21.

Exercice 12

1. Avec la calculatrice, on trouve $\binom{20}{2} = 190$.

2. L'achat de 20 moteurs est assimilé à une répétition de 20 tirages identiques et indépendants. Pour chaque moteur, il n'y a que deux possibilités : soit il tombe en panne, soit il ne tombe pas en panne pendant la première année d'utilisation.

Si on appelle succès l'événement « un moteur tombe en panne », la variable aléatoire X égale au nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,12$.

On a, pour $k = 2$, $P(X = 2) = \binom{20}{2} \times 0,12^2 \times 0,88^{18}$.

$$P(X = 2) = 190 \times 0,12^2 \times 0,88^{18} \approx 0,274.$$

La probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation est égale à 0,274 au millièmme près.

3. L'événement « au moins un des moteurs tombe en panne durant la première année d'utilisation » noté $(X \geq 1)$ a pour événement contraire l'événement $(X = 0)$, « aucun moteur ne tombe en panne durant la première année d'utilisation ».

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,88^{20} \approx 0,922.$$

La probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne durant la première année d'utilisation est égale à 0,922 au millièmme près.

Exercice 13

1. Avec la calculatrice : $\binom{35}{10} = 183\,579\,396$ et $\binom{35}{18} = 4\,537\,567\,650$.

$$2. P(X = 10) = \binom{35}{10} \times 0,46^{10} \times 0,54^{25} \approx 0,015\,894;$$

$$P(X = 18) = \binom{35}{18} \times 0,46^{18} \times 0,54^{17} \approx 0,108\,933.$$

Sur la table, on lit en B12 : 0,015 894 et en B20 : 0,108 933.

3. Le nombre écrit dans la cellule C22 est 0,932 018.

Il donne la probabilité de l'événement $(X \leq 20)$.

4. Avec la table de valeurs :

– le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 10 ;

– le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 22.

k	$P(X \leq k)$
9	0,011270
10	0,027164
21	0,966446
22	0,985108

Exercice 14

1. a. Dans la quatrième question de l'exercice 13, on a trouvé que :

– le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est $a = 10$;

– le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est $b = 22$.

On en déduit que l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f dans les échantillons de taille 35 est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right] = \left[\frac{10}{35}; \frac{22}{35}\right]$, soit, en arrondissant au millièmme, $[0,285; 0,629]$.

b. L'intervalle de fluctuation à 95 % donné en classe de seconde était

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,46 - \frac{1}{\sqrt{35}}; 0,46 + \frac{1}{\sqrt{35}}\right], \text{ soit } [0,290; 0,629].$$

On constate que cet intervalle est très proche de celui trouvé avec la loi binomiale.

2. a. Avec un tableur, en utilisant la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,85$:

– le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 25 ;

– le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 33.

k	$P(X \leq k)$
24	0,010977
25	0,029183
32	0,912965
33	0,975702

b. On en déduit que l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f dans les échantillons de taille 35 est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right] = \left[\frac{25}{35}; \frac{33}{35}\right]$, soit, en arrondissant au millièm, $[0,714; 0,943]$.

Exercice 15

1. Avec un tableur, en utilisant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,84$, le plus petit entier, a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 77 et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 91.

k	$P(X \leq k)$
76	0,024623
77	0,042814
90	0,968441
91	0,9855258

On en déduit que l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f des 18-25 ans ne consommant pas, par jour, cinq fruits et légumes et trois produits

laitiers, dans un échantillon de taille 100, est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right] = [0,77; 0,91]$.

2. Avec un tableur, en utilisant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,48$, le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 38 et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 58.

On en déduit que l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f des plus de 65 ans ne consommant pas, par jour, cinq fruits et légumes et trois produits laitiers, dans un échantillon de taille 100, est :

$$\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right] = [0,38; 0,58].$$

k	$P(X \leq k)$
37	0,017323
38	0,028112
57	0,971426
58	0,982272

Exercice 16

Soit X le nombre de côtés face obtenus en 150 lancers. Si on suppose la pièce non truquée, à chaque lancer la probabilité d'obtenir face est de 0,5.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,5$.

Avec un tableur, le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 63 et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 87.

k	$P(X \leq k)$
62	0,020434
63	0,030014
86	0,969986
87	0,979566

On en déduit que l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f dans les échantillons de taille 150 est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right] = \left[\frac{63}{150}; \frac{87}{150}\right]$, soit $[0,42; 0,58]$.

Jérôme dit qu'il a obtenu 63 fois le côté face, soit une fréquence de 0,42. Au seuil de 5 %, on ne peut pas rejeter l'hypothèse que Jérôme ne s'est pas trompé et que la pièce n'est pas truquée.

Exercice 17

1. Soit X la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,77$.

Avec un tableur, le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 517 et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 561.

On en déduit que l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence f dans les échantillons de taille 700

est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right] = \left[\frac{517}{700}; \frac{561}{700}\right]$, soit $[0,738; 0,802]$.

k	$P(X \leq k)$
516	0,022875
517	0,028034
560	0,974700
561	0,979713

2. La fréquence observée est 0,73 ; 0,73 n'appartient pas à l'intervalle $[0,738; 0,802]$, donc au seuil de risque 5 %, **on rejette l'hypothèse selon laquelle 77 % des composants des petits appareils électriques sont recyclables.**

3. Le nombre 0,7 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, mais le taux de 70 % est strictement inférieur à 0,738, borne inférieure de cet intervalle de fluctuation. **On peut donc dire que ce taux minimum est respecté si on accepte l'hypothèse selon laquelle 77 % des composants des petits appareils électriques sont recyclables.**

À NOTER

Vous pouvez poursuivre l'exercice en cherchant le pourcentage (inférieur à 77 %) de composants recyclables suffisant pour respecter le taux minimum imposé par les pouvoirs publics.

Équations du second degré

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \neq 0.$$

■ Calcul du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

■ Résolution de l'équation $f(x) = 0$

• Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

• Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

• Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

■ Forme factorisée

Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Dérivation

■ Dérivées des fonctions usuelles

Intervalle I	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	k (k constante réelle)	0
$\mathbb{R}$	x	1
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$
$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$
$\mathbb{R}$	x^n (n entier, $n > 1$)	nx^{n-1}
$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$]0; +\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

■ Opérations sur les dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur le même intervalle I et λ un nombre réel.

$u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Si $v(x) \neq 0$, alors :

$\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$.

$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Suites

■ Suites arithmétiques

Une suite u est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

Si $p = 0$, alors $u_n = u_0 + nr$.

Pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■ Suites géométriques

Une suite u est géométrique s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

Pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Si $p = 0$, alors $u_n = u_0 q^n$.

Pour tout entier réel q non nul et différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Géométrie plane

Le plan est muni d'un repère ortho-normé $(O; I, J)$. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan et $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan.

■ Longueur du segment $[AB]$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Trigonométrie

■ Valeurs remarquables de cos et sin

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

■ Équations trigonométriques

Soit a un nombre réel quelconque :

$\cos(x) = \cos(a)$ équivaut à $x = a + k \times 2\pi$
ou $x = -a + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin(x) = \sin(a)$ équivaut à $x = a + k \times 2\pi$
ou $x = \pi - a + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Produit scalaire

■ Produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

Dans le plan muni d'un repère ortho-normé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

■ Théorèmes de la médiane

Soit A et B deux points du plan, I le milieu de $[AB]$ et H le projeté orthogonal de M sur (AB) .

■ Coordonnées de I, milieu du segment $[AB]$

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

■ Condition de colinéarité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

■ Formules d'addition

Quels que soient les nombres réels a et b :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

■ Formules de duplication

Quel que soit le nombre réel a :

$$\cos(2a) = (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Pour tout point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$MA^2 - MB^2 = 2 \times \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$$

■ Formule d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. Si on pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$, alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}).$$

On a de même $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\widehat{B})$
et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C})$.

■ Formule des sinus

Dans tout triangle ABC, d'aire S :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = \frac{abc}{2S}$$

Statistiques

■ Calcul de la moyenne

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N}$$

■ Calcul de la variance

$$V = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{N}$$

■ Calcul de l'écart-type

$$s = \sqrt{V}$$

Probabilités

■ Événement contraire

La probabilité de $\bar{A}$, événement contraire de A , est $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

■ Union et intersection

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Loi binomiale

■ Formule de la loi binomiale

Pour $n \geq 1$ et tout entier k , $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

■ Écart-type

Soit une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p :

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

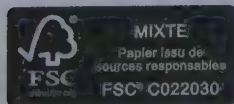
■ Espérance

Soit une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p :

$$E(X) = np$$

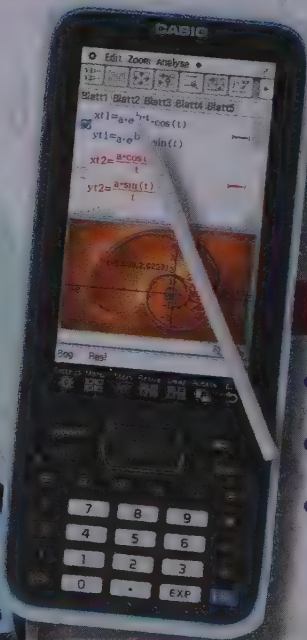
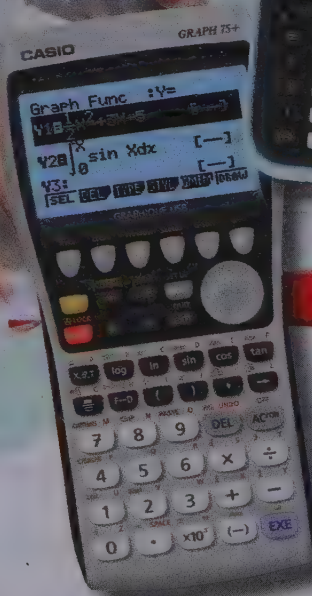
Création maquette : Josiane Sayaphoum – Mise en pages : Compo Méca
Édition : Stéphanie Herbaut

Régie publicitaire : Com d'habitude publicité 05 55 24 14 03 contact@comdhabitude.fr



N° projet : 10199727
Dépôt légal : juin 2014
Imprimé en France
par Loire Offset Titoulet

Les calculatrices graphiques alliant ergonomie et performance



Graph 75+

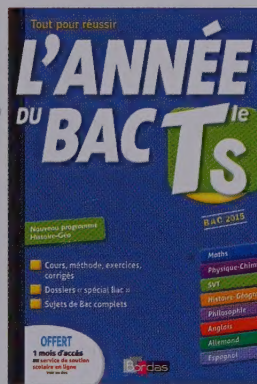
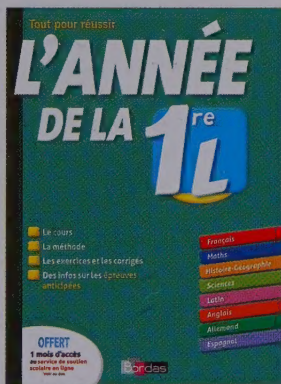
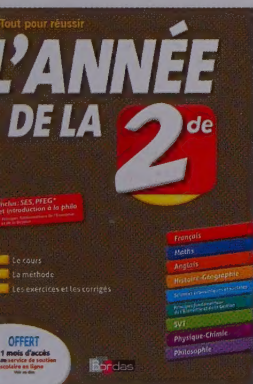
- Écran contrasté et rétro-éclairé
- Représentations graphiques avancées
- **NOUVEAU** Calcul vectoriel

Toutes les calculatrices CASIO sont conformes aux programmes scolaires du ministère de l'Éducation nationale

CASIO
www.casio-europe.com

Tout le programme de l'année en un seul volume

9 titres au lycée



Bordas

www.annee-de.fr



PHOSPHORE

Le dossier métiers

Administrateur réseaux

Bac: S.
Niveau: bac +5.
Salaire: de 1 800 à 3 100 € net mensuels

Cet homme-orchestre **met en place le réseau informatique** qui va permettre d'échanger des données à l'intérieur et à l'extérieur de l'entreprise après avoir analysé les besoins des utilisateurs (qualité, rapidité, simplicité, sécurité). La **sûreté des systèmes** est une préoccupation essentielle de l'administrateur réseaux. Il participe aussi au choix du matériel: **serveur, routeur, logiciels**. Enfin, il doit expliquer le système aux différents membres de l'entreprise. L'administrateur réseaux peut travailler en interne dans une grande entreprise. Il peut aussi exercer pour une SSII (société de services et d'ingénierie informatique) qui l'envoie concevoir, développer ou améliorer le **réseau** de sociétés clientes.

Ingénieur système

Bac: S, STI2D.
Niveau: bac +5.
Salaire: de 1 600 à 3 200 € net mensuels.

C'est l'**expert du matériel et des logiciels** d'une entreprise. Son rôle est d'analyser, sécuriser et optimiser l'outil informatique, afin que les salariés disposent d'**une installation adaptée et performante**. L'ingénieur système est également responsable des tests, **contrôles** et de la recherche de solutions pour accroître les performances du système. Il assure la **confidentialité** des informations qui transitent sur le réseau: il gère les **autorisations d'accès** et installe des systèmes de protection. Lorsque les salariés ont des **problèmes**, il les identifie et les résout au plus vite, en lien avec l'administrateur réseau.

Développeur informatique

Bac: S, STI2D.
Niveau: bac +2 à bac +5.
Salaire: de 1 600 à 3 500 € net mensuels.

Cet informaticien **crée des logiciels** comptables, des « progiciels » de gestion des stocks... Il **analyse les besoins** des utilisateurs puis il étudie les étapes du programme, détermine une solution technique, avant de **créer un prototype de l'application**. Il peut ensuite écrire des parties d'un **programme** ou le concevoir dans sa totalité. Il teste les applications. Il rédige les notices d'installation et d'utilisation.



L'ouvrage complet pour réussir son année de 1^{re} S

1^{re} S

- Le cours synthétique
- Les méthodes commentées
- 395 exercices progressifs et QCM
- Tous les corrigés détaillés

Conseillé par
les enseignants

Et toutes les clés pour réviser vite et bien

- Des **QCM** pour tester ses connaissances
- Un **formulaire**

NOUVEAU

Bordas
Soutien scolaire

Une offre complémentaire
pour vous aider à réussir le Bac

Le site complet de révisions

Le service de cours à domicile

OFFERTS pour l'achat de ce livre :

1 mois d'accès au site*

1 h de cours particulier**

www.bordas-soutien-scolaire.com/decouverte/

Offre valable sur le site d'accompagnement en ligne pour 1 enfant (1 classe au choix). **Offre valable pour toute souscription au service de cours à domicile Bordas Soutien scolaire. Voir modalités sur le site ci-dessus. Ces deux offres sont valables du 1^{er} septembre 2014 au 1^{er} septembre 2015. Elles sont non cumulables avec une autre offre.

DEFIBAC Pour se préparer au Bac

L'essentiel par matière
12 titres

Des fiches synthétiques
14 titres

Des contenus numériques

• Des ressources gratuites

www.defibac.fr

iPhone/iPad

vous sur

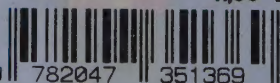


MATHS 1^{re} S TOUTES

SYG 50

PRIX ÉDITE

11,95 EUR



9 782047 351369
1E
*0258 114958 03013831 100752 23

ISBN 978-2-01-9-9



11,95 € PRIX FRANCE

Couverture : François Roche
Adaptation : Cécile Gallou