

**100 %
EXOS**

1^{re} S

Maths

NOUVEAU PROGRAMME

**100 %
réussite**

Rappels de cours

250 exercices
progressifs et minutés

Sujets de contrôle

Tous les corrigés
détaillés et commentés

Avec ce livre,
un an d'abonnement

GRATUIT
à annabac.com





Digitized by the Internet Archive
in 2024

https://archive.org/details/isbn_9782218948930

La cousine de Philippe (+)
Gina Mia (I)

**100%
EXOS**

1^{re} S

Maths

Sophie Barache

Professeur agrégée au lycée Jean-Lurçat de Martigues

Fabrice Barache

Professeur agrégé à l'École de l'air de Salon-de-Provence

Sophie Bauer

Professeur agrégée au lycée Saint-Exupéry de La Rochelle

Raphaël Bauer

Professeur agrégé au lycée Saint-Exupéry de La Rochelle

Maquette de principe : Marie-Astrid Bailly-Maître

Mise en pages : Jouve

Schémas : Jouve

Édition : Régine Delay

© Hatier, Paris, juillet 2011

978-2-218-94893-0

Toute représentation, traduction, adaptation ou reproduction, même partielle, par tous procédés, en tous pays, faite sans autorisation préalable, est illicite et exposerait le contrevenant à des poursuites judiciaires. Réf. : loi du 11 mars 1957, alinéas 2 et 3 de l'article 41. Une représentation ou reproduction sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris) constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Votre ouvrage 100 % exos

■ Conforme au nouveau programme de mathématiques de 1^{re} des séries S entré en vigueur à la rentrée 2011, ce « 100 % exos » vous propose une **méthode de travail** complète et un **entraînement intensif** sur mesure tout au long de l'année.

■ Pour chaque thème du programme vous trouverez un **cours** structuré, les **savoir-faire** qu'il faut maîtriser, des **exercices** progressifs et leurs **corrigés** détaillés.

■ Assortis d'**indications de solution**, de **commentaires** et de **conseils** des auteurs, tous les exercices corrigés vous permettent :

- de **comprendre** les notions essentielles et de **maîtriser** le cours ;
- de **progresser** et de vous **entraîner** à votre rythme ;
- de vous **évaluer** et de **réussir** vos contrôles ;
- de vous **préparer** à la Terminale S.

Sur le site www.annabac.com

■ L'achat de ce « 100 % exos » vous permet de bénéficier, pendant un an, d'un **ACCÈS GRATUIT** à toutes les ressources d'annabac.com en mathématiques 1^{re} S.

■ Pour profiter de cette offre, rendez-vous sur www.annabac.com, dans la rubrique « Vous avez acheté un ouvrage Hatier ? » *



* La saisie d'un mot-clé du livre (lors de votre première visite) vous permettra de créer un compte personnel et d'utiliser librement le site pendant un an.

Sommaire

ANALYSE

1 Généralités sur les fonctions

COURS		9
EXERCICES	Exercices d'application.....	15
	Exercices d'entraînement.....	18
	Exercices d'approfondissement.....	22
	Contrôles.....	24
CORRIGÉS		27

2 Fonctions polynômes du second degré

COURS		47
EXERCICES	Exercices d'application.....	56
	Exercices d'entraînement.....	60
	Exercices d'approfondissement.....	63
	Contrôles.....	66
CORRIGÉS		69

3 Dérivation

COURS		99
EXERCICES	Exercices d'application.....	107
	Exercices d'entraînement.....	112
	Exercices d'approfondissement.....	116
	Contrôles.....	124
CORRIGÉS		129

4 Suites numériques

COURS		159
EXERCICES	Exercices d'application.....	170
	Exercices d'entraînement.....	171
	Exercices d'approfondissement.....	176
	Contrôles.....	179
CORRIGÉS		183

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

5 Statistiques

COURS		209
EXERCICES	Exercices d'application.....	214
	Exercices d'entraînement.....	217
	Exercices d'approfondissement.....	223
	Contrôles.....	230
CORRIGÉS		233

6 Variables aléatoires

COURS		259
EXERCICES	Exercices d'application.....	267
	Exercices d'entraînement.....	269
	Exercices d'approfondissement.....	273
	Contrôles.....	276
CORRIGÉS		278

7 Loi binomiale et échantillonnage

COURS		311
EXERCICES	Exercices d'application.....	319
	Exercices d'entraînement.....	323
	Exercices d'approfondissement.....	327
	Contrôles.....	331
CORRIGÉS		334

GÉOMÉTRIE

8 Vecteurs du plan

COURS		363
EXERCICES	Exercices d'application.....	369
	Exercices d'entraînement.....	373
	Exercices d'approfondissement.....	377
	Contrôles.....	380
CORRIGÉS		383

9 Angles orientés et trigonométrie

COURS	409
EXERCICES	
Exercices d'application	417
Exercices d'entraînement	419
Exercices d'approfondissement	424
Contrôles	429
CORRIGÉS	432

10 Produit scalaire dans le plan

COURS	463
EXERCICES	
Exercices d'application	472
Exercices d'entraînement	476
Exercices d'approfondissement	479
Contrôles	482
CORRIGÉS	484

Analyse



1

Généralités

sur les fonctions

General

Review

→ Variation

→ Function

I RAPPEL : SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I si, pour tous a, b appartenant à I : $\rightarrow$ *crossing*

Si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement $f(a) < f(b)$).

 $\rightarrow$ so

- On dit que f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I si, pour tous a, b appartenant à I :

Si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$ (respectivement $f(a) > f(b)$).

Une fonction croissante conserve l'ordre, une fonction décroissante renverse l'ordre.

II NOUVELLES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

 $\rightarrow$ root $\rightarrow$ squareracine carrée
square root

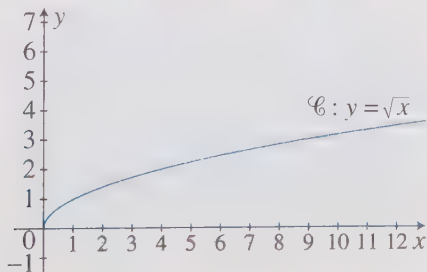
1. La fonction racine carrée

■ **Définition :** La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$x \mapsto \sqrt{x}.$$

■ L'intervalle $[0; +\infty[$ se note aussi $\mathbb{R}^+$.

■ Courbe représentative de la fonction racine carrée



■ Variations de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration : Soient a et b deux réels appartenant à $[0; +\infty[$.

Supposons que $a < b$.

On va comparer leurs images $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ en étudiant le signe de leur différence.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} &= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

On a multiplié l'expression $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ par $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ($\neq 0$) pour faire apparaître la 3^e identité remarquable.

- Le numérateur $(a - b)$ est strictement négatif car $a < b$.

Le dénominateur $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ est strictement positif car $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{b} > 0$ (en effet $b > a \geq 0$ donc $b > 0$).

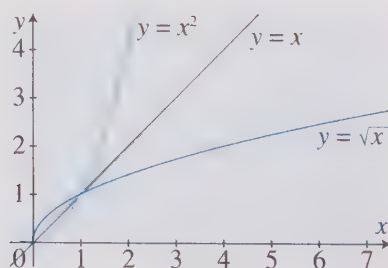
D'après la règle de signes d'un quotient, $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ est strictement négatif.

- On a donc montré que $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$. On en déduit que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Donc la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

En effet, a et b sont rangés dans le même ordre que leurs images $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.

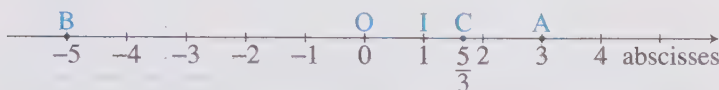
■ Positions relatives sur $[0; +\infty[$ des courbes représentatives des fonctions carré, identité et racine carrée



2. La fonction valeur absolue

■ **Définition** : Soit x un réel, et M le point d'abscisse x sur l'axe des réels. On appelle valeur absolue de x , et on note $|x|$, la distance OM .

EXEMPLE :



$$|3| = OA = 3 \qquad |-5| = OB = 5 \qquad \left| \frac{5}{3} \right| = OC = \frac{5}{3}$$

■ Premières propriétés

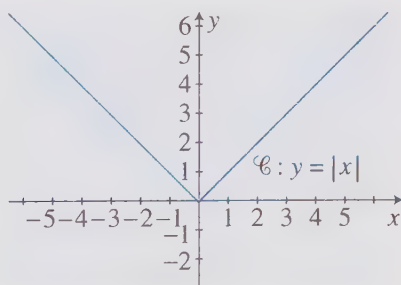
- Une valeur absolue est toujours positive.

• Soit x un réel :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

■ Variations et courbe représentative de la fonction valeur absolue

- La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.
- Courbe représentative :



Si x est un réel quelconque, alors $\sqrt{x^2} = |x|$.

■ Autres propriétés

Soit a un réel strictement positif fixé :

- l'équation $|x| = a$ a deux solutions : a et $-a$;
- l'inéquation $|x| \leq a$ a pour solutions les réels de l'intervalle $[-a ; a]$;
- l'inéquation $|x| > a$ a pour ensemble de solutions : $] -\infty ; a[\cup] a ; +\infty [$.

III QUELQUES OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS

1. Fonctions $(u + k)$ et (λu)

■ **Définition** : Soit u une fonction, définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

- Soit k un réel. On note $(u + k)$ la fonction définie sur D par :

$$(u + k)(x) = u(x) + k.$$

- Soit λ un réel. On note (λu) la fonction définie sur D par :

$$(\lambda u)(x) = \lambda \times u(x).$$

■ **Propriétés** : Soit u une fonction définie sur l'ensemble D .

- Soit k un réel. La fonction $u + k$ a le même sens de variation que u .

- Soit λ un réel non nul.

– Si $\lambda > 0$, la fonction λu a le même sens de variation que u .

– Si $\lambda < 0$, le sens de variation de la fonction λu est contraire à celui de u .

▲ Cette dernière propriété est due au fait que multiplier par un réel strictement positif conserve l'ordre, alors que multiplier par un réel strictement négatif renverse l'ordre.

2. Somme et produit de deux fonctions

■ **Définition** : Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et u et v deux fonctions définies sur D .

- On note $(u + v)$ la fonction définie sur D par $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$.

- On note $(u \times v)$ la fonction définie sur D par $(u \times v)(x) = u(x) \times v(x)$.

▲ Il n'existe pas de règle simple donnant le sens de variation d'une somme ou d'un produit de fonctions.

3. Fonctions $(\sqrt{u})$ et $\left(\frac{1}{u}\right)$

■ **Définitions**

- Soit u une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, et telle que, pour tout $x \in D$, $u(x) \geq 0$. Alors la fonction $(\sqrt{u})$ est définie sur D par $(\sqrt{u})(x) = \sqrt{u(x)}$.

- Soit u une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, et telle que, pour tout $x \in D$, $u(x) \neq 0$. Alors la fonction $\left(\frac{1}{u}\right)$ est définie sur D par :

$$\left(\frac{1}{u}\right)(x) = \frac{1}{u(x)}.$$

■ **Propriétés**

- Soit u une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, et telle que, pour tout $x \in D$, $u(x) \geq 0$. Le sens de variation de la fonction $(\sqrt{u})$ est le même que celui de u .

- Soit u une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, et telle que, pour tout $x \in D$, $u(x) \neq 0$. Le sens de variation de la fonction $\left(\frac{1}{u}\right)$ est contraire à celui de u .

▀ Ces dernières propriétés sont dues au fait que la fonction racine carrée conserve l'ordre, et que la fonction inverse renverse l'ordre.

SAVOIR-FAIRE

1. Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction de la forme $\sqrt{u}$

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction de la forme $\sqrt{u}$, on résout l'inéquation $u(x) \geq 0$.

La fonction $\sqrt{u}$ est alors définie pour les réels x tels que $u(x) \geq 0$.

EXEMPLE : Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 7}$.

$$x^2 - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 7 \Leftrightarrow (x \geq \sqrt{7} \text{ ou } x \leq -\sqrt{7}) \text{ d'où :}$$

$$D_f =]-\infty; -\sqrt{7}] \cup [-\sqrt{7}; +\infty[.$$

▀ Pour résoudre l'inéquation $x^2 - 7 \geq 0$, on peut aussi factoriser $x^2 - 7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$ et dresser le tableau de signes correspondant.

2. Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction de la forme $\frac{1}{u}$

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction de la forme $\frac{1}{u}$, on résout l'équation $u(x) = 0$.

La fonction $\frac{1}{u}$ est alors définie pour les réels x tels que $u(x) \neq 0$.

EXEMPLE : Soit g la fonction : $x \mapsto \frac{1}{4x + 10}$.

$$4x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

g est définie en tout réel x différent de $-\frac{5}{2}$ d'où :

$$D_g =]-\infty; -\frac{5}{2}[\cup]-\frac{5}{2}; +\infty[.$$

3. Étudier les variations d'une fonction de la forme $\sqrt{u}$ ou $\frac{1}{u}$

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

1^{re} étape. Reconnaître si f est de la forme $\frac{1}{u}$ ou $\sqrt{u}$, puis expliciter $u(x)$.

2^e étape. On vérifie que la fonction f est bien définie sur D , en appliquant les savoir-faire 1. ou 2.

3^e étape. On étudie les variations de u .

4^e étape. On en déduit les variations de f , sachant que $f = \sqrt{u}$ a le même sens de variation que u , ou que $f = \frac{1}{u}$ est de sens de variation contraire à celui de u .

4. Étudier la position relative des courbes représentatives de deux fonctions

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de deux fonctions f et g dans un repère orthogonal. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$:

- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$;
- $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.

EXEMPLE : Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x$ et g la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = x^2$.

- Soit $x \in [0 ; 1]$, $f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1 - x)$.

 Pensez à factoriser la différence $f(x) - g(x)$ pour en étudier le signe.

- Le premier facteur x est positif car $x \geq 0$.

Le second facteur $(1 - x)$ est positif car $x \leq 1$ (d'où $0 \leq 1 - x$).

D'après la règle des signes d'un produit, $x(1 - x)$ est positif.

- On a donc montré que, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) - g(x) \geq 0$, c'est-à-dire que $f(x) \geq g(x)$. Donc, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

EXERCICES D'APPLICATION

1 QUESTIONS DE COURS

★★ 15 min ► P. 27

1. La fonction inverse est-elle strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$? Justifier votre réponse.
2. Démontrer que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2 MANIPULER DES RACINES CARRÉES

★★ 20 min ► P. 27

1. Simplifier $A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}$.

Pour simplifier l'expression $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, on la multiplie par $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} (=1)$ pour faire apparaître la 3^e identité remarquable.

2. Comparer, sans calculatrice, et en justifiant, les réels suivants :

a. $2\sqrt{3}$ et $\sqrt{13}$; b. -5 et $-2\sqrt{6}$; c. $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$ et $2\sqrt{5} + \sqrt{3}$.

Élever ces nombres au carré et utiliser les variations de la fonction carré.

3 ALGORITHME

★ 15 min ► P. 28

Écrire un algorithme permettant de remplir le tableau de signes de $ax + b$.

4 MANIPULER DES VALEURS ABSOLUES

★★ 30 min ► P. 28

1. Simplifier les expressions suivantes en ôtant correctement les valeurs absolues :

a. $|\pi - 3| + 3$; b. $|\sqrt{2}| + |1 - \sqrt{2}|$.

c. Pour $a \in [0; 1]$, $|a| + |a - 1| - |2 - a|$.

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } a - b \geq 0, \text{ c'est-à-dire si } a \geq b; \\ -(a - b) = -a + b & \text{si } a - b < 0, \text{ c'est-à-dire si } a < b. \end{cases}$$

2. Résoudre les équations suivantes :

a. $|x| - 2 = 0$; b. $2|x| + 3 = 0$; c. $|5 - x| - 1 = 0$; d. $|2x - \pi| = \frac{\pi}{3}$.

3. Résoudre les inéquations suivantes :

- a. $|x| - 10 \leq 0$; b. $3|x| + 1 > 0$; c. $2|x| - 4 \geq 0$; d. $|x - 3| - 5 > 0$.

5

**SENS DE VARIATION DE $u + k$ ET DE λu ,
 u ÉTANT UNE FONCTION DE RÉFÉRENCE**

★

15 min

► P. 29

Dresser le tableau de variation :

- de la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = \sqrt{x} - 3$;
- de la fonction g définie sur $[-10 ; 10]$ par $g(x) = 2x^2$;
- de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{3}{x} + 5$.

6

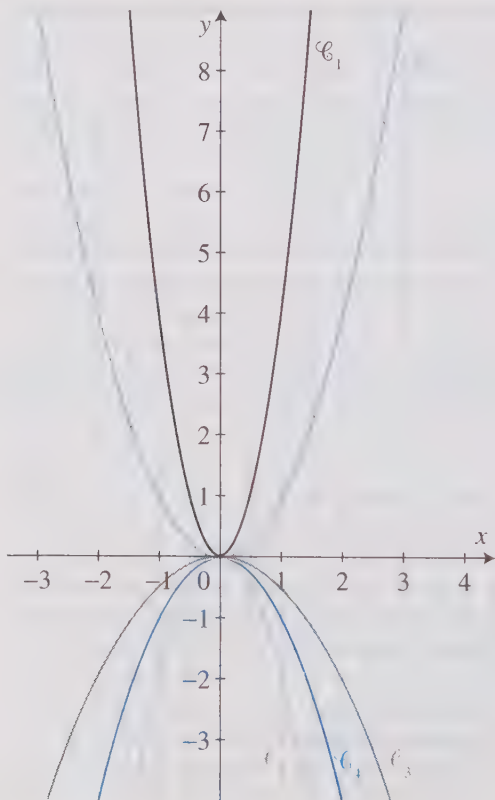
**REPRÉSENTATION GRAPHIQUE
DE FONCTIONS DE LA FORME λu ($\lambda \in \mathbb{R}$)**

★

35 min

► P. 30

1. Dans le repère ci-dessous sont représentées cinq fonctions, $f_1, f_2, \dots, f_5$ de la forme λu , λ étant un réel non nul et u désignant la fonction carré. Déterminer l'équation de chacune de ces courbes.



f_1 est de la forme $x \mapsto \lambda_1 x^2$. La lecture graphique d'une image par f_1 donne la valeur de λ_1 .

2. Après avoir donné les variations de la fonction $f_6 : x \mapsto \frac{x^2}{2}$, construire sa courbe représentative.

7 SENS DE VARIATION DE $\sqrt{u}$ ET DE $\frac{1}{u}$



15 min

► P. 31

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = -4 + \frac{x}{2}.$$

a. On considère la fonction $f = \sqrt{u}$, définie sur $[8; +\infty[$. Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

b. Déterminer, en justifiant, le sens de variation de f sur $[8; +\infty[$.

2. Soit g la fonction définie sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{-1 + 2x}.$$

Déterminer, en le justifiant, le sens de variation de g .

 Voir le savoir-faire 3.

8 POSITIONS RELATIVES DES COURBES D'ÉQUATIONS $y = x^2$ ET $y = x^3$



25 min

► P. 31

On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$, et g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^3$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ désignent leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

1. Factoriser la différence $f(x) - g(x)$.

2. Dresser le tableau de signes de $x^2(1-x)$.

3. Donner l'ensemble des solutions :

a. de l'équation $x^2(1-x) = 0$;

b. de l'inéquation $x^2(1-x) > 0$;

c. de l'inéquation $x^2(1-x) < 0$.

4. En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, ainsi que leurs points d'intersection.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

9

SENS DE VARIATION ET REPRÉSENTATION

GRAPHIQUE DE $u + k$ ET DE λu , u ÉTANT

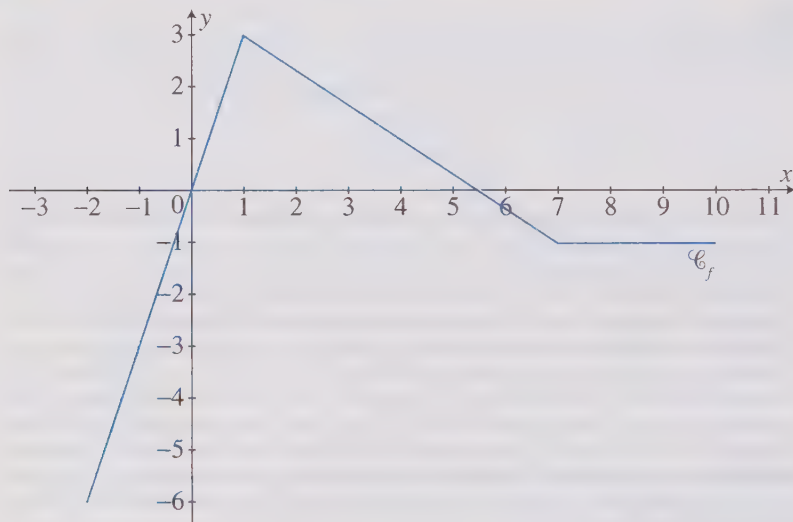
UNE FONCTION AFFINE PAR MORCEAUX

★★

30 min

► P. 32

Soit f la fonction dont la courbe est représentée ci-dessous :



- Exprimer $f(x)$ en fonction de x :
 - pour x appartenant à $[-2; 1]$;
 - pour x appartenant à $[1; 7]$;
 - pour x appartenant à $[7; 10]$.
- Dresser le tableau de variations sur $[-2; 7]$ de chacune des fonctions suivantes :
 - $f + 5$;
 - $-2f$.
- Représenter dans un même repère orthogonal les fonctions f , $f + 5$ et $-2f$ en justifiant la construction.



Voir cours III.1 page 12.

10

ALGORITHMES COURBES $x \mapsto f(x - a)$

★

10 min

► P. 33

L'algorithme ci-dessous permet de comparer, sur l'intervalle $[-10; 10]$, la courbe d'équation $y = (x - 2)^2$ à la courbe de la fonction carré.

Pour l'obtenir, le logiciel place les points d'abscisse allant de -10 à 10 , avec un pas de $0,05$.

VARIABLES

```

x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  x PREND_LA_VALEUR -10
  TANT_QUE (x ≤ 10) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
      TRACER_POINT (x, F1(x))
      TRACER_POINT (x, F1(x-2))
    x PREND_LA_VALEUR x+0,05
  FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME

```



F1 désigne ici la fonction carré.

1. Comment faut-il modifier cet algorithme pour comparer sur $[-10; 10]$ la courbe d'équation $y = (x+3)^2$ à la courbe de la fonction carré ?
2. Écrire un algorithme permettant de comparer sur $[-5; 5]$ la courbe d'équation $y = |x+1|$ à la courbe de la fonction valeur absolue. Prendre cette fois un pas de 0,02.

ENSEMBLE DE DÉFINITION ET VARIATIONS

11 DE FONCTIONS DE LA FORME $\sqrt{u}$ ET $\frac{1}{u}$

★★★ 50 min ► P. 33

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies ci-dessous et étudier ses variations.

- a. La fonction f est définie par $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$.
- b. La fonction h est définie par $x \mapsto \frac{1}{|x| - 2}$.
- c. La fonction k est définie par $x \mapsto -\frac{2}{\sqrt{3x+18}}$.

Voir les savoir-faire 1., 2. et 3.

POSITIONS RELATIVES DES COURBES $y = x$,12 $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

★★ 35 min ► P. 34

Dans cet exercice, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$, g désigne la fonction carré et h désigne la fonction racine carrée. $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ désignent leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

1. Quel est le plus grand intervalle sur lequel sont définies à la fois les fonctions f , g et h ?

2. Étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$, ainsi que leur(s) point(s) d'intersection.

3. **Positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$**

a. Afin d'étudier le signe de la différence $f(x) - h(x)$, vérifier que, pour tout réel positif x :

$$f(x) - h(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1).$$

b. À l'aide d'une propriété du cours, déterminer le signe de $\sqrt{x} - 1$ selon les valeurs de x .

c. En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$, ainsi que leur(s) point(s) d'intersection

4. Observer simultanément sur logiciel ou sur une calculatrice graphique les courbes représentatives des trois fonctions. Vérifier les résultats obtenus.

13 VALEUR ABSOLUE ET PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

★★ 40 min ► P. 35

ABC est un triangle rectangle en B, tel que $AB = 3$ et $BC = 4$.

À tout x de l'intervalle $]0; 5]$, on associe le point M de la demi-droite $[AB)$ tel que $AM = x$.

N est alors le point d'intersection de la demi-droite $[AC)$ et de la parallèle à (BC) passant par M.

Le but de cet exercice est de définir et d'observer la fonction f qui, à tout x positif associe l'aire du trapèze rectangle BCMN.

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

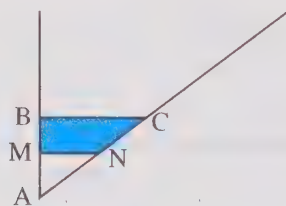


Figure 1 : Cas où $M \in [AB]$.

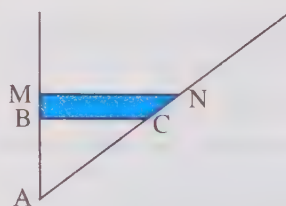


Figure 2 : Cas où M n'est pas sur le segment $[AB]$.

1. Déterminer la longueur du côté $[AC]$.

2. Démontrer que $MN = \frac{4}{3}x$.

3. Justifier que la base BM du trapèze vaut $|x - 3|$ (on pourra distinguer les cas $0 \leq x \leq 3$ et $x > 3$).

4. Déterminer l'aire $f(x)$ du trapèze en fonction de x .

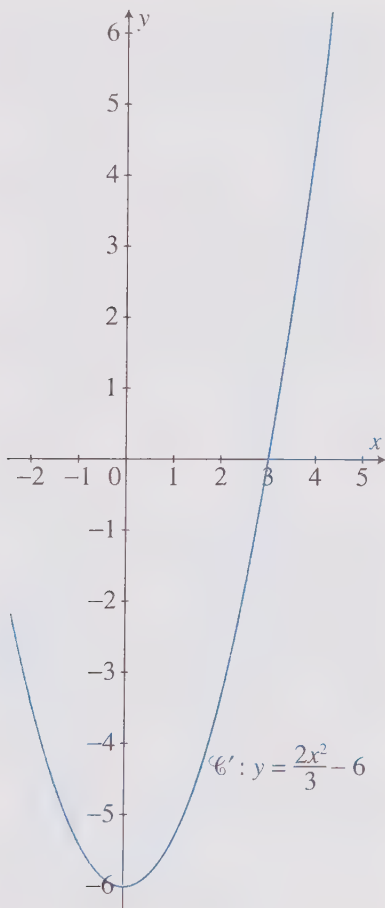
5. Vérifier que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \frac{2}{3}|x-3|(x+3)$.

$(x+3)$ étant positif sur $\mathbb{R}_+$, on admettra ensuite que :

$$f(x) = \left| \frac{2}{3}(x-3)(x+3) \right| = \left| \frac{2}{3}x^2 - 6 \right|.$$

6. On a représenté dans le repère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $y = \frac{2}{3}x^2 - 6$.

Tracer $\mathcal{C}_f$ dans ce même repère, à partir de la courbe $\mathcal{C}'$.



▲ Tenir compte de l'ensemble de définition de f .

7. Déterminer, par lecture graphique, le nombre de positions du point M pour lesquelles l'aire du trapèze BCNM est égale à 4.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

14 VARIATIONS D'UNE SOMME
DE DEUX FONCTIONS

★★ 45 min ► P. 37

Partie A

Soient u et v deux fonctions croissantes sur un même intervalle I . Démontrer, en utilisant la définition, que la fonction somme $u + v$ est croissante sur I .

Partie B

Soit u la fonction carré et v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 2x + 1$.

On s'intéresse aux variations de la fonction $f = u + v$.

1. Dresser les tableaux de variation de u et de v . Dédire de la **partie A** le sens de variation de f sur $\mathbb{R} +$.
2. Factoriser $f(x)$. En quelle valeur de x admet-elle un minimum ?
3. Observer sur logiciel ou sur une calculatrice graphique la courbe représentative de f . Quelles semblent être les variations de f sur $\mathbb{R}$?
4. Démonstration : soient a et b deux réels.
 - a. Factoriser au maximum la différence $f(a) - f(b)$.
 - b. Supposons que a et b appartiennent à $]-\infty; -1]$, avec $a < b$. Comparer leurs images $f(a)$ et $f(b)$.
 - c. Supposons que a et b appartiennent à $[-1; +\infty[$, avec $a < b$. Comparer leurs images $f(a)$ et $f(b)$.
 - d. Conclure.

15 ÉTUDE DES VARIATIONS DE LA FONCTION CUBE
À L'AIDE DE LA DÉFINITION.

★★ 25 min ► P. 38

Soit f la fonction cube, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$.

1. On veut étudier le signe de la différence $a^3 - b^3$.
- a. Établir l'égalité :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

- b. Quel est le signe du premier facteur $a - b$?
- c. Vérifier que :

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}.$$

Quel est le signe de ce second facteur ?

- d. En déduire le signe de $a^3 - b^3$.
2. Quel est le sens de variation de la fonction cube ?

16 COURBES DE FONCTIONS RÉCIPROQUES

★★★ 40 min ▶ P. 39

Soit f la fonction racine carrée et g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^2$ (on dit que g est la restriction, à l'intervalle $[0; +\infty[$, de la fonction carré).

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer, dans un même repère, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, ainsi que la première bissectrice D d'équation $y = x$. Qu'observe-t-on ?
2. Soit a un réel positif ou nul. On considère le point M de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse a , dont l'ordonnée sera notée b . Exprimer b en fonction de a .
3. Soit N le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse b . Après avoir vérifié que b appartient bien à l'ensemble de définition de f , comparer les coordonnées du point N avec celles du point M .
4. On veut maintenant montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à D .

Pour cela, montrer que :

- le milieu I de $[MN]$ appartient à D ;
- D est orthogonale à la droite (MN) .

On utilisera le résultat suivant, admis : dans un repère orthonormal, deux droites affines sont orthogonales si, et seulement si, le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1 .

Fonctions réciproques

Soient $f: \begin{cases} I \rightarrow f(I) = J \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ et $g: \begin{cases} J \rightarrow g(J) = I \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$ deux fonctions telles que :

$$f(g(x)) = x \quad \forall x \in J \quad \text{et} \quad g(f(x)) = x \quad \forall x \in I$$

On dit alors que f et g sont des fonctions réciproques. Les courbes représentatives en repère orthonormal de deux fonctions réciproques sont toujours symétriques par rapport à la première bissectrice.

17 VARIATION ET FONCTIONS COMPOSÉES

★★★ 50 min ► p. 40

Partie A

On appelle « fonction cube » la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v : x \mapsto x^3$. On admet dans cet exercice que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (résultat démontré à l'exercice 15).

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{x}{2} - 1$.

a. Quel est le sens de variation de u ?

b. On pose, pour tout x réel, $f(x) = v(u(x))$. À l'aide de la définition, établir le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. u désigne maintenant une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Établir le sens de variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto v(u(x))$.

Partie B

Soit u la fonction affine $x \mapsto 2 - x$, et v la fonction valeur absolue.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto v(u(x))$.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

2. Rappeler les variations des fonctions u et v sur $\mathbb{R}$.

3. Soient a et b deux réels de l'intervalle $] -\infty ; 2]$ tels que $a < b$. Comparer leurs images par f .

4. Soient a et b deux réels de l'intervalle $[2 ; +\infty [$ tels que $a < b$. Comparer leurs images par f .

5. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice graphique.

CONTRÔLE**18** QCM

★★ 20 min ► p. 41

À chaque question correspond une seule bonne réponse.

1. L'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{5x - 125}$ est :

a. $[0 ; +\infty[$ b. $\mathbb{R}$ privé de $\{25\}$ c. $[25 ; +\infty[$ d. $]25 ; +\infty[$

2. La fonction g , définie sur $] -\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{12 - 4x}$ est :

a. strictement décroissante sur $] -\infty ; 3[$;

b. strictement croissante sur $]3 ; +\infty[$;

c. strictement décroissante sur $] -\infty ; +\infty[$;

d. strictement croissante sur $] -\infty ; +\infty[$.

3. Soient x_1 et x_2 deux réels distincts positifs.

a. $\frac{1}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2}$

b. $\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2}$

c. $\frac{1}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{x_1 + x_2}$

d. $\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{x_1 + x_2}$

4. Dans un repère orthogonal, notons $\mathcal{C}_1$ la courbe d'équation $y = x$ et $\mathcal{C}_2$ la courbe d'équation $y = x^2$.

a. $\mathcal{C}_1$ est en dessous de $\mathcal{C}_2$ sur $[0; +\infty[$;

b. $\mathcal{C}_1$ est en dessous de $\mathcal{C}_2$ sur $]-\infty; 1]$;

c. $\mathcal{C}_1$ est en dessous de $\mathcal{C}_2$ sur $[0; 1]$;

d. $\mathcal{C}_1$ est en dessous de $\mathcal{C}_2$ sur $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.

INSUFFISANCE DE LA CALCULATRICE.

19 ÉTUDE DE LA FONCTION $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

★★

25 min

► p. 42

1. On souhaite comparer les nombres :

$$A = \sqrt{1 - (10^{-7})^2} \text{ et } B = \sqrt{1 - (2 \cdot 10^{-7})^2}.$$

Quel résultat donne la calculatrice ?

2. Soit f la fonction qui à x associe $\sqrt{1-x^2}$.

Ainsi, $A = f(10^{-7})$ et $B = f(2 \cdot 10^{-7})$.

a. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction définie sur $[-1; 1]$ par $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

b. Donner alors le sens de variation sur $[-1; 1]$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

c. Montrer que f n'est définie que sur l'intervalle $[-1; 1]$.

3. Comparer A et B .

CONTRÔLE

20 QUESTION DE COURS

★★ 40 min ► P. 43

1. Soit f une fonction définie et monotone sur une partie I de $\mathbb{R}$. Démontrer que le sens de variation de la fonction $-3f$ est contraire à celui de f .

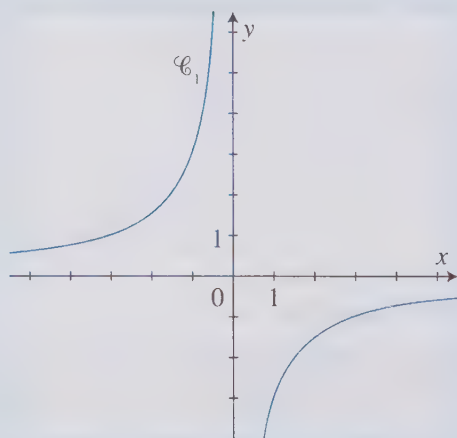
2. En déduire le tableau de variation de la fonction $x \mapsto -\frac{3}{x}$.

3. L'objectif de cette question est de trouver le nombre de solutions de l'équation : $x^3 - x + 3 = 0$ (E).

a. 0 est-il solution de l'équation (E) ?

b. Démontrer que cette équation est équivalente à l'équation $x^2 - 1 = -\frac{3}{x}$.

c. Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_1$ représentative de la fonction $x \mapsto -\frac{3}{x}$.



Après avoir étudié ses variations, tracer dans ce repère la courbe représentative $\mathcal{C}_2$ de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$.

d. En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) et en donner des valeurs approchées par lecture graphique.

Remarque historique : cette méthode pour résoudre des équations est due à Omar Khayyam (1048-1131 ?), mathématicien, astronome, philosophe, médecin et poète.

CORRIGÉS

1 1. Notons f la fonction inverse.

Si f était strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ et $a < b$, alors on aurait $f(a) > f(b)$.

Prenons $a = -1$ et $b = 1$; alors $a < b$ mais $f(a) < f(b)$ car $f(a) = -1$ et $f(b) = 1$.

La fonction inverse n'est donc pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

2. Voir cours.

2 1. $A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}$

$$A = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{4}+\sqrt{3}}{(\sqrt{4}-\sqrt{3})(\sqrt{4}+\sqrt{3})}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}+\sqrt{3}}{4-3}$$

$$A = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{3}$$

$$A = 3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$$

2. a. $2\sqrt{3}$ et $\sqrt{13}$ sont positifs. La fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

$$(2\sqrt{3})^2 = 12 \text{ et } (\sqrt{13})^2 = 13 ; 12 < 13 \text{ donc :}$$

$$2\sqrt{3} < \sqrt{13}.$$

b. -5 et $-2\sqrt{6}$ sont négatifs. La fonction carré étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, ils sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés.

$$(-5)^2 = 25 \text{ et } (-2\sqrt{6})^2 = 24 ; 25 > 24 \text{ donc :}$$

$$-5 < -2\sqrt{6}.$$

$$c. \bullet (3\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (3\sqrt{2})^2 + 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 23 + 6\sqrt{10} ;$$

$$(2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{5})^2 + 2 \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 23 + 4\sqrt{15}.$$

• On compare $6\sqrt{10}$ et $4\sqrt{15}$.

$$(6\sqrt{10})^2 = 360 \text{ et } (4\sqrt{15})^2 = 16 \times 15 = 240.$$

$$6\sqrt{10} \text{ et } 4\sqrt{15} \text{ sont positifs donc } 6\sqrt{10} > 4\sqrt{15}.$$

$$\bullet \text{ On en déduit que } (3\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 > (2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2.$$

Comme $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$ et $2\sqrt{5} + \sqrt{3}$ sont positifs, on peut conclure que :

$$3\sqrt{2} + \sqrt{5} > 2\sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

3

VARIABLES

a EST_DU_TYPE NOMBRE

b EST_DU_TYPE NOMBRE

c EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

LIRE a

LIRE b

SI (a!=0) ALORS

DEBUT_SI

c PREND_LA_VALEUR -b/a

SI (a>0) ALORS

DEBUT_SI

AFFICHER "ax+b est positif lorsque x"

AFFICHER c

FIN_SI

SI (a<0) ALORS

DEBUT_SI

AFFICHER "ax+b est négatif lorsque x"

AFFICHER c

FIN_SI

FIN_SI

FIN_ALGORITHME

4 1. a. $|\pi - 3| + 3 = \pi - 3 + 3$ (car $\pi > 3$)

$$|\pi - 3| + 3 = \pi.$$

b. $|\sqrt{2}| + |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})$ (car $1 < \sqrt{2}$)

$$|\sqrt{2}| + |1 - \sqrt{2}| = 2\sqrt{2} - 1.$$

c. $a \leq 1$ et $2 > a$ donc :

$$|a| + |a - 1| - |2 - a| = a + (-a + 1) - (2 - a)$$

$$|a| + |a - 1| - |2 - a| = a - 1.$$

2. a. $|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 2$

$$|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 2).$$

b. $2|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x| = -\frac{3}{2}.$

Une valeur absolue est toujours positive donc **cette équation n'admet pas de solution.**

c. $|5 - x| - 1 = 0 \Leftrightarrow |5 - x| = 1$

$$\Leftrightarrow (5 - x = 1 \text{ ou } 5 - x = -1)$$

$$|5 - x| - 1 = 0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 6).$$

d. $|2x - \pi| = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left(2x - \pi = \frac{\pi}{3} \text{ ou } 2x - \pi = -\frac{\pi}{3} \right)$

$$\Leftrightarrow \left(2x = \frac{4\pi}{3} \text{ ou } 2x = \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$|2x - \pi| = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left(x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} \right).$$

3. a. $|x| - 10 \leq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 10$

$$|x| - 10 \leq 0 \Leftrightarrow (-10 \leq x \leq 10).$$

b. $3|x| + 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > -\frac{1}{3}.$

Une valeur absolue est toujours positive donc **tout nombre réel est solution.**

c. $2|x| - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2$

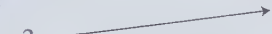
$$2|x| - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2).$$

d. $|x - 3| - 5 > 0 \Leftrightarrow |x - 3| > 5$

$$\Leftrightarrow (x - 3 < -5 \text{ ou } x - 3 > 5)$$

$$|x - 3| - 5 \Leftrightarrow (x < -2 \text{ ou } x > 8).$$

5 1. f est de la forme $u + k$, où u désigne la fonction racine carrée, et $k = -3$.
 f est donc de même sens de variation que u .

x	0	$+\infty$
Variations de f	-3 	

$$f(0) = \sqrt{0} - 3 = -3.$$

2. g est de la forme λu , où u désigne la fonction carrée, et $\lambda = 2$.
 g est donc de même sens de variation que u .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de g			

$$g(0) = 2 \times 0^2 = 0.$$

3. $h(x) = -3 \times \frac{1}{x} + 5.$

h est de la forme $-3u + 5$ où u désigne la fonction inverse

- $v = -3u$ est de sens de variation contraire à celui de u .
- $h = v + 5$ est de même sens de variation que v .

Donc le sens de variation de h est contraire à celui de u .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f			

6 1. • $f_1 : x \mapsto \lambda_1 \cdot x^2$.

$f_1(1) = 4$, soit $\lambda_1 \times 1^2 = 4$, donc $\lambda_1 = 4$.

$$f_1 : x \mapsto 4x^2.$$

• $f_2 : x \mapsto \lambda_2 \cdot x^2$

$f_2(1) = 1$, soit $\lambda_2 \times 1^2 = 1$, donc $\lambda_2 = 1$.

$$f_2 : x \mapsto x^2.$$

• $f_3 : x \mapsto \lambda_3 \cdot x^2$

$f_3(2) = -2$, soit $\lambda_3 \times (-2)^2 = -2$, donc $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$.

$$f_3 : x \mapsto -\frac{x^2}{2}.$$

• $f_4 : x \mapsto \lambda_4 \cdot x^2$

$f_4(1) = -1$, soit $\lambda_4 \times (1)^2 = -1$, donc $\lambda_4 = -1$.

$$f_4 : x \mapsto -x^2.$$

• $f_5 : x \mapsto \lambda_5 \cdot x^2$

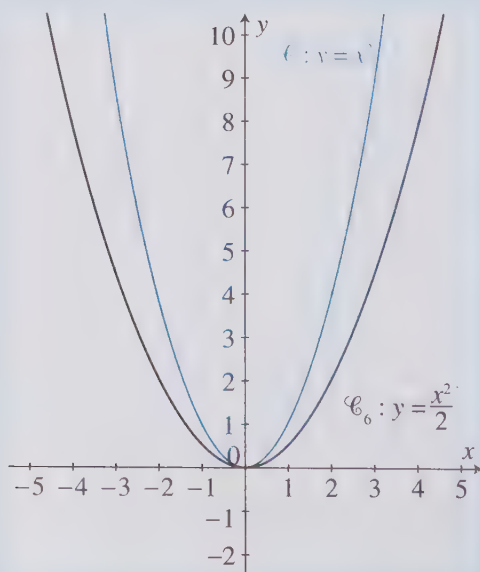
$f_5(1) = -2$ soit $\lambda_5 \times (1)^2 = -2$ donc $\lambda_5 = -2$.

$$f_5 : x \mapsto -2x^2.$$

2. f_6 est de la forme $\frac{1}{2} \times u$, où u représente la fonction carré. Le sens de variation de f_6 est le même que celui de la fonction carré.

Donc f_6 est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Courbe représentative de f_6 :



7 1. a. $f(x) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{u(x)} = \sqrt{-4 + \frac{x}{2}}$.

b. u est affine de coefficient directeur $+\frac{1}{2}$; u est donc strictement croissante sur $[8; +\infty[$.

$\sqrt{u}$ est de même sens de variation que u , donc $\sqrt{u}$ est croissante sur $[8; +\infty[$.

f est bien définie sur $[8; +\infty[$ car :

$$u(x) \geq 0 \Leftrightarrow -4 + \frac{x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 8.$$

2. g est de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto -1 + 2x$.

• u est affine de coefficient directeur $+2$, donc u est strictement croissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$. $\frac{1}{u}$ est de sens de variation contraire à celui de u .

Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$.

g est bien définie sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ car :

$$x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow -1 + 2x < 0.$$

En particulier, $-1 + 2x$ ne s'annule pas sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$.

8 1. Soit x un réel positif ou nul : $f(x) - g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$.

2.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
x^2	+	0	+	+	
$1-x$	+	+	0	-	
$x^2(1-x)$	+	0	+	0	-

3. a. $x^2(1-x) = 0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=1)$.

b. $x^2(1-x) > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ou } 0 < x < 1)$.

c. $x^2(1-x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

4. $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$.

$\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]1; +\infty[$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses 0 et 1, soit A(0; 0) et B(1; 1).

9 1. a. Sur $[-2; 1]$, la fonction est linéaire, donc $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Comme $f(1) = 3 = a \times 1$, $a = 3$.

Pour x appartenant à $[-2; 1]$, $f(x) = 3x$.

b. Sur $[1; 7]$, $f(x) = a'x + b'$ avec $a', b' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(7) = -1 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} a' + b' = 3 \\ 7a' + b' = -1 \end{cases} \text{ ce qui équivaut à :}$$

$$\begin{cases} b' = 3 - a' \\ 6a' + 3 = -1 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a' = -\frac{2}{3} \\ b' = \frac{11}{3} \end{cases}.$$

Pour x appartenant à $[1; 7]$, $f(x) = \frac{-2x + 11}{3}$.

c. Sur $[7; 10]$, f est constante, donc $f(x) = -1$.

2. a. $f + 5$ a le même sens de variation que f .

x	-2	1	7
Variations de $f+5$	-1	8	4

b. Le sens de variation de $-2f$ est contraire à celui de f :

x	-2	1	7
Variations de $-2f$	12	-6	2

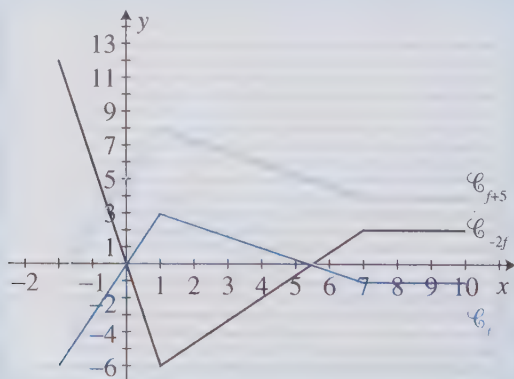
3. Sur chacun des intervalles $[-2; 1]$, $[1; 7]$ et $[7; 10]$, la restriction de f est affine. Or, si g désigne une fonction affine $x \mapsto ax + b$, alors $g + 5$ désigne encore une fonction affine puisque :

$$(g + 5) : x \mapsto ax + (b + 5),$$

$-2g$ également puisque :

$$-2g : x \mapsto (-2a)x + (-2b).$$

Pour construire les courbes représentatives des fonctions $f + 5$ et $-2f$, il suffit de placer les points d'abscisses -2 , 1 et 7 et de les relier par des segments.



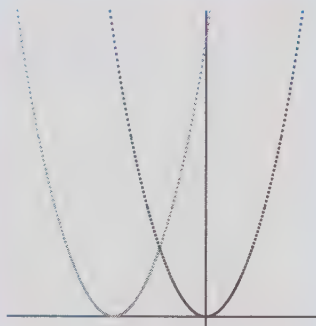
10 1.

VARIABLES

```

x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  x PREND_LA_VALEUR -10
  TANT_QUE (x<=10) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
      TRACER_POINT (x, F1(x))
      TRACER_POINT (x, F1(x+3))
    x PREND_LA_VALEUR x+0,05
  FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME

```



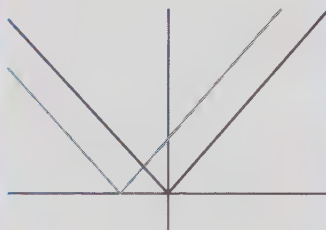
2.

VARIABLES

```

x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  x PREND_LA_VALEUR -5
  TANT_QUE (x<=5) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
      TRACER_POINT (x, F1(x))
      TRACER_POINT (x, F1(x+1))
    x PREND_LA_VALEUR x+0,02
  FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME

```



▲ Ici, $F1$ désigne la fonction valeur absolue.

11 a. f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 1$.

- Un carré est toujours positif donc :

$$x^2 + 1 \geq 0 + 1 \geq 1$$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

- $u : x \mapsto x^2 + 1$ a le même sens de variation que la fonction carré et $\sqrt{u}$ a le même sens de variation que u d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de f			

b. g est de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto |x| - 2$.

- $u(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 2)$.

$$D_g =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[.$$

- $u : x \mapsto |x| - 2$ a le même sens de variation que la fonction valeur absolue d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
Variation de u					

- Le sens de variation de $g = \frac{1}{u}$ est contraire à celui de u d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
Variation de g					

- c. • h est de la forme $-2 \times \frac{1}{u}$ où $u : x \mapsto \sqrt{3x+18}$.

- u n'est définie que sur $[-6; +\infty[$ puisque :

$$3x+18 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -18 \Leftrightarrow x \geq -6.$$

h n'est définie que pour x tel que $u(x) \neq 0$.

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow 3x+18 = 0 \Leftrightarrow x = -6. \text{ D'où :}$$

$$D_h =]-6; +\infty[.$$

- Soit $v : x \mapsto 3x+18$.

v est croissante sur $]-6; +\infty[$, donc $u = \sqrt{v}$ également.

Donc $\frac{1}{u}$ est décroissante sur $]-6; +\infty[$.

D'où $h = -2 \times \frac{1}{u}$ est croissante sur $]-6; +\infty[$.

12 1. $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}$ et $D_h = [0; +\infty[$.

L'intersection de ces trois intervalles est $[0; +\infty[$.

Donc le plus grand intervalle sur lequel sont définies à la fois les fonctions f, g et h est $[0; +\infty[$.

2. On étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$ pour $x \in [0; +\infty[$.

$$f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1-x) \text{ d'où le tableau de signes :}$$

x	0	1	$+\infty$
x	0	+	+
$1-x$	+	0	-
Signe de $f(x)-g(x) = x(1-x)$	0	+	-

$\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]0; 1[$.

$\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]1; +\infty[$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses 0 et 1, soit en A(0; 0) et en B(1; 1).

3. a. Soit $x \in [0; +\infty[$.

$$f(x) - h(x) = x - \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}$$

$$f(x) - h(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1).$$

b. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

si $x < 1$ alors $\sqrt{x} < \sqrt{1}$, soit $\sqrt{x} < 1$, d'où $\sqrt{x} - 1 < 0$;

si $x > 1$ alors $\sqrt{x} > \sqrt{1}$, soit $\sqrt{x} > 1$, d'où $\sqrt{x} - 1 > 0$.

c.

x	0	1	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	+	+
$\sqrt{x} - 1$		-	0
Signe de $f(x) - h(x)$ $= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$	0	-	0

$\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_h$ sur $]1; +\infty[$.

$\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_h$ sur $]0; 1[$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ se coupent aux points d'abscisse, 0 et 1, qui sont encore A(0 ; 0) et B(1 ; 1).

13 1. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9 + 16 = 25.$$

Donc $AC = 5$.

2. M étant distinct de A (car $BC > 0$), les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre sur les droites (AB) et (AC) et (BC) est parallèle à (MN), donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AM} \text{ soit } \frac{4}{MN} = \frac{3}{x}.$$

D'où $MN = \frac{4}{3}x$.

3. Si $x \geq 3$, les points A, B et M sont alignés dans cet ordre.

Alors $BM = AM - AB$, soit $BM = x - 3$.

• Si $x < 3$, les points A, M et B sont alignés dans cet ordre.

Alors $AM + MB = AB$, soit $x + BM = 3$, soit $BM = 3 - x$.

• Or, d'après les propriétés de la valeur absolue :

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geq 0, \text{ c'est-à-dire si } x \geq 3; \\ -(x - 3) = 3 - x & \text{si } x - 3 < 0, \text{ c'est-à-dire si } x < 3. \end{cases}$$

 Voir le cours « premières propriétés de la fonction valeur absolue ».

Donc pour tout $x \in]0; 5]$, $BN = |x - 3|$.

4. L'aire du trapèze colorié est :

$$f(x) = BM \times \frac{(BC+MN)}{2}$$

$$f(x) = |x-3| \times \frac{4+\frac{4}{3}x}{2}.$$

5. $f(x) = |x-3| \times \left(2 + \frac{2}{3}x\right)$

$$= |x-3| \times \frac{2}{3}(3+x)$$

$$= \frac{2}{3}|x-3|(x+3).$$

Admettant que $f(x) = \left|\frac{2}{3}(x-3)(x+3)\right|$, on obtient bien :

$$f(x) = \left|\frac{2}{3}(x^2 - 3^2)\right|$$

$$f(x) = \left|\frac{2}{3}(x^2 - 9)\right|$$

$$f(x) = \left|\frac{2}{3}x^2 - 6\right|.$$

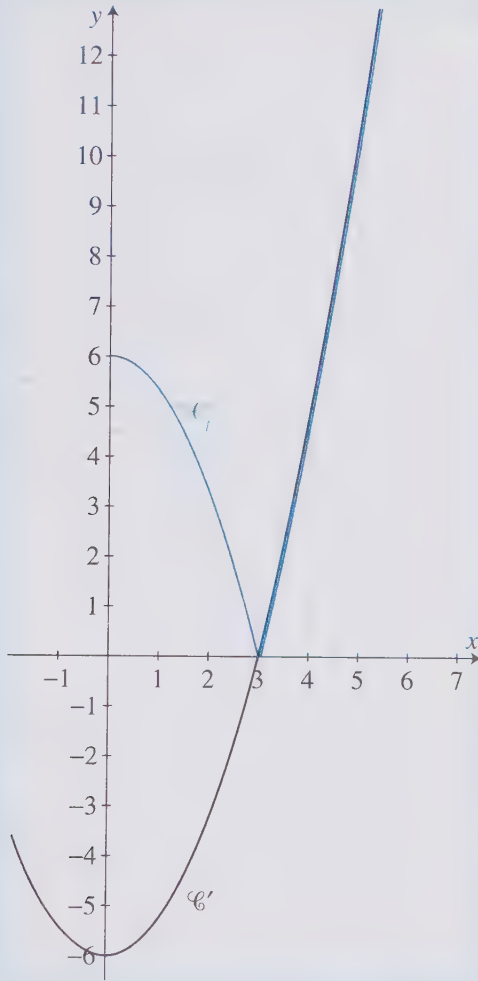
6. $\mathcal{C}_f$ vérifie les points suivants :

f est définie uniquement sur $]0; 5]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^2 - 6 & \text{si } \frac{2}{3}x^2 - 6 \geq 0 \\ -\left(\frac{2}{3}x^2 - 6\right) & \text{si } \frac{2}{3}x^2 - 6 < 0. \end{cases}$$

Ainsi, sur $[3; 5]$, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$ sont confondues, et sur $]0; 3[$, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

7. L'aire du trapèze BCNM vaut 4 lorsque $f(x) = 4$. Graphiquement, on voit que 4 a deux antécédents par f . Notons-les x_1 et x_2 , alors $x_1 \approx 1,7$ et $x_2 \approx 3,8$. **Il existe donc deux positions du point M pour lesquelles l'aire du trapèze vaut 4 ; lorsque $AM = x_1$ et lorsque $AM = x_2$.**



14 Partie A

Soient a et b deux réels de l'intervalle I .

• Supposons $a < b$. Alors :

$u(a) \leq u(b)$ car u est croissante sur I ;

$v(a) \leq v(b)$ car v est croissante sur I .

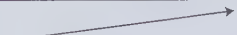
Par somme, $u(a) + v(a) \leq u(b) + v(b)$ soit $(u + v)(a) \leq (u + v)(b)$.

Donc, $u + v$ est croissante sur I .

Partie B

1.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de u	$\swarrow \quad \rightarrow \quad \searrow$ 0		

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de v		

Sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$, u et v sont croissantes.

Donc la somme $f = u + v$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

- $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$, donc f admet un minimum en -1 .

3. f semble être **décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$.**

4. Soient a et b deux réels.

a. $f(a) - f(b) = (a+1)^2 - (b+1)^2$

$f(a) - f(b) = [(a+1) + (b+1)] \times [(a+1) - (b+1)]$

$f(a) - f(b) = (a+b+2)(a-b)$.

b. Supposons que a et b appartiennent $]-\infty; -1]$, avec $a < b$.

- $\begin{cases} a < -1 \\ b \leq -1 \end{cases}$, donc $a+b < -2$ donc $a+b+2 < 0$.

• $a < b$, donc $a-b < 0$.

Par produit, $f(a) - f(b) > 0$.

D'où $f(a) > f(b)$.

c. Supposons que a et b appartiennent à $[-1; +\infty[$ avec $a < b$.

- $\begin{cases} a \geq -1 \\ b > -1 \end{cases}$ donc $a+b > -2$ donc $a+b+2 > 0$.

• $a < b$ donc $a-b < 0$.

Par produit, $f(a) - f(b) < 0$.

D'où $f(a) < f(b)$.

d. On a démontré que f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$, et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$.



La somme de deux fonctions monotones sur même intervalle n'est pas nécessairement monotone.

Ici, u et v sont monotones sur $]-\infty; 0]$, mais ce n'est pas le cas de $(u+v)$.

15 Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$

1. a. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - ba^2 + a^2b - bab + ab^2 - b^3$.

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

b. $a < b$ donc :

$$a - b < 0.$$

c. Première méthode : en développant.

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = a^2 + 2 \times a \times \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = a^2 + ab + b^2.$$

- Deuxième méthode : en reconnaissant dans les deux premiers termes. Le début d'une identité remarquable :

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2 \times a \times \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + b^2$$

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}.$$

- $a^2 + ab + b^2$ est égal à la somme de deux nombres positifs **donc** $a^2 + ab + b^2$ est **positifs**.

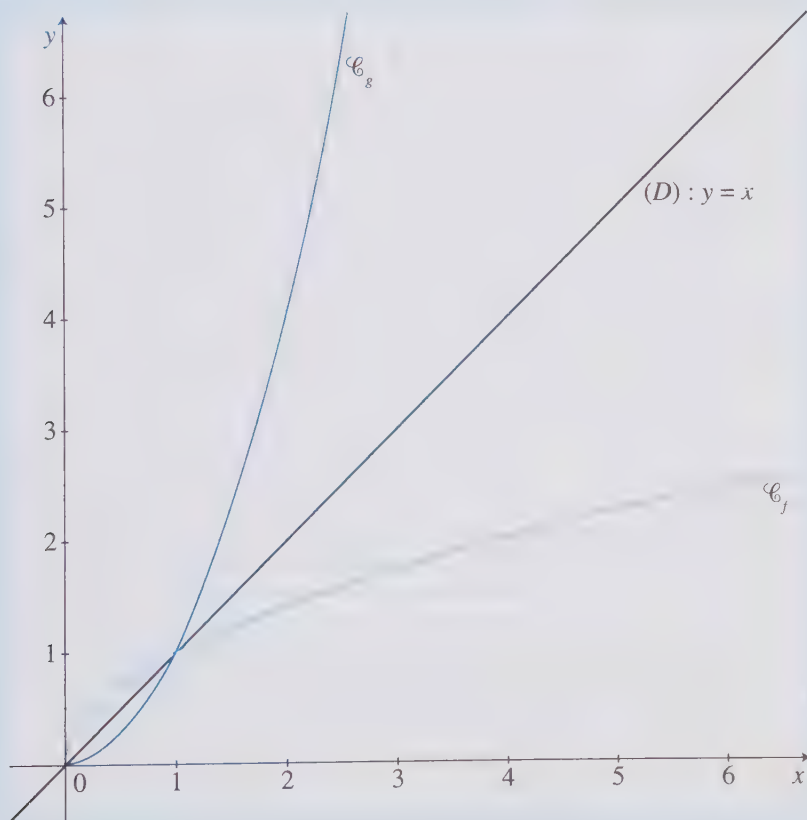
d. $a - b < 0$ et $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ donc, d'après la règle des signes d'un produit, $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ est négatif soit :

$$a^3 - b^3 \leq 0.$$

2. On a montré que, si a et b sont des réels tels que, $a < b$, alors $a^3 \leq b^3$.

Donc la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

16 1.



Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ semblent être symétriques par rapport à la première bissectrice (D) .

2. $M(a; b) \in \mathcal{C}_g$ donc $b = g(a)$, soit $b = a^2$.

3. Comme $b = a^2$, b est nécessairement positif, donc $b \in D_f = [0; +\infty[$.
 $N \in \mathcal{C}_f$, donc $N(b; f(b))$.

Or $f(b) = \sqrt{b} = \sqrt{a^2} = |a| = a$, puisque a est positif ou nul.

▲ Voir remarque du cours II.2.

Donc $N(b; a)$. L'abscisse de N est égale à l'ordonnée de M et inversement.

4. Le milieu I de $[MN]$ a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b+a}{2}\right)$.

$y_I = x_I$, donc les coordonnées du point I vérifient l'équation de la droite (D) , donc $I \in (D)$.

• Le coefficient directeur de (D) est égal à 1.

Le coefficient directeur de (MN) est :

$$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{b - a}{a - b} = -1.$$

Le produit des coefficients directeurs vaut $1 \times (-1) = -1$, les droites (D) et (MN) sont donc orthogonales.

Donc les points M et N sont symétriques par rapport à la première bissectrice (D) .

▲ Lorsque a décrit l'intervalle $[0; +\infty[$, b décrit $[0; +\infty[$.

Graphiquement, lorsque le point M décrit la courbe $\mathcal{C}_f$, son symétrique N décrit

$\mathcal{C}_g$

$\mathcal{C}_g$ est donc l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie d'axe Δ .

17 Partie A

1. a. u est affine de coefficient directeur $\frac{1}{2} (> 0)$, donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $u(a) < u(b)$.

v est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $v(u(a)) < v(u(b))$,

soit $f(a) < f(b)$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc $u(a) > u(b)$.

v est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $v(u(a)) > v(u(b))$,

c'est-à-dire $f(a) > f(b)$.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Pour tout réel x , $f(x) = |2 - x|$.

2. • u est une fonction affine de coefficient directeur $-1 (< 0)$, donc u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

• v est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soient a et b deux éléments de $] -\infty; 2]$ tels que $a < b$.

$a \leq 2$ et $b \leq 2$, donc $-a \geq -2$ et $-b \geq -2$.

D'où $u(a) = 2 - a \geq 0$ et $u(b) = 2 - b \geq 0$.

De plus, u est strictement décroissante donc $u(a) > u(b) \geq 0$.

$u(a)$ et $u(b)$ sont positifs et v est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc :

$$v(u(a)) > v(u(b)).$$

D'où :

$$f(a) > f(b).$$

4. Soient a et b deux éléments de $[2; +\infty[$ tels que $a < b$.

$a \geq 2$ et $b \geq 2$, donc $-a \leq -2$ et $-b \leq -2$,

d'où $u(a) = 2 - a \leq 0$ et $u(b) = 2 - b \leq 0$.

De plus, u est strictement décroissante donc $0 \geq u(a) > u(b)$.

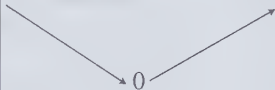
$u(a)$ et $u(b)$ sont négatifs et v est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ donc :

$$v(u(a)) < v(u(b)).$$

D'où :

$$f(a) < f(b).$$

5. f est donc strictement décroissante sur $] -\infty; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$, d'où son tableau de variation :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de $x \rightarrow 2 - x $			

$$f(2) = |2 - 2| = 0.$$

18 1. Réponse c.

f est de la forme $\sqrt{u}$, avec $u : x \mapsto 5x - 125$.

$$u(x) \geq 0 \Leftrightarrow 5x - 125 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 125 \Leftrightarrow x \geq 25.$$

$$\text{Donc } D_f = [25; +\infty[.$$

2. Réponse b.

g est de la forme $\frac{1}{u}$, avec $u : x \mapsto 12 - 4x$.

u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc g est strictement croissante sur chacun des intervalles où elle est définie :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de g			

3. Réponse a.

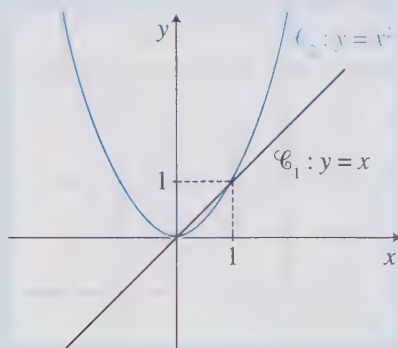
$$\frac{1}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}} \times \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}^2 - \sqrt{x_2}^2} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2}.$$

On en déduit que $1 \times (x_1 - x_2) = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})$,

$$\text{d'où } \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2}.$$

4. Réponse d.

Voir cours II.2. : positions relatives des courbes.



19 1. La calculatrice donne des valeurs approchées de A et de B : $A \approx 1$ et $B \approx 1$, qui ne permettent pas de comparer ces deux nombres.

2. a. Posons $u : x \mapsto 1 - x^2$, définie sur $[-1; 1]$.

$$u(x) = -1 \times x^2 + 1.$$

La fonction $x \mapsto -1 \times x^2$ est de sens de variation contraire à celui de $x \mapsto x^2$.

La fonction $x \mapsto -1 \times x^2 + 1$ a même sens de variation que $x \mapsto -1 \times x^2$.

Finalement, u est de sens de variation contraire à celui de $x \mapsto x^2$.

x	-1	0	1
Variations de u	0	1	0

$$u(0) = 1 - 0^2 = 1;$$

$$u(1) = u(-1) = 1 - 1 = 0.$$

b. $f = \sqrt{u}$ a même sens de variation que u .

x	-1	0	1
Variations de f	0	1	0

$$f(0) = \sqrt{1} = 1;$$

$$f(1) = f(-1) = \sqrt{0} = 0.$$

■ Bien que f et u aient des tableaux de variations semblables, ce sont des fonctions bien distinctes. Observez leurs courbes simultanément sur la calculatrice graphique.

c. f est de la forme $\sqrt{u}$.

$$u(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) \geq 0.$$

On établit le tableau de signes de $(1 - x)(1 + x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$	
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	
Signe de $u(x)=(1-x)(1+x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$u(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1].$$

$$\text{Donc } D_f = [-1; 1].$$

3. • 10^{-7} et 2×10^{-7} appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.

• D'après 2. b., f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

$10^{-7} < 2 \times 10^{-7}$, donc $f(10^{-7}) > f(2 \times 10^{-7})$ c'est-à-dire :

$$A > B.$$

20 1. Il faut distinguer deux cas :

Premier cas : f est croissante sur I .

Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. f est croissante sur I donc :

$$f(a) \leq f(b).$$

On compare les images de a et b par la fonction $(-3f)$.

$$(-3f)(a) - (-3f)(b) = -3 \times f(a) - (-3 \times f(b))$$

$$= -3 \times (f(a) - f(b)).$$

-3 est négatif et $f(a) - f(b)$ est négatif car $f(a) \leq f(b)$, donc, d'après la règle des signes d'un produit :

$$(-3f)(a) - (-3f)(b) \geq 0$$

donc :

$$(-3f)(a) \geq (-3f)(b).$$

Donc $(-3f)$ est décroissante sur I .

Deuxième cas : f est décroissante sur I . Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. f est décroissante sur I donc $f(a) \geq f(b)$.

On compare les images de a et b par la fonction $(-3f)$:

$$(-3f)(a) - (-3f)(b) = -3 \times (f(a) - f(b)).$$

-3 est négatif et $f(a) - f(b)$ est positif car $f(a) \geq f(b)$, donc, d'après la règle des signes d'un produit :

$$(-3f)(a) - (-3f)(b) \leq 0$$

$$(-3f)(a) \leq (-3f)(b).$$

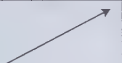
Donc $(-3f)$ est décroissante sur I .

Donc tous les cas, le sens de variation de $(-3f)$ est contraire à celui de f .

2. La fonction $x \mapsto -\frac{3}{x}$ est de la forme $-3f$, où f désigne la fonction inverse.

• La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty [$.

• Donc la fonction $-3f : x \mapsto -\frac{3}{x}$ est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto -\frac{3}{x}$			

3. a. Remplaçons x par 0 dans l'équation : $0^3 - 0 + 3 = 3 \neq 0$, donc **0 n'est pas solution de (E).**

b. x est solution de (E) si, et seulement si, $x^3 - x + 3 = 0$
si, et seulement si, $x^3 - x = -3$

$$\text{si, et seulement si, } \frac{x^3 - x}{x} = \frac{-3}{x}$$

$$\text{si, et seulement si, } x^2 - 1 = -\frac{3}{x}.$$

(On peut diviser par x car, 0 n'étant pas solution, on sait que $x \neq 0$.)

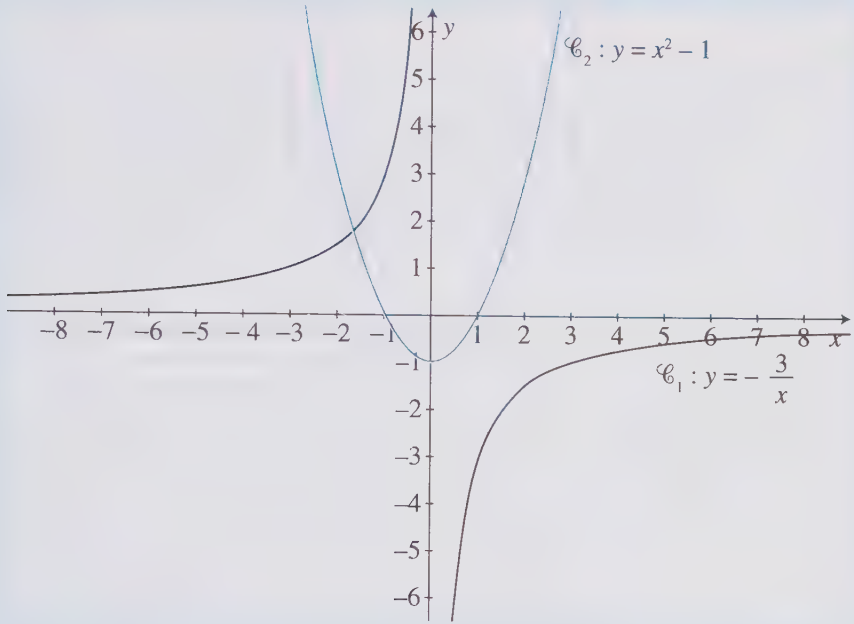
c. Avant de tracer la courbe représentative d'une fonction, il faut connaître ses variations. $x \mapsto x^2 - 1$ a les mêmes variations que la fonction carré, elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

d. On voit que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont un point d'intersection d'abscisse comprise entre -2 et -1 . Elles ne peuvent avoir d'autres points d'intersection sur $\mathbb{R}^-$ car les

fonctions $x \mapsto -\frac{3}{x}$ et $x \mapsto x^2 - 1$ sont monotones avec des sens de variation contraires.

Sur $]1 ; +\infty[$, $1 - x^2 > 0$ et $-\frac{3}{x} < 0$, donc $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ne peuvent avoir de points d'intersection sur cet intervalle.

Donc l'équation (E) admet une unique solution x_0 , avec $x_0 \approx -1,7$.



Fonctions polynômes du second degré

I ÉTUDE D'UNE FONCTION POLYNÔME

1. Forme développée

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c, \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels et } a \neq 0.$$

▀ Toute fonction polynôme du second degré s'écrit de manière unique sous la forme : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ (forme développée).

Deux fonctions polynômes du second degré sont égales si, et seulement si, leurs coefficients de mêmes degrés sont égaux.

2. Forme canonique

Propriété-définition

Toute fonction polynôme du second degré P , définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous forme canonique $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, α et β étant deux réels.

De plus : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

3. Variations et courbe représentative d'un polynôme du second degré

Soit P une fonction polynôme du second degré, dont la forme canonique est :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec } a \neq 0.$$

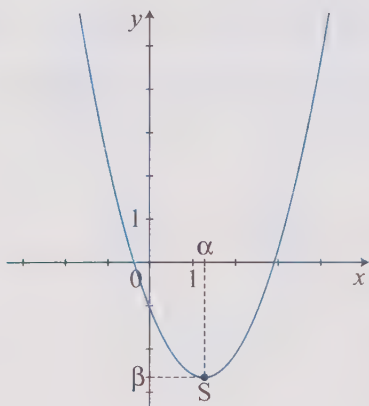
Les variations de P dépendent du signe de a :

• Cas où $a > 0$

Tableau de variation de P lorsque $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de P			

La courbe représentative de P est une parabole tournée vers le haut, de sommet $S(\alpha; \beta)$.

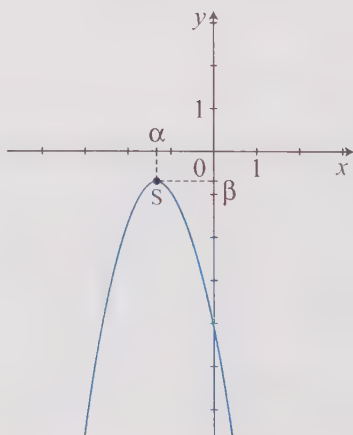


• Cas où $a < 0$

Tableau de variation de P lorsque $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de P			

La courbe représentative de P est une parabole tournée vers le bas, de sommet $S(\alpha; \beta)$.



Dans le cas où $P(x)$ est donné sous sa forme canonique, α est la valeur de x qui annule le carré.

II ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

1. Trinôme du second degré

■ Vocabulaire

- L'expression $ax^2 + bx + c$, où a, b, c , sont des constantes réelles, $a \neq 0$, et x une variable réelle, est appelé **trinôme** du second degré.
- Dire que le réel x_0 est une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$ signifie que x_0 est solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

■ Théorème

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, avec $a \neq 0$.

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le réel :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- **1^{er} cas** : $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **2^e cas** : $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule solution réelle (dite solution double) : $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

- **3^e cas** : $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.

■ Corollaire (factorisation d'un trinôme du second degré)

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré avec $a \neq 0$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, où x_1 est l'unique racine du trinôme.
- Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ ne peut s'écrire comme produit de facteurs du premier degré.

2. Signe d'un trinôme du second degré

■ **Théorème** : Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

- **1^{er} cas** : $\Delta > 0$

$P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines. En notant x_1 et x_2 les racines de P (avec $x_1 < x_2$), on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$P(x)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

- **2^e cas** : $\Delta = 0$

$P(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

En notant x_0 la racine (double) de P , on obtient le tableau :

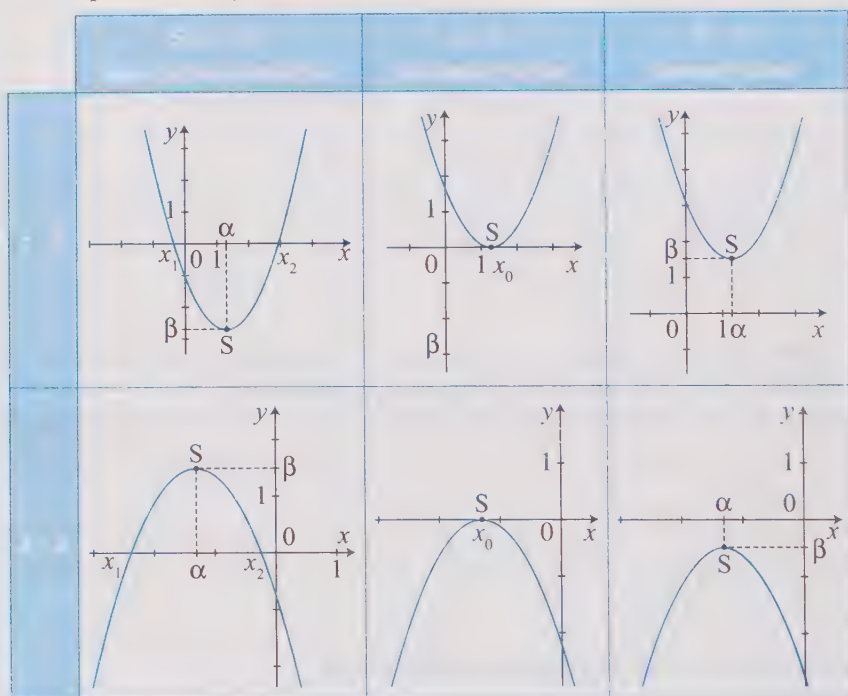
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

• 3^e cas : $\Delta < 0$

$P(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

3. Synthèse : allure et position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses

Elles dépendent du signe de Δ et de celui de a .



SAVOIR-FAIRE

1. Identifier les coefficients d'un trinôme

Deux trinômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients de même degré le sont.

Cette propriété permet d'identifier les coefficients d'un trinôme.

EXEMPLE :

Soit deux trinômes P et Q tels que :

$$P(x) = x^2 + 3x - 4 \text{ et } Q(x) = (x + 4)(x - a).$$

On cherche a tel que, pour tout x réel, $P(x) = Q(x)$.

P et Q sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients de même degré le sont, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} P = Q &\Leftrightarrow (x + 4)(x - a) = x^2 + 3x - 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x(4 - a) - 4a = x^2 + 3x - 4 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 3 = 4 - a \\ -4 = -4a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = 1. \end{aligned}$$

Pour tout x réel, $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$.

2. Mettre sous forme canonique un trinôme du second degré (sans utiliser de formules)

Pour écrire le trinôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique, il faut distinguer deux cas, selon que $a = 1$ ou $a \neq 1$.

■ Si $a = 1$:

1^{re} étape. Regarder les deux premiers termes $x^2 + bx$ comme étant le début d'une identité remarquable.

2^e étape. Dans l'expression du trinôme, faire apparaître l'identité remarquable reconnue en ajoutant $+b^2 - b^2$ (qui vaut 0 et ne modifie donc pas le trinôme initial).

EXEMPLE

Mettre sous forme canonique $x^2 + 10x + 7$

1^{re} étape. On écrit les deux premiers termes $x^2 + 10x$ comme étant le début d'une identité remarquable $(x + \dots)^2$, c'est-à-dire $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$, car $10x = 2 \times 5 \times x$.

L'identité remarquable cherchée est donc :

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2.$$

2^e étape. Dans l'expression du trinôme, $x^2 + 10x + 7$, on fait apparaître l'identité remarquable reconnue en ajoutant $+5^2 - 5^2$:

$$\begin{aligned}x^2 + 10x + 7 &= x^2 + 10x + 25 - 25 + 7 \\&= (x + 5)^2 - 18.\end{aligned}$$

■ Si $a \neq 1$, on factorise par a , ce qui donne :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \dots x + \dots).$$

On met ensuite sous forme canonique le trinôme entre parenthèses (pour lequel $a = 1$), comme dans le cas précédent.

EXEMPLE

Pour mettre sous forme canonique $2x^2 - 10x - 1$, on factorise par $a = 2$:

$$2x^2 - 10x - 1 = 2\left(x^2 - 5x - \frac{1}{2}\right)$$

et on se ramène au cas où $a = 1$.

1^{re} étape. On écrit les deux premiers termes $x^2 - 5x + \dots = (x - \dots)^2$.

Comme $5x = 2 \times \frac{5}{2} \times x$, l'identité remarquable cherchée est :

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2.$$

2^e étape. Dans l'expression du trinôme, on fait apparaître l'identité remarquable reconnue :

$$x^2 - 5x - \frac{1}{2} = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{27}{4}.$$

$$\text{Donc } 2x^2 - 10x - 1 = 2\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{27}{4}\right] = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{27}{2}.$$

3. Dresser le tableau de variation d'un trinôme P

■ Selon le signe de a , la courbe représentative de P est une parabole tournée vers le haut (si $a > 0$) ou une parabole tournée vers le bas (si $a < 0$).

■ Pour dresser le tableau de variation de P , on détermine les coordonnées $(\alpha; \beta)$ du sommet de cette parabole, soit en mettant $P(x)$ sous forme canonique (voir savoir-faire 2), soit en déterminant α et β à l'aide des formules du paragraphe I.2. du cours.

■ On résume ces résultats dans le tableau de variation de P .

EXEMPLE :

$$P: x \mapsto 4x^2 - 3x + 20.$$

On détermine les coordonnées $(\alpha; \beta)$ du sommet de la parabole :

• Soit en écrivant P sous forme canonique :

$$P(x) = 4\left[x^2 - \frac{3}{4}x + 5\right] = 4\left[x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{9}{64} - \frac{9}{64} + 5\right]$$

$$P(x) = 4 \left[\left(x - \frac{3}{8} \right)^2 + \frac{311}{64} \right] = 4 \left(x - \frac{3}{8} \right)^2 + \frac{311}{16}.$$

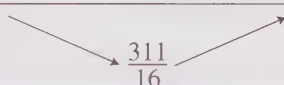
Donc $\alpha = \frac{3}{8}$ et $\beta = \frac{311}{16}$.

- Soit directement d'après les formules de α et β :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = +\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \beta &= P(\alpha) = P\left(\frac{3}{8}\right) \\ &= 4 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{8} + 20 \\ &= \frac{9 - 18 + 320}{16} = \frac{311}{16}. \end{aligned}$$

- On résume ces résultats dans le tableau de variation de P . Ici, $a = 4 > 0$, donc la courbe représentative de P est une parabole tournée vers le haut, P est donc décroissante puis croissante.

x	$-\infty$	$\frac{3}{8}$	$+\infty$
Variations de P			

4. Trouver les racines d'un trinôme sans calculer le discriminant Δ

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on peut parfois se passer du calcul du discriminant, de façon à éviter de longs et peu élégants calculs.

1^{er} cas. Si $b = 0$ ou $c = 0$, on factorise si c'est possible.

EXEMPLES :

- $x^2 - 5 = 0$

$b = 0$, on factorise :

$$\begin{aligned} x^2 - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}). \end{aligned}$$

- $x^2 + 16 = 0$

$b = 0$, on factorise (si possible) :

$$\begin{aligned} x^2 + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= -16. \end{aligned}$$

Pas de solution car un carré est toujours positif ou nul.

$$\bullet x^2 - 13x = 0$$

$c = 0$, on factorise :

$$x^2 - 13x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 13).$$

 Règle du produit nul : un produit est nul si et seulement si un des deux facteurs est nul.

2^e cas. On reconnaît une identité remarquable.

EXEMPLES :

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

 Il est toujours possible de résoudre ces équations en calculant le discriminant.

5. Résoudre une inéquation

1^{re} étape. Se ramener à un second membre nul.

2^e étape. Déterminer les racines du trinôme ainsi obtenu.

3^e étape. Dresser le tableau de signes de ce trinôme.

4^e étape. Conclure en revenant à l'inéquation de l'énoncé.

EXEMPLE :

$$2x^2 - 5x + 1 \geq x^2 + 6x - 4$$

$$\text{1^{re} étape : } 2x^2 - 5x + 1 \geq x^2 + 6x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 5 \geq 0.$$

2^e étape : $\Delta = 11^2 - 4 \times 1 \times 5 = 101 > 0$, le trinôme $x^2 - 11x + 5$ admet

donc deux racines, $x_1 = \frac{11 - \sqrt{101}}{2}$ et $x_2 = \frac{11 + \sqrt{101}}{2}$.

3^e étape : Comme $a = 1 > 0$, $x^2 - 11x + 5$ est positif à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$	$\frac{11-\sqrt{101}}{2}$	$\frac{11+\sqrt{101}}{2}$	$+\infty$	
Signe de $x^2-11x+5$	+	0	-	0	+

4^e étape

$$2x^2 - 5x + 1 \geq x^2 + 6x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty ; \frac{11 - \sqrt{101}}{2} \right] \cup \left[\frac{11 + \sqrt{101}}{2} ; +\infty \right[.$$

Attention, il faut penser à placer les racines dans l'ordre croissant dans le tableau et bien vérifier si les crochets de l'ensemble des solutions sont ouverts ou fermés, selon que l'inégalité demandée est stricte ou pas.

6. Choix de la forme la plus appropriée

Soit P un polynôme dont on connaît la forme développée :

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

la forme canonique :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

et la forme factorisée :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

En général, la forme la mieux appropriée...

- pour calculer $P(0)$, est la forme développée : $P(0) = c$;
- pour calculer $P(\alpha)$, est la forme canonique : $P(\alpha) = \beta$;
- pour résoudre l'équation $P(x) = 0$, est la forme factorisée :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x = x_1 \text{ ou } x = x_2) ;$$

- pour résoudre l'équation $P(x) = \beta$, est la forme canonique :

$$P(x) = \beta \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ (car } a \neq 0 \text{)} ;$$

- pour résoudre l'équation $P(x) = c$, est la forme développée :

$$P(x) = c \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{-b}{a}.$$

EXERCICES D'APPLICATION

1 CALCUL MENTAL

★ 3 min ► P. 69

Sans écrire aucun calcul, donner pour chacun des polynômes suivants son terme de plus haut degré et ses racines.

a. $(2x+1)(x-5)$; b. $\frac{x^2+1}{3}$; c. $(x+1)^2$; d. $(3x-2)\left(5-\frac{x}{2}\right)$.

▲ D'après la définition du II.1., une racine est une valeur de x qui annule l'expression.

2 FORME CANONIQUE

★★ 10 min ► P. 69

P désigne une fonction polynôme du second degré. Mettre sous forme canonique $P(x)$, dans chacun des cas suivants :

a. $P(x) = x^2 + 4x + 9$; b. $P(x) = x^2 - 6x$; c. $P(x) = x^2 + 3x + 1$;
d. $P(x) = 2x^2 - 2x + 5$; e. $P(x) = -3x^2 + 2x - 9$.

▲ Voir le savoir-faire 2.

3 TABLEAU DE VARIATION

★ 10 min ► P. 70

1. Dresser le tableau de variation de f , définie sur $[-5; 3]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 5x + 4.$$

▲ Voir le savoir-faire 3.

2. En déduire le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[-5; 3]$.

3. Par lecture du tableau, donner le nombre de solutions sur $[-5; 3]$ des équations suivantes :

a. $f(x) = 0$; b. $f(x) = -100$; c. $f(x) = 7$; d. $f(x) = 8$.

4 RÉOLUTION D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

★ 30 min ► P. 71

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $x^2 + x - 6 = 0$; b. $3x^2 + 10x - 8 = 0$; c. $x^2 = 16$;
d. $3x^2 - 12x + 5 = 0$; e. $x^2 + x + 1 = 0$; f. $3x^2 + 2x = 0$;
g. $121x^2 - 110x + 25 = 0$; h. $x^2 - x = 1$; i. $x^2 + 6x + 9 = 0$;
j. $3x^2 + 3 = 0$; k. $2x^2 - 4 = 20x$; l. $x^2 = -x\sqrt{3} + 6$.

Appliquer le théorème Ju II.1. ou utiliser le savoir-faire 4. pour plus d'efficacité, lorsque c'est possible.

5 RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

★★ 45 min ▶ P. 72

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- a. $3x^2 - 2x - 1 > 0$; b. $3x^2 - 14x - 5 \leq 0$; c. $x^2 + x + 3 \leq 0$;
 d. $-3x^2 - 2 < 0$; e. $-x^2 + 2x + 4 > 0$; f. $x^2 - 4x + 4 \leq 0$;
 g. $x^2 \geq 6x - 1$; h. $5x^2 - 45x > 0$; i. $-4x + 5 > x^2 + x + 2$.

Voir le savoir-faire 5.

6 RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}^+$

★★ 15 min ▶ P. 75

- Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'inéquation $3x^2 + x - 1 < 0$, puis l'inéquation :
 $3x^2 + x - 1 \geq 0$.

Il s'agit de résoudre normalement les (in)équations, puis de restreindre l'ensemble des solutions aux x positifs.

7 CHOIX DE LA FORME APPROPRIÉE

★ 25 min ▶ P. 75

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ dont la forme développée est :

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 18.$$

- Établir que $f(x)$ s'écrit sous forme canonique $f(x) = 2\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{225}{8}$.
- Déterminer de deux manières différentes la forme factorisée de $f(x)$:
 a. à partir du calcul des racines et de la formule du cours ;
 b. à partir de la forme canonique.
- En choisissant chaque fois l'écriture de $f(x)$ la mieux adaptée, déterminer :
 a. le(s) antécédent(s) de $-\frac{225}{8}$;
 b. l'image de 0 ;
 c. l'image de $\frac{9}{4}$;
 d. le(s) antécédent(s) de -18 ;
 e. le(s) antécédent(s) de 0.

8 ALGORITHME DE HÖRNER

★★ 20 min ► P. 77

1. On considère l'algorithme ci-dessous :

```

VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  y PREND_LA_VALEUR 3*x-5
  y PREND_LA_VALEUR y*x+2
  AFFICHER "l'image de"
  AFFICHER x
  AFFICHER "par P est"
  AFFICHER y
FIN_ALGORITHME

```

- Calculer l'image par P de 0, de 4, de -3
- Exprimer $P(x)$ en fonction de x .
- Développer l'expression obtenue au **b**.
- Comparer le nombre de multiplications à effectuer dans chacune de ces deux expressions.

 L'algorithme de Horner a pour but de diminuer le nombre d'opérations effectuées par l'ordinateur pour calculer l'image d'un réel par une fonction polynôme, afin de diminuer le temps de calcul.

- Modifier cet algorithme pour qu'à tout polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et à toute valeur de x , il associe la valeur de $P(x)$.
- Écrire un algorithme de Horner donnant l'image d'un quelconque réel par le polynôme du troisième degré P :

$$P : x \mapsto ((2x - 4) \times x + 3) \times x - 5 = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5.$$

Comparer le nombre de multiplications à effectuer dans chacune des expressions de $P(x)$.

9 TRACER LA COURBE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

★ 20 min ► P. 78

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{2}$.

Après avoir dressé le tableau de variation de f , construire sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- On considère la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = 9x^2 + 9$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 12x + 5$.
 - Tracer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sur un même repère à l'aide d'une calculatrice graphique. Émettre une hypothèse sur le nombre de points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

b. Déterminer algébriquement les coordonnées du ou des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$.

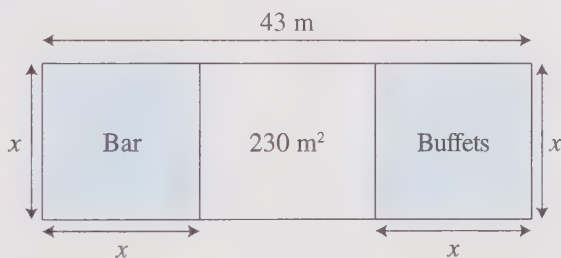
▲ Résoudre l'équation $9x^2 + 9 = 12x + 5$ en reconnaissant une identité remarquable.

10 CONTRAINTES AU RESTAURANT

★★ 20 min ► p. 80

1. Résoudre l'équation $-2x^2 + 43x - 230 = 0$.

2. M. Gérard, restaurateur, décide de faire construire une nouvelle salle de restaurant. Il s'agira d'une grande pièce rectangulaire de 43 mètres de long. À l'une des extrémités et sur la largeur de la salle, une partie carrée est destinée à l'espace Bar. À l'autre extrémité, un espace identique est destiné aux buffets (voir schéma). La partie centrale, devant accueillir les tables des clients, occupera une aire de 230 m^2 .



Quelles peuvent être les largeurs possibles de la salle ? Laquelle choisira-t-il s'il souhaite que l'espace attribué aux tables occupe plus de 50 % de la surface totale ?

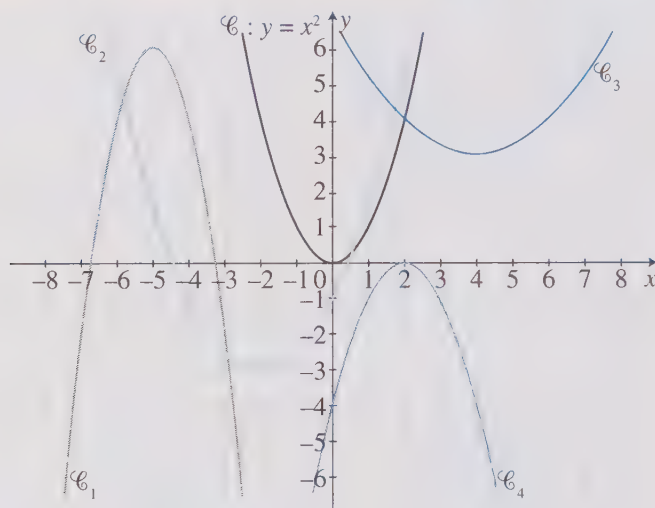
EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

11 ASSOCIER UNE PARABOLE À SON ÉQUATION



5 min

► P. 80



À chaque question correspond une seule bonne réponse.



Il est possible de s'inspirer du savoir-faire 3.

1. La courbe $\mathcal{C}_1$ a pour équation :

- a. $y = 2(x-5)^2 + 6$; b. $y = 2(x+5)^2 + 6$;
 c. $y = -2(x-5)^2 + 6$; d. $y = -2(x+5)^2 + 6$.

2. La courbe $\mathcal{C}_2$ a pour équation :

- a. $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$; b. $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$;
 c. $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$; d. $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$.

3. La courbe $\mathcal{C}_3$ a un coefficient de plus haut degré égal à :

- a. $\frac{1}{4}$; b. $\frac{1}{2}$; c. $-\frac{1}{4}$; d. 2.

4. La courbe $\mathcal{C}_4$ a pour équation.

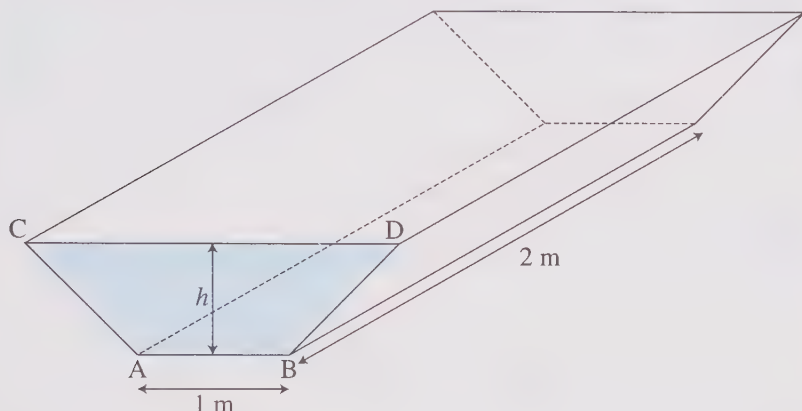
- a. $y = (x-2)^2 - 4$; b. $y = -(x-2)^2 - 4$;
 c. $y = -x^2 + 4x - 4$; d. $y = (x-2)^2$.

12 INÉQUATION, EXTREMUM

★★ 35 min ► P. 81

L'abreuvoir ci-dessous a une longueur de 2 mètres, et son fond a une largeur de 1 mètre.

On note h la hauteur de l'abreuvoir, exprimée en mètres. L'angle entre l'horizontale et les parois de l'abreuvoir mesure 45° .



- Exprimer l'aire du trapèze isocèle ABCD en fonction de h .
- Démontrer que le volume de l'abreuvoir est donné par :

$$V(h) = 2h^2 + 2h.$$
- Quelle hauteur donner à l'abreuvoir pour qu'il ait une capacité de 1 000 Litres ?
- a. Écrire et résoudre l'inéquation que doit vérifier h pour que le volume de l'abreuvoir soit d'au moins 2 000 L.
 b. Quelle est la hauteur h minimale recherchée ? Donner une valeur approchée de h à 10^{-2} près.

13 RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION

DU SECOND DEGRÉ AVEC RACINES CARRÉES

★★★ 15 min ► P. 82

Soit (E) l'équation $x^2 - \sqrt{7}x + \sqrt{3} = 0$.

- Calculer le discriminant du trinôme et vérifier qu'il est égal à $(\sqrt{3} - 2)^2$.
- En déduire les solutions de l'équation.

14 PARABOLE PASSANT PAR TROIS POINTS

★★ 15 min ► P. 82

Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- Sachant que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passe par les points A(0 ; 3), B(1 ; 0) et C(3 ; 6), écrire le système de trois équations à trois inconnues a , b et c correspondant.
- Résoudre ce système.

3. Sur calculatrice graphique, tracer la parabole $\mathcal{C}_f$ et vérifier à l'aide du tableau de valeurs qu'elle passe bien par les points A, B et C.

1. $M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x)$.

Ici, cela donne pour le point A :

$$A(0; 3) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow 3 = f(0) \Leftrightarrow 3 = a \times 0^2 + b \times 0 + c.$$

2. Par trois points non alignés du plan, il passe toujours une parabole et une seule.

15 ÉQUATIONS BICARRÉES

★★★ 30 min ▶ p. 82

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$; b. $x^4 + 3x^2 - 1 = 0$; c. $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

Poser $X = x^2$ et commencer par résoudre l'équation d'inconnue X .

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2x^4 + 4x^2 - 8 > 0$.

16 ÉQUATIONS QUOTIENT

★★ 25 min ▶ p. 84

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x \leq \frac{1}{x}$;

b. $\frac{2x+1}{x-2} \geq \frac{x+2}{3-x}$.

Se ramener à un second membre nul, puis factoriser le premier membre en mettant les fractions au même dénominateur.

17 ÉQUATION DU 3^e DEGRÉ AVEC UNE SOLUTION ÉVIDENTE

★★ 25 min ▶ p. 86

Le but de cet exercice est de trouver les racines du polynôme f défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6.$$

1. Montrer que -1 est racine de f .

2. Trouver les nombres réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c).$$

Voir le savoir-faire 1.

3. Déterminer les racines du polynôme du second degré trouvé dans la question précédente.

4. En déduire la forme factorisée de f .

18

★★ 25 min ▶ p. 86

Déterminer tous couples de réels $(x; y)$ tels que :

$$1. \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 10. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10. \end{cases}$$

1. On pourra résoudre le système par substitution, en remplaçant par exemple y par son expression en fonction de x .

$$2. x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy.$$

19 ALGORITHME

★ 5 min ▶ p. 87

Écrire un algorithme calculant les racines d'un polynôme du second degré.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

20 ÉQUATION AVEC PARAMÈTRE

★★ 10 min ▶ p. 88

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + bx + 3$, où b désigne un nombre réel.

Déterminer le(s) valeur(s) de b pour lesquelles :

- a. f admet une unique racine.
- b. f admet deux racines distinctes.
- c. f n'admet pas de racine réelle.

21 ÉQUATION DE DEGRÉ 4

★★ 20 min ▶ p. 88

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation (E) :

$$-3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 7x + 2 = 0.$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que, pour tout x réel :

$$-3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 7x + 2 = (ax^2 + bx + c)(x^2 + x + 1).$$

2. En déduire les solutions de (E).

22 RELATIONS ENTRE COEFFICIENTS ET RACINES

★★★ 40 min ▶ p. 88

Soient a , b , c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

On suppose que le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines (éventuellement confondues) x_1 et x_2 .

1. Rappeler la forme factorisée de $P(x)$.

2. a. En développant la relation donnée à la question précédente, démontrer que :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

b. Applications

Après avoir vérifié que 1 est solution de l'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$, trouver l'autre solution à l'aide d'une des deux égalités précédentes.

Résoudre, de même, dans $\mathbb{R}$:

$$(E) \quad x^2 + (2 - \sqrt{2})x - 2\sqrt{2} = 0$$

(on remarquera que -2 est solution).

3. Soit S et P deux nombres réels.

a. Démontrer que le couple $(x_1; x_2)$ est solution de $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \times x_2 = P \end{cases}$ si, et seulement si, x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

b. Application. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(\mathcal{G}_1) : \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \times x_2 = 1 \end{cases} ; \quad (\mathcal{G}_2) : \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ x_1 \times x_2 = 1 \end{cases} ; \quad (\mathcal{G}_3) : \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \times x_2 = 2 \end{cases}.$$

23 ÉQUATION DU 4^e DEGRÉ AVEC CHANGEMENT DE VARIABLE

★★★ 25 min ► P. 90

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation (E) :

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0.$$

1. 0 est-il solution de l'équation (E) ?

2. En divisant (E) par x^2 et en posant $X = x + \frac{1}{x}$, démontrer que x est solution de (E) si et seulement si X est solution d'une équation du second degré que l'on résoudra.

En déduire les solutions de (E).

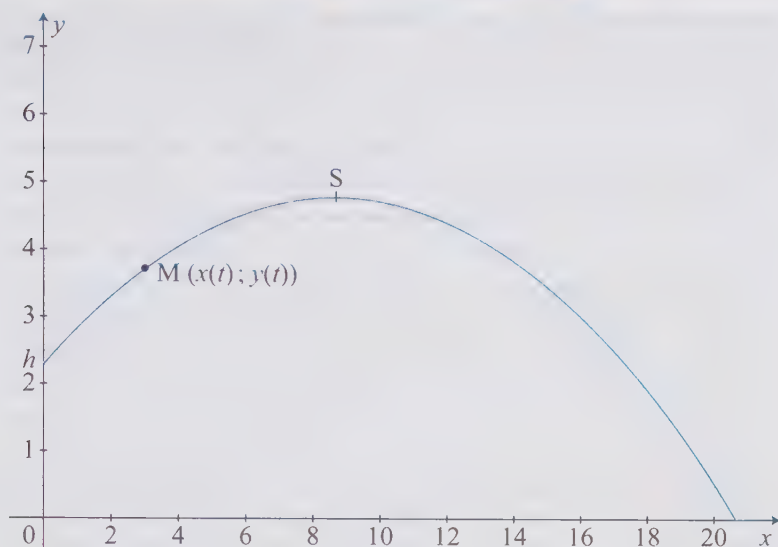
24 LANCER DE POIDS, TRAJECTOIRE

★★★ 40 min ► P. 91

Un athlète lance un poids à une vitesse initiale de $14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, faisant un angle de 30° avec l'horizontale.

À l'instant où le poids est lancé, il se situe à 2,30 mètres du sol.

Dans le repère page suivante, la position du poids à l'instant t , exprimé en secondes, est donnée par ses coordonnées $(x(t), y(t))$. On considère que $t = 0$ à l'instant où le poids est lancé. On a représenté en bleu un exemple de trajectoire possible.



Les sciences physiques établissent que la trajectoire du poids en fonction du temps est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha) t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha) t + h \end{cases}$$

où v_0 désigne la vitesse initiale, α l'angle avec l'horizontale et h la hauteur initiale du poids.

On prendra $g \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Que valent $x(0)$ et $y(0)$? À quoi cela correspond-il ?
2. Que dire du signe de $x(t)$ et de $y(t)$? Exprimer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t uniquement.
3. Exprimer y en fonction de x .
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f , qui à x associe y sur l'intervalle $[0; d]$, où d est la distance entre le lanceur et le point d'impact au sol.
5. À l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice graphique, tracer alors la trajectoire du poids.
6. À quelle distance le poids touche-t-il le sol ?

 2. Les valeurs exactes des cosinus et sinus sont :

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

3. Procéder par substitution.

CONTRÔLE

25 QUESTION DE COURS

★★ 15 min ► P. 92

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 6x + 6$.

1. Compléter, à l'aide de la première identité remarquable :

$$x^2 + 6x + \dots = (x + \dots)^2.$$

2. En déduire la forme canonique de $P(x)$.

3. Factoriser $P(x)$ à partir de la forme canonique obtenue au 2.

4. Déterminer, en choisissant la forme la mieux adaptée de $P(x)$:

- a. les antécédents de -3 par P ;
- b. les antécédents de 0 par P ;
- c. les antécédents de 6 par P .

26 PROBLÈME

★★★ 45 min ► P. 93

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

1. Écrire f sous forme canonique.

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. En déduire le nombre de solutions de chacune des équations suivantes, puis les résoudre si nécessaire :

- a. $f(x) = 0$;
- b. $f(x) = -1,25$;
- c. $f(x) = -6$.

4. Tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -\frac{1}{x}$.

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Le but de cette question est de préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

- 1. Après avoir, en justifiant, dressé le tableau de variation de g , tracer $\mathcal{C}_g$ dans le même repère que $\mathcal{C}_f$.
- 2. Dire, par lecture graphique, sur quels intervalles disjoints $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

3. Montrer que l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est équivalente à l'inéquation :

$$\frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x} \geq 0.$$

4. Montrer que 1 est une racine de la fonction polynôme h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1.$$

5. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$

6. À l'aide des questions précédentes résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

7. Conclure sur les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

CONTRÔLE

27

★★ 45 min ► p. 96

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^2}{4} - x + 2$.

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal. (On ne demande pas de tracer les courbes.)

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
3. a. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$, pour x réel.
b. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

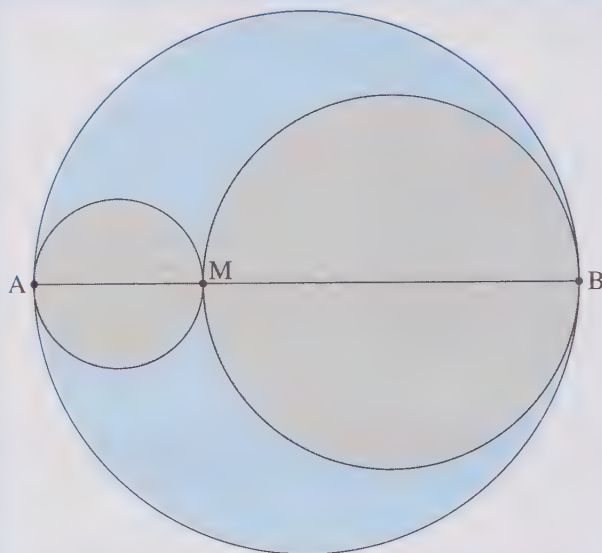
Partie B

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$.

M est un point variable du segment $[AB]$ et on pose $AM = x$.

La figure ci-dessous est constituée du cercle de diamètre $[AB]$, et des cercles de diamètres $[AM]$ et $[MB]$.

On note $A(x)$ l'aire de la surface bleue, et $B(x)$ l'aire de la surface grise (somme des aires des deux disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$).



1. Montrer que l'aire $B(x)$ de la surface grise est donnée par :

$$B(x) = \pi \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \right).$$

2. En déduire que $A(x) = \pi \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right)$.

3. En utilisant les résultats de la **partie A** déterminer :

- la position du point M pour laquelle $A(x)$ est maximale ;
- les positions de M pour lesquelles l'aire de la surface bleue est égale au quart de l'aire du disque de diamètre $[AB]$;
- les positions du point M pour lesquelles $A(x)$ est inférieure ou égale à la moitié de $B(x)$.

CORRIGÉS

1 a. Le terme de plus haut degré s'obtient en multipliant les termes de plus haut degré de chaque facteur ; c'est $2x \times x = 2x^2$.

Les racines sont $-\frac{1}{2}$ (qui annule le facteur $(2x+1)$) et **5** (qui annule le facteur $(x-5)$).

b. Le terme de plus haut degré est $\frac{x^2}{3}$.

Ce polynôme n'a pas de racine car, pour tout x réel, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

c. Le terme de plus haut degré est x^2 (on procède comme au **a.**).

Ce polynôme admet une unique racine : c'est **-1** (qui annule $(x+1)$).

d. Le terme de plus haut degré est $3x \times \left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{3x^2}{2}$.

Les racines sont $\frac{2}{3}$ et **10**.

2 a. $x^2 + 4x + 2^2 = (x+2)^2$ donc $P(x) = \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{(x+2)^2} - 4 + 9$
 $P(x) = (x+2)^2 + 5$.

b. $P(x) = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} - 9$
 $P(x) = (x-3)^2 - 9$.

c. $x^2 + 2 \times \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ donc $P(x) = x^2 + 3x + 1$
 $P(x) = \underbrace{x^2 + 3x + \frac{9}{4}}_{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} - \frac{9}{4} + 1$
 $P(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

d. $P(x) = 2x^2 - 2x + 5 = 2\left[x^2 - x + \frac{5}{2}\right]$.

Or, $x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ d'où $x^2 - x + \frac{5}{2} = \underbrace{x^2 - x + \frac{1}{4}}_{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{2}$
 $= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$.

Donc $P(x) = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$

$P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$.

$$e. P(x) = -3x^2 + 2x - 9 = -3 \left[x^2 - \frac{2}{3}x + 3 \right].$$

$$\text{Or } x^2 - 2 \times \frac{1}{3} \times x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{2}{3}x + 3 &= \underbrace{x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}}_{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2} + \underbrace{\frac{1}{9} + 3}_{\frac{26}{9}} \\ &= \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{26}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(x) = -3 \left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{26}{9} \right] = -3 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{26}{3}.$$

$$\boxed{3} \quad 1. \bullet \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2 \times (-2)} = \frac{5}{4}.$$

$$\bullet \beta = f(\alpha) = f\left(\frac{5}{4}\right) = -2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 5 \times \frac{5}{4} + 4$$

$$\beta = \frac{-25}{8} + \frac{25}{4} + 4 = \frac{25}{8} + \frac{32}{8} = \frac{57}{8}.$$

$$\bullet a = -2 < 0$$

x	-5	$\frac{5}{4}$	3
Variations de f		$\frac{57}{8}$	
	-71		1

2. f admet un minimum en -5 , qui vaut -71 .

f admet un maximum en $\frac{5}{4}$, qui vaut $\frac{57}{8}$.

3. a. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-5; 3]$, comprise entre -5 et $\frac{5}{4}$ (cette équation n'admet pas de solution sur $\left[\frac{5}{4}; 3\right]$, car 0 n'est pas compris entre 1 et $\frac{57}{8}$).

b. L'équation $f(x) = -100$ n'admet aucune solution car -100 est strictement inférieur au minimum -71 de f .

c. L'équation $f(x) = 7$ admet deux solutions sur $[-5; 3]$.

La première est comprise entre -5 et $\frac{5}{4}$ car $\frac{57}{8} = 7 + \frac{1}{8} > 7 > -71$.

La seconde est comprise entre $\frac{5}{4}$ et 3 car $1 < 7 < \frac{57}{8}$.

d. L'équation $f(x) = 8$ n'admet aucune solution car 8 est strictement supérieur au maximum $\frac{57}{8}$ de f .

4 a. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$.

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3.$$

b. $\Delta = 10^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 100 + 96 = 196$.

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-10+14}{2 \times 3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10-14}{2 \times 3} = -4.$$

c. $x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow (x=4 \text{ ou } x=-4)$.

Il y a donc deux solutions, $x=4$ et $x=-4$.

d. $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 84$.

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 .

Comme $\sqrt{84} = \sqrt{4 \times 21} = 2\sqrt{21}$:

$$x_1 = \frac{12+2\sqrt{21}}{2 \times 3} = \frac{6+\sqrt{21}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12-2\sqrt{21}}{2 \times 3} = \frac{6-\sqrt{21}}{3}.$$

 Faites attention à correctement simplifier les fractions :

$$\frac{12+2\sqrt{21}}{6} = \frac{\cancel{2}(6+\sqrt{21})}{\cancel{2} \times 3} = \frac{6+\sqrt{21}}{3}.$$

e. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.

$\Delta < 0$, donc l'équation n'admet **aucune solution**.

f. $3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2}{3}.$$

g. $\Delta = (-110)^2 - 4 \times 121 \times 25 = 0$.

L'équation admet une solution unique $x_1 = \frac{+110}{2 \times 121} = \frac{5}{11}$.

h. $x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$.

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

i. $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

L'équation admet donc une unique solution, -3 .

j. $3x^2 + 3 = 0$.

L'équation n'admet aucune solution car, pour tout x , $x^2 \geq 0$ donc :

$$3x^2 + 3 \geq 0 + 3 > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{k. } 2x^2 - 4 = 20x &\Leftrightarrow 2x^2 - 20x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x - 2 = 0. \end{aligned}$$

On a divisé les deux membres de l'équation par 2 pour simplifier les calculs qui suivent.

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 108.$$

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 .

$$\text{Comme } \sqrt{108} = \sqrt{4 \times 27} = \sqrt{4 \times 9 \times 3} = 2 \times 3 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3} :$$

$$x_1 = \frac{10 - 6\sqrt{3}}{2} = 5 - 3\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 6\sqrt{3}}{2} = 5 + 3\sqrt{3}.$$

$$\text{l. } x^2 = -x\sqrt{3} + 6 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0.$$

$$\Delta = \sqrt{3}^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 3 + 24 = 27.$$

$\Delta > 0$, donc l'équation admet deux racines x_1 et x_2 .

$$\text{Comme } \sqrt{27} = 3\sqrt{3} :$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{2} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$\boxed{5} \text{ a. } \Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 > 0.$$

Le trinôme $3x^2 - 2x - 1$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{6} = 1.$$

$a = 3 > 0$ et le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
Signe de $3x^2-2x-1$	+	0	-	0	+

Donc l'inéquation $3x^2 - 2x - 1 > 0$ a pour ensemble solutions :

$$\left] -\infty ; -\frac{1}{3} \right[\cup] 1 ; +\infty [.$$

Attention au sens des crochets !

$\frac{1}{3}$ et 1 sont exclus car l'inégalité est stricte.

$$\text{b. } \Delta = (-14)^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 256 > 0.$$

Le trinôme $3x^2 - 14x - 5$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{14-16}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{14+16}{6} = 5.$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	5	$+\infty$	
Signe de $3x^2-14x-5$	+	0	-	0	+

car $a = 3 > 0$

Donc l'inéquation $3x^2 - 14x - 5 \leq 0$ a pour ensemble de solutions $\left[-\frac{1}{3}; 5\right]$.

Les bornes sont incluses car il s'agit d'être inférieur ou égal à 0.

c. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11 < 0$ et, comme $a = 1 > 0$, pour tout x réel :

$$x^2 + x + 3 > 0.$$

Donc l'inéquation $x^2 + x + 3 \leq 0$ n'a aucune solution.

d. Pour tout x réel, $x^2 \geq 0$ donc $-3x^2 \leq 0$ et $-3x^2 - 2 \leq -2$. Par conséquent, pour tout x réel, $-3x^2 - 2 < 0$.

Donc l'inéquation $-3x^2 - 2 < 0$ a pour ensemble de solutions $\mathbb{R}$.

On pouvait aussi procéder comme au c.

e. $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 20 > 0$.

Le trinôme $-x^2 + 2x + 4$ admet deux racines x_1 et x_2 .

Comme $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$:

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-2} = 1 + \sqrt{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{-2} = 1 - \sqrt{5}.$$

Ne pas oublier de donner le négatif pour obtenir plus finement les racines.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{5}$	$1 + \sqrt{5}$	$+\infty$	
Signe de $-x^2 + 2x + 4$	-	0	+	0	-

car $a = -1 < 0$

Donc l'inéquation $-x^2 + 2x + 4 > 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $]1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}[$.

f. Pour tout x réel, $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Or, un carré est toujours positif ou nul d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$	+	0	+

Donc l'inéquation $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ a une solution unique : 0.

g. $x^2 \geq 6x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 \geq 0$.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32 > 0.$$

Le trinôme $x^2 - 6x + 1$ admet deux racines x_1 et x_2 .

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}, \text{ donc :}$$

$$x_1 = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

x	$-\infty$	$3-2\sqrt{2}$	$3+2\sqrt{2}$	$+\infty$	
Signe de x^2-6x+1	+	0	-	0	+

car $a = 1 > 0$

Les inéquations $x^2 \geq 6x - 1$ et $x^2 - 6x + 1 \geq 0$ étant équivalentes, elles ont le même ensemble de solutions.

Donc l'inéquation $x^2 \geq 6x + 1$ a pour ensemble de solutions :

$$]-\infty; 3 - 2\sqrt{2}] \cup [3 + 2\sqrt{2}; +\infty[.$$

h. $5x^2 - 45x > 0 \Leftrightarrow 5x(x - 9) > 0$

x	$-\infty$	0	9	$+\infty$
$5x$	$-$	0	$+$	$+$
$x-9$	$-$	$-$	0	$+$
Signe de $5x^2-45x=5x(x-9)$	$+$	0	$-$	$+$

Donc l'inéquation $5x^2 - 45x > 0$ a pour ensemble de solutions :

$$]-\infty; 0[\cup]9; +\infty[.$$

i. $-4x + 5 > x^2 + x + 2 \Leftrightarrow -4x + 5 - x^2 - x - 2 > 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 5x + 3 > 0.$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 37 > 0.$$

Le trinôme $-x^2 - 5x + 3$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{37}}{-2} = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{37}}{-2} = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}.$$

x	$-\infty$	$\frac{-5-\sqrt{37}}{2}$	$\frac{-5+\sqrt{37}}{2}$	$+\infty$	
Signe de $-x^2-5x+3$	-	0	+	0	-

car $a = -1 < 0$

Les inéquations $-4x + 5 > x^2 + x + 2$ et $-x^2 - 5x + 3 > 0$ étant équivalentes, elles ont les mêmes solutions.

Donc l'inéquation $-4x + 5 < x^2 + x + 2$ a pour ensemble de solutions :

$$\left] \frac{-5 - \sqrt{37}}{2} ; \frac{-5 + \sqrt{37}}{2} \right[.$$

6 1. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16.$

$\Delta > 0$, donc l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Or $x_1 = -1 \notin \mathbb{R}^+.$

Dans $\mathbb{R}^+$, l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet une unique solution : 3.

2. $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 13 > 0.$

Le trinôme $3x^2 + x - 1$ admet deux racines $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}.$

x	$-\infty$	$\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}$	0	$\frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$	$+\infty$
Signe de $3x^2 + x - 1$	+	0	-	0	+

car $a = 3 > 0$

Ici, 0 est compris entre $\frac{-1 - \sqrt{13}}{6} < 0$ et $\frac{-1 + \sqrt{13}}{6} > 0.$

• Dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $3x^2 + x - 1 < 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle

$$\left[0 ; \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \right[.$$

• Dans $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $3x^2 + x - 1 \geq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle

$$\left[\frac{-1 + \sqrt{13}}{6} ; +\infty \right[.$$

7 1. 1^{re} méthode :

Pour tout réel x :

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 18 = 2 \left[x^2 - \frac{9}{2}x - 9 \right].$$

$$\text{Or, } x^2 - \frac{9}{2}x = x^2 - 2 \times \frac{9}{4} \times x,$$

$$x^2 - 2 \times \frac{9}{4} \times x + \left(\frac{9}{4} \right)^2 = \left(x - \frac{9}{4} \right)^2, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{9}{2}x - 9 &= x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{81}{16} - \frac{81}{16} - 9 \\ &= \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{225}{16}. \end{aligned}$$

$$f(x) = 2 \left[\left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{225}{16} \right]$$

$$f(x) = 2 \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{225}{8}.$$

2^e méthode : $a = 2$; $b = -9$; $c = -18$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+9}{4} ;$$

$$\beta = f\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \times \frac{81}{16} - 9 \times \frac{9}{4} - 18 = \frac{162 - 324 - 288}{16} = -\frac{450}{16} = -\frac{225}{8}.$$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2 \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{225}{8}.$$



On pouvait aussi développer l'expression $2 \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{225}{8}$ et démontrer qu'elle est égale à $f(x)$.

2. a. $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-18) = 225 > 0.$

Le trinôme $2x^2 - 9x - 18$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{9-15}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{9+15}{4} = 6.$$

D'où $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$f(x) = 2 \left(x + \frac{3}{2} \right) (x - 6).$$

b. $f(x) = 2 \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{225}{8}$

$$= 2 \left[\left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{225}{16} \right]$$

$$= 2 \left[\left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \left(\frac{15}{4} \right)^2 \right]$$

$$= 2 \left[x - \frac{9}{4} - \frac{15}{4} \right] \times \left[x - \frac{9}{4} + \frac{15}{4} \right] \quad (3^{\text{e}} \text{ identité remarquable})$$

$$f(x) = 2(x - 6) \left(x + \frac{3}{2} \right).$$

3. a. On utilise la forme canonique :

$$f(x) = -\frac{225}{8} \Leftrightarrow 2 \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

L'antécédent de $-\frac{225}{8}$ par f est $\frac{9}{4}$.

b. On utilise la forme développée : $f(0) = -18$.

c. On utilise la forme canonique : $f\left(\frac{9}{4}\right) = 2\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{225}{8}$
 $= 2 \times 0 - \frac{225}{8} = -\frac{225}{8}.$

d. On utilise la forme développée :

$$f(x) = -18 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{9}{2}.$$

Les antécédents de -18 par f sont 0 et $\frac{9}{2}$.

e. Forme factorisée :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 6)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \text{ ou } x = -\frac{3}{2}.$$

Les antécédents de 0 par f sont 6 et $-\frac{3}{2}$.

8 1. a. $0 \mapsto 3 \times 0 - 5 \mapsto -5 \times 0 + 2 = 2$, donc $P(0) = 2$.

$4 \mapsto 3 \times 4 - 5 = 7 \mapsto 7 \times 4 + 2 = 30$, donc $P(4) = 30$.

$-3 \mapsto 3 \times (-3) - 5 = -14 \mapsto -14 \times (-3) + 2 = 44$, donc $P(-3) = 44$.

b. $x \mapsto 3x - 5 = y \mapsto y \times x + 2 = (3x - 5) \times x + 2$, donc $P(x) = (3x - 5) \times x + 2$.

c. $P(x) = (3x - 5) \times x + 2 = 3x^2 - 5x + 2$.

d. L'expression $(3 \times x - 5) \times x + 2$ comporte deux multiplications, tandis que l'expression développée $3 \times x \times x - 5 \times x + 2$ en comporte trois.

2.

VARIABLES

x EST_DU_TYPE NOMBRE

y EST_DU_TYPE NOMBRE

a EST_DU_TYPE NOMBRE

b EST_DU_TYPE NOMBRE

c EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

LIRE a

LIRE b

LIRE c

LIRE x

y PREND_LA_VALEUR a*x+b

y PREND_LA_VALEUR y*x+c

AFFICHER "l'image de"

AFFICHER x

AFFICHER "par P est"

AFFICHER y

FIN_ALGORITHME

3.

VARIABLES

x EST_DU_TYPE NOMBRE

y EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

LIRE x

y PREND_LA_VALEUR $2 \times x - 4$ y PREND_LA_VALEUR $y \times x + 3$ y PREND_LA_VALEUR $y \times x - 5$

AFFICHER "l'image de"

AFFICHER x

AFFICHER "par P est"

AFFICHER y

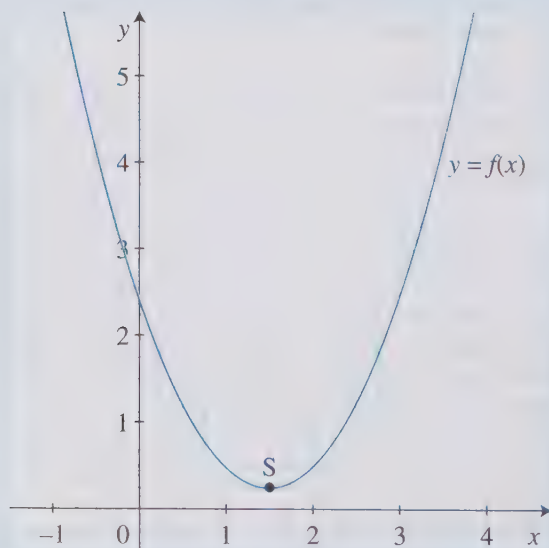
FIN_ALGORITHME

La forme développée $2 \times x \times x \times x - 4 \times x \times x + 3 \times x - 5$ comporte six multiplications, tandis que la forme $((2 \times x - 4) \times x + 3) \times x - 5$ en comporte trois.

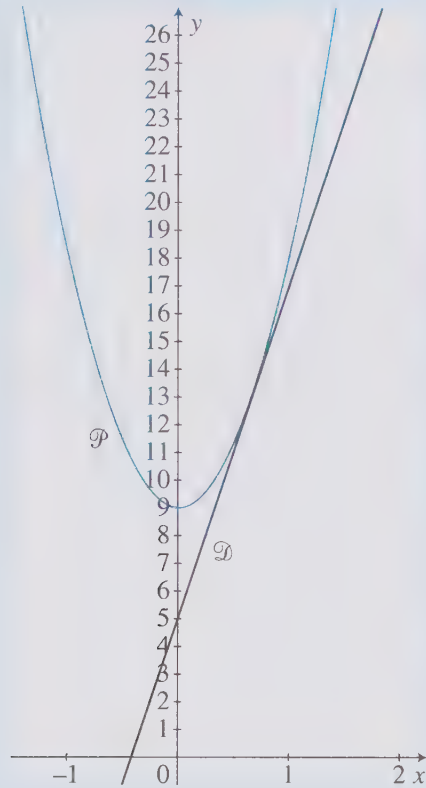
9 1. $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Comme $a = 1 > 0$, on a :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Variations de f			



2. a. Il semble qu'il y ait un point d'intersection (la droite semble être tangente à la courbe, voir le chapitre « Dérivation »).



b. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

M est un point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathcal{P} \\ M \in \mathcal{D} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9x^2 + 9 \\ y = 12x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 5 \\ 9x^2 + 9 = 12x + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 5 \\ 9x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 5 \\ (3x - 2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12x + 5 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 13 \end{cases}$$

Donc les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ admettent un unique point d'intersection, le point $I\left(\frac{2}{3}; 13\right)$.

10 1. $\Delta = 43^2 - 4 \times (-2) \times (-230) = 9$.

$\Delta > 0$, donc l'équation $-2x^2 + 43x - 230 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont :

$$x_1 = \frac{-43-3}{-4} = 11,5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-43+3}{-4} = 10.$$

2. • La surface totale vaut $43 \times x$ et est égale à la somme des aires des buffets ($2 \times x^2$) et de l'aire de la pièce rectangulaire (230 m^2).

Soit x la largeur en mètres de la salle, cela donne :

$$43x = 2x^2 - 230 \Leftrightarrow -2x^2 + 43x - 230 = 0,$$

équation dont les solutions sont 10 et 11,5.

Donc les largeurs possibles de la salle sont 10 m et 11,5 m.

• L'aire de l'espace attribué aux tables doit être supérieure ou égale à 50 % de l'aire totale soit :

$$230 \geq \frac{50}{100} \times 43x \Leftrightarrow 230 \geq \frac{43}{2}x \Leftrightarrow \frac{460}{43} \geq x.$$

Or $\frac{460}{43} \approx 10,7$.

Donc le restaurateur doit choisir une largeur de 10 m.

11



Méthode

- Le signe de a est donné par les variations de la fonction polynôme ($a > 0$ si la parabole est tournée vers le haut, $a < 0$ si la parabole est tournée vers le bas)
- Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$, α étant la valeur qui annule le carré dans la forme canonique.

1. d. $(\alpha + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5$.

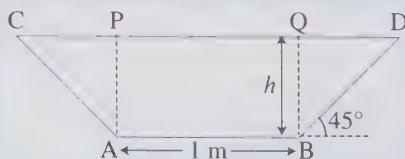
2. d.

3. a. En effet, la courbe $\mathcal{C}_3$ a une équation de la forme $y = a(x - 4)^2 + 3$, avec $a > 0$, car la parabole est tournée vers le haut. La parabole passe par le point $(6; 4)$.

D'où : $4 = a(6 - 4)^2 + 3 \Leftrightarrow 4 = 4a + 3 \Leftrightarrow 1 = 4a \Leftrightarrow \frac{1}{4} = a$.

4. c. $\mathcal{C}_4 : y = -(x - 2)^2 = -(x^2 - 4x + 4)$.

12 1.



Notons P et Q les points d'intersection de (CD) avec les perpendiculaires à (AB) passant respectivement par A et B.

$$\begin{cases} \widehat{QBD} = \widehat{BDQ} = 45^\circ \\ \widehat{BQD} = 90^\circ \end{cases}, \text{ donc le triangle BQD est rectangle isocèle en Q.}$$

Donc $QD = QB = h$. D'où $CP = QD = h$. D'où :

$$\mathcal{A}_{\text{trapeze}} = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2} \text{ donc :}$$

$$\mathcal{A}_{ABDC} = \frac{(AB + CD) \times h}{2} = \frac{(1 + (1 + 2h)) \times h}{2} = \frac{(2 + 2h) \times h}{2} = \frac{2(1 + h)h}{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABDC} = (1 + h)h = h + h^2.$$

$$\mathcal{A}_{ABDC} = h + h^2.$$

2. Le volume est égal à l'aire de la base ABDC, multiplié par la longueur de l'abreuvoir :

$$V(h) = (h + h^2) \times 2 = 2h^2 + 2h.$$

$$3. 1\,000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3.$$

$$V(h) = 1 \Leftrightarrow 2h^2 + 2h - 1 = 0; \Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12.$$

$$\begin{aligned} V(h) = 1 &\Leftrightarrow \left(h = \frac{-2 + \sqrt{12}}{4} \text{ ou } h = \frac{-2 - \sqrt{12}}{4} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(h = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \text{ ou } h = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right) \text{ (car } \sqrt{12} = 2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$h > 0, \text{ donc } h = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 0,37.$$

Donc l'abreuvoir doit avoir une hauteur d'environ 37 cm.

$$4. a. 2\,000 \text{ L} = 2 \text{ m}^3$$

$$V(h) \geq 2 \Leftrightarrow 2h^2 + 2h - 2 \geq 0 \Leftrightarrow h^2 + h - 1 \geq 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$$

$\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$h_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$h_1 < 0 < h_2$ d'où le tableau de signes ($a = 1 > 0$) :

h	$-\infty$	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
Signe de $h^2 + h - 1$	+	0	-	0	+

Comme $h > 0$, alors il faut une hauteur supérieure ou égale à $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b. La hauteur de l'abreuvoir doit être supérieure ou égale à $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ mètre, soit **0,62 mètre** (valeur approchée à 10^{-2} par excès).

13 1. $\Delta = (-\sqrt{7})^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$.

Or, $(\sqrt{3}-2)^2 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = 7 - 4\sqrt{3}$; donc :

$$\Delta = (\sqrt{3}-2)^2.$$

2. • Signe de $\sqrt{3}-2$?

$$\sqrt{3}^2 = 3 \text{ et } 2^2 = 4.$$

$\sqrt{3}$ et 2 étant positifs, ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Donc $\sqrt{3} < 2$ et $\sqrt{3}-2 < 0$.

• $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$ (voir chap 1).

• Les solutions de l'équation sont donc :

$$x_1 = \frac{\sqrt{7} - (2 - \sqrt{3})}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\sqrt{7} + (2 - \sqrt{3})}{2}.$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} - 2}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3} + 2}{2}.$$

14 1. $\begin{cases} A \in \mathcal{C}_f \\ B \in \mathcal{C}_f \\ C \in \mathcal{C}_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = f(0) \\ 0 = f(1) \\ 6 = f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = c \\ 0 = a + b + c \\ 6 = 9a + 3b + c. \end{cases}$

2. Notons (S) ce système

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b = -3 \\ 9a + 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -3 - a \\ 3a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -3 - a \\ 3a - 3 - a = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -3 - a \\ 2a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -3 - 2 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -5 \\ a = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

15 1. a. Posons $X = x^2$. Alors :

$$X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X-1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1.$$

Donc :

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ (on remplace } X \text{ par } x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Donc l'équation $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ a pour solutions 1 et -1.

b. Posons $X = x^2$.

$$x^4 + 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 1 = 0 \quad (\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0)$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \text{ ou } X = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \text{ ou } x^2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \quad (\text{car } x^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}}.$$

Donc l'équation $x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ a pour solutions :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{13} - 3}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{13} - 3}{2}}.$$

c. Posons $X = x^2$

$$x^4 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X + 1 = 0, \text{ impossible car } \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$

Donc l'équation $x^4 + x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.



Pour tout x réel, $x^4 \geq 0$ et $x^2 \geq 0$ donc $x^4 + x^2 + 1 \geq 1 > 0$, ce qui peut également conclure

2. Posons $X = x^2$

$$\bullet 2x^4 + 4x^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow 2X^2 + 4X - 8 > 0.$$

• Signe de $2X^2 + 4X - 8$:

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-8) = 80, \text{ donc le trinôme admet deux racines } X_1 \text{ et } X_2.$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5} \text{ donc :}$$

$$X_1 = \frac{-4 - 4\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$	
Signe de x^2+4x-8	+	0	-	0	+

$$a = 2 > 0$$

$$\begin{aligned} \bullet 2X^2 + 4X - 8 > 0 &\Leftrightarrow \left(X < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } X > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x^2 > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

$x^2 \geq 0$ donc :

$$2X^2 + 4X - 8 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right) \left(x + \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right) > 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$	$\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$	$+\infty$	
Signe de $x^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	+	0	-	0	+

$$2X^2 + 4X - 8 > 0 \Leftrightarrow \left(x < -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \text{ ou } x > \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right).$$

Donc l'inéquation $2x^4 + 4x^2 - 8 > 0$ a pour ensemble de solutions :

$$\left] -\infty ; -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right[\cup \left] \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} ; +\infty \right[.$$

16 a. $x \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x} \leq 0.$

Attention, il ne faut pas faire le produit en croix, qui donnerait $x^2 \leq 1$, car cela reviendrait à multiplier par x , qui peut être positif ou négatif, donc le sens de l'inégalité pourrait changer.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$x-1$	-	-	-	0	+	
$x+1$	-	0	+	+	+	
x	-	-	0	+	+	
Signe de $\frac{(x-1)(x+1)}{x}$	-	0	+	-	0	+

0 est valeur interdite, d'où la double-barre dans le tableau.

Donc l'inéquation $x \leq \frac{1}{x}$ a pour ensemble de solution $] -\infty ; -1] \cup] 0 ; 1]$.

$$\begin{aligned}
 \text{h. } \bullet \frac{2x+1}{x-2} &\geq \frac{x+2}{3-x} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} - \frac{x+2}{3-x} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(3-x) - (x+2)(x-2)}{(x-2)(3-x)} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 5x + 3 - (x^2 - 4)}{(x-2)(3-x)} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 5x + 7}{(x-2)(3-x)} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Il vaut mieux ne jamais développer le dénominateur pour plus d'efficacité.

• Signe de $-3x^2 + 5x + 7$:

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times 7 = 109 > 0 ;$$

le trinôme $-3x^2 + 5x + 7$ admet deux racines :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-5 - \sqrt{109}}{-6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{109}}{-6} ; \\
 x_1 &= \frac{5 + \sqrt{109}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{109}}{6}.
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{5-\sqrt{109}}{6}$	$\frac{5+\sqrt{109}}{6}$	$+\infty$	
Signe de $-3x^2+5x+7$	-	0	+	0	-

$$a = -3 < 0$$

• Signe du quotient :

x	$-\infty$	$\frac{5 - \sqrt{109}}{6}$	2	$\frac{5 + \sqrt{109}}{6}$	3	$+\infty$
$-3x^2 + 5x + 7$	-	0	+	0	-	-
$x - 2$	-	-	0	+	+	+
$3 - x$	+	+	+	+	0	-
Signe de $\frac{-3x^2 + 5x + 7}{(x-2)(3-x)}$	+	0	-	+	0	+

$$\begin{aligned}
 \bullet \frac{2x+1}{x-2} &\geq \frac{x+2}{3-x} \Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 5x + 7}{(x-2)(3-x)} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x \in \left] -\infty ; \frac{5 - \sqrt{109}}{6} \right] \cup \left] 2 ; \frac{5 + \sqrt{109}}{6} \right] \cup] 3 ; +\infty [
 \end{aligned}$$

Donc l'inéquation $\frac{2x+1}{x-2} \geq \frac{x+2}{3-x}$ a pour ensemble de solutions :

$$\left] -\infty; \frac{5-\sqrt{109}}{6} \right] \cup \left] 2; \frac{5+\sqrt{109}}{6} \right] \cup]3; +\infty[.$$

17 1. Remplaçons x par -1 :

$$f(-1) = 2 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - (-1) + 6 = -2 - 5 + 1 + 6 = 0.$$

Donc -1 est racine de f .

2. Développons :

$$(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c.$$

Les polynômes $f(x)$ et $(x+1)(ax^2+bx+c)$ sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients de même degré sont égaux soit si et seulement si :

$$\begin{cases} 2 = a \\ -5 = a + b \\ -1 = b + c \\ 6 = c \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 6 \\ 6 = c. \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(2x^2 - 7x + 6)$.

$$3. \Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 1.$$

Les racines du trinôme $2x^2 - 7x + 6$ sont :

$$x_1 = \frac{7-1}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+1}{4} = 2.$$

$$4. 2x^2 - 7x + 6 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2).$$

Donc, pour tout x réel, $f(x) = 2(x+1)(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{18} \quad 1. \begin{cases} x+y=-7 \\ xy=10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=-7-x \\ x(-7-x)=10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=-7-x \\ -x^2-7x-10=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=-7-x \\ x^2+7x+10=0. \end{cases} \end{aligned}$$

$\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$, donc le trinôme $x^2 + 7x + 10$ admet deux racines :

$$\frac{-7+3}{2} = -2 \quad \text{et} \quad \frac{-7-3}{2} = -5$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-7-x \\ x=-2 \text{ ou } x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-5 \\ y=-2 \end{cases} \right).$$

Donc les solutions du système $\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=10 \end{cases}$ sont les couples $(-2; -5)$ et $(-5; -2)$.

x et y jouant un rôle symétrique dans le système de départ, il est logique de trouver deux solutions symétriques.

$$\begin{aligned}
 2. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 29 + 2xy \\ xy = 10 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 29 + 20 = 49 \\ xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 7 \text{ ou } x+y = -7 \\ xy = 10 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x+y = 7 \\ xy = 10 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y = -7 \\ xy = 10 \end{cases} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y = 7-x \\ 7x - x^2 = 10 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -7-x \\ -7x - x^2 = 10 \end{cases} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y = 7-x \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -7-x \\ x^2 + 7x + 10 = 0 \end{cases} \right).
 \end{aligned}$$

Dans les deux cas, $\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y = 7-x \\ x = \frac{7-3}{2} = 2 \text{ ou } x = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -7-x \\ x = -5 \text{ ou } x = -2 \end{cases} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases} \right).
 \end{aligned}$$

Donc le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}$ admet 4 couples solutions : $(2; 5)$, $(5; 2)$, $(-5; -2)$ et $(-2; -5)$.

19 Exemple d'algorithme calculant les racines d'un polynôme du second degré.

VARIABLES

a, b, c, Δ quatre réels

INITIALISATION

Entrer a, b, c

TRAITEMENT

Δ prend la valeur $b^2 - 4 \times a \times c$

DEBUT SI

Si $\Delta < 0$ alors afficher « pas de racine »

Sinon afficher « les racines sont », $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

FIN SI

20 $f(x) = 2x^2 + bx + 3$

$\Delta = b^2 - 4 \times 2 \times 3 = b^2 - 24$.

a. f admet une unique racine si, et seulement si, $\Delta = 0$.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow b^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow (b - 2\sqrt{6})(b + 2\sqrt{6}) = 0 \Leftrightarrow b = 2\sqrt{6} \text{ ou } b = -2\sqrt{6}.$$

b. f admet deux racines distinctes si et seulement si $\Delta > 0$.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 - 24 > 0 \Leftrightarrow b^2 > 24 \Leftrightarrow b < -2\sqrt{6} \text{ ou } b > 2\sqrt{6}.$$

c. f n'admet pas de racine réelle si et seulement si $\Delta < 0$.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow b^2 - 24 < 0 \Leftrightarrow b^2 < 24 \Leftrightarrow -2\sqrt{6} < b < 2\sqrt{6}.$$

21 1. • Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = -3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 7x + 2,$$

et Q celle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)(x^2 + x + 1).$$

• $Q(x) = ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (b+c)x + c$ d'où :

$$P = Q \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a + b = 2 \\ a + b + c = 4 \\ b + c = 7 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 - a = 5 \\ c = 4 - a - b = 2 \\ c = 7 - b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Donc pour tout réel x , $P(x) = (x^2 + x + 1)(-3x^2 + 5x + 2)$.

Il faut résoudre les cinq équations du système pour vérifier qu'on obtient bien une seule solution pour a , b et c . Si on obtient des résultats contradictoires, c'est que le système n'a pas de solution.

$$2. (E) \Leftrightarrow P(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(-3x^2 + 5x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \text{ ou } -3x^2 + 5x + 2 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ est $\Delta = 1 - 4 < 0$, donc le trinôme n'admet pas de racine.

Le discriminant du trinôme $-3x^2 + 5x + 2 = 0$ est $\Delta = 25 + 24 = 49 > 0$, donc le

trinôme admet deux racines distinctes $\frac{-5-7}{-6} = 2$ et $\frac{-5+7}{-6} = -\frac{1}{3}$.

$$\text{D'où } (E) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \text{ ou } -3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 5x + 2 = 0 \text{ (car } x^2 + x + 1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}.$$

22 1. $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Cette formule est encore vraie dans le cas où $\Delta = 0$.

$P(x) = a(x - x_1)^2 = a(x - x_1)(x - x_1)$, qui correspond au cas où $x_1 = x_2$. On dit que x_1 est une racine double.

2. a. $P(x) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$ (2).

D'autre part, $P(x) = ax^2 + bx + c$ (1).

L'égalité (1) = (2) étant vraie pour tout réel x , les coefficients de même degré de ces trinômes sont égaux.

D'où
$$\begin{cases} a = a \\ -a(x_1 + x_2) = b, \text{ d'où, en divisant par } a \neq 0, x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1x_2 = \frac{c}{a}. \\ ax_1x_2 = c \end{cases}$$

b. • $1^2 - 5 \times 1 + 4 = 0$ donc $x_1 = 1$ est solution de l'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, soit $1 + x_2 = \frac{5}{1}$,

donc $x_2 = 4$ est l'autre solution de l'équation.

• $(-2)^2 + (2 - \sqrt{2})(-2) - 2\sqrt{2} = 4 - 4 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$.

$x_1 = -2$ est une solution de (E),

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$, soit $-2x_2 = \frac{-2\sqrt{2}}{1}$, donc $x_2 = \sqrt{2}$ est l'autre solution de (E).

3. a. • On a montré au 2. a. que, si x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$,

alors puisque $a = 1$, $b = -S$ et $c = P$, x_1 et x_2 vérifient le système
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-S}{1} \\ x_1x_2 = \frac{P}{1} \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1x_2 = P. \end{cases}$$

• Si $(x_1; x_2)$ est solution du système
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1x_2 = P \end{cases}$$
 alors :

$$\begin{cases} x_1 = S - x_2 \\ Sx_2 - x_2^2 = P \end{cases} \text{ d'où } x_2^2 - Sx_2 + P = 0 ;$$

$$\begin{cases} x_2 = S - x_1 \\ Sx_1 - x_1^2 = P \end{cases} \text{ d'où } x_1^2 - Sx_1 + P = 0.$$

x_1 et x_2 sont donc bien solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Donc, $(x_1; x_2)$ est solution de
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1x_2 = P \end{cases}$$
 si et seulement si x_1 et x_2 sont solu-

tions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

b. • $(\mathcal{P}_1) : S = -2$ et $P = 1$.

$(x_1; x_2)$ est solution de $(\mathcal{P}_1)$ si, et seulement si, x_1 et x_2 sont solutions de l'équation

$x^2 + 2x + 1 = 0$.

Or $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, et, pour tout x réel :

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Donc le système $(\mathcal{S}_1)$ admet une unique solution : le couple $(-1; -1)$.

- $(x_1; x_2)$ est solution de $(\mathcal{S}_2)$ si, et seulement si, x_1 et x_2 sont solutions de l'équation

$$x^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}x + 1 = 0.$$

$$\Delta = \frac{16}{3} - 4 = \frac{16}{3} - \frac{12}{3} = \frac{4}{3}.$$

Le trinôme $x^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}x + 1$ admet deux racines :

$$\frac{\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Donc le système $(\mathcal{S}_2)$ admet deux couples solutions :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

- $(x_1; x_2)$ est solution de $(\mathcal{S}_3)$ si, et seulement si, x_1 et x_2 sont solutions de

$$x^2 + x + 2 = 0.$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0.$$

L'équation $x^2 + x + 2 = 0$ n'admet aucune solution réelle.

Donc le système $(\mathcal{S}_3)$ n'admet aucune solution (dans $\mathbb{R}^2$).

23 1. $0^4 + 2 \times 0^3 - 0^2 + 2 \times 0 + 1 = 1 \neq 0,$

donc 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2. 0 n'étant pas solution :

$$x \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad (\text{division par } x^2 (\neq 0)).$$

Posons $X = x + \frac{1}{x}$. Alors :

$$X^2 = x^2 + 2x \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$x \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + \frac{1}{x^2}}_{X^2 - 2} + 2 - 3 + \left(2x + \frac{2}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 3 + 2X = 0.$$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$, donc l'équation $X^2 + 2X - 3 = 0$ admet deux solutions, qui sont :

$$\frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{-2-4}{2} = -3.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 x \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow X^2 + 2X - 3 = 0 \left(\text{avec } X = x + \frac{1}{x} \right) \\
 &\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -3 \left(\text{avec } X = x + \frac{1}{x} \right) \\
 &\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \text{ ou } x + \frac{1}{x} = -3 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 1 = x \text{ ou } x^2 + 1 = -3x \text{ (car } x \neq 0). \\
 &\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 + 3x + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Pour la première équation, $\Delta = (-1)^2 - 4 < 0$, l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.

Pour la seconde équation, $\Delta = 9 - 4 = 5$, l'équation $x^2 + 3x + 1 = 0$ admet deux solutions $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

Finalement, x est solution de $(E) \Leftrightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

24 1. À l'instant $t = 0$, le poids a pour coordonnées $(0 ; 2,3)$ donc :

$x(0) = 0$: distance parcourue ;

$y(0) = 2,3$: hauteur du poids h .

2. $x(t)$ étant la distance parcourue et $y(t)$ la hauteur du poids, $x(t) \geq 0$ et $y(t) \geq 0$.
 $v_0 = 14$ et $\alpha = 30^\circ$ et $h = 2,3$. Donc :

$$\begin{cases} x(t) = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2} \times 9,8 \times t^2 + 14 \times \frac{1}{2} \times t + 2,3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = 7\sqrt{3}t \\ y(t) = -4,9t^2 + 7t + 2,3. \end{cases}$$

3. Notons $x = x(t)$ et $y = y(t)$.

Alors $t = \frac{x}{7\sqrt{3}}$, d'où :

$$\begin{aligned}
 y &= -4,9 \times \frac{x^2}{49 \times 3} + 7 \times \frac{x}{7\sqrt{3}} + 2,3 \\
 y &= -\frac{x^2}{30} + \frac{x}{\sqrt{3}} + 2,3.
 \end{aligned}$$

4. Soit $f : x \mapsto -\frac{x^2}{30} + \frac{x}{\sqrt{3}} + 2,3$.

$\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le bas $\left(a = -\frac{1}{30}\right)$ de sommet $S(\alpha ; \beta)$, où :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{15}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3},$$

$$\beta = f(5\sqrt{3}) = -\frac{75}{30} + \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 2,3 = -2,5 + 5 + 2,3 = 4,8.$$

x	0	$5\sqrt{3}$	d
Variations de f	2,3	4,8	0

5. Régler la fenêtre graphique à l'aide du tableau de variation, en prenant un peu de marge tout autour. $5\sqrt{3} \approx 8,66$, donc on peut choisir $0 \leq X \leq 30$ et $-1 \leq Y \leq 6$. On obtient une courbe similaire à celle de l'énoncé, mais avec $S(8,66; 4,8)$.

6. Le poids touche le sol lorsque $y = 0$.

$$y = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{30} + \frac{x}{\sqrt{3}} + 2,3 = 0.$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4 \times \frac{-1}{30} \times 2,3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \times \frac{23}{10} = \frac{1}{3} + \frac{23}{75} = \frac{48}{75}.$$

$$\Delta > 0 \text{ et } \sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{3 \times 16}}{\sqrt{3 \times 25}} = \frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{4}{5},$$

donc l'équation $-\frac{x^2}{30} + \frac{x}{\sqrt{3}} + 2,3 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{5}}{-\frac{1}{15}} = \frac{5 + 4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \times 15 = \frac{5 + 4\sqrt{3}}{5 \times 3} \times \sqrt{3} \times 15 = 5\sqrt{3} + 12,$$

$$x_2 = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{5}}{-\frac{1}{15}} = \frac{5 - 4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \times 15 = (5 - 4\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 12.$$

Mais, comme $x \geq 0$, la solution $x_2 = 5\sqrt{3} - 12$ ne convient pas. D'où :

$$y = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{30} + \frac{x}{\sqrt{3}} + 2,3 = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{3} + 12.$$

Donc le poids touche le sol après avoir parcouru une distance égale à $12 + 5\sqrt{3}$, soit environ 20,66 mètres.

[25] 1. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$

2. $P(x) = x^2 + 6x + 6$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{(x+3)^2} - \underbrace{9+6}_{3} \\ &= (x+3)^2 - 3. \end{aligned}$$

$$3. P(x) = (x+3)^2 - \sqrt{3}^2 = (x+3+\sqrt{3})(x+3-\sqrt{3}).$$

4. a. En utilisant la forme canonique :

$$P(x) = -3 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 3 = -3 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Donc -3 admet un unique antécédent par P, c'est -3.

b. En utilisant la forme factorisée :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3+\sqrt{3})(x+3-\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+3+\sqrt{3} = 0 \text{ ou } x+3-\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3-\sqrt{3} \text{ ou } x = -3+\sqrt{3}.$$

Les antécédents de 0 par P sont $-3-\sqrt{3}$ et $-3+\sqrt{3}$.

c. En utilisant la forme développée

$$P(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 6 = 6 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -6.$$

Les antécédents de 6 par P sont 0 et -6.

26 Partie A

$$1. \alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2 \times 1} = \frac{3}{2} \text{ et } \beta = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1 = -\frac{5}{4},$$

donc $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1$.

$$\text{Pour tout } x \text{ réel, } f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

2. $a = 1 > 0$ donc le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Variations de f			

3. a. • D'après le tableau de variation de f , l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, x_1 et x_2 .

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0.$$

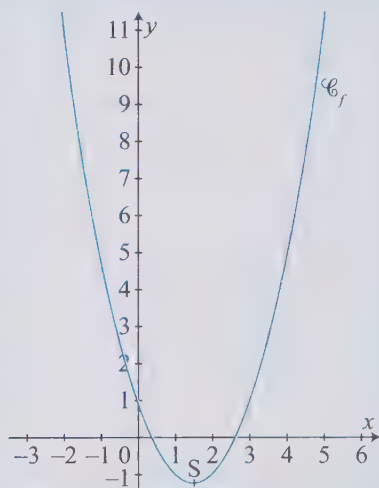
$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 \text{ donc :}$$

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

b. D'après le tableau de variation de f , l'équation $f(x) = -1,25$ admet exactement une solution : $\alpha = \frac{3}{2}$.

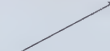
c. -6 est strictement inférieur au minimum $-\frac{5}{4}$ de la fonction f sur $\mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = -6$ n'admet aucune solution.

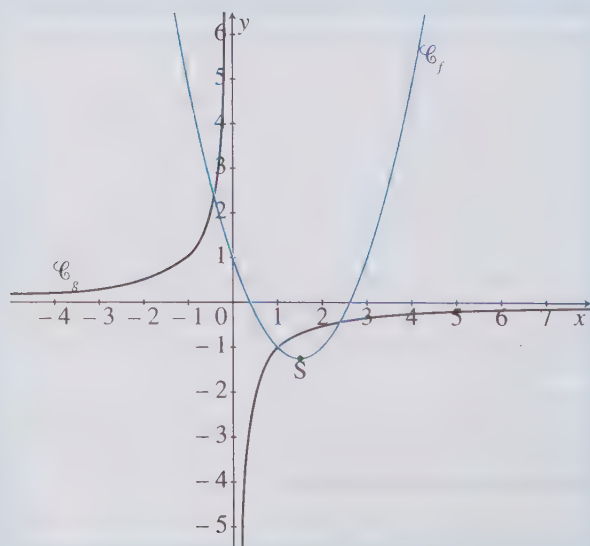
4.

**Partie B**

1. $g = (-1) \times u$, où u désigne la fonction inverse. Le sens de variations de g est donc contraire au sens de variation de u .

▀ Voir le chapitre 1.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de la fonction g			



2. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur trois intervalles disjoints, le premier étant de la forme $]-\infty; a]$ avec $a \approx -0,4$, le second étant de la forme $]0; b]$ avec $b \approx 1$ et le troisième de la forme $[c; +\infty[$ avec $c \approx 2,4$.

$$3. f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \geq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + \frac{1}{x} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x} \geq 0.$$

4. $h(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 1 + 1 = 0$ donc **1 est une racine de h .**

5. Pour tout x réel $h(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ et :

$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

Ces deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients de même degré le sont d'où :

$$\begin{cases} 1 = a \\ -3 = b - a \\ 1 = c - b \\ 1 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 + a = -2 \\ c = 1 + b = -1 \\ 1 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1. \end{cases}$$

En conclusion, pour tout x réel, $h(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 1)$.

$$6. f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{h(x)}{x} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 1)}{x} \geq 0.$$

Étudions le trinôme $x^2 - 2x - 1$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0.$$

Donc le trinôme admet deux racines qui sont (puisque $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$) :

$$\frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

De plus, comme $a = 1 > 0$, $x^2 - 2x - 1$ est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	0	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	0	+	+
$x^2 - 2x - 1$	+	0	-	-	0	+
x	-	-	0	+	+	+
$\frac{(x-1)(x^2-2x-1)}{x}$	+	0	-	+	0	+

Les inéquations $f(x) \geq g(x)$ et $\frac{(x^2-1)(x^2-x-1)}{x} \geq 0$ étant équivalentes, elles ont le même ensemble de solutions, qui est donc :

$$]-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup]0; 1] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty[.$$

7. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup]0; 1] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty[.$

$\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]1-\sqrt{2}; 0[\cup]1; 1+\sqrt{2}[.$

De plus, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses $1-\sqrt{2}$, 1 et $1+\sqrt{2}$.

27 Partie A

1. $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$ et $\beta = f(2) = \frac{4}{2} + 4 = 2.$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f		2	

car $a = -\frac{1}{2} < 0.$

2. $f(x) = 1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x = 1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 = 0.$

$\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) = 2.$

Donc l'équation $-\frac{x^2}{2} + 2x - 1 = 0$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{-1} = 2 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{-1} = 2 - \sqrt{2}.$$

Donc l'équation $f(x) = 1$ admet deux racines $2 + \sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{2}.$

3. a. Soit $x \in \mathbb{R}.$

$$f(x) - g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \left(\frac{x^2}{4} - x + 2\right) = -\frac{3x^2}{4} + 3x - 2.$$

On étudie le signe du trinôme $-\frac{3}{4}x^2 + 3x - 2.$

$\Delta = 3^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times (-2) = 3.$

Le trinôme admet deux racines :

$$\frac{-3 - \sqrt{3}}{-\frac{3}{2}} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{-3 + \sqrt{3}}{-\frac{3}{2}} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

x	$-\infty$	$2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
Signe de $f(x)-g(x)$ $=-\frac{3}{4}x^2+3x-2$	-	0	+	0	-

$$\text{car } a = -\frac{3}{4} < 0.$$

b. • $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x) > g(x)$, c'est-à-dire lorsque

$$f(x) - g(x) > 0, \text{ soit sur l'intervalle } \left] 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}; 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right[.$$

• $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f(x) < g(x)$, c'est-à-dire sur les intervalles

$$\left] -\infty; 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right[\cup \left] 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[.$$

• $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent lorsque $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire lorsque $f(x) - g(x) = 0$,

soit aux points d'abscisses $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Partie B

1. $\mathcal{B}(x)$ s'obtient en ajoutant l'aire du disque de diamètre $[AM]$, égale à $\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2$,

et l'aire du disque de diamètre $[MB]$, égale à $\pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2$.

(En effet, $AM + MB = AB$, soit $x + MB = 4$ et $MB = 4 - x$.)

$$\mathcal{B}(x) = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{4-x}{2}\right)^2 = \pi \frac{x^2}{4} + \pi \frac{16-8x+x^2}{4} = \pi \times \frac{2x^2-8x+16}{4}$$

$$\mathcal{B}(x) = \pi \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4\right).$$

2. $\mathcal{A}(x)$ s'obtient en retranchant l'aire de la surface coloriée en gris, à l'aire du disque de diamètre $[AB]$.

Or, l'aire du disque de diamètre $[AB]$ vaut $\pi \times \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4\pi$.

$$\mathcal{A}(x) = 4\pi - \pi \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4\right) = \pi \left(4 - \frac{x^2}{2} + 2x - 4\right)$$

$$\mathcal{A}(x) = \pi \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right).$$

3. On remarque que, pour tout $x \in [0; 4]$, $\mathcal{A}(x) = \pi \times f(x)$.

a. π étant strictement positif, f et $\mathcal{A} = \pi f$ ont le même sens de variation.

x	0	2	4
Variations de $\mathcal{A} = \pi f$	0	2π	0

$$\mathcal{A}(2) = \pi \times f(2) = \pi \times 2 ;$$

$$\mathcal{A}(0) = \pi \left(-\frac{0^2}{2} + 2 \times 0 \right) = 0 ;$$

$$\mathcal{A}(4) = \pi \left(-\frac{4^2}{2} + 2 \times 4 \right) = 0.$$

Donc l'aire $\mathcal{A}(x)$ est maximale lorsque $x = 2$, c'est-à-dire lorsque M est au milieu du segment [AB].

$$\text{b. } \mathcal{A}(x) = \frac{1}{4} \times 4\pi \Leftrightarrow \pi \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) = \pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \text{ ou } x = 2 + \sqrt{2} \text{ (d'après partie A, 2.)}$$

Ces deux valeurs appartiennent à l'intervalle $[0; 4]$

Donc l'aire $\mathcal{A}(x)$ est égale au quart de l'aire du disque de diamètre [AB] lorsque M est situé à une distance de A égale à $2 - \sqrt{2}$ ou à $2 + \sqrt{2}$, c'est-à-dire lorsque M est situé à une distance de A ou de B égale à $2 - \sqrt{2}$.

$$\text{c. } \mathcal{A}(x) \leq \frac{1}{2} \mathcal{B}(x) \Leftrightarrow \pi \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \leq \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x \leq \frac{x^2}{4} - x + 2$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x \geq 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (d'après la partie A).}$$

Or $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 0,85$ et $2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 3,15$. Ces deux réels appartiennent à $[0; 4]$.

Donc $\mathcal{A}(x)$ est inférieure ou égale à la moitié de $\mathcal{B}(x)$ lorsque $0 \leq AM \leq 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

et lorsque $2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq AM \leq 4$, c'est-à-dire lorsque M est à une distance de A ou

de B inférieure à $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3

Dérivation

I LIMITES EN ZÉRO

■ La notion de limite étant délicate, on se contente ici d'une démarche intuitive décrite à partir d'exemples.

EXEMPLE : On dresse les tableaux de valeurs suivants :

	0,1	0,01	0,001	0,0001
	3,2	3,02	3,002	3,0002

	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
	2,8	2,98	2,998	2,9998

On dit alors que lorsque le réel h tend vers 0, le réel $2h + 3$ tend vers la valeur 3, ou encore que la limite de $2h + 3$, quand h tend vers 0, vaut 3.

On note $\lim_{h \rightarrow 0} (2h + 3) = 3$.

AUTRE EXEMPLE :

	0,01	0,0001	0,000001
	10	100	1 000

On dit que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ n'admet pas de limite finie quand h tend vers 0.

■ **Propriété (admise).** Soit n un entier naturel, $n \geq 1$, alors :

• $\lim_{h \rightarrow 0} h^n = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[n]{h} = 0$ et, pour tout polynôme P , $\lim_{h \rightarrow 0} P(h) = P(0)$.

• Mais $\frac{1}{h^n}$ et $\frac{1}{\sqrt[n]{h}}$ n'admettent pas de limite finie quand h tend vers 0.

• Si k est un réel, et si f est une fonction admettant une limite L quand h tend vers 0 alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(h) + k) = L + k ;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (kf(h)) = kL ;$$

si $L \neq 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{f(h)} \right) = \frac{1}{L}$.

On ne connaît pas la limite a priori d'un quotient dont le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0, quand h tend vers 0. On dit que l'on a affaire à une forme indéterminée.

Pour conclure quant à la limite du quotient, il faut effectuer une simplification qui lève l'indétermination (voir le savoir-faire 2).

II NOMBRE DÉRIVÉ

1. Nombre dérivé de f en a

Définition : Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et non réduit à a .

On dit que f est **dérivable en a** si la limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 existe et est finie.

Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite et on l'appelle **nombre dérivé de f en a** .

2. Interprétation graphique

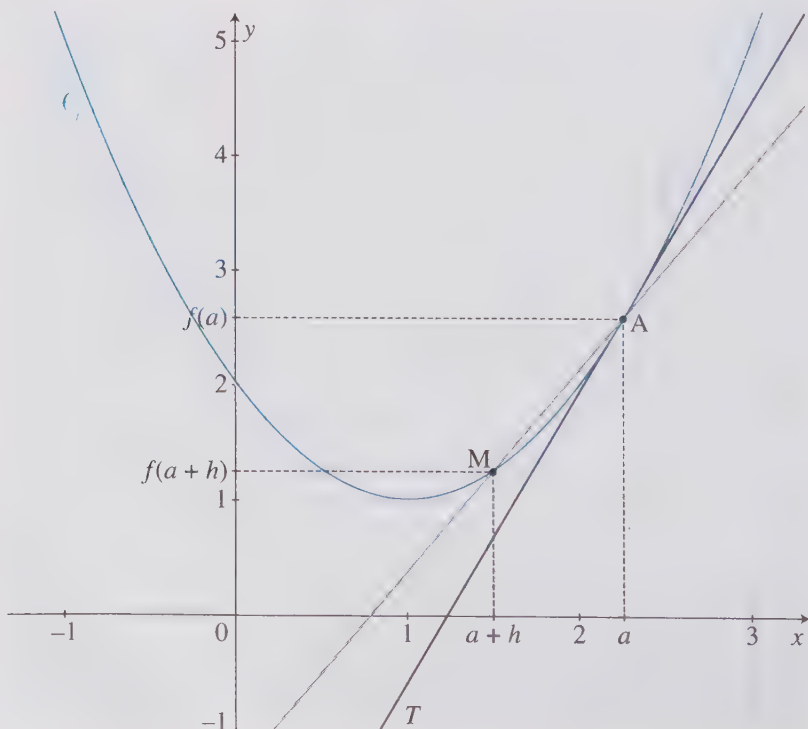
Considérons, dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .

Soit $A(a; f(a))$ un point de $\mathcal{C}_f$.

Soit M un point de $\mathcal{C}_f$, autre que A .

Alors M a pour coordonnées $(a+h; f(a+h))$, avec $h \neq 0$.

Le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ représente le coefficient directeur de la droite (AM).



Dire que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0 signifie que le coefficient directeur de (AM) tend vers $f'(a)$.

Autrement dit, quand M tend vers A sur $\mathcal{C}_f$, la droite (AM) tend vers une position limite : celle de la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

III TANGENTE

1. Définition de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en un point

Définition : Si f est dérivable en a , la droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée **tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A**.

2. Équation

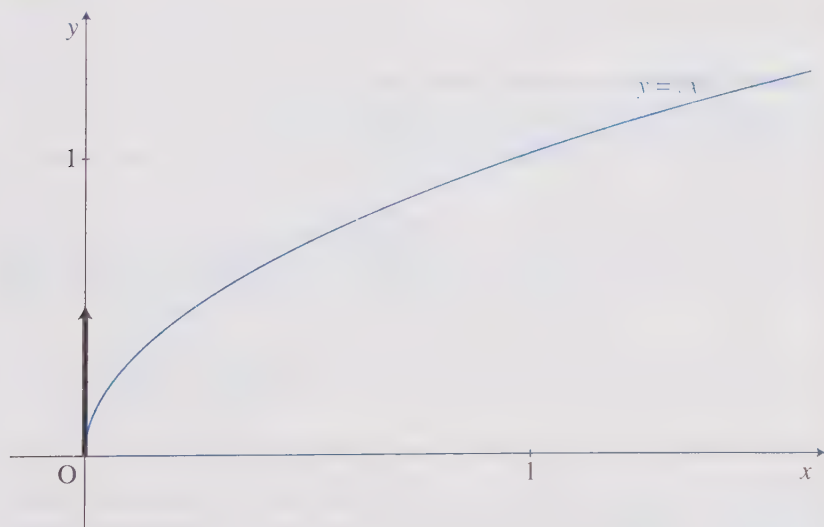
Propriété : Soit f une fonction dérivable en a , alors l'équation réduite de la tangente au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a admet pour équation réduite :

$$y = f(a) + f'(a) \times (x - a).$$

IV QUELQUES CAS OÙ f N'EST PAS DÉRIVABLE EN a

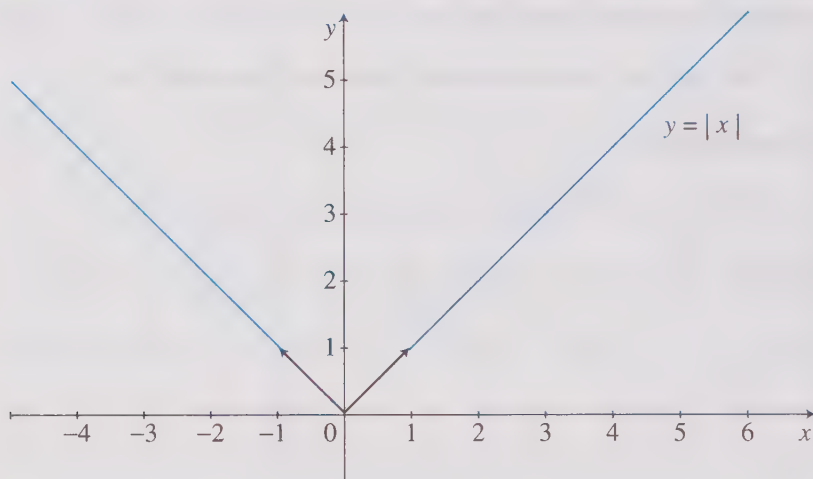
1. $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale

EXEMPLE : $f(x) = \sqrt{x}$ en 0.



2. f admet deux demi-tangentes distinctes

EXEMPLE : $f(x) = |x|$ en 0.



V FONCTION DÉRIVÉE

1. Fonction dérivable sur un intervalle

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout x de I .

On appelle alors fonction dérivée de f la fonction qui à tout nombre $x \in I$ associe le nombre $f'(x)$, et on la note f' .

2. Dérivée des fonctions usuelles

$k (k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[\text{ ou }] 0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0; +\infty[$

On retiendra que la dérivée de x vaut 1, que la dérivée de x^2 vaut $2x$, que la dérivée de x^3 vaut $3x^2$.

3. Dérivée et opérations

■ **Définition** : Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et u et v deux fonctions définies sur D telles que v ne s'annule pas sur D .

• On note $\left(\frac{1}{v}\right)$ la fonction définie sur D par $\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)}$.

• On note $\left(\frac{u}{v}\right)$ la fonction définie sur D par $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

■ **Propriété** : Soient u et v deux fonctions dérivables sur I , et k un réel, alors :

• (ku) est dérivable sur I et $(ku)' = k \times u'$;

• $(u+v)$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$;

• $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$;

• si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$;

• si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

4. Dérivée et sens de variation

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

• Si f' est strictement positive sur I , sauf en des valeurs isolées de x où $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante sur I .

• Si f' est strictement négative sur I , sauf en des valeurs isolées de x où $f'(x) = 0$, alors f est strictement décroissante sur I .

• Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I .

SAVOIR-FAIRE

1. Déterminer une limite quand h tend vers 0

On utilise la propriété du I :

EXEMPLE : Les expressions $(h^2 - 3h + 2)$ et $\frac{3}{2h+3}$ admettent-elles une

limite finie quand h tend vers 0 ? Si oui, laquelle ?

• $h^2 - 3h + 2$ est un polynôme en h et, d'après la propriété du I, sa limite quand h tend vers 0 est sa valeur en 0 : $\lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - 3h + 2) = 2$.

- $\lim_{h \rightarrow 0} (2h + 3) = 3$ limite d'un polynôme du 1^{er} degré) et comme $3 \neq 0$

alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h + 3} = \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{2h + 3} = 1.$$

2. Étudier la dérivabilité en a d'une fonction f

- **1^{re} étape** : Exprimer en fonction de h uniquement le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ en le simplifiant au maximum.

- **2^e étape** : Déterminer alors si $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie ; si oui, la calculer.

- Conclure.

EXEMPLE : La fonction $f : x \mapsto 2x^2$ est-elle dérivable en 3 ?

- **1^{re} étape** :

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{2 \times (3+h)^2 - 2 \times 3^2}{h} \\ &= \frac{2(9 + 6h + h^2) - 18}{h} \\ &= \frac{12h + 2h^2}{h} = \frac{h \times (12 + 2h)}{h} \\ &= 12 + 2h. \end{aligned}$$

- **2^e étape** : Il s'agit d'un polynôme du 1^{er} degré donc $\lim_{h \rightarrow 0} (12 + 2h) = 12$.

- **Conclusion** : f est dérivable en 3 et $f'(3) = 12$.

3. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a lorsque $f'(a)$ est un rationnel connu

- On peut écrire $f'(a)$ sous forme d'un quotient de deux entiers :

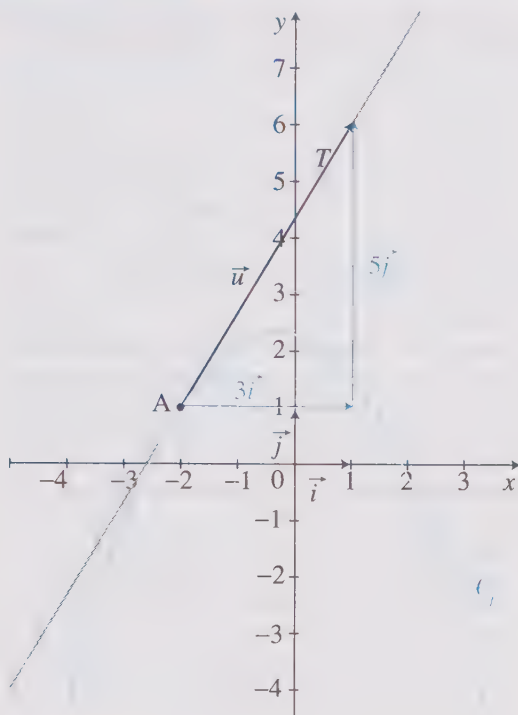
$$f'(a) = \frac{p}{q}, \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \text{ (si } f'(a) \text{ est un entier, alors } p = f'(a) \text{ et } q = 1).$$

- Placer le point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

- À partir de ce point, tracer le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(q ; p)$, qui est un vecteur directeur de la tangente.

EXEMPLE : On a tracé $\mathcal{C}_f$ dans le repère page suivante.

Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 sachant que $f'(-2) = \frac{5}{3}$.



4. Dériver une fonction f

- Reconnaître la forme de f : somme, produit, inverse ou quotient de fonctions simples.
- Si f est de la forme $u \times v$, $\frac{1}{v}$ ou $\frac{u}{v}$, définir les fonctions u , v et déterminer leurs dérivées.
- Appliquer alors la formule de la dérivée d'un produit, d'un inverse ou d'un quotient.

EXEMPLE : Calculer la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{3-2x}{7x^2+12}$, puis la dérivée sur $]0; +\infty[$ de $g : x \mapsto \frac{-3}{2\sqrt{x}}$.

- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3 - 2x$ et $v(x) = 7x^2 + 12$.

f est le quotient de deux polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$, et son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors $u'(x) = 0 - 2 \times 1 = -2$ et $v'(x) = 7 \times 2x + 0 = 14x$.

Pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{(-2) \times (7x^2 + 12) - (3 - 2x) \times 14x}{(7x^2 + 12)^2} = \frac{14x^2 - 42x - 24}{(7x^2 + 12)^2}.$$

- g est de la forme $-\frac{3}{2} \times \frac{1}{v}$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.

Alors $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour tout $x > 0$, $g'(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{-v'(x)}{v^2(x)} = \frac{3}{4x\sqrt{x}}$.

5. Étudier les variations d'une fonction f

- **1^{re} étape** : Calculer $f'(x)$.
- **2^e étape** : Factoriser au maximum $f'(x)$ pour en étudier le signe à l'aide d'un tableau de signes.

Si $f'(x)$ ne peut être mis sous forme d'un produit ou d'un quotient, résoudre l'inéquation $f'(x) > 0$ et l'équation $f'(x) = 0$.

- **3^e étape** : Dédire du signe de $f'(x)$ les variations de f .

EXEMPLE : Calculer la dérivée sur $]0 + \infty[$ de la fonction :

$$f : x \mapsto 1 + x - x\sqrt{x}.$$

- Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 - \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \right) = 1 - \frac{3x}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{3\sqrt{x}}{2}$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{3\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} > \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{4}{9} > x$, car la fonction carré est strictement croissante sur $]0 + \infty[$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{3\sqrt{x}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}.$$

- D'où le tableau donnant les variations de f :

x	0	$\frac{4}{9}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

EXERCICES D'APPLICATION

1 NOMBRE DÉRIVÉ

★ 15 min ► P. 129

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2$.

Soit h un réel non nul.

a. Calculer $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ et simplifier son expression.

b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, que vaut $f'(1)$?

2. Soit g la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x+2}$.

Soit h un réel strictement positif.

a. Calculer $\frac{g(-2+h) - g(-2)}{h}$ et simplifier son expression.

b. La fonction g est-elle dérivable en -2 ? Si oui, que vaut $g'(-2)$?

3. Soit k la fonction définie sur $] -\infty; -\frac{1}{2}[$ par $k(x) = \frac{1}{2x+1}$.

Soit h un réel non nul, proche de 0.

a. Montrer que $\frac{k(h) - k(0)}{h} = \frac{-2}{2h+1}$.

b. La fonction k est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $k'(0)$?

2 ÉQUATIONS DE TANGENTES

★ 15 min ► P. 129

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a et non réduit à a . On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a , pour chacun des cas suivants :

a. $a = 3$ et $f(3) = -2$ et $f'(3) = 5$.

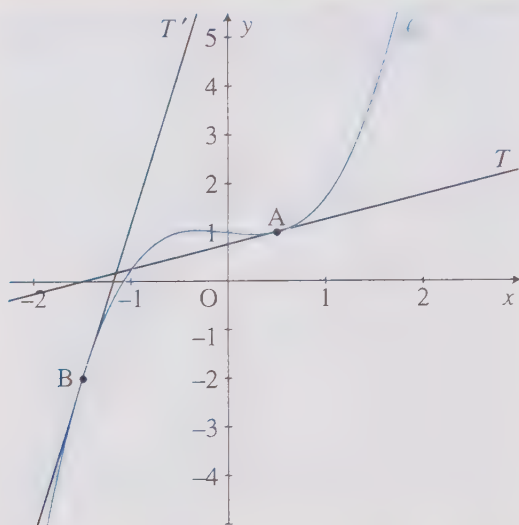
b. $a = -7$ et $f(-7) = 0$ et $f'(-7) = -\frac{2}{5}$.

2. Soit f une fonction dérivable en 4, et dont la tangente au point d'abscisse 4 a pour équation réduite $T : y = 5 - \frac{2x}{3}$. Déterminer $f(4)$ et $f'(4)$.

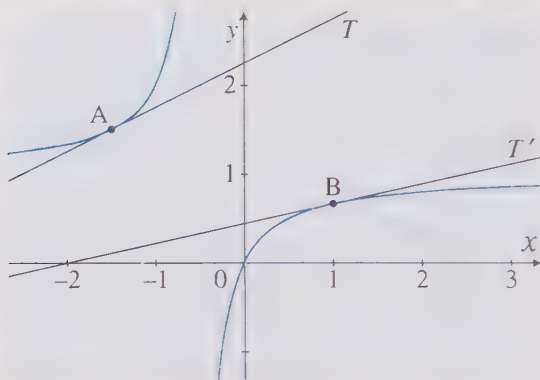
3 LECTURE GRAPHIQUE

★ 30 min ► P. 129

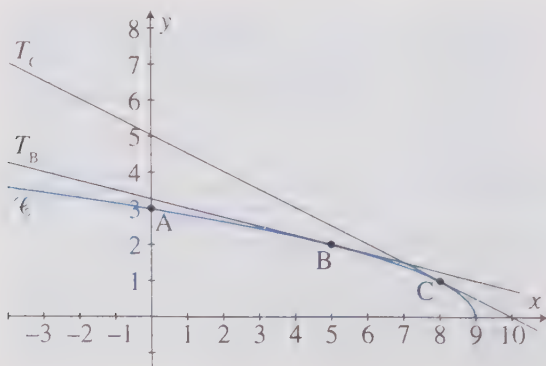
1. Après avoir lu sur le graphique les valeurs de $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, déterminer les équations réduites des tangentes à $\mathcal{C}_f$ en A et en B.



2. Déterminer les équations réduites des tangentes à la courbe aux points A et B.



3. Après avoir déterminé l'équation réduite de T_B et celle de T_C , tracer la tangente à $\mathcal{C}$ au point A sachant que $f'(0) = -\frac{1}{6}$.



4 ALGORITHME

★ 15 min ► P. 130

1. Soit f une fonction dérivable en 1. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Justifier que l'algorithme ci-dessous donne bien l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 (sous la forme $y = mx + p$).

```

VARIABLES
  image_de_1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  nombre_dérivé_en_1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE image_de_1
  LIRE nombre_dérivé_en_1
  p PREND_LA_VALEUR image_de_1 - nombre_dérivé_en_1
  AFFICHER "y ="
  AFFICHER nombre_dérivé_en_1
  AFFICHER "*x +"
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME

```

2. On considère maintenant un réel a quelconque, et une fonction f dérivable en a .

a. Écrire l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a sous la forme $y = mx + p$.

b. En déduire un algorithme qui, aux valeurs de a , $f(a)$ et $f'(a)$, associe l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

5

★★ 35 min ► P. 130

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer $f'(x)$, pour tout $x \in I$:

a. $f(x) = 3 - \frac{7x}{2}$; $I = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$; $I = \mathbb{R}$.

c. $f(x) = -\frac{2}{x}$; $I = \mathbb{R}^*$.

d. $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

e. $f(x) = 2\sqrt{x} \times \left(\frac{x^4}{4} + \frac{1}{x^2} \right)$; $I =]0 ; +\infty[$.

f. $f(x) = \frac{2x-1}{4x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$.

g. $f(x) = x\sqrt{x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

h. $f(x) = \frac{7}{(2x-1)^2}$; $I =]-\infty ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

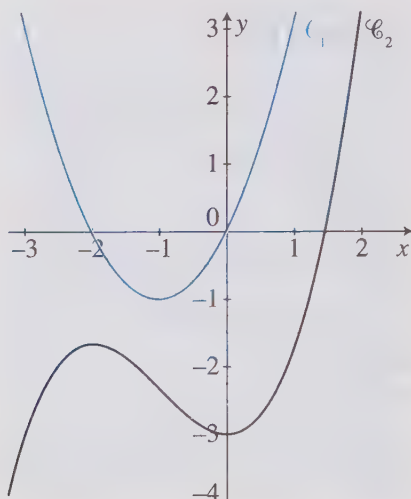
i. $f(x) = (x + \sqrt{x})^3$; $I =]0 ; +\infty[$.

 e.f.g.h.i. Voir le savoir-faire 4.

6

★ 15 min ► P. 132

On a représenté dans le repère ci-dessous une fonction f et sa dérivée f' .



1. Attribuer à chacune des courbes la fonction correspondante. Justifier en dressant le tableau du signe de f' et des variations de f .
2. Lire les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f(-3)$ et $f'(-3)$.
3. On note T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse -3 , et T_B la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 0 . Placer sur le graphique les points A et B, puis tracer T_A et T_B .

7

★★ 30 min ► P. 133

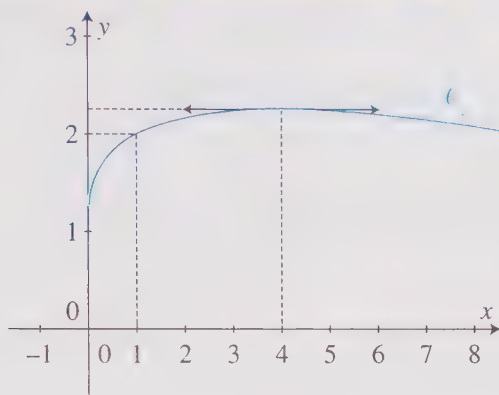
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Calculer le nombre dérivé de f en -1 , en 0 , en 2 puis en 3 .
5. Construire $\mathcal{C}_f$ sur l'ensemble $[-3; 1[\cup]1; 5]$, en faisant apparaître les tangentes à la courbe aux points d'abscisses -1 , 0 , 2 et 3 .

8

★★ 25 min ► P. 134

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = ax + b + \sqrt{x}$, où a et b sont deux réels. On donne ci-après la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction g .



1. Parmi les valeurs de $g(1)$, $g'(1)$, $g(4)$, $g'(4)$, quelles sont celles que l'on peut lire sur le graphique ? Donner leurs valeurs.
2. Montrer que l'on obtient un système de deux équations d'inconnues a et b , équivalent au système
$$\begin{cases} 4a + 1 = 0 \\ a + b = 1. \end{cases}$$
3. Déterminer alors les valeurs de a et b et donner l'expression de $g(x)$ en fonction de x . Donner ensuite les expressions de g et de g' en fonction de x .
4. À l'aide du graphique, donner le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x . Retrouver ensuite ce résultat par le calcul.

9 APPLICATION EN SCIENCES PHYSIQUES

★★ 30 min ► P. 135

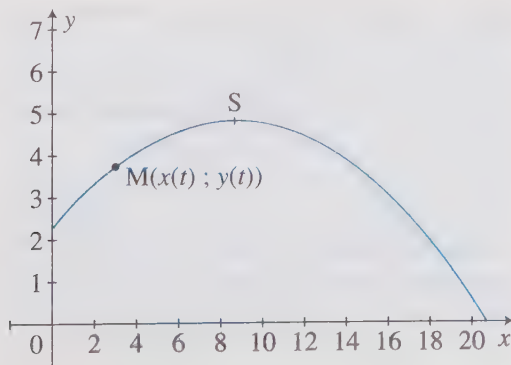
Cet exercice fait suite à l'exercice 24 du chapitre « Second degré »

Un athlète lance un poids dont on a représenté la trajectoire dans le repère ci-dessous.

La position du poids à l'instant t , exprimé en secondes, est donnée par ses coordonnées $(x(t); y(t))$, où

$$\begin{cases} x(t) = 7\sqrt{3}t \\ y(t) = -4,9t^2 + 7t + 2,3 \end{cases}$$

On considère que $t = 0$ à l'instant où le poids est lancé.



On admettra ici les résultats suivants, démontrés dans l'exercice 24 du chapitre 2 :

- L'abscisse du sommet S est $x_S = 5\sqrt{3}$ ($\approx 8,66$ mètres).
- Le poids touche le sol à une distance $x_F = 12 + 5\sqrt{3}$ ($\approx 20,66$ mètres).

On note t_F l'instant où le poids touche le sol.

1. La vitesse instantanée du poids à l'instant t est donnée par le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ de coordonnées $(x'(t); y'(t))$. Exprimer, pour tout $t \in [0; t_F]$, $x'(t)$ et $y'(t)$ en fonction de t .
2. Déterminer à quel instant t_S le poids atteint le sommet de la parabole. En déduire les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t_S)$.

3. a. Montrer que $t_F = \frac{5 + 4\sqrt{3}}{7}$.

b. En déduire les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t_F)$.

c. Pour répondre à la question « avec quelle vitesse le poids touche-t-il le sol ? », calculer la norme du vecteur $\vec{v}(t_F)$.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

10 NOMBRE DÉRIVÉ

★★ 20 min ► P. 136

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{4}{2x+3}$.

Soit h un réel non nul, proche de zéro.

a. Montrer que $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-8}{5(5+2h)}$.

b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, que vaut $f'(1)$?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Soit h un réel non nul.

a. Montrer que $\frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 1} + 1}$.

b. En admettant que $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h^2 + 1} = 1$, établir l'existence et la valeur du nombre dérivé de g en 0.

11 INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

★★ 15 min ► P. 136

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + ax + b$, où a et b sont des constantes réelles. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Déterminer l'expression de $f(x)$ sachant que $P(-2; 5) \in \mathcal{C}_f$, et que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $-\frac{2}{3}$.

12 FONCTION DÉRIVÉE ET TANGENTES

★★ 25 min ► P. 137

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 6x + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Déterminer les points de la courbe en lesquels $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale.
4. Déterminer les points de la courbe en lesquels $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à la droite (d) d'équation $y = x$.

13 À PARTIR D'UN TABLEAU DE VARIATION

★★ 25 min ► P. 137

Soit une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ où a, b, c sont des nombres réels.

On donne le tableau de variation de f :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	-3	$-\infty$

1. Soit f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Déterminer $f'(x)$ en fonction de a, c et x .
2. a. En utilisant les valeurs prises par f et f' que donne le tableau, et sachant de plus que $f'(1) = 3$, montrer que les nombres réels a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -6 \\ 4a - c = 0 \\ a - c = 3. \end{cases}$$

- b. Déterminer les nombres réels a, b et c .

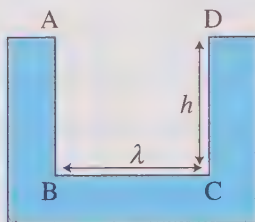
On pourra commencer par résoudre le système composé des deux dernières équations.

c. En déduire l'expression de $f(x)$. Ensuite, à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe de la fonction f obtenue. Vérifier qu'elle correspond au tableau de variations du 1. et à la donnée supplémentaire du 2.a.

14 FROTTEMENT MINIMAL

★ 25 min ► P. 138

On veut, avant construction, rendre minimal le frottement d'un fluide contre les parois d'un canal ouvert, de section intérieure rectangulaire ABCD.



L'aire de la section intérieure de ce canal doit être de $0,5 \text{ m}^2$.

On désigne par h la hauteur et par λ la largeur (en m) de cette section intérieure. On admettra que le frottement est minimum lorsque la longueur $AB + BC + CD$ de la section intérieure est minimum.

1. a. Écrire λ en fonction de h .

b. Montrer que la longueur $g(h)$ du contour intérieur de la section, fonction de h ,

s'exprime, pour $h > 0$, par $g(h) = 2h + \frac{1}{2h}$.

c. Montrer que, pour tout $h > 0$, $g'(h) = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}$.

d. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et dresser son tableau de variation.

2. Déduire de ce qui précède les valeurs de h et de λ permettant d'obtenir le frottement minimum.

15 POSITIONS RELATIVES D'UNE COURBE ET D'UNE DROITE

★★ 35 min ► P. 139

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, et g la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 1$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal.

1. Calculer et factoriser $f'(x)$ pour $x \in D_f$.

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. Démontrer que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

4. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
5. Dans un repère orthonormé, tracer $\mathcal{C}_g$ puis $\mathcal{C}_f$ en faisant apparaître les tangentes horizontales.

16 FONCTION RATIONNELLE

★★★ 60 min ▶ p. 140

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; -1[\cup] -1 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A - Étude des variations de f

1. Démontrer que, pour tout x appartenant au domaine de définition de f :

$$f'(x) = \frac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3}.$$

Remarquer que la dérivée de $v : x \rightarrow (x+1)^2$ est $v' : x \rightarrow 2(x+1)$.

2. Étudier le signe de $x^2 + 3x + 4$ sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que $(x+1)^3$ est du même signe que $(x+1)$, et en déduire le signe de $(x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Partie B - Construction de la courbe représentative de f

1. Déterminer les équations réduites des tangentes T_1 , T_2 et T_3 à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectivement -2 , $-\frac{1}{2}$ et 0 .
2. Soit D la droite d'équation $y = x$. Dresser le tableau de signes de $f(x) - x$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D .
3. Construire sur $[-5; 5]$ les droites D , T_1 , T_2 et T_3 , puis la courbe $\mathcal{C}_f$.

17 FONCTION CUBE ET RACINE CUBIQUE D'UN NOMBRE

★★ 30 min ▶ p. 142

1. Soit $f : x \mapsto f(x) = x^3$ la fonction cube, définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en la dérivant et en étudiant le signe de la dérivée.

La croissance de la fonction cube a été démontrée d'une autre manière dans l'exercice 13 du chapitre 1.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$ en utilisant des inégalités déduites de la question 1. En déduire le tableau de signes de la fonction cube.

3. On admettra que pour tout réel k , il existe un réel x noté $\sqrt[3]{k}$ tel que $f(x) = k$. Démontrer que $\sqrt[3]{k}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = k$.

4. Soit $k \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - k$. Déduire du 1. les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

5. Démontrer à l'aide des variations de g que $\sqrt[3]{k}$ est du même signe que k .

 Utiliser un résultat vu au chapitre 1.

18

★★ 10 min ► P. 143

Soit f la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Soit h un réel non nul, proche de zéro.

1. Calculer le quotient $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$, en distinguant les cas $h > 0$ et $h < 0$.

2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $f'(0)$?

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

19

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE DÉRIVÉE
D'UN PRODUIT

★★ 20 min ► P. 143

L'objet de cet exercice est d'établir les formules de la dérivée d'un produit, et de la dérivée d'un quotient.

1. Soient f et g deux fonctions dérivables en a .

Soit h un réel proche de 0 (de sorte que f et g soient définies en $a+h$).

a. Vérifier que :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) \times g(a+h) - f(a) \times g(a)}{h} \\ = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times g(a+h) + f(a) \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \end{aligned}$$

b. En admettant que $\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a)$, montrer que $(f \times g)$ est dérivable en

a et donner l'expression de $(f \times g)'(a)$.

2. Soient f et g deux fonctions dérivables en a , et telles que $g(a) \neq 0$.

Soit h un réel proche de 0 (de sorte que f et g soient définies en $a+h$ et que $g(a+h) \neq 0$).

a. Vérifier que :

$$\frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h} = \frac{1}{g(a) \times g(a+h)} \times \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times g(a) - f(a) \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right].$$

b. En admettant que $\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a)$, montrer que $\left(\frac{f}{g}\right)$ est dérivable en a

et donner l'expression de $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)$.

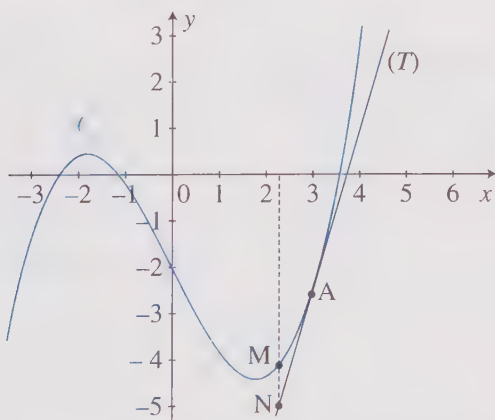
20 APPROXIMATION AFFINE

★★ 35 min ► p. 144

Partie A

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant a et non réduit à a .

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.



1. Rappeler l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a . On notera (T) cette tangente.

2. Soit h un réel proche de zéro, tel que $a+h \in I$. On note M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a+h$ et N le point de (T) d'abscisse $a+h$. Exprimer, en fonction de a et de h , les coordonnées de M et de N ainsi que la distance MN.

3. Justifier l'approximation (appelée approximation affine) : si h est proche de zéro, alors $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.

Partie B. Application

1. Notons f la fonction racine carrée.
 - a. Donner la valeur de $f(1)$ et de $f'(1)$.
 - b. Établir l'approximation affine de $\sqrt{1+h}$ pour h proche de zéro.
 - c. En déduire, sans utiliser de calculatrice, une valeur approchée de $\sqrt{1,001}$.
2. Établir l'approximation affine de $\frac{1}{2+h}$ au voisinage de 0. En déduire, sans utiliser de calculatrice, une valeur approchée de $\frac{1}{1,98}$.

21 ALGORITHME

★★★ 40 min ▶ p. 145

On admet le résultat suivant, appelé approximation affine :

Soit f une fonction dérivable en a .

Si h est proche de zéro, alors $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.

On s'intéresse dans cet exercice à une fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui vérifie $f(0) = 1$ et $f' = f$.

1. Soit a un réel. Démontrer que, pour h proche de zéro :

$$f(a+h) \approx (1+h)f(a).$$

2. Nous ne connaissons pas cette fonction f , mais nous allons l'approcher par une fonction affine par morceaux (dont le pas est noté h) : c'est la méthode d'Euler. Prenons par exemple $h = 0,2$.

- Le premier point M_0 a pour coordonnées $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ (puisque $f(0) = 1$).
- Le point suivant M_1 a pour coordonnées $x_1 = x_0 + h = 0,2$ et y_1 .

Nous ne connaissons pas $f(x_1)$, mais l'approximation affine pour $a = x_0$ nous en donne une valeur approchée puisque :

$$f(x_1) = f(x_0 + h) \approx (1+h) \times f(x_0).$$

On pose donc $y_1 = (1+h) \times f(x_0) = (1+0,2) \times 1$ d'où $y_1 = 1,2$.

- Le point M_2 a pour coordonnées $x_2 = x_1 + h = 0,4$ et y_2 .

L'approximation affine pour $a = x_1$ nous donne une valeur approchée de $f(x_2)$ puisque :

$$f(x_2) = f(x_1 + h) \approx (1+h) \times f(x_1) \approx (1+h) \times y_1.$$

On pose donc $y_2 = (1+h) \times y_1 = (1+0,2) \times 1,2$ d'où $y_2 = 1,44$.

- a. Déterminer maintenant les coordonnées de M_3 et de M_4 .

- b. On a écrit page suivante un algorithme permettant d'afficher les premiers points M_n (dont l'abscisse est inférieure à $4+h$).

VARIABLES

x EST_DU_TYPE NOMBRE

y EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

x PREND_LA_VALEUR 0

y PREND_LA_VALEUR 1

TRACER_POINT (0,1)

TANT_QUE (x<4) FAIRE

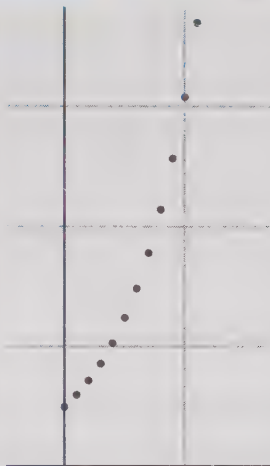
DEBUT_TANT_QUE

x PREND_LA_VALEUR x+0,2

y PREND_LA_VALEUR y*(1+0,2)

TRACER_POINT (x,y)

FIN_TANT_QUE

FIN_ALGORITHME


Sur ce modèle, écrire un algorithme applicable à n'importe quelle valeur de h .
Le tester pour $h = 0,1$ puis $h = 0,05$.

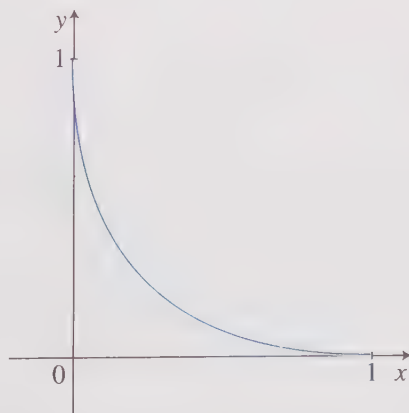
c. Il existe en fait une unique fonction f qui vérifie $f(0) = 1$ et $f' = f$, c'est la fonction exponentielle. Modifier l'algorithme de la question précédente de façon à comparer la courbe obtenue par la méthode d'Euler et celle de la fonction exponentielle.

22 ARC DE CERCLE ?

★★★ 30 min ► P. 147

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x+1}$.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal est donnée ci-dessous.



1. a. Démontrer que l'axe des abscisses est tangent à la courbe au point d'abscisse 1.

- b. Soit h un réel strictement positif, proche de zéro. Calculer $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ et vérifier que l'axe des ordonnées est tangent à la courbe au point d'abscisse 0.
2. On veut savoir si la courbe $\mathcal{C}$ est ou non, un arc de cercle.
- a. Si $\mathcal{C}$ était un arc de cercle, quels seraient son centre (point noté Ω) et son rayon ? Justifier.
- b. Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\frac{1}{4}$. Calculer ΩM . Conclure

23 ÉTUDES GRAPHIQUES

★★ 35 min ► p. 148

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm sur chaque axe.

Partie A. Étude des propriétés de $\mathcal{C}$

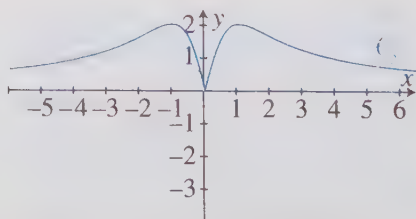
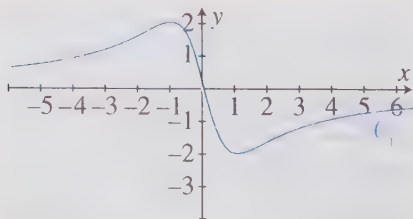
- Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation $f(x) = -f(-x)$.
- On considère les points M et M' de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives x et $-x$.
Établir que l'origine O du repère est le milieu du segment $[MM']$.
- Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

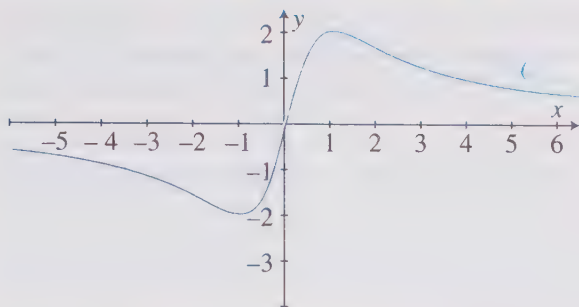
Partie B

- En détaillant les étapes du calcul, établir que la dérivée f' de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = 4 \times \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

- Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $1 - x^2$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- On considère la droite Δ d'équation $y = 4x$. Montrer que cette droite Δ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $(0; 0)$.
- Trois courbes sont données ci-dessous. Indiquer celle qui représente f . Puis, sur le graphique correspondant, construire la droite d'équation $y = 4x$.





RECHERCHE DE LA FORME OPTIMALE D'UNE BOÎTE

★★★ 55 min ▶ P. 149

Partie A

Considérons une boîte en plastique en forme de parallélépipède rectangle de base carrée de côté x et de hauteur h , n'ayant pas de couvercle, c'est-à-dire constituée de la base et des quatre faces latérales.

1. Soit V le volume de cette boîte. Exprimer V en fonction de x et de h .
2. Soit S la surface de la boîte. Exprimer S en fonction de x et de h .
3. Soit V_0 un volume fixé. On cherche à optimiser S , c'est-à-dire à déterminer les dimensions de la boîte telle que, pour le volume fixé, la surface de plastique soit minimale. Pour cela :

- a. Exprimer h en fonction de x et de V_0 .
- b. En déduire l'expression de S en fonction de x et de V_0 . Cette expression définit la fonction S sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- c. Montrer que $S'(x) = \frac{2x^3 - 4V_0}{x^2}$, puis déterminer les variations de la fonction S sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide des résultats de l'exercice 17.

4. Dans cette question, on considèrera le volume de la boîte égal à $V_0 = 20 \text{ L} = 20 \text{ dm}^3$, x et h étant exprimés en dm.

- a. Dresser le tableau de variation de S sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- b. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} dm près des dimensions x et h optimales pour le volume V_0 , ainsi que la surface de plastique correspondante.
- c. Représenter graphiquement la fonction S sur $]0; 5]$.
- d. Par lecture graphique, donner un encadrement du côté x du pavé pour lequel la surface serait inférieure à 40 dm^2 .

Partie B

Considérons maintenant une boîte en plastique en forme de cylindre de base de rayon r et de hauteur h , n'ayant pas de couvercle, c'est-à-dire constituée de la base et de la face latérale.

Étudier la fonction S donnant la surface de cette boîte en fonction de son rayon, de même que dans la **partie A**, puis en déduire ses dimensions optimales pour le même volume $V_0 = 20$ L, ainsi que la surface de plastique correspondante.

Partie C

Déduire des réponses obtenues dans les **parties A et B**, la forme optimale d'une boîte sans couvercle de volume 20 L.

Une forme sphérique ne serait pas judicieuse pour une boîte (stabilité et problème du couvercle).

25

★★★ 55 min ► p. 152

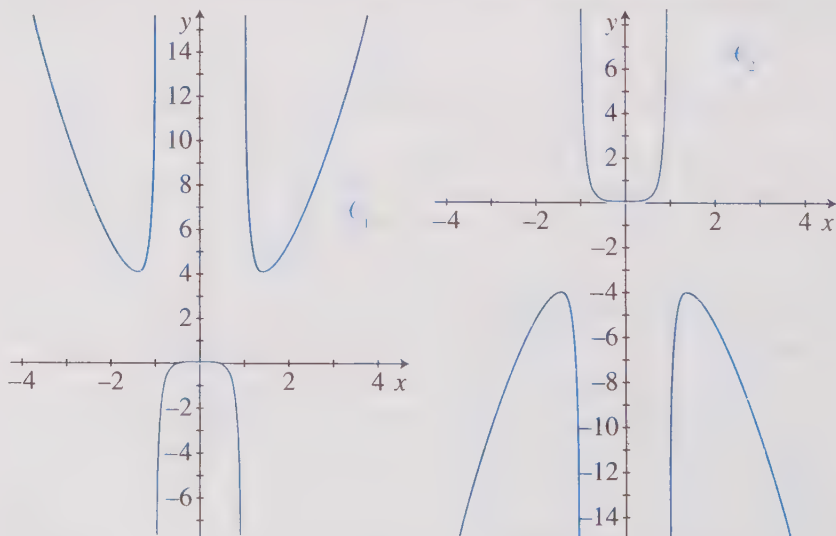
Partie A. Étude de fonction

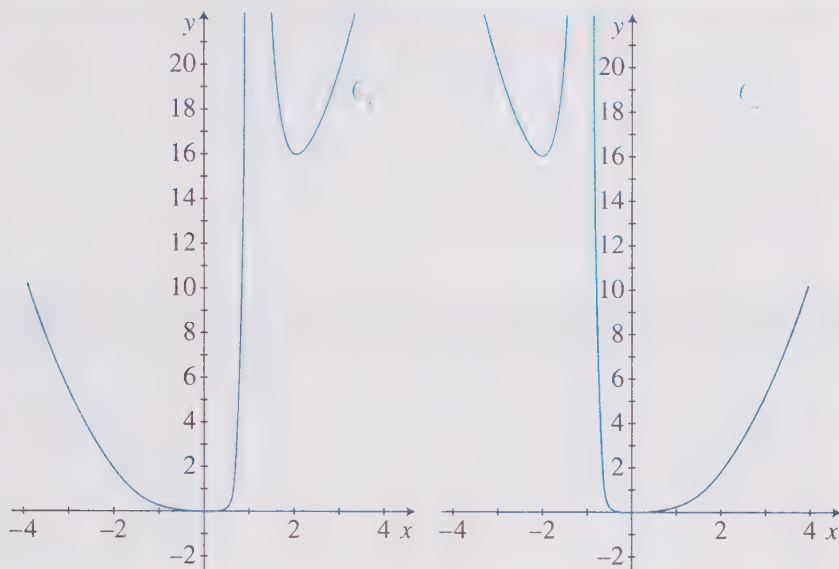
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
- Vérifier que, pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{2x^3(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2}.$$

- Étudier le signe de $x^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f .
- Quatre courbes sont données ci-dessous. Indiquer celle qui représente f .





Partie B. Volume d'un cône

Dans la figure ci-contre :

– les points A et H appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

– la tangente à $\mathcal{C}$ en H coupe (OA) en B.

– la tangente à $\mathcal{C}$ en A coupe (BH) en C.

On pose $AB = h$ et $AC = x$ (avec $x > 1$).

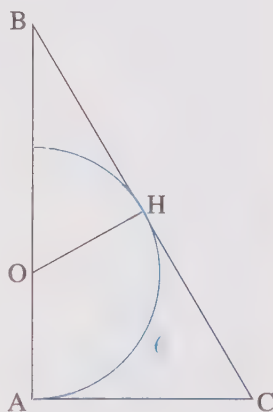
1. a. Démontrer que les angles $\widehat{BOH}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux.

On notera par la suite $\alpha = \widehat{BOH} = \widehat{BCA}$.

b. Calculer alors $\tan \alpha$ de deux façons différentes et établir l'égalité :

$$BH^2 \times AC^2 = AB^2 \times OH^2.$$

c. En déduire, en justifiant soigneusement, que $h = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$



On pourra commencer par établir la relation $(h^2 - 2h)x^2 = h^2$.

2. a. En pivotant autour de l'axe (AB), le triangle ABC engendre un cône de révolution de sommet B.

Sachant que le volume d'un cône de révolution est :

$$V = \frac{(\text{aire de la base}) \times (\text{hauteur})}{3},$$

exprimer le volume $V(x)$ du cône en fonction de x , et vérifier que :

$$V(x) = \frac{2\pi}{3} f(x) \text{ (avec } x > 1).$$

b. À l'aide des résultats de la **partie A**, déterminer pour quelle valeur de x , le volume du cône est minimal.

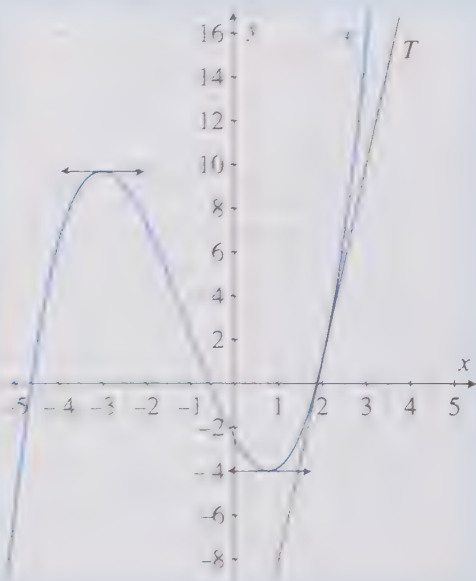
c. Calculer, pour cette valeur de x , la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à 0,1 degré près.

CONTRÔLE

26 QCM

★ 10 min ► P. 154

Ci-dessous est représentée la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.



Chaque question comporte quatre affirmations, une seule des trois est exacte.

1. Le nombre dérivé de f en 1...

- a. vaut 0 ;
- b. vaut -4 ;
- c. est un réel strictement positif ;
- d. est un réel strictement négatif.

2. Que vaut $f'(2)$?

- a. $\frac{9}{2}$;
- b. 9 ;
- c. $\frac{2}{9}$;
- d. $\frac{1}{9}$.

3. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -3 a pour équation :

- a. $y = x$;
- b. $x = -3$;
- c. $y = 9,75$;
- d. $x = 9,75$.

4. L'inéquation $f(x) \leq 9x - 17$ admet, sur $[0 ; 5]$:

- a. aucune solution ;
- b. une solution ;
- c. deux solutions ;
- d. une infinité de solutions.

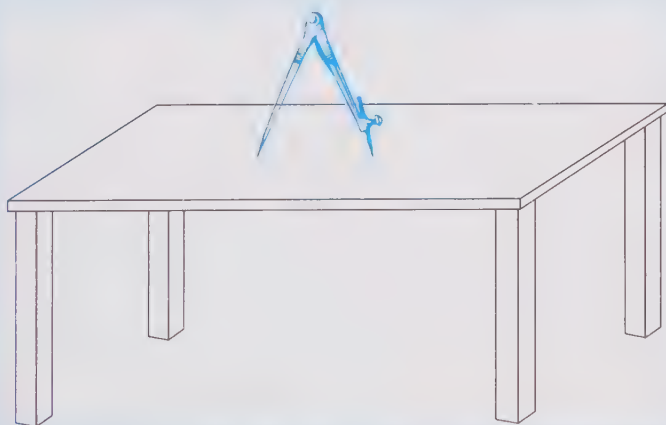
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \leq 0$ est :

- a. $[-3 ; 1]$;
- b. $[-3 ; -0,5]$;
- c. $[-0,5 ; 1,8]$;
- d. $[-3 ; 0,8]$.

27 PROBLÈME

★★ 40 min ► P. 154

Un compas dont les pointes sont posées sur une table forme avec celle-ci un triangle.

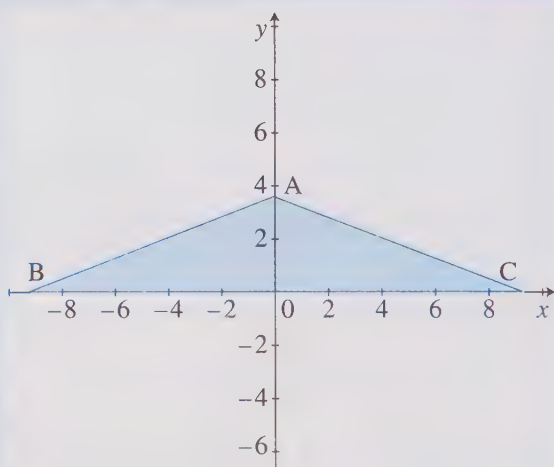
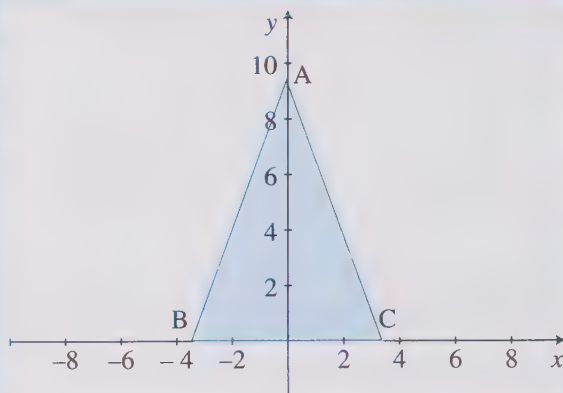


Lorsque l'écartement du compas varie, l'aire du triangle ainsi obtenu varie. L'objectif de ce problème est de déterminer la position du compas pour laquelle l'aire du triangle est maximale.

On se place dans le cas où les branches du compas mesurent 10 cm.

Dans les figures ci-après, le point A est situé sur l'axe des ordonnées et représente le sommet du compas. L'axe des abscisses représente la table.

Les points B et C représentent les extrémités des branches du compas.



1. Justifier que B et C sont les points d'intersection d'un cercle et d'une droite à définir.
2. Posons $t = OA$ et notons $f(t)$ l'aire du triangle ABC correspondante.
 - a. Dans quel intervalle I varie t ?
 - b. Démontrer que, pour tout $t \in I$, $f(t) = \sqrt{t^2(100 - t^2)}$.
3. Soit u la fonction définie sur I par $u(t) = t^2(100 - t^2)$.
 - a. Calculer et factoriser au maximum $u'(t)$.
 - b. Construire le tableau de variations de u sur I .
4. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de $f = \sqrt{u}$.
5. Pour quelle distance OA, l'aire du triangle ABC est-elle maximale ? Calculer l'aire maximale du triangle, puis démontrer que cette valeur de $t = OA$ correspond au cas où les branches du compas sont perpendiculaires.

CONTRÔLE

3

Dérivation

28 QUESTION DE COURS

★★ 10 min ► P. 156

Démontrer que la fonction carré est dérivable en tout réel a , puis donner l'expression de sa dérivée.

29 PROBLÈME

★★ 50 min ► P. 156

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par :

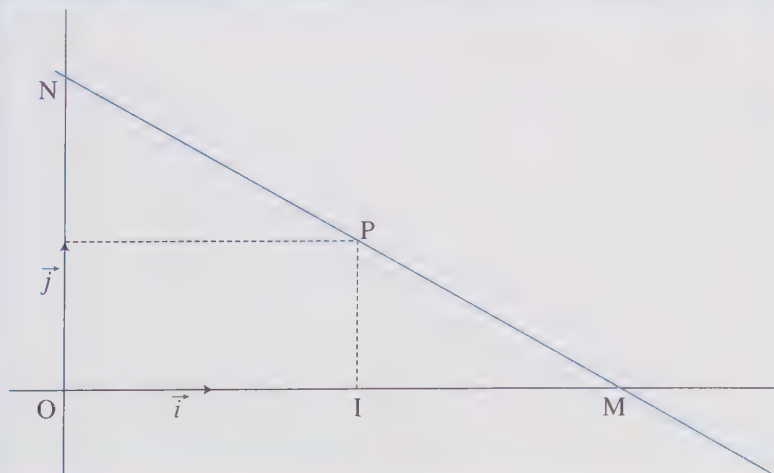
$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Démontrer que, pour tout $x > 2$, $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Déterminer les équations réduites des tangentes T_1 , T_2 et T_3 à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses respectivement $\frac{5}{2}$, 4 et 6.
4. Représenter $\mathcal{C}$, T_1 , T_2 et T_3 dans le repère donné.

Partie B

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points P et I de coordonnées respectives $(2; 1)$ et $(2; 0)$.



Le point M est un point variable de l'axe $(O; \vec{i})$, d'abscisse x supérieure strictement à 2.

La droite (PM) coupe l'axe des ordonnées en N .

1. Démontrer que l'ordonnée de N est égale à $\frac{x}{x-2}$.
2. On note $A(x)$ l'aire du triangle OMN . Montrer que $A(x) = \frac{1}{2}f(x)$.
3. Construire le triangle OMN d'aire minimale. Justifier correctement la construction.

CORRIGÉS

3

Dérivation

1. Soit h un réel non nul.

$$a. \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 - 0}{h} = h.$$

$$b. \lim_{h \rightarrow 0} h = 0 \text{ donc } f \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } f'(1) = 0.$$
2. Soit h un réel strictement positif.

$$a. \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

$$b. \frac{1}{\sqrt{h}} \text{ n'admet pas de limite quand } h \text{ tend vers } 0, \text{ donc } g \text{ n'est pas dérivable en } -2.$$
3. Soit h un réel non nul, proche de 0 :

$$a. \frac{k(h) - k(0)}{h} = \frac{\frac{1}{2h+1} - 1}{h} = \frac{\frac{1-2h-1}{2h+1}}{h} = \frac{-2h}{h \times (2h+1)} = \frac{-2}{2h+1}.$$

$$b. \lim_{h \rightarrow 0} 2h + 1 = 1 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{2h+1} = -2 \text{ donc } k \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } k'(0) = -2.$$
2. 1. a. $T : y = -2 + 5(x - 3)$, soit $T : y = 5x - 17$.

$$b. T : y = 0 - \frac{2}{5}(x + 7), \text{ soit } T : y = -\frac{2}{5}x - \frac{14}{5}.$$

2. T a pour coefficient directeur $-\frac{2}{5}$ donc $f'(4) = -\frac{2}{3}$. T passe par le point de coordonnées $(4; f(4))$ donc :

$$f(4) = 5 - \frac{2 \times 4}{3} = \frac{7}{3}.$$

3. 1. • $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -2$. T' passe par le point $(-0,5; 4,5)$, donc $\vec{u}(1; 6,5)$ est un vecteur directeur de T' , donc $f'\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{6,5}{1} = \frac{13}{2}$.

T' a donc pour équation réduite $y = -2 + \frac{13}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$, soit $T' : y = \frac{13}{2}x + \frac{31}{4}$.

• $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. T passe par le point de coordonnées $(1,5; 1,5)$, donc $\vec{v}(1; 0,5)$ est un vecteur directeur de T , donc $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}$.

T a donc pour équation réduite $y = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, soit $T : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

2. • $f(-1,5) = 1,5$. T passe par le point $(-0,5; 2)$ donc $\vec{u}(1; 0,5)$ est un vecteur directeur de T , donc $f'(-1,5) = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}$.

T a donc pour équation réduite $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$, soit $T: y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$.

• $f(1) = \frac{2}{3}$. T' passe par le point $(2,5; 1)$ donc $\vec{v}\left(1,5; \frac{1}{3}\right)$ est un vecteur directeur de

T' , donc $f'(1) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

T' a donc pour équation réduite $y = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}(x-1)$, soit $T': y = \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}$.

3. • $f(5) = 2$. T_B passe par le point $(1; 3)$ donc $\vec{u}(-4; 1)$ est un vecteur directeur de T_B , donc $f'(5) = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$.

T_B a donc pour équation réduite $y = 2 - \frac{1}{4}(x-5)$, soit $T_B: y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$.

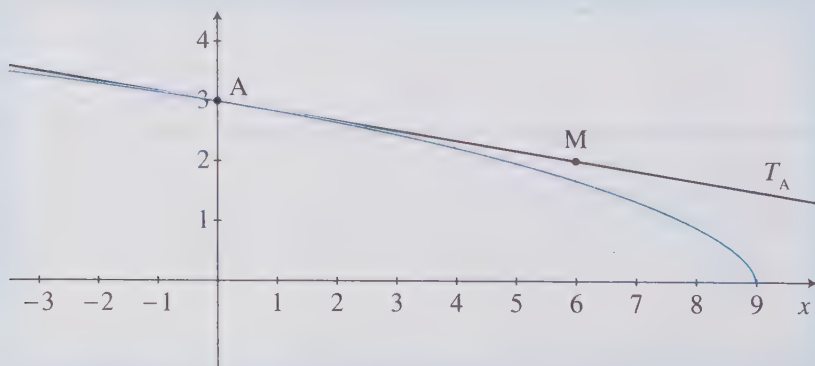
• $f(8) = 1$. T_C passe par le point $(2; 4)$ donc $\vec{v}(-6; 3)$ est un vecteur directeur de T_C , donc $f'(8) = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$.

T_C a donc pour équation réduite $y = 1 - \frac{1}{2}(x-8)$, soit $T_C: y = -\frac{1}{2}x + 5$.

• $f'(0) = -\frac{1}{6}$ donc $\vec{w}(6; -1)$ est un vecteur directeur de T_A . Comme $A(0; 3)$, le point $M(x; y)$ défini par $\overrightarrow{AM} = \vec{w}$ est un point de T_A .

• Or $\overrightarrow{AM} = \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} x-0=6 \\ y-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$.

Donc $T_A = (AM)$ avec $M(6; 2)$.



4 1. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = f(1) + f'(1) \times (x - 1),$$

$$\text{soit encore } y = f'(1) \cdot x + (f(1) - f'(1)).$$

On a donc bien la forme $y = mx + p$ avec $m = f'(1)$ et $p = f(1) - f'(1)$.

2. a. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f(a) + f'(a) \times (x - a),$$

$$\text{soit encore } y = f'(a)x + (f(a) - a \times f'(a)).$$

b. D'où l'algorithme :

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
image_de_a EST_DU_TYPE NOMBRE
nombre_dérivé_en_a EST_DU_TYPE NOMBRE
p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE image_de_a
  LIRE nombre_dérivé_en_a
  p PREND_LA_VALEUR image_de_a - a * nombre_dérivé_en_a
  AFFICHER "y ="
  AFFICHER nombre_dérivé_en_a
  AFFICHER "*" x "+"
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

5 **a.** Pour tout x réel, $f'(x) = 0 - \frac{7}{2} \times 1 = -\frac{7}{2}$.

b. Pour tout x réel, $f'(x) = 2 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 4x - 3$.

c. Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$.

d. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

e. f est de la forme $u \times v$, avec $u(x) = 2\sqrt{x}$ et $v(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{x^2}$.

$$\text{Alors } u'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ et } v'(x) = \frac{4x^3}{4} + \frac{-2}{x^3} = x^3 - \frac{2}{x^3}.$$

$$\text{Donc, pour tout } x > 0, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left(\frac{x^4}{4} + \frac{1}{x^2}\right) + 2\sqrt{x} \left(x^3 - \frac{2}{x^3}\right).$$

f. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = 4x^2 + 1$.

$$\text{Alors } u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = 4 \times 2x = 8x.$$

$$\text{Donc, pour tout } x \text{ réel, } f'(x) = \frac{2(4x^2 + 1) - (2x - 1) \times 8x}{(4x^2 + 1)^2} \text{ soit :}$$

$$f'(x) = \frac{-8x^2 + 8x + 2}{(4x^2 + 1)^2}.$$

g. f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

h. f est de la forme $7 \times \frac{1}{v}$ avec $v(x) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$.

Alors $v'(x) = 8x - 4$ et $f' = 7 \times \frac{-v'}{v^2}$.

Donc, pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, $f'(x) = 7 \times \frac{-(8x-4)}{(2x-1)^4} = -28 \times \frac{(2x-1)}{(2x-1)^4}$ soit :

$$f'(x) = \frac{28}{(2x-1)^3}.$$

i. $f(x) = (x + \sqrt{x}) \times (x + \sqrt{x})^2 = (x + \sqrt{x})(x^2 + 2x\sqrt{x} + x) = u(x) \times v(x)$.

$u'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ et $v'(x) = 2x + 2 \times \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 = 2x + 3\sqrt{x} + 1$.

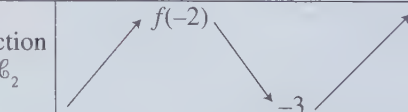
 Pensez à utiliser le résultat de la question g.

Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2 + 2x\sqrt{x} + x) + (x + \sqrt{x})(2x + 3\sqrt{x} + 1)$

En développant :

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + 5x^2 + \frac{13}{2}x\sqrt{x} + 4x + \sqrt{x}.$$

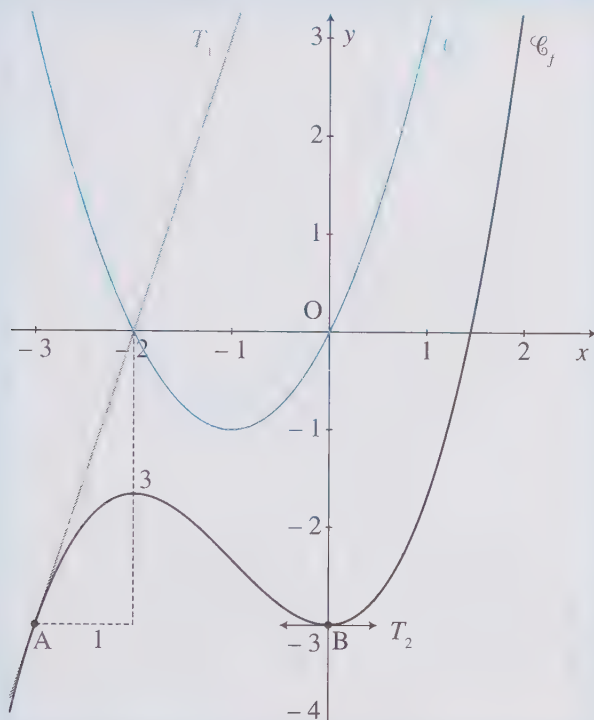
6 1. Les changements de signes de la fonction représentée par $\mathcal{C}_1$ correspondent aux changements de sens de variation de la fonction représentée par $\mathcal{C}_2$. Il semble donc que $\mathcal{C}_1$ représente f' et que $\mathcal{C}_2$ représente f . Vérifions :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
Signe de la fonction représentée par $\mathcal{C}_1$	+	0	-	0	+
Variations de la fonction représentée par $\mathcal{C}_2$					

2. Sur $\mathcal{C}_1$, on lit $f'(0) = 0$ et $f'(-3) = 3$.

Sur $\mathcal{C}_2$, on lit $f(0) = -3$ et $f(-3) = -3$.

3.



■ $f'(0) = 0$ implique qu'au point B de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0 la tangente est horizontale (coefficient directeur nul).

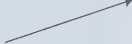
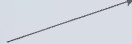
7 1. f est définie partout où son dénominateur est non nul. Or :

$$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Donc $D = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

2. Pour tout $x \in D$,
$$f'(x) = \frac{1(1-x) - (1+x) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

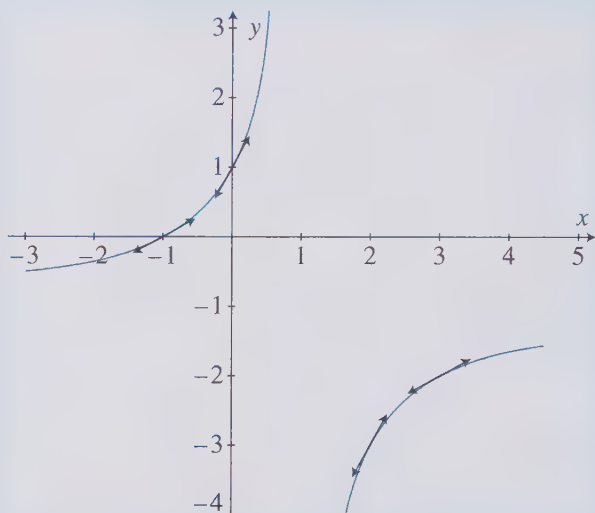
3. $f'(x)$ est strictement positif sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de f'	+		+
Variations de f			

4. $f'(-1) = \frac{2}{(1-(-1))^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $f'(0) = 2$;

$f'(2) = \frac{2}{(-1)^2} = 2$ puis $f'(3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

5.



8 1. On lit sur le graphique :

$g(1) = 2$ car $\mathcal{C}_g$ passe le point de coordonnées $(1; 2)$.

$g'(4) = 0$ car $\mathcal{C}_g$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 4.

2. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = a \times 1 + 0 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = a + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 1 + b + \sqrt{1} = 2 \\ a + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ a + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + 1 = 0. \end{cases}$$

3. Résolvons le système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\ a = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

On a donc :

$$a = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad b = \frac{5}{4}.$$

g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4} + \sqrt{x}$.

g' est définie sur $]0; +\infty[$ par $g'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. • g est croissante sur $[0; 4]$, donc g' est positive sur $]0; 4]$.

g semble être décroissante sur $[4; +\infty[$. Dans ce cas, g' serait négative sur $[4; +\infty[$.

• Soit $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} < 4$$

car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2$$

$$\Leftrightarrow x < 4$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4 = 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 4.$$

Finalement, $g'(x) > 0$ si, et seulement si, $x \in]0; 4[$;

$g'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 4$;

$g'(x) < 0$ si, et seulement si, $x \in]4; +\infty[$.

9 1. Pour tout $t \in [0; t_F]$, $\begin{cases} x'(t) = 7\sqrt{3} \\ y'(t) = -9,8t + 7 \end{cases}$.

2. • $x_S = 5\sqrt{3} = x(t_S)$ avec $x(t) = 7\sqrt{3}t$ d'où $7\sqrt{3}t_S = 5\sqrt{3}$ soit $t_S = \frac{5}{7}$.

• $y'(t_S) = -9,8 \times \frac{5}{7} + 7 = -7 + 7 = 0$ et $x'(t_S) = 7\sqrt{3}$.

• Donc $\vec{v}(t_S)(7\sqrt{3}; 0)$.

3. a. $x_F = 12 + 5\sqrt{3} = x(t_F)$ soit $12 + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}t_F$, d'où :

$$t_F = \frac{12 + 5\sqrt{3}}{7\sqrt{3}} = \frac{4 \times \sqrt{3}^2 + 5 \times \sqrt{3}}{7 \times \sqrt{3}}$$

$$t_F = \frac{4\sqrt{3} + 5}{7}.$$

b. • $y'(t_F) = -9,8 \times \frac{4\sqrt{3} + 5}{7} + 7$

$$= -1,4(4\sqrt{3} + 5) + 7$$

$$= -5,6 \times \sqrt{3} - 7 + 7$$

$$= -5,6\sqrt{3}.$$

• Donc $\vec{v}(t_F)(7\sqrt{3}; -5,6\sqrt{3})$.

$$c. \|\vec{v}(t_F)\|^2 = (7\sqrt{3})^2 + (-5,6\sqrt{3})^2 = 147 + 94,08$$

$$\|\vec{v}(t_F)\|^2 = 241,08 \text{ donc :}$$

$$\|\vec{v}(t_F)\| = \sqrt{241,08} \approx 15,53.$$

Le poids touche donc le sol avec une vitesse d'environ $15,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

10 1. Soit h un réel non nul, proche de zéro.

$$a. \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{4}{5+2h} - \frac{4}{5}}{h} = \frac{-8h}{(5+2h) \times 5} \times \frac{1}{h} = \frac{-8}{5(5+2h)}.$$

$$b. \lim_{h \rightarrow 0} (5+2h) = 5, \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8}{5(5+2h)} = -\frac{8}{5} \times \frac{1}{5},$$

donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = -\frac{8}{25}$.

2. Soit h un réel non nul.

$$\begin{aligned} a. \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \frac{\sqrt{h^2+1} - 1}{h} = \frac{(\sqrt{h^2+1} - 1)(\sqrt{h^2+1} + 1)}{h \times (\sqrt{h^2+1} + 1)} \\ &= \frac{(h^2+1) - 1}{h \times (\sqrt{h^2+1} + 1)} \\ &= \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{h}{\sqrt{h^2+1} + 1}. \end{aligned}$$

$$b. \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h^2+1} = 1, \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{h^2+1} + 1} = \frac{0}{2} = 0,$$

donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

11 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $f'(x) = 2x + a$.

$$\left\{ \begin{array}{l} P(-2; 5) \in \mathcal{C}_f. \end{array} \right.$$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $-\frac{2}{3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) = 5 \\ f'(1) = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2)^2 + a \times (-2) + b = 5 \\ 2 \times 1 + a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 1 \\ a = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left(b = -\frac{13}{3} \text{ et } a = -\frac{8}{3} \right).$$

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{13}{3}$.

12 1. Pour tout x réel, $f'(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

2. $f(0) = 1$ et $f'(0) = -6$, donc l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :

$$y = 1 - 6(x - 0)$$

$$y = 1 - 6x.$$

3. $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse a si, et seulement si, $f'(a) = 0$.

$$\text{Or } f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 6 = 0.$$

$\Delta = 16 + 48 = 64$. L'équation $2a^2 + 4a - 6 = 0$ admet deux solutions :

$$\frac{-4+8}{4} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{-4-8}{4} = -3.$$

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses 1 et -3.

4. (d) a pour coefficient directeur 1, donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a , parallèle à (d) si, et seulement si, $f'(a) = 1$.

$$\text{Or } f'(a) = 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 6 = 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 7 = 0.$$

$$\Delta = 16 + 56 = 72 > 0 ; \sqrt{\Delta} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

L'équation $2a^2 + 4a - 7 = 0$ admet deux solutions :

$$\frac{-4+6\sqrt{2}}{4} = -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-4-6\sqrt{2}}{4} = -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Aux points d'abscisses $-1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $-1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à (d) .

13 1. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = a \times 1 + 0 + c \times \frac{-1}{x^2}$ soit :

$$f'(x) = a - \frac{c}{x^2}.$$

$$2. a. \begin{cases} f(2) = -3 \\ f'(2) = 0 \\ f'(1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + \frac{c}{2} = -3 \\ a - \frac{c}{2^2} = 0 \\ a - \frac{c}{1^2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = -6 \\ 4a - c = 0 \\ a - c = 3 \end{cases}$$

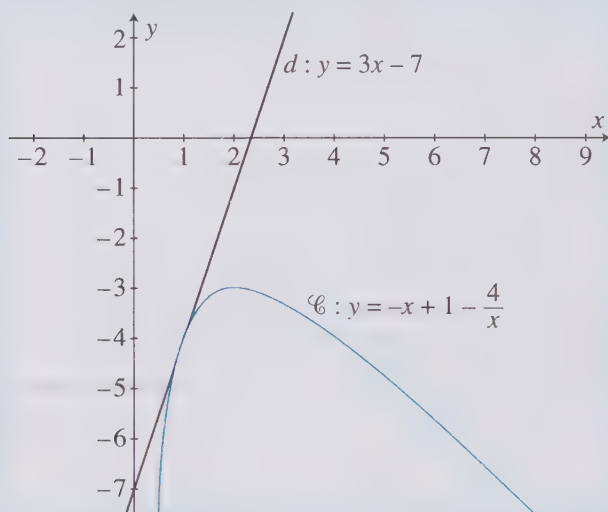


Le troisième système se résout en multipliant la première et la deuxième équation par 2, et ceux de la seconde équation par 4.

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \begin{cases} 4a + 2b + c = -6 \\ 4a - c = 0 \\ a - c = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = -6 \\ 4a - (a - 3) = 0 \\ (a - 3) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = -6 \\ 3a = -3 \\ c = a - 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = -6 \\ a = -1 \\ c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 2b - 4 = -6 \\ a = -1 \\ c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \\ c = -4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

c. Donc, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x}$.

On obtient sur logiciel ou calculatrice la courbe suivante. Il semble que la fonction représentée corresponde au tableau de variations du 1., et que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 ait bien pour coefficient directeur 3



14 1. a. L'aire de la section intérieure est l'aire du rectangle ABCD, égale donc à $\lambda \times h$.

$$\text{D'où } \lambda \times h = 0,5 \text{ soit } \lambda = \frac{0,5}{h} = \frac{1}{2h}$$

$$\text{Donc } \lambda = \frac{1}{2h}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } g(h) &= AB + BC + CD \\
 &= h + \lambda + h = 2h + \lambda.
 \end{aligned}$$

D'après 1. a. :

$$g(h) = 2h + \frac{1}{2h}.$$

$$\text{c. Pour tout } h > 0, g'(h) = 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{-1}{h^2} = 2 - \frac{1}{2h^2},$$

$$\text{d'où } g'(h) = \frac{4h^2 - 1}{2h^2} = \frac{(2h)^2 - 1^2}{2h^2} = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}$$

$$g'(h) = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}.$$

d. $2h+1$ et $2h^2$ sont strictement positifs sur $]0; +\infty[$.

$g'(h)$ est donc du signe de $2h-1$ sur $]0; +\infty[$.

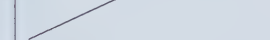
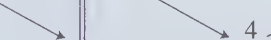
h	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2h-1$	-	0	+
Signe de $g'(h)$	-	0	+
Variations de g			

2. Le frottement est minimal lorsque $h = \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, $\lambda = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}}$ soit $\lambda = 1$.

15 1. Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)x}{(x-1)^2}$.

2.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$(x-2)$	-	-	-	0	+	
x	-	0	+	+	+	
$(x-1)^2$	+	+	0	+	+	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	-	0	+
Variations de f						

3. Soit x un réel, $x \neq 1$, alors :

$$x+1 + \frac{1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)-1}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1} = f(x) :$$

$$x+1 + \frac{1}{x-1} = f(x).$$

4. Pour tout $x \neq 1$, $f(x) - g(x) = \left(x+1 + \frac{1}{x-1}\right) - (x+1) = \frac{1}{x-1}$.

Le numérateur étant positif, $f(x) - g(x)$ est du même signe que $x-1$.

D'où :

$$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 ;$$

$$f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

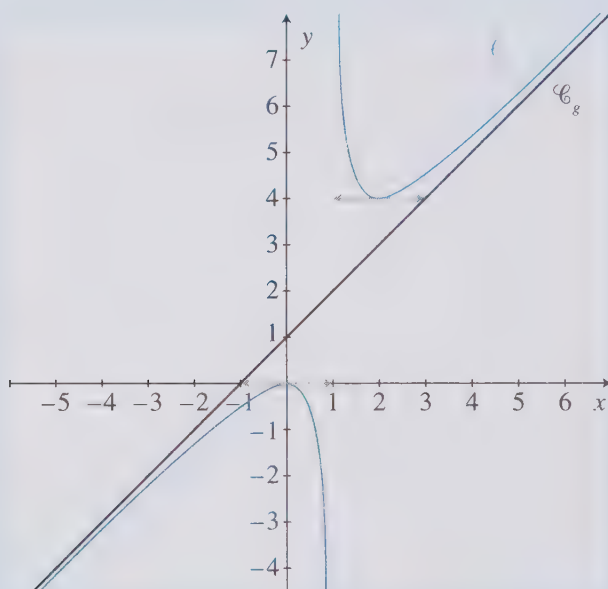
Par conséquent :

$\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$;

$\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

▲ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$: impossible car f n'est pas définie en 1.

5.



16 Partie A

1. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto x^3 + 2x^2$ et $v : x \mapsto (x+1)^2$.

Pour tout $x \neq -1$, $v(x) = x^2 + 2x + 1$, donc $v'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$ d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 4x)(x+1)^2 - (x^3 + 2x^2) \times 2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(3x^2 + 4x)(x+1) - (x^3 + 2x^2) \times 2}{(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x+1)^3} \\ f'(x) &= \frac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

2. $\Delta = 9 - 16 < 0$, donc $x^2 + 3x + 4$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Le coefficient de x^2 est strictement positif, donc $x^2 + 3x + 4$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.

▲ Voir les propriétés de la fonction cube dans le chapitre 1.

La fonction cube $\begin{cases} \text{est strictement négative sur }]-\infty; 0[\\ \text{s'annule en } 0 \\ \text{est strictement positive sur }]0; +\infty[\end{cases}$, donc :

$$(x+1)^3 < 0 \Leftrightarrow x+1 \in]-\infty; 0[\Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1;$$

$$(x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1;$$

$$(x+1)^3 > 0 \Leftrightarrow x+1 \in]0; +\infty[\Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

4.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x				
$(x^2 + 3x + 4)$	+	+	+	+
$(x+1)^3$	-	0	+	+
Signe de $f'(x)$	+	-	0	+
Variations de f				

Partie B : Construction de la courbe représentative de f

1. • $f(-2) = \frac{-8+8}{1} = 0$ et $f'(-2) = \frac{(-2)(4-6+4)}{-1} = -4$ donc :

$T_1 : y = 0 + 4(x+2)$ soit $T_1 : y = 4x + 8$.

• $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2} \times \frac{11}{4}}{\frac{1}{8}} = -11$ donc :

$T_2 : y = \frac{3}{2} - 11\left(x + \frac{1}{2}\right)$ soit $T_2 : y = -11x - 4$.

• $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $T_3 : y = 0$.

2. $f(x) - x = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} - \frac{x(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2}$.

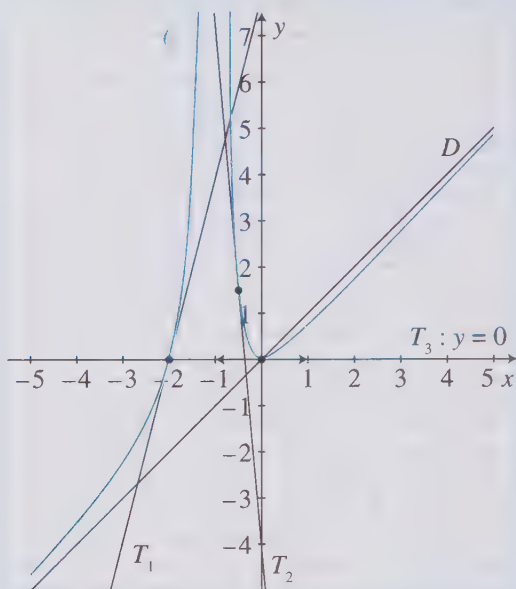
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$-x$	+	+	0	-
$(x+1)^2$	+	0	+	+
Signe de $f(x) - x$	+	+	0	-

$\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de D sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$;

$\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de D sur $]0; +\infty[$;

$\mathcal{C}_f$ et D se coupent au point de coordonnées $(0; 0)$.

3.



17 1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, car elle est de la forme x^n .
 $f'(x) = 3x^2$. Or, un carré est toujours strictement positif, sauf pour $x = 0$, donc la fonction dérivée est strictement positive, sauf en une valeur, la **fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

2. $f(0) = 0^3 = 0$, donc l'équation a au moins une solution. De plus, si $x < 0$, alors comme f est strictement croissante, elle conserve l'ordre, donc $f(x) < 0$. De même, si $x > 0$, alors $f(x) > 0$.

Finalement, $x = 0$ est la seule solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.

3. Si x_1 et x_2 sont deux solutions différentes de l'équation $f(x) = k$, telles que $x_1 < x_2$, alors comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f(x_1) < f(x_2)$, donc $k < k$, ce qui est absurde, donc il ne peut y avoir qu'une seule solution.

On pouvait aussi tenir un raisonnement similaire au 2.

4. La fonction g se déduit de la fonction f par $g(x) = f(x) - k$, donc f et g ont les mêmes variations sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que **g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .

5. Si $\sqrt[3]{k} > 0$, alors comme g est croissante, $g(\sqrt[3]{k}) > g(0)$ soit $0 > -k$ ou encore

$0 < k$, donc $\sqrt[3]{k}$ et k sont tous deux positifs.

Et si $\sqrt[3]{k} < 0$, alors comme g est croissante, $g(\sqrt[3]{k}) < g(0)$ soit $0 < -k$ ou encore

$0 > k$, donc $\sqrt[3]{k}$ et k sont tous deux négatifs.

Donc $\sqrt[3]{k}$ et k sont de même signe.

$$18. 1. \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

$$\text{Donc } \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1 & \text{si } h > 0 \\ -\frac{h}{h} = -1 & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

2. Le quotient $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$, il n'admet donc pas de valeur limite quand h tend vers 0.

f n'est donc pas dérivable en 0.



On dit que le quotient admet une limite à droite (1) et une limite à gauche (-1).

19. 1. Soit h un réel proche de 0

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times g(a+h) + f(a) \times \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\ = \frac{f(a+h) \times g(a+h) - f(a) \times g(a+h) + f(a) \times g(a+h) - f(a) \times g(a)}{h} \\ = \frac{f(a+h) \times g(a+h) - f(a) \times g(a)}{h}. \end{aligned}$$

$$\text{b. } \lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a);$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = g'(a), \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times g(a+h) + f(a) \times \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\ = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a), \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f \times g)(a)}{h} = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a),$$

$(f \times g)$ est donc dérivable en a et :

$$(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a).$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ a. } \frac{1}{g(a) \times g(a+h)} \times \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times g(a) - f(a) \times \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \right] \\ = \frac{1}{g(a) \times g(a+h)} \times \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(a+h)}{h} \\ = \frac{1}{h} \times \left(\frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a)g(a+h)} \right) \\ = \frac{1}{h} \times \left(\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right) \\ = \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h}. \end{aligned}$$

b. $\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a)$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(a) \times g(a+h)} = \frac{1}{g(a)^2}$.

De plus, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a)$ donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(a) \times g(a+h)} \times \left[\frac{f(a+h)}{h} \times g(a) - f(a) \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right] = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g(a)^2}.$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{h} = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g(a)^2}$.

$\left(\frac{f}{g}\right)$ est dérivable en a et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g(a)^2}.$$

20 Partie A

1. $T : y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

2. $M \in \mathcal{C}_f$, donc M a pour coordonnées $(a+h; f(a+h))$.

$N \in T$ donc $y_N = f(a) + f'(a) \times ((a+h) - a) = f(a) + f'(a)h$.

D'où $N(a+h; f(a) + hf'(a))$.

Ensuite, $MN = \|MN\|$ avec $MN(t) : f(a) + hf'(a) - f(a+h)$.

Donc $MN = \sqrt{0^2 + (f(a) + hf'(a) - f(a+h))^2}$.

$$MN = |f(a) + hf'(a) - f(a+h)|.$$

3. Par définition de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a , lorsque h est proche de 0, le point M est proche du point N . Ces points ayant même abscisse, il en résulte que $y_M \approx y_N$, c'est-à-dire que :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Partie B

1. a. $f(1) = \sqrt{1} = 1$. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(1) = \frac{1}{2}$.

b. Pour h proche de zéro, $f(1+h) \approx f(1) + hf'(1)$, soit $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$.

c. $1,001 = 1 + h$ avec $h = 0,001$ proche de zéro.

Donc $\sqrt{1,001} \approx 1 + \frac{0,001}{2}$, soit :

$$\sqrt{1,001} \approx 0,0005.$$

2. $\frac{1}{2+h} = g(2+h)$, g désignant la fonction inverse.

Alors $g(2) = \frac{1}{2}$ et, pour tout $x \neq 0$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ d'où $g'(2) = -\frac{1}{4}$.

Pour h proche de 0, $g(2+h) \approx g(2) + hg'(2)$.

$$\text{Or } g(2) + hg'(2) = \frac{1}{2} + h \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{h}{4}.$$

Donc, pour h proche de 0 :

$$\frac{1}{2+h} \approx \frac{1}{2} - \frac{h}{4}.$$

1,98 = 1 + h avec $h = -0,02$.

-0,02 étant suffisamment proche de 0 :

$$\frac{1}{1,98} \approx \frac{1}{2} - \frac{-0,02}{2}.$$

Or $\frac{1}{2} - \frac{-0,02}{2} = 0,5 + 0,01 = 0,51$, donc :

$$\frac{1}{1,98} \approx 0,51.$$

21 1. Soit a un réel. Pour h proche de zéro, $f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$.

Mais puisque $f = f'$, $f'(a) = f(a)$, d'où :

$$f(a) + hf'(a) = f(a) + hf(a) = f(a) \times (1+h).$$

On a donc bien, pour h proche de zéro :

$$f(a+h) \approx (1+h)f(a).$$

2. a. • Le point M_3 a pour coordonnées $x_3 = x_2 + h = 0,6$ et y_3 .

L'approximation affine pour $a = x_2$ nous donne une valeur approchée de $f(x_3)$ puisque :

$$f(x_3) = f(x_2 + h) \approx (1+h) \times f(x_2) \approx (1+h) \times y_2.$$

On pose donc $y_3 = (1+h) \times y_2 = (1+0,2) \times 1,44$ d'où :

$$y_3 = 1,728.$$

• Le point M_4 a pour coordonnées $x_4 = x_3 + h = 0,8$ et y_4 .

L'approximation affine pour $a = x_3$ nous donne une valeur approchée de $f(x_4)$ puisque :

$$f(x_4) = f(x_3 + h) \approx (1+h) \times f(x_3) \approx (1+h) \times y_3.$$

On pose donc $y_4 = (1+h) y_3 = (1+0,2) \times 1,728$ d'où :

$$y_4 = 2,0736.$$

b.

VARIABLES

h EST_DU_TYPE NOMBRE

x EST_DU_TYPE NOMBRE

y EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

LIRE h

x PREND_LA_VALEUR 0

y PREND_LA_VALEUR 1

TANT_QUE (x<4) FAIRE

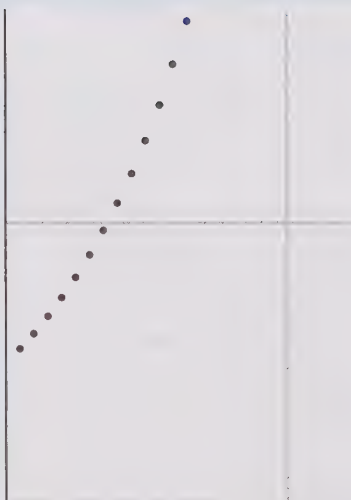
DEBUT_TANT_QUE

x PREND_LA_VALEUR x+h

y PREND_LA_VALEUR y*(1+h)

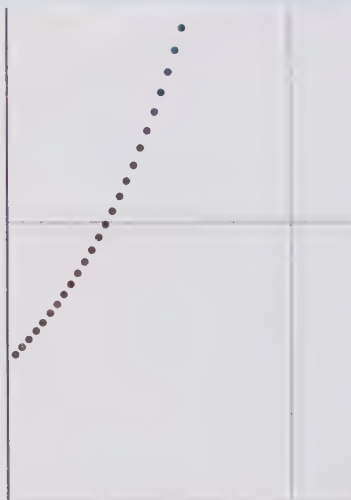
TRACER_POINT (x,y)

FIN_TANT_QUE

FIN_ALGORITHME

Xmin : 0 ; Xmax : 5 ; Ymin : 0 ; Ymax : 5

h = 0,1



Xmin : 0 ; Xmax : 5 ; Ymin : 0 ; Ymax : 5

h = 0,05

c.

VARIABLE

h EST_DU_TYPE NOMBRE

x EST_DU_TYPE NOMBRE

y EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

LIRE h

x PREND_LA_VALEUR 0

y PREND_LA_VALEUR 1

TANT_QUE (x<5) FAIRE

DEBUT_TANT_QUE

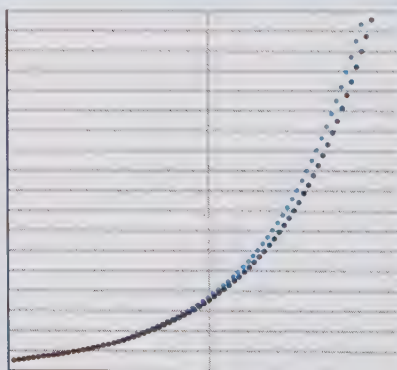
x PREND_LA_VALEUR x+h

y PREND_LA_VALEUR y*(1+h)

TRACER_POINT (x,y)

TRACER_POINT (x,exp(x))

FIN_TANT_QUE

FIN_ALGORITHME

Xmin : 0 ; Xmax : 5 ; Ymin : 0 ; Ymax : 50 ;

GradX : 2 ; GradY : 2

L'algorithme ci-avant a permis de visualiser, en bleu les points obtenus par la méthode d'Euler, et en noir les points de la courbe de la fonction exponentielle. On voit que l'approximation est de bonne qualité, bien que les courbes s'éloignent lorsque x augmente.

[22] 1. a. f est dérivable sur $]0; 1]$.

Pour tout $x \in]0; 1]$, $f'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

En particulier, $f'(1) = 0$.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = f(1) + f'(1) \times (x - 1) = 0 + 0 \times (x - 1),$$

$$y = 0.$$

L'axe des abscisses est donc tangent à la courbe au point d'abscisse 1.

b. $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{(h - 2\sqrt{h} + 1) - 1}{h} = 1 - \frac{2}{\sqrt{h}}.$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{h}} = +\infty \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{h}}\right) = -\infty.$$

$\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ admet une limite infinie quand h tend vers 0, ce qui signifie que la courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

L'axe des ordonnées est donc bien tangent à la courbe au point d'abscisse 0.

2. a. Si $\mathcal{C}$ est un arc de cercle, alors ses tangentes sont orthogonales aux rayons du cercle. Le centre Ω du cercle est alors à l'intersection des droites d'équation $x = 1$ et $y = 1$ (perpendiculaires aux axes).

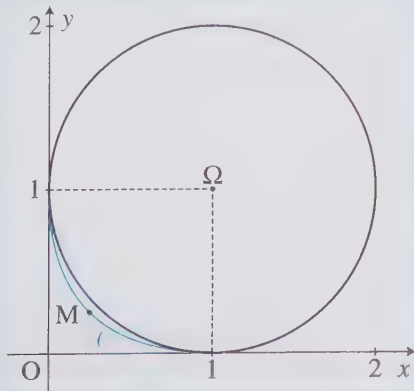
Donc Ω a pour coordonnées $(1; 1)$ et le rayon du cercle vaut $\Omega A = 1$.

b. $M\left(\frac{1}{4}; f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ avec $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 2 \times \sqrt{\frac{1}{4}} + 1 = \frac{1}{4}.$

$$\Omega M = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \neq 1, \text{ donc } M \text{ n'appartient}$$

pas au cercle de centre Ω et de rayon 1.

Donc $\mathcal{C}$ n'est pas un arc de cercle.



23 Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{4 \times (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-4x}{x^2 + 1} = -f(x)$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$.

2. $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ soit $M'(-x; -f(x))$.

Le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x + (-x)}{2}, \frac{f(x) + (-f(x))}{2} \right) = (0; 0).$$

O est donc bien le milieu de $[MM']$.

3. La courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Partie B

1. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 4x \quad \text{et} \quad v(x) = x^2 + 1$$

Alors $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 2x$.

Pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{4 \times (x^2 + 1) - 4x \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{4(-x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 4 \times \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

2. 1^{re} méthode : $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	0	-
$1+x$	-	0	+	+
Signe de $1-x^2$ $= (1-x)(1+x)$	-	0	+	-

2^e méthode : $1 - x^2 = -x^2 + 1$.

$$\Delta = 0^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 > 0$$

Les racines du trinôme $1 - x^2$ sont :

$$x_1 = \frac{0 - 2}{2 \times (-1)} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-0 + 2}{2 \times (-1)} = -1.$$

1. x^2 est du signe de $a(-1)$ à l'extérieur des racines, d'où le tableau :

x	$-$	0	1	$+$	$+$
Signe de $f''(x)$		0	$+$	0	

4. $\frac{4}{(x^2+1)^2}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc, $f'(x)$ est du signe de $1-x^2$.

x	$-$	0	1	$+$	$+$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Signe de $f''(x)$		0	$+$	0	
Monotonie de f	↘	↗	↗	↘	↘

• $f'(0) = \frac{4}{1} = 4$, donc la pente de la tangente en $\mathcal{E}_1(0)$ est égale à 4.

• La tangente à $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_1(0)$ est une droite passant par l'origine $\mathcal{O}$ du repère.

Elle a une pente m telle que $y = mx$ avec $m = f'(0) = 4$ / $\frac{1}{(0+1)^2} = 4$.

La tangente en $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{O}$ est donc la droite $\Delta : y = 4x$.

5. Seules les courbes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont symétriques par rapport à l'origine $\mathcal{O}$ du repère.

La tangente à $\mathcal{E}_2$ au point $\mathcal{C}$ a une pente négative, ce qui est contraire avec le fait que $f'(0) = 4$.

Donc la courbe représentative de f est $\mathcal{E}_2$.

La droite Δ passe par les points $\mathcal{C}(0, 0)$, $\mathcal{A}(0, 5; 2)$ et $\mathcal{B}(-1; -4)$.

24. Partie A

1. $V = (\text{aire de la base}) \times h$.

$$V = x^2 h$$

2. $S = (\text{aire de la base}) = 4xh$ (ch base l'aire d'un rectangle latéral).

$$V = x^2 + 4xh$$

3. a. De la question 1., on déduit :

$$h = \frac{V}{x^2}$$

b. En remplaçant h dans l'expression de S , on obtient :

$$S(x) = x^2 + 4x \times \frac{V_0}{x^2}$$

$$S(x) = x^2 + \frac{4V_0}{x}$$

c. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et sa dérivée est :

$$S'(x) = 2x + 4V_0 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{2x^3 - 4V_0}{x^2}.$$

x^2 étant strictement positif sur $\mathbb{R}^{+*}$, le signe de la dérivée est le même que celui de $2x^3 - 4V_0$. Or :

$$2x^3 - 4V_0 > 0 \Leftrightarrow 2(x^3 - 2V_0) \Leftrightarrow x^3 - 2V_0 > 0.$$

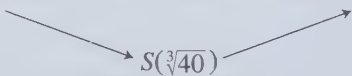
D'après l'exercice 17 la fonction $f(x) = x^3 - 2V_0$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $f(x) = 0$ a une unique solution $\sqrt[3]{2V_0}$.

On en déduit que : $x^3 - 2V_0 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{2V_0}$.

Donc S est décroissante sur $]0; \sqrt[3]{2V_0}]$, puis croissante sur $[\sqrt[3]{2V_0}; +\infty[$.

4. a. Pour $V_0 = 20$, $\sqrt[3]{2V_0} = \sqrt[3]{2 \times 20} = \sqrt[3]{40}$.

D'où les variations de S :

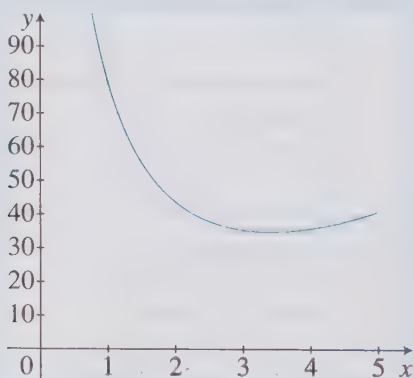
x	0	$\sqrt[3]{40}$	$+\infty$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$			

b. La valeur de x minimisant la surface est donc $\sqrt[3]{40} \approx 3,42$ dm, ce qui correspond à une surface :

$$S(x) = x^2 + 4 \frac{V_0}{x} = (\sqrt[3]{40})^2 + \frac{4 \times 20}{\sqrt[3]{40}} \approx \mathbf{35,09 \text{ dm}^2}.$$

On a alors $h = \frac{V_0}{x^2} = \frac{20}{(\sqrt[3]{40})^2} \approx \mathbf{1,71 \text{ dm}}$.

c. On représente la fonction $S : x \mapsto S(x) = x^2 + \frac{80}{x}$ sur $]0; 5]$.



d. Par lecture graphique, la surface est inférieure à 40 dm^2 pour $x \in [2,3; 4,8]$ (en dm^2).

Partie B

$$V = \text{aire de la base} \times h = \pi r^2 h \text{ donc } h = \frac{V_0}{\pi r^2}.$$

$$S = (\text{aire de la base}) + (\text{aire du rectangle latéral})$$

$$= \pi r^2 + 2\pi r \times h$$

$$= \pi r^2 + 2\pi r \times \frac{V_0}{\pi r^2}$$

$$= \pi r^2 + \frac{2V_0}{r}.$$

Cette fonction de la variable r est définie pour tout $r \in \mathbb{R}^{+*}$, elle est dérivable sur cet ensemble, et :

$$S'(r) = \pi \times 2r + 2V_0 \times \left(\frac{-1}{r^2}\right) = \frac{2\pi r^3 - 2V_0}{r^2}$$

r^2 étant toujours strictement positif sur $\mathbb{R}^{+*}$, le signe de S' est celui de

$$2\pi r^3 - 2V_0 = 2\pi \left(r^3 - \frac{V_0}{\pi}\right), \text{ c'est-à-dire strictement positif pour } r > \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}, \text{ et stric-}$$

$$\text{tement négatif pour } r < \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}.$$

Le minimum de S est donc atteint pour :

$$r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{20}{\pi}} \approx 1,85 \text{ dm},$$

$$\text{et } h = \frac{V_0}{\pi r} = \frac{20}{\pi \times \left(\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}\right)^2}$$

soit $h \approx 1,85 \text{ dm}$.

Alors la surface est :

$$S = \pi r^2 + \frac{2V_0}{r} = \pi \times \left(\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}\right)^2 + 2 \times \frac{20}{\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}} \approx 32,37 \text{ dm}^2.$$

Partie C

Finalement, pour obtenir une boîte contenant 20 L telle que la quantité de plastique soit minimale, il vaut mieux un **cylindre de hauteur et de rayon environ égaux à 1,85 cm**.

25 Partie A

1. Les valeurs interdites pour le quotient $\frac{x^4}{x^2-1}$ sont celles qui annulent le dénomi-

nateur. Or : $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

Donc $D_f = \mathbb{R}$ privé de $\{-1; 1\}$ soit :

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[.$$

2. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = x^4 \quad \text{et} \quad v(x) = x^2 - 1.$$

Alors $u'(x) = 4x^3$ et $v'(x) = 2x$.

Donc, pour tout $x \notin \{-1; 1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3 \times (x^2 - 1) - x^4 \times 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^2(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$+\infty$
$x - \sqrt{2}$		-	-	0	+	
$x + \sqrt{2}$		-	0	-	-	+
$x^2 - 2$		+	0	-	0	+

• Pour tout x réel, $(x^2 - 1)^2 \geq 0$.

De plus :

$$(x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ou } x = 1).$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
x^3	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 2$	+	0	-	-	-	0	+
$(x^2 - 1)^2$	+	+	0	+	+	+	+
Signe de $f'(x)$	-	0	+	+	0	-	+
Variations de f							

4. La courbe représentative de f est $\mathcal{C}_1$.

Partie B

1. a. • Dans le triangle BOH, rectangle en H :

$$\widehat{B} + \widehat{O} + \widehat{H} = 180^\circ \text{ soit } \widehat{BOH} = 180^\circ - \widehat{OBH} - 90^\circ = 90^\circ - \widehat{OBH}$$

• Dans le triangle ABC, rectangle en A :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \text{ soit } \widehat{BCA} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ABC}.$$

• Or, $O \in [BA]$ et $H \in [BC]$, donc $\widehat{OBH} = \widehat{ABC}$ (il s'agit du même angle). Donc :

$$\widehat{BOH} = 90^\circ - \widehat{OBH}$$

$$= 90^\circ - \widehat{ABC}.$$

$$\widehat{BOH} = \widehat{BCA}.$$

b. • Dans le triangle BOH, $\tan \alpha = \tan \widehat{BOH} = \frac{BH}{OH}$.• Dans le triangle ABC, $\tan \alpha = \tan \widehat{BCA} = \frac{BA}{AC}$.• D'où $\frac{BH}{OH} = \frac{BA}{AC}$, qui équivaut à $BH \times AC = BA \times OH$.

Puis, en élevant au carré les deux membres de l'égalité :

$$BH^2 \times AC^2 = BA^2 \times OH^2.$$

c. On a donc $BH^2 \times x^2 = h^2 \times 1^2$.

• Or, d'après le théorème de Pythagore dans BOH rectangle en H :

$$BH^2 = OB^2 - OH^2$$

$$= (h-1)^2 - 1^2$$

$$= (h^2 - 2h + 1) - 1$$

$$= h^2 - 2h.$$

• Finalement :

$$(h^2 - 2h)x^2 = h^2$$

$$h^2(x^2 - 1) - 2hx^2 = 0$$

$$h[h(x^2 - 1) - 2x^2] = 0$$

$$h = 0 \text{ ou } h(x^2 - 1) - 2x^2 = 0.$$

Or, $h \neq 0$ car $h > 2$ d'où :

$$h(x^2 - 1) = 2x^2.$$

 $x > 1$ d'où $x^2 - 1 > 0$, donc :

$$h = \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

2. a. • La base du cône est un disque de rayon $AC = x$. Son aire vaut donc πx^2 .

$$\bullet V(x) = \frac{1}{3} \times \pi x^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi x^2 \times \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

D'où, pour tout $x > 1$:

$$V(x) = \frac{2\pi}{3} \times \frac{x^4}{x^2 - 1}$$

$$V(x) = \frac{2\pi}{3} f(x).$$

b. D'après la question 3. de la **partie A**, sur $]1; +\infty[$, f admet un minimum en $x = \sqrt{2}$ qui vaut 4.

Le coefficient $\frac{2\pi}{3}$ étant strictement positif, $V = \frac{2\pi}{3} f$ est également minimal sur $]1; +\infty[$ lorsque $x = \sqrt{2}$.

c. Dans ABC rectangle en A, $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{h}$.

Lorsque $x = \sqrt{2}$:

$$h = \frac{2\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}^2 - 1} = \frac{4}{1} = 4, \text{ d'où } \tan \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Donc $\widehat{ABC} \approx 19,47^\circ$ et, à 0,1 degré près :

$$\widehat{ABC} \approx 19,5^\circ.$$

26 1. **Réponse c.** $f'(1) > 0$, car f est strictement croissante sur $[0,8; +\infty[$.

2. **Réponse b.** $f'(2) = 9$ car T passe par les points de coordonnées $(2; 1)$ et $(3; 10)$.

3. **Réponse c.** C'est une tangente horizontale dont l'équation est de la forme $y = \text{constante}$

4. **Réponse b.** $y = 9x - 17$ est l'équation de T . En tout x de $[0; 5]$ autre que 2, $f(x) > 9x - 17$ mais en $x = 2$, $f(x) = 9x - 17$.

Sur $[0; 5]$, $f(x) \leq 9x - 17 \Leftrightarrow x = 2$.

5. **Réponse d.** En effet, f est décroissante sur $[-3; 0,8]$.

27 1. $\bullet$ $AB = AC = 10$ donc B et C appartiennent au cercle de centre A et de rayon 20.

$\bullet$ B et C représentent les extrémités des branches du compas, qui sont posées sur la table. Donc B et C appartiennent à l'axe des abscisses.

Donc B et C sont les points d'intersection du cercle de centre A et de rayon 10, avec l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$).

2. a. $t \in [0; 10](=I)$.

b. $\bullet$ Dans AOC rectangle en O, le théorème de Pythagore donne :

$$OA^2 + OC^2 = AC^2$$

$$t^2 + OC^2 = 10^2.$$

D'où $OC^2 = 100 - t^2$, et comme $OC > 0$, $OC = \sqrt{100 - t^2}$.

• L'aire du triangle AOC vaut :

$$\frac{OA \times OC}{2} = \frac{t \times \sqrt{100 - t^2}}{2}.$$

• B étant le symétrique de C par rapport à la droite (OA), l'aire de ABC est le double de l'aire de AOC.

$$D'où f(t) = 2 \times \frac{t \sqrt{100 - t^2}}{2} = t \times \sqrt{100 - t^2}.$$

Mais, comme $t > 0$, $t = \sqrt{t^2}$ et :

$$f(t) = \sqrt{t^2} \times \sqrt{100 - t^2}$$

$$f(t) = \sqrt{t^2(100 - t^2)}.$$

3. a. Pour tout $t \in [0; 10]$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2t(100 - t^2) + t^2(0 - 2t) \\ &= 2t(100 - t^2) - 2t \times t^2 \\ &= 2t[(100 - t^2) - t^2] \\ &= 4t(50 - t^2). \end{aligned}$$

Puis, en appliquant la 3^e identité remarquable :

$$u'(t) = 4t(\sqrt{50} - t)(\sqrt{50} + t)$$

$$u'(t) = 4t(5\sqrt{2} - t)(5\sqrt{2} + t).$$

b.

t	0	$5\sqrt{2}$	10
$4t$	0	+	+
$5\sqrt{2} - t$		+	0
$5\sqrt{2} + t$		+	+
Signe de $u'(t)$	0	+	0
Variations de u	0	2 500	0

4. On a vu au chapitre 1 que $\sqrt{u}$ avait le même sens de variation que u d'où :

t	0	$5\sqrt{2}$	10
Variations de $f = \sqrt{u}$	0	50	0

5. • f est maximale en $t = 5\sqrt{2}$, et $f(5\sqrt{2}) = 50$.

L'aire du triangle ABC est donc maximale lorsque $OA = 5\sqrt{2}$, et vaut 50 cm^2 .

• Dans AOC rectangle en O :

$$\cos(\widehat{OAC}) = \frac{OA}{AC} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc $\widehat{OAC} = \frac{\pi}{4}$ (radians).

▲ Voir chapitre trigonométrie.

• (AO) est axe de symétrie du triangle ABC ; (AO) est donc aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

D'où $\widehat{BAC} = 2 \times \widehat{OAC} = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (radians).

L'aire du triangle ABC est donc maximale lorsque les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

28 Soit a un réel.

Notons f la fonction carré.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h.$$

$\lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a$, cette limite existe et est finie.

Donc la fonction carré est dérivable en a , et $f'(a) = 2a$.

Donc la fonction carré f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

29 Partie A

1. Pour tout $x > 2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 0 + 4 \times \frac{-1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-2)^2 - 4}{(x-2)^2} \\ &= \frac{((x-2) + 2) \times ((x-2) - 2)}{(x-2)^2} \\ f'(x) &= \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

▲ On a appliqué au numérateur la troisième identité remarquable, mais on aurait pu également développer le numérateur avant de remarquer que x est facteur commun : $(x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4 = x^2 - 4x = x(x-4)$.

2.

x	2	4	$+\infty$
x	+		+
$(x-4)$	-	0	+
$(x-2)^2$	0	+	+
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

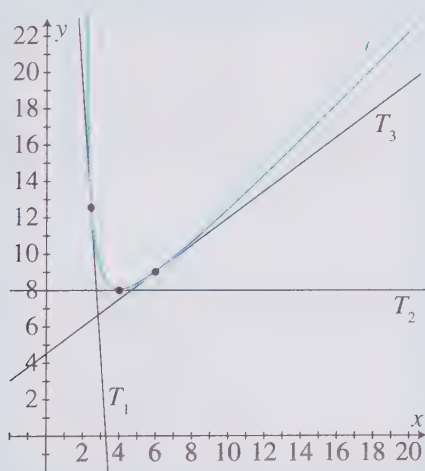
3. • $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} + 2 + \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} + 10 = \frac{25}{2}$ et $f'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{4}} = -15$,

donc $T_1 : y = \frac{25}{2} - 15\left(x - \frac{5}{2}\right)$ soit $T_1 : y = -15x + 50$.

• $f(4) = 8$ et $f'(4) = 0$, donc $T_2 : y = 8$.

• $f(6) = 9$ et $f'(6) = \frac{3}{4}$, donc $T_3 : y = 9 + \frac{3}{4}(x - 6)$ soit $T_3 : y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$.

4.



Partie B

1. Première méthode :

Comme $y_N > 0$, $y_N = ON$, d'après le théorème de Thalès dans les triangles MIP et

MON, $\frac{IP}{ON} = \frac{IM}{OM}$, soit $\frac{1}{ON} = \frac{x-2}{x}$, d'où :

$$ON = \frac{x}{x-2}.$$

Deuxième méthode :

$N(0; y_N)$. $N \in (PM)$ donc $\overline{MN}$ et $\overline{PM}$ sont colinéaires.

Puisque $\overline{MN}(-x; y_N)$ et $\overline{PM}(x-2; -1)$:

$$-x(-1) - y_N(x-2) = 0, \text{ soit } x = y_N(x-2).$$

Donc, puisque $x-2 \neq 0$, $y_N = \frac{x}{x-2}$.

▀ Cette méthode utilise les connaissances du chapitre 9.

$$2. \text{ OMN est rectangle en O donc } A(x) = \frac{OM \times ON}{2} = \frac{1}{2}xy_N = \frac{1}{2} \frac{x^2}{x-2}.$$

Il reste à vérifier que, pour tout $x > 2$, $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$:

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)+4}{x-2} = \frac{x^2-2^2+4}{x-2} = \frac{x^2}{x-2}.$$

On a donc bien, pour tout $x > 2$:

$$A(x) = \frac{1}{2}f(x).$$

3. • La fonction f admet un minimum pour $x = 4$. Comme $\frac{1}{2} > 0$, la fonction

$A : x \mapsto \frac{1}{2}f(x)$ est de même sens de variation que f . Donc la fonction A admet éga-

lement un minimum en $x = 4$ qui vaut $A(4) = \frac{1}{2}f(4) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$.

• Pour construire le triangle OMN d'aire minimale, il faut donc dans l'ordre :

– construire un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

– placer les points $P(2; 1)$ et $I(2; 0)$

– placer le point $M(4; 0)$

– construire le point N , intersection de (MP) avec l'axe des ordonnées.

Suites numériques

I GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

1. Définitions

■ Définition

Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$.

■ Notation et vocabulaire

- L'image d'un entier n par la fonction u est notée u_n au lieu de $u(n)$.
- On dit que u_n est le terme d'indice n de la suite.
- La suite est notée (u_n) .

Si le premier terme est u_0 , alors u_n est le $(n+1)$ -ième terme de la suite (u_n) .
Si le premier terme est u_1 , alors u_n est le n -ième terme de la suite.

■ Mode de génération d'une suite

Une suite est généralement définie :

- soit par une relation du type $u_n = f(n)$;
- soit par son premier terme et une **relation de récurrence** du type :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Voir le savoir-faire 1 pour le calcul des premiers termes.

2. Monotonie d'une suite

■ **Définition** : Une suite (u_n) est dite croissante si, pour tout n , $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est dite décroissante si, pour tout n , $u_n \geq u_{n+1}$.

■ **Propriété** : Soit I une partie de $\mathbb{N}$, et f une fonction définie et **monotone** sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant I . Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in I$, par $u_n = f(n)$.

Alors le sens de variation de la suite (u_n) est le même que celui de la fonction f .

Voir le savoir-faire 2 pour l'étude du sens de variation d'une suite.

II SUITES ARITHMÉTIQUES

1. Définition

■ **Définition** : Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme s'obtient en ajoutant au terme précédent un même nombre réel, appelé raison.

Une suite arithmétique (u_n) est définie par son premier terme u_0 (ou $u_1 \dots$) et par sa raison, notée r .

■ **Caractérisation des suites arithmétiques** : Une suite (u_n) est arithmétique si, et seulement si, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

2. Calcul du terme d'indice n

■ Propriété

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr$$

- Si le premier terme est u_1 , la formule devient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

- Plus généralement, pour tout $n \geq p$:

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

▲ Cette propriété permet d'obtenir directement n'importe quel terme de la suite (voir le savoir-faire 3.b.).

3. Somme des premiers termes d'une suite

■ **Résultat préalable** : Soit n un entier naturel non nul, alors :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■ **Propriété** : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Notons S_n la somme de tous les termes d'indice inférieur ou égal à n .

- Si le premier terme est u_0 , alors $S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.
- Si le premier terme est u_1 , alors $S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$.

De manière générale, la somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Voir le savoir-faire 4.

4. Monotonie d'une suite arithmétique

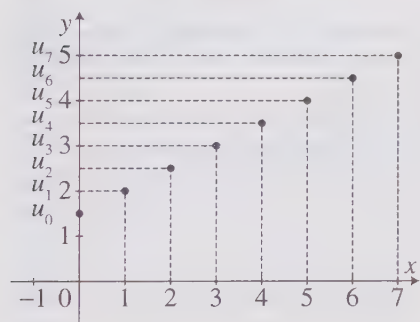
Propriété : Une suite arithmétique de raison r est :

- croissante si $r > 0$;
- décroissante si $r < 0$;
- constante si $r = 0$.

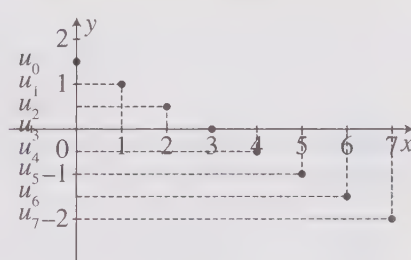
5. Allure et comportement asymptotique

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique. Alors les points de coordonnées $(n; u_n)$ sont alignés.

Suite arithmétique avec $r > 0$. Les termes de la suite tendent vers $+\infty$.



Suite arithmétique avec $r < 0$. Les termes de la suite tendent vers $-\infty$.



Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique.

- Si $r > 0$, la limite de u_n , quand n tend vers $+\infty$, vaut $+\infty$. On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty.$$

- Si $r < 0$, la limite de u_n , quand n tend vers $+\infty$, vaut $-\infty$. On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty.$$

Voir les exercices 13, 14, 15 d'introduction à la notion de limite.

III SUITES GÉOMÉTRIQUES

1. Définition

Définition : Une suite géométrique est une suite dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre, appelé raison.

Une suite géométrique (v_n) est définie par son premier terme et par sa raison, notée q .

■ **Caractérisation des suites géométriques** : Une suite (v_n) dont tous les termes sont non nuls est géométrique si, et seulement si, le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant.

2. Calcul du terme d'indice n

■ Propriété

• Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

• Si le premier terme est v_1 , la formule devient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

• Plus généralement, pour tout $n \geq p$:

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

▲ Cette propriété permet de calculer n'importe quel terme de la suite (voir savoir-faire 3.a.).

3. Somme des premiers termes d'une suite

■ **Résultat préalable** : Soit n un entier naturel non nul. Si $q \neq 1$, alors :

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

■ Propriété

Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Notons S_n la somme de tous les termes d'indice inférieur ou égal à n .

• Si le premier terme est v_0 , alors $S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

• Si le premier terme est v_1 , alors $S_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

De manière générale, la somme S de termes **consécutifs** d'une suite **géométrique** de raison $q \neq 1$ est donnée par la formule :

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

▲ Voir le savoir-faire 4.

4. Monotonie d'une suite géométrique

■ Propriété

La suite (q^n) est :

- croissante si $q > 1$;
- décroissante si $0 < q < 1$;
- constante si $q = 1$; constante à partir du rang 1 si $q = 0$.

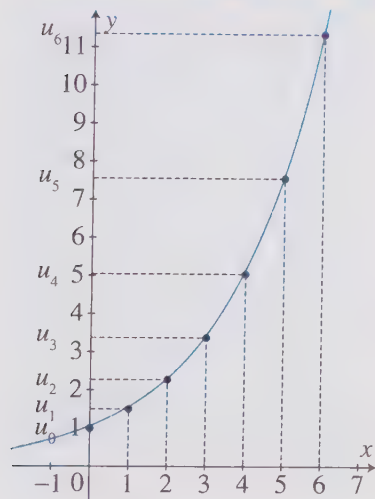
Si $q < 0$, la suite (q^n) n'est pas monotone.

■ Par conséquent, une suite géométrique de raison q est :

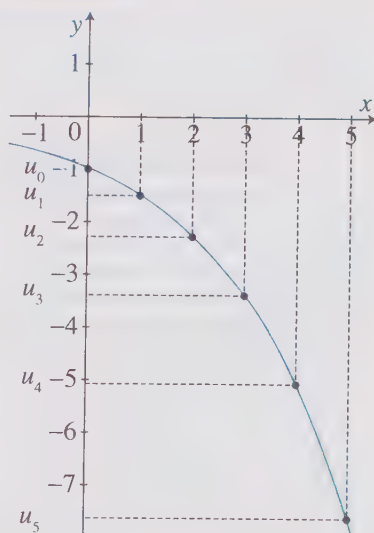
- croissante si $q > 1$ et si le premier terme est strictement positif ;
- décroissante si $q > 1$ et si le premier terme est strictement négatif ;
- décroissante si $0 < q < 1$ et si le premier terme est strictement positif ;
- croissante si $0 < q < 1$ et si le premier terme est strictement négatif ;
- constante si $q = 1$; constante à partir du rang 1 si $q = 0$.

🔍 Ce dernier résultat n'est pas à apprendre, mais se retrouve à partir de la propriété et de la formule $v_n = v_0 \times q^n$.

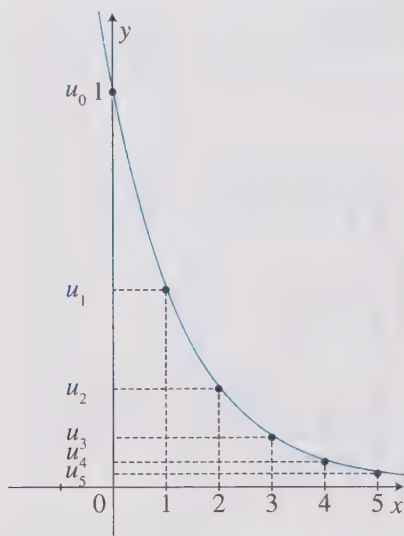
5. Allure et comportement asymptotique



Suite géométrique avec $q > 1$ et $u_0 > 0$. Les termes de la suite tendent vers $+\infty$.



Suite géométrique avec $q > 1$ et $u_0 < 0$. Les termes de la suite tendent vers 0.



Suite géométrique avec $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$. Les termes de la suite tendent vers 0.

■ **Propriété :** Soit q un réel fixé.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \end{cases}$$

• Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$.



Dans le cas où $q = 1$, la suite (q^n) est constante, égale à 1. Sa limite vaut donc 1.

■ **Propriété (règle de calcul sur les limites)**

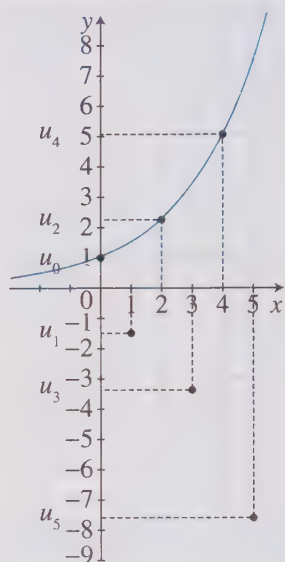
Soit q un réel fixé.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_0 \times q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } v_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } v_0 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_0 \times q^n = 0.$$



On détermine la limite d'une suite géométrique (v_n) à partir de ces deux propriétés. Voir le savoir-faire 5.



Suite géométrique avec $q < -1$ et $u_0 > 0$. La suite n'admet pas de limite.

SAVOIR-FAIRE

1. Calculer les premiers termes d'une suite

Le calcul des termes d'une suite dépend du mode de génération de la suite.

• 1^{er} cas

Si la suite est définie par une relation du type $u_n = f(n)$, on calcule successivement les images des entiers demandés.

	0	1	2	3	4
	$u_0 = f(0)$	$u_1 = f(1)$	$u_2 = f(2)$	$u_3 = f(3)$	$u_4 = f(4)$

Attention, le premier terme n'est pas forcément u_0 : la suite peut débuter avec $n \geq 1$.

• 2^e cas

Si la suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on part du premier terme donné, et on calcule de proche en proche les images par la fonction f des termes de la suite.

	u_0 est donné	u_1 obtenu	u_2 obtenu	u_3 obtenu
	$u_1 = f(u_0)$	$u_2 = f(u_1)$	$u_3 = f(u_2)$	$u_4 = f(u_3)$

EXEMPLES : Calcul des quatre premiers termes des suites suivantes.

a. $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 - u_n \end{cases}$

La suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = 2 - x$. Le premier terme est $u_0 = 3$. C'est le 2^e cas.

On part de $u_0 = 3$. Ensuite, la relation de récurrence donne :

• $n = 0$: $u_{0+1} = 2 - u_0$, c'est-à-dire $u_1 = 2 - u_0 = 2 - 3 = -1$;

• $n = 1$: $u_{1+1} = 2 - u_1$, c'est-à-dire $u_2 = 2 - u_1 = 2 - (-1) = 3$;

• $n = 2$: $u_{2+1} = 2 - u_2$, c'est-à-dire $u_3 = 2 - u_2 = 2 - 3 = -1$.

b. $(v_n) : \begin{cases} v_1 = -2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = (v_n)^2 \end{cases}$

La suite est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x^2$. Attention, le premier terme est $v_1 = -2$. C'est le 2^e cas.

On part de $v_1 = -2$. Ensuite, la relation de récurrence donne :

- $n = 2 : v_2 = v_1^2 = (-2)^2 = 4$;
 - $n = 3 : v_3 = v_2^2 = 16$;
 - $n = 3 : v_4 = v_3^2 = 256$.
- c. (w_n) : pour tout $n \geq 3$, $w_n = 2^n$.

La suite est définie par une relation du type $u_n = f(n)$, avec $f(x) = 2^x$.

C'est le 1^{er} cas.

Attention, (w_n) est définie pour tout $n \geq 3$, donc son premier terme est

$$w_3 = 2^3 = 8.$$

De même, $v_4 = 2^4 = 16$; $v_5 = 2^5 = 32$; $v_6 = 2^6 = 64$.

2. Déterminer le sens de variation d'une suite

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut :

- soit étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
- soit, si tous les termes de la suite sont strictement positifs ou si tous les termes sont strictement négatifs, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ au nombre 1 ;
- soit, si la suite est définie par $u_n = f(n)$, utiliser le sens de variation de la fonction f .

EXEMPLES :

$$\text{a. } (u_n) : \begin{cases} u_1 = 12 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Comme la relation de récurrence fait intervenir une soustraction, on va plutôt étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Or, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n} < 0$, d'où $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

$$\text{b. } (v_n) : \begin{cases} v_1 = 3 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{n}{n+1} \times v_n. \end{cases}$$

On admettra que pour tout n , $v_n > 0$.

Ici, la relation de récurrence fait intervenir un produit, on s'intéresse donc au

quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Or, pour tout $n \geq 1$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1}$ et, comme $n < n+1$, on a $\frac{n}{n+1} < 1$, d'où

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1, \text{ et donc } v_{n+1} < v_n.$$

La suite (v_n) est donc strictement décroissante.

c. (w_n) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sqrt{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(n)$, f désignant la fonction racine carrée.

f étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que **la suite (w_n) est croissante** d'après la propriété **I.2**. En fait, $n < n+1$, donc $f(n) < f(n+1)$ par croissance de f sur $\mathbb{R}^+$.

3. Calculer le terme d'indice k d'une suite arithmétique ou géométrique

Étape 1 : Déterminer si la suite est arithmétique ou géométrique.

Étape 2 : Rappeler la formule du cours donnant le terme d'indice n .

Étape 3 : Puis remplacer n par la valeur k donnée.

EXEMPLES : Calculer u_{10} pour les suites suivantes :

a. La suite (u_n) est définie par
$$\begin{cases} u_0 = 64 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{u_n}{2}. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$. On remplace le premier terme et la raison par

leurs valeurs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 64 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,

donc $u_{10} = 64 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = 2^6 \times \left(\frac{1}{2^{10}}\right) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

b. La suite (v_n) est définie par $v_1 = 18$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{3v_n - 1}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n - 1}{3} - \frac{3v_n}{3} = -\frac{1}{3}$.

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 + r \times (n-1)$, soit $v_n = 18 - \frac{1}{3} \times (n-1)$ donc :

$$v_{10} = 18 - \frac{1}{3} \times 9 = 15.$$

4. Calculer la somme des termes d'indices inférieurs ou égaux à k

Étape 1. Déterminer si la suite est arithmétique ou géométrique.

Étape 2. Si la suite est arithmétique, exprimer u_n en fonction de n et calculer u_k d'après la formule du cours.

▲ Si la suite est géométrique, c'est inutile pour calculer la somme cherchée.

Étape 3. On note S_k la somme des termes d'indices inférieurs ou égaux à k . Exprimer S_n en fonction de n avec les formules du cours, puis calculer S_k .

EXEMPLES : On veut calculer S_{10} pour les suites données dans le savoir-faire 3.

a. Étape 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$, la suite (u_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

Étape 2. Inutile

Étape 3. $q = -\frac{1}{2} \neq 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = 64 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 64 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{128}{3} \times \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

$$\text{En particulier, } S_{10} = \frac{128}{3} \times \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{11}\right) = \frac{128}{3} \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right).$$

b. Étape 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n - 1}{3} - \frac{3v_n}{3} = -\frac{1}{3}$, la suite (v_n) est donc arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

Étape 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 + r \times (n-1)$, soit $v_{10} = 18 - \frac{1}{3} \times 9 = 15$.

Étape 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = v_1 + \dots + v_n = n \times \frac{v_1 + v_n}{2}$.

$$\text{Donc en particulier, } S_{10} = 10 \times \frac{18 + 15}{2} = 5 \times 33 = \mathbf{165}.$$

5. Déterminer la limite d'une suite

Le comportement asymptotique d'une suite (u_n) peut être étudié si l'on a déterminé la nature de la suite.

1^{er} cas. Si (u_n) est une suite arithmétique, alors la limite de (u_n) dépend du signe de sa raison r :

- si $r > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$;
- si $r < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$.

2^e cas. Si (u_n) est suite géométrique, alors la limite de (u_n) dépend de la valeur de la raison q et de la valeur de son premier terme.

• **Pour $q > 1$:**

Si $u_0 > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$.

Si $u_0 < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$.

• **Pour $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.**

• **Pour $q \leq -1$, la suite (u_n) n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$.**

EXEMPLES :

a. (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 2$.

(u_n) est une suite arithmétique de raison -2 , et $-2 < 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty.$$

b. (v_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 200 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{4}$.

Or $-1 < -\frac{3}{4} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$. Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

c. (t_n) est définie par $t_1 = -3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = \frac{7}{6}t_n$.

(t_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{6}$ et de premier terme $t_1 = -3$.

Or, $\frac{7}{6} > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^n = +\infty$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3) \times \left(\frac{7}{6}\right)^n = -\infty$. Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$.

EXERCICES D'APPLICATION

1 CALCUL DE u_{50}

★ 5 min ► P. 183

Calculer le terme d'indice 50 de la suite (u_n) définie par :

a. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2n^2 + 4n + 1}$; b. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3 - \frac{2}{n}$;

c. $\begin{cases} u_0 = 7 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3 ; \end{cases}$ d. $\begin{cases} u_1 = -3 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = -2. \end{cases}$

Voir le savoir-faire 1. Pour les suites récurrentes (c. et d.), attention au premier terme.

2 SUITES ARITHMÉTIQUES

★ 10 min ► P. 183

Dans les cas suivants, (u_n) est une suite **arithmétique** définie sur $\mathbb{N}$ et de raison r ; déterminer son premier terme et sa raison, puis calculer u_{20} .

a. $u_4 = 12$; $u_9 = -8$; b. $u_{27} = 7$; $u_{10} = \frac{15}{7}$.

Exprimer u_n en fonction de u_0 et r (voir cours II.2.).

3 SUITES GÉOMÉTRIQUES

★ 5 min ► P. 184

Les suites (u_n) suivantes sont **géométriques** de raison q .

a. On donne $u_1 = 5$ et $q = -3$. Calculer u_2 et u_{15} .

b. Calculer la raison et le premier terme u_0 de la suite telle que $u_5 = -20$ et $u_9 = -80$ (il peut y a plusieurs réponses possibles). Calculer u_{24} .

c. Calculer la raison de la suite telle que $u_5 = 8$ et $u_8 = 27$. Calculer u_{15} .

Exprimer u_n en fonction de u_5 et q (voir cours III.2.).

4 MONOTONIE ?

★ 10 min ► P. 184

Déterminer le sens de variation des suites suivantes, définies pour $n \in \mathbb{N}$:

a. $u_n = 2n - n^2 + 1$; b. $u_n = -5 \times (-2)^n$;

c. $u_n = \frac{2^n}{n+1}$; d. $u_n = (n-1)^2 - n^2$.

On peut calculer $u_{n+1} - u_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, on choisira l'expression selon la formule de u_n (celle pour laquelle les calculs se simplifient le mieux) (Voir le savoir-faire 2.).

5 SOMMONS

★★★ 10 min ► P. 186

Calculer les sommes suivantes :

- a. $S_1 = 19 + 20 + 21 + \dots + 100$;
- b. $S_2 = 6 - 42 + 294 - \dots + 34\,588\,806$;
- c. $S_3 = -3 + 1 + 5 + \dots + 57$.

Il faut d'abord trouver la logique sous-tendant ces sommes (vu que certains nombres sont sous-entendus dans les pointillés) : on sait calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique (voir le savoir-faire 4.). Chercher en priorité dans ces directions.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

6 RADIOACTIVITÉ

★★ 15 min ► P. 186

Le tritium (**T** ou ^3H) est – comme le deutérium – l'un des isotopes de l'hydrogène. C'est un élément radioactif, dont la période ou demi-vie est de 12,32 ans, c'est-à-dire que la moitié de ses atomes se désintègrent naturellement en 12,32 années. Le tritium est, avec le carbone 14, l'un des deux radionucléides les plus émis dans l'environnement (en grande partie libéré dans l'air et l'eau) par les installations nucléaires en fonctionnement normal. L'usine de la Hague, pour l'année 2002, a rejeté environ 33 g de tritium sous forme liquide et 0,17 g sous forme gazeuse (source Areva NC).

On note $u_0 = 33$ g la quantité de tritium libérée en 2002 sous forme liquide, et u_n la quantité de tritium restant au bout de $n \times 12,32$ ans exprimée en grammes.

1. Donner la relation entre u_{n+1} et u_n .
2. En déduire la nature de la suite (u_n) .
3. Exprimer u_n en fonction de n .

Voir le cours III.2.

4. Au bout de combien de temps reste-t-il dans l'environnement moins de 1 g de tritium des 33 g libérés en 2002 ?
5. Pour simplifier le problème, on considère que 5,5 % du tritium se désintègre chaque année. On appelle v_n la quantité de tritium restant au bout de n années.
- a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,945$ et de premier terme $v_0 = 33$.

 Exprimer v_{n+1} à l'aide de v_n .

Il faudrait alors 62 ans pour arriver à moins de 1 g de tritium sur la quantité libérée en 2002. Supposons que l'usine rejette chaque année 33 g de tritium liquide.

- b. Quelle serait la quantité de tritium présente dans l'environnement fin 2003 sur les rejets de 2002 et 2003 ?
- c. Quelle serait la quantité de tritium présente dans l'environnement fin 2004 sur les rejets de 2002 à 2004 ?
- d. Quelle serait la quantité de tritium présente dans l'environnement fin 2064 sur les rejets de 2002 à 2064 ?

 Voir le savoir-faire 4.

7 EMPRUNT

★★★ 10 min ► P. 187

On emprunte 15 000 € aux conditions suivantes : chaque mois, on rembourse 6 % d'intérêts sur le capital restant dû, plus 500 euros de capital. On appelle u_n la n^{e} mensualité pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

 Chaque mois, le capital à rembourser diminue de 500 euros.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On pourra appeler C le capital restant avant la n^{e} mensualité et calculer $u_{n+1} - u_n$.

 Cette méthode sert à prouver qu'il s'agit d'une suite arithmétique.

3. Exprimer u_n en fonction de n , puis déterminer le rang N pour lequel le capital sera remboursé. Quel sera le montant de la dernière mensualité ?
4. Quelle est la somme remboursée au total ? Quel est le coût de cet emprunt ?

 Voir le savoir-faire 4.

8 INCONNUE

★★ 10 min ▶ p. 188

Déterminer quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique, sachant que leur somme est -2 et la somme de leurs carrés est 46 .

9 ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES

★★ 15 min ▶ p. 188

1. Le 1^{er} janvier 2010, le prix d'un objet est P_0 . Au bout de n années, le prix de cet objet est noté P_n . L'inflation est de 3% par an à partir de 2010.

a. Exprimer le prix P_1 de cet objet au bout d'un an, P_2 au bout de 2 ans, P_n au bout de n années, en fonction de n et de P_0 .

Le prix au bout de $n+1$ années est calculé à partir du prix au bout de n années.
Etablir la relation entre P_n et P_{n+1} .

b. Au bout de combien d'années le prix de l'objet aura-t-il été multiplié par 2 ? Le temps nécessaire dépend-il du prix de départ P_0 ?

On pourra utiliser le tableau de valeurs de $1,03^n$ obtenu avec la calculatrice.

2. Dans cette question, on suppose que l'inflation est de 3% une année, -3% la suivante (il y a désinflation), le cycle se reproduisant par période de 2 ans ($+3\%$ en 2010, -3% en 2011, $+3\%$ en 2012, -3% en 2013, etc.).

a. Quel est le prix de l'objet en fonction de P_0 au bout de 2 ans ? Au bout de 4 ans ? Exprimer le prix P_{2n} au bout de $2n$ années.

Déterminer la nature de la suite définie par $u_n = P_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (P_{2n}) puis montrer que $P_{2n} < P_0$. Aurait-on les mêmes résultats si les taux d'inflation et de désinflation étaient respectivement de $i\%$ et de $-i\%$ ($0 < i < 100$) ?

c. Calculer P_{2n+1} en fonction de n et de P_0 pour $i = 3$.

10 DEUX SUITES GÉOMÉTRIQUES

★★ 25 min ▶ p. 189

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$; $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = -\frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n \text{ (relation de récurrence (R)).}$$

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 . La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

Voir les savoir-faire 1. et 3.

2. Démontrer que si (v_n) et (w_n) sont deux suites vérifiant la relation (R), alors la suite $(v_n + w_n)$ vérifie également la relation (R).

▲ Exprimer v_{n+1} et v_{n+2} en fonction de v_n et de q , puis établir une équation vérifiée par q à l'aide de la relation (R).

3. Déterminer les raisons des suites géométriques (v_n) et (w_n) vérifiant la même relation de récurrence que (u_n) .

▲ Exprimer v_{n+1} et v_{n+2} en fonction de v_n et de q , puis établir une équation vérifiée par q à l'aide de la relation (R).

4. Soit (t_n) la suite définie par $t_0 = 2$; $t_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = v_n + w_n$. Exprimer t_n en fonction de n .

▲ Trouver d'abord v_0 et w_0 .

5. Démontrer que les suites (u_n) et (t_n) sont égales.

▲ On pourra raisonner par l'absurde.

6. Calculer $\sum_{i=0}^{i=10} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

▲ Utiliser le savoir-faire 4. pour les suites (v_n) et (w_n) .

11 $u_{n+1} = f(u_n)$

★★ 30 min ► P. 192

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{16}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On admet que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1 : pour cela, on raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe au moins un rang n tel que $u_n > 1$. On prend le plus petit rang N vérifiant cette inégalité, et on aboutit à une contradiction.

2. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

3. Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, représenter graphiquement sur l'intervalle $[0; 5]$, à l'échelle 4 cm pour une unité, la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et la fonction $g(x) = x$.

4. Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis son image u_1 par f sur l'axe des ordonnées. L'antécédent de u_1 par g est u_1 sur l'axe des abscisses. Lire graphiquement la valeur de u_1 .

▲ L'utilisation de $\mathcal{C}_g$, la « première bissectrice », sert à rabattre la valeur u_1 sur l'axe des abscisses.

5. Déterminer graphiquement de la même manière la valeur de u_2 , puis de u_3 .

6. Poursuivre la construction autant que possible. Qu'observe-t-on ?

▲ On verra en terminale que toute suite croissante majorée converge, c'est-à-dire que les termes de la suite s'approchent infiniment près d'une valeur qui est la limite de la suite. Les questions 1. et 2. permettent donc d'affirmer que (u_n) est une suite convergente, et que sa limite est inférieure ou égale à 1.

7. Recommencer la construction avec $u_0 = 3,5$. Que constate-t-on graphiquement ? Pourquoi la démonstration du 1. n'est-elle plus valable dans ce cas ? Démontrer que (u_n) est alors une suite strictement décroissante minorée par 1 (et donc, convergente).

12 ÉCONOMISONS

★★ | 15 min | ► p. 194

Jean reçoit de l'argent de poche chaque semaine. La première semaine, il reçoit 5 €, puis chaque semaine, la somme reçue est augmentée de 20 cents.

1. On appelle u_0 la somme reçue la première semaine : $u_0 = 5$. Démontrer que la somme reçue chaque semaine correspond aux termes successifs d'une suite arithmétique dont on donnera la raison.

2. Exprimer u_n en fonction de n , puis calculer u_{20} .

3. À partir de quand Jean touchera-t-il plus de 12 € par semaine ?

4. S'il économise tout son argent, au bout de combien de temps pourra-t-il acheter un blouson à 150 € ?

13 SOMME DES CARRÉS

DES PREMIERS ENTIERS NATURELS

★★ | 25 min | ► p. 195

On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u_n = \frac{6}{n}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{6}{n} \times \sum_{k=1}^{k=n} k^2.$$

1. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n) .

▲ Sur tableur, utiliser 4 colonnes, une pour n , une pour n^2 , une pour la somme des carrés et une dernière pour u_n .

2. Émettre une conjecture sur le type de fonction f telle que, pour tout n entier entre 1 et 50, on ait $u_n = f(n)$.
3. Déterminer les coefficients a , b et c de la fonction du second degré f .

▲ Utiliser les valeurs u_1 , u_2 et u_3 pour obtenir un système d'équations d'inconnues a , b , c

4. Vérifier qu'on retrouve bien les valeurs de la suite (u_n) .
5. À l'aide de la formule ainsi obtenue pour u_n , établir une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers strictement positifs.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

14 $u_{n+1} = f(u_n)$

★★ 35 min ► P. 196

```

VARIABLES
i EST_DU_TYPE NOMBRE
u0 EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "F1(x)=1/x+1"
  x PREND_LA_VALEUR 0.1
  POUR i ALLANT_DE 1 A 300
    DEBUT_POUR
      TRACER_SEGMENT (x.F1(x))-->(x+i/100.F1(x+i/100))
      TRACER_SEGMENT (x.x)-->(x+i/100.x+i/100)
      x PREND_LA_VALEUR x+i/100
    FIN_POUR
  LIRE u0
  LIRE N
  TRACER_POINT (u0.0)
  TRACER_SEGMENT (u0.0)-->(u0.F1(u0))
  x PREND_LA_VALEUR u0
  y PREND_LA_VALEUR F1(x)
  POUR i ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
      TRACER_SEGMENT (x.y)-->(y.y)
      x PREND_LA_VALEUR y
      y PREND_LA_VALEUR F1(x)
      TRACER_SEGMENT (x.x)-->(x.y)
    FIN_POUR
  TRACER_POINT (x.0)
  FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
  
```

On décide d'utiliser Algobox (logiciel d'algorithmique) pour recommencer la construction de l'exercice 11. On s'intéresse ici à la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

par $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. On considère les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On admet qu'elles sont bien définies quelles que soit la valeur de $u_0 > 0$. Sur Algobox, on écrit le programme précédent.

1. À quoi sert la première boucle « pour i allant de 1 à 300 » ?

 Sur Algobox, les coordonnées d'un point s'écrivent $(x \cdot y)$.

2. Que représente N dans cet algorithme ?

3. Dans la deuxième boucle « pour » :

a. Quel lien y a-t-il entre i et les termes de la suite (u_n) ?

b. On demande de tracer le point de coordonnées $(x; 0)$. Que représente ce point ?

4. Écrire ce programme, en choisissant pour échelle du repère :

Xmin : -0,2 ; Xmax : 3 ; Ymin : -0,2 ; Ymax : 2,5 ; Xgrad : 0,2 ; Ygrad : 0,2.

 Penser à compléter la formule de la fonction F_i dans l'onglet « Utiliser une fonction numérique ». Le réglage de l'échelle se fait dans l'onglet « Dessiner dans un repère ».

Puis tester le programme avec comme premier terme de la suite $u_0 = 0,8$ et comme nombre de termes à représenter : 10. Que constate-t-on ? Prendre différentes valeurs pour u_0 : la conclusion change-t-elle ?

5. On souhaite répondre à la question « Les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ sont-elles toujours convergentes ? ». On considère ici la fonction $f(x) = x^2$.

a. Modifier l'algorithme avec cette fonction.

b. Choisir différentes valeurs de u_0 (on se limitera aux cas $u_0 \geq 0$).

Conclure sur l'éventuelle convergence de (u_n) en fonction des valeurs de u_0 .

15 VARIATION

★★ 25 min ► p. 198

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ par $f(x) = \frac{x}{1+2x}$.

1. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

2. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormal d'unité 6 cm.

3. On définit la suite (w_n) par $w_n = \frac{n}{1+2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer w_1 et w_2 .

b. Donner le sens de variation de la suite (w_n) . Justifier.

4. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Sur la représentation graphique de f , placer à l'aide de la droite d'équation $y = x$ les valeurs u_0 , u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.

▀ Voir l'exercice 11 pour la méthode de représentation des premiers termes d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

b. Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

c. On admettra que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que (v_n) est arithmétique de raison 2.

d. Déterminer v_0 puis l'expression de v_n en fonction de n .

En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

e. En remarquant que $u_n = \frac{1}{g(n)}$ où g est une fonction de référence, déduire le sens de variation de (u_n) .

16 DES LAPINS AU NOMBRE D'OR

★★★ 50 min > p. 20

On considère le problème posé par Leonardo Fibonacci au XIII^e siècle : « Un homme met un couple de lapins nouveau-nés dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? » Pour répondre à cette question, posons A_n le nombre de couples adultes et I_n le nombre de couples immatures à la fin du n^e mois. Alors, à la fin du premier mois, $A_1 = 0$ et $I_1 = 1$. À la fin du 2^e mois, le couple immature devient adulte, et à la fin du 4^e mois, le couple a engendré un couple de lapereaux. Les relations de récurrence liant ces suites sont donc $I_{n+1} = A_n$ et $A_{n+1} = A_n + I_n$.

1. Sur tableur, calculer les 30 premiers termes de chaque suite.

▀ On pourra mettre les valeurs de n dans la colonne A, les valeurs de A_n dans la colonne B et les valeurs de I_n dans la colonne C.

En déduire, dans une 4^e colonne, le nombre total de couples de lapins à la fin du n^e mois. On notera cette suite (T_n) .

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+2} = T_{n+1} + T_n$. Cette relation de récurrence définit la suite de Fibonacci pour $T_1 = 1$ et $T_2 = 1$.

3. Dédurre de cette relation que $\frac{T_{n+2}}{T_{n+1}} \times \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{T_{n+1}}{T_n} + 1$ (E)

4. On s'intéresse maintenant à la suite définie par $u_n = \frac{T_{n+1}}{T_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une nouvelle colonne du tableur, calculer les 29 premiers termes de (u_n) , en faisant apparaître 8 décimales. Quelle conjecture peut-on faire concernant cette suite ?

5. On admettra que (u_n) converge vers une limite notée φ . Démontrer que φ est positive.

Que se passerait-il si on avait $\varphi < 0$?

6. Que peut-on dire de $\frac{T_{n+2}}{T_{n+1}}$ lorsque n tend vers l'infini ?

7. a. Dédurre de la relation (E) et du 6. que φ est la solution positive d'une équation du second degré que l'on déterminera.

b. Calculer la valeur exacte de φ .

8. À l'aide du tableur, déterminer à partir de quel rang n , $|u_n - \varphi| < 10^{-6}$.

Voir le chapitre 1 pour la notion de valeur absolue. Utiliser la fonction =ABS (voir l'assistant fonction du tableur).

CONTRÔLE

17 CONTRAT DE LOCATION

★ 15 min ► P. 201

Une personne loue une maison à partir du 1^{er} janvier 2011. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 4800 € et le locataire s'engage à occuper la maison pendant 9 années complètes.

1. Contrat n°1

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 5 % du loyer de l'année précédente.

- a. Calculer le loyer u_1 payé lors de la 2^e année.
- b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

▲ Exprimer u_{n+1} à l'aide de u_n .

- c. Exprimer u_n (loyer payé lors de la $n + 1^e$ année) en fonction de n .
Calculer u_8 .

▲ Voir le savoir-faire 3.

- d. Calculer la somme totale payée à l'issue des 9 années de contrat.

▲ Voir le savoir-faire 4.

2. Contrat n°2

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 275 € du loyer de l'année précédente.

- a. Calculer le loyer v_1 payé lors de la 2^e année.
- b. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
- c. Exprimer v_n (loyer payé lors de la $n + 1^e$ année) en fonction de n .
Calculer v_8 .
- d. Calculer la somme totale payée à l'issue des 9 années de contrat.
3. Quel est le contrat le plus avantageux ?

18 SUITE ARITHMETICO-GEOMETRIQUE

★ 25 min ► p. 202

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. a. Démontrer que pour tout, $n \geq 3$, $u_n \geq 0$.

▲ Après avoir examiné u_3 , on pourra raisonner par l'absurde pour $n \geq 4$, comme à l'exercice 11.

- b. En déduire que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq n - 2$.
- c. Que peut-on en déduire quant à la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?
2. On définit la suite (v_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

c. Vérifier que $u_n = x_n + y_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique, dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

3. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .



Comme à l'exercice 10, question 6. :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n x_k + \sum_{k=0}^n y_k$$

On scinde la somme S_n en deux sommes des premiers termes d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.

CONTRÔLE

19 LES BASES



15 min ► P. 203

1. Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n}{1+n}.$$



Voir l'exercice 4 en cas de difficulté.

2. Calculer $1 + 3 + 5 + \dots + 2011$. Justifier.



Voir le savoir-faire 2.

20 COMPTE SUR LIVRET



10 min ► P. 204

On place 5 000 € sur un livret à 2,5 % d'intérêts annuels. On appelle $u_0 = 5\,000$ et u_n le montant sur le compte n années plus tard, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .



Attention, pour u_2 , les intérêts sont calculés sur le montant u_1 ...

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.

À la question « quelle est la nature de la suite ? », la réponse ne peut-être que arithmétique ou géométrique : en observant les premiers termes calculés au 1., si l'écart entre deux termes est constant, ce sera une suite arithmétique, sinon, on cherche à démontrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour une suite géométrique.

3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. De quelle somme dispose-t-on au bout de 10 ans ?
5. Combien d'années faut-il attendre pour doubler son capital de départ ?

Utiliser la calculatrice pour obtenir un tableau des premiers termes de la suite.

21 SUITE RÉCURRENTE

★★ 30 min ► P. 205

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.

Voir exercice 10 en cas de difficultés.

2. a. Représenter dans un repère orthonormal d'unité 2 cm, les droites D d'équation $y = \frac{2}{3}x + 1$ et Δ d'équation $y = x$.

- b. Utiliser ces droites pour placer u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

Voir la méthode décrite à l'exercice 11.

- c. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite ?

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

- a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et calculer v_0 .

- b. Exprimer alors v_n , puis u_n , en fonction de n .

- c. En déduire le sens de variation et la limite de la suite (v_n) puis de la suite (u_n) .

CORRIGÉS

1 a. $u_{50} = \sqrt{2 \times 50^2 + 4 \times 50 + 1} = \sqrt{5\,201}.$

b. $u_{50} = 3 - \frac{2}{50} = 2,96.$

c. (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$, et de premier terme $u_0 = 7$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + rn = 7 + 3n$ d'après le cours II.2.

Donc $u_{50} = 7 + 3 \times 50 = 157.$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -2u_n$, donc (u_n) est géométrique de raison $q = -2$. Son premier terme est $u_1 = -3$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ d'après le cours III.2., $u_n = -3 \times (-2)^{n-1}$.

Pour $n = 50$, $u_{50} = -3 \times (-2)^{49} = 3 \times 2^{49} \approx 1,69 \times 10^{15}$ à 10^{13} près.

2 Si on note u_0 le premier terme et r la raison de la suite arithmétique (u_n) :

$$u_n = u_0 + r \times n.$$

a.
$$\begin{cases} u_4 = 12 = u_0 + 4r \\ u_9 = -8 = u_0 + 9r \end{cases}$$

Par soustraction membre à membre (ligne 2 – ligne 1) :

$$-8 - 12 = 9r - 4r \Leftrightarrow -20 = 5r \Leftrightarrow r = -4.$$

 **Autre méthode :** On peut utiliser directement la formule du cours II.2.

$$u_9 = u_4 + (9-4)r \Leftrightarrow -8 = 12 + 5r \Leftrightarrow 5r = -20 \Leftrightarrow r = -4.$$

D'où : $u_4 = 12 = u_0 + 4 \times (-4) = u_0 - 16 \Leftrightarrow u_0 = 28.$

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 28$ et de raison $r = -4$.

D'où $u_{20} = 28 - 4 \times 20 = -52.$

 Voir le savoir-faire 3.b.

b.
$$\begin{cases} u_{27} = 7 = u_0 + 27r \\ u_{10} = \frac{15}{7} = u_0 + 10r \end{cases}$$
 Par soustraction membre à membre :

$$7 - \frac{15}{7} = 17r \Leftrightarrow \frac{34}{7} = 17r \Leftrightarrow \frac{34}{7} \times \frac{1}{17} = r \Leftrightarrow \frac{2}{7} = r.$$

 **Autre méthode :** Utiliser $u_{27} = u_{10} + 17r$.

On en déduit :

$$\frac{15}{7} = u_0 + 10 \times \frac{2}{7} = u_0 + \frac{20}{7} \text{ d'où } u_0 = \frac{-5}{7}.$$

(u_n) est donc la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -\frac{5}{7}$ et de raison $r = \frac{2}{7}$.

$$\text{D'où } u_{20} = -\frac{5}{7} + \frac{2}{7} \times 20 = -\frac{5}{7} + \frac{40}{7} = \frac{35}{7} = 5.$$

3 a. $u_2 = u_1 \times q$ donc $u_2 = 5 \times (-3) = -15$. Pour $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} \text{ donc } u_{15} = 5 \times (-3)^{15-1} = 5 \times (-3)^{14} = 23\,914\,845.$$

La suite a pour premier terme u_1 , d'où la puissance $(n-1)$.

$$\text{b. } u_n = u_0 \times q^n \text{ donc } u_5 = -20 = u_0 \times q^5,$$

$$\text{et } u_9 = -80 = u_0 \times q^9 = u_0 \times q^5 \times q^4 = -20q^4.$$

On peut aussi dire directement $u_9 = u_5 \times q^4$ d'après le cours III.2.

$$-80 = -20 \times q^4 \Leftrightarrow q^4 = \frac{-80}{-20} = 4 \Leftrightarrow q^2 = \sqrt{4} = 2 \quad (q^2 \text{ ne peut pas \u00eatre \u00e9gal \u00e0 } -2).$$

$$\Leftrightarrow q = \sqrt{2} \text{ ou } q = -\sqrt{2},$$

$$\bullet \text{ Si } q = \sqrt{2}, -20 = u_0 \times (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}u_0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{-20}{4\sqrt{2}} = \frac{-5}{\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{donc } u_{24} = u_0 \times (\sqrt{2})^{24} = u_0 \times 2^{12},$$

$$\text{donc } u_{24} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \times 2^{12} = -5\sqrt{2} \times 2^{11} = -10\,240\sqrt{2}.$$

$$\bullet \text{ Si } q = -\sqrt{2}, -20 = u_0 \times (-\sqrt{2})^5 = -4\sqrt{2}u_0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{-20}{-4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{donc } u_{24} = \frac{5\sqrt{2}}{2} (-\sqrt{2})^{24} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 2^{12} = 10\,240\sqrt{2}.$$

$$\text{c. } u_n = u_p \times q^{n-p} \Leftrightarrow u_8 = u_5 \times q^3 \Leftrightarrow 27 = 8 \times q^3$$

$$\Leftrightarrow q^3 = \frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow q = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Alors : } u_{15} = u_8 \times q^{15-8} = 27 \times \left(\frac{3}{2}\right)^7 = 27 \times \frac{3^7}{2^7} = \frac{59\,049}{128}.$$

$$\text{4 a. } u_{n+1} = 2(n+1) - (n+1)^2 + 1 = 2n+2 - (n^2 + 2n+1) + 1$$

$$u_{n+1} = -n^2 + 2, \text{ d'o\u00f9 :}$$

$$u_{n+1} - u_n = -n^2 + 2 - (2n - n^2 + 1) = -2n + 1.$$

Pour $n \geq 1$, $-2n \leq -2$ et $-2n+1 \leq -1$, donc $-2n+1 < 0$ soit $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite est décroissante à partir du rang $n = 1$.

Autre méthode

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1 < 0$, $b = 2$ et $c = 1$. Donc f est décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[= [1; +\infty[$. Donc (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

b. $u_n = -5 \times (-2)^n$ est une suite géométrique de raison -2 car elle est du type

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Comme $-2 < 0$, **elle n'est ni croissante, ni décroissante.**

$$\text{c. } u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)+1} = \frac{2^{n+1}}{n+2}.$$

u_n et u_{n+1} sont positifs.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{2^{n+1}}{2^n} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \times 2^{n+1-n} = \frac{n+1}{n+2} \times 2 = \frac{2n+2}{n+2}. \end{aligned}$$

Déterminons si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou inférieur à 1 :

$$\frac{2n+2}{n+2} - 1 = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{n+2}{n+2} = \frac{n}{n+2}.$$

Or $n \geq 0$ et $n+2 \geq 2$ donc $n+2 \geq 0$,

d'où $\frac{n}{n+2} \geq 0$ (quotient de deux nombres positifs.)

$$\text{Ainsi } \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geq 0 \text{ soit } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$$

Comme u_n est positif, $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$, et même strictement croissante à partir du rang 1.

$$\text{d. } u_n = n^2 - 2n + 1 - n^2 = -2n + 1 = 1 - 2n.$$

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison -2 car elle est du type $u_0 + rn$.

$-2 < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante.

On peut aussi calculer $u_{n+1} - u_n$, voir que c'est égal à -2 , donc $u_{n+1} - u_n < 0$ soit $u_{n+1} < u_n$.

5 a. Première méthode

On peut voir S_1 comme la somme des $100 - 19 + 1 = 82$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 19$ et de raison $r = 1$.

Avec la formule encadrée au II.3., on trouve :

$$S_1 = 82 \times \frac{19+100}{9} = 41 \times 119 = \mathbf{4\,879}.$$

Deuxième méthode :

$$S_1 = 1 + 2 + \dots + 100 - (1 + 2 + \dots + 18).$$

On utilise alors le « résultat préalable » du cours II.3. :

$$S_1 = \frac{100 \times (100+1)}{2} - \frac{18 \times (18+1)}{2} = 50 \times 101 - 9 \times 19 = \mathbf{4\,879}.$$

b. L'écart entre 6 et -42 n'est pas le même qu'entre -42 et 294. Cherchons si ce sont les termes d'une suite géométrique : $6 \times (-7) = -42$; $-42 \times (-7) = 294$.

Cela semble correspondre à une suite de raison -7 et de premier terme $u_0 = 6$.

Voyons si cela correspond à 34 588 806.

Sur la calculatrice, on entre la formule $Y = 6 \times (-7)^X$ pour obtenir le tableau de valeurs des termes de cette suite. On trouve $u_8 = 34\,588\,806$.

 Pensez à remplacer n par X dans la formule sur calculatrice. Réglez ensuite le tableau de valeurs en prenant $X_{\min} = 0$ et un pas de 1.

Alors S_2 est la somme des 9 premiers termes de cette suite géométrique :

$$S_2 = u_0 \times \frac{1-q^9}{1-q} = 6 \times \frac{1-(-7)^9}{1+7} = \mathbf{30\,265\,206}.$$

c. $-3, 1, 5$ sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique telle que $u_0 = -3$ et $r = 4$.

Alors :

$$u_n = u_0 + rn \Leftrightarrow 57 = -3 + 4n \Leftrightarrow 60 = 4n \Leftrightarrow n = 15.$$

$$S_3 = u_0 + u_1 + \dots + u_{15} = (15+1) \times \frac{u_0 + u_{15}}{2} = 16 \times \frac{-3+57}{2} = 16 \times 27 = \mathbf{432}.$$

6 1. Au bout de $(n+1) \times 12,32 = n \times 12,32 + 12,32$ ans, il reste la moitié du tritium présent au bout de $n \times 12,32$ ans, donc $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$.

2. On en déduit que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 33$.

3. Alors $u_n = u_0 \times q^n$, donc $u_n = 33 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. En dressant le tableau de valeurs sur la calculatrice, on voit que :

$$u_5 \approx 1,03 > 1 \quad \text{et} \quad u_6 \approx 0,52 < 1.$$

Donc, au bout de $6 \times 12,32$ ans, il reste moins de 1 g de tritium, **soit au bout de 73,9 ans.**

$$5. a. v_{n+1} = v_n - v_n \times \frac{5,5}{100} = v_n \left(1 - \frac{5,5}{100}\right).$$

$v_{n+1} = 0,945v_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,945 et de premier terme $v_0 = 33$.

b. Fin 2003, les rejets de 2002 se sont désintégrés en partie, donc il reste : $v_1 = 33 \times 0,945 \approx 31,19$ g de 2002, plus les 33 g libérés en 2003, ce qui fait **64,19 g.**

c. Fin 2004, la quantité de tritium présente est $v_2 = 33 \times 0,945^2 \approx 29,47$, donc :

$$v_0 + v_1 + v_2 \approx \mathbf{93,66 \text{ g.}}$$

d. Fin 2064, la quantité de tritium présente serait :

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \dots + v_{62} &= v_0 \times \frac{1 - q^{63}}{1 - q} \quad (\text{car } q \neq 1) \\ &= 33 \times \frac{1 - 0,945^{63}}{1 - 0,945} \approx 583. \end{aligned}$$

Il resterait 583 g de tritium.

7 1. La première mensualité est :

$$u_1 = 500 + \frac{6}{100} \times 15\,000 = \mathbf{1\,400 \text{ €.}}$$

Ensuite, il reste $15\,000 - 500 = 14\,500$ € de capital à rembourser.

La 2^e mensualité est donc :

$$u_2 = 500 + \frac{6}{100} \times 14\,500 = \mathbf{1\,370 \text{ €.}}$$

Il reste $14\,500 - 500 = 14\,000$ € de capital à rembourser.

$$\text{La 3^e mensualité est } u_3 = 500 + \frac{6}{100} \times 14\,000 = \mathbf{1\,340 \text{ €.}}$$

2. La suite semble arithmétique de raison -30 car, d'un terme au suivant, on soustrait 30 €. Calculons $u_{n+1} - u_n$ pour le prouver, C étant le capital restant avant la n^{e} mensualité :

$$u_n = 500 + \frac{6}{100} \times C ; u_{n+1} = 500 + \frac{6}{100} \times (C - 500) \text{ donc :}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6}{100} \times (C - 500) - \frac{6}{100} \times C = \frac{6}{100} \times (-500) = -30.$$

$u_{n+1} - u_n$ est constant, donc (u_n) est une suite arithmétique de raison -30 et de premier terme $u_1 = 1\,400$.

3. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1\,400$ et de raison $r = -30$ donc :

$$u_n = u_1 + r \times (n - 1) = \mathbf{1\,400 - 30 \times (n - 1).}$$

 Il faut être vigilant sur l'indice du premier terme de la suite lorsqu'on donne la formule générale.

À raison de 500 € par mois, le capital de 15 000 € est remboursé en
 $N = \frac{15\,000}{500} = 30$ mois.

 **Attention**, le capital est remboursé avant que u_n ne soit égal à 0 !

La dernière mensualité est donc :

$$u_{30} = 1\,400 - 30 \times (30 - 1) = \mathbf{530 \text{ €}}.$$

4. La somme totale remboursée est la somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_N = \frac{N \times (u_1 + u_N)}{2} = \frac{30 \times (1\,400 + 530)}{2} = 28\,950 \text{ €}.$$

 Voir le cours II.3.

Donc le coût de l'emprunt est $28\,950 - 15\,000 = 13\,950 \text{ €}$.

8 Si on note r la raison de la suite arithmétique, les quatre termes consécutifs de la suite peuvent être appelés $u_0, u_1 = u_0 + r, u_2 = u_0 + 2r$ et $u_3 = u_0 + 3r$.

$$\text{D'où : } u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 4u_0 + 6r = -2 \Leftrightarrow 2u_0 + 3r = -1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= u_0^2 + (u_0^2 + 2u_0r + r^2) + (u_0^2 + 4u_0r + 4r^2) + (u_0^2 + 6u_0r + 9r^2) \\ &= 4u_0^2 + 12u_0r + 14r^2 = 46 \quad (2). \end{aligned}$$

 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

Pour simplifier la relation (2), on élève au carré les membres de la relation (1), alors :

$$4u_0^2 + 12u_0r + 9r^2 = 1.$$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$$14r^2 - 9r^2 = 45 \Leftrightarrow 5r^2 = 45 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3 \text{ ou } -3.$$

Si $r = 3$: (1) $\Leftrightarrow 2u_0 + 9 = -1 \Leftrightarrow 2u_0 = -10 \Leftrightarrow u_0 = -5$, les termes suivants de cette suite étant alors $u_1 = -2, u_2 = 1, u_3 = 4$.

Si $r = -3$: (1) $\Leftrightarrow 2u_0 - 9 = -1 \Leftrightarrow 2u_0 = 8 \Leftrightarrow u_0 = 4, u_1 = 1, u_2 = -2, u_3 = -5$.

9 1. a. $P_1 = P_0 + P_0 \times \frac{3}{100} = P_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 1,03P_0.$

$$P_2 = P_1 + P_1 \times \frac{3}{100} = 1,03P_1 (= 1,03^2 P_0).$$

$$P_{n+1} = P_n + P_n \times \frac{3}{100} = 1,03P_n.$$

Donc (P_n) est une suite géométrique de premier terme P_0 et de raison 1,03, donc

$$P_n = \mathbf{1,03^n \times P_0} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b. On cherche le plus petit entier n tel que $P_n \geq 2P_0$

$$P_n \geq 2P_0 \Leftrightarrow 1,03^n \times P_0 \geq 2P_0 \Leftrightarrow 1,03^n \geq 2 \text{ car } P_0 > 0.$$

Sur la calculatrice, on entre la formule $Y = 1,03^X$ dans le tableau de valeurs. On obtient $1,03^{23} \approx 1,97 < 2$ et $1,03^{24} \approx 2,03 > 2$, donc le prix initial est doublé au bout de 24 ans.

Le temps nécessaire ne dépend pas de P_0 , puisqu'il suffit de regarder par combien P_0 est multiplié.

2. a. Augmenter P_0 de 3 % revient à multiplier par 1,03.

Diminuer le prix $P_1 = 1,03 \times P_0$ de 3 % revient à le multiplier par $1 - \frac{3}{100} = 0,97$.

$$\text{Ainsi } P_2 = 0,97 \times P_1 = 0,97 \times 1,03 \times P_0 = 0,9991P_0.$$

$$\text{Au bout de 4 ans, } P_4 = 0,97 \times (1,03 \times P_2) = 0,9991P_2.$$

$$P_{n+2} = 0,97 \times (1,03P_{2n}) = 0,9991P_{2n} \text{ soit } u_{n+1} = 0,9991 \times u_n.$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,9991 donc :

$$u_{n+1} = 0,9991 \times u_n \text{ et } P_{2n} = 0,9991^n P_0.$$

b. Comme $0 < 0,9991 < 1$, la suite géométrique (P_{2n}) est strictement décroissante, d'où :

$$P_{2n} < P_{2(n-1)} < P_{2(n-2)} \dots$$

et de proche en proche, on arrive à $P_{2n} < P_0$.

Avec un taux de i %, la raison de la suite (P_{2n}) serait :

$$\left(1 + \frac{i}{100}\right) \left(1 - \frac{i}{100}\right) = 1 - \frac{i}{100} + \frac{i}{100} - \frac{i^2}{10\,000} = 1 - \frac{i^2}{10\,000}. \text{ Or } 0 < 1 - \frac{i^2}{10\,000} < 1,$$

donc la suite (P_{2n}) est toujours strictement décroissante.

$$c. P_{2n+1} = P_{2n} \times 1,03 = 0,9991^n P_0 \times 1,03.$$

$$\boxed{10} \text{ 1. Pour } n = 0, u_2 = -\frac{1}{2} \times u_1 + \frac{1}{2} \times u_0 = -\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 0.$$

$$\text{Pour } n = 1, u_3 = -\frac{1}{2} \times u_2 + \frac{1}{2} \times u_1 = 1.$$

$$\text{Pour } n = 2, u_4 = -\frac{1}{2} \times u_3 + \frac{1}{2} \times u_2 = -\frac{1}{2}.$$

▲ Pour calculer les premiers termes d'une suite, voir savoir-faire n° 1.

La suite (u_n) n'est pas arithmétique car $u_1 - u_0 = 0 \neq u_2 - u_1$.

Elle n'est pas non plus géométrique car $\frac{u_1}{u_0} = 1 \neq \frac{u_2}{u_1}$.

2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+2} = -\frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n \text{ et } w_{n+2} = -\frac{1}{2}w_{n+1} + \frac{1}{2}w_n, \text{ alors :}$$

$$\begin{aligned} v_{n+2} + w_{n+2} &= -\frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}w_{n+1} + \frac{1}{2}w_n \\ &= -\frac{1}{2}(v_{n+1} + w_{n+1}) + \frac{1}{2}(v_n + w_n). \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n + w_n)$ vérifie la relation (R).

3. Si (v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times q$ et $v_{n+2} = v_{n+1} \times q = v_n \times q^2$. Donc :

$$(v_n) \text{ vérifie (R)} \Leftrightarrow v_n \times q^2 = -\frac{1}{2}v_n \times q + \frac{1}{2}v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\Leftrightarrow v_n \left(q^2 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} \right) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si (v_n) n'est pas la suite nulle, alors elle vérifie (R) si, et seulement si,

$q^2 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, donc deux valeurs sont solutions :

$$q_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ et } q_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2}.$$

 Voir le théorème II.1. du chapitre 1.

Donc les deux suites géométriques non nulles possibles, (v_n) et (w_n) , ont pour raison -1 et $\frac{1}{2}$.

4. (v_n) et (w_n) sont des suites géométriques, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times (-1)^n \quad \text{et} \quad w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$t_0 = 2 = v_0 + w_0$ et $t_1 = 2 = v_1 + w_1$ avec $v_1 = v_0 \times (-1)$ et $w_1 = w_0 \times \frac{1}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} v_0 + w_0 = 2 & (L_1) \\ -v_0 + \frac{1}{2}w_0 = 2 & (L_2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} w_0 + \frac{1}{2}w_0 = 4 & (L_1 + L_2) \\ v_0 - 2(-v_0) = 2 - 2 \times 2 & (L_1 - 2L_2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}w_0 = 4 \\ 3v_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_0 = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \\ v_0 = -\frac{2}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, $v_n = -\frac{2}{3}(-1)^n$ et $w_n = \frac{8}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où $t_n = -\frac{2}{3} \times (-1)^n + \frac{8}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On a déjà $u_0 = 2 = t_0$ et $u_1 = 2 = t_1$. Supposons qu'il existe $n \geq 2$ tel que $u_n \neq t_n$.

On appelle N le plus petit entier tel que $u_N \neq t_N$.

$N \geq 2$ et (R) donne :

$$u_N = -\frac{1}{2}u_{N-1} + \frac{1}{2}u_{N-2} \text{ et } t_N = -\frac{1}{2}t_{N-1} + \frac{1}{2}t_{N-2}.$$

N étant le plus petit entier tel que $u_N \neq t_N$, alors $u_{N-1} = t_{N-1}$ et $u_{N-2} = t_{N-2}$.

D'où $u_N = t_N$.

On a une contradiction, donc notre hypothèse est fautive : il n'existe aucun entier $n \geq 2$ tel que $u_n \neq t_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = t_n$ et les deux suites sont donc égales.

Les raisonnements par l'absurde sont une façon de raisonner utilisée en mathématiques lorsqu'on n'arrive pas à démontrer directement une propriété. Il faut supposer vrai le contraire de ce qu'on souhaite prouver pour aboutir à une contradiction.

$$6. \sum_{i=0}^{i=10} u_i = v_0 + w_0 + v_1 + w_1 + \dots + v_{10} + w_{10}$$

$$= v_0 + v_1 + \dots + v_{10} + w_0 + \dots + w_{10}.$$

D'après la formule (cours III.2.) donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{10} = v_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = -\frac{2}{3} \times \frac{1-(-1)^{11}}{1-(-1)}.$$

De même :

$$w_0 + w_1 + \dots + w_{10} = \frac{8}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}},$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=10} u_i &= -\frac{2}{3} \times \frac{1-(-1)}{1+1} + \frac{8}{3} \times \frac{1-\frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{2}{3} \times \frac{2}{2} + \frac{8}{3} \times \left(\frac{2^{11}-1}{2^{11}} \right) \times \frac{2}{1} \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2^3}{3} \times \frac{2^{11}-1}{2^{10}} = -\frac{2}{3} + \frac{2^{11}-1}{3 \times 2^7} = \frac{-2^8 + 2^{11} - 1}{3 \times 2^7} \\ &= \frac{1791}{384}. \end{aligned}$$

11 1. $u_0 = \frac{1}{16} < 1$. On suppose qu'il existe au moins un rang n tel que $u_n \geq 1$. Soit N le plus petit rang tel que $u_N \geq 1$. Comme $u_0 < 1$, $N \geq 1$, $N-1 \geq 0$ et

$u_N = \sqrt{u_{N-1}}$. Ainsi $\sqrt{u_{N-1}} \geq 1$, donc, par croissance de la fonction carrée sur $[0; +\infty[$, $u_{N-1} \geq 1^2$ soit $u_{N-1} \geq 1$, ce qui contredit le fait que N est le plus petit entier vérifiant cette hypothèse.

Donc $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - u_n = \frac{(\sqrt{u_n} - u_n) \times (\sqrt{u_n} + u_n)}{\sqrt{u_n} + u_n} \quad \text{car } \sqrt{u_n} + u_n \neq 0 \quad (u_0 > 0)$$

donc $\sqrt{u_n} > 0$ et $\sqrt{u_n} + u_n > 0$.

On a multiplié par l'expression conjuguée. C'est une astuce fréquemment utilisée lorsqu'on a des racines carrées : l'expression conjuguée de $a+b$ est $\frac{a-b}{a+b}$.

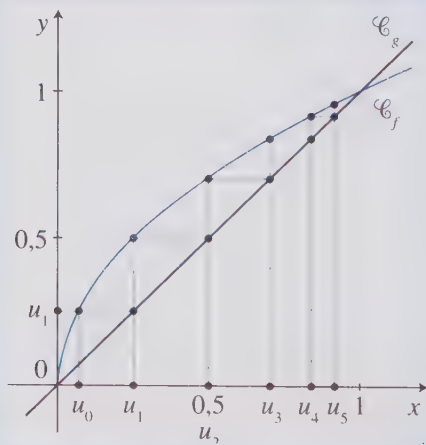
Multiplier par $a-b$ permet de faire apparaître au numérateur l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, ce qui élimine la racine carrée.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n} + u_n} = \frac{u_n(1 - u_n)}{\sqrt{u_n} + u_n}.$$

$u_n > 0$, $\sqrt{u_n} + u_n > 0$, et d'après le 1. $u_n < 1$ donc $0 < 1 - u_n$.

On en déduit que le quotient est strictement positif, donc que $u_{n+1} - u_n > 0$. **La suite est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$.**

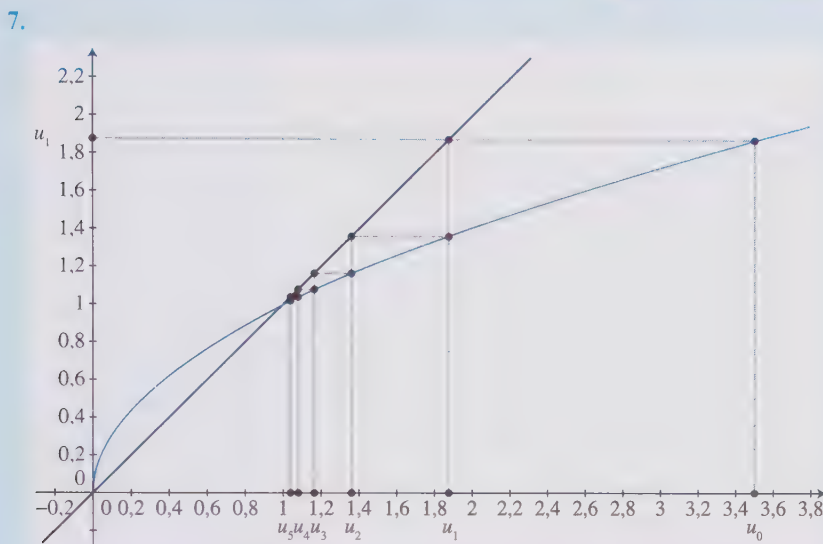
3.



4. On lit : $u_1 = 0,25$.

5. $u_2 = 0,5$ puis $u_3 \approx 0,65$.

6. On observe que les termes u_n augmentent et se rapprochent de 1. **1 semble être la limite de la suite (u_n)**



On constate graphiquement que cette fois-ci, la suite semble strictement décroissante, mais se rapproche toujours de 1. La démonstration du 1. n'est plus valable dans ce cas, car le plus petit rang pour lequel $u_n > 1$ est $N = 0$, donc on ne peut pas utiliser u_{N-1} . En fait, $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qu'on montre par l'absurde comme au 1., en supposant que N est le plus petit rang pour lequel on a $u_N < 1$.

Donc (u_n) est minorée par 1.

De plus, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{\sqrt{u_n} + u_n}$, mais cette fois $1-u_n < 0$, donc le quotient est négatif, et $u_{n+1} < u_n$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

En terminale, on n'aura plus besoin d'admettre que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On le démontrera par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

12 1. Une suite est arithmétique lorsque ses termes s'obtiennent en ajoutant toujours la même valeur d'un terme à l'autre. Ici, on ajoute 20 cents d'une semaine à la suivante, **donc cela correspond à une suite arithmétique de raison 0,20 et de premier terme $u_0 = 5$.**

2. On en déduit que $u_n = 5 + 0,2n$, d'où $u_{20} = 5 + 0,2 \times 20 = 9$ euros.

3. On cherche n tel que $u_n \geq 12$.

$$u_n \geq 12 \Leftrightarrow 5 + 0,2n \geq 12 \Leftrightarrow 0,2n \geq 7 \Leftrightarrow n \geq \frac{7}{0,2} \text{ car } 0,2 > 0 \Leftrightarrow n \geq 35.$$

Donc, à partir de la 36^e semaine, il touchera plus de 12 €.

Attention aux indices ! Ici, u_0 est la somme reçue la première semaine, donc u_1 , la 2^e semaine... u_{35} , la 36^e semaine.

4. On veut déterminer n tel que $S_n \geq 150$ où S_n désigne la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique.

Alors $S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ d'après le cours II.2.

$$\begin{aligned} S_n \geq 150 &\Leftrightarrow \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} \geq 150 \\ &\Leftrightarrow (n+1)(5 + (5 + 0,2n)) \geq 300 \text{ car } 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (n+1)(10 + 0,2n) \geq 300 \Leftrightarrow 0,2n^2 + 10,2n + 10 \geq 300 \\ &\Leftrightarrow 0,2n^2 + 10,2n - 290 \geq 0. \end{aligned}$$

Pour une telle inéquation, déterminer le signe du polynôme $0,2x^2 + 10,2x - 290$.

$\Delta = 10,2^2 - 4 \times 0,2 \times (-290) = 336,04 > 0$, donc ce polynôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10,2 - \sqrt{336,04}}{2 \times 0,2} \approx -71,3 \text{ à } 10^{-1} \text{ près ;}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10,2 + \sqrt{336,04}}{2 \times 0,2} \approx 20,3 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

Comme $a > 0$, on en déduit :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$0,2x^2 + 10,2x - 290$		+	-	+

Comme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, donc $S_n \geq 150 \Leftrightarrow n \geq x_2$. Donc à partir de $n = 21$, il aura assez d'argent, **c'est-à-dire à partir de la 22^e semaine.**

il ne perçoit son argent de poche qu'une fois par semaine, donc la réponse est un nombre entier. 20,3 semaines n'aurait pas de sens.

13 1. Sur tableur,

pour u_1 : dans la cellule A2, mettre la valeur 1 ;

dans la cellule B2, mettre la formule = A2^2 ;

dans la cellule C2, mettre la formule = B2 ;

dans la cellule D2, mettre la formule = 6 / A2 * C2 .

Pour u_2 : dans la cellule A3, mettre la formule = A2^1 ;

dans la cellule B3, mettre la formule = A3^2 (ou copier-coller B2) ;

dans la cellule C3, mettre la formule = SOMME(\$B\$2 : B3)

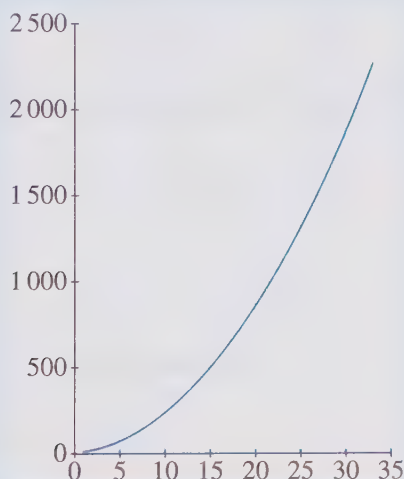
et dans la cellule D3, mettre = 6 / A3 * C3 (ou copier-coller D).

On étend ensuite la ligne 3 jusqu'à la ligne 51.

	A	B	C	D
1	n	n^2	Somme des n^2	u_n
2	1	1	1	6
3	2	4	5	15
4	3	9	14	28
5	4	16	30	45

Sur tableur, le \$ place **avant** la référence d'une case permet de bloquer cette référence lorsqu'on recopie une formule : ici, on veut que la somme commence toujours à la valeur 1 placée en B2 quand on descend. On aurait pu noter seulement B\$2 car le B ne varie pas de toute façon à la recopie vers le bas.

Puis avec l'assistant graphique, on obtient en choisissant le type « diagramme XY » (valeurs X de A2 à A51, Y de D2 à D51) :



2. Cette courbe ressemble à une portion de parabole, donc on peut conjecturer que f est une fonction polynomiale du second degré.

3. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On sait que $u_1 = f(1) = 6$; $u_2 = f(2) = 15$ et $u_3 = f(3) = 28$, donc on doit résoudre un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 15 \\ 9a + 3b + c = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 6 \\ 3a + b = 9 \\ 5a + b = 13 \end{cases} \quad (L_2 - L_1) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 6 \\ 3a + b = 9 \\ 2a = 4 \end{cases} \quad (L_3 - L_2) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 6 + b = 9 \\ 2 + b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = 2x^2 + 3x + 1.
 \end{aligned}$$

4. Sur le tableur, dans la case E2, on entre la formule $= 2 * A2^2 + 3 * A2 + 1$, puis on recopie vers le bas et on compare avec la colonne D et le graphique : on a bien retrouvé (u_n) .

$$5. u_n = 2n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow \frac{6}{n}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = 2n^2 + 3n + 1$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} \times (2n^2 + 3n + 1)$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{6}.$$

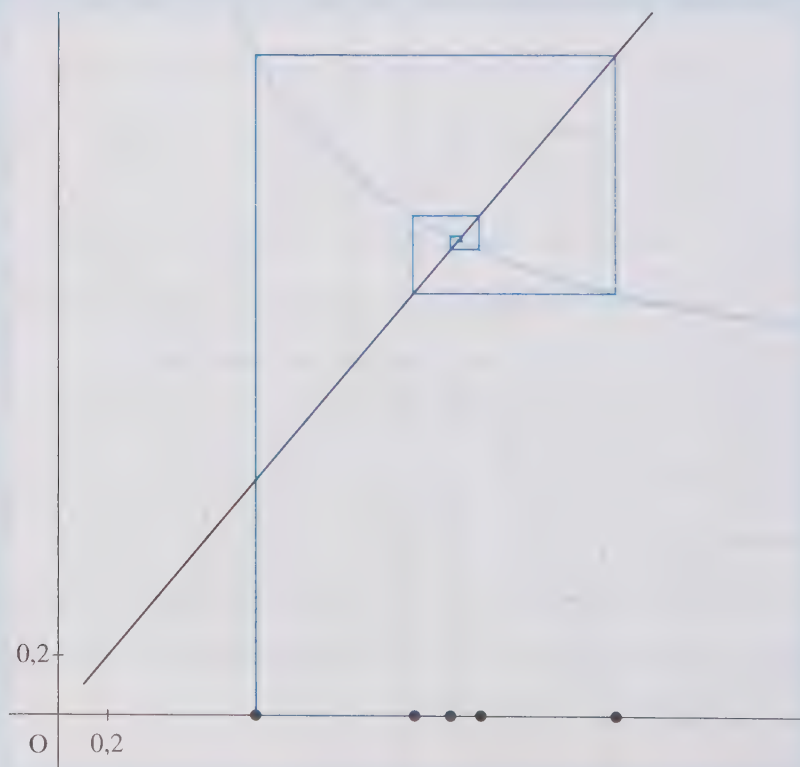
14 1. La première boucle sert à **tracer la courbe représentant la fonction f** et la droite Δ d'équation $y = x$ en traçant 300 tout petits segments, ce qui approche l'allure de la courbe.

2. N représente **le nombre de termes supplémentaires de la suite (u_n)** que l'on va dessiner sur le graphique. Ainsi, pour $N = 3$ par exemple, on s'arrêtera à u_3 (u_0 est déjà représenté).

3. a. i correspond au **numéro du rang** dans la suite : chaque boucle trace le terme u_i .

b. Le point de coordonnées $(x_i ; 0)$ représente le terme d'indice i de la suite (u_n) .

4.



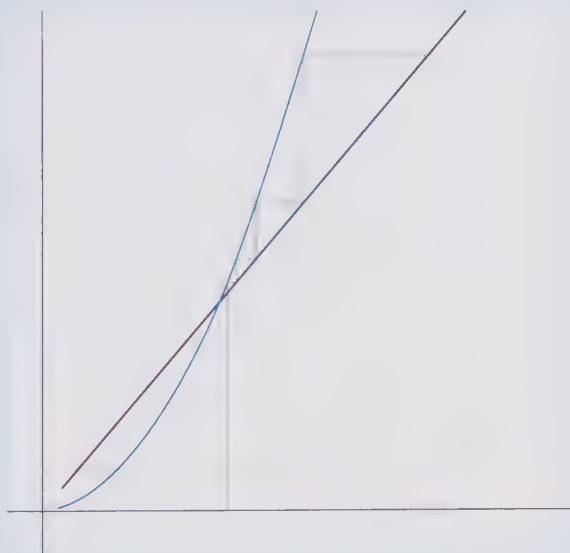
La suite (u_n) semble converger vers 1,6 environ, ce qui correspond à l'abscisse du point d'intersection de la droite Δ avec la courbe $\mathcal{C}_f$, et cela quelle que soit la valeur choisie pour $u_0 > 0$.

▀ $u_0 > 0$ pour rester dans l'ensemble de définition de f .

5. a. Il suffit de modifier la formule définissant F1 dans l'onglet « Utiliser une fonction numérique ». Attention, l'instruction pour écrire x^2 est pour $(x, 2)$.

b. Si $0 \leq u_0 < 1$, la suite (u_n) semble converger vers 0. Si $u_0 = 1$, la suite est constamment égale à 1. Et si $u_0 > 1$, alors la suite semble diverger (tendre vers $+\infty$).

Par exemple, avec $u_0 = 1,05$:



15 1. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$\left. \begin{array}{l} u(x) = x ; u'(x) = 1 \\ v(x) = 1 + 2x ; v'(x) = 2 \end{array} \right\}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et :

$$f'(x) = \frac{1 \times (1 + 2x) - 2x}{(1 + 2x)^2}.$$

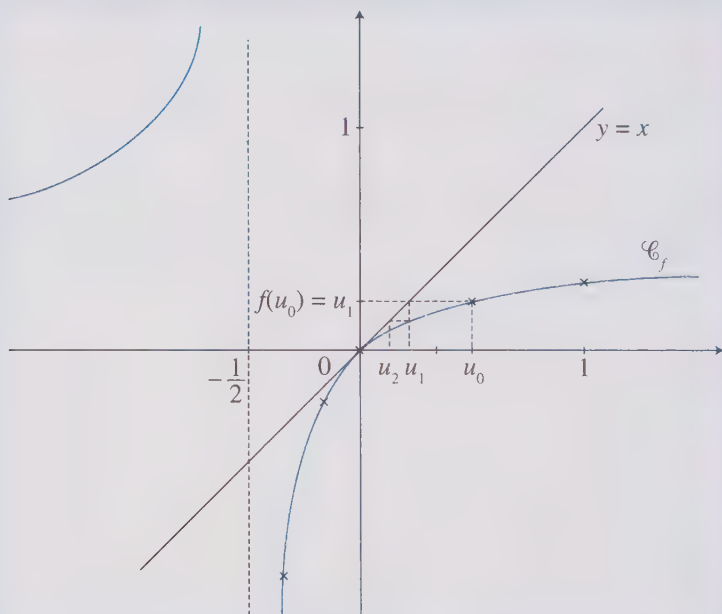
$f'(x) = \frac{1}{(1 + 2x)^2}$ et un carré est toujours positif, donc le tableau de variation de f

est :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

En cas de difficultés, voir le chapitre 3. sur la dérivation, cours V.3.

2.



3. a. $w_1 = \frac{1}{1+2 \times 1} = \frac{1}{3}$; $w_2 = \frac{2}{1+2 \times 2} = \frac{2}{5}$.

b. $w_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc (w_n) est strictement croissante.

Voir cours 1.2. ou savoir-faire 2.

4. b. La suite (u_n) semble décroissante et semble converger vers 0.

c. $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} + 1$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+2u_n}} + 1 = \frac{1+2u_n}{u_n} + 1$.

$$v_{n+1} = \frac{1 + 2u_n + u_n}{u_n} = \frac{1 + 3u_n}{u_n} \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1 + 3u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} - 1 = \frac{1 + 3u_n - 1 - u_n}{u_n} \\ &= \frac{2u_n}{u_n} = 2. \end{aligned}$$

$v_{n+1} - v_n$ est constant, donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

 $u_0 > 0$ et f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc $f(u_0) > f(0)$ soit $u_1 > 0$. De proche en proche, on montre que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui justifie l'hypothèse $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela se démontrera « par récurrence » en terminale.

$$\text{d. } v_0 = \frac{1}{u_0} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

$$\text{D'où } v_n = v_0 + rn = 3 + 2n.$$

$$\text{Alors } \frac{1}{u_n} + 1 = 3 + 2n \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = 2 + 2n.$$

$$\text{D'où } u_n = \frac{1}{2 + 2n}.$$

 On a bien $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. Soit $g : x \mapsto 2x + 2$. g est une fonction affine strictement croissante, car de coefficient directeur positif, et $g > 0$ sur $[0; +\infty[$, donc $\frac{1}{g}$ est une fonction strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et donc (u_n) est une suite strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

 Si vous n'avez pas su répondre à cette question, revoyez le chapitre 1, paragraphe fonction $\frac{1}{u}$.

16 1. Case A2 : 1 ; case B2 : 0 ; case C2 : 1. Case A3 : formule = A2 - 1 ; case B3 : formule = B2 + C2 ; case C3 : formule = B2 .

On étend la ligne 3 jusqu'à la ligne 31. Pour la suite (T_n) , dans la case D2 : formule = B2 + C2 . On étend cette formule jusqu'à la case D31.

	A	B	C	D
1	n	A_n	I_n	T_n
2	1	0	1	1
3	2	1	0	1
4	3	1	1	2
5	4	2	1	3
6	5	3	2	5
7	6	5	3	8

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+2} = A_{n+2} + I_{n+2}.$$

Or $A_{n+2} = A_{n+1} + I_{n+1} = T_{n+1}$ et $I_{n+2} = A_{n+1} = A_n + I_n = T_n$ donc :

$$T_{n+2} = T_{n+1} + T_n.$$

3. En divisant membre à membre par T_n ($\neq 0$ car c'est un nombre de lapins) :

$$\frac{T_{n+2}}{T_n} = \frac{T_{n+1}}{T_n} + \frac{T_n}{T_n} = \frac{T_{n+1}}{T_n} + 1.$$

D'où la relation (E) :

$$\frac{T_{n+2}}{T_{n+1}} \times \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{T_{n+2}}{T_n} \times \frac{T_{n+1}}{T_{n+1}} = \frac{T_{n+1}}{T_n} + 1.$$

4. Colonne E du tableur, on entre en E2 la formule = D3 / D2 .

On étend cette formule jusqu'à la ligne 30.

Il semble que les termes de la suite (u_n) convergent vers la valeur 1,618 033 99.

5. Les termes de la suite (T_n) sont tous positifs, puisqu'ils désignent le nombre de couples de lapins. Donc tous les termes de la suite (u_n) sont positifs. Ils ne peuvent pas converger vers une valeur strictement négative, sinon cela impliquerait qu'à partir d'un certain rang, il y aurait des termes (u_n) négatifs puisque très proches de la limite.

On en déduit que la limite ϕ est positive.

6. $\frac{T_{n+2}}{T_{n+1}} = u_{n+1}$ tend vers la même limite que $\frac{T_{n+1}}{T_n} = u_n$, car c'est le terme juste après u_n (plus proche encore de la limite que u_n).

7. a. et b. (E) $\Leftrightarrow u_{n+1} \times u_n = u_n + 1$. Alors, lorsque n est tellement grand que u_n est très proche de la limite, on arrive à $\phi \times \phi = \phi + 1 \Leftrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0$.

Pour cette équation du second degré d'inconnue ϕ ,

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$, donc il y a 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,62 < 0,$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618 > 0.$$

Comme d'après le 5., φ est positive, alors $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8. Dans la cellule F2, on saisit = ABS(E2 - (1 + RACINE(5)) / 2), on l'étend avec la poignée de recopie et on constate que $|u_n - \varphi| < 10^{-6}$ à partir de $n = 17$.

Attention, penser à augmenter le nombre de décimales de l'affichage.

17 1. a. $u_1 = 4\,800 + 4\,800 \times \frac{5}{100} = 5\,040$.

b. Chaque année, le loyer augmente de 5 %, donc :

$$u_{n+1} = u_n + u_n \times \frac{5}{100} = u_n \left(1 + \frac{5}{100}\right)$$

$$u_{n+1} = 1,05 u_n.$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $u_0 = 4\,800$ €.

c. Alors $u_n = u_0 \times q^n = 4\,800 \times 1,05^n$;

$$u_8 = 4\,800 \times 1,05^8 \approx 7\,091,79 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

u_9 est le loyer payé pendant la 9^{ème} et dernière année. Soyez vigilant sur les indices !

d. $q \neq 1$, donc $u_0 + u_1 + \dots + u_8 = u_0 \times \frac{1 - q^{8+1}}{1 - q} = 4\,800 \times \frac{1 - 1,05^9}{1 - 1,05} \approx 52\,927,51$

à 10^{-2} près. La somme totale payée à l'issue des 9 années sera 52 927,51 €.

2. a. $v_1 = 4\,800 + 275 = 5\,075$ €.

b. Le loyer augmente de 275 € par an, donc $v_{n+1} = v_n + 275$, donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 275$ et de premier terme $v_0 = 4\,800$.

c. Alors $v_n = v_0 + rn$ soit $v_n = 4\,800 + 275n$.

$$v_8 = 4\,800 + 8 \times 275 = 7\,000 \text{ €.}$$

d. La somme payée à l'issue des 9 années est :

$$v_0 + \dots + v_8 = (8+1) \frac{(v_0 + v_8)}{2} = 9 \times \frac{4\,800 + 7\,000}{2} = 53\,100.$$

Voir le savoir-faire 3. et 4. en cas de difficultés !

3. Le contrat le plus avantageux est le premier.

18 1. a. $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 = -\frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 = -\frac{1}{4}$;

$$u_3 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 - 1 = \frac{7}{8} \geq 0.$$

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un rang $n \geq 4$ pour lequel $u_n < 0$.

Soit $N \geq 4$ le plus petit de ces entiers n . Alors $3 \leq N-1 < N$, donc $u_{N-1} \geq 0$.

Or $u_N = \frac{1}{2}u_{N-1} + (N-1) - 1 = \frac{1}{2}u_{N-1} + N - 2$ avec :

$$\left. \begin{array}{l} u_{N-1} \geq 0, \text{ donc } \frac{1}{2}u_{N-1} \geq 0 \\ N \geq 4, \text{ donc } N - 2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ donc } u_N \geq 0.$$

Il y a une contradiction, donc l'hypothèse est fausse, et pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq 0$.

 Vous verrez en terminale le principe de démonstration par récurrence qui affirme qu'une propriété « initialisable » (ici $u_3 \geq 0$) vraie de proche en proche (si $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} \geq 0$) ou « héréditaire », est vraie pour tout $n \geq 3$.

b. Soit $n \geq 3$: $u_n \geq 0$, donc $\frac{1}{2}u_n \geq 0$.

Alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \geq n - 1$. Or $n - 1 = (n + 1) - 2$,

donc si on pose $N = n + 1$, alors $N \geq 4$ et $u_N \geq N - 2$.

Donc, pour tout $n \geq 4$, on a $u_n \geq n - 2$.

c. $(n - 2)$ tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc u_n étant supérieur à $n - 2$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24$ donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n - 8 + 24 = 2u_n + 4n - 4 - 8n + 16 \\ &= 2u_n - 4n + 12 = \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24). \end{aligned}$$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$v_0 = 4u_0 - 8 \times 0 + 24 = 28$, donc 28 est son premier terme.

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$ et $28 > 0$, (v_n) est décroissante.

 Voir le cours III.4.

b. De **a.** on déduit $v_n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4u_n - 8n + 24$, soit :

$$4u_n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8n - 24.$$

D'où $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

c. D'après cette expression, (u_n) est la somme de $x_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, qui est le terme d'indice n d'une suite géométrique de premier terme 7 et de raison $\frac{1}{2}$, et de $y_n = 2n - 6$ qui est le terme d'indice n d'une suite arithmétique de premier terme -6 et de raison 2 :

$$u_n = x_n + y_n.$$

Les suites arithmétiques se reconnaissent de 2 manières : $u_{n+1} = u_n + r$ ou $u_n = u_0 + r \times n$.

Les suites géométriques également :

$$u_{n+1} = u_n \times q \quad \text{ou} \quad u_n = u_0 \times q^n.$$

$$3. S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = x_0 + y_0 + x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n$$

$$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n + y_0 + y_1 + \dots + y_n$$

$$S_n = x_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{(n+1)(y_0 + y_n)}{2} \quad \text{car } q \neq 1$$

$$S_n = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{(n+1)(-6 + (2n-6))}{2}$$

$$S_n = \frac{7 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{2}} + \frac{(n+1)(-12 + 2n)}{2}$$

$$S_n = 14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n-6).$$

19 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1+n > 0$, donc u_n est bien défini et positif.

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{1+(n+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}.$$

Or, $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$, donc $\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1$, d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Comme $u_n > 0$, $u_{n+1} > u_n$: (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

 Autre méthode :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0, \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} > u_n$.

- Commencez toujours par calculer u_{n+1} . Ici u_n est sous forme de quotient, ce qui

incite à calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

- N'oubliez pas de vérifier que les u_n sont tous positifs, ou tous négatifs avant d'utiliser $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. 1, 3, 5 sont les premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Il faut trouver le rang N du nombre 2 011.

$$\text{Or : } u_N = 2\,011 = u_0 + r \times N \Leftrightarrow 2\,011 = 1 + 2N$$

$$\Leftrightarrow 2\,010 = 2N \Leftrightarrow 1\,005 = N.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } 1 + 3 + 5 + \dots + 2\,011 &= \frac{(N+1)(u_0 + u_N)}{2} \\ &= 1\,006 \times \frac{1 + 2\,011}{2}. \end{aligned}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2\,011 = 1\,012\,036.$$

 Voir le cours II.2. et 3. en cas de difficultés.

$$\boxed{20} \text{ 1. } u_1 = 5\,000 + 5\,000 \times \frac{2,5}{100} = 5\,125 \text{ € ;}$$

$$u_2 = 5\,125 + 5\,125 \times \frac{2,5}{100} \approx 5\,253,13 \text{ € à } 10^{-2} \text{ près ;}$$

$$u_3 = 5\,253,13 + 5\,253,13 \times \frac{2,5}{100} \approx 5\,384,45 \text{ € à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$2. u_{n+1} = u_n + u_n \times \frac{2,5}{100} = u_n \times (1 + 0,025) = u_n \times 1,025.$$

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5\,000$ et de raison $q = 1,025$.

3. On en déduit que :

$$u_n = u_0 \times q^n = 5\,000 \times 1,025^n.$$

 Voir le cours III.2. et 3. en cas de difficultés.

4. $u_{10} = 5\,000 \times 1,025^{10} \approx 6\,400,42$.

On dispose de 6 400,42 € au bout de 10 ans.

5. On veut atteindre 10 000 €. À l'aide de la fonction TABLE de la calculatrice, on constate que $u_{28} \approx 9\,982,48$ € et $u_{29} \approx 10\,232,04$ €, donc il faut attendre 29 ans pour doubler le capital initial.

Le tableau de valeurs s'obtient par la formule $Y = 5000 \times 1,25^X$, où X démarre à 0 avec un pas de 1.

21 1. $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 1 = \frac{2}{3} \times 6 + 1 = 5$.

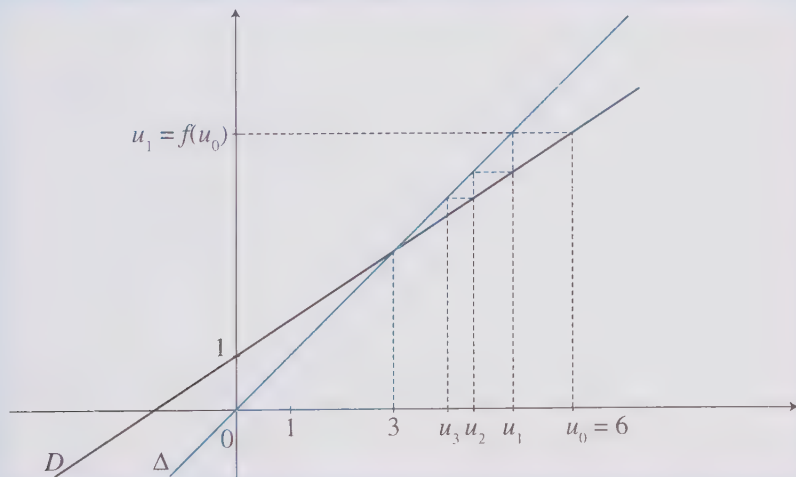
$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + 1 = \frac{2}{3} \times 5 + 1 = \frac{13}{3}.$$

$$u_1 - u_0 = 1 \neq u_2 - u_1$$

donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{6} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{13}{3}}{5} = \frac{13}{15} \neq \frac{5}{6}, \text{ donc } (u_n) \text{ n'est pas géométrique.}$$

2. a. et b.



c. La suite (u_n) semble décroissante et elle semble converger vers 3.

3. a. $v_n = u_n - 3$, donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$ avec $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} \times 3 = \frac{2}{3}(u_n - 3) = \frac{2}{3}v_n,$$

donc v_n est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

$$v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3.$$

b. Alors $v_n = v_0 \times q^n$ soit $v_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

donc $u_n - 3 = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

soit $u_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

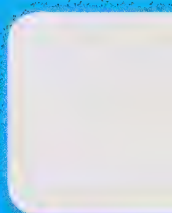
$0 < \frac{2}{3} < 1$, donc (v_n) est strictement décroissante, et elle tend vers 0.

Comme $u_n = v_n + 3$, alors (u_n) est aussi décroissante, et elle tend vers $0 + 3 = 3$.



Voir le cours III.2. en cas de difficultés.

Probabilités et statistiques





Statistiques

On note $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ les r valeurs distinctes d'une série statistique et $n_1, n_2, \dots, n_r$ les effectifs associés. On note $(x_i; n_i)_{1 \leq i \leq r}$ cette série.

I DISPERSION D'UNE SÉRIE STATISTIQUE AUTOUR DE SA MOYENNE

1. Rappels de seconde et symbole Σ

■ **Définition :** la **moyenne** de la série est :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_r x_r}{n}$$

où $n_1 + n_2 + \dots + n_r$ est l'effectif total.

■ **Notation :** $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^r n_i x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i x_i$

■ **Propriété :** soit $f_i = \frac{n_i}{n}$ la fréquence de x_i , pour tout entier i compris entre 1 et r , on a aussi :

$$\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_r x_r = \sum_{i=1}^r f_i x_i$$

2. Paramètres de dispersion autour de la moyenne

■ Définitions

• La **variance** de la série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne

$$V = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{n}$$

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i (x_i - \bar{x})^2$$

• L'écart-type est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

- La variance d'une série est toujours positive ou nulle (cas d'une série constante), donc son écart-type est bien défini (et lui-même positif ou nul).
- Ces deux paramètres augmentent avec la dispersion des valeurs de la série par rapport à la moyenne $\bar{x}$.
- L'écart-type est exprimé dans la même unité que les valeurs de la série.
- On résume souvent une série statistique à l'aide du couple (moyenne ; écart-type).

3. Effet d'un changement affine

Soit a et b deux réels fixés. On note $y_i = ax_i + b$ pour tout entier i compris entre 1 et r .

Propriété : Si on note V_x et σ_x la variance et l'écart-type de la série $(x_i ; n_i)_{1 \leq i \leq r}$, la série $(y_i ; n_i)_{1 \leq i \leq r}$ a :

- pour moyenne $\bar{y} = a\bar{x} + b$;
- pour variance $V_y = a^2 V_x$, donc pour écart-type $\sigma_y = |a| \sigma_x$.

II DISPERSION D'UNE SÉRIE STATISTIQUE AUTOUR DE SA MÉDIANE

1. Rappels de seconde

■ **Définition :** La **médiane** M_e sépare la série statistique en deux séries de même effectif :

- au moins 50 % de la population prend une valeur inférieure ou égale à M_e ;
- au moins 50 % de la population prend une valeur supérieure ou égale à M_e .

■ Pour lire la médiane, les valeurs x_i doivent être **rangées dans l'ordre croissant**.

■ Propriété

- Si l'effectif total n est impair ($n = 2k + 1$), la médiane est la valeur centrale de la série (la $k + 1$ -ième valeur).
- Si n est pair, la médiane est, par convention, la moyenne des deux valeurs centrales (la moyenne de la k -ième et de la $k + 1$ -ième valeur).

EXEMPLES :

- la médiane de la série 1-2-2-4-5-7-7-7 est $\frac{4+5}{2} = 4,5$.
- la médiane de la série 1-2-2-4-5-7-7 est 4.

■ Définition

Les **quartiles** partagent la série en quatre séries de même taille :

- **Premier quartile** Q_1 : c'est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % de la population prend une valeur inférieure ou égale à Q_1 .

- **Deuxième quartile Q_2** : c'est la médiane.
- **Troisième quartile Q_3** : c'est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % de la population prend une valeur inférieure ou égale à Q_3 .

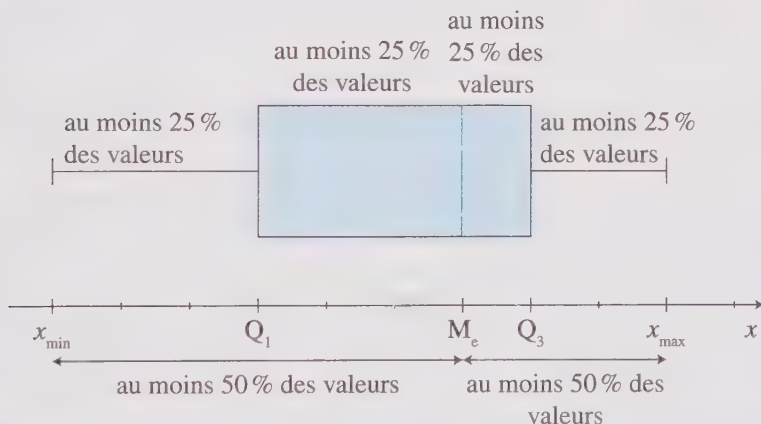
▲ Cette définition de la médiane est la même que celle choisie par les fabricants de calculatrices, mais ce n'est pas le cas pour les 1^{er} et 3^e quartiles.

■ **Définition** : la différence $Q_3 - Q_1$ est appelée **écart interquartile** de la série.

▲ On peut résumer une série statistique à l'aide du couple (médiane, écart interquartile).

2. Diagramme en boîte à moustaches

■ **Définition** : Sur un axe gradué, pour faire ressortir les valeurs extrêmes de la série, la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 , on représente un **diagramme en boîte** (à moustaches).



▲ Pour le choix de l'échelle, on commence par calculer l'étendue de la série $x_{\max} - x_{\min}$.

■ Définition :

Les **déciles** partagent la population en 10 séries de même taille.

- le **premier décile D_1** est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 10 % de la population prend une valeur inférieure ou égale à D_1 .
- le **neuvième décile D_9** est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 90 % de la population prend une valeur inférieure ou égale à D_9 .

Si on ne souhaite pas prendre en compte les valeurs extrêmes de la série, on peut dessiner une boîte à moustaches **élaguée** aux déciles D_1 et D_9 . Le maximum et le minimum peuvent éventuellement figurer sous forme de points.

SAVOIR-FAIRE

On donne la série statistique suivante :

	- 3	0	3	4	6
	10	9	8	10	5

1. Calculer les paramètres de cette série avec la calculatrice

1. Sur Texas Instrument

Dans le menu STATS, Éditer

On inscrit les valeurs - 3 ; 0 ; 3 ; 4 ; 6 dans la colonne L_1 .

On inscrit les valeurs 10 ; 9 ; 5 ; 10 ; 5 dans la colonne L_2 .

Dans le menu CALC, on choisit enfin 1-Var stats ($L_1 ; L_2$). On trouve :

- la moyenne : $\bar{x} \approx 1,52$ à 10^{-2} près ;
- l'écart-type, noté σ : $\sigma \approx 3,1$ à 10^{-2} près ;
- le minimum de la série MinX : - 3 ;
- le premier quartile Q_1 : 0 ;
- la médiane M_e : 3
- le troisième quartile Q_3 : 4 ;
- le maximum de la série MaxX : 6.

En cas d'erreur, vérifier que vous avez saisi L_1 avec les touches 2nd + 1. Ce n'est pas la lettre L suivie du chiffre 1.

Vérifier aussi la présence d'une virgule entre L_1 et L_2 .

En cas d'erreur de dimension, vérifier que les L_1 et L_2 comportent le même nombre de valeurs.

Sur une série non triée par effectifs (ex : 0 ; 2 ; - 1 ; - 1 ; 3 ; 0 ; - 4 ; 3), on inscrit les valeurs de la série dans la colonne L_1 et rien dans la colonne L_2 . La syntaxe est alors 1-Var stats L_1 (ou 1-Var stats).

Voir le corrigé de l'exercice 8.

2. Sur Casio

Dans le menu STATS :

On inscrit les valeurs - 3 ; 0 ; 3 ; 4 ; 6 dans la colonne List1.

On inscrit les valeurs 10 ; 9 ; 5 ; 10 ; 5 dans la colonne List2.

On effectue les réglages suivants (à vérifier systématiquement !) dans l'onglet CALC, SET ou REG :

1 Var XList : List 1

1 Var Freq : List2

Dans CALC, on choisit enfin 1 VAR. On trouve :

- la moyenne : $\bar{x} \approx 1,52$ à 10^{-2} près ;
- l'écart-type, noté $x\sigma n$: $\sigma \approx 3,1$ à 10^{-2} près ;
- le minimum de la série $\min X$: -3 ;
- le premier quartile Q_1 : 0 ;
- la médiane Med : 3 ;
- le troisième quartile Q_3 : 4 ;
- le maximum de la série $\max X$: 6 .

En cas d'erreur de syntaxe, vérifier que vous avez saisi List à l'aide de la combinaison SHIFT + 1 et non pas en toutes lettres LIST.

En cas d'erreur de dimension, vérifier que les List1 et List2 comportent le même nombre de valeurs.

Sur une série non triée par effectifs (ex : $0 ; 2 ; -1 ; -1 ; 3 ; 0 ; -4 ; 3$), on inscrit les valeurs de la série dans la colonne List1 et rien dans la colonne List2. Le réglage doit alors être :

1 Var XList : List1

1 Var Freq : 1

Voir le corrigé de l'exercice 8.

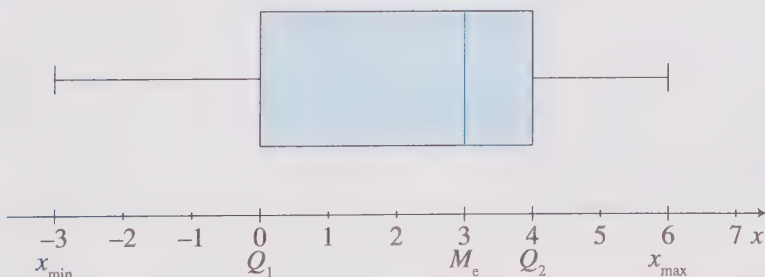
2. Représenter cette série à l'aide d'une boîte à moustaches

1. On détermine les minimum, 1^{er} quartile, médiane, 3^e quartile et maximum à l'aide du Savoir-Faire 1 :

$$x_{\min} = -3, Q_1 = 0 ; M_e = 3 ; Q_3 = 4 ; x_{\max} = 6.$$

2. On choisit l'échelle après avoir calculé l'étendue, ici $6 - (-3) = 9$. On choisit 1 cm pour une unité.

3. On représente les paramètres précédents sur un axe gradué comme suit :



1. On fait parfois apparaître aussi la moyenne dans la boîte à moustaches sous la forme d'une croix.

2. Pour une boîte élarguée aux déciles, on représente D_1 et D_9 à la place de $x_{\min}$ et $x_{\max}$.

EXERCICES D'APPLICATION

1 EFFET DE STRUCTURE (1)

★ 5 min ► P. 233

1. L'entreprise A emploie 120 ouvriers, payés en moyenne 1400 € par mois, et 35 cadres, payés en moyenne 3000 € par mois.

L'entreprise B emploie 85 ouvriers, payés en moyenne 1200 € par mois, et 75 cadres, payés en moyenne 2500 € par mois.

En moyenne, quelle entreprise paye le mieux ses employés ?

1. 1 400 € de salaire moyen pour 120 ouvriers, c'est comme si chacun des 120 ouvriers touchait 1 400 € par mois.

2. On voit ici l'effet de « structure » – coefficients ou taille des paquets – sur la moyenne de la série.

2. Jean et Jeanne ont obtenu exactement les mêmes notes au Baccalauréat, mais ils n'avaient pas choisi la même spécialité. Ont-ils obtenu leur Bac ?

	11	8	13	12	6	8	Total
	7 + 2	6	4	5	3	2	29
	7	6 + 2	4	5	3	2	29

2 À LA MAIN

★★ 15 min ► P. 233

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ de la série statistique suivante, puis remplir le tableau afin de calculer la médiane, les quartiles et l'écart-type (arrondi à 10^{-2} près) de cette série.

	-3	-1	0	2	4	5	Total
	2	3	2	3	7	3	

2. Construire la boîte à moustaches de cette série statistique.

3. Retrouver les paramètres de la série à l'aide des outils statistiques de votre calculatrice : que constatez-vous ? Quelle définition des quartiles utilise-t-elle ?

Pour l'utilisation de la calculatrice, voir le savoir-faire 1.

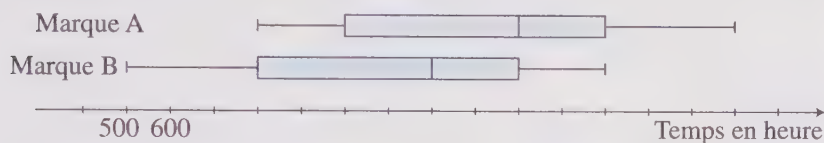
3 VRAI OU FAUX ?



5 min

► P. 234

Les diagrammes en boîte suivants, élagués aux déciles, donnent la durée de vie des ampoules de deux marques concurrentes.



- 75 % des ampoules de la marque A fonctionnent moins de 1 600 heures.
- Les trois quarts des ampoules de la marque B fonctionnent moins longtemps que la moitié des ampoules de la marque A.
- 25 % des ampoules de la marque B ont une durée de vie comprise entre 500 et 800 heures.
- 80 % des ampoules de la marque A ont une durée de vie comprise entre 800 et 1 900 heures.
- Les ampoules de la marque B ont une durée de vie plus dispersée que celles de la marque A.

4 VALEURS EXTRÊMES (1)



10 min

► P. 235

Voici le résultat des mesures obtenues à un contrôle de vitesse en agglomération :

	12	30	40	42	44	46	48
	1	1	4	6	5	9	7

	50	51	53	54	60	192
	5	4	3	3	1	1

- Déterminer moyenne et écart-type de cette série statistique.
- Construire la boîte à moustache de cette série statistique.
- Construire la boîte à moustaches élaguée aux déciles D_1 et D_9 . Pourquoi est-elle préférable à celle de la question 2 ?
- On décide que les valeurs 12 et 192 sont aberrantes (une voiture qui démarre ou une erreur de mesure) et on choisit de les éliminer. Calculer les nouveaux paramètres de cette série élaguée. Sur quels paramètres les valeurs extrêmes ont-elles le plus d'influence ?

5 QUELLE SOIRÉE ?



10 min

► P. 236

Deux amis de 20 ans veulent passer le nouvel an avec des gens de leur âge. Ils hésitent entre deux soirées.

1. Les organisateurs ont mis en ligne les âges moyens et médians des participants déjà inscrits :

Soirée VIP : âge moyen 22 ans, âge médian 20 ans.

Soirée HYPE : âge moyen 33 ans, âge médian 36 ans.

Quelle soirée leur conseilleriez-vous ?

2. Voici le détail des âges des 14 participants déjà inscrits à chacune des soirées.

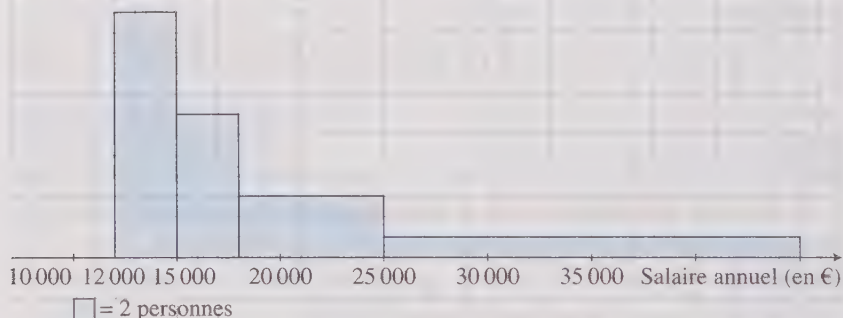
	1	2	4	5	7	8	8	30	31	34	35	42	50	51
	20	20	20	20	21	23	36	36	40	40	41	43	50	52

Quelles données manquaient sur le site internet des organisateurs qui auraient aidé au choix des deux amis ? Les calculer.

6 EFFET DE STRUCTURE (2)

★ 10 min ► P. 237

L'histogramme donne la répartition des salaires annuels dans une entreprise.



1. a. Compléter le tableau suivant :

	[12 000 ; 15 000[	[15 000 ; 18 000[	[18 000 ; 25 000[	[25 000 ; 45 000]

b. On suppose la répartition des salaires uniforme à l'intérieur de chaque classe : en remplaçant chaque classe par son centre, donner une approximation de la moyenne et de l'écart-type de cette série (on arrondira à l'euro).

2. Reprendre la question précédente avec cette fois des classes d'amplitude 1 000 ([12 000 ; 13 000[, ...). Que constate-t-on ? Comment l'expliquer ?

7 QCM

★★ 15 min ► P. 237

Une seule réponse est correcte : la déterminer.

1. Dans une série statistique de 82 valeurs :

- a. le 1^{er} quartile est 21 ; b. la médiane est la 42^e valeur ;
c. le 3^e quartile est la 62^e valeur ; d. l'écart inter-quartile est de 41.

2. On note Q_1 et Q_2 les 1^{er} et 3^e quartiles, m_e la médiane d'une série statistique.
- $Q_3 = 3 \times Q_1$.
 - $Q_1 < m_e$.
 - Doubler les effectifs ne change pas la valeur médiane.
 - Doubler les valeurs de la série ne change pas la valeur médiane.
3. On soustrait 1 à chaque valeur de la série.
- Le premier quartile est inchangé.
 - La moyenne est inchangée.
 - L'écart interquartile est inchangé.
 - La longueur de la boîte à moustaches diminue de 1.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

8 VALEURS EXTRÊMES (2)

★★ 20 min ► P. 239

Les valeurs approchées seront données au centième.

Voici les résultats annuels d'un élève en Mathématiques et en Français, rangés dans l'ordre croissant.

Notes de Français : 4 ; 9 ; 9 ; 10 ; 13 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17.

Notes de Mathématiques : 9 ; 10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 14.

- Dans quel matière cet élève est-il le plus performant ?
 - Dans quel matière cet élève est-il le plus régulier ?

 La moyenne et l'écart-type d'une série correspondent respectivement à des indicateurs de position et de dispersion.

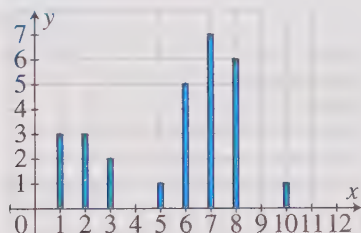
- Avec la calculatrice, déterminer la médiane et l'écart interquartile des notes de Français.

 Pour l'utilisation de la calculatrice, voir savoir-faire 1.

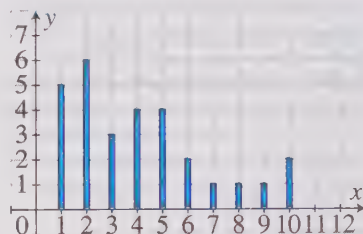
- Le professeur de Français considère le 4 comme un accident et décide de ne pas en tenir compte.
 - Calculer moyenne, écart-type, médiane et écart interquartile des notes modifiées.
 - Déterminer les variations, à 0,1 % près, de ces paramètres : lesquels sont les plus «sensibles» aux valeurs extrêmes ?

Une société informatique dispose d'un service d'assistance téléphonique qui emploie 4 personnes. On a mesuré la durée des appels téléphoniques reçus par chacun au cours de la matinée. Sur les graphiques ci-dessous, x représente la durée des appels en minutes.

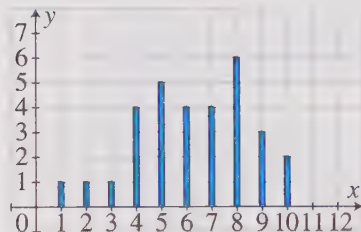
a.



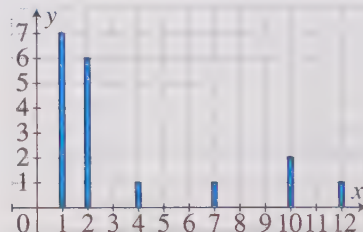
b.



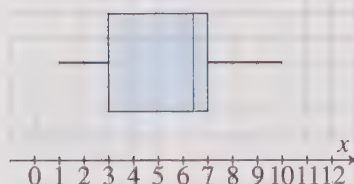
c.



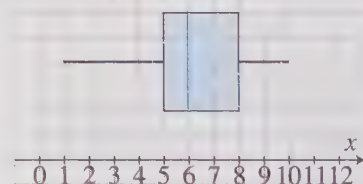
d.



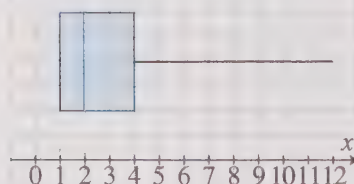
i.



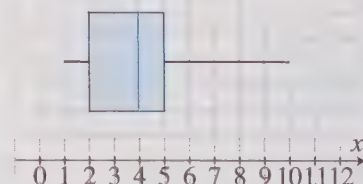
ii.



iii.



iv.



1. Associer, sans calcul, mais en justifiant, les diagrammes en barres aux boîtes à moustaches correspondantes.

2. L'un des employés s'occupe exclusivement des mots de passe perdus (ce qui est très rapide la plupart du temps) et des nouvelles inscriptions : lequel ?

10 MÉTÉO

★★ 25 min ► P. 241

Les maires de deux villes, Beauséjour et Beautemps, revendiquent chacun le titre de la ville la plus agréable à vivre.

1. On a relevé les températures moyennes mensuelles des deux villes.

	J	F	M	A	M	J
Beauséjour (°C)	2,7	6,5	9,3	11	14,8	15,8
Beautemps (°C)	7,6	8,8	9,2	11,5	14,8	17,6

	J	A	S	O	N	D
Beauséjour (°C)	23,5	20,5	14,4	12,2	8,6	4,1
Beautemps (°C)	17,9	18,3	17,2	13,5	11,4	8,6

a. Calculer la moyenne m , l'écart-type σ , la médiane M_e et les quartiles Q_1 et Q_3 de ces deux séries. (On pourra noter m' la moyenne pour Beautemps...)

► Pour l'utilisation de la calculatrice, voir savoir-faire 1.

b. Quel maire a raison si on juge que la ville la plus agréable est celle ayant :

- La moyenne annuelle la plus élevée ?
- Les six mois les plus chauds ?
- Les températures les plus régulières autour de la moyenne ?
- Les températures les plus régulières autour de la médiane ?
- L'hiver le plus doux ?
- L'été le plus chaud ?

► Pour les différents paramètres de dispersion, voir cours II.2 et I.2.

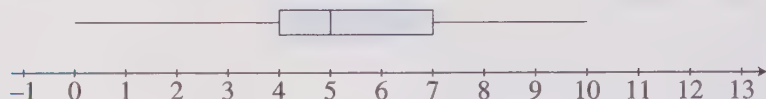
2. On considère cette fois le nombre d'heures d'ensoleillement journalier au cours du mois d'avril dans la commune de Beauséjour.

	$[0; 2[$	$[2; 4[$	$[4; 6[$	$[6; 8[$	$[8; 10]$
Nombre d'heures	3	6	12	5	4
Fréquence absolue					
Fréquence relative					

a. Compléter la ligne des fréquences en %, puis des fréquences cumulées croissantes F.C.C. de cette série.

b. En déduire le polygone des fréquences cumulées croissantes, puis une valeur approchée du couple (médiane ; écart interquartile) de la série par lecture graphique.

c. Le nombre d'heures d'ensoleillement dans la commune de Beautemps est résumé par la boîte à moustaches ci-dessous.



Comparer les couples (médiane ; écart interquartile) des deux séries. Que peut-on en conclure ?

d. Le maire de Beautemps peut-il affirmer que sa ville est la plus ensoleillée ?

11 DISPERSION RELATIVE (1)

★★ 10 min ► P. 242

Pour une série statistique de moyenne $\bar{x}$ et d'écart-type $\sigma \neq 0$, on appelle **coefficient de variation** le nombre $C = \frac{\sigma}{\bar{x}}$, qui donne la proportion entre l'écart-type et la moyenne de cette série.

1. On a relevé le prix d'une clé USB sur internet, en supermarché et dans des magasins d'informatique :

	Internet	Supermarché	Magasin d'informatique
Prix (€)	12,3	15	14,7
Écart-type (€)	1,45	1,57	1,52

a. Où le prix semble-t-il le plus régulier ?

b. Même question en comparant les coefficients de variation.

2. Dans une ferme, on a relevé le poids des agneaux et des veaux à la naissance :

	Agneaux	Veaux
Poids (kg)	4,2	38
Écart-type (kg)	1,7	6,1

a. Pourquoi la comparaison des écarts-types est-elle inadéquate pour comparer la dispersion des poids entre agneaux et veaux ?

b. En utilisant le coefficient de variation, quelle espèce a un poids de naissance le plus régulier ?

3. Quelle est l'utilité du coefficient de variation ?

12 CONTRÔLE DE QUALITÉ (1)

★★ 20 min ► P. 243

1. Une biscuiterie fabrique des gâteaux aux « 25 pépites de chocolat ».

La machine distribuant les pépites de chocolat est réglée pour que le nombre de pépites par gâteau soit bien, en moyenne, de 25 pépites à plus ou moins 1 près, son écart-type ne dépassant pas 2.

On prélève 200 gâteaux et on relève le nombre de pépites de chocolat.

	21	22	23	24	25	26	27	28	30
	2	14	22	41	56	42	12	10	1

Le réglage de la machine est-il satisfaisant ?

2. L'étiquette sur le paquet assure qu'un gâteau comporte moins de 10 % de matière grasse. L'analyse des 200 gâteaux donne les taux suivants :

	[8,5; 9[	[9; 9,5[	[9,5; 10[	[10; 10,5[	[10,5; 11[	[11; 11,5[	[11,5; 12]
	2	12	38	66	65	12	5

a. Calculer, en supposant la répartition uniforme à l'intérieur des classes, la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de cette série. On arrondira les résultats au centième.

Si la répartition est uniforme à l'intérieur des classes, moyenne et écart-type se calculent à l'aide du centre des classes.

b. Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.

Pour la méthode, voir l'exercice 10.

c. L'étiquetage est jugé conforme si :

- au moins 75 % des gâteaux ont un taux de matière grasse compris entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$;
- 10 % est dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$.

L'étiquetage est-il jugé conforme au regard de l'échantillon contrôlé ?

13 DISPERSION RELATIVE (2)

★★ 25 min ► p. 244

Un ornithologue a mesuré le poids et la taille d'un groupe de manchots empereurs adultes.

	103	101	127	115	108	109	113	130	128	104
	28	27	42	40	37	30	39	45	44	26

	108	125	123	105	112	127	120	105	111	128
	35	40	40	30	39	44	40	31	36	42

1. Sur tableur, saisir les tailles x_1 à x_{20} dans les cellules A1 à A20 et les poids y_1 à y_{20} dans les cellules B1 à B20.

2. Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ_x de la série des tailles dans les cellules A21 et A22. En déduire, par recopie automatique, la moyenne $\bar{y}$ et l'écart-type σ_y de la série des poids dans les cellules B21 et B22.

Vous trouverez directement les fonctions MOYENNE et ECARTYPE sur le tableur.

3. On veut comparer les dispersions de ces deux séries. Pour cela, on calcule les valeurs « centrées et réduites » associées :

$$x'_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \text{ et } y'_i = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}.$$

a. Quelle formule faut-il saisir dans la cellule C1 pour calculer x'_1 , de sorte qu'on puisse étendre cette formule pour calculer y'_1 dans la cellule D1, puis toutes les valeurs x'_i et y'_i dans les cellules C2 à D20 à l'aide de la poignée de recopie ?

$\bar{x}$ et σ_x étant des valeurs fixées, on doit bloquer la ligne 22 à l'aide de \$ pour éviter les erreurs lors de la recopie.

b. Calculer les moyennes $\bar{x}'$ et $\bar{y}'$ des séries obtenues dans les cellules C21 et D21, et leurs écarts-types dans les cellules C22 et D22.

Commenter le mot « centrées » et « réduites ».

c. Calculer, dans les cellules A23 à A27, le minimum, le premier quartile, la médiane, le troisième quartile et la valeur minimale de la série des tailles. Étendre ces formules pour les séries (y_i) , (x'_i) et (y'_i) .

Vous trouverez la fonction QUARTILE sur le tableur : elle permet de donner automatiquement les 5 valeurs demandées (utilisez l'assistant fonctions pour vous guider. Vous devrez donner la plage de données, puis le numéro du quartile : 0 pour le minimum, 1 pour Q_1 , 2 pour Q_2 , c'est-à-dire la médiane, 3 pour Q_3 , et 4 pour le maximum).

d. Copier les données de la plage A1 : B27 (A1 à B27) et les coller dans la plage F1 : G27, puis copier les données de la plage C1 : D20 et les coller dans la plage H1 : I20.

Puis à l'aide de la poignée de recopie, étendre les formules de la plage H1 : I20 jusqu'à la ligne 27.

Comparer les valeurs obtenues ainsi avec les paramètres calculés dans les cases A21 jusqu'à B27. Comment l'expliquer ?

e. Construire les diagrammes en boîte des séries réduites centrées, et les comparer.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

5

Statistiques

14 PARITÉ EN POLITIQUE ?

★★★ 25 min ▶ p. 246

Le Parlement français comporte 577 députés. Un voyant prédit qu'en 2050, 318 députés seront des femmes. La parité au sein du Parlement sera-t-elle respectée ? On va tenter d'y répondre à l'aide du tableur.

Sur la notion de parité, voir le chapitre 7, Savoir-faire 3.
L'instruction = ENT(ALEA() + 0,5) renvoie 0 avec la probabilité 0,5 et 1 le reste du temps.

On commencera par saisir le nom Échantillon 1 dans la cellule A1.

1. Si l'on convient d'associer le résultat 0 à un homme, expliquer comment simuler un échantillon de 577 individus respectant la parité à l'aide d'un tableur.
2. Calculer sa moyenne dans la cellule A580 : pourquoi correspond-elle à la fréquence des femmes dans cet échantillon ?
3. Simuler 100 échantillons de taille 577, et calculer les fréquences de femmes correspondantes.
4. Déterminer le 5^e centile a et le 95^e centile b de la série des fréquences de femmes pour les 100 échantillons. On pourra utiliser les instructions = CENTILE(A580:CV580;0,05) et = CENTILE(A580:CV580;0,95).

Le 5^e centile, ici a , d'une série statistique est une valeur pour laquelle au moins 5 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à a , et au moins 95 % sont supérieures ou égales à a . Le 95^e centile, ici b , d'une série statistique est une valeur pour laquelle au moins 95 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à b et au moins 5 % sont supérieures ou égales à b .

5. En se basant sur cet intervalle $[a ; b]$ de fluctuation empirique à 90 % :
 - a. Peut-on considérer que la parité sera respectée au seuil de 10 % au Parlement français ?
 - b. Quel doit être le nombre maximal de femmes au Parlement pour que l'on ne puisse pas rejeter l'hypothèse de parité au seuil de 10 % ?

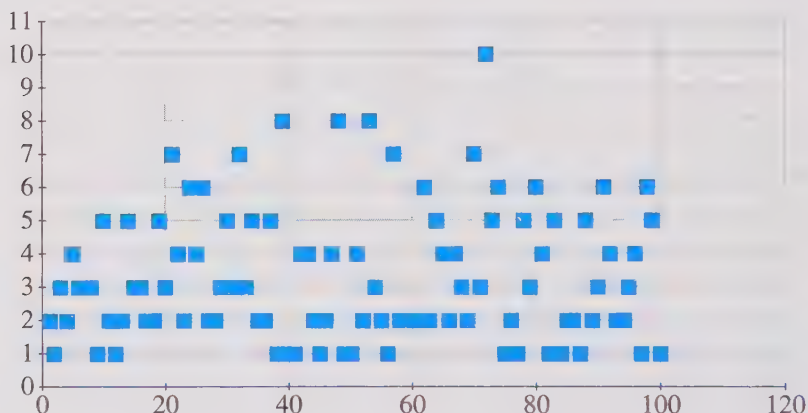
15 TAUX DE LEUCÉMIES ANORMAL ?

★★★ 25 min ▶ p. 247

Dans les années 1970, les habitants de Woburn, petite ville industrielle au Nord-Est des États-Unis, surtout les garçons dans certains quartiers de la ville, sont touchés par un grand nombre de leucémies infantiles. Les familles accusent la présence de décharges et de polluants. Les autorités accusent le hasard. Les données suivantes ont été relevées sur la période 1969-1979 :

	$n = 5\,969$
	$p = 9$
	$f = 0,000\,52$

1. Sur un tableur, que renvoie l'instruction $=\text{ENT}(\text{ALEA}() + 0,000\,52)$?
Expliquer comment on peut simuler ainsi 100 échantillons de taille $n = 5\,969$ prélevés au hasard dans une population de garçons où la probabilité de leucémie est $p = 0,000\,52$.
2. Quelle instruction permettra de déterminer le nombre de malades d'un échantillon ?
3. On a représenté graphiquement le nuage de points correspondant au nombre de malades pour ces 100 échantillons.



Déterminer graphiquement le nombre de ces échantillons pour lesquels on a 9 cas de leucémie ou plus : quel pourcentage des échantillons cela représente-t-il ?

4. La position des autorités semble-t-elle vraisemblable ?

16 LES SONDAGES

★★★ 25 min ► P. 247

Dans une population, on note p la proportion des votes qu'a obtenus un candidat. La semaine précédant l'élection, on a interrogé un échantillon de n personnes (qui disent la vérité) et on a obtenu une proportion f d'intentions de vote pour ce candidat.

Partie A. Avec un théorème de seconde

1. Rappeler le théorème de l'intervalle de confiance.

La réponse à cette question est nécessaire pour répondre à la question suivante.

2. Application : un premier sondage, sur 1 700 personnes, donne 53% d'intentions de vote pour le candidat A. Un second sondage, sur 250 personnes, donne 56% d'intentions de vote pour le candidat B.

Quel candidat semble le mieux placé pour l'emporter ?

Partie B. Avec des simulations.

1. Sur un tableur, on simule 100 échantillons de 1 000 personnes qui voteront pour le candidat A dans une proportion $p = 0,52$.

a. Simuler un premier échantillon de 1 000 personnes : dans la cellule A1, inscrire $=\text{ENT}(\text{ALEA}() + 0,52)$ qui renvoie 1 dans 52 % des cas, et 0 le reste du temps. Étendre cette formule, à l'aide de la poignée de recopie, jusqu'à la cellule A1 000.

Dans la cellule A1 001, calculer la proportion des votes pour le candidat A dans l'échantillon à l'aide de la formule $=\text{MOYENNE}(A1:A1000)$. On peut relancer les simulations à l'aide de la touche F9 : rencontre-t-on des moyennes inférieures à 0,5 ? Comment s'appelle ce phénomène ?

 En cas de difficultés, voir l'exercice 14.

b. À l'aide de la poignée de recopie, étendre les cellules A1 à A1001 jusqu'à la colonne CV. On a ainsi obtenu 100 échantillons de 1 000 personnes et les proportions de votes pour le candidat A correspondantes.

Déterminer le minimum, le premier décile, le premier quartile, la médiane, le troisième quartile, le 9^e décile et le maximum de la série obtenue dans les cellules A1001 à CV1001, puis dessiner la boîte à moustaches élaguée aux déciles de la série des 100 proportions des votes pour le candidat A. On fera en plus apparaître le minimum et le maximum de la série sur la boîte à moustaches.

 Vous trouverez directement les fonctions MIN, MAX, MÉDIANL, QUARTILE sur le tableur, mais le premier décile se calcule avec la fonction CENTILE : le 1^{er} décile est le 10^e centile, le 9^e décile est le 90^e centile de la série.

2. Par le même procédé, pour différentes valeurs de p , on a obtenu :

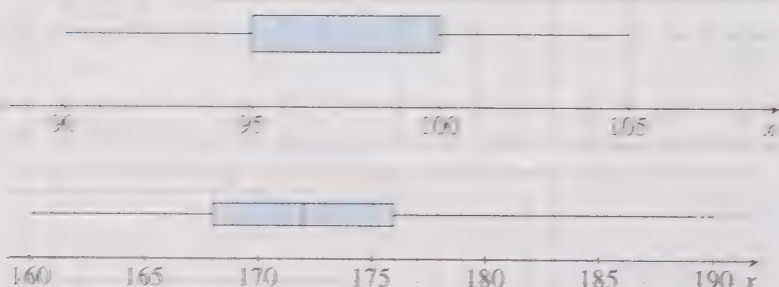
	0,49	0,51	0,53	0,55	0,57
	0,453	0,46	0,49	0,507	0,525
	0,472	0,489	0,511	0,528	0,55
	0,481	0,498	0,518	0,541	0,56
	0,491	0,509	0,531	0,551	0,57
	0,499	0,518	0,54	0,561	0,581
	0,507	0,526	0,546	0,573	0,589
	0,531	0,548	0,57	0,611	0,608

Un échantillon de 1 000 personnes a donné une proportion de 0,52 votes pour le candidat A. En se basant sur le résultat de vos simulations et du tableau, peut-on retrouver la valeur de p ? Laquelle est la plus probable ?

17 DISPERSION RELATIVE 13

★★★ 20 min ▶ p. 249

Voici les diagrammes en boîte à moustaches des tailles (en cm) relevées chez les garçons dans une classe de maternelle et une classe de première.



1. Comparer la dispersion de ces séries.
2. On donne en plus la moyenne et l'écart-type de ces séries :
 - classe de maternelle : moyenne $\bar{x} = 97,46$; écart-type $\sigma_x = 3,564$ à 10^{-3} près ;
 - classe de première : moyenne $\bar{y} = 172,13$; écart-type $\sigma_y = 6,064$ à 10^{-3} près.
 Ces données confirment-elles votre impression ?

3. Pour comparer les séries dont les ordres de grandeur sont très différents, on les « réduit » et on les « centre » (autour de leur moyenne) en calculant, pour chaque valeur x_i et y_j , les nombres $x'_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}$ et $y'_j = \frac{y_j - \bar{y}}{\sigma_y}$.

a. Vérifier que la moyenne de ces deux nouvelles séries est zéro (elles sont « centrées ») et leur écart-type 1 (elles sont « réduites »).

Il s'agit de transformations affines. Voir cours 1.3.

b. Déterminer minimum, premier et troisième quartiles, médiane et maximum de séries (x') et (y') puis construire leurs diagrammes en boîte à moustaches.

Il s'agit de transformations affines. Voir les exercices 7 et 13.

c. Cette « norme à l'échelle » confirme-t-elle votre réponse à la question 1 ?

d. Par rapport à la classe, quel est le plus grand : un élève de 101 cm en maternelle ou un élève de 178 cm en première ?

18 HARMONISATION DES JURYS

★★★ 30 min ▶ p. 250

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Soit $(x_i ; n_i)_{1 \leq i \leq r}$ une série statistique dont les valeurs distinctes $x_1, x_2, \dots, x_r$ ont pour effectifs respectifs $n_1, n_2, \dots, n_r$. On note $\bar{x}$ sa moyenne et σ son écart-type. Pour a et b deux réels fixés ($a \neq 0$), on pose $y_i = ax_i + b$ pour tout entier i compris entre 1 et r . On note $\bar{y}$ la moyenne et σ' l'écart-type de la série $(y_i ; n_i)_{1 \leq i \leq r}$.

1. Démontrer que $\bar{y} = a\bar{x} + b$.
2. En déduire que $\sigma' = |a|\sigma$.

Partie B. Harmoniser les notes pour classer

Dans un concours, à une heure donnée, dix jurys examinent séparément dix candidats, auxquels ils décernent une note provisoire. Les notes définitives seront établies au vu de la moyenne et de l'écart-type de toutes les notes attribuées dans la journée par chaque jury.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	12	10	11	15	12	15	15	10	12	12
	10	9	9	9	10	12	12	9	7	7
	2	3	3	3	3	3	2	2	3	2

1. D'après les notes provisoires, proposer un classement des candidats.
2. La note définitive est arrêtée en prenant comme référence le jury A : les autres jurys doivent ramener leur moyenne à 10 et leur écart-type à 2 en remplaçant les notes provisoires x_i par $y_i = ax_i + b$, avec a et b des réels fixés ($a > 0$) dépendant du jury.

On impose $a > 0$ pour que la fonction affine $x \mapsto ax + b$ soit croissante sur $\mathbb{R}$, ainsi l'ordre des notes définitives sera le même que l'ordre des notes provisoires au sein d'un même jury.

Compléter le tableau suivant avec les valeurs a et b trouvées, ainsi que les notes définitives de chaque candidat, arrondies à 0,1 près.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
(1; 0)										
12										

En déduire le classement final des candidats.

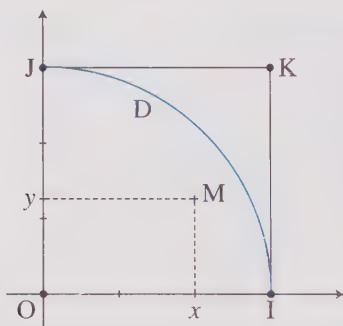
3. À l'aide des observations précédentes, commenter les affirmations :

- Un candidat dont la note provisoire est 12 ne peut pas terminer dans les premiers.
- Obtenir 11 quand la moyenne est 9, c'est comme obtenir 12 quand la moyenne est 10.
- Quand la moyenne du jury est 12, obtenir 15 quand l'écart-type est 3, c'est mieux qu'obtenir 15 quand l'écart-type est 2.
- En traçant les droites d'équation $y = \frac{2}{3}x + 4$ et $y = x + 1$ dans un même repère, déterminer les valeurs de la note provisoire x pour lesquelles, la moyenne du jury étant de 9, obtenir x lorsque l'écart-type est 2 est mieux qu'obtenir x lorsque l'écart-type est 3.

19 LA MÉTHODE DE MONTE-CARLO

★★★★ 30 min ► P. 252

Dans un repère orthonormal (O, I, J) , on considère le carré OIKJ où $K(1; 1)$.



- Quelles conditions doivent vérifier les coordonnées $(x; y)$ d'un point M du plan pour qu'il soit situé à l'intérieur du carré ?
- Soit D le quart de disque de centre O et de rayon 1 contenu dans le carré OIKJ.
 - Quelle proportion p de l'aire du carré OIKJ, l'aire de D représente-t-elle ?
 - Justifier que si $M(x; y)$ est un point à l'intérieur du carré OIKJ alors :

$$M \in D \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

- On convient que choisir un point M au hasard dans le carré revient à choisir ses coordonnées x et y aléatoirement entre 0 et 1.

À l'aide de la fonction `random()`, écrire un algorithme sous Algobox qui crée 10 000 points au hasard à l'intérieur du carré OIKJ, colorier en bleu ceux situés dans le quart de cercle D , en gris ceux qui n'y sont pas, et calculer la proportion f des points situés dans D .



Sous Algobox, attention à la syntaxe pour x^2 : c'est `pow(x,2)`.

4. On a vu à l'exercice 16 que plus de 95 % des échantillons de taille n fournissent l'intervalle de confiance $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contenant la proportion p à estimer.

- En déduire un encadrement de π , avec un niveau de confiance de 0,95.
- Combien faut-il de simulations pour espérer un encadrement de π d'amplitude 10^{-3} avec un niveau de confiance de 0,95 ? Cette méthode est-elle bien adaptée à la recherche des décimales de π ?

20 MINIMISATION D'ÉCARTS

★★★★ 30 min ► p. 254

Partie A

On considère la série statistique suivante :

	1	3	5
	6	1	3

1. Compléter la ligne des fréquences, puis donner moyenne $\bar{x}$, variance V et médiane M_e de cette série.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0,6(x-1)^2 + 0,1 \times (x-3)^2 + 0,3 \times (x-5)^2.$$

a. Vérifier que pour réel x , $f(x) = x^2 - 4,8x + 9$.

b. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Donner ce minimum ainsi que la valeur où il est atteint.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 0,6 \times |x-1| + 0,3 \times |x-3| + 0,3 \times |x-5|.$$

a. Vérifier que :

- si $x \leq 1$, $g(x) = -x + 2,4$;
- si $1 \leq x \leq 3$, $g(x) = 0,2x + 1,2$;
- si $3 \leq x \leq 5$, $g(x) = 0,4x + 0,6$;
- si $x \geq 5$, $g(x) = x - 2,4$.

► Déterminer le signe de chaque terme sur les intervalles donnés pour pouvoir écrire l'expression $g(x)$ sans valeur absolue avant de la réduire.

b. Représenter g dans un repère. En déduire que g admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Vérifier qu'il est atteint pour $x = M_e$.

Partie B. Cas général.

Soit $(x_i; n_i)_{1 \leq i \leq r}$ une série statistique de moyenne $\bar{x}$. On note f la fonction

définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_1 \times (x - x_1)^2 + f_2 \times (x - x_2)^2 + \dots + f_r \times (x - x_r)^2$, où f_i désigne la fréquence de x_i .

1. Démontrer que pour réel x , $f(x) = x^2 - 2\bar{x}x + \overline{x^2}$, où $\overline{x^2}$ désigne la moyenne des $(x_i^2)_{1 \leq i \leq r}$.

2. En déduire que f est minimale pour $x = \bar{x}$, à l'aide de la mise sous forme canonique et reconnaître ce minimum.

CONTRÔLE**21 VALEURS EXTRÊMES**

★ 10 min ► p. 255

Un collectionneur récapitule ce que lui a coûté l'acquisition de nouveaux timbres cette année (prix arrondis à l'euro près) :

Prix en €	1	2	3	4	5	6
Effectif	5	6	5	3	4	4

- Déterminer moyenne, écart-type, médiane et quartiles de cette série.
- Pour son anniversaire, le collectionneur s'achète une pièce rare qui coûte 100 euros. Reprendre la question 1. Quels paramètres sont les plus sensibles aux valeurs extrêmes ?

CONTRÔLE**22 CRITÈRES D'ÉVALUATION**

★★ 20 min ► p. 256

Trois classes ont obtenu les résultats, relevés dans le tableau d'effectifs suivant, à une évaluation commune.

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Classe A	0	1	1	1	2	2	7	3	9	5	2
Classe B	1	2	1	0	1	5	1	6	7	10	0
Classe C	0	1	0	1	0	6	7	6	8	1	0

- Pour chaque classe, déterminer la moyenne m , l'écart-type σ , la médiane M_c , les 1^{er} et 3^e quartiles Q_1 et Q_2 , puis construire la boîte à moustaches correspondante.

Pour l'utilisation de la calculatrice : voir le savoir-faire 1.

2. Quel sera le classement de ces trois classes selon que le professeur privilégiera :

- le groupe qui a la meilleure moyenne ;
- le groupe qui a la meilleure médiane ;
- le groupe le plus homogène autour de sa moyenne ;
- le groupe le plus homogène autour de sa médiane ;
- le groupe qui a la meilleure tête de classe ;
- le groupe qui a le moins d'élèves en difficulté.

Pour les différents paramètres de dispersion, voir cours I.2 et II.1.

3. Jean, élève de la classe B, a eu 7. Il est fier d'annoncer à ses parents qu'ayant plus que la moyenne de classe, il est dans la première moitié de la classe. Qu'en pensez-vous ?

23 CONTRÔLE DE QUALITÉ (2)

★★★ 30 min ► P. 257

Dans une usine d'embouteillage, on prélève au hasard 1 250 bouteilles dont on mesure le volume de jus de fruits effectivement présent à la sortie de la chaîne de production.

Volume en ml	972	976	980	984	988	992	996	1 000
Effectif	2	3	24	47	105	146	193	203
Volume en ml	1 004	1 008	1 012	1 016	1 020	1 024	1 028	
Effectif	190	148	97	46	28	9	7	

1. a. Représenter cette série par un diagramme en bâtons.

Observer la répartition en « cloche » obtenue.

b. Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de la série (arrondir à 0,1 près).

Pour l'utilisation de la calculatrice, voir le savoir-faire 1.

c. Déterminer le nombre de bouteilles hors de la « plage de normalité à 95 % », c'est-à-dire hors de l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$. Cette chaîne de production semble-t-elle bien réglée au vu de cette plage de normalité ?

2. L'opérateur chargé des mesures pense gagner du temps en les regroupant en classes.

a. Compléter le tableau suivant :

Classe	[970;980]	]980;990]	]990;1000]
Effectif			

Classe	]1000;1010]	]1010;1020]	]1020;1030]
Effectif			

b. Dessiner un histogramme représentant cette série.

c. En supposant la répartition uniforme à l'intérieur des classes, calculer la moyenne $\bar{x}'$ et l'écart-type σ' de la série (arrondir à 0,1 près).

Dans ce cas, on utilise les centres des classes comme valeurs de la série.

d. Reprendre la question du 1.c.

Commenter.

CORRIGÉS

1 1. On convient ici que l'entreprise qui paye le mieux est celle dont le salaire moyen global est le plus élevé.

Pour l'entreprise A, le salaire moyen est :

$$\bar{x}_A = \frac{120 \times 1\,400 + 35 \times 3\,000}{120 + 35} \approx 1\,761 \text{ € à } 1 \text{ € près.}$$

Pour l'entreprise B :

$$\bar{x}_B = \frac{85 \times 1\,200 + 75 \times 2\,500}{85 + 75} \approx 1\,809 \text{ € à } 1 \text{ € près.}$$

C'est donc l'entreprise B qui paye le mieux ses employés.

On aurait pu choisir un autre critère de comparaison, et décider par exemple que c'est l'entreprise dont la médiane est la plus haute qui paye le mieux ses employés (ne disposant pas des données nécessaires, ce choix ne serait pas pertinent ici).

2. On calcule les moyennes (arrondies au dixième) des notes :

• de Jean :

$$\bar{x} = \frac{9 \times 11 + 6 \times 8 + 4 \times 13 + 5 \times 12 + 3 \times 6 + 2 \times 8}{9 + 6 + 4 + 5 + 3 + 2} = \frac{293}{29} \approx 10,1.$$

• de Jeanne :

$$\bar{x}' = \frac{7 \times 11 + 8 \times 8 + 4 \times 13 + 5 \times 12 + 3 \times 6 + 2 \times 8}{7 + 8 + 4 + 5 + 3 + 2} = \frac{287}{29} \approx 9,9.$$

Pour avoir le Bac, il faut une moyenne supérieure ou égale à 10 : **Jean obtient son Bac, Jeanne ne l'obtient pas.**

2 1. $\bar{x} = \frac{2 \times (-3) + 3 \times (-1) + 2 \times 0 + 3 \times 2 + 7 \times 4 + 3 \times 5}{2 + 3 + 2 + 3 + 7 + 3}$

$$\bar{x} = 2.$$

Valeurs x_i	-3	-1	0	2	4	5	Total
Effectifs n_i	2	3	2	3	7	3	20
Effectifs cumulés croissants	2	5	7	10	17	20	20
$(x_i - \bar{x})^2$	25	9	4	0	4	9	
$n_i (x_i - \bar{x})^2$	50	27	8	0	28	27	140

$\frac{50}{100} \times 20 = 10$, donc la médiane est la moyenne entre la 10^e valeur, un 2, et la 11^e valeur, un 4.

Donc $M_e = 3$.

$\frac{25}{100} \times 20 = 5$, donc le premier quartile Q_1 est la 5^e valeur :

$$Q_1 = -1.$$

$\frac{75}{100} \times 20 = 15$, donc le troisième quartile Q_3 est la 15^e valeur :

$$Q_3 = 4.$$

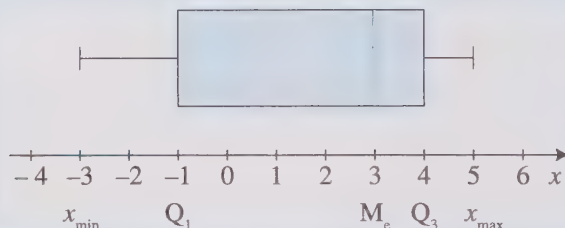
■ S'il y avait eu 21 valeurs par exemple, comme $\frac{25}{100} \times 21 = 5,25$, Q_1 aurait été la 6^e valeur de la série.

Pour calculer l'écart-type, on a besoin de la variance V de la série :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{140}{20} = 7.$$

L'écart-type est $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{7} \approx 2,65$ à 10^{-2} près.

2. L'étendue de la série est $5 - (-3) = 8$, donc on choisit 1 unité pour 1cm.



3. À la calculatrice, on obtient les mêmes valeurs qu'à la main, sauf pour Q_1 où l'on obtient $-0,5$: c'est qu'elle définit Q_1 comme la médiane de la série des 10 premières valeurs de la série initiale. C'est donc la moyenne entre la 5^e valeur, un -1 , et la 6^e, un 0 : c'est bien $-0,5$.

De même elle calcule Q_3 comme la médiane des 10 dernières valeurs, donc comme la moyenne d'un 4 et d'un 4 . C'est ici, par «chance», le même résultat qu'à la main.

■ Les tableurs prennent encore une autre définition des quartiles. Il arrive donc qu'on obtienne trois résultats différents, tous justes – en fonction de la définition choisie – mais qui ne permettent pas de vérifier ses calculs.

3. 1. Vrai. Pour la marque A, au moins 75 % des ampoules ont une durée de vie inférieure ou égale à 1 600, le 3^e quartile.

2. Vrai. Pour la marque B, au moins 75 % des ampoules ont une durée de vie inférieure ou égale à 1 400, le 3^e quartile. 1 400 est aussi la médiane pour la marque A : au moins 50 % des ampoules de la marque A ont une durée de vie supérieure ou égale à 1 400, donc à la durée de vie d'au-moins trois quarts des ampoules de marque B.

3. Faux. Pour la marque B, 500 est le premier décile et 800 le premier quartile, donc on peut seulement affirmer qu'au moins 15 % des ampoules ont une durée de vie comprise entre 500 et 800 heures.

En cas de difficultés, voir le schéma du cours pour la boîte à moustaches élargie.

4. Vrai. Au moins 80 % des ampoules ont une durée de vie comprise entre le 1^{er} et le 9^e décile. Ici, le 1^{er} décile est 800 et le 9^e décile 1 900.

5. Faux. Les indicateurs de dispersion disponibles ici sont identiques. En effet, l'écart interquartile est de 600 pour les deux séries, et la différence entre le 9^e et le 1^{er} déciles vaut 1 100 dans les deux séries.

On pourra poursuivre la réflexion sur la comparaison de la dispersion de deux séries avec les exercices 11, 13 et 17.

4 1. On utilise la calculatrice qui donne les paramètres de la série :

• moyenne :

$$\bar{x} \approx 49 \text{ à } 0,1 \text{ près ;}$$

• écart-type :

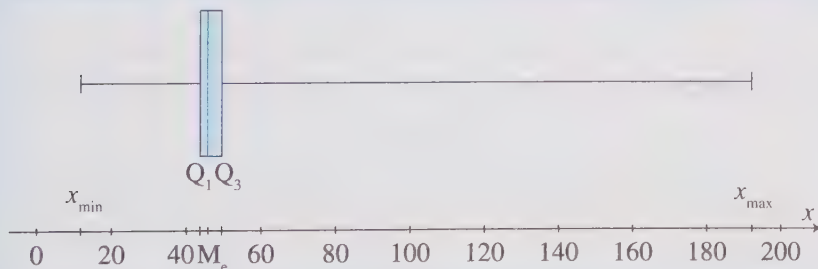
$$\sigma \approx 21,58 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Pour l'utilisation de la calculatrice, voir le savoir-faire 1.

2. On lit aussi :

- le minimum : $x_{\min} = 12$ (directement dans le tableau de départ) ;
- le premier quartile : $Q_1 = 44$;
- la médiane : $M_e = 46$;
- le troisième quartile : $Q_3 = 50$.
- le maximum : $x_{\max} = 192$ (directement dans le tableau de départ).

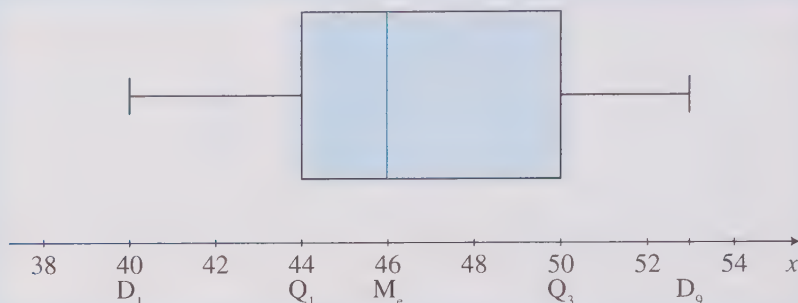
L'étendue est $192 - 12 = 180$: on choisit 1 cm pour 20 unités.



3. La calculatrice donne également le 1^{er} décile et le 9^e décile :

$$D_1 = 40 \quad \text{et} \quad D_9 = 53$$

$D_9 - D_1 = 53 - 40 = 13$, donc on peut choisir comme nouvelle échelle 1 cm pour 2 unités. On en déduit la boîte à moustaches élaguée aux déciles :



Ce diagramme est beaucoup plus lisible que le précédent, et rend mieux compte du fait qu'au moins 80 % des automobilistes ont été mesurés entre 40 et 53 km/h : la moustache de droite du diagramme de l'exercice 2 était très étendue du fait d'une seule valeur « extrême ».

4. Les nouveaux paramètres sont la moyenne $\bar{x} \approx 46,8$ à 0,1 près et l'écart-type $\sigma' \approx 5,06$ à 10^{-2} près.

Les 1^{er} décile, 1^{er} quartile, médiane, 3^e quartile et 9^e décile restent inchangés !

C'est sur la moyenne, mais surtout sur l'écart-type (qui a très nettement diminué : il est divisé par 4), que les valeurs extrêmes ont de l'influence.

5 1. La moyenne et la médiane sont proches de leur âge, donc la soirée VIP semble plus correspondre à leur envie.

2. D'après le tableau détaillé des âges, il n'y a en fait aucune personne d'environ 20 ans à la soirée VIP, alors que 6 personnes sont de leur âge dans la soirée HYPE. Les données des minimums et des quantiles auraient permis de mieux choisir :

- VIP : Pour Q_1 : $\frac{1}{4} \times 14 = 3,5$, donc Q_1 est la 4^e valeur : $Q_1 = 5$; et le minimum : $\min = 1$. Ainsi, les amis savent qu'un quart des participants a entre 1 et 5 ans, et qu'un quart a entre 5 et 20 ans.

Pour Q_3 : $\frac{3}{4} \times 14 = 10,5$, donc Q_3 est la 11^e valeur : $Q_3 = 35$. Un quart des participants a entre 20 et 35 ans, et un quart a plus de 35 ans. Cela laisse supposer (mais ce n'est qu'une supposition !), que les âges sont très divers.

- HYPE : de la même façon : $\min = 20$, $Q_1 = 20$ et $Q_3 = 4$

Ici, au moins, les amis sont sûrs qu'un quart des participants a exactement 20 ans, et un quart a entre 20 et 36 ans. **Il est sans doute plus intéressant pour eux d'aller dans cette soirée.**

6 1. a.

Salaire annuel (en €)	[12 000; 15 000[	[15 000; 18 000[	[18 000; 25 000[	[25 000; 45 000]
Effectif	72	42	42	40

b. À la calculatrice (voir savoir-faire 1.), on obtient un **salaire moyen** de $\bar{x} \approx 20\,245$ € et un **écart-type** de $\sigma \approx 8\,030$ €.

2. Le tableau donne alors :

Salaire annuel (en €)	[12 000; 13 000[	[13 000; 14 000[	[14 000; 15 000[	[15 000; 16 000]	...
Effectif	24	24	24	14	...

La moyenne reste $\bar{x} \approx 20\,245$ €, tandis que l'écart type devient $\sigma \approx 8\,516$ €, donc il a augmenté significativement.

La moyenne ne change pas car lorsqu'on écrit le calcul à la main pour le 1. :

$$\frac{13\,500 \times 72 + 16\,500 \times 42 + 21\,500 \times 42 + 35\,000 \times 40}{196}$$

alors que dans le 2., le total des effectifs (196) ne change pas, mais on remplace chaque produit par une somme de produits de même valeur : $13\,500 \times 72$ devient $12\,500 \times 24 + 13\,500 \times 24 + 14\,500 \times 24$ (l'effectif de ce paquet est toujours 72, et on a réparti uniformément les salaires de la classe $[12\,000; 15\,000[$ en 3 classes plus petites).

Par contre, **l'écart-type a augmenté** car il est défini comme la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Donc comme les valeurs des salaires utilisées dans les calculs sont plus dispersées (elles vont de 12 500 à 44 500 au lieu de 13 500 à 35 000) leurs écarts à la moyennes sont plus grands, **ce qui fait augmenter σ** .

7 1. $n = 82$; $\frac{n}{2} = 41$, donc la médiane est entre la 41^e et la 42^e valeur (**la réponse**

b. est fausse) ; $\frac{1}{4} \times n = 20,5$, donc Q_1 est la 21^e valeur (**la réponse a. est fausse**) ;

$\frac{3}{4} \times n = 61,5$, donc Q_3 est la 62^e valeur (**la réponse c. est la bonne réponse**).

On ne connaît pas les valeurs de Q_1 ni de Q_3 , donc on ne peut pas savoir quel est l'écart interquartile (**la réponse d. est fausse**).

2. On va montrer que **les réponses a., b. et d. sont fausses** grâce à un contre exemple :

Considérons la série : 5.5.5.5.5.5.5.5.5.

Il y a 10 valeurs, donc la médiane est entre la 5^e et la 6^e valeur : $M_e = 5$; $Q_1 = 5$,

car c'est la 3^e valeur ($\frac{1}{4} \times 10 = 2,5$) ; $Q_3 = 5$, car c'est la 8^e valeur ($\frac{3}{4} \times 10 = 7,5$).

Ainsi : $Q_3 \neq 3 \times Q_1$ et $Q_1 = M_e$.

Si on double les valeurs de la série, on obtient $Q_1 = M_e = Q_3 = 10$, donc la médiane a changé. **C'est donc la réponse c. qui est vraie.**

Démonstration :

Si n est l'effectif initial, l'effectif doublé est $2n$. Alors $\frac{2n}{2} = n$, donc la médiane de la

nouvelle série est la valeur centrale située entre la n^e et la $(n+1)^e$ valeur.

Or :

- Si n est impair, $n = 2k + 1$, la médiane de la série initiale est la $(k + 1^e)$ valeur. Les effectifs étant doublés, cela signifie que toutes les valeurs sont répétées 2 fois. Écrivons la liste croissante des valeurs initiales :

$$x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_k ; x_{k+1} ; x_{k+2} ; \dots ; x_n.$$

Avec effectif doublé :

$$2(k+1) = 2k + 2 \text{ valeurs}$$

$$\underbrace{x_1 ; x_1 ; x_2 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_k ; x_k ; x_{k+1} ; x_{k+1} ; x_{k+2} ; \dots ; x_n ; x_n}_{2k \text{ valeurs}}$$

La médiane de la nouvelle série est entre la $n^e = (2k + 1)^e$ valeur

et la $(n+1)^e = (2k + 2)^e$ valeur.

Donc d'après la liste ci-dessus, la médiane est entre x_{k+1} et x_{k+1} : la médiane est x_{k+1} : elle n'a pas changé avec le doublement des effectifs.

- Si n est pair, $n = 2k$, la médiane de la série initiale est $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

La liste ci-dessus est toujours valable ; la médiane de la nouvelle série est entre la

$n^e = (2k)^e$ valeur et la $(n+1)^e = (2k + 1)^e$ valeur : c'est donc également $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

La médiane n'a pas changé.

3. Écrivons la série donnée dans l'ordre croissant : $x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n$.

Si on enlève 1 à chaque valeur, elle devient :

$$(x_1 - 1) ; (x_2 - 1) ; (x_3 - 1) ; \dots ; (x_n - 1).$$

Le premier quartile est toujours une des valeurs de la série : $Q_1 = x_k$, avec $k = \frac{n}{4}$ si

$\frac{n}{4}$ est un nombre entier, ou k le premier entier suivant $\frac{n}{4}$ sinon. Comme l'effectif n ne change pas, Q'_1 , quartile de la série modifiée sera toujours la k^e valeur, donc $Q'_1 = x_k - 1$. Le premier quartile change, **la réponse a. est fausse.**

De la même manière, on prouve que Q_3 diminue de 1, alors l'écart interquartile devient :

$$Q'_3 - Q'_1 = (Q_3 - 1) - (Q_1 - 1) = Q_3 - 1 - Q_1 + 1 = Q_3 - Q_1.$$

L'écart interquartile est inchangé : **la réponse c. est vraie.**

La moyenne $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ devient :

$$\bar{x}' = \frac{x_1 - 1 + x_2 - 1 + \dots + x_n - 1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n}{n} = \bar{x} - \frac{n}{n} = \bar{x} - 1 ;$$

la moyenne diminue de 1. **La réponse b. est fausse.**

• Enfin, la longueur de la boîte à moustaches est l'écart entre le minimum et le maximum de la série, qui diminuent chacun de 1, donc la longueur de la boîte est inchangée (**la réponse d. est fausse**).

8 1. a. Pour la « performance », on compare les moyennes.

La moyenne $\bar{x}$ des notes de Français peut s'obtenir à l'aide de la calculatrice.

 Voir le savoir-faire 1.

Comme les valeurs sont présentées sous forme de données «brutes» (non regroupées par valeur du caractère), on pourra :

• Sur TI, saisir les valeurs x_i dans la colonne L1 (STAT EDIT) puis CALC 1 : 1 Var Stats 2ndeL1.

• Sur CASIO : saisir les valeurs x_i dans la colonne List1 (MENU STAT), puis effectuer le réglage CALC SET :

1Var XList : List1 ; 1VarFre : 1 EXE puis effectuer le calcul : CALC 1 VAR.

On obtient $\bar{x} = 12$.

La moyenne $\bar{x}'$ des notes de Mathématiques s'obtient de même : $\bar{x}' = 11,5$.

$\bar{x} > \bar{x}'$, **donc l'élève est plus performant en Français.**

 Pour ne pas perdre les valeurs déjà saisies dans la première colonne, on peut utiliser la deuxième colonne pour les notes de français. Le calcul se fait alors de la façon suivante :

• Sur TI, saisir les y_i dans la colonne L2, puis CALC 1 : 1 Var Stat L2.

• Sur Casio, saisir les y_i dans la colonne List 2 et effectuer le réglage 1Var XList : List2.

b. Pour la « régularité », on compare les écarts types. La calculatrice donne $\sigma_x \approx 3,77$ à 10^{-2} près (σx sur TI, $x\sigma n$ sur Casio) pour les notes de Français.

$\sigma_{x'} = 1,5$ pour les notes de Mathématiques.

$\sigma_{x'} < \sigma_x$, **donc l'élève est plus régulier en Mathématiques.**

2. À la calculatrice, on lit les valeurs :

• médiane $M_e = 13$;

• premier quartile $Q_1 = 9,5$, troisième quartile $Q_3 = 15,5$, d'où l'écart interquartile $\Delta = Q_3 - Q_1$, soit :

$$\Delta = 6.$$

3. a. On efface la note 4 (touche DEL ou SUPPR), pour obtenir :

- la moyenne $\bar{x}_2 \approx 12,89$ à 10^{-2} près ;
- l'écart-type $\sigma_2 \approx 2,81$ à 10^{-2} près ;
- la médiane $\text{Med}_2 = 13$;
- le premier quartile $Q'_1 = 9,5$, le troisième quartile $Q'_3 = 15,5$ d'où l'écart interquartiles $\Delta' = 15,5 - 9,5 = 6$.

b. Les variations des paramètres sont :

- pour la moyenne :

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}}{\bar{x}} \times 100 = \frac{12,89 - 12}{12} \times 100 \approx 7,4\% \text{ à } 0,1\% \text{ près ;}$$

- pour l'écart-type :

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\sigma_x} \times 100 = \frac{2,81 - 3,77}{3,77} \times 100 \approx -25,5\% \text{ à } 0,1\% \text{ près ;}$$

- médiane et quartiles (donc écart interquartiles) sont inchangés, leur variation est de 0 %.

On dit que médiane et écart interquartile sont « robustes » aux valeurs extrêmes alors que la moyenne, et surtout l'écart-type, sont « sensibles » aux valeurs extrêmes.

Attention : médiane et écart interquartiles ne sont pas toujours inchangés lorsque l'on modifie les valeurs extrêmes de la série, mais leur variation est moindre rapport à celle de l'écart-type. On obtient d'ailleurs des résultats différents « à la main » du fait de notre définition des quartiles :

Avec les dix premières notes de Français :

$10 = 2n$, avec $n = 5$, est pair, donc la médiane est la moyenne entre la $n^e = 5^e$ et la $(n+1)^e = 6^e$ valeur. On retrouve $\text{Med} = \frac{13+13}{2} = 13$.

$\frac{25}{100} \times 10 = 2,5$, donc Q_1 est la 3^e valeur de la série : $Q_1 = 9$;

$\frac{75}{100} \times 10 = 7,5$, donc Q_3 est la 8^e note de la série : $Q_3 = 15$;

d'où l'écart interquartile $\Delta = Q_3 - Q_1 = 6$.

On a donc des quartiles différents, mais le même écart interquartile.

Avec les neuf notes de Français :

$9 = 2 \times n + 1$, avec $n = 4$, est impair, donc la médiane est la $n+1^e$ valeur, c'est-à-dire la 5^e valeur. On retrouve $\text{Med}' = 13$.

$\frac{25}{100} \times 9 = 2,25$, donc Q'_1 est la 3^e valeur : c'est 9.

$\frac{75}{100} \times 9 = 6,75$, donc Q'_3 est la 7^e valeur : c'est 15.

L'écart interquartile est encore de 6.

9 1. D'après la valeur du maximum de chaque série, qui est de 10 pour les trois premiers diagrammes en barres, on associe directement le diagramme en barres **d.** et la boîte **iii.**

On aurait aussi pu remarquer la très forte concentration autour des petites valeurs, d'où une faible médiane et une très grande moustache à droite.

Le diagramme **b.** est plutôt concentré sur des valeurs entre 1 et 5, d'où un faible écart interquartile et une boîte ayant une grande moustache à droite : c'est la boîte **iv.**

Le diagramme **c.** est plutôt concentré sur des valeurs entre 4 et 9 ; d'où un faible écart interquartile et une boîte ayant une grande moustache à gauche : c'est la boîte **ii.**

Il nous reste le diagramme **a.** plutôt dissymétrique avec plusieurs valeurs proches de 2, puis un grand nombre de valeurs concentrées autour de 7 : c'est bien la boîte **i.**

2. Le diagramme **d.** comporte surtout des communications courtes, et de rares communications longues (les inscriptions ?) : **le diagramme d. doit correspondre à notre employé.**

10 1. a. À la calculatrice, on obtient (les arrondis sont donnés à 10^{-1} près) :

- pour Beauséjour : $m \approx 12,4$; $\sigma \approx 6,1$; $M_e = 12,7$; $Q_1 = 7,4$; $Q_3 = 15,5$;
- pour Beautemps : $m' \approx 13$; $\sigma' \approx 3,9$; $M'_e = 12,5$; $Q'_1 = 9$; $Q'_3 = 17,4$.

Si on effectue les calculs à la main, après avoir rangé les séries dans l'ordre croissant, on obtient des quantiles différents (voir exercice 2) : le premier quartile est la 3^e valeur de la série et le 3^e quartile est la 9^e valeur. Ce qui donne :

- pour Beauséjour : $Q_1 = 6,5$ et $Q_3 = 15,2$;
- pour Beautemps : $Q'_1 = 8,8$ et $Q'_3 = 17,2$.

Cela aura une influence sur les questions suivantes, aussi nous détaillerons lorsque les conclusions seront modifiées.

b. C'est Beautemps qui a la moyenne la plus élevée.

C'est Beauséjour qui a la médiane la plus élevée, donc les six mois les plus chauds.

C'est Beautemps qui a l'écart-type le plus faible, donc les températures les plus régulières autour de la moyenne.

C'est Beauséjour qui a l'écart interquartile le plus petit, donc les températures les plus régulières autour de la médiane.

À la main, l'écart interquartile est de 8,7 pour Beauséjour et 8,4 pour Beautemps : la conclusion est inversée.

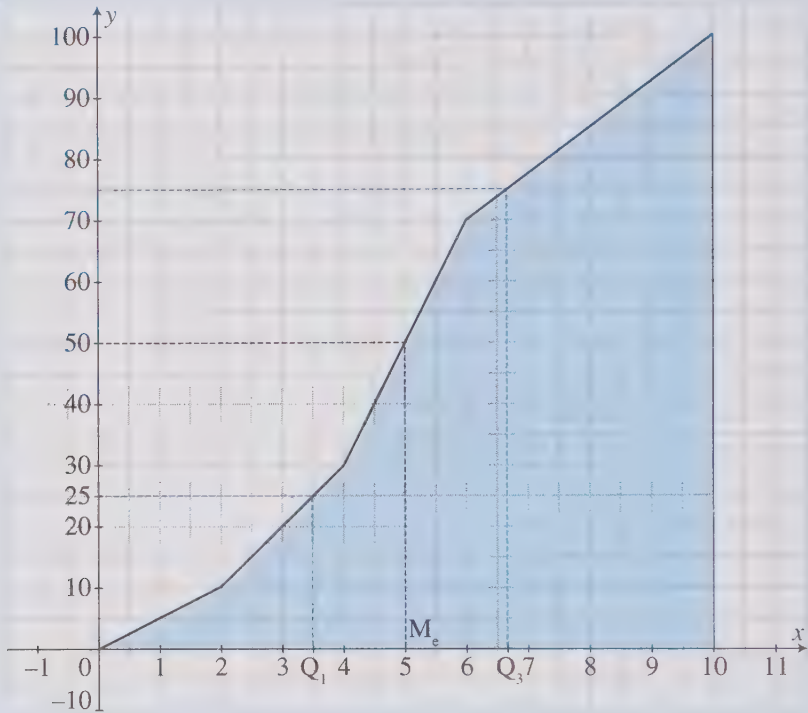
C'est Beautemps qui a le 1^{er} quartile le plus élevé, donc l'hiver le plus doux.

C'est Beauséjour qui a le 3^e quartile le plus élevée, donc l'été le plus chaud.

2. a.

Classes en h	$[0; 2[$	$[2; 4[$	$[4; 6[$	$[6; 8[$	$[8; 10]$
Fréquences en % arrondies à 0,1 près	$\frac{3}{30} \times 100 = 10$	20	40	16,7	13,3
F.C.C en %	10	30	70	86,7	100

b.



On obtient pour médiane 5 ; pour 1^{er} quartile $Q_1 = 3,5$ et pour 3^e quartile $Q_3 = 6,6$, donc un écart interquartile égal à $6,6 - 3,5 = 3,1$, d'où **le couple (5 ; 3,1)**.

c. Le couple (médiane ; écart interquartile) de la commune de Beauteemps est (5 ; 3) : c'est sensiblement le même que celui de l'autre série. Si on se limite à ces couples, **les deux communes ont des dispersions similaires.**

d. Les 1^{er} et 3^e quartile sont plus grands pour la commune de Beauteemps : **son maire semble avoir raison.**

11 1. a. L'écart-type est inférieur aux autres sur internet, ce qui indique des écarts entre les prix moins grands en général. **Le prix semble donc le plus régulier sur internet.**

b. Internet : $C_i = \frac{1,45}{12,3} \approx 0,118$.

Supermarché : $C_s = \frac{1,57}{15} \approx 0,105$.

Magasin : $C_m = \frac{1,52}{14,7} \approx 0,103$.

Le coefficient de variation rapporte l'écart-type au prix moyen, donc il reflète les écarts de prix par rapport aux prix généralement constatés.

Ainsi, on pourrait dire qu'en magasin par exemple, la variation des prix est de 10,3 % alors que sur internet, il est de 11,8 %. **Donc les prix seraient finalement plus réguliers en magasin.**

2. a. L'écart-type est une moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Mais on ne peut pas comparer un écart-type de 1,7 kg par rapport à une moyenne de 4,2 kg avec un écart-type de 6,1 kg par rapport à une moyenne de 38 kg, **Car les ordres de grandeur sont différents.**

b. $C_a = \frac{1,7}{4,2} \approx 0,405$ pour les agneaux ;

$C_v = \frac{6,1}{38} \approx 0,161$ pour les veaux.

Donc on peut conclure que **les écarts sont proportionnellement plus réduits entre les poids des veaux qu'entre les poids des agneaux.**

3. Le coefficient de variation permet ainsi de **ramener sur la même base des séries de données différentes, pour pouvoir les comparer.**

12 1. À la calculatrice, on obtient la moyenne du nombre de pépites par gâteau : 24,8 à 0,1 près, et son écart-type : 1,56 à près. Les deux contraintes sont donc vérifiées : **le réglage est satisfaisant.**

 Pour l'utilisation de la calculatrice, voir le savoir-faire 1.

2. a. On saisit à la calculatrice le tableau suivant avec le centre des classes.

Centre des classes	8,75	9,25	9,75	10,25	10,75	11,25	11,75
Effectif	2	12	38	66	65	12	5

On obtient :

moyenne $\bar{x} = 10,34$

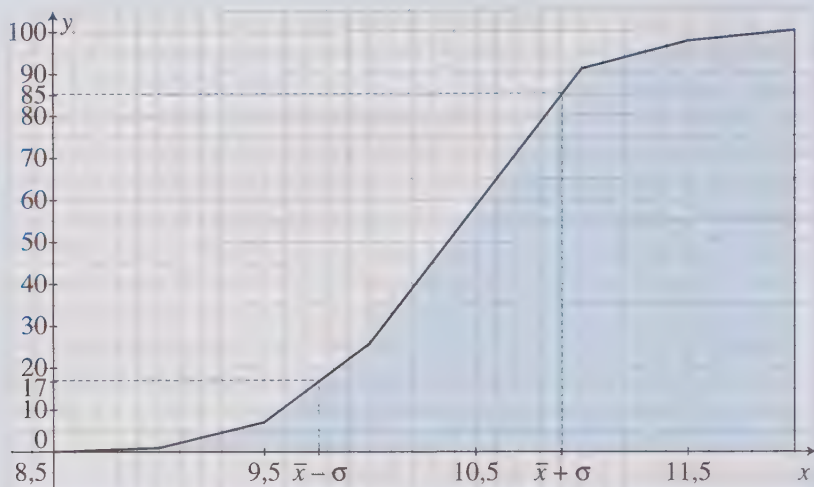
écart-type $\sigma \approx 0,57$ arrondi au centième.

b. On complète la ligne des fréquences puis des fréquences cumulées croissantes :

Taux de M.G. en %	[8,5; 9[	[9; 9,5[	[9,5; 10[	[10; 10,5[
Fréquences en %	$\frac{2}{200} \times 100 = 1$	6	19	33
F.C.C. en %	1	7	26	59

Taux de M.G. en %	[10,5; 11[	[11; 11,5[	[11,5; 12]
Fréquences en %	32,5	6	2,5
F.C.C. en %	91,5	97,5	100

L'échelle peut être : en abscisses 5 cm pour 1 unité et en ordonnées 1 cm pour 10 %, l'axe des ordonnées débutant à l'abscisse 8,5.



c. $\bar{x} - \sigma = 10,34 - 0,57 = 9,77$; $\bar{x} + \sigma = 10,34 + 0,57 = 10,91$

10 % est bien dans l'intervalle $[9,77 ; 10,91]$, mais par lecture graphique, on trouve qu'il n'y a que $85 - 17 = 68\%$ des gâteaux ayant un taux de matière grasse dans cet intervalle. **Donc ce contrôle contredit l'étiquetage.**

13 2. On obtient $\bar{x} \approx 115,1$ et $\sigma_x \approx 9,9$ ainsi que $\bar{y} \approx 36,75$ et $\sigma_y \approx 6,05$.

3. a. Il faut écrire $= (A1 - A\$21) / A\22 .

Le \$ bloque la référence qui le suit. Ainsi dans A\$22, le A peut changer lorsqu'on recopie la formule dans une autre colonne, mais le 22 est bloqué lorsqu'on étend la formule dans une autre ligne. Ici, cela permet d'étendre la formule à la colonne des poids, mais on restera bien sur les cases contenant moyenne et écart-type, même en étendant vers le bas.

b. On trouve $\bar{x}' = \bar{y}' = 0$ et $\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = 1$. Les valeurs ont été **centrées** autour de 0, puisqu'on s'est ramené à une moyenne de 0, et elles ont été **réduites**, puisque leur dispersion a été diminuée en fonction de leur écart-type.

c. En A23, on peut taper $= \text{Min}(A1 : A20)$ ou $= \text{QUARTILE}(A1 : A20 ; 0)$, puis changer le 0 en 1 pour $Q1$, etc. On obtient :

$\min_x = 101$; $(Q_1)_x = 107,25$; $\text{Med}_x = 112,5$; $(Q_3)_x = 125,5$ et $\max_x = 130$;
tandis que :

$\min_y = 26$; $(Q_1)_y = 30,75$; $\text{Med}_y = 39$; $(Q_3)_y = 40,5$ et $\max_y = 45$.

d. Pour la ligne 21 (ligne des moyennes), on obtient 0 en faisant la moyenne des données centrées réduites et en faisant $" = (F21 - F\$21) / F\$22 "$ puisque F21-F\$21 vaut 0.

Les résultats sont différents sur la ligne 22 (ligne des écarts-types).

Par contre, on obtient ensuite les mêmes résultats dans les lignes 23 à 27. Pour les valeurs minimum et maximum, cela s'explique car il revient au même de prendre le min et le max des valeurs centrées réduites ou de centrer et réduire le min et le max des valeurs de départ.

Pour la médiane, comme il y a 20 valeurs, la médiane est la moyenne des 10^e et 11^e valeurs, ce qu'on peut écrire $\text{Med}_x = \frac{x_{10} + x_{11}}{2}$ donc cette médiane centrée et réduite donne :

$$\frac{\text{Med}_x - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{\frac{x_{10} + x_{11}}{2} - \bar{x}}{\sigma_x}.$$

Quant à la médiane des valeurs centrées et réduites, puisque l'ordre des valeurs initiales n'est pas changé, elle vaut :

$$(\text{Med}_x)' = \frac{x'_{10} + x'_{11}}{2} = \frac{\frac{x_{10} - \bar{x}}{\sigma_x} + \frac{x_{11} - \bar{x}}{\sigma_x}}{2} = \frac{\frac{x_{10} - \bar{x} + x_{11} - \bar{x}}{\sigma_x}}{2};$$

$$(\text{Med}_x)' = \frac{x_{10} + x_{11}}{2\sigma_x} - \frac{2\bar{x}}{2\sigma_x} = \frac{\frac{x_{10} + x_{11}}{2} - \bar{x}}{\sigma_x}.$$

$$\text{Ainsi } (\text{Med}_x)' = \frac{\text{Med}_x - \bar{x}}{2\sigma_x}.$$

On trouve donc la même valeur en prenant la médiane de la nouvelle série ou en centrant et réduisant la médiane initiale.

En fait, la médiane est linéaire, c'est-à-dire que si l'on transforme une série (x_i) de manière linéaire, en $(ax_i + b)$, avec a et b deux réels, alors la médiane de la nouvelle série est $a\text{Med}_x + b$.

Démonstration :

1^{er} cas : si l'effectif est impair, $n = 2k + 1$ alors $\text{Med} = x_{k+1}$. Or, après transformation de la série, la valeur centrale est toujours la numéro $k + 1$ donc :

$$\begin{aligned}\text{Med}' &= x'_{k+1} = ax_{k+1} + b \\ \text{Med}' &= a\text{Med} + b.\end{aligned}$$

2^e cas : si l'effectif est pair, $n = 2k$, alors $\text{Med} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Et les deux valeurs centrales de la nouvelle série seront $ax_k + b$ et $ax_{k+1} + b$ donc :

$$\text{Med}' = \frac{(ax_k + b) + (ax_{k+1} + b)}{2} = \frac{a(x_k + x_{k+1})}{2} + \frac{2b}{2} = a\text{Med} + b.$$

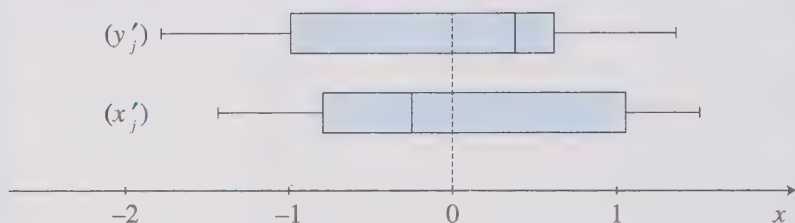
Et si $a > 0$, la transformation est croissante, donc l'ordre des valeurs est conservé, alors les quartiles sont linéaires également $Q'_1 = aQ_1 + b$ et $Q'_3 = aQ_3 + b$. La démonstration est similaire.

D'après la remarque précédente, $x'_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{1}{\sigma_x} x_i - \frac{\bar{x}}{\sigma_x}$ est une transformation linéaire, avec $a = \frac{1}{\sigma_x} > 0$ et $b = -\frac{\bar{x}}{\sigma_x}$, donc on a bien :

$$Q'_1 = \frac{Q_1 - \bar{x}}{\sigma_x} \text{ et } Q'_3 = \frac{Q_3 - \bar{x}}{\sigma_x}.$$

Donc les quartiles de la nouvelle série sont égaux aux quartiles réduits et centrés, ce qui explique que les résultats sont identiques avec les deux manières.

e.



Centrer et réduire les séries a permis de les mettre à la même échelle. On voit alors que la série des tailles est plus étendue, mais son écart interquartile est plus réduit que la série des poids.

On voit aussi que la médiane des tailles est nettement au-dessus de la moyenne, donc 50 % des individus sont nettement plus grands que la moyenne, tandis que 50 % des individus ont un poids nettement plus petit que la moyenne.

14 1. On écrit la commande =ENT(ALEA()+0,5) dans la cellule A2, et on étend cette formule jusqu'à la cellule A579 à l'aide de la poignée de recopie. On obtient une série de 577 valeurs faite de 0 (homme) ou de 1 (femme), chacun avec probabilité 0,5, ce qui correspond au respect de la parité.

2. Dans la cellule A580, on saisit =MOYENNE(A2:A573). On obtient, par exemple, 0,478 à 10^{-3} près.

Si on note n le nombre de femmes, c'est-à-dire de cellules contenant la valeur 1, il y a $577 - n$ hommes, c'est-à-dire $577 - n$ cellules contenant la valeur 0.

La moyenne obtenue est donc égale à :

$$\frac{n \times 1 + (577 - n) \times 0}{577} = \frac{n}{577}$$

C'est bien la fréquence des femmes dans cet échantillon.

3. Pour simuler 100 échantillons de taille 577 et calculer les fréquences correspondantes, on sélectionne toutes les cellules de A1 à A580, et on étend, avec la poignée de recopie, jusqu'à la colonne CV dont la cellule CV1 contient Échantillon 100.

4. Dans la cellule A581, l'instruction =CENTILE(A580:CV580;0,05) donne par exemple :

$$a \approx 0,463 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Dans la cellule B581, l'instruction =CENTILE(A580:CV580;0,95) donne par exemple :

$$b \approx 0,533 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

5. La fréquence des femmes au Parlement français sera ;

$$f = \frac{318}{577} \approx 0,551 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

a. Ainsi $f \notin [a; b]$, donc on rejettera l'hypothèse de parité au risque de 10 % : **les femmes semblent favorisées.**

b. Si on note n le nombre de femmes au Parlement, on ne rejette pas l'hypothèse de parité au seuil de 10 % si, et seulement si, $n \in [a; b]$, ce qui équivaut à :

$$0,463 \leq \frac{n}{577} \leq 0,533,$$

$$267,151 \leq n \leq 307,541 \text{ car } 577 > 0.$$

Le plus grand entier n possible est donc 307.

▲ L'intervalle de fluctuation empirique à 90 % varie d'une simulation à une autre, ce qui peut légèrement modifier les résultats/conclusions précédentes.

15 1. L'instruction =ENT(ALEA()+0,000 52) renvoie 1 avec probabilité 0,000 52 et 0 le reste du temps.

Si on associe le résultat 1 aux enfants atteints de leucémie et 0 aux autres, on peut simuler un échantillon de taille 5969 en inscrivant cette instruction dans la cellule A1, puis en l'étendant jusqu'à la cellule A5969.

On sélectionne ensuite les cellules A1 à A5969, et on étend les formules jusqu'à la colonne CV (on peut mettre un « numéroteur de colonnes » dans la cellule A5970 ; avant d'étendre, il suffit de saisir 1 dans cette cellule) à l'aide de la poignée de recopie.

2. Pour le premier échantillon par exemple, simulé dans la colonne A, on utilise l'instruction =SOMME(A1:A5969) qui ajoute toutes les valeurs des cellules A1 à A5969. S'il y a n cas de leucémies (valeur 1), il y a $5\,969 - n$ enfants non atteints (valeur 0).

La somme obtenue sera $n \times 1 + (5963 - n) \times 0 = n$, ce qui donne bien le nombre de malades de cet échantillon.

3. Ici, il n'y a qu'un échantillon pour lequel le nombre de leucémies est supérieur ou égal à 9, sur les 100 échantillons simulés : **cela représente donc 1 % des échantillons.**

4. On rejette l'hypothèse que les leucémies sont le fruit du hasard au risque de 5 %.

▲ Voir chapitre 7, Savoir-Faire 3.

16 Partie A

1. Si $f \in [0,2; 0,8]$ et $n \geq 25$, alors **pour plus de 95 % des échantillons, p appar-**

tient à l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

2. On note $f_A = \frac{53}{100} = 0,53$, les intentions de vote sur l'échantillon de taille $n_A = 1\,700$ et p_A la proportion de votes recueillis finalement par le candidats A, $f_B = \frac{56}{100} = 0,56$ les intentions de vote et p_B la proportion de votes recueillis finalement par le candidats B.

$f_A \in [0,2 ; 0,8]$ et $n_A \geq 25$, donc le théorème de l'intervalle de confiance s'applique : $p_A \in \left[0,53 - \frac{1}{\sqrt{1\,700}} ; 0,53 + \frac{1}{\sqrt{1\,700}} \right]$, avec un niveau de confiance de 95 %.

Or $0,53 - \frac{1}{\sqrt{1\,700}} \approx 0,506$ à 10^{-3} près et $0,53 + \frac{1}{\sqrt{1\,700}} \approx 0,554$ à 10^{-3} près.

Donc $p_A > 0,5$: **le candidat A l'emporte avec un niveau de confiance de 95 %**. De même $f_B \in [0,2 ; 0,8]$ et $n_B \geq 25$ donc d'après le théorème de l'intervalle de

confiance : $p_B \in \left[0,56 - \frac{1}{\sqrt{250}} ; 0,56 + \frac{1}{\sqrt{250}} \right]$ avec un niveau de confiance de 95 %.

Or $0,56 - \frac{1}{\sqrt{250}} \approx 0,497$ à 10^{-3} près et $0,56 + \frac{1}{\sqrt{250}} \approx 0,623$ à 10^{-3} près. On ne peut exclure que p_B soit inférieur à 0,5 : **le candidat le mieux placé est le candidat A**.

Partie B

1. a. Une valeur possible est 0,535. On observe qu'à chaque pression sur la touche F9, on obtient une valeur différente : **c'est le phénomène de fluctuation d'échantillonnage**. On rencontre effectivement des moyennes inférieures à 0,5.

b. On saisit de A1 002 à G1 002 (par exemple) :

= MIN(A1001:CV1001) qui renvoie le minimum de la série : 0,484

= CENTILE(A1001:CV1001;0,1) qui renvoie le 1^{er} décile : 0,498

= QUARTILE(A1001:CV1001;1) qui renvoie le 1^{er} quartile : 0,507

= MEDIANE(A1001:CV1001) qui renvoie la médiane : 0,519

= QUARTILE(\$A1001:\$CV1001;3) qui renvoie le 3^e quartile : 0,531

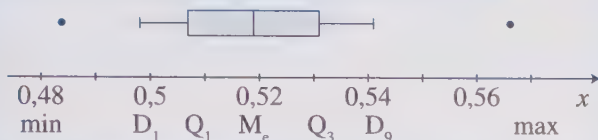
= CENTILE(\$A1001:\$CV1001;0,9) qui renvoie le 9^e décile : 0,541

= MAX(\$A1001:\$CV1001) : 0,567

On en déduit la boîte à moustaches élaguée aux déciles. Les points extérieurs représentent minimum et maximum de la série :



Les résultats donnés sont indicatifs et dépendent de votre simulation.



2. La valeur 0,52 se situe entre le minimum et le maximum de toutes les simulations, sauf pour $p = 0,57$ qui donne un minimum égal à $0,525 > 0,52$. Donc d'après ces valeurs, p peut être 0,49 ou 0,51 ou 0,52 ou 0,53 ou 0,55.

0,52 est dans l'intervalle interdécile $[D_1 ; D_9]$ pour les valeurs 0,51 ou 0,52 ou 0,53.

0,52 est dans l'intervalle interquartile $[Q_1 ; Q_3]$ pour les valeurs 0,52 ou 0,53.

La valeur la plus probable reste quand même 0,52, qui est très proche de la médiane trouvée par simulation avec $p = 0,52$.

17 1. Pour la classe de maternelle :

Médiane = 97 ; Minimum : 90 ; Maximum : 105, donc étendue : $105 - 90 = 15$.

1^{er} quartile : 95 ; 3^e quartile : 100, donc écart interquartile $100 - 95 = 5$.

Pour la classe de première :

Médiane = 172 ; Minimum : 160 ; Maximum : 190, donc étendue : $190 - 160 = 30$.

1^{er} quartile : 167 ; 3^e quartile : 176, donc écart interquartile : $176 - 167 = 9$.

Étendue et écart interquartile sont supérieurs dans la classe de première

C'est, a priori, dans la classe de première que les tailles sont les plus dispersées.

2. L'impression se confirme : l'écart-type est plus grand pour la 2^e série, donc **les tailles de la classe de première sont plus dispersées autour de leur moyenne.**

3. a. $x'_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{1}{\sigma_x} \times x_i - \frac{\bar{x}}{\sigma_x} = ax_i + b$ avec $a = \frac{1}{\sigma_x}$ et $b = -\frac{\bar{x}}{\sigma_x}$.

On en déduit la moyenne $\bar{x}'$ de la série (x'_i) :

$$\bar{x}' = a\bar{x} + b = \frac{1}{\sigma_x} \bar{x} - \frac{\bar{x}}{\sigma_x}$$

$$\bar{x}' = 0 ;$$

et son écart-type :

$$\sigma_{x'} = |a| \sigma_x = \frac{1}{\sigma_x} \times \sigma_x$$

$$\sigma_{x'} = 1 \text{ car } a = \frac{1}{\sigma_x} > 0.$$

Mêmes calculs pour la série (y'_i) .

b. Les paramètres de position (minimum, quartiles, médiane, maximum) subissent la même transformation affine si on ne touche pas aux effectifs.

▶ Voir la démonstration à l'exercice 13.

On en déduit, pour les valeurs centrées réduites (x'_i) arrondies au centième :

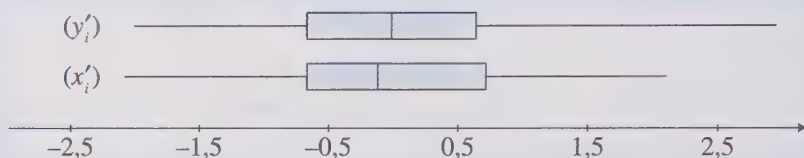
Minimum : -2,08 ; 1^{er} quartile : -0,68 ; Médiane : -0,13 ; 3^e quartile : 0,71 ;

Maximum : 2,1.

Pour les valeurs centrées réduites (y'_i) arrondies au centième :

Minimum : -2 ; 1^{er} quartile : -0,86 ; Médiane : -0,02 ; 3^e quartile : 0,64 ;

Maximum : 2,95.



c. L'étendue reste plus grande pour la série centrée réduite correspondant à la classe de première, mais les boîtes à moustaches sont très similaires et l'écart interquartile est même plus faible pour la classe de première ! Cela remet en cause notre réponse : la dispersion semble équivalente pour les deux classes, voire moindre dans la classe de première, car on se passe parfois des valeurs extrêmes pour comparer deux séries.

d. Si $x = 101$, $x' \approx 0,90$ à 10^{-2} près. Si $y = 178$, $y' \approx 0,97$ à 10^{-2} près. Ainsi, si on compare à la moyenne, qui est 0, c'est la valeur de y' qui est la plus élevée. Donc c'est l'élève de 178 cm qui semble le plus grand, par rapport à sa classe.

18 Partie A

$$1. \bar{y} = \frac{(ax_1 + b) \times n_1 + (ax_2 + b) \times n_2 + \dots + (ax_r + b) \times n_r}{n_1 + n_2 + \dots + n_r}$$

$$\bar{y} = \frac{ax_1n_1 + bn_1 + ax_2n_2 + bn_2 + \dots + ax_rn_r + bn_r}{n_1 + n_2 + \dots + n_r}$$

$$\bar{y} = \frac{a(x_1n_1 + x_2n_2 + \dots + x_rn_r) + b(n_1 + n_2 + \dots + n_r)}{n_1 + n_2 + \dots + n_r}$$

$$\bar{y} = a \times \frac{(x_1n_1 + x_2n_2 + \dots + x_rn_r)}{n_1 + n_2 + \dots + n_r} + \frac{b(n_1 + n_2 + \dots + n_r)}{n_1 + n_2 + \dots + n_r}$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b.$$

2. Par définition $\sigma' = \sqrt{V'}$ avec V' la variance, définie ainsi :

$$V' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=r} n_i \times (y_i - \bar{y})^2 \text{ avec } n \text{ l'effectif total,}$$

$$\text{donc } V' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=r} n_i \times (ax_i + b - (a\bar{x} + b))^2$$

$$V' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=r} n_i \times (ax_i + b - a\bar{x} - b)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=r} n_i \times [a(x_i - \bar{x})]^2$$

$$V' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=r} a^2 n_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$V' = \frac{1}{n} [a^2 \times n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + a^2 \times n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + a^2 \times n_r (x_r - \bar{x})^2]$$

$$V' = \frac{1}{n} \times a^2 \left[n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_r (x_r - \bar{x})^2 \right]$$

$$V' = a^2 \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i (x_i - \bar{x})^2 = a^2 \times V \text{ avec } V \text{ la variance de la série } (x_i ; n_i) \text{ d'où}$$

$$\sigma' = \sqrt{a^2 \times V} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{V}.$$

Or $\sqrt{V} = \sigma$ donc :

$$\sigma' = |a| \times \sigma$$

Partie B

1. Si on désigne chaque candidat par la lettre du jury qui l'a examiné, le classement est : **premiers ex-aequo : D, F et G ;**

quatrièmes ex-aequo : A, E, I et J ;

huitième : C ;

neuvièmes ex-aequo : B et H.

2. Détaillons le calcul pour le jury B : on veut que la moyenne $\bar{y}$ soit 10, donc $a\bar{x} + b = 10 \Leftrightarrow a \times 9 + b = 10$ (1).

On veut que son écart type σ' soit 2, donc $|a| \times \sigma' = 2 \Leftrightarrow |a| \times 3 = 2 \Leftrightarrow |a| = \frac{2}{3}$, donc

$$a = \frac{2}{3} \text{ car } a > 0.$$

$$\text{Alors (1) donne : } \frac{2}{3} \times 9 + b = 10 \Leftrightarrow 6 + b = 10$$

$$\Leftrightarrow b = 4.$$

$$\text{Alors } (a ; b) = \left(\frac{2}{3} ; 4 \right).$$

La note du candidat devient :

$$\frac{2}{3} \times 10 + 4 = \frac{32}{3} \approx 10,7.$$

On effectue les mêmes calculs pour les autres jurys. D'où le tableau :

Jury	A	B	C	D	E
Couple (a ; b)	(1 ; 0)	$\left(\frac{2}{3} ; 4 \right)$	$\left(\frac{2}{3} ; 4 \right)$	$\left(\frac{2}{3} ; 4 \right)$	$\left(\frac{2}{3} ; \frac{10}{3} \right)$
Note définitive	12	10,7	11,3	14	11,3

Jury	F	G	H	I	J
Couple (a ; b)	$\left(\frac{2}{3} ; 2 \right)$	(1 ; -2)	(1 ; 1)	$\left(\frac{2}{3} ; \frac{16}{3} \right)$	(1 ; 3)
Note définitive	12	13	11	13,3	15

Le classement final est donc (du 1^{er} au dernier) :

J ; D ; I ; G ; A et F ex-aequo ; C et E ex-aequo ; H ; B.

3. a. Une note de 12 donnait un classement moyen a priori (4^e ex-acquo sur 10) mais avec un jury qui « note sèchement » (moyenne de 7 par exemple) la note monte

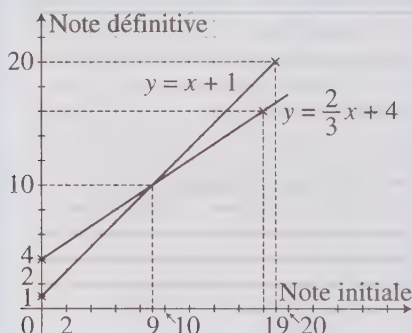
nettement après péréquation ; et elle monte d'autant plus que l'écart-type est petit. Ainsi le candidat I finit 3^e et J finit même premier. **Donc l'affirmation est fausse.**

b. Les jurys C et E ont le même écart-type, alors la péréquation change l'écart-type à la moyenne de chaque jury de la même façon et les candidats C et E obtiennent la même note finale. Mais entre les jurys A et C, l'écart-type n'est pas le même, ce qui donne des notes finales différentes. **Donc l'affirmation n'est pas obligatoirement vraie.**

c. Le candidat G est finalement mieux noté que le F ; un écart-type faible signifie que les notes sont plus centrées autour de la moyenne, donc le candidat G est « plus méritant » d'avoir eu 3 points de plus que la moyenne de son jury que le candidat F. **L'affirmation est donc fausse**, c'est le contraire qui est vraie.

d. Lorsque la moyenne du jury est 9, et l'écart-type de 2, cela correspond au jury H, pour lequel on a $y = 1x + 1$ d'après le 2). Avec un écart-type de 3, c'est le jury C, pour

lequel : $y = \frac{2}{3}x + 4$. Alors d'après le graphique, pour une note initiale égale, les notes finales sont supérieures avec un écart-type de 2 à partir de $x = 9$.



19 1. $M(x; y)$ est à l'intérieur du carré OIKJ $\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.

2. a. L'aire du carré est $1 \times 1 = 1$ unité d'aire. L'aire du quart de disque D est

$$\frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{4}. \text{ Donc la proportion } p \text{ est égale à } \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

b. Le cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon 1 est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ du plan tels que :

$$\begin{aligned} OM = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Donc si $M(x; y)$ est un point du plan :

M est à l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1 $\Leftrightarrow OM \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$.

Donc si $M(x; y)$ est un point à l'intérieur du carré OIKJ :

$$M \in D \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

3.

VARIABLES

f EST_DU_TYPE NOMBRE

x EST_DU_TYPE NOMBRE

y EST_DU_TYPE NOMBRE

n EST_DU_TYPE NOMBRE

i EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

n PREND_LA_VALEUR 0

POUR i ALLANT_DE 1 A 10 000

DEBUT_POUR

x PREND_LA_VALEUR random()

y PREND_LA_VALEUR random()

SI (pow(x,2)+pow(y,2)<=1) ALORS

DEBUT_SI

n PREND_LA_VALEUR n+1

TRACER_POINT (x,y)

FIN_SI

SINON

DEBUT_SINON

TRACER_POINT (x,y)

FIN_SINON

FIN_POUR

f PREND_LA_VALEUR n/10 000

AFFICHER "f="

AFFICHER f

FIN_ALGORITHME



▲ Lors de la saisie de la commande **TRACER_POINT**, on peut choisir la couleur, mais elle n'apparaît pas dans le script de l'algorithme.

4. a. Le résultat des simulations donne (par exemple) $f = 0,781$, donc un intervalle de confiance à 95 % de $\frac{\pi}{4}$ est :

$$\left[0,781 - \frac{1}{\sqrt{10\,000}} ; 0,781 + \frac{1}{\sqrt{10\,000}} \right] \text{ soit } [0,771 ; 0,791].$$

On en déduit $0,771 \leq \frac{\pi}{4} \leq 0,791 \Leftrightarrow 3,084 \leq \pi \leq 3,164$ avec un niveau de confiance de 0,95.

b. $a \leq \pi \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{4} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{b}{4}$, donc l'amplitude de l'intervalle $[a ; b]$ est de 10^{-3} si,

et seulement si, l'amplitude de l'intervalle $\left[\frac{a}{4} ; \frac{b}{4} \right]$ est de $\frac{10^{-3}}{4}$.

Or l'amplitude de l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est $f + \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$

et :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{2}{10^{-3}} = 2 \times 10^3 \Leftrightarrow n \geq 4 \times 10^6.$$

Donc on peut espérer un encadrement de π d'amplitude 10^{-3} avec un niveau de confiance de 0,95 pour $n \geq 4 \times 10^6$.

Sous Algobox, on obtient une erreur due au trop grand nombre de simulations nécessaires. Ce nombre augmente trop vite pour que la méthode soit exploitable pour obtenir les décimales de π .

20 Partie A

1.

x_i	1	3	5
f_i	$\frac{6}{10} = 0,6$	0,1	0,3

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^3 f_i \times x_i = 0,6 \times 1 + 0,1 \times 3 + 0,3 \times 5 = 2,4.$$

$$V = \sum_{i=1}^3 f_i \times (x_i - \bar{x})^2 = 0,6 \times (1 - 2,4)^2 + 0,1 \times (3 - 2,4)^2 + 0,3 \times (5 - 2,4)^2 = 3,24.$$

 **Autre méthode** : à la calculatrice, on trouve l'écart-type $\sigma = 1,8$, donc $V = \sigma^2 = 3,24$.

La médiane de cette série de 10 valeurs est la moyenne entre la 5^e valeur, un 1, et la 6^e valeur, un 1 : $M_e = 1$.

2. a. $f(x) = 0,6 \times (x^2 - 2x + 1) + 0,1 \times (x^2 - 6x + 9) + 0,3 \times (x^2 - 10x + 25)$

$$f(x) = 0,6x^2 - 1,2x + 0,6 + 0,1x^2 - 0,6x + 0,9 + 0,3x^2 - 3x + 7,5$$

$$f(x) = 1x^2 - 4,8x + 9.$$

b. $f(x) = x^2 - 4,8x + 9 = (x - 2,4)^2 - 2,4^2 + 9 = (x - 2,4)^2 + 3,24$ (forme canonique)

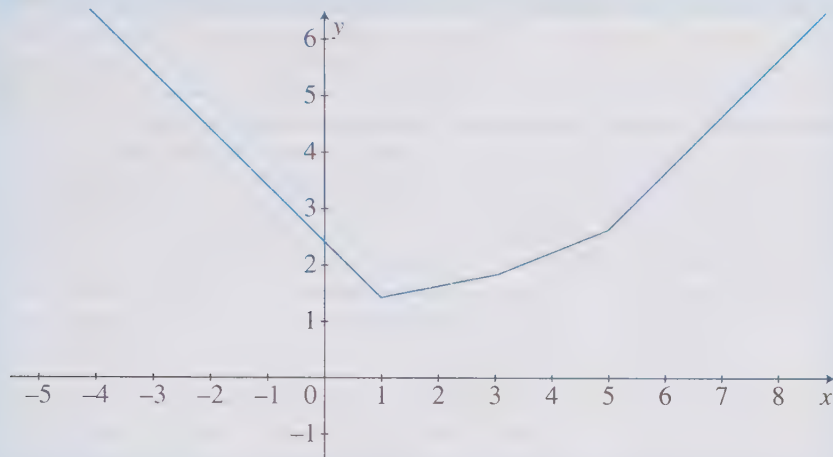
$1 > 0$, donc f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, égal à $3,24 = V$ et atteint pour $x = 2,4 = \bar{x}$.

 Nous venons de démontrer, pour notre exemple, la propriété suivante : la variance est la valeur qui minimise la moyenne des carrés des écarts à une valeur x .

3. a.

x	$-\infty$	1		3		5	$+\infty$
$0,6 \times x - 1 $	$0,6 \times (1 - x)$	0	$0,6 \times (x - 1)$		$0,6 \times (x - 1)$		$0,6 \times (x - 1)$
$0,1 \times x - 3 $	$0,1 \times (3 - x)$		$0,1 \times (3 - x)$	0	$0,1 \times (x - 3)$		$0,1 \times (x - 3)$
$0,3 \times x - 5 $	$0,3 \times (5 - x)$		$0,3 \times (5 - x)$		$0,3 \times (5 - x)$	0	$0,3 \times (x - 5)$
$g(x)$	$-x + 2,4$	1,4	$0,2x + 1,2$	1,8	$0,4x + 0,6$	2,6	$x - 2,4$

b.



On en déduit que g admet un minimum pour $x = 1$, ce qui est bien égal à M_e .



• Ce résultat peut se démontrer, mais c'est difficile.

• C'est un exemple de la propriété suivante : la médiane est la valeur qui minimise la moyenne des valeurs absolues des écarts.

Partie B

1. On développe et on réduit :

$$f(x) = f_1 \times (x^2 - 2x_1x + x_1^2) + f_2 \times (x^2 - 2x_2x + x_2^2) + \dots + f_r \times (x^2 - 2x_rx + x_r^2)$$

$$f(x) = (f_1 + f_2 + \dots + f_r)x^2 - 2x(f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_rx_r) + f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + \dots + f_rx_r^2.$$

$f_1 + f_2 + \dots + f_r = 1$, donc :

$$f(x) = x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2.$$

$$2. f(x) = (x - \bar{x})^2 - \bar{x}^2 + \bar{x}^2 = 1(x - \bar{x})^2 + \bar{x}^2 - \bar{x}^2.$$

Donc f admet un minimum pour $x = \bar{x}$ et ce minimum vaut :

$$f(\bar{x}) = f_1(\bar{x} - x_1)^2 + f_2(\bar{x} - x_2)^2 + \dots + f_r(\bar{x} - x_r)^2 = V,$$

la variance de la série !

21 1. À la calculatrice, on obtient après avoir entré les prix dans list 1 et les effectifs dans list 2 :

$$\bar{x} \approx 3,26 \text{ €} ; \sigma \approx 1,71 ; Q_1 = 2 ; \text{Méd} = 3 ; Q_3 = 5.$$



Voir le savoir-faire 1 pour l'utilisation de la calculatrice.

2. Il faut ajouter en fin de liste la valeur 100 dans les prix et 1 dans les effectifs. On obtient :

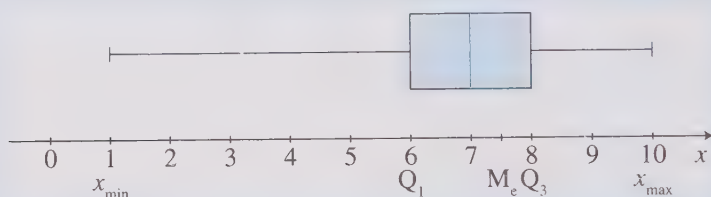
$$\bar{x} \approx 6,71 \text{ €} ; \sigma \approx 18,03 ; Q_1 = 2 ; \text{Méd} = 3 ; Q_3 = 5.$$

Les quartiles et la médiane n'ont pas changé, alors que la moyenne et l'écart-type ont beaucoup varié : on dit que **moyenne et écart-type sont plus sensibles aux valeurs extrêmes**.

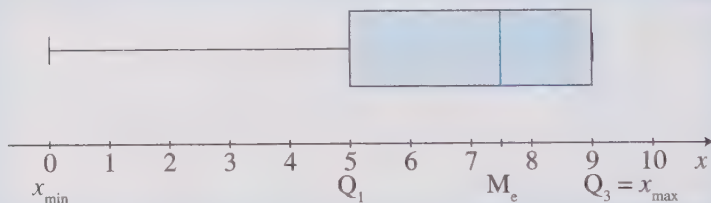
22 1. À la calculatrice, on obtient les résultats suivants, arrondis à 0,1 pour la moyenne, à 0,01 pour l'écart-type :

▲ Pour l'utilisation de la calculatrice, voir **savoir-Faire 1**.

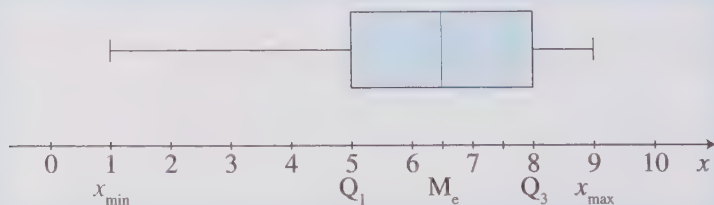
Classe A : $m_A \approx 6,8$; $\sigma_A \approx 2,17$; $Q_{1A} = 6$; $M_{eA} = 7$; $Q_{3A} = 8$.



Classe B : $m_B \approx 6,7$; $\sigma_B \approx 2,54$; $Q_{1B} = 5$; $M_e = 7,5$; $Q_{3B} = 9$.



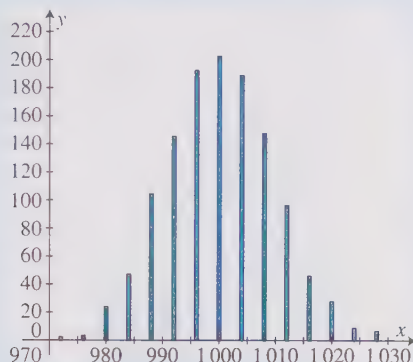
Classe C : $m_C \approx 6,4$; $\sigma_B \approx 1,66$; $Q_{1C} = 5$; $M_{eC} = 6,5$; $Q_{3C} = 8$.



2. a. C'est la classe A qui a la plus haute moyenne.
- b. C'est la classe B qui a la plus haute médiane.
- c. C'est la classe C qui a la plus petit écart-type.
- d. C'est la classe A qui a la plus petit écart interquartile.
- e. C'est la classe B qui a le 3^e quartile le plus grand.
- f. C'est la classe A qui a le 1^{er} quartile le plus haut.

3. Jean confond moyenne et médiane : sa note est supérieure à la moyenne de classe mais la médiane est de 7,5, donc il y a au moins 50 % de la classe qui a une note strictement supérieure à la sienne. **Il est en fait dans la deuxième moitié de la classe.**

23 1. a. On choisit, par exemple, 1 cm pour 5 unités en abscisses, avec un axe des ordonnées placé à l'abscisse 970, et 1 cm pour 20 unités en ordonnées.



b. $\bar{x} \approx 1\,000,2$ et $\sigma = 9,5$ à 0,1 près.

c. $\bar{x} - 2\sigma = 981,1$ et $\bar{x} + 2\sigma = 1019,1$. Il y a donc $2 + 3 + 24 + 28 + 9 + 7 = 73$ valeurs hors de l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma]$, soit $\frac{73}{1\,250} \times 100 = 5,84\%$.

Il y a donc plus de 5 % des bouteilles hors de la plage de normalité à 95 % : la chaîne ne semble pas bien réglée.

2. a. On complète le tableau avec les centres des classes pour c.

Classe	[970 ; 980]	[980 ; 990]	[990 ; 1000]	[1000 ; 1010]	[1010 ; 1020]	[1020 ; 1030]
Effectif	29	152	542	338	171	16
Centre	975	985	995	1005	1015	1025

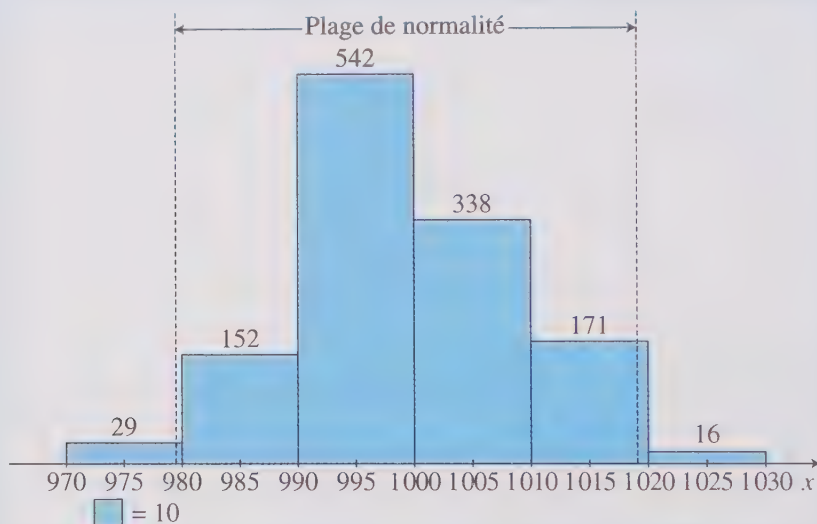
b. On choisit une unité sur l'axe des abscisses : 1 cm pour 5 unités, puis une unité d'aire : 1 petit carreau pour 10 bouteilles, soit 0,25 cm² pour 10 (1 cm² pour 40) par exemple.

On calcule le nombre d'unités d'aire (UA) nécessaires, la largeur de la classe en cm, puis on trouve la hauteur en cm du rectangle correspondant.

Classe	[970 ; 980]	[980 ; 990]	[990 ; 1000]
UA en cm ²	$\frac{29}{10} \times 0,25 = 0,725$	3,8	13,55
Largeur	2	2	2
Hauteur à 0,1 cm près	$\frac{0,725}{2} \approx 0,4$	1,9	6,8

Classe	]1000;1010]	]1010;1020]	]1020;1030]
UA en cm ²	8,45	4,28	0,4
Largeur	2	2	2
Hauteur à 0,1 cm près	4,2	2,1	0,2

▲ Ici, les classes ayant toutes la même amplitude, on peut se contenter de choisir une échelle de longueur en abscisses et en ordonnées.



c. Avec les centres des classes, on trouve $\bar{x}' \approx 999,2$ et $\sigma' \approx 9,9$ à 0,1 près.

d. La plage de normalité à 95 % est donc $[979,4 ; 1019]$. Avec une répartition uniforme à l'intérieur de chaque classe, sur les 29 bouteilles de la plage $[970 ; 980]$, on considère qu'il y en a $\frac{9,4}{10} \times 24 = 27,26$ dans l'intervalle $[970 ; 979,4[$. Sur les 171 de la classe $[1010 ; 1020]$, il y en a $\frac{1}{10} \times 171 = 17,1$ dans l'intervalle $]1019 ; 1020]$. Enfin les 16 bouteilles de l'intervalle $[1020 ; 1030]$ sont hors de la plage de normalité : il y en a donc $27,26 + 17,1 + 16 = 60,36$, soit 4,8 % des bouteilles, donc moins de 5 %.

Ces mesures permettent de conclure à tort que la chaîne est bien réglée : le regroupement en classe fait perdre en précision.

6

Variables aléatoires

PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI : RAPPELS DE SECONDE

1. Événements

On note $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ l'ensemble des événements élémentaires (ou univers) d'une expérience aléatoire.

■ Définition

On définit une probabilité sur Ω en associant à chaque événement élémentaire e_i un nombre $p(e_i)$, appelé probabilité de e_i , tel que :

- pour tout i , $0 \leq p(e_i) \leq 1$;
- $p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1$ (la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1).

EXEMPLE : On lance un dé truqué qui donne 6 deux fois plus souvent que les autres faces. On note p_i la probabilité d'obtenir la face numérotée i .

Alors :

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 \text{ et } p_6 = 2p_1.$$

Ainsi :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_6 = 1 \Leftrightarrow 7p_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{7} \text{ et } p_6 = \frac{2}{7}.$$

■ Définitions

- Un **événement A** est une partie de Ω .
- La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

EXEMPLE : Déterminons la probabilité de l'événement A « obtenir un nombre pair ». A peut s'écrire $\{2; 4; 6\}$.

$$\text{Ainsi } p(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{4}{7}.$$

■ Propriété

$$p(\emptyset) = 0 \text{ et } p(\Omega) = 1.$$

2. Équiprobabilité

■ **Définition** : Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit que l'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

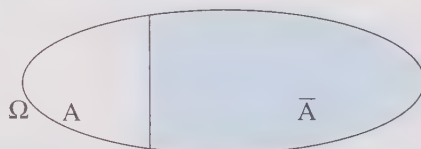
■ **Propriété** : Dans une situation d'équiprobabilité, pour tout événement A :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

EXEMPLE : On n'est pas ici dans une situation d'équiprobabilité, car chacun des p_i vaudrait alors $\frac{1}{6}$ et la probabilité de A serait de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3. Événements particuliers

■ **Définition** : $\bar{A}$ est l'ensemble de tous les événements élémentaires qui ne sont pas dans A .



■ **Propriété** : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ (ou $p(A) = 1 - p(\bar{A})$, ou $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$).

EXEMPLE : $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$. $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$.

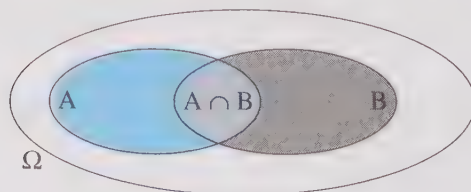
Ceci peut se vérifier ici car on a directement : $p(\bar{A}) = p_1 + p_3 + p_5 = \frac{3}{7}$.

■ **Définitions** :

• $A \cap B$, c'est à dire « A et B », est l'événement constitué des événements élémentaires qui sont à la fois dans A et dans B .

• $A \cup B$, c'est à dire « A ou B », est l'événement constitué des événements élémentaires qui sont dans l'un au moins des événements A , B .

Représentons la situation par un diagramme de Venn :



$A \cup B$ est représenté par tout ce qui est colorié.

■ **Propriété** : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.



Il suffit de se rappeler qu'on ne doit pas compter deux fois $A \cap B$.

■ **Définition** : A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

■ **Propriété** : Si A et B sont incompatibles,
 $p(A \cap B) = 0$, et $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

EXEMPLE : Si B est l'événement « obtenir un chiffre supérieur ou égal à 3 ».

$$B = \{3; 4; 5; 6\}, \text{ donc } p(B) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{5}{7}.$$

$$A \cap B = \{2; 4; 6\} \cap \{3; 4; 5; 6\} = \{4; 6\}.$$

A et B ne sont donc pas incompatibles.

$$A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6\}.$$

$$p(A \cup B) = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{6}{7}, \quad p(A \cap B) = p_4 + p_6 = \frac{3}{7}.$$

$$\text{On a bien : } p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{7} + \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$$

II VARIABLE ALÉATOIRE

Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité p .

1. Loi de probabilité

■ Définitions

- Une variable aléatoire est une fonction X définie sur Ω , à valeurs réelles $x_1, x_2, \dots, x_r$. L'événement « X prend la valeur x_i » s'écrit ($X = x_i$).
- Définir la loi de probabilité de X c'est :
 - repérer les différentes valeurs possibles pour X : $x_1, x_2, \dots, x_r$;
 - déterminer les probabilités de chacun des événements ($X = x_i$) : $p_1, p_2, \dots, p_r$.

■ On peut consigner ces résultats dans un tableau tel que celui-ci :

	x_1	x_2	...	x_r
	p_1	p_2	...	p_r

On doit avoir $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$.

2. Espérance, variance, écart-type

■ Définition

- L'espérance de la loi de X est le nombre :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r$$

- La variance de cette loi est le nombre :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \times p_1 + (x_2 - E(X))^2 \times p_2 + \dots + (x_r - E(X))^2 \times p_r$$

■ **Propriété :** $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

■ **Définition :** L'écart-type de cette loi, noté σ , est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}.$$

EXEMPLE : Voir le savoir-faire 1.



• $V(X) \geq 0$, donc on peut calculer sa racine carrée, c'est-à-dire σ . De plus, on a toujours $\sigma \geq 0$.

• $\sigma^2 = V(x)$, c'est pourquoi $V(x)$ est souvent noté σ^2 .

■ Interprétations

Soit un ensemble fini Ω muni d'une loi de probabilité, A un événement et X une variable aléatoire définie sur Ω . Si on répète un grand nombre de fois, n , une même expérience aléatoire sur Ω :

- La fréquence empirique (obtenue par l'expérience) de réalisation de A se stabilise : cette fréquence « stabilisée » correspond à la probabilité de A .
- La moyenne empirique calculée sur les valeurs de n variables aléatoires identiques, indépendantes, de même loi de probabilité que X , se stabilise vers $E(X)$.
- $V(X)$ est alors un paramètre de dispersion autour de cette valeur moyenne : cette dispersion augmente avec $V(X)$.

Nous reviendrons sur ces notions dans la partie qui traite de l'échantillonnage au chapitre 7.

■ **Propriétés :** Pour toutes variables aléatoires X et Y et tous réels a et b :

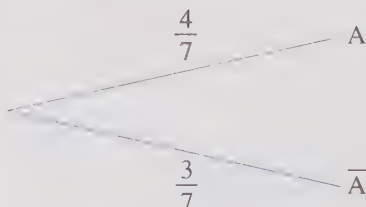
- $E(aX + b) = aE(X) + b$; $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ (linéarité de l'espérance)
- $V(aX) = a^2V(X)$.

3. Répétition d'expériences identiques et indépendantes

■ Arbre pondéré

Plutôt que de représenter tous les événements élémentaires d'une expérience, on préfère parfois résumer l'expérience à l'aide d'un arbre dont les branches ont un « poids », la probabilité des événements auxquels elles aboutissent.

EXEMPLE (de référence)



■ Multiplication le long des branches des arbres pondérés

Lors de n expériences successives identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste d'événements $E_1; E_2; \dots; E_n$ est le produit des probabilités de ces événements :

$$p((E_1; E_2; \dots; E_n)) = p(E_1) \times p(E_2) \times \dots \times p(E_n).$$

EXEMPLE : Voir le savoir-faire 2.

SAVOIR-FAIRE

1. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X

Étape 1. On établit la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Étape 2. On calcule $E(X)$ à l'aide de la formule donnée en cours.

Étape 3. La variance, qui est un indicateur de l'écart entre les valeurs prises par X et son espérance, nécessite d'avoir calculé $E(X)$. On peut disposer les calculs amenant à $V(X)$ dans un tableau ou utiliser les fonctions statistiques des calculatrices scientifiques.

EXEMPLE : Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, l'une d'entre elles porte le numéro 10, deux portent le numéro 5, trois portent le numéro 2 et les autres portent le numéro 1.

■ L'expérience consiste à extraire au hasard une boule de l'urne et à noter son numéro X .

Les boules ont toutes la même probabilité de sortie. Dans cette situation d'équiprobabilité, on utilise la formule
$$\frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

pour donner la loi de la variable aléatoire X :

	10	5	2	1
	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{2}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{4}{10} = 3.$$

Calcul de la variance :

	10	5	2	1
	7	2	-1	-2
	49	4	1	4
	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

$$V(X) = 49 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{2}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10} = 7,6.$$

■ Avec une calculatrice scientifique Texas Instrument

Dans le menu STATS, Editer.

On inscrit les valeurs 10, 5, 2, 1 dans la colonne L_1 .

On inscrit les valeurs $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$ dans la colonne L_2 .

Dans le menu CALC, on choisit 1-Var stats et on tape 1-Var stats L_1, L_2 .

On lit, entre autres, les valeurs $\bar{x}$ correspondant à $E(X)$, et σ_x correspondant à l'écart-type. Pour la variance $V(X)$, on doit donc calculer le carré de l'écart-type obtenu.

Attention à la syntaxe : L_1 s'obtient par 2nd+1 : ce n'est pas la lettre L suivie du chiffre 1.

Il faut bien penser à la virgule entre L_1 et L_2 .

Avec une calculatrice scientifique Casio

Dans le menu STATS :

On inscrit les valeurs 10, 5, 2, 1 dans la colonne List 1.

On inscrit les valeurs $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$ dans la colonne List 2.

On effectue les réglages suivants (à vérifier systématiquement !) dans l'onglet CALC SET ou REG :

1 Var XList : List 1

1 Var Freq : List 2.

Puis on revient sur CALC et on choisit enfin 1 VAR.

On lit, entre autres, les valeurs $\bar{x}$ correspondant à $E(X)$, et σn correspondant à l'écart-type. Pour la variance $V(X)$, on doit donc calculer le carré de l'écart-type obtenu.

Attention à la syntaxe : List s'obtient à l'aide de la combinaison SHIFT + 1 et ne doit pas être écrit en toutes lettres LIST.

2. Utiliser un arbre pondéré dans une répétition d'expériences identiques indépendantes

Étape 1. On identifie l'expérience à répéter, et on détermine les probabilités des événements pour cette expérience.

Étape 2. On dresse un arbre qui rend compte de la répétition de l'expérience et on fait apparaître les probabilités le long de chaque branche de l'arbre.

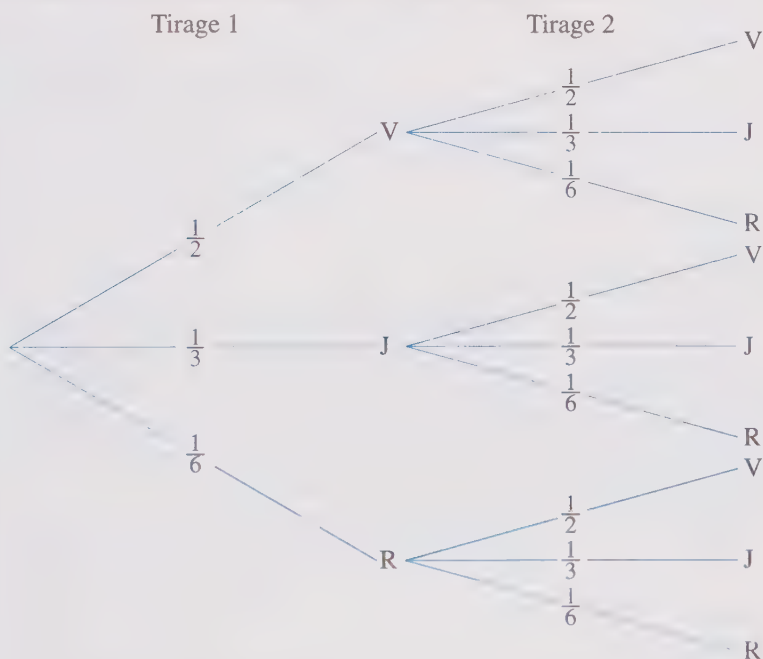
Étape 3. On repère les branches qui mènent à l'événement cherché et on multiplie les probabilités que l'on rencontre le long de ces branches.

EXEMPLE : Une urne contient trois boules vertes, deux jaunes et une rouge, indiscernables au toucher. On tire successivement, et avec remise, deux boules de cette urne. On cherche la probabilité de l'événement M « obtenir deux boules de la même couleur ».

L'expérience qui est répétée deux fois, de manière identique et indépendante, consiste à tirer une boule et à noter sa couleur.

Pour chaque tirage, les trois couleurs ne sont pas équiprobables ! Il faut numérotiser les boules $V_1, V_2, V_3, J_1, J_2, R_1$: ainsi les tirages de chacune de ces boules seront équiprobables. Si on note V l'événement « la boule tirée est verte », J l'événement « la boule tirée est jaune » et R l'événement « la boule tirée est rouge » : $p(V) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $p(J) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(R) = \frac{1}{6}$.

On représente les deux tirages successifs par l'arbre pondéré :



Les résultats favorables à M sont $(V ; V)$, $(J ; J)$ et $(R ; R)$.

$$\text{Ainsi } P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{18}.$$

▲ L'utilisation de l'arbre pondéré est ici une question d'ordre pratique : il amène à considérer $3 \times 3 = 9$ résultats alors que la construction d'un arbre complet, qui représente les tirages des boules numérotées, conduirait à $6 \times 6 = 36$ couples équiprobables $(J_1 ; J_1)$, $(J_1 ; J_2)$...

Dans le cas de trois tirages successifs, on obtiendrait $3 \times 3 \times 3 = 27$ résultats, contre $6 \times 6 \times 6 = 216$ avec un arbre complet (ce qui devient pratiquement inexploitable), etc.

EXEMPLE 2 : On lance trois fois un dé truqué.

À chaque lancer, $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0,12$ et $p(6) = 0,4$.

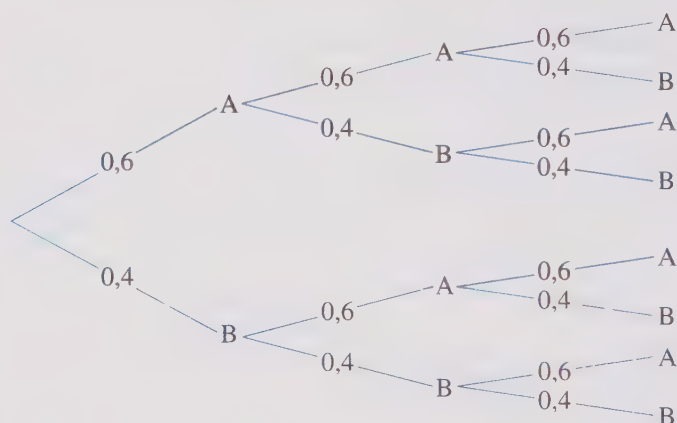
Quelle est la probabilité de l'événement T « obtenir un triple 6 » ?

Pour un lancer, si on note A « obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 » et B « obtenir 6 » :

$$p(A) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 0,6 ;$$

$$p(B) = 0,4 (= 1 - p(A)).$$

On dresse l'arbre pondéré :



Le résultat favorable à T est $(B; B; B)$, donc :

$$p(T) = 0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,064.$$

❗ Ici, même si on avait dressé l'arbre complet des $6 \times 6 \times 6 = 216$ résultats possibles avec ces trois lancers, ceux-ci n'étant pas équiprobables, on ne pourrait pas compter le nombre de branches favorables à notre événement et le diviser par le nombre de cas possibles.

EXERCICES D'APPLICATION

6

1 CALCULONS

★ 10 min ▶ P. 278

Calculer espérance, variance et écart-type des variables aléatoires X et Y dont les lois de probabilité sont données dans les tableaux suivants. Les résultats seront approchés à 10^{-2} près.

a.

	-5	2	3
	0,3	0,6	0,1

b.

	-10	-5	0	15
	0,1	0,3	0,4	0,2

▶ Voir le cours II.2.

2 DEUX INCONNUES

★ 5 min ▶ P. 278

X est une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

	-6	x	3
	0,3	0,6	y

Déterminer x et y pour que l'espérance $E(X)$ soit égale à 2.

▶ Revoir si besoin ce que vaut la somme des probabilités de toutes les issues possibles pour X .

3 GAIN ALGÈBRE

★ 5 min ▶ P. 278

Pour une tombola, 1 000 billets sont mis en vente au prix de 2 euros. Il y a 10 billets gagnants. L'un rapporte 500 euros, 2 rapportent 100 euros, et 7 rapportent 50 euros. Lorsqu'on achète un billet au hasard, on note G le gain algébrique correspondant à ce billet.

- Justifier que G peut prendre les valeurs -2 , 48, 98 et 498.
- Déterminer la loi de probabilité de G .

▶ Voir le cours II.1.

- Calculer son espérance. Comment retrouver ce résultat directement ?

4 L'ADDITION !

★ | 10 min | ► P. 279

Lorsqu'un client rentre dans le restaurant « Ki Manj Pay », la probabilité qu'il choisisse l'un des quatre menus proposés est donné par :

Menu	8	15	22	30
Prob.	0,2	0,4	0,3	0,1

1. Si 500 clients mangent dans ce restaurant au cours du mois, quel chiffre d'affaire mensuel le restaurateur peut-il espérer ?

2. Les tarifs changent au premier septembre. Le restaurateur hésite entre deux modifications :

Modification A : il augmente tous les prix de 10 %.

Modification B : il augmente tous les prix d'un euro.

Si les modifications n'influencent ni le nombre de clients, ni la répartition de leurs choix, quelle modification choisira le restaurateur :

a. s'il espère gagner le plus possible ?

b. s'il veut prendre le moins de risques possibles ?

1. Introduire la variable aléatoire X représentant le prix payé par le client : le restaurateur peut espérer, qu'en moyenne, le client dépense $E(X)$ euros.

2. Une augmentation de 10 % correspond à une multiplication par $1 + \frac{10}{100}$.

a. On pourra poser $Y = 1,1X$ et $Z = X + 1$, puis utiliser la linéarité de l'espérance (voir cours II.2.)

b. Le risque est lié à la variance de la variable aléatoire.

5 NAISSANCES

★★ | 10 min | ► P. 280

Une étude statistique sur une population de hérissons montre qu'à la naissance, 4 petits sur 10 sont des femelles. On suppose que les naissances des petits d'une même portée sont indépendantes. Pour une portée de 3 bébés hérissons, déterminer la loi de probabilité du nombre X de femelles.

6 DÉS ICOSAÉDRIQUES

★★ | 10 min | ► P. 281

Deux dés à 20 faces (cela existe : ils sont icosaédriques) bien équilibrés ont 10 faces numérotées 1 ainsi que 5 faces numérotées 2 et 5 faces numérotées 3. On lance ces deux dés et on note S la somme des résultats obtenus. Déterminer la loi de probabilité de S .

Pour bien les distinguer, on pourra imaginer que les dés sont de couleurs différentes. En cas de difficultés, voir le savoir-faire 2 sur la répétition d'expériences identiques et indépendantes.

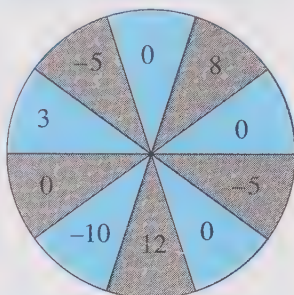
7 VRAI OU FAUX ? JUSTIFIEZ !

★★ 10 min ► P. 282

On suppose que la roue n'est pas truquée et que tous les secteurs ont des angles au centre de même mesure.

Lorsqu'un joueur fait tourner cette roue :

- La probabilité qu'il soit gagnant est 0,3.
- La probabilité qu'il soit perdant est 0,3.
- Le jeu est équitable.



Commencer par établir la loi de probabilité du gain X .
Le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

8 DES PANNES

★★ 10 min ► P. 282

Les coûts de fabrication d'un téléviseur s'élèvent à 200 euros. Un mauvais réglage sur une machine qui les fabrique amène deux types de défauts, notés a et b . Un téléviseur peut même parfois souffrir des deux défauts en même temps. 10 % des téléviseurs produits souffrent (au moins) du défaut a ; 7 % des téléviseurs produits souffrent (au moins) du défaut b . On sait aussi que 2 % des téléviseurs souffrent des deux défauts.

Avant d'être vendus au client 500 euros, les téléviseurs sont testés et ceux qui présentent des défauts subissent des interventions :

- qui coûtent 50 euros pour corriger le défaut a ;
- qui coûtent 100 euros pour corriger le défaut b .

Un téléviseur est pris au hasard en réserve.

- Quel bénéfice le fabricant peut-il espérer de sa vente ?
- Même question s'il accorde une remise de 15 euros sur le téléviseur.

Pour ne pas se tromper dans l'interprétation des données, on peut réaliser un diagramme de Venn représentant la situation (voir Cours I.3.).

9 SECOND DEGRÉ

★★ 20 min ► P. 283

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4, indiscernables au toucher. On tire une boule, on note son numéro b et on la remet dans l'urne.

On tire une deuxième boule et on note son numéro c . On note S le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 + bx + c = 0$.

1. Quelle loi de probabilité peut-on associer à l'ensemble des couples $(b; c)$?
2. A l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer la loi de probabilité de S , puis son espérance.

▲ Cet exercice se fait après l'étude des équations du second degré.

10 TIRAGES SANS REMISE

★★ 20 min ► P. 284

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 2 boules vertes numérotées 1 et 3 ; 3 boules jaunes numérotées 1, 2 et 3.

Un joueur donne n euros ($n \in \mathbb{N}^*$) à l'organisateur, puis tire successivement et sans remise, deux boules de l'urne (il ne remet pas la première boule tirée dans l'urne avant de tirer la seconde). Si elles ont la même couleur, le joueur ne gagne rien (et a perdu sa mise). Si elles sont de couleurs différentes, il gagne le montant obtenu en effectuant le produit des numéros des deux boules. Quelle est la mise maximale qui permet au jeu d'être favorable au joueur ?

11 AVEC UNE SUITE

★★ 15 min ► P. 285

X désigne une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

	-1	0	1	2
	p_1	p_2	p_3	p_4

Déterminer les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 sachant que :

- les nombres p_i sont les premiers termes d'une suite arithmétique ;
- $E(X) = 1$.

▲ 1. On commence par exprimer p_2, p_3 et p_4 en fonction de p_1 et de la raison r de la suite arithmétique. On se ramène ainsi à deux inconnues. On a donc besoin de deux équations.

2. On obtient alors une équation à deux inconnues (p_1 et r) en calculant $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ (voir exemple de référence dans le cours 1.1.)

3. La deuxième équation provient de $E(X) = 1$.

12 EN GARDE

★★ 20 min ► P. 285

Au cours du week-end, 3 personnes sont malades et appellent une fois un médecin. Chacune téléphone aléatoirement à l'un des trois médecins de garde A, B, C. On constate que le médecin B est appelé 2 fois plus souvent que A, et que C est

appelé 3 fois plus souvent que A. On note N le nombre de médecins qui ont été contactés au cours du week-end.

1. Donner la loi de probabilité de N .

Calculer la probabilité de $\{N = 2\}$ s'avère fastidieux, car les possibilités sont nombreuses. Commencer donc par calculer les autres probabilités, puis utiliser le fait que la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

2. Déterminer son espérance.

13 TIRAGES SIMULTANÉS

★★ 15 min ▶ P. 287

Une urne contient trois boules noires et trois boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules de l'urne. X désigne le nombre de boules noires obtenues.

1. Démontrer qu'il y a 20 tirages possibles.

2. Déterminer la loi de probabilité de X , puis calculer son espérance. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

14 MARCHÉ ALÉATOIRE (1)

★★ 50 min ▶ P. 288

	+5		-2		0		+3	-4	
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Un pion est initialement positionné sur la case d'abscisse 0.

Un joueur le déplace au hasard d'une case vers la droite ou vers la gauche 4 fois d'affilée. Chaque déplacement est supposé indépendant du précédent. Le joueur marque les points correspondants aux cases par lesquelles le pion est passé.

On note T la variable aléatoire correspondant au total de points obtenus.

1. Simulation

Voici un algorithme :

```

Déclaration des variables : x, i, z, t, N, S, m
Initialisation : S = 0
Début du traitement :
Pour N allant de 1 à 1 000 :
    x=0, t=0
    Pour i allant de 1 à 4 :
        Simuler un nombre aléatoire z compris entre 0 et 1. (fonction Random())
        Si z ≤ 0,5, ajouter 1 à x,
        sinon, retrancher 1 à x.
        Si x = 2, ajouter 3 à t.
        Si x = 3, soustraire 4 à t.
        Si x = -2, soustraire 2 à t.
        Si x = -4, ajouter 5 à t.
    Ajouter t à S
Fin du traitement : calculer m = S/1 000 et faire afficher m.

```


- a. Que représentent les variables x, i, t, S, m ?
- b. Quel rôle joue z ?
- c. Rentrer le programme sur Algobox et faire une dizaine de simulations de 1 000 parties. Ce jeu semble-t-il équitable ?

2. Modélisation

- a. Déterminer la loi de T , puis son espérance. Comparer aux résultats obtenus par simulation et commenter.
- b. Quelle valeur x doit-on donner à la case d'abscisse 4 pour que le jeu soit équitable ?
- c. Déterminer la loi de T et son espérance, si on suppose cette fois qu'à chaque déplacement, le pion est déplacé vers la gauche avec la probabilité 0,6 et que la case d'abscisse 4 ne vaut aucun point.

15 AU CHOIX

★★ 30 min ► P. 290

Un Questionnaire à Choix Multiples comporte quatre questions. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Un élève décide d'y répondre au hasard. X désigne le nombre de bonnes réponses qu'il obtient.

1. X suit-elle une loi équirépartie sur $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$? Justifier.
2. A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité de X , puis $E(X)$.
3. Une bonne réponse apporte 3 points, une mauvaise enlève 1 point. On note Y la note obtenue pour ce QCM.

Déterminer la note que l'élève peut espérer obtenir :

- a. Première méthode : après avoir déterminé la loi de Y .
- b. Deuxième méthode : après avoir justifié que $Y = 4X - 4$.

16 TIRAGES AVEC REMISE

★★★ 20 min ► P. 292

Un urne contient n boules blanches et $n - 5$ boules noires ($n \geq 5$) indiscernables au toucher. Un joueur tire successivement, et avec remise, deux boules de l'urne. Si ces deux boules sont de même couleur, le joueur donne un euro.

Si ces deux boules sont de couleurs différentes, le joueur reçoit un euro.

 Voir le savoir-faire 2 sur la répétition d'expériences indépendantes.

1. Pour quelles valeurs de n le jeu est-il favorable au joueur ? (c'est-à-dire dont le gain a une espérance positive)

 Déterminer la loi du gain du joueur, puis calculer son espérance.

2. Même question si le joueur reçoit désormais 2 euros si les boules sont de couleurs différentes.

On pourra démontrer que l'espérance du gain est égale à $\frac{2n^2 - 10n - 25}{(2n - 5)}$, puis étudier le signe de ce quotient (voir chapitre 2).

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

17 PAROLE D'HONNEUR !

★★★ 10 min ► p. 294

Au bridge, un jeu de 54 cartes est réparti aléatoirement entre 4 joueurs. Chacun reçoit une main de 13 cartes. Pour évaluer la force de sa main, on peut compter : 4 points d'honneur pour un As, 3 points d'honneur pour un Roi, 2 pour une Dame, et 1 pour un Valet. Les autres cartes n'apportent aucun point d'honneur. On note X_1 le nombre de points d'honneur dans la main du premier joueur.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour X_1 ?
2. Sans chercher à déterminer la loi de X_1 , déterminer $E(X_1)$.

On peut introduire les points d'honneur des 3 autres joueurs et utiliser la linéarité de l'espérance.

18 ALLO ?

★★ 20 min ► p. 295

Lorsqu'un téléopérateur appelle un numéro de téléphone pris au hasard dans l'annuaire, il tombe six fois sur dix sur une personne qui n'est pas intéressée (événement NI), une fois sur dix sur une personne intéressée (événement I), et le reste du temps sur un répondeur téléphonique (événement R). On suppose que le nombre de numéros est suffisamment grand pour que les appels successifs soient indépendants et que les proportions précédentes soient les mêmes à chaque appel.

1. Il appelle successivement 3 numéros. On note X le nombre de personnes intéressées. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
2. Il appelle successivement 10 numéros. Quelle est la probabilité qu'il soit systématiquement tombé sur un répondeur ?
3. Quel est le nombre minimal de numéros qu'il doit composer pour que la probabilité que quelqu'un soit intéressé soit supérieure ou égale à 0,95 ?

On peut reformuler cette question en écrivant « il faut qu'**au moins une** personne soit intéressée », c'est-à-dire une, ou deux, ou trois, ou ..., etc. Dans ce cas, il est plus efficace de déterminer la probabilité de l'événement contraire « **aucune** personne n'est intéressée ».

19 MARCHE ALÉATOIRE (2)

★★★ 45 min ► P. 296

$L(+4)$	$M(0)$	$N(0)$	Arrivée
$H(0)$	$I(+1)$	$J(0)$	$K(0)$
$D(0)$	$E(0)$	$F(-3)$	$G(0)$
Départ	$A(0)$	$B(+2)$	$C(0)$

Un pion est initialement positionné sur la case Départ. Un joueur le déplace au hasard d'une case vers la droite ou vers le haut et recommence jusqu'à ce qu'il parvienne à la case Arrivée. Le joueur marque les points correspondants aux cases par lesquelles le pion est passé.

1. Simulation

Voici un algorithme qui permet de simuler les déplacements du pion.

```

Déclaration des variables : x, y, z, t
Initialisation : x=0, y=0, t=0
Début du traitement :
Tant que  $x \leq 3$  et  $y \leq 3$  et  $x+y < 6$  (Condition 1)
  Si  $x < 3$  et  $y < 3$ ,
    Simuler un nombre aléatoire z compris entre 0 et 1.
    Si  $z \leq 0,5$ , ajouter 1 à x,
    sinon, ajouter 1 à y.
  Sinon,
    Si  $x=3$ , ajouter 1 à y.
    Sinon, ajouter 1 à x.
  Si  $x=2$  et  $y=0$ , ajouter 2 à t.
  Si  $x=2$  et  $y=1$ , soustraire 3 à t.
  Si  $x=0$  et  $y=3$ , ajouter 4 à t.
  Si  $x=1$  et  $y=2$ , ajouter 1 à t.
Fin du traitement : faire afficher t.

```

- Quels rôles jouent les variables x , y , z , t ?
- La Condition 1 assure-t-elle que l'algorithme s'arrête ? Pour quelle position du pion ?
- Compléter l'algorithme pour qu'il effectue 10 000 parties, et donne la moyenne des points obtenus pour ces 10 000 parties.
- Rentrer le programme sur Algobox et faire une dizaine de simulations de 10 000 parties.

▲ Utiliser la fonction `random()` pour obtenir z .

Ce jeu semble-t-il équitable ?

2. Modélisation

- Décrire les vingt chemins possibles et les différentes valeurs du total T de points correspondantes.

b. Si les chemins étaient équiprobables, quelle serait l'espérance de T ?

▶ Lorsque le pion arrive au bord droit ou haut du quadrillage avant la case d'arrivée, son déplacement n'est plus aléatoire. On pourra trouver, en classe de terminale, la loi de probabilité de T à l'aide de la notion de probabilité conditionnelle (on fera un arbre pondéré avec des expériences successives qui ne sont ni identiques, ni indépendantes).

20 UNE MARTINGALE

★★★ 50 min ▶ P. 299

Règle du jeu : on lance une pièce bien équilibrée.

Si elle tombe sur Pile, le joueur perd sa mise.

Si elle tombe sur Face, le joueur gagne deux fois sa mise.

Un joueur dispose de 20 euros. Il commence par miser un euro, puis applique la stratégie suivante :

- si la pièce tombe sur Face, il s'arrête ;
- si la pièce tombe sur Pile, il rejoue en doublant sa mise (tant qu'il le peut).

1. Simulation

Créer un programme qui simule 200 parties sur Algobox et donne la moyenne du gain algébrique du joueur sur ces 200 parties.

▶ On peut simuler le lancer d'une pièce bien équilibrée à partir de la fonction `Random()`. Voir l'exercice 14.

2. Modélisation

- Quel est le nombre maximal N de lancers au cours d'une partie ?
- Pour simplifier, on suppose qu'on effectue N lancers, puis on applique la règle du jeu. Déterminer l'espérance théorique du gain algébrique du joueur. Le jeu « en vaut-il la chandelle » ?

21 JOLIE POUPÉE

★★★ 15 min ▶ P. 301

À la fête foraine, une petite fille a vu une poupée qui lui plaît beaucoup : il suffit à son papa Guillaume de crever un ballon pour l'obtenir. Pour n euros ($n \in \mathbb{N}^*$), il a le droit de lancer $2n$ fléchettes (on suppose qu'il les lance toutes, même s'il crève un ballon dès la première). On suppose qu'à chaque lancer, il a 7 chances sur 10 de crever un ballon.

- Déterminer la probabilité que 3 euros ne suffisent pas pour gagner la poupée.
- Guillaume décide de tenter une partie à 4 euros. Quelle est la probabilité qu'il crève un ballon seulement à la dernière fléchette ?
- Cette poupée est vraiment jolie. Guillaume (surtout sa fille) la veut absolument ! Quelle somme minimale doit-il payer pour avoir moins d'une chance sur un million de ne pas partir sans la poupée ?

▶ Voir le savoir-faire 2 sur les répétitions d'expériences.

22 OH LE VILAIN PETIT GOURMAND !

★★★ 25 min ▶ P. 302

Un chocolatier ouvre ses ateliers. Il produit des chocolats dont 60 % sont fourrés au praliné, 30 % à la ganache, et 10 % à la pâte de fruits. Ils ont tous le même aspect et sont indiscernables au toucher.

Un visiteur indélicat se sert au hasard parmi les chocolats : il en mange 5 avant d'être rappelé à l'ordre. On suppose que le nombre de chocolats produits est suffisamment grand pour que ces dégustations successives n'influencent pas les proportions précédentes.

1. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- a. A « les trois premiers chocolats mangés sont, dans l'ordre, une ganache, un praliné, une pâte de fruit ».
- b. B « le visiteur n'a mangé aucune ganache ».
- c. C « le visiteur a mangé au moins un praliné ».
- d. D « le visiteur a mangé sa première pâte de fruit à son quatrième chocolat ».

2. Quel est le nombre minimal de chocolats que le visiteur aurait-il dû manger pour avoir plus de 95 % de chances d'avoir au moins une pâte de fruits ?

▶ Traiter l'exercice 21 peut donner des idées...

CONTRÔLE

23 LANCER DE DÉ

★ 15 min ▶ P. 303

Un jeu consiste à lancer un dé normal. Le joueur empoche une somme équivalente au nombre apparu si ce nombre est un multiple de 3 et paye le montant indiqué à la banque dans le cas contraire.

- 1. Donner la loi de probabilité associée au gain (positif ou négatif) pour une partie.
- 2. Calculer l'espérance et la variance de la loi déterminée ci-dessus. Le jeu est-il équitable ?

24 TIRAGES AVEC REMISE

★★ 25 min ▶ P. 303

Une urne contient 3 boules vertes, 2 rouges et 5 bleues. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire successivement, et avec remise, trois boules de l'urne.

1. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité du nombre X de boules rouges tirées.
2. Paul constate que le nombre de boules bleues est plus de deux fois supérieur au nombre de boules rouges, donc il prétend qu'il y a plus de chances d'obtenir au moins deux boules bleues qu'au moins une boule rouge. Qu'en pensez-vous ?

CONTRÔLE

25 RESTITUTION ORGANISÉE DE CONNAISSANCES

★★ 20 min ► P. 306

1. Soit x_2 un ensemble fini muni d'une loi de probabilité p et X une variable aléatoire sur Ω . On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs prises par X et pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $p_i = p(X = x_i)$.

a et b sont deux nombres réels.

a. Donner la loi des variables aléatoires $Y = aX$ et $Z = Y + b = aX + b$. On pourra présenter les résultats dans un tableau.

b. Exprimer alors $E(Y)$, $V(Y)$ et $E(Z)$ en fonction de $E(X)$ et $V(X)$.

2. On dispose de 9 jetons numérotés de -4 à 4 . On en tire un au hasard, et on note X le carré du nombre obtenu.

a. Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance et sa variance.

b. En déduire la variance de la variable aléatoire $Y = 3X$ et l'espérance de la variable aléatoire $Z = -2X + 1$.

26 SURPRISE !

★★ 20 min ► P. 308

Un fan de la série « Mégablaster » collectionne les images de ses héros préférés. Chaque semaine, il achète une pochette surprise contenant une image. Les images vendues chaque semaine sont indépendantes les unes des autres et représentent Destructor 1 fois sur 5, Protector 1 fois sur 2 et un autre super-héros dans le reste des cas.

Au bout de trois semaines, quelle est la probabilité des événements :

1. M « il a eu exactement deux images de Protector » ?
2. N « il a eu l'image de Destructor avant celle de Protector » ?
3. U « il n'a jamais eu l'image de Protector » ?

CORRIGÉS

1 a. $E(X) = -5 \times 0,3 + 2 \times 0,6 + 3 \times 0,1 = 0$

Donc :

$$V(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \times p(X = x_i) = (-5)^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,6 + 3^2 \times 0,1$$

$$V(X) = 10,8.$$

Enfin $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{10,8}$.

$$\sigma(X) \approx 3,29 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

b. $E(Y) = -10 \times 0,1 + (-5) \times 0,3 + 0 \times 0,4 + 15 \times 0,2 = 0,5$.

y_i	-10	-5	0	15
$y_i - E(Y)$	-10,5	-5,5	-0,5	14,5
$(y_i - E(Y))^2$	110,25	30,25	0,25	210,25
$p(Y = y_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

$$V(Y) = 110,25 \times 0,1 + 30,25 \times 0,3 + 0,25 \times 0,4 + 210,25 \times 0,2$$

$$V(Y) = 62,25.$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{62,25}$$

$$\sigma(Y) \approx 7,89 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$



Revoir le savoir-faire 1.

2 La somme des probabilités de toutes les issues possibles pour X vaut 1 :
 $0,3 + 0,6 + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 0,9 \Leftrightarrow y = 0,1$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \times p(X = x_i) = -6 \times 0,3 + x \times 0,6 + 3 \times 0,1 = 0,6x - 1,5.$$

Ainsi $E(X) = 2 \Leftrightarrow 0,6x - 1,5 = 0 \Leftrightarrow 0,6x = 1,5 \Leftrightarrow x = \frac{1,5}{0,6} \Leftrightarrow x = 2,5$.

3 1. Il y a $1\,000 - 10 = 990$ billets qui rapportent 0 et coûtent 2 euros : pour ces billets, le gain est de $0 - 2 = -2$ euros.

7 billets rapportent 50 euros et coûtent 2 euros,
 soit un gain de $50 - 2 = 48$ euros.

2 billets rapportent 100 euros et coûtent 2 euros,
 soit un gain de $100 - 2 = 98$ euros.

1 billet rapporte 500 euros et coûte 2 euros,
 soit un gain de $500 - 2 = 498$ euros.

G peut prendre les valeurs **-2, 48, 98 et 498.**

2. Les achats de billets sont équiprobables. On en déduit la loi de G :

Gain G	-2	48	98	498
Probabilité	$\frac{990}{1000} = 0,99$	$\frac{7}{1000} = 0,007$	$\frac{2}{1000} = 0,002$	$\frac{1}{1000} = 0,001$

3. L'espérance du gain est :

$$E(G) = -2 \times 0,99 + 48 \times 0,007 + 98 \times 0,002 + 498 \times 0,001$$

$$E(G) = -0,95.$$

Les 1 000 billets coûtant $1\,000 \times 2 = 2\,000$ euros,

et rapportant $1 \times 500 + 2 \times 100 + 7 \times 50 = 1\,050$ euros,

le gain global est de $1\,050 - 2\,000 = -950$ euros, donc le gain moyen est de

$$-\frac{950}{1\,000} = -0,95 \text{ euros par billet. Les billets étant achetés de façon équiprobable, on}$$

retrouve bien la valeur de $E(G)$.

4 1. Soit X la variable aléatoire représentant le prix payé par un client.

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \times p(X = x_i)$$

$$E(X) = 8 \times 0,2 + 15 \times 0,4 + 22 \times 0,3 + 30 \times 0,1 = 17,2.$$

Le restaurateur peut espérer qu'en moyenne un client dépense 17,2 euros.

Donc, le chiffre d'affaires mensuel que peut espérer le restaurateur, s'il sert 500 clients, est $500 \times E(X)$ soit 8 600 euros.

2. a. Soit Y le prix payé après la modification A et Z le prix payé après la modification B.

$$Y = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times X = 1,1X.$$

$$\text{Donc } E(Y) = E(1,1X) = 1,1 \times E(X) = 18,92.$$

D'après l'énoncé, $Z = X + 1$, donc $E(Z) = E(X + 1) = E(X) + 1$ soit $E(Z) = 18,2$.

$E(Y) > E(Z)$ donc, s'il espère gagner le plus possible, le restaurateur choisira la modification A.

$$\text{b. } V(Y) = V(1,1 \times X) = 1,1^2 \times V(X) = 1,21 V(X)$$

$$V(Z) = V(X + 1) = \sum_{i=1}^4 [(x_i + 1) - E(X + 1)]^2 \times p(X = x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^4 [x_i + 1 - E(X) - 1]^2 \times p(X = x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^4 (x_i - E(X))^2 \times p(X = x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^4 (x_i - E(X))^2 \times p(X = x_i)$$

$$= V(X)$$

X n'est pas constante, donc $V(X) > 0$.

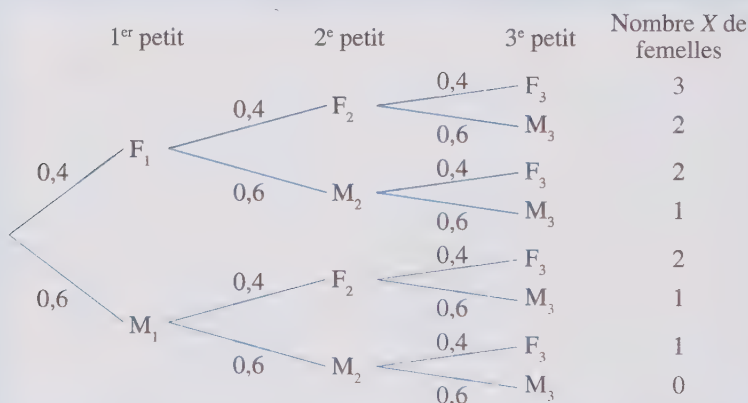
Or $1,21 > 1$ donc $1,21 \times V(X) > 1 \times V(X)$ soit $V(Y) > V(Z)$ donc, **s'il veut prendre le moins de risque possibles le restaurateur choisira la modification B.**

En effet, si la variance est plus faible, les dépenses sont plus proches de la moyenne, donc le restaurateur aura des chiffres d'affaires plus constants.

5 À chaque naissance, notons F l'événement « le petit est une femelle » et M l'événement « le petit est un mâle ».

D'après l'énoncé, $p(F) = \frac{4}{10} = 0,4$, donc $p(M) = 1 - p(F) = \frac{6}{10} = 0,6$ car $M = \bar{F}$.

Les trois naissances étant indépendantes, on peut schématiser les différentes portées possibles, en numérotant suivant l'ordre d'arrivée des petits :



La propriété relative à la répétition d'expériences identiques et indépendantes (cours II.3.) permet d'en déduire la loi de X .

$$p(X=0) = p(M_1 M_2 M_3) = p(M)^3 = 0,6^3 = 0,216$$

$$p(X=1) = p(F_1 M_2 M_3) + p(M_1 F_2 M_3) + p(M_1 M_2 F_3) \\ = 0,4 \times 0,6 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,6 \times 0,4 = 0,432.$$

De même,

$$p(X=2) = 0,4 \times 0,4 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 \times 0,4 + 0,6 \times 0,4 \times 0,4 = 0,288.$$

$$\text{Enfin } p(X=3) = 0,4^3 = 0,064.$$

On résume ces résultats dans un tableau :

Nombre de femelles x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Prenez la peine de vérifier que la somme des probabilités vaut bien 1 pour repérer une erreur éventuelle.

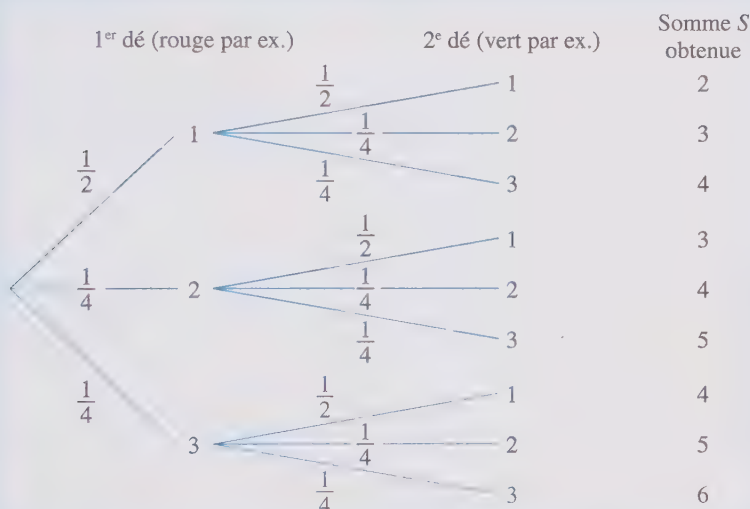
▲ Cet exercice pourra être repris au chapitre suivant. On justifiera que X suit une loi binominale de paramètres $n=3$, $p=0,4$, et on en déduira directement la loi de X .

6 Les dés sont bien équilibrés, donc chacune de ses 20 faces a la même probabilité de sortie : elles sont équiprobables.

Donc, pour chaque dé, la probabilité d'obtenir 1 est $p(1) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, la probabilité

d'obtenir 2 est $p(2) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, celle d'obtenir 3 est $p(3) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

On peut alors représenter le lancer de ces deux dés à l'aide d'un arbre pondéré :



Tout se passe comme si on avait répété deux fois la même expérience de façon indépendante, ce qui nous permet de multiplier la probabilité le long des branches pour obtenir la loi de S :

$$p(S=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$p(S=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

$$p(S=4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}.$$

$$p(S=5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

$$p(S=6) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

D'où le tableau :

Somme obtenue x_i	2	3	4	5	6
$p(S = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

On ne peut pas simplement compter le nombre de branches favorables à l'événement ($S=2$) et diviser par le nombre total de résultats, car on n'est pas dans une situation d'équiprobabilité des numéros obtenus par chaque dé. Par contre, on pourrait créer un arbre avec les résultats des 20 faces du premier dé, suivis des 20 faces du second : $20 \times 20 = 400$ résultats (!) équiprobables.

7 D'après l'énoncé, les 10 secteurs ont tous la même probabilité de sortie, $\frac{1}{10}$.

Soit X le gain (algébrique) du joueur. La loi de probabilité de X est :

x_i	-10	-5	0	3	8	12
$p(X = x_i)$	0,1	$2 \times 0,1 = 0,2$	$4 \times 0,1 = 0,4$	0,1	0,1	0,1

a. Le joueur est gagnant si $X > 0$.

$$p(X > 0) = p(X = 3) + p(X = 8) + p(X = 12) = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3.$$

L'affirmation est vraie.

b. Le joueur est perdant si $X < 0$

$$p(X < 0) = p(X = -10) + p(X = -5) = 0,1 + 0,2 = 0,3.$$

L'affirmation est vraie.

c. Le jeu est équitable si $E(X) = 0$.

$$\text{Or, } E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i \times p(X = x_i) \text{ (voir cours II.2.)}$$

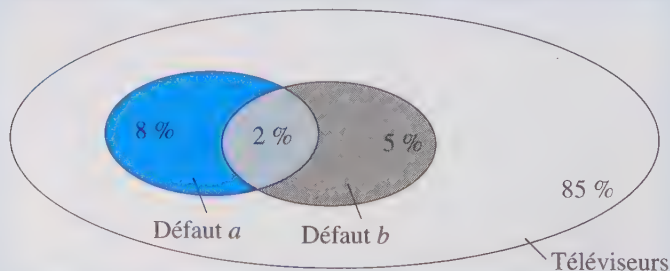
$$= -10 \times 0,1 + (-5) \times 0,2 + 0 \times 0,4 + 3 \times 0,1 + 8 \times 0,1 + 12 \times 0,1 = 0,3.$$

$E(X) > 0$, donc le jeu est favorable au joueur : il n'est pas équitable.

L'affirmation est donc fausse.

Le jeu n'est pas équitable, alors que a. et b. sont vraies. Ce n'est pas tant la probabilité de « gagner » ou « perdre » qui compte, que le gain qu'on peut espérer en tirer.

8 1. On peut schématiser le problème à l'aide d'un diagramme de Venn.



$10 - 2 = 8\%$ des téléviseur souffrent seulement du défaut a .

$7 - 2 = 5\%$ des téléviseurs souffrent seulement du défaut b .

$100 - (8 + 2 + 5) = 85\%$ des téléviseurs n'ont aucun défaut.

Le bénéfice B est de :

$500 - 200 = 300$ euros, si le téléviseur n'a aucun défaut ;

$500 - 200 - 50 = 250$ euros, si le téléviseur souffre seulement du défaut a ;

$500 - 200 - 100 = 200$ euros, si le téléviseurs souffre seulement du défaut b ;

$500 - 200 - 100 - 50 = 150$ euros, si le téléviseur a les deux défauts a et b .

Il y a équiprobabilité du choix du téléviseur, donc la loi du bénéfice B est :

b_i	300	250	200	150
$p(B = b_i)$	0,85	0,08	0,05	0,02

L'espérance du bénéfice est :

$$E(B) = 300 \times 0,85 + 250 \times 0,08 + 200 \times 0,05 + 150 \times 0,02 = \mathbf{288 \text{ euros}}$$

2. Si on note X le nouveau bénéfice : $X = B - 15$.

$$\text{Donc } E(X) = E(B - 15) = E(B) - 15 = \mathbf{273 \text{ euros.}}$$

Si vous avez recommencé le calcul de la loi du bénéfice, revoyez la propriété sur la linéarité de l'espérance, cours II.2.

9 1. Les couples $(b; c)$ sont obtenus par tirages successifs de deux boules parmi 4 indiscernables au toucher, donc équiprobables : il y a $4 \times 4 = 16$ couples possibles, chaque couple a ainsi une probabilité $\frac{1}{16}$ d'être obtenu. **On peut donc associer à**

l'ensemble des couples la loi équirépartie.

2. Le nombre de solutions réelles de l'équation du second degré $x^2 + bx + c = 0$ dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4 \times 1 \times c = b^2 - 4c$ selon la règle suivante :

- si $\Delta > 0$, $S = 2$;
- si $\Delta = 0$, $S = 1$;
- si $\Delta < 0$, $S = 0$.

On obtient donc :

$b \backslash c$	1	2	3	4
1	$\Delta = -3$ $S = 0$	$\Delta = -7$ $S = 0$	$\Delta = -11$ $S = 0$	$\Delta = -15$ $S = 0$
2	$\Delta = 0$ $S = 1$	$\Delta = -4$ $S = 0$	$\Delta = -8$ $S = 0$	$\Delta = -12$ $S = 0$
3	$\Delta = 5$ $S = 2$	$\Delta = 1$ $S = 2$	$\Delta = -3$ $S = 0$	$\Delta = -7$ $S = 0$
4	$\Delta = 12$ $S = 2$	$\Delta = 8$ $S = 2$	$\Delta = 4$ $S = 2$	$\Delta = 0$ $S = 1$

D'où la loi de probabilité de S :

s_i	0	1	2
$p(S = s_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$

L'espérance de S est :

$$E(S) = 0 \times \frac{9}{16} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{5}{16}$$

$$E(S) = \frac{6}{8}$$

$$E(S) = 0,75.$$

10 On note G le gain algébrique du joueur et S la somme reçue :

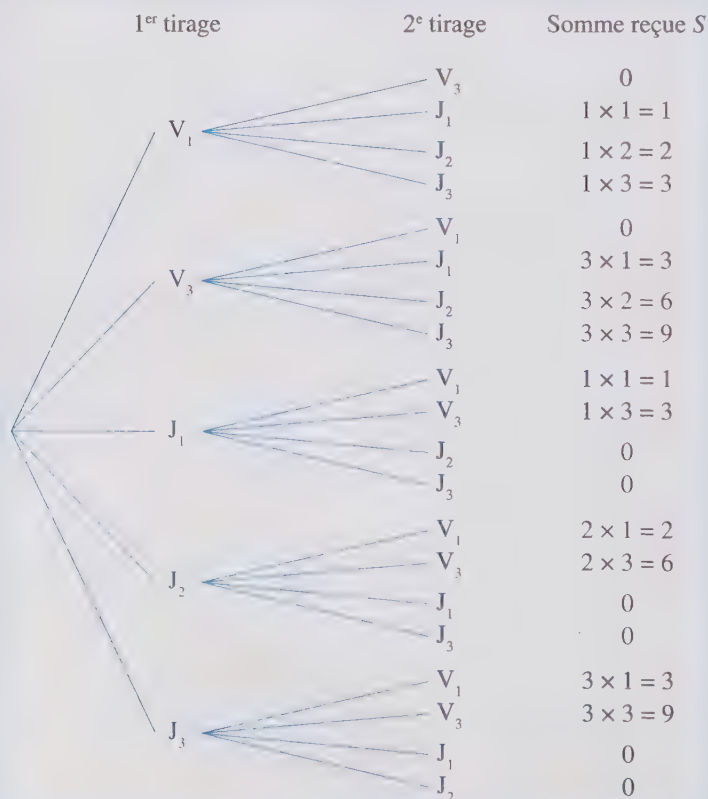
$$G = S - n.$$

On a alors :

$$E(G) = E(S) - n.$$

On note V_1 et V_3 les boules vertes, J_1 , J_2 et J_3 les boules jaunes.

Le modèle de deux tirages successifs sans remise donne :



Les boules sont indiscernables au toucher, donc ces 20 issues sont équiprobables. On en déduit la loi de probabilité de la somme reçue S :

s_i	0	1	2	3	6	9
$p(S = s_i)$	$\frac{8}{20} = 0,4$	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{4}{20} = 0,2$	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{2}{20} = 0,1$

$$E(S) = 0 \times 0,4 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,1 + 3 \times 0,2 + 6 \times 0,1 + 9 \times 0,1$$

$$E(S) = 2,4.$$

Donc $E(G) = E(S) - n = 2,4 - n$ et :

$$E(G) \geq 0 \Leftrightarrow 2,4 - n \geq 0 \Leftrightarrow -n \geq -2,4 \Leftrightarrow n \leq 2,4.$$

Donc la mise entière maximale qui permet au jeu d'être favorable au joueur est $n = 2$.

11 • Soit r la raison de la suite arithmétique :

$$p_2 = p_1 + r$$

$$p_3 = p_1 + 2r$$

$$p_4 = p_1 + 3r.$$

• Or $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ donc :

$$p_1 + p_1 + r + p_1 + 2r + p_1 + 3r = 1$$

$$4p_1 + 6r = 1.$$

• $E(X) = 1 \Leftrightarrow -1 \times p_1 + 0 \times p_2 + 1 \times p_3 + 2 \times p_4 = 1$

$$\Leftrightarrow -p_1 + p_1 + 2r + 2 \times (p_1 + 3r) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2p_1 + 8r = 1.$$

• Le couple $(p_1 ; r)$ est donc solution du système

$$\begin{cases} 4p_1 + 6r = 1 \text{ (L}_1\text{)} \\ 2p_1 + 8r = 1 \text{ (L}_2\text{)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4p_1 + 6r - (4p_1 + 16r) = 1 - 2 \text{ (L}_1 - 2 \times \text{L}_2\text{)} \\ 2p_1 + 8r = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10r = -1 \\ p_1 = \frac{1-8r}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{10} = 0,1 \\ p_1 = \frac{1-8 \times 0,1}{2} = 0,1 \end{cases}$$

• D'où :

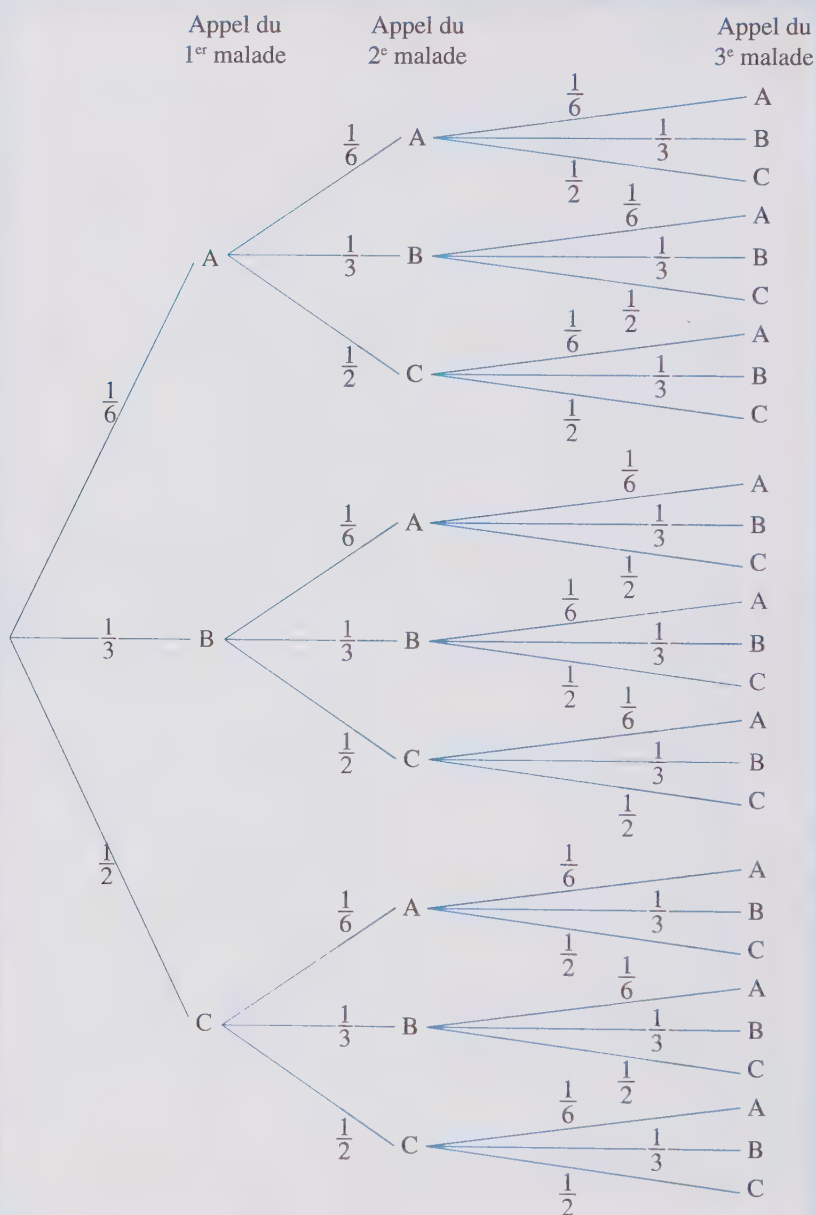
$$p_1 = 0,1,$$

$$p_2 = 0,1 + 0,1 = 0,2, p_3 = 0,1 + 2 \times 0,1 = 0,3 \text{ et } p_4 = 0,1 + 3 \times 0,1 = 0,4.$$

12 1. Chaque malade a la même probabilité p_A d'appeler le médecin A, $p_B = 2p_A$ d'appeler le médecin B et $p_C = 3p_A$ d'appeler le médecin C

Comme $p_A + p_B + p_C = 1$, alors $p_A + 2p_A + 3p_A = 1$ soit $6p_A = 1$.

$$\text{Donc } p_A = \frac{1}{6}, p_B = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } p_C = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$



$$p(N=1) = p(AAA) + p(BBB) + p(CCC)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{216} + \frac{1}{27} + \frac{1}{8} = \frac{36}{216}.$$

$$p(N=1) = \frac{1}{6}.$$

$$p(N=3) = p(ABC) + p(ACB) + p(BAC) + p(BCA) + p(CAB) + p(CBA) \\ = 6 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right)$$

$$p(N=3) = \frac{1}{6}.$$

$$p(N=1) + p(N=2) + p(N=3) = 1 \text{ donc :}$$

$$p(N=2) = 1 - p(N=1) - p(N=3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}$$

$$p(N=2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. L'espérance de X est :

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \frac{12}{6} = 2.$$

13 1. On numérote les boules blanches B_1, B_2, B_3 et les boules noires N_1, N_2, N_3 .

Un tirage correspond à un ensemble non ordonné de 3 boules :

• Celui qui contient 3 boules blanches et 0 boule noire : $\{B_1; B_2; B_3\}$.

• Ceux qui contiennent 2 boules blanches et 1 noire :

$\{B_1; B_2; N_1\}, \{B_1; B_2; N_2\}; \{B_1; B_2; N_3\}$

$\{B_1; B_3; N_1\}, \{B_1; B_3; N_2\}; \{B_1; B_3; N_3\}$

$\{B_2; B_3; N_1\}, \{B_2; B_3; N_2\}; \{B_2; B_3; N_3\}$

• Ceux qui contiennent 1 boule blanche et 2 noires :

$\{B_1; N_1; N_2\}, \{B_1; N_1; N_3\}, \{B_1; N_2; N_3\},$

$\{B_2; N_1; N_2\}, \{B_2; N_1; N_3\}, \{B_2; N_2; N_3\},$

$\{B_3; N_1; N_2\}, \{B_3; N_1; N_3\}, \{B_3; N_2; N_3\}.$

• Celui qui contient 3 boules noires $\{N_1; N_2; N_3\}$.

Il y a donc 20 tirages possibles.

2. Tous ces tirages étant équiprobables, on en déduit la loi de X :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{9}{20} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{1}{20}$$

$$E(X) = \frac{30}{20} = 1,5.$$

Il y a dans l'urne autant de boules blanches que de boules noires.

On en prend donc en moyenne $\frac{3}{2} = 1,5$ de chaque couleur.

On peut choisir également le modèle de 3 tirages successifs sans remise, et établir un arbre à $6 \times 5 \times 4 = 120$ issues ordonnées équiprobables. Par exemple l'issue $\{B_1; N_2; N_3\}$ du modèle précédent correspond aux 6 triplets $(B_1; N_2; N_3)$, $(B_1; N_3; N_2)$, $(N_2; B_1; N_3)$, $(N_2; N_3; B_1)$, $(N_3; N_2; B_1)$, $(N_3; N_2; B_1)$.
On doit ensuite retrouver les mêmes probabilités ! (6 fois plus d'issues favorables divisé par 6 fois plus de cas possibles.)

14 1. Simulation

a. x représente l'abscisse des pions ;

i représente le numéro du déplacement ;

t représente le total des points obtenus par partie ;

S représente le nombre total de points obtenus au cours des 1 000 parties ;

m représente la moyenne de points sur les 1 000 parties.

b. z est un nombre aléatoire compris entre 0 et 1.

Il sert à décider si le pion se déplace vers la droite (si $z \leq 0,5$), ou vers la gauche (si $z > 0,5$).

z ayant une chance sur deux d'être inférieur ou égal à 0,5, la règle du jeu est respectée.

c. Voici l'algorithme rentré sous Algobox :

VARIABLES

```
x EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
z EST_DU_TYPE NOMBRE
t EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
m EST_DU_TYPE NOMBRE
S EST_DU_TYPE NOMBRE
```

DEBUT_ALGORITHME

```
S PREND_LA_VALEUR 0
POUR N ALLANT_DE 1 A 1000
  DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR 0
    t PREND_LA_VALEUR 0
    POUR i ALLANT_DE 1 A 4
      DEBUT_POUR
        z PREND_LA_VALEUR random()
        SI (z<=0.5) ALORS
          DEBUT_SI
            x PREND_LA_VALEUR x+1
          FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
            x PREND_LA_VALEUR x-1
          FIN_SINON
```

```
SI (x==2) ALORS
```

```
  DEBUT_SI
    t PREND_LA_VALEUR t+3
  FIN_SI
```

```
SI (x==3) ALORS
```

```
  DEBUT_SI
    t PREND_LA_VALEUR t-4
  FIN_SI
```

```
SI (x==2) ALORS
```

```
  DEBUT_SI
    t PREND_LA_VALEUR t-2
  FIN_SI
```

```
SI (x==4) ALORS
```

```
  DEBUT_SI
    t PREND_LA_VALEUR t+5
  FIN_SI
```

```
FIN_POUR
```

```
S PREND_LA_VALEUR S+t
FIN_POUR
```

```
m PREND_LA_VALEUR S/1000
```

```
AFFICHER m
```

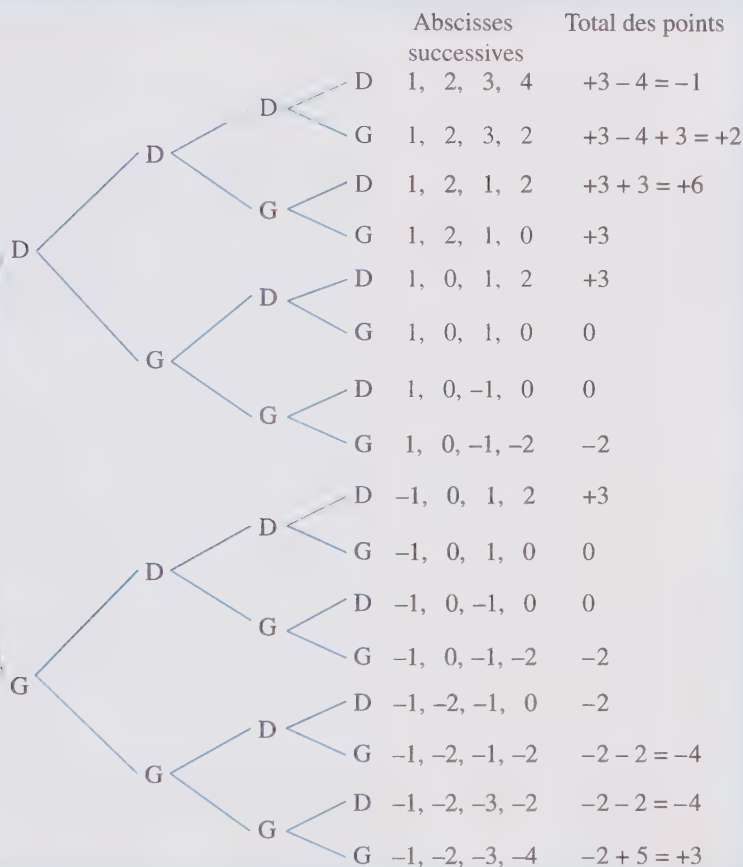
```
FIN_ALGORITHME
```

10 simulations renvoient (par exemple !) les valeurs suivantes pour m :
0,371 ; 0,033 ; 0,349, 0,407, 0,541 ; 0,29 ; 0,323 ; 0,279 ; 0,337 ; 0,23.

On observe que la moyenne des points obtenus, c'est-à-dire l'espérance empirique (voir cours II.2.) du nombre de points, est positive : le jeu semble favorable au joueur.

2. Modélisation

a. On note D l'événement « le joueur déplace le pion d'une case vers la droite » et G l'événement « il le déplace vers la gauche ».



Les déplacements successifs étant équiprobables, ces 16 chemins le sont. On en déduit la loi de probabilité de T :

t_i	-4	-2	-1	0	2	3	6
$p(T = t_i)$	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$$E(T) = -4 \times \frac{1}{8} + (-2) \times \frac{3}{16} + (-1) \times \frac{1}{16} + 0 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{16}$$

$$E(T) = \frac{5}{16}$$

$$E(T) = 0,3125.$$

On a bien $E(T) > 0$, et la valeur de 0,3125 est « assez proche » des résultats obtenus par simulation.

b. La case d'abscisse 4 n'est atteinte que pour le premier chemin, le seul à rapporter $+3 - 4 = -1$ points, elle rapportera x points supplémentaires, avec la probabilité $\frac{1}{16}$.

Le jeu est équitable si et seulement si :

$$E(T) = 0$$

$$\frac{5}{16} + x \times \frac{1}{16} = 0.$$

Donc le jeu est équitable si et seulement si $x = -5$.

c. On peut réutiliser l'arbre, mais en pondérant chaque branche.

On obtient alors la loi suivante, en utilisant les propriétés sur les répétitions d'expériences identiques et indépendantes.

Par exemple :

$$\begin{aligned} p(T = -4) &= p(-1; -2; -1; -2) + p(-1; -2; -3; -2) \\ &= p(\text{GGDG}) + p(\text{GGGD}) \\ &= 0,6 \times 0,6 \times 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,6 \times 0,6 \times 0,4 \\ &= 0,1728. \end{aligned}$$

t_i	-4	-2	-1	0	2	3	6
$p(T = t_i)$	0,1 728	0,2 304	0,0 256	0,2 304	0,0 384	0,264	0,0 384

D'où l'espérance :

$$\begin{aligned} E(T) &= -4 \times 0,1728 + (-2) \times 0,2304 + (-1) \times 0,0256 + 0 \times 0,2304 \\ &\quad + 2 \times 0,0384 + 3 \times 0,264 + 6 \times 0,0384 \end{aligned}$$

$$E(T) = -0,0784.$$

Dans ce cas, le jeu est défavorable au joueur.

15 1. Pour chacune des 4 questions, il y a 3 réponses.

Il y a donc $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ façons équiprobables, si l'on répond au hasard, de compléter ce questionnaire.

$X = 4$ lorsqu'on a trouvé les 4 bonnes réponses, c'est-à-dire avec 1 chance sur 81, et non pas 1 chance sur 5 s'il s'agissait de la loi équirépartie sur $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.

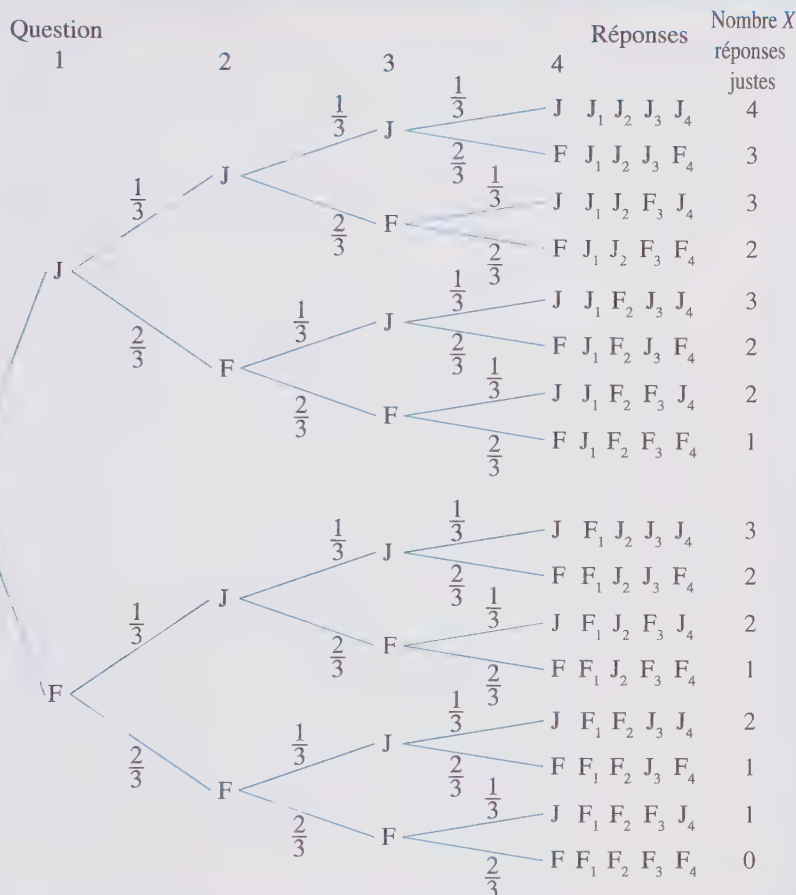
Donc X ne suit pas la loi équirépartie sur $\{0; 1; 2; 3; 4\}$

2. On pourrait construire un arbre représentant les réponses à chacune des 4 questions : on aurait $3^4 = 81$ résultats, ce qui est peu pratique. À la place, on s'intéresse, pour une question donnée, aux événements J « la réponse donnée est juste » et F « la réponse donnée est fausse ».

$$p(J) = \frac{1}{3} \text{ et } p(F) = \frac{2}{3},$$

le choix se faisant au hasard parmi les 3 réponses proposées, dont une seule est correcte.

On peut modéliser la situation par un arbre pondéré, les réponses aux questions pouvant être considérées comme 4 répétitions indépendantes d'une même expérience.



En multipliant les probabilités le long des branches, on obtient :

$$p(X=0) = p(F_1 F_2 F_3 F_4) = p(F)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$\begin{aligned} p(X=1) &= p(J_1 F_2 F_3 F_4) + p(F_1 J_2 F_3 F_4) + p(F_1 F_2 J_3 F_4) + p(F_1 F_2 F_3 J_4) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{32}{81} \end{aligned}$$

$$\text{De même } p(X=2) = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

$$p(X=3) = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{81}$$

$$p(X=4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

On en déduit l'espérance de X :

$$E(X) = 0 \times \frac{16}{81} + 1 \times \frac{32}{81} + 2 \times \frac{24}{81} + 3 \times \frac{8}{81} + 4 \times \frac{1}{81} = \frac{108}{81}$$

$$E(X) = \frac{4}{3}.$$

On pourra reprendre cette question au chapitre suivant. On justifiera que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$, $p = \frac{1}{3}$, et on en déduira directement la loi de X .

- 3. a.** 4 réponses justes apportent $Y = 4 \times 3 = 12$ points ;
 3 réponses justes et une erreur apportent $Y = 3 \times 3 - 1 = 8$ points ;
 2 réponses justes et deux erreurs apportent $Y = 2 \times 3 - 2 \times 1 = 4$ points ;
 1 réponse juste et 3 erreurs apportent $Y = 1 \times 3 - 3 \times 1 = 0$ point ;
 4 réponses fausses apportent $Y = -4$ points.

À l'aide de l'arbre, on obtient la loi de Y :

y_i	-4	0	4	8	12
$Y = y_i$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

On en déduit :

$$E(Y) = -4 \times \frac{16}{81} + 0 \times \frac{32}{81} + 4 \times \frac{24}{81} + 8 \times \frac{8}{81} + 12 \times \frac{1}{81} = \frac{108}{81}$$

$$E(Y) = \frac{4}{3}.$$

b. Le nombre de mauvaises réponses données est $Z = 4 - X$.

Pour X bonnes réponses, on gagne $3X$ points. Pour Z mauvaises réponses, on gagne $-1 \times Z = -(4 - X) = X - 4$ points.

La note obtenue est donc : $Y = 3X + (X - 4) = 4X - 4$.

Par linéarité de l'espérance (voir cours II.2.), on trouve alors :

$$E(Y) = E(4X - 4) = 4E(X) - 4 = 4 \times \frac{4}{3} - 4$$

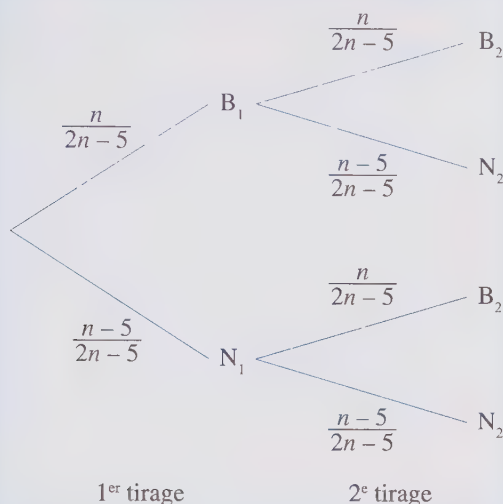
$$E(Y) = \frac{4}{3}.$$

16 1. Les deux tirages successifs sont identiques et indépendants. Les choix des $n + n - 5 = 2n - 5$ boules sont équiprobables. Si on note B l'événement « la boule tirée est blanche » et N l'événement « la boule tirée est noire », à chaque tirage on a :

$$p(B) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{n}{2n - 5}$$

$$p(N) = \frac{n - 5}{2n - 5}.$$

On peut donc représenter le jeu par l'arbre pondéré suivant.



Si on note G le gain algébrique du joueur :

- $G = -1$ lorsque l'on tire B_1B_2 ou N_1N_2 , événements incompatibles, donc :

$$p(G = -1) = p(B)^2 + p(N)^2 = \left(\frac{n}{2n-5}\right)^2 + \left(\frac{n-5}{2n-5}\right)^2$$

$$p(G = -1) = \frac{n^2}{(2n-5)^2} + \frac{n^2 - 10n + 25}{(2n-5)^2}$$

$$P(G = -1) = \frac{2n^2 - 10n + 25}{(2n-5)^2}.$$

- $G = 1$ lorsque l'on tire B_1N_2 ou B_2N_1 , événements incompatibles, donc :

$$p(G = 1) = \frac{n}{2n-5} \times \frac{n-5}{2n-5} + \frac{n-5}{2n-5} \times \frac{n}{2n-5} = 2 \times \frac{n^2 - 5n}{(2n-5)^2}$$

$$p(G = 1) = \frac{2n^2 - 10n}{(2n-5)^2}.$$

L'espérance du gain est donc :

$$E(G) = -1 \times \frac{2n^2 - 10n + 25}{(2n-5)^2} + 1 \times \frac{2n^2 - 10n}{(2n-5)^2}$$

$$E(G) = -\frac{25}{(2n-5)^2} < 0 \text{ pour tout } n \geq 5.$$

Le jeu est toujours défavorable au joueur !

2. On a cette fois :

$$p(G = -1) = \frac{2n^2 - 10n + 25}{(2n-5)^2} \text{ et } p(G = 2) = \frac{2n^2 - 10n}{(2n-5)^2}$$

$$E(G) = -1 \times \frac{2n^2 - 10n + 25}{(2n-5)^2} + 2 \times \frac{2n^2 - 10n}{(2n-5)^2}$$

$$= \frac{-2n^2 + 10n - 25 + 4n^2 - 20n}{(2n-5)^2}$$

$$E(G) = \frac{2n^2 - 10n - 25}{(2n-5)^2}.$$

Pour $n \geq 5$, $(2n-5)^2 > 0$, donc $E(G)$ a le même signe que $2n^2 - 10n - 25$.

Considérons le polynôme du second degré $2x^2 - 10x - 25$.

Son discriminant est $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times (-25) = 300 > 0$.

Il a donc 2 racines $x_1 = \frac{+10 - \sqrt{300}}{2 \times 2} \approx -1,83$ à 10^{-2} près.

$$x_2 = \frac{10 + \sqrt{300}}{4} \approx 6,83 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$2n^2 - 10n - 25$	+	0	-	0	+

car $a = 2 > 0$.

Comme $n \geq 5$:

$$2n^2 - 10n - 25 > 0 \Leftrightarrow n > x_2 \Leftrightarrow n \geq 7.$$

Le jeu est donc favorable au joueur dès que $n \geq 7$.

17 1. La plus forte main de 13 cartes contient 4 As, 4 Rois, 4 Dames et 1 Valet, pour un total maximal de $4 \times 4 + 4 \times 3 + 4 \times 2 + 1 \times 1 = 37$ points d'honneur. X_1 peut aussi prendre la valeur 36 (4 As, 4 Rois, 4 Dames, 1 huit (par ex)), 35 (4 As, 4 Rois, 3 Dames, 1 valets, 1 trois), 34 (4 As, 4 Rois, 3 Dames, 2 sept)... 19 (4 As, 1 Roi, 4 quatre, 4 deux), etc... jusqu'à 0 (aucune figure).

X peut prendre toutes les valeurs de 0 à 36.

2. Si on note X_2, X_3, X_4 le nombre de points d'honneur de 3 autres joueurs, les 4 variables aléatoires ont la même loi de probabilité, donc la même espérance. De plus, $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ est égal au nombre total de points d'honneur du jeu.

$$\text{Ainsi, } E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = 40 \Leftrightarrow 4 \times E(X_1) = 40.$$

$$\text{Donc } E(X_1) = \frac{40}{4} = 10.$$

Ce résultat confirme une approche intuitive du caractère équitable de la répartition des points d'honneur entre les 4 joueurs.

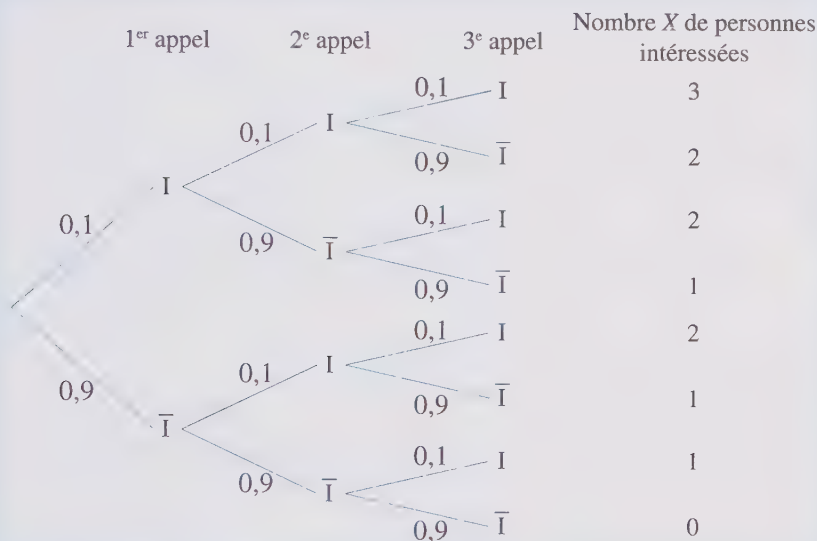
 Il est possible de déterminer la loi de probabilité de X_1 , mais c'est très long.

18 1. À chaque appel, $p(I) + p(NI) + p(R) = 1$, donc $p(R) = 1 - \frac{6}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$.

On répète 3 fois la même expérience de manière indépendante, on peut donc utiliser un arbre pondéré donnant les $3^3 = 27$ résultats possibles pour ces 3 appels.

Mais on ne s'intéresse dans cette question qu'à l'événement I pour chaque appel.

On construit plutôt l'arbre pondéré suivant sachant que $P(\bar{I}) = 1 - p(I) = \frac{9}{10} = 0,9$.



En multipliant le long des branches, on obtient la loi de X :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$0,9^3 = 0,729$	$3 \times 0,9^2 \times 0,1 = 0,243$	$3 \times 0,1^2 \times 0,9 = 0,027$	$0,1^3 = 0,001$

Son espérance est :

$$E(X) = 0 \times 0,729 + 1 \times 0,243 + 2 \times 0,027 + 3 \times 0,001$$

$$E(X) = 0,3.$$

Ces valeurs seront obtenues directement au chapitre suivant en reconnaissant que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$, $p = 0,1$.

2. On cherche la probabilité que, sur 10 appels successifs indépendants, l'événement R se réalise ; cette probabilité est donc égale à $p(R)^{10} = 0,3^{10} = 5,9049 \times 10^{-6}$.

La probabilité qu'il soit systématiquement tombé sur un répondeur est $5,9 \times 10^{-6}$.

3. Soit n le nombre d'appels effectués, on note D l'événement « au moins une personne est intéressée ». $\bar{D}$ est réalisé lorsqu'à chaque appel, la personne n'est pas intéressée.

Ainsi $p(\bar{D}) = p(\bar{I})^n = 0,9^n$.

Alors :

$$p(D) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - p(\bar{D}) \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow p(\bar{D}) \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow 0,9^n \leq 0,05$$

On dresse un tableau de valeurs de la suite $(0,9^n)$ à la calculatrice. Par exemple, on entre $Y = 0,9 \boxed{\wedge} X$, puis on spécifie la valeur initiale de X et le pas :

$$X_{\min} = 0, \text{ pas} = 1.$$

On obtient :

$$0,9^{28} \approx 0,052 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut ;}$$

$$0,9^{29} \approx 0,047 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par excès.}$$

Donc le nombre minimal de numéros à composer est 29.



La suite $(0,9^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,9$.

Elle est donc bien décroissante car $0 < q < 1$, ce qui valide la méthode utilisée.

19 1. Simulation

a. x et y jouent respectivement les rôles d'abscisse et d'ordonnée du pion :

z sert à décider, avec probabilité $\frac{1}{2}$, si le pion se déplace vers la droite ou vers le haut.

t représente le total de points obtenu pour une partie.

b. x et y valent initialement 0 (position de la case départ). La condition 1 assure que la boucle « tant que » s'arrête lorsque $x = 3$ et $y = 3$, c'est-à-dire pour la position Arrivée.

En effet si $x \leq 3$ et $y \leq 2$, donc $x + y \leq 5 < 6$

ou si $x \leq 2$ et $y \leq 3$, donc $x + y \leq 5 < 6$,

alors le pion n'est pas encore à l'arrivée ; tandis que $x \leq 3$ et $y \leq 3$ et $x + y = 6 \Leftrightarrow x = 3$ et $y = 3$,

c'est l'arrivée.

c. Il faut rajouter N , le numéro de la partie, entier compris entre 1 et 10 000, S , initialement égal à 0, qui totalise les points obtenus à chaque partie, et m , la moyenne des points obtenus pour les 10 000 parties :

$$m = \frac{S}{10\,000},$$

qu'il faudra faire afficher.



Attention à initialiser t à 0 en début de nouvelle partie !

d.

VARIABLES

```
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
z EST_DU_TYPE NOMBRE
t EST_DU_TYPE NOMBRE
m EST_DU_TYPE NOMBRE
S EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
```

DEBUT_ALGORITHME

```
m PREND_LA_VALEUR 0
S PREND_LA_VALEUR 0
POUR N ALLANT_DE 1 A 10000
  DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR 0
    y PREND_LA_VALEUR 0
    t PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE (x<=3 ET y<=3 ET x+y<6) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
        SI (x<3 ET y<3) ALORS
          DEBUT_SI
            z PREND_LA_VALEUR random()
            SI (z<=0.5) ALORS
              DEBUT_SI
                x PREND_LA_VALEUR x+1
              FIN_SI
            SINON
              DEBUT_SINON
                y PREND_LA_VALEUR y+1
              FIN_SINON
```

FIN_SI

SINON

DEBUT_SINON

SI (x==3) ALORS

DEBUT_SI

y PREND_LA_VALEUR y+1

FIN_SI

SINON

DEBUT_SINON

x PREND_LA_VALEUR x+1

FIN_SINON

— FIN_SINON

SI (x==2 ET y==0) ALORS

DEBUT_SI

t PREND_LA_VALEUR t+2

FIN_SI

SI (x==2 ET y==1) ALORS

DEBUT_SI

t PREND_LA_VALEUR t-3

FIN_SI

SI (x==0 ET y==3) ALORS

DEBUT_SI

t PREND_LA_VALEUR t+4

FIN_SI

SI (x==1 ET y==2) ALORS

DEBUT_SI

t PREND_LA_VALEUR t+1

FIN_SI

FIN_TANT_QUE

S PREND_LA_VALEUR S+t

FIN_POUR

m PREND_LA_VALEUR S/10000

AFFICHER m

FIN_ALGORITHME

Voici 10 moyennes (espérance empirique, voir cours II.2.), obtenues pour 10 simulations de 10 000 lancers avec cet algorithme :

0,2 146 ;	0,2 239 ;
0,2 663 ;	0,2 651 ;
0,2 189 ;	0,2 314 ;
0,23 ;	0,2 318 ;
0,258 ;	0,2 566.

On n'obtient que des résultats strictement positifs : on peut conjecturer que le nombre de points obtenu a une espérance strictement positive, donc que **le jeu est favorable au joueur**

2. a. Le pion va de la case Départ à Arrivée en passant par 5 cases.

Voici leur liste, et le total correspondant :

Le pion passe dans l'ordre par :

D H L M N
 D H I M N
 D H I J N
 D H I J K
 D E I M N
 D E I J K
 D E I J N
 D E F J N
 D E F J K
 D E F G K
 A E I M N
 A E I J N
 A E I J K
 A E F J N
 A E F J K
 A E F G K
 A B F J N
 A B F J K
 A B F G K
 A B C G K

Total T

$0+0+4+0+0=4$
 $0+0+1+0+0=1$
 $0+0+1+0+0=1$
 $0+0+1+0+0=1$
 $0+0+1+0+0=1$
 $0+0+1+0+0=1$
 $0+0+1+0+0=1$
 $0+0-3+0+0=-3$
 $0+0-3+0+0=-3$
 $0+0-3+0+0=-3$
 $0+0+1+0+0=1$
 $0+0+1+0+0=1$
 $0+0+1+0+0=1$
 $0+0-3+0+0=-3$
 $0+0-3+0+0=-3$
 $0+0-3+0+0=-3$
 $0+2-3+0+0=-1$
 $0+2-3+0+0=-1$
 $0+2-3+0+0=-1$
 $0+2+0+0+0=2$

Si tous ces chemins étaient équiprobables, la loi de T serait donnée par :

t_i	-3	-1	1	2	4
$p(T = t_i)$	$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$E(T) = -3 \times \frac{3}{10} + (-1) \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{9}{20} + 2 \times \frac{1}{20} + 4 \times \frac{1}{20} = -\frac{6}{20}$$

$$E(T) = -\frac{3}{10}.$$

b. Si tous ces chemins étaient équiprobables, on aurait donc $E(T) < 0$, ce qui rentre en contradiction avec la simulation : l'hypothèse d'équiprobabilité des 20 chemins semble erronée.

Chaque chemin comporte au total 6 déplacements d'une case : trois vers la droite, et trois vers le haut. La position des déplacements vers la droite (par exemple) suffit à décrire le chemin, les 3 déplacements restant se faisant vers le haut.

Il y a $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ façons de choisir la position des 3 déplacements vers la droite (on choisit 3 cases vides parmi 6, puis on divise par le nombre de façons de remplir ces 3 cases), donc 20 chemins.

Nous reviendrons sur cette façon de dénombrer au chapitre suivant, qui traite des combinaisons.

20 1.

```

VARIABLES
S EST_DU_TYPE NOMBRE
P EST_DU_TYPE NOMBRE
m EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
G EST_DU_TYPE NOMBRE
Gain EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
G PREND_LA_VALEUR 0
POUR N ALLANT_DE 1 A 200
  DEBUT_POUR
  S PREND_LA_VALEUR 20
  m PREND_LA_VALEUR 1
  i PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (S >= m ET i == 0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    P PREND_LA_VALEUR random()
    SI (P <= 0.5) ALORS
      DEBUT_SI
      S PREND_LA_VALEUR S-m
      m PREND_LA_VALEUR 2*m
      FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      S PREND_LA_VALEUR S+m
      i PREND_LA_VALEUR 1
      FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  G PREND_LA_VALEUR G+S-20
  FIN_POUR
  Gain PREND_LA_VALEUR G/200
  AFFICHER Gain
FIN_ALGORITHME

```

2. a. Le jeu s'arrête lorsque la pièce tombe sur Face, ou lorsque le joueur n'a plus assez d'argent pour miser.

Supposons donc que la pièce tombe à chaque fois sur Pile, et notons S_n la somme dont dispose le joueur au bout de n lancers (On a bien $S_0 = 20$ pour $n = 0$, c'est-à-dire avant le 1^{er} lancer).

Pour $n = 1$, $S_1 = S_0 - 1 = 19$, car le joueur a misé 1 euro.

Pour $n = 2$, $S_2 = S_1 - 2 \times 1 = 17$, car le joueur a doublé sa mise.

De même :

$$S_3 = S_2 - 2 \times 2 = 13$$

$$S_4 = S_3 - 2 \times 4 = 5.$$

Le joueur doit s'arrêter, car il ne peut miser les $2 \times 8 = 16$ euros prévus dans sa stratégie.

Ainsi, le nombre maximal de lancers est $N = 4$.

La mise au n^{e} lancer est de $2^n - 1$ euros. Les mises perdues se cumulant à chaque lancer, on a donc, pour tout n :

$$S_n = S_0 - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = S_0 - \frac{2^n - 1}{2 - 1} = S_0 + 1 - 2^n,$$

en utilisant les propriétés sur les suites géométriques.

Quelle que soit la somme S_0 dont le joueur dispose au départ, le jeu s'arrêtera dès que :

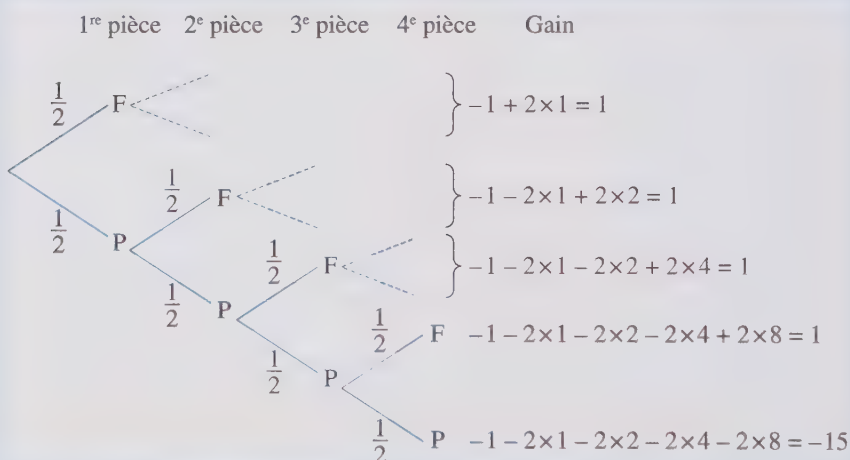
$$S_n < 2^{n-1} \Leftrightarrow S_0 + 1 - 2^n < 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 2^n + 2^{n-1} > S_0 + 1.$$

Ce qui ne manque jamais d'arriver !

b. Notons G le gain algébrique du joueur. On peut schématiser les résultats à l'aide un arbre pondéré représentant 4 lancers indépendants, identiques d'une pièce bien équilibrée.

On va se contenter ici des branches qui nous intéressent réellement d'après la règle du jeu :



En multipliant le long des branches de l'arbre pondéré, on obtient la loi du gain G :

$$p(G = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{16}$$

$$p(G = -15) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

D'où l'espérance du gain :

$$E(G) = 1 \times \frac{15}{16} + (-15) \times \frac{1}{16} = 0.$$

Le jeu est équitable.

Le gain maximal obtenu avec cette stratégie est de 1 euro. La perte maximale, bien qu'assez peu probable (1 chance sur 16), est par contre de 15 euros. Cette stratégie ne permettra pas de s'enrichir, mais risque de « ruiner » le joueur.

21 1. À chaque lancer, on note C l'événement « la fléchette crève le ballon » :

$$p(C) = \frac{7}{10} \quad \text{et} \quad p(\bar{C}) = 1 - p(C) = \frac{3}{10}.$$

Avec 3 euros, il a $2 \times 3 = 6$ fléchettes à lancer.

Ces 3 euros ne suffisent pas si l'événement réalisé est $\bar{C}_1 \bar{C}_2 \bar{C}_3 \bar{C}_4 \bar{C}_5 \bar{C}_6$, où on a

numéroté les lancers, de probabilité $p(\bar{C})^6 = \left(\frac{3}{10}\right)^6 = 7,29 \times 10^{-4}$.

▲ Ici, on s'est contenté de considérer la dernière branche d'un arbre pondéré à $2^6 = 64$ branches représentant les 6 lancers successifs indépendants.

2. Pour $n = 4$, il lance $2 \times 4 = 8$ fléchettes.

L'événement cherché est $\bar{C}_1 \bar{C}_2 \bar{C}_3 \bar{C}_4 \bar{C}_5 \bar{C}_6 \bar{C}_7 C_8$, de probabilité :

$$p(\bar{C})^7 \times p(C) = \left(\frac{3}{10}\right)^7 \times \frac{7}{10} = \frac{3^7 \times 7}{10^8} = 1,5309 \times 10^{-4}.$$

La probabilité qu'il crève un ballon à la dernière fléchette est $1,53 \times 10^{-4}$.

3. Soit A l'événement « Guillaume part sans la poupée ».

A est réalisé si aucune des $2n$ fléchettes lancées ne crève de ballon, donc :

$$p(A) = p(\bar{C}_1 \bar{C}_2 \bar{C}_3 \dots \bar{C}_{2n-1} \bar{C}_{2n}) = p(\bar{C})^{2n} = \left(\frac{3}{10}\right)^{2n}.$$

Ainsi :

$$p(A) \leq \frac{1}{10^6} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^{2n} \leq 10^{-6}.$$

Dans un tableau, on observe les valeurs de la fonction $\left(\frac{3}{10}\right)^{2x}$ où x démarre à 0, avec

un pas de 1 (voir exercice 18 mais attention, $2x$ doit être entre parenthèses)

Pour $n = 7$, $p(A) \approx 2,68 \times 10^{-6} > 10^{-6}$.

$n = 8$, $p(A) \approx 4,29 \times 10^{-7} < 10^{-6}$.

On en déduit que **la somme minimale à payer est de 8 euros.**

▲ $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{3}{10}\right)^{2n} = \left(\frac{9}{100}\right)^n$, donc la suite $\left(\left(\frac{3}{10}\right)^{2n}\right)$ est géométrique de raison

$$q = \frac{9}{100}.$$

$q \in]0; 1[$ et le premier terme est $1 > 0$, donc cette suite est strictement décrois-

sante, ce qui achève la preuve qu'on aura bien $\left(\frac{3}{10}\right)^{2n} < 10^{-6}$ pour $n \geq 8$.

22 1. On note P l'événement « le chocolat est fourré praliné », G l'événement « le chocolat est fourré ganache »,

F l'événement « le chocolat est à la pâte de fruits ».

Chaque chocolat est tiré de façon équiprobable, donc à chaque « tirage » :

$$p(P) = \frac{60}{100} = 0,6, \quad p(G) = \frac{30}{100} = 0,3 \text{ et } p(F) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

a. A peut s'écrire dans l'ordre $G_1 P_2 F_3$ (on numérote pour plus de clarté) les tirages successifs sont identiques, indépendants, donc :

$$p(A) = p(G) \times p(P) \times p(F)$$

$$p(A) = 0,3 \times 0,6 \times 0,1$$

$$p(A) = \mathbf{0,018}.$$



Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, revoir le savoir-faire 2.

b. B peut s'écrire $\bar{G}_1 \bar{G}_2 \bar{G}_3 \bar{G}_4 \bar{G}_5$, donc $p(B) = p(\bar{G})^5$.

$$\text{Or, } p(\bar{G}) = 1 - p(G) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$\text{Ainsi } p(B) = \mathbf{0,7^5 = 0,16\,807}.$$

c. On commence par calculer $p(\bar{C})$, $\bar{C}$ étant l'événement « le visiteur n'a mangé aucun praliné », ce qui peut s'écrire $\bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3 \bar{P}_4 \bar{P}_5$.

$$\text{Donc } p(\bar{C}) = p(\bar{P})^5,$$

$$\text{or } p(\bar{P}) = 1 - p(P) = 1 - 0,6 = 0,4,$$

$$\text{donc } p(\bar{C}) = 0,4^5 = 0,01\,024.$$

$$\text{Ainsi } p(C) = 1 - p(\bar{C})$$

$$p(C) = \mathbf{0,98\,976}.$$

d. D peut s'écrire $\bar{F}_1 \bar{F}_2 \bar{F}_3 F_4$,

$$\text{donc } p(D) = p(\bar{F})^3 \times p(F).$$

$$\text{Or } p(\bar{F}) = 1 - p(F) = 1 - 0,1 = 0,9, \text{ donc :}$$

$$p(D) = \mathbf{0,9^3 \times 0,1 = 0,0729}.$$

2. On note n le nombre de chocolats mangés, et E l'événement « le visiteur a mangé au moins une pâte de fruits »

$$\bar{E} \text{ peut s'écrire } \bar{F}_1 \bar{F}_2 \dots \bar{F}_n, \text{ donc } p(\bar{E}) = p(\bar{F})^n = 0,9^n.$$

$$p(E) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - p(E) \leq 0,05 \Leftrightarrow p(\bar{E}) \leq 0,05.$$

$$\text{Donc } p(E) \geq 0,95 \Leftrightarrow 0,9^n \leq 0,05.$$

$$\text{Or } 0,9^{28} \approx 0,052 \text{ à } 10^{-3} \text{ près et } 0,9^{29} \approx 0,047 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Donc le visiteur doit manger au moins 29 chocolats !

La suite $(0,9^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,9$, décroissante car $0 < q < 1$ et son premier terme est $1 > 0$.

23 1. Les gains possibles sont les suivants :

Face obtenue	1	2	3	4	5	6
Gain	-1	-2	3	-4	-5	6

Le dé n'étant pas truqué, chacune des 6 faces a la même probabilité d'apparaître. La loi de probabilité associée à cette épreuve est donc :

Gain X	-1	-2	3	-4	-5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Le gain est égal à la somme empochée moins la mise.

2. L'espérance du gain X est :

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} - 4 \times \frac{1}{6} - 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$E(X) = -\frac{3}{6} = -0,50.$$

L'espérance de cette loi est $-0,50$. Cela signifie qu'en moyenne, le joueur perd $0,50$ €.

Le jeu n'est donc pas équitable.

Calcul de la variance :

Gain x_i	-1	-2	3	-4	-5	6
$(x_i - E)$	-0,5	-1,5	3,5	-3,5	-4,5	6,5
$(x_i - E)^2$	0,25	2,25	12,25	12,25	20,25	42,25
Probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

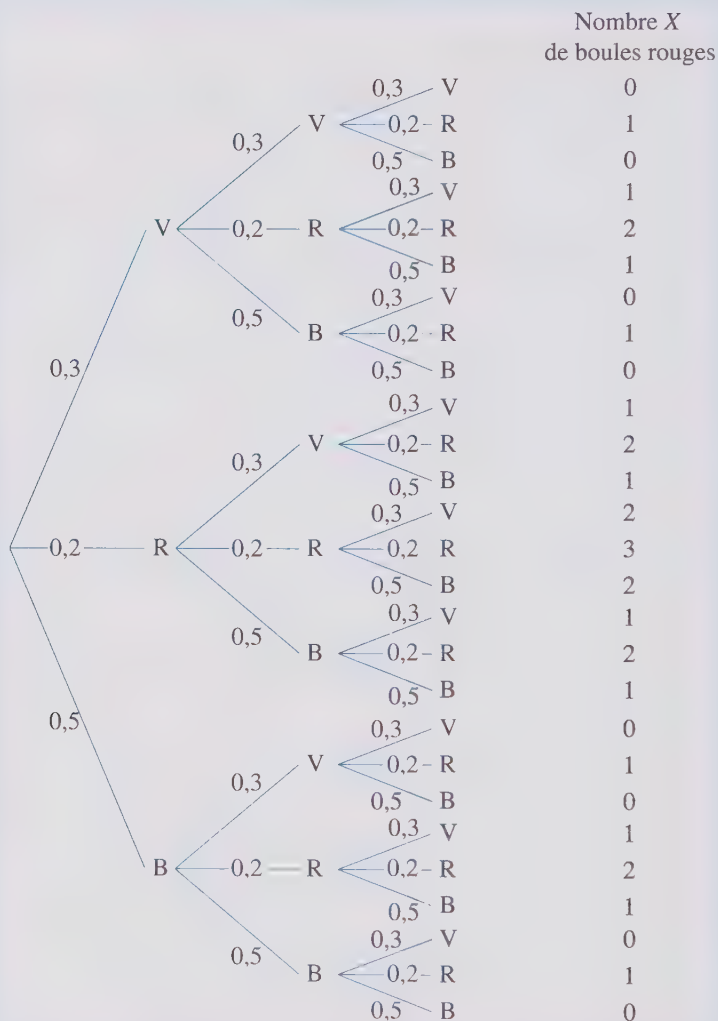
$$V = 0,25 \times \frac{1}{6} + 2,25 \times \frac{1}{6} + 12,25 \times \frac{1}{6} + 12,25 \times \frac{1}{6} + 20,25 \times \frac{1}{6} + 42,25 \times \frac{1}{6}.$$

$$V(X) = \frac{89,5}{6} \approx 14,92 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

24 1. On répète trois fois la même expérience de façon indépendante. A chaque tirage, notons R l'événement « la boule tirée est rouge », V l'événement « la boule tirée est verte », B l'événement « la boule tirée est bleue ». Les boules sont indiscernables au toucher, donc leurs tirages sont équiprobables et :

$$p(V) = \frac{6}{3+2+5} = \frac{3}{10} = 0,3, \quad p(R) = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ et } p(B) = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Première méthode : Représentons l'arbre pondéré complet modélisant les trois tirages successifs avec remise,



Par multiplication le long des branches (Voir Savoir-Faire n° 2) on obtient :

$$p(X=0) = 0,3^3 + 0,3^2 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5 \times 0,3 + 0,3 \times 0,5^2 + 0,5 \times 0,3^2$$

$$+ 0,5 \times 0,3 \times 0,5 + 0,5^2 \times 0,3 + 0,5^3$$

$$p(X=0) = 0,3^3 + 3 \times 0,5 \times 0,3^2 + 3 \times 0,3 \times 0,5^2 + 0,5^3$$

$$p(X=0) = 0,512.$$

$$p(X=1) = 0,3^2 \times 0,2 + 0,3 \times 0,2 \times 0,3 + 0,3 \times 0,2 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5 \times 0,2 \\ + 0,2 \times 0,3^2 + 0,2 \times 0,3 \times 0,5 + 0,2 \times 0,5 \times 0,3 + 0,2 \times 0,5^2 + 0,5 \times 0,3 \times 0,2 \\ + 0,5 \times 0,2 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 \times 0,5 + 0,5^2 \times 0,2$$

$$p(X=1) = 3 \times 0,2 \times 0,3^2 + 3 \times 0,2 \times 0,5^2 + 6 \times 0,2 \times 0,3 \times 0,5 \\ = \mathbf{0,384}$$

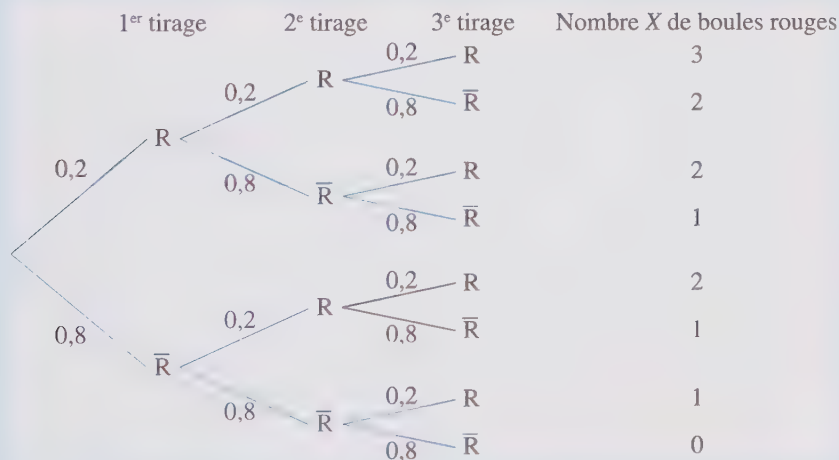
$$p(X=2) = 0,3 \times 0,2^2 + 0,2 \times 0,3 \times 0,2 + 0,2^2 \times 0,3 + 0,2^2 \times 0,5 \\ + 0,2 \times 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,2^2$$

$$p(X=2) = 3 \times 0,3 \times 0,2^2 + 3 \times 0,5 \times 0,2^2 = \mathbf{0,096}$$

$$p(X=3) = 0,2^3 = \mathbf{0,008}.$$

▀ $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) = 1$: ceci peut soit permettre de vérifier la vraisemblance des résultats trouvés, soit de calculer l'un des $p(X=x_i)$ à l'aide des 3 autres (par exemple $p(X=1)$, long à déterminer).

Autre méthode : On se contente de rechercher la couleur rouge, c'est-à-dire les événements R et $\bar{R}$, sachant que $p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 0,8$. On obtient un arbre pondéré ayant $2^3 = 8$ branches.



On déduit

$$p(X=0) = 0,8^3 = \mathbf{0,512}$$

$$p(X=1) = 3 \times 0,2 \times 0,8^2 = \mathbf{0,384}$$

$$p(X=2) = 3 \times 0,8 \times 0,2^2 = \mathbf{0,036}$$

$$p(X=3) = 0,2^3 = \mathbf{0,008}.$$

2. On connaît la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge :

$$p(X \geq 1) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) = 0,488.$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,512 = 0,488.$$

Si Y désigne le nombre de boules bleues, on peut utiliser l'arbre dressé à la première méthode : $p(Y \geq 2) = p(Y = 2) + p(Y = 3)$

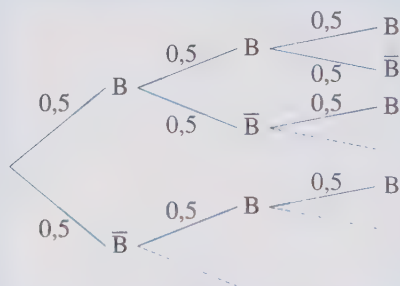
$$\begin{aligned} p(Y = 2) &= 0,3 \times 0,5^2 + 0,2 \times 0,5^2 + 0,5 \times 0,3 \times 0,5 \\ &\quad + 0,5 \times 0,2 \times 0,5 + 0,5^2 \times 0,3 + 0,5^2 \times 0,2 \\ &= 3 \times 0,3 \times 0,5^2 + 3 \times 0,2 \times 0,5^2 \\ &= 0,375. \end{aligned}$$

$$p(Y = 3) = 0,5^3 = 0,125$$

$$\text{Donc } p(Y \geq 2) = 0,5.$$

L'affirmation de Paul est donc vraie, mais il s'en est fallu de peu.

Autre méthode : Sans utiliser l'arbre pondéré complet de la question 1. On peut ne s'intéresser, là encore, qu'à l'apparition de la couleur bleue. On peut même ne représenter que les branches qui contiennent 2 ou 3 boules bleues :



$$\text{On a alors } p(Y = 2) = 3 \times 0,5^3$$

$$p(Y = 3) = 0,5^3,$$

$$\text{d'où } p(Y \geq 2) = 4 \times 0,5^3 = 0,5.$$

25 1. a.

y_i	ax_1	ax_2	...	ax_n
$p(Y = y_i)$	p_1	p_2	...	p_n
z_i	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	...	$ax_n + b$
$P(Z = z_i)$	p_1	p_2	...	p_n

$$\text{b. } E(Y) = \sum_{i=1}^n y_i \times p(Y = y_i) = ax_1 \times p_1 + ax_2 \times p_2 + \dots + ax_n \times p_n$$

$$E(Y) = a(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n) = aE(X)$$

$$E(Y) = aE(X).$$

$$\begin{aligned}
 V(Y) &= \sum_{i=1}^n (y_i - E(Y))^2 \times p(Y = y_i) = \sum_{i=1}^n (ax_i - aE(X))^2 \times p(Y = y_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n a^2 (x_i - E(X))^2 \times p_i = a^2 \times \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \times p(X = x_i)
 \end{aligned}$$

$$V(Y) = a^2 V(X).$$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n z_i \times p(Z = z_i) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \times p_i = \sum_{i=1}^n ax_i p_i + b \sum_{i=1}^n p_i$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ donc :}$$

$$E(Z) = aE(X) + b$$

2. a. Chacun des 9 jetons a la même probabilité d'être tiré, $\frac{1}{9}$.

Numéro	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Carré du numéro	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Ainsi la loi de X est :

x_i	0	1	4	9	16
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

Son espérance est :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{2}{9} + 9 \times \frac{2}{9} + 16 \times \frac{2}{9}$$

$$E(X) = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}.$$

x_i	0	1	4	9	16
$x_i - E(X)$	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{17}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$+\frac{7}{3}$	$\frac{28}{3}$
$(x_i - E(X))^2$	$\frac{400}{9}$	$\frac{289}{9}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{49}{9}$	$\frac{784}{9}$
$p(X = x_i) \times (x_i - E(X))^2$	$\frac{400}{81}$	$\frac{578}{81}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{98}{81}$	$\frac{1568}{81}$

$$V(X) = \frac{400 + 578 + 128 + 98 + 1568}{81}$$

$$V(X) = \frac{2772}{81}$$

$$V(X) = \frac{308}{9}.$$

$$b. V(Y) = V(3X) = 3^2 \times V(X)$$

$$V(Y) = 308.$$

$$E(Z) = E(-2X + 1) = -2E(X) + 1 = -2 \times \frac{20}{3} + 1$$

$$E(Z) = -\frac{37}{3}.$$

26 On note :

P L'événement « l'image est celle de Protector » ;

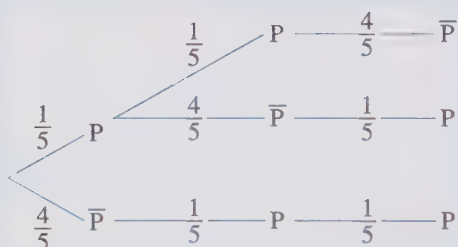
D L'événement « l'image est celle de Destructor » ;

A L'événement « l'image est celle d'un autre héros ».

$$p(P) = \frac{1}{5}, p(D) = \frac{1}{2}. \text{ Or } p(P) + p(D) + p(A) = 1.$$

$$\text{Donc } p(A) = 1 - p(P) - p(D) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

1. On répète trois fois la même expérience de façon indépendante. Représentons un arbre pondéré, mais en nous limitant aux branches comptant deux fois l'événement A.

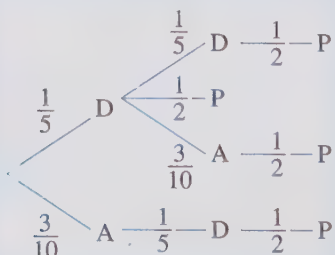


On en déduit :

$$p(M) = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5}$$

$$p(M) = \frac{12}{125} = 0,096.$$

2. De même, les branches donnant Destructor avant Protector sont :



$$P(N) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$P(N) = 0,18.$$

3. U correspond à l'événement $\bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3$ avec $p(\bar{P}_1) = \frac{4}{5}$ donc :

$$p(U) = p(\bar{P})^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

$$p(U) = 0,512$$

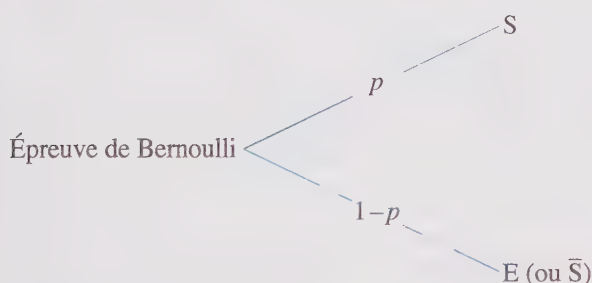
On peut également dresser l'arbre complet pondéré donnant les $3^2 = 27$ achats possibles. C'est plus long, mais cela assure de n'oublier aucun cas.

Loi binomiale Échantillonnage

I ÉPREUVE DE BERNOULLI – LOI DE BERNOULLI

■ Définitions :

- Une expérience qui ne comporte que deux issues possibles (succès ou échec) est appelée **épreuve de Bernoulli**.
- Si, dans une épreuve de Bernoulli, la probabilité de succès est p ($0 < p < 1$), la probabilité de l'échec est $1 - p$, on dit que la loi de Bernoulli est de **paramètre p** .



EXEMPLES :

- On jette une pièce de monnaie bien équilibrée : on s'intéresse au succès « la pièce donne pile » (par exemple) et à l'échec « la pièce donne face ». La probabilité du succès est $p = 0,5$ et celle de l'échec est $q = 0,5$.
- On jette un dé classique. Même s'il y a six faces, on peut ne s'intéresser qu'au succès S « obtenir le 6 » et à l'échec $\bar{S}$. Si le dé est bien équilibré, ses 6 faces sont équiprobables, donc la probabilité du succès est $p = \frac{1}{6}$, et celle de l'échec est

$$q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

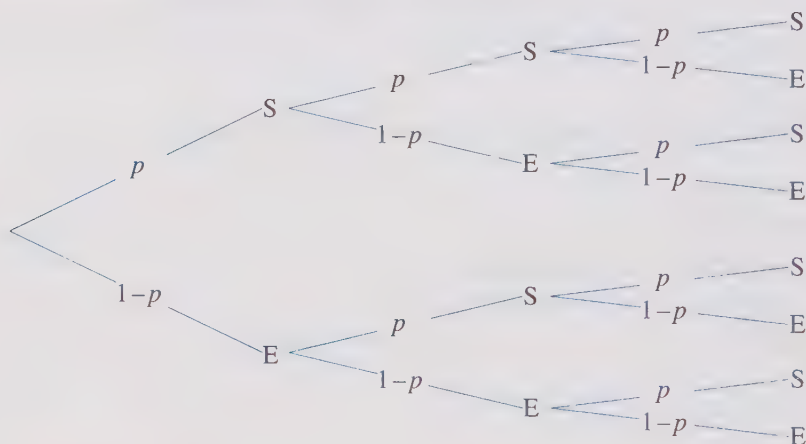
■ **Définitions** : soit X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

■ **Propriété** : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

II SCHÉMA DE BERNOULLI, LOI BINOMIALE

1. Définition

On appelle **schéma de Bernoulli** une expérience qui consiste à répéter plusieurs fois et de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli.



Un schéma de Bernoulli s'illustre par un arbre dans lequel :

- de chaque nœud partent deux branches ;
- toutes les branches menant à un succès portent la même probabilité p ;
- toutes les branches menant à un échec portent la même probabilité $1-p$.

2. Coefficients binomiaux

■ **Définition** : Soit n un entier naturel non nul et k un entier compris entre 0 et n . Dans un schéma de Bernoulli comprenant n répétitions, le nombre de chemins menant à k succès est appelé coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

EXEMPLE : Avec l'arbre précédent, on trouve $\binom{3}{2} = 3$.

■ **Propriétés** : Soit n un entier naturel non nul :

- $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$.
- Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
- Formule de Pascal : pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

On peut donc déterminer de proche en proche les coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal.

	1					
	1	1				
	1	2	1			
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
	1	5	10	10	5	1

On lit $\binom{5}{3} = 10 = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$.

3. Loi binomiale

■ **Définition** : La loi de probabilité de la variable aléatoire X correspondant au nombre de succès d'un schéma de Bernoulli est appelée **loi binomiale** de paramètres n (nombre de répétitions) et p (probabilité de succès à chaque répétition)

■ **Propriété** : Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

De plus, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

III ÉCHANTILLONNAGE

1. Définition

Un échantillon est une partie de la population. La taille de l'échantillon est le nombre d'individus formant l'échantillon.

2. Intervalle de fluctuation : le modèle de l'urne

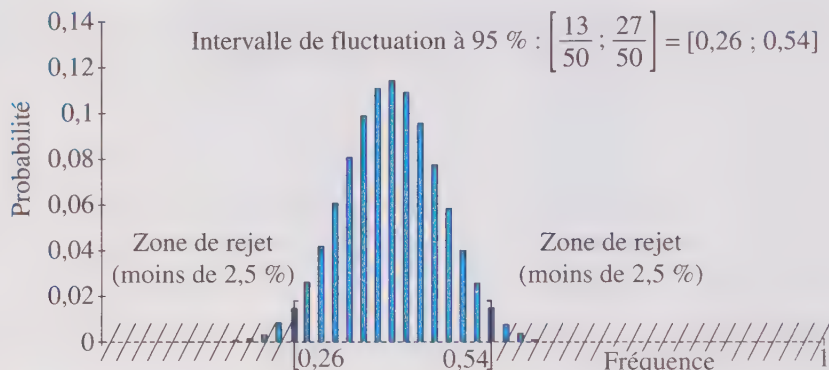
■ Une urne contient une proportion p de boules rouges. On prélève successivement n boules, avec remise dans cette urne. La variable aléatoire X correspondant au nombre de boules rouges obtenues (nombre de « succès ») sur cet échantillon de taille n suit la **loi binomiale** de paramètres n et p .

■ **Définition** : Si X est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p , l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence $\frac{X}{n}$ est l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n} \right]$ défini par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$;

- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Loi binomiale avec $n = 50$, $p = 0,4$



En classe de seconde, on avait admis la propriété moins précise suivante : si $n \geq 30$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$, alors dans plus de 95 % des cas, la fréquence f observée sur cet échantillon appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

Pour $n \geq 30$, $n \times p \geq 5$ et $n \times (1-p) \geq 5$, on observe que l'intervalle de fluctuation

$\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n} \right]$ est sensiblement le même que l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ proposé dans le programme de seconde.

3. Application à la prise de décision

Intervalle de fluctuation à 95 %

Dans une population où un caractère touche une proportion p de la population, on prélève au hasard un échantillon de taille n sur lequel **on observe** une fréquence f du caractère.

Si la taille de la population est importante, prélever un échantillon de n personnes peut s'assimiler aux tirages successifs de n boules rouges (par exemple), avec remise, dans une urne dont la proportion de boules rouges est p .

Pour 95 % des échantillons de taille n , la fréquence observée d'individus vérifiant ce caractère doit appartenir à l'intervalle de fluctuation théorique à 95 % défini ci-dessus. Les 5 % des échantillons restants pourraient être qualifiés d'« échantillons extrêmes » : ils sont bien issus d'une population où le caractère est représenté avec une proportion p , mais leur fréquence est hors de l'intervalle de fluctuation à 95 %.

À l'aide de l'échantillon de n personnes prélevé, on veut valider, ou invalider, l'hypothèse « le prélèvement des n individus s'est fait au hasard dans une population où le caractère touche une proportion p de la population ». Pour cet échan-

tillon, on calcule la fréquence f d'individus vérifiant bien le caractère observé, et on applique la **règle de décision** suivante :

- Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation à 95 %, $\left[\frac{a}{b}, \frac{b}{n}\right]$, on considère que l'hypothèse n'est pas remise en question et on ne la rejette pas « au seuil de 5 % ».
- Sinon, on rejette cette hypothèse « au risque de 5% » : soit la proportion dans la population totale n'est pas p , soit l'échantillon observé n'a pas été prélevé au hasard !

▲ L'hypothèse est rejetée lorsque la fréquence f observée est « trop éloignée » de p . Le seuil de décision étant fixé de sorte que la probabilité de rejeter l'hypothèse à tort (alors qu'elle est bien vraie) soit inférieure à 5 %. Lorsqu'on rejette l'hypothèse, le **risque de se tromper** est de 5 %.

Lorsqu'on ne rejette pas l'hypothèse, on ne connaît pas le risque de se tromper (d'avoir accepté à tort l'hypothèse) : on ne rejette pas « faute de preuve du contraire ».

SAVOIR-FAIRE

1. Reconnaître un schéma de Bernoulli

Pour reconnaître un schéma de Bernoulli, il faut vérifier que :

- l'épreuve qui est répétée est bien une épreuve de Bernoulli, c'est-à-dire qu'elle ne comporte que deux issues possibles et que la probabilité p du succès (et donc de l'échec) est constante d'une épreuve à l'autre ;
- l'expérience consiste bien à répéter des épreuves identiques et de façon indépendante les unes des autres.

EXEMPLE Une urne contient 3 boules noires et 5 blanches indiscernables au toucher. L'expérience consiste à extraire au hasard successivement trois boules de cette urne et à en noter la couleur.

■ **Si le tirage des boules se fait avec remise**, à chaque tirage, il y a équiprobabilité du choix de la boule tirée. Si on appelle succès le fait de tirer une boule blanche, on est en présence d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{5}{8}$. On répète donc trois fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante, ce qui constitue un schéma de Bernoulli.

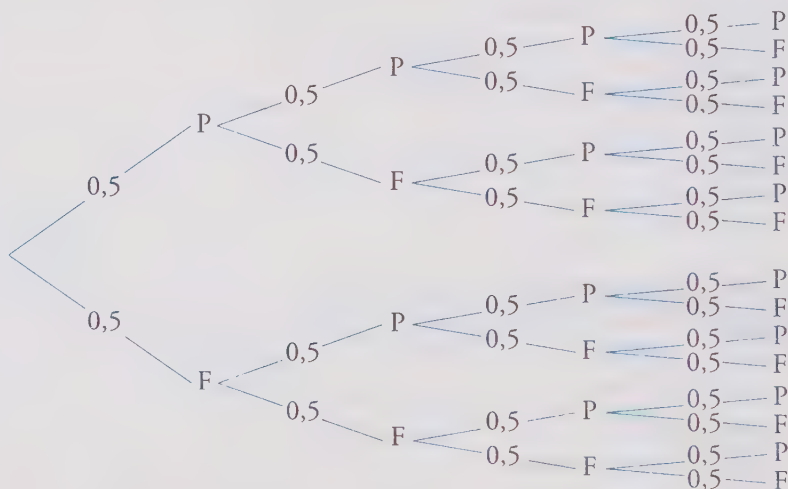
Le nombre X de boules blanches obtenues, c'est-à-dire de succès, suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{5}{8}$.

■ Si le tirage des boules se fait sans remise, chaque tirage modifie la composition de l'urne, donc la probabilité de succès n'est pas constante d'une épreuve à l'autre, donc l'expérience ne constitue pas un schéma de Bernoulli.

▲ La loi binomiale est généralement associée au modèle des « tirages successifs avec remise »

2. Utiliser la loi binomiale pour calculer des probabilités

On jette 4 fois de suite la même pièce de monnaie équilibrée, on note X le nombre de Pile obtenu. Déterminer $P(X = 3)$.



La pièce étant bien équilibrée, si on appelle succès le fait qu'elle tombe sur Pile, un lancer constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2} = 0,5$.

On répète 4 fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante : cela constitue un schéma de Bernoulli. X est donc égal au nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli. X suit alors la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,5$.

$$\text{Ainsi } p(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,5^3 \times (1 - 0,5)^{4-3} = 4 \times 0,5^4 = \mathbf{0,25}.$$

▲ $\binom{4}{3}$ s'obtient en comptant les 4 branches qui contiennent 3 succès (P). On peut également le déterminer à l'aide du triangle de Pascal ou de la calculatrice avec l'instruction $\boxed{\text{InCr}}$ (qui se saisit sous la forme $4 \boxed{\text{nCr}} 3$).

3. Prendre une décision à partir d'un échantillon avec l'intervalle de fluctuation à 95%

Une entreprise de 1 250 salariés emploie 525 femmes. On suppose que la proportion de femmes dans la population active du pays où est implantée l'entreprise, est de 40%. Peut-on considérer, au risque de 5%, que l'entreprise exerce une discrimination à l'embauche vis-à-vis des femmes ?

a. Préambule : qu'entend-on par parité ?

Ici la proportion p de femmes dans la population totale n'est pas mise en cause, c'est la façon de recruter « au hasard » qui est testée.

Il ne s'agit pas cependant de savoir si l'entreprise respecte strictement la proportion de femmes dans la population active : pour ce faire, il faudrait qu'elle emploie exactement $\frac{40}{100} \times 1\,250 = 500$ femmes. Avec un tel critère,

elle ne respecterait pas la parité avec ses 525 employées, mais pas non plus si elle employait 499 femmes, ou 501... de même qu'une pièce qui tomberait 4 fois sur Pile en 10 lancers serait immédiatement déclarée truquée !

Ce critère est beaucoup trop restrictif pour décider si le résultat observé du pourcentage de femmes employées dans cette entreprise pourrait être obtenu par choix au hasard des individus dans la population active ou s'il semble dû à un choix délibéré de l'employeur : on doit tenir compte de la fluctuation d'échantillonnage.

b. Étape 1 : on reconnaît une loi binomiale.

Sous l'hypothèse que l'entreprise respecte la parité, si on appelle succès le fait qu'une personne embauchée soit une femme, chaque embauche constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{40}{100} = 0,40$. Le recrutement des

1 250 salariés est alors assimilable à la répétition de $n = 1\,250$ épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$ indépendantes. Le nombre X de femmes recrutées, c'est-à-dire de succès, suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 1\,250$ et $p = 0,4$.

Étape 2 : on détermine l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence $\frac{X}{1\,250}$.

C'est $\left[\frac{a}{1\,250} ; \frac{b}{1\,250} \right]$ où :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Un tableur permet de déterminer a et b lorsque le nombre de répétitions n n'est pas trop grand ($n < 1\,450$ environ) :

- 1^{re} méthode : le tableau des probabilités cumulées pour k entier compris entre 0 et 1 250.

Dans la cellule A1, on saisit la valeur 0 ; dans la cellule B1, on saisit la formule =LOI.BINOMIALE(A1;1250;0,4;1). On étend ces deux formules jusqu'à la ligne 1251.

On repère l'extrait du tableau qui nous intéresse :

...	...
465	0,0 229
466	0,0 262
...	...
533	0,9 732
534	0,9 765

On en déduit $p(X \leq 465) < 0,025$ et $p(X \leq 466) \geq 0,025$, donc $a = 466$; $p(X \leq 533) < 0,975$ et $p(X \leq 534) \geq 0,975$, donc $b = 534$.

• 2^e méthode : on détermine directement a et b à l'aide de l'instruction CRITERE.LOI.BINOMIALE :

a est donné par la formule = CRITERE.LOI.BINOMIALE(1250;0,4;0,025) ;

b est donné par la formule = CRITERE.LOI.BINOMIALE(1250;0,1;0,975).

On trouve à nouveau $a = 466$ et $b = 534$.

L'intervalle de fluctuation à 95% est donc $\left[\frac{466}{1\,250} ; \frac{534}{1\,250} \right]$.

c. Étape 3 : on applique le test pour rejeter ou non l'hypothèse de parité.

La fréquence observée dans l'entreprise est $f = \frac{525}{1\,250}$. Cette valeur appartient à l'intervalle de fluctuation à 95%.

Donc on ne rejette pas l'hypothèse de parité au seuil de 5 %.

EXERCICES D'APPLICATION

7

1 BERNOULLI ?

★ 10 min ► P. 334

On dispose de trois dés – un rouge, un vert, un bleu – indiscernables au toucher. Les expériences suivantes peuvent-elles être modélisées par une épreuve de Bernoulli ? Si oui, préciser son paramètre p .

1. Expérience 1 : on tire un dé au hasard et on note sa couleur.
2. Expérience 2 : on tire un dé au hasard. On gagne deux euros s'il est rouge. On perd un euro s'il est d'une autre couleur.
3. Expérience 3 : on lance les 3 dés et on note la somme des chiffres obtenus. On gagne le nombre de points marqués.
4. Expérience 4 : on lance les 3 dés et on note le produit des chiffres obtenus. On gagne s'il est égal à 4.
5. Expérience 5 : on lance les dés vert et rouge. On gagne un euro si le numéro du dé vert est supérieur à celui du dé rouge, 3 euros si les numéros sont identiques, et on perd 2 euros dans les autres cas.

Voir la définition du : Il ne faut pas confondre épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli.

2 LE COURS !

★ 10 min ► P. 334

X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,4$.

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
 2. Représenter graphiquement la loi de X par un diagramme en barres.
- Unités : 2 cm en abscisses, 20 cm en ordonnée.

1. Voir cours II.3.
2. On aura k en abscisse et $p(X = k)$ en ordonnée.

3 SANS CALCULATRICE

★★ 10 min ► P. 335

1. Représenter un triangle de Pascal afin de déterminer $\binom{6}{4}$ sans calculatrice.
2. Démontrer, en utilisant l'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{2}$, que :

$$1 \times \binom{6}{1} + 2 \times \binom{6}{2} + 3 \times \binom{6}{3} + 4 \times \binom{6}{4} + 5 \times \binom{6}{5} + 6 \times \binom{6}{6} = 3 \times 2^6.$$

Le vérifier à l'aide du triangle de Pascal.

Il faut calculer l'espérance $E(X)$ de deux manières : à partir de sa définition (voir chapitre 7, II.2.) et à partir de la formule du cours, II.3.

4 LES VACHES !

★ 10 min ► P. 336

Dans une exploitation agricole, 25 % des vaches sont toutes blanches, 60 % ont des taches marron, 35 % des taches noires (certaines vaches ont à la fois des taches noires et marron).

On désigne 10 vaches au hasard, et on appelle X la variable aléatoire qui désigne le nombre de vaches ayant des taches noires et des taches marron.

On suppose le nombre de vaches de l'exploitation suffisamment grand pour que ces désignations puissent être assimilées à des tirages successifs identiques et indépendants.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Il faut d'abord trouver le pourcentage de vaches aux taches noires et marron. Pour cela, on rappelle que, quels que soient les événements A et B :

$$p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B).$$

2. En déduire la probabilité que 3 des vaches désignées aient des taches noires et des taches marron. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

5 PILE OU FACE ?

★ 15 min ► P. 337

Une pièce truquée tombe sur pile deux fois plus souvent que sur face. On la lance successivement 3 fois et on note X le nombre de fois où elle est tombée sur pile. Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. a. Construire un arbre pondéré rendant compte de l'expérience.

b. En déduire la loi de X , puis son espérance en utilisant la définition de l'espérance vue au chapitre 6.

2. Justifier que l'expérience est une épreuve de Bernoulli et que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. En déduire la variance de X .

Voir le savoir-faire 1.

3. On lance cette pièce encore une fois. Déterminer la probabilité qu'elle soit tombée deux fois sur pile au cours de ces 4 lancers.

6 PARITÉ

★ 5 min ► P. 338

Deux entreprises A et B recrutent dans un bassin d'emploi où il y a autant de femmes que d'hommes, avec la contrainte du respect de la parité. Dans l'entre-

prise A, il y a 100 employés, dont 43 femmes ; dans l'entreprise B, il y a 1 000 employés, dont 460 femmes. Peut-on dire que les entreprises A et B respectent la parité ?

Données : • L'intervalle de fluctuation théorique à 95 % pour la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,5$ est $[0,4 ; 0,6]$.

• L'intervalle de fluctuation théorique à 95 % pour la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,5$ est $[0,469 ; 0,531]$.

 Voir savoir-faire 3.

7 VAINQUEURS AU HASARD

★★ 30 min ► p. 339

Voici la répartition des habitants d'un pays suivant leur âge et leur taille en pourcentage de la population totale :

	Moins de 1 m 60	Plus de 1 m 60
Moins de 40 ans	28 %	33 %
Plus de 40 ans	17 %	22 %

Les 40 gagnants de la grande tombola nationale sont répartis ainsi :

	Moins de 1 m 60	Plus de 1 m 60
Moins de 40 ans	7	10
Plus de 40 ans	7	16

On suppose la population suffisamment grande pour que la désignation des gagnants puisse être assimilée à des tirages successifs indépendants avec remise.

1. Justifier que si la désignation des gagnants s'effectue au hasard, le nombre X de gagnants de moins de 1 m 60 suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,45$.

2. On donne un extrait de la table des probabilités cumulées $p(X \leq k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,45$:

Peut-on rejeter, au risque de 5 %, l'hypothèse suivant laquelle la désignation des vainqueurs s'est faite au hasard ?

k	$p(X \leq k)$
10	0,00 742
11	0,01 789
12	0,03 859
13	0,07 506
...	...
22	0,92 332
23	0,95 947
24	0,98 042
25	0,99 139

3. À l'aide d'un tableur

On reprend la question 2 en utilisant cette fois la proportion de vainqueurs de moins de 30 ans.

Lorsque Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,61$, alors la commande `=LOI.BINOMIALE(4;40;0,61;0)` renvoie la valeur $P(Y = 4)$, tandis que la commande `=LOI.BINOMIALE(4;40;0,61;1)` renvoie la valeur $P(Y \leq 4)$.

a. Saisir la valeur 0 dans la cellule A1 et l'instruction :

`=LOI.BINOMIALE(A1;40;0,61;1)`

dans la cellule B1. Sélectionner les cellules A1 et B1, puis étendre ces formules jusqu'à la ligne 41. Que lit-on dans les cellules A41 et B41 ?

b. En déduire l'intervalle de fluctuation à 95% pour la fréquence $\frac{Y}{40}$.

c. Cela remet-il en cause l'hypothèse suivant laquelle la désignation des vainqueurs s'est faite au hasard ?

8 CONTRÔLE DE FABRICATION

★★ 15 min ► p. 340

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,2$. Sur tableur, les instructions `=CRITERE.LOI.BINOMIALE(30;0,2;0,025)` et `=CRITERE.LOI.BINOMIALE(30;0,2;0,975)` renvoient respectivement les valeurs a et b définies par :

- a est le plus petit entier tel que $p(X \leq a) > 0,025$;
- b est le plus petit entier tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$.

Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% pour la fréquence $\frac{X}{30}$.

▲ Voir cours III 2.

2. Une usine fabrique des dragées. 20% des dragées produites doivent contenir une amande, les autres du chocolat. Le service de contrôle de fabrication prélève 30 dragées au hasard et observe que 8 de ces dragées contiennent une amande : le contrôle est-il concluant ?

9 UN CAFÉ !

★★ 20 min ► p. 341

1. Question préliminaire : sur un tableur

a. Compléter la première colonne avec les entiers k compris entre 0 et 500, et la deuxième avec les probabilités cumulées $p(X \leq k)$, où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,76$.

▲ Voir exercice 7.

b. En déduire l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence $\frac{X}{n}$.

2. En 2010, le distributeur de boissons de la salle des professeurs a servi 500 boissons chaudes par semaine. 76 % de ces boissons sont des cafés. Pour la première semaine de 2011, l'exploitant du distributeur change de marque de café, et note que sur les 500 boissons chaudes vendues, seulement 70 % sont des cafés. Doit-il accuser sa nouvelle marque de café ?

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

10 LOIS BINOMIALES

★★ 20 min ▶ P. 341

Une urne contient 5 boules blanches, 3 rouges et 2 vertes, indiscernables au toucher. On tire successivement, et avec remise, 4 boules de l'urne. X , Y et Z désignent respectivement le nombre de boules blanches, rouges et vertes obtenues.

1. a. En notant B_i l'événement « la boule tirée au i -ième tirage est blanche », pour chaque entier i compris entre 1 et 4, représenter un arbre pondéré permettant de déterminer la loi de X . Donner alors $p(X = 3)$.

b. Justifier qu'il s'agit là d'un schéma de Bernoulli.

c. En déduire que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres. Retrouvez alors $p(X = 3)$, puis calculer l'espérance et la variance de X .

2. Déterminer la loi de probabilité de Y . Les résultats seront donnés sous forme d'un tableau.

3. Déterminer $p(Z \geq 3)$ sous forme de fraction irréductible.

11 DISCRIMINATION RACIALE (1)

★★ 15 min ▶ P. 343

En Novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida était condamné à huit ans de prison. Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Sur les 870 personnes convoquées pour être jurés sur une période de quelques mois, seules 339 étaient d'origine mexicaines, alors que 79,1 % de la population du comté était d'origine mexicaine.

Peut-on considérer, au risque de 5 %, que la désignation des jurés s'est faite au hasard ?

Sur tableur, si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , les instructions

= CRITERE.LOI.BINOMIALE(n ; p ; 0,025),

= CRITERE.LOI.BINOMIALE(n ; p ; 0,975)

renvoient respectivement les valeurs a et b définies par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

12 DISCRIMINATION RACIALE [2]

★★ | 25 min | ► P. 344

En 1977 le gouvernement américain intente un procès au réseau d'établissements scolaires de Hazelwood Independent School District (situé dans le comté de Saint Louis), au motif que, parmi les 405 enseignants recrutés lors des années 1972 à 1974, il n'y eut que 15 enseignants noirs, alors que, dans l'ensemble du comté, le taux d'enseignants noirs recrutés durant la même période fut de 15,4 %.

1. Peut-on rejeter, au risque de 5 %, l'hypothèse selon laquelle le choix des enseignants noirs a eu lieu sans discrimination ?

On pourra utiliser la commande `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)` pour établir la table des probabilités cumulées $P(X \leq k)$, où X suit la loi binomiale de paramètres n et p .

En cas de difficultés, voir exercice 7.

2. Pour réfuter la thèse de la discrimination, les avocats d'Hazelwood ont contesté la pertinence des chiffres cités par l'accusation : durant cette même période, la ville de Saint-Louis appliquait une politique dite de « discrimination positive » fixant à 50 % le taux d'enseignants noirs parmi les nouveaux enseignants dans la ville. Ainsi, en dehors de la ville de Saint Louis, le taux d'enseignants noirs recrutés n'était plus que 5,7 %. Ce nouveau chiffre permet-il de condamner le réseau d'établissements scolaires d'Hazelwood au risque de 5 % ?

13 DÉFAUTS

★★ | 35 min | ► P. 345

En moyenne, 23 % des écrans d'ordinateur fabriqués dans une usine présentent un défaut.

1. Sur un contrôle de 40 écrans, 14 sont défectueux.

a. Calculer la proportion d'écrans défectueux dans ce lot.

b. Sur tableur, en utilisant l'instruction `=LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)`, établir la table des probabilités cumulées $P(X \leq k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,23$, puis déterminer l'intervalle de fluctuation à 90 % de la fréquence $\frac{X}{n}$.

En cas de difficultés, voir exercice 7.

c. Doit-on s'inquiéter des résultats de ce contrôle au seuil de 10 % ?

2. Et si un test de 400 écrans donne 28 % d'écrans défectueux ?

14 RIEN NE SERT DE COURIR...

★★ 35 min ► P. 346

Le lièvre et la tortue sont sur la case de départ numérotée zéro. Le vainqueur est celui qui arrive le premier sur la case numéro 6. On lance un dé bien équilibré. S'il tombe sur 6, le lièvre saute sur la case numéro 6 et gagne la course. Sinon, la tortue avance d'une case.

1. À première vue, qui doit gagner ?
2. On donne l'algorithme suivant écrit avec Algobox, afin de simuler cette course.

```

VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  L EST_DU_TYPE NOMBRE
  T EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  T PREND_LA_VALEUR 0
  L PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (...) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
      x PREND_LA_VALEUR floor(random()*6+1)
      SI (x==6) ALORS
        DEBUT_SI
          L PREND_LA_VALEUR _
          FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
            T PREND_LA_VALEUR
            FIN SINON
          FIN_TANT_QUE
        SI (T==6) ALORS
          DEBUT_SI
            AFFICHER "... gagne"
            FIN_SI
          SINON
            DEBUT_SINON
              AFFICHER "... gagne"
              FIN SINON
            FIN_TANT_QUE
          FIN_ALGORITHME

```

La formule $\text{floor}(\text{random}() * 6 + 1)$ permet de simuler le lancer d'un dé : $\text{random}() * 6 + 1$ donne un nombre aléatoire dans l'intervalle $[1; 7[$, puis floor renvoie la partie entière de ce nombre.

- a. Que représentent les variables L et T ?
 - b. Compléter l'algorithme.
 - c. En faisant tourner cet algorithme plusieurs fois, êtes-vous conforté dans votre première impression ?
3. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il simule 200 courses et calcule la fréquence des victoires de la tortue. Qui semble gagner le plus souvent ?

▲ Penser à remettre les compteurs L et T à zéro à chaque partie.

4. Modélisation

- Quel est le nombre maximal de lancers de dé dans une partie ? On le note n .
- On suppose que l'on effectue, quoi qu'il arrive, ces n lancers, puis on applique la règle du jeu.

Déterminer la probabilité que la tortue gagne et comparer aux résultats des simulations.

15 OÙ L'ON TESTE L'INTERVALLE DE TEST

★★ 30 min ► p. 348

Une pièce truquée tombe sur Pile 4 fois sur 10.

Une partie consiste à lancer 20 fois cette pièce et à calculer la fréquence d'apparition de Pile sur ces 20 lancers. On gagne lorsque cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle $[0,2 ; 0,6]$.

On note X le nombre de Pile au cours des 20 lancers.

1. Déterminer la loi de X .

2. Simulation : on veut simuler 1 000 parties à l'aide du logiciel Algotbox, et comptabiliser le nombre de parties gagnées.

- La commande `random( )` renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, qui est donc dans l'intervalle $[0 ; 0,4[$, avec la probabilité 0,4, et dans l'intervalle $[0,4 ; 1]$ le reste du temps.

Que représentent les variables P et f de l'algorithme suivant ? À quoi sert la variable i ?

```

VARIABLES
P EST_DU_TYPE NOMBRE
f EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
P PREND_LA_VALEUR 0
POUR i ALLANT_DE 1 A 20
  DEBUT_POUR
    SI (random()<0.4) ALORS
      DEBUT_SI
        P PREND_LA_VALEUR P+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  f PREND_LA_VALEUR P/20
  SI (f<0.2 OU f>0.6) ALORS
    DEBUT_SI
      AFFICHER "Victoire"
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
      AFFICHER "Défaite"
    FIN_SINON
FIN_ALGORITHME

```

b. Compléter cet algorithme pour qu'il effectue 1 000 parties et donne le nombre de parties gagnées.

3. Conclusion : l'intervalle $[0,2 ; 0,6]$ est en fait l'intervalle de fluctuation à 95 % pour la loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0,4$. Après avoir fait tourné cet algorithme une dizaine de fois, peut-on considérer que la simulation précédente donne des résultats conformes à la définition de cet intervalle ?

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

16 BON DÉBARRAS !

★★★ 30 min ► P. 349

Une famille, dont les cinq enfants se prénomment Aline (4 ans), Benoit (6 ans), Cédrik (8 ans), Daphnée (10 ans) et Eric (12 ans), part en vacances pour deux semaines. Ils établissent une règle pour les tâches ménagères.

1. Chaque soir de la première semaine (de 7 jours), on tire au sort pour savoir qui débarrasse la table. Déterminer :

- a. le nombre moyen de jours où c'est un garçon qui risque de devoir débarrasser la table ;
- b. le nombre moyen de jours où c'est une fille qui risque de devoir débarrasser la table ;
- c. le nombre moyen de jours où c'est Cédrik qui risque de devoir débarrasser la table.

Comparer au résultat trouvé en a. et commenter.

d. la probabilité qu'une fille débarrasse la table pour la première fois le troisième jour ?

2. La semaine suivante, les règles ont changé : chaque soir, la probabilité qu'un enfant soit désigné sera proportionnelle à son âge.

a. Déterminer, pour un soir donné, ces probabilités notées dans l'ordre croissant des âges p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 .

On introduira le coefficient de proportionnalité k entre l'âge et la probabilité d'être désigné et on écrira que la somme des probabilités de toutes les issues est 1.

b. Quel est nombre moyen de jours où c'est un garçon qui risque de devoir débarrasser la table ? En déduire, des filles ou des garçons, qui est gagnant dans ce changement de règle ?

c. Cédrik crie au scandale, et Daphnée se réjouit : qu'en pensez-vous ?

17 ROUE LIBRE

★★★ 25 min ▶ P. 350

Une roue est formée de deux secteurs colorés : un bleu et un gris (voir dessin). On suppose que la probabilité que la roue s'arrête sur un secteur donné est proportionnelle à sa surface et que le secteur bleu occupe un quart de la roue.



1. Un jeu consiste à faire tourner la roue un nombre entier de fois, n , de façon indépendante.

Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité qu'elle s'arrête au moins une fois sur le secteur bleu soit supérieure ou égale à 0,99.

▲ On pourra s'inspirer de l'exercice 18 du chapitre 6.

2. On suppose dans cette question que $n = 10$.

Démontrer que la probabilité p_2 que la roue s'arrête exactement 2 fois sur le secteur bleu est d'environ $p_2 \approx 0,282$ à 10^{-3} près.

3. Pour vérifier le bon réglage de la roue, on répète 200 fois le jeu avec $n = 10$. Dans 45 de ces répétitions, la roue s'est arrêtée 2 fois sur le secteur bleu.

On donne un extrait de la table des probabilités cumulées $p(Y \leq k)$, où Y suit la loi binomiale de paramètres $N = 200$ et $p_2 = 0,282$:

k	$p(Y \leq k)$
43	0,02
44	0,028 5
45	0,041 1
46	0,06
...	...
66	0,942
67	0,957 6
68	0,969 6
69	0,978 6
70	0,985 3

Peut-on considérer que la roue est bien réglée au seuil de 5 % ? et au seuil de 10 % ? Commenter.

18 SIMULATIONS AVEC UN TABLEUR

★★★ 35 min ▶ P. 352

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,7$. On veut simuler cette variable aléatoire sur tableur un grand nombre de fois et comparer la répartition des fréquences obtenues par simulation, avec la loi de probabilité de X .

La commande =ENT(ALEA()+0,7) renvoie 1 avec probabilité 0,7 et 0 le reste du temps.

On commencera par saisir le nom Variable 1 dans la cellule A1 : cela servira de « compteur » de colonnes.

1. Dans la cellule A2, saisir la commande =ENT(ALEA()+0,7), et l'étendre jusqu'à la cellule A61 avec la poignée de recopie.

Dans la cellule A62, calculer la somme des valeurs obtenues dans les cellules A2 à A61 : justifier que cette somme permet de simuler la variable aléatoire X .

2. Étendre les cellules A1 à A62 jusqu'à la colonne GR afin de simuler 200 variables aléatoires suivant la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,7$. Dans la cellule GS62 calculer la moyenne des valeurs obtenues dans les cellules A62 à GR62 : quelle valeur approche-t-on ainsi ?

3. Dans la cellule A63, saisir la valeur 0 : quelle formule devez-vous saisir dans la cellule A64 pour comptabiliser, parmi les cellules A62 à GR62, le nombre de fois où la valeur de la cellule A63 est apparu ?



On veut pouvoir étendre cette formule vers la droite à l'aide de la poignée de recopie.

Par recopie vers la droite, le nom de cellule A63 (notation relative) deviendra B63, puis C63... tandis que \$A63 restera \$A63 (notation absolue).

4. Dans la cellule A65, calculer la fréquence de sortie de la valeur 0. Attention : on veut pouvoir étendre cette formule vers la droite à l'aide de la poignée de recopie.

5. Dans la cellule A66, saisir la formule =LOI.BINOMIALE(A63;60;0,7;0) qui donne $p(X = 0)$, puis sélectionner les cellules A63 à A66, et étendre jusqu'à la colonne BI. Quelles formules figurent dans les cellules BI64 à BI66 ?

6. Représenter, sur le même graphique, le diagramme en barre des fréquences obtenues pour les 200 simulations et la loi de probabilité de X .

7. Comment s'appelle le phénomène qui explique la différence entre la loi de X et le diagramme obtenu par simulation ?

19 DÉS TRUQUÉS ?

★★★ | 30 min | ► P. 353

C'est la fête de l'école et un jeu plaît beaucoup aux enfants : on lance deux dés et on gagne un bonbon si la somme des valeurs lues sur les dés est supérieure ou égale à 7, rien sinon. On se place sous l'hypothèse que les dés sont bien équilibrés.

1. Lubiana lance les dés : quelle est la probabilité qu'elle gagne un bonbon ?

2. Lubiana a un frère et une sœur, aussi veut-elle gagner trois bonbons (au moins). Elle lance les dés cinq fois d'affilée. Quelle est la probabilité qu'elle arrive à ses fins ?

3. Lubiana n'a gagné qu'un bonbon au cours de ses 5 lancers. Étonnée, car elle a fait les calculs de la question 2., et déçue (pour ses frère et sœur), elle accuse les dés d'être truqués, ce à quoi le maître répond : « C'est le hasard ! Tu n'as pas eu de chance. » Êtes-vous de cet avis ?

4. Pas convaincue par l'argument, Lubiana observe le jeu tout l'après-midi, et constate que sur 400 lancers, les enfants ont gagné seulement 202 fois. Elle réitère son accusation. Qu'en pensez-vous ?

On pourra utiliser la commande = CRITERE.LOI.BINOMIALE.

20 RÉPÉTITIONS

★★★ 15 min ► p. 354

- On lance une pièce de monnaie non truquée 10 fois successivement. On gagne si on obtient un nombre pair de PILE. Quelle est la probabilité de gagner ?
- On répète n fois ce jeu de façon indépendante.
À l'aide du tableur, trouver la plus petite valeur n pour laquelle l'amplitude de l'intervalle de fluctuation théorique au seuil de 90 % est strictement inférieure à 0,1.

Faire un tableau de valeurs en fonction de n de l'amplitude de l'intervalle de fluctuation théorique en utilisant la commande = CRITERE.LOI.BINOMIALE. Voir savoir-faire 3 et exercice 8.

21 CONSÉQUENCE DU THÉOREME DE DE MOIVRE-LAPLACE

★★★★ 30 min ► p. 355

Une urne contient une proportion p de boules rouges. On prélève successivement n boules, avec remise dans cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

- Justifier que la variable aléatoire S_n correspondant au nombre de boules rouges obtenues (nombre de « succès ») sur cet échantillon de taille n suit la loi **binomiale** de paramètres n et p .
 - En déduire son espérance et sa variance en fonction de n et p .
- La fréquence des boules rouges dans l'échantillon de taille n est la variable aléatoire définie par :

$$F_n = \frac{S_n}{n}.$$

Déterminer l'espérance de F_n et sa variance en fonction de n et p .

- On admet ici la propriété suivante : Si n est supérieur ou égal à 30, np et $n(1-p)$ supérieurs ou égaux à 5, alors :

$$p\left(F_n \in \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]\right) \approx 0,95,$$

c'est-à-dire qu'environ 95 % des échantillons aléatoires de taille n fournissent une fréquence appartenant à l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

À l'aide d'une étude de la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x(1-x)$, retrouver la propriété moins précise suivante, vue en classe de seconde : si $n \geq 30$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$, alors dans plus de 95 % des cas, la fréquence f observée sur cet

échantillon appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

Commencer par démontrer que f est positive et admet un maximum égal à $\frac{1}{4}$,

atteint pour $x = \frac{1}{2}$. En déduire une majoration de $1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ en fonction de $\sqrt{n}$, puis l'inclusion des intervalles donnés. Conclure après avoir vérifié la validité des conditions de l'hypothèse.

CONTRÔLE

22 À LA MANIÈRE D'UNE ROC

★★ 20 min ▶ P. 357

1. On rappelle que $\binom{n}{k}$ est égale au nombre de chemins amenant à k succès parmi n répétitions d'une épreuve de Bernoulli.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

a. Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

b. Pour tout entier k compris entre 0 et n , $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

2. On donne $\binom{15}{3} = 455$ et $\binom{16}{3} = 560$.

Déterminer sans calculatrice, et en justifiant :

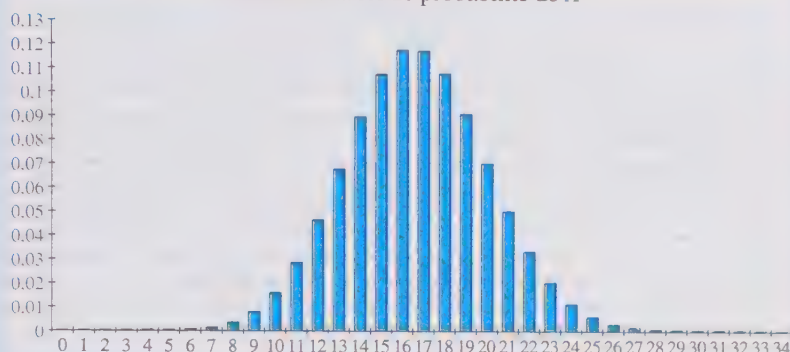
a. $\binom{15}{12}$, b. $\binom{15}{2}$.

23 SATISFACTION

★ 20 min ▶ P. 358

Un député affirme que 52 % des électeurs lui font confiance.

1. On fait l'hypothèse que ce député dit vrai, c'est-à-dire que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est $p = 0,52$. Montrer que la variable aléatoire X , correspondant au nombre d'électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 100 électeurs pris au hasard, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

Extrait de la loi de probabilité de X 

- Déterminer graphiquement $p(X = 10)$, puis donner sa valeur exacte.
- Vérifier que $p(X \leq 10) < 0,05$.
- Que pouvez-vous répondre à Pierre, au risque de 10 % ?

25 QCM

★★★ 25 min ► P. 359

Pour chaque question, une seule des propositions est juste.

une bonne réponse donne deux points, l'absence de réponse, 0 point, une mauvaise réponse enlève un point.

En cas de total négatif, la note sera ramenée à zéro.

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 blanches, 3 vertes, 3 rouges.

Pour pouvoir tirer une boule de l'urne, un joueur doit miser 3 euros.

S'il tire une boule blanche, il reçoit 6 euros ; s'il tire une boule verte, il ne reçoit rien ; s'il tire une boule rouge, il reçoit 2 euros.

1. Le jeu est :

- a. favorable au joueur ; b. défavorable au joueur ; c. équitable.

2. Le joueur joue 4 parties successives (supposées indépendantes).

La probabilité qu'il tire au moins une boule blanche est :

- a. $\frac{216}{625}$; b. $\frac{544}{625}$; c. $\frac{2}{5}$.

3. Le joueur joue une cinquième partie. La probabilité qu'il ait tiré exactement deux boules rouges est :

- a. 0,3 087 ; b. 0,3 456 ; c. 0,4.

4. Un élève répond au hasard à ce QCM en entourant une réponse pour chacune des quatre questions indépendamment des autres. Quelle note peut-il espérer obtenir ?

- a. $\frac{32}{27}$; b. $\frac{4}{3}$; c. 0.

CORRIGÉS

1 1. Il y a trois couleurs possibles, donc on ne peut pas se ramener à un modèle ne comptant que deux issues : **il ne s'agit pas d'une épreuve de Bernoulli.**

2. On a bien deux issues : S « le dé est rouge » et P « le dé est d'une autre couleur », $P = \bar{S}$. Le choix du dé se faisant de façon équiprobable, la probabilité du succès S est :

$$p(S) = \frac{\text{nombre de dés rouges}}{\text{nombre de dés}} = \frac{1}{3}.$$

On peut donc modéliser l'expérience par une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

Le gain X correspondant est une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

x_i	+2	-1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

3. Les différentes sommes possibles sont tous les entiers compris entre $1 + 1 + 1 = 3$ et $6 + 6 + 6 = 18$. Il y a donc 16 issues à distinguer.

On ne peut pas utiliser un modèle de Bernoulli.

4. Il y a $6 \times 6 \times 6 = 216$ produits équiprobables (distincts ou non), mais on ne s'intéresse qu'au succès S « le produit est égal à 4 ». On peut donc se limiter aux deux issues S et $\bar{S}$.

Les différents produits réalisant S sont $1 \times 1 \times 4$; $1 \times 4 \times 1$; $4 \times 1 \times 1$; $1 \times 2 \times 2$; $2 \times 1 \times 2$; $2 \times 2 \times 1$. Il y en a donc 6.

On en déduit qu'il s'agit bien d'une épreuve de Bernoulli de paramètre :

$$p = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

5. Il y a trois issues à distinguer : **on ne peut pas se ramener à une épreuve de Bernoulli.**

2 1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,4$ donc :
 $E(X) = n \times p = 5 \times 0,4$ soit $E(X) = 2$.

$V(X) = np(1-p) = 5 \times 0,4 \times (1-0,4) = 1,2$ soit $V(X) = 1,2$.

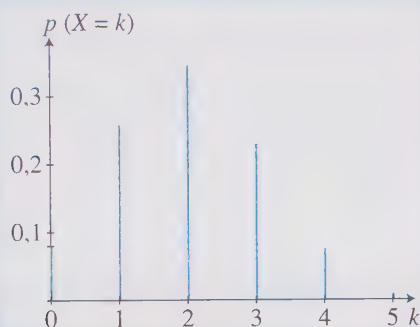
2. La loi de X est donnée, pour tout entier k compris entre 0 et 5, par :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$p(X = k) = \binom{5}{k} \times 0,4^k \times 0,6^{5-k}.$$

k	0	1	2
$\binom{5}{k}$	1	5	10
$p(X=k)$	$0,6^5 \approx 0,078$	$5 \times 0,4 \times 0,6^4 \approx 0,259$	$10 \times 0,4^2 \times 0,6^3 \approx 0,346$

k	3	4	5
$\binom{5}{k}$	10	5	1
$p(X=k)$	$10 \times 0,4^3 \times 0,6^2 \approx 0,23$	$5 \times 0,4^4 \times 0,6 \approx 0,077$	$0,4^5 \approx 0,01$



3 1.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On lit $\binom{6}{4} = 15$.2. L'espérance de X est : $E(X) = n \times p = 6 \times \frac{1}{2} = 3$.D'autre part, par définition : $E(X) = \sum_{k=0}^6 k \times p(X=k)$, où :

$$\begin{aligned}
 p(X=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} \\
 &= \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+6-k} = \binom{6}{k} \times \frac{1}{2^6}.
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$0 \times \binom{6}{0} \times \frac{1}{2^6} + 1 \times \binom{6}{1} \times \frac{1}{2^6} + 2 \times \binom{6}{2} \times \frac{1}{2^6} + 3 \times \binom{6}{3} \times \frac{1}{2^6} + 4 \times \binom{6}{4} \times \frac{1}{2^6} + 5 \times \binom{6}{5} \times \frac{1}{2^6} + 6 \times \binom{6}{6} \times \frac{1}{2^6} = 3.$$

Donc, en multipliant les deux membres par 2^6 :

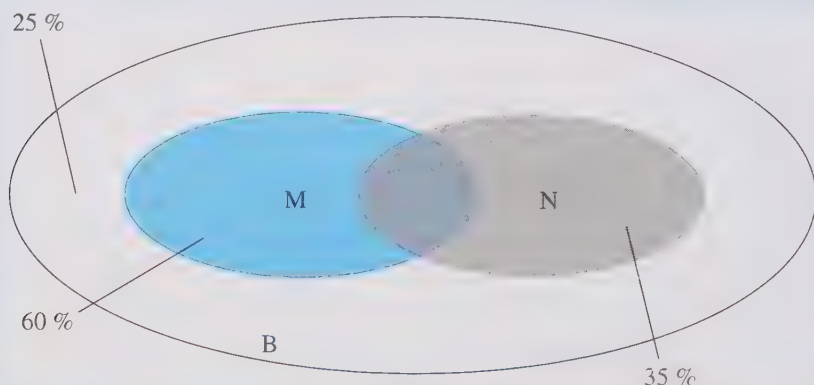
$$1 \times \binom{6}{1} + 2 \times \binom{6}{2} + 3 \times \binom{6}{3} + 4 \times \binom{6}{4} + 5 \times \binom{6}{5} + 6 \times \binom{6}{6} = 3 \times 2^6.$$

La lecture du triangle de Pascal donne bien :

$$1 \times 6 + 2 \times 15 + 3 \times 20 + 4 \times 15 + 5 \times 6 + 6 \times 1 = 192 = 3 \times 2^6.$$

4 1. Lorsqu'on désigne une vache, notons S l'événement « la vache a des taches noires et des marron ». Le choix d'une vache de l'exploitation peut donc être assimilé à une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = p(S)$.

Considérons alors les événements B « la vache est blanche », M « la vache a des taches marron » et N « la vache a des taches noires ».



$B = \overline{M \cup N}$, donc $p(M \cup N) = 1 - p(B)$.

De plus $p(M \cap N) + p(M \cup N) = p(M) + p(N)$.

Les vaches étant désignées de façon équiprobable :

$$p(B) = \frac{25}{100} = 0,25, \quad p(M) = \frac{60}{100} = 0,6; \quad p(N) = \frac{35}{100} = 0,35.$$

Alors $p(M \cup N) = 1 - 0,25 = 0,75$, et $p(M \cap N) + 0,75 = 0,6 + 0,35$, soit :

$$p(M \cap N) = 0,95 - 0,75 = 0,20.$$

Or $S = M \cap N$, donc $p = 0,20$.

En répétant 10 fois de manière indépendante cette épreuve de Bernoulli, on obtient un schéma de Bernoulli ; X correspond alors au nombre de succès de ce schéma, donc X suit une loi binominale de paramètres $n = 10$, $p = 0,2$.

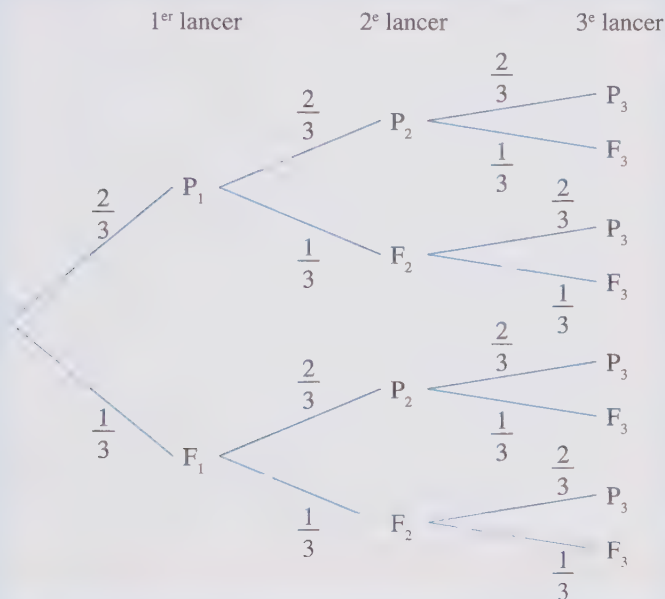
$$2. p(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,2^3 \times (1 - 0,2)^{10-3} = 120 \times 0,2^3 \times 0,8^7$$

$$p(X = 3) \approx 0,201.$$

5 1. a. À chaque lancer, la pièce tombe sur pile avec probabilité p et sur face avec probabilité q . Ainsi $p + q = 1$ et par hypothèse $p = 2q$, donc :

$$q + 2q = 1 \Leftrightarrow 3q = 1 \Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \text{ (donc } p = \frac{2}{3}\text{)}.$$

On en déduit l'arbre pondéré suivant :



b. Les lancers ayant lieu de façon indépendante, on peut multiplier les probabilités le long des branches de cet arbre. Ainsi :

$$p(X = 0) = p(F_1 F_2 F_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

$$\begin{aligned} p(X = 1) &= p(P_1 F_2 F_3) + p(F_1 P_2 F_3) + p(F_1 F_2 P_3) \\ &= 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(X = 2) &= p(P_1 P_2 F_3) + p(P_1 F_2 P_3) + p(F_1 P_2 P_3) \\ &= 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$p(X = 3) = p(P_1 P_2 P_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

L'espérance de X est donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{27} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{8}{27} = \frac{2+8+8}{9} = \frac{18}{9} \\ &= 2. \end{aligned}$$

2. Chaque lancer n'a que deux issues : pile ou face. Il s'agit d'une **épreuve de Bernoulli**, dont on considère ici que le succès est d'obtenir pile.

Donc son paramètre est $p = \frac{2}{3}$.

L'expérience consiste à répéter trois fois la même épreuve de Bernoulli, de façon indépendante. X désigne le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli, donc X suit

une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

On en déduit la variance de X :

$$V(X) = np(1-p) = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$V(X) = \frac{2}{3}.$$

On peut vérifier les réponses données à la question. 1. **b.**, puisque pour tout entier k compris entre 0 et 3 :

$$p(X=k) = \binom{3}{k} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k} \quad \text{et} \quad E(X) = np.$$

3. On répète 4 fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{3}$ de façon indépendante. Si on note encore X le nombre de succès au cours de ces 4 lancers, X suit cette fois une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{2}{3}$.

$$\text{Ainsi } p(X=2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \times \frac{4}{3^4} = \frac{8}{27}.$$

6 La population d'un bassin d'emploi est suffisamment grande pour que choisir 100 individus puisse être assimilé à des tirages indépendants avec remise. Ainsi, si on choisit au hasard ces 100 individus dans un bassin où la probabilité d'être une femme est $p = 0,5$, on peut assimiler le nombre de femmes à une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètres $n = 100$ et $p = 0,5$. Dans 95 % des cas, la fréquence des femmes dans un échantillon de taille 100 doit être dans l'intervalle $[0,4 ; 0,6]$ d'après l'énoncé.

Or la fréquence observée pour l'entreprise A est $f_A = \frac{43}{100} = 0,43$.

$$0,43 \in [0,4 ; 0,6].$$

Donc on ne rejette pas l'hypothèse de respect de la parité au seuil de 5 %.

De même, lorsqu'on choisit au hasard 1 000 individus, la fréquence de femmes appartient, dans 95 % des cas, à l'intervalle $[0,469 ; 0,531]$.

Or la fréquence observée dans l'entreprise B est $f_B = \frac{460}{1\,000} = 0,46$;

$$\text{et } 0,46 \notin [0,469 ; 0,531].$$

Donc on rejette, au risque de 5 %, l'hypothèse selon laquelle l'entreprise B respecte la parité.

7 1. Dans la population du pays, il y a $28 + 17 = 45$ % d'individus de moins de 1 m 60. Pour un tirage donné, s'il s'effectue au hasard, il y a équiprobabilité des choix de gagnant parmi la population du pays, donc la probabilité que le gagnant mesure moins de 1 m 60 est $p = \frac{45}{100} = 0,45$. En parlant de succès lorsque le gagnant mesure moins de 1 m 60, un tirage constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,45$.

Lorsqu'on répète 40 fois cette même épreuve de Bernoulli de façon indépendante, le nombre X de gagnants, c'est-à-dire de succès au cours des $n = 40$ tirages, **suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,45$.**

2. L'intervalle de fluctuation à 95 % par cette expérience aléatoire est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, où $n = 40$, a est le plus petit entier tel que $p(X \leq a) > 0,025$, donc $a = 12$, et b le plus petit entier tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$, donc $b = 24$.

C'est donc l'intervalle $\left[\frac{12}{40}; \frac{24}{40}\right]$.

Sur l'échantillon de 40 gagnants, la fréquence observée d'individus de moins de 1 m 60 est $f = \frac{7+7}{40} = \frac{14}{40}$.

$f \in \left[\frac{12}{40}; \frac{24}{40}\right]$, donc **on ne rejette pas, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la désignation des vainqueurs s'est faite au hasard.**

3. a. Dans la population totale du pays, il y a $28 + 33 = 61$ % d'individus de moins de 30 ans. Par le même raisonnement qu'au 1., si on choisit 40 individus au hasard dans la population, le nombre Y de vainqueurs de moins de 30 ans suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$, $p' = 0,61$. Sur tableur, si on saisit la valeur 0 dans la cellule A1 et =LOI.BINOMIALE(A1;40;0,61;1) dans la cellule B1, et qu'on étend ces formules jusqu'à la ligne 41, **la cellule A41 contient le nombre 40 et la cellule B41 contient 1**, résultat de l'instruction =LOI.BINOMIALE(A41;40;0,61;1).

b. On obtient le tableau des probabilités cumulées $p(Y \leq k)$:

k	$p(Y \leq k)$
⋮	⋮
17	0,014
18	0,029
⋮	⋮
29	0,954
30	0,979

On en déduit l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ de fluctuation à 95 % ; avec $a = 18$, $b = 30$,

$$n = 40, \text{ soit } \left[\frac{18}{40}; \frac{30}{40}\right].$$

c. La fréquence observée de vainqueurs de moins de 30 ans est $f' = \frac{7+10}{40} = \frac{17}{40}$.

Or $f' \notin \left[\frac{18}{40}; \frac{30}{40}\right]$, donc ici, **on aurait rejeté l'hypothèse selon laquelle la désignation des vainqueurs s'est faite au hasard au risque de 5 %.**

On voit ici deux conclusions différentes pour un même problème de désignation au hasard. Ce n'est pas choquant : on a utilisé des points de comparaison « à la normalité » différents ; la taille dans un cas, l'âge dans un autre cas.

8 1. Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,2$, l'intervalle de fluctuation à 95 % est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, où a et b sont les plus petits entiers tels que $p(X \leq a) > 0,025$ et $p(X \leq b) \geq 0,975$. Dans la cellule A1, par exemple, la commande = CRITERE.LOI.BINOMIALE(30;0,2;0,025) renvoie la valeur 2.

Dans la cellule A2, la commande = CRITERE.LOI.BINOMIALE(30;0,2;0,975) renvoie la valeur 11.

L'intervalle est donc $\left[\frac{2}{30}; \frac{11}{30}\right]$.

2. Si l'usine respecte son quota de production, lorsqu'on prélève au hasard une dragée, la probabilité qu'elle contienne une amande (succès) est $p = \frac{20}{100} = 0,2$: il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$. Le nombre de dragées produites est si grand que le prélèvement de 30 dragées au hasard peut s'assimiler à des tirages avec remise indépendants.

Le nombre X de dragées à l'amande dans un échantillon de 30 dragées est égal au nombre de succès obtenus au cours de $n = 30$ répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$. X suit donc une loi binomiale de para-

mètres $n = 30$ et $p = 0,2$: l'intervalle de fluctuation théorique à 95 % est $\left[\frac{2}{30}; \frac{11}{30}\right]$ sur l'échantillon observé.

La fréquence des dragées à l'amande est $f = \frac{8}{30}$.

Or $\frac{8}{30} \in \left[\frac{2}{30}; \frac{11}{30}\right]$, donc on ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proposition de dragées à l'amande est de 20 % : **le contrôle est concluant.**

9 1. a. Dans la cellule A1, on saisit 0.

Dans la cellule B1, on saisit la commande =LOI.BINOMIALE(A1;500;0,76;1). On sélectionne A1 et B1, et on étend avec la poignée de recopie jusqu'à la ligne 500 : la cellule A501 contient la valeur 500 et la cellule B501 contient la valeur 1 (=LOI.BINOMIALE(A501;500;0,76;1)).

b. L'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence $\frac{X}{n}$, où X suit une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,76$, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ où a et b sont les plus petits entiers tels que $p(X \leq a) > 0,025$ et $p(X \leq b) \geq 0,975$.

On obtient :

	A	B
...	...	...
361	360	0,021 9
362	361	0,027 8
...	...	...
398	397	0,968 3
399	398	0,975 2

Donc $a = 361$ et $b = 398$, d'où l'intervalle de fluctuation :

$$I = \left[\frac{361}{500}; \frac{398}{500}\right]$$

$$I = [0,722; 0,796].$$

2. Si le nouveau café n'influence pas le choix des professeurs, lorsque l'un deux prend une boisson, il choisit un café (succès) avec probabilité $p = 0,76$. Cela constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,76$.

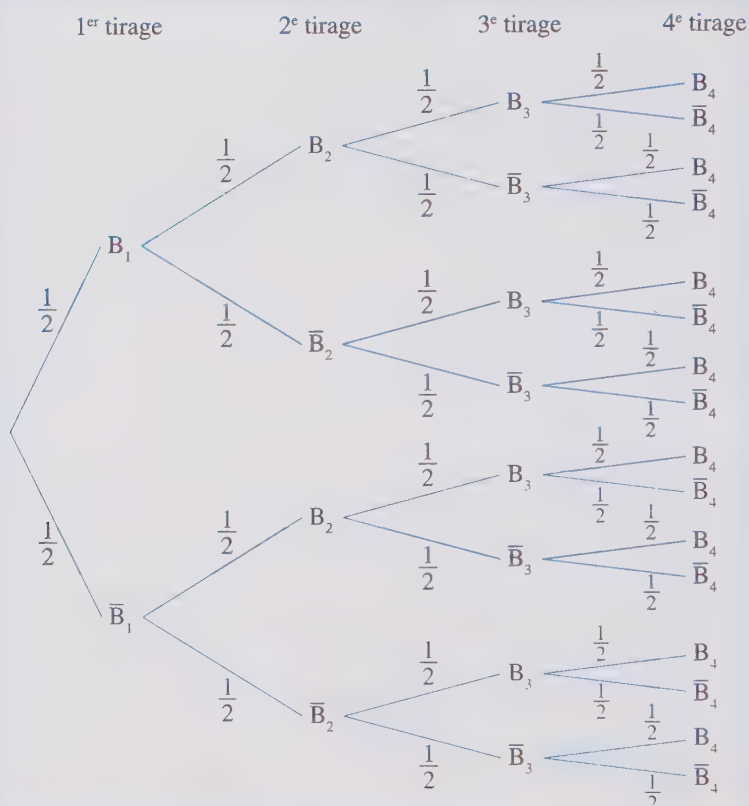
En considérant que les 500 boissons commandées le sont de façon indépendante, le nombre X de cafés commandés suit une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,76$.

Pour l'échantillon de 500 boissons observées, la première semaine de 2011, la fréquence des cafés est de $f = \frac{70}{100} = 0,70$, qui n'est pas dans l'intervalle de fluctuation à 95 %, donc on doit rejeter, en risque de 5 %, l'hypothèse selon laquelle le choix du café est indépendant de la nouvelle marque.

La nouvelle marque de café doit être mise en cause.

10 1. a. Pour chaque tirage, les choix des boules sont équiprobables, donc la probabilité d'obtenir une des 5 boules blanches parmi les 10 boules de l'urne est de $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

On en déduit l'arbre page suivante.



On en déduit :

$$p(X=3) = p(B_1 B_2 B_3 \bar{B}_4) + p(B_1 B_2 \bar{B}_3 B_4) + p(B_1 \bar{B}_2 B_3 B_4) + p(\bar{B}_1 B_2 B_3 B_4)$$

$$p(X=3) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$p(X=3) = \frac{1}{4}.$$

b. On répète quatre fois, de manière indépendante, la même expérience pour laquelle on a deux issues : le succès, qui consiste à obtenir une boule blanche, de probabilité $p = \frac{1}{2}$, et l'échec, son événement contraire. Il s'agit donc bien d'une épreuve de Bernoulli.

c. X désigne le nombre de boules blanches obtenues au cours des $n = 4$ tirages, donc le nombre de succès de schéma de Bernoulli X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$.

$$\text{On a donc } p(X=3) = \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

$$p(X=3) = \frac{1}{4}.$$

$$E(X) = np = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ et } V(X) = np(1-p) = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1.$$

$$E(X) = 2 \text{ et } V(X) = 1.$$

2. De la même manière, si lorsqu'on tire une boule de l'urne, on appelle succès « obtenir une boule rouge », sa probabilité est $p = \frac{3}{5+3+2} = \frac{3}{10}$, et Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{3}{10}$.

On en déduit la loi de Y à l'aide de la formule :

$$p(Y = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{4-k}$$

pour k entier compris entre 0 et 4.

k	0	1	2
$p(Y = k)$	$\left(\frac{7}{10}\right)^4 = 0,2401$	$4 \times \frac{3}{10} \times \left(\frac{7}{10}\right)^3 = 0,4116$	$6 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2 = 0,2646$
k	3	4	
$p(Y = k)$	$4 \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right) = 0,0756$	$\left(\frac{3}{10}\right)^4 = 0,0081$	

3. De même, Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{2}{5+3+2} = \frac{1}{5}$ donc :

$$\begin{aligned} p(Z \geq 3) &= p(Z = 3) + p(Z = 4) \\ &= \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 + \binom{4}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^0 \\ &= 4 \times \frac{1}{5^3} \times \frac{4}{5} + 1 \times \frac{1}{5^4} = \frac{17}{5^4} \\ p(Z \geq 3) &= \frac{17}{625}. \end{aligned}$$

11 Sous l'hypothèse que la désignation des jurés s'effectue au hasard, il y a équi-probabilité des choix des individus dans la population dont 79,1 % sont d'origine mexicaine.

Si on appelle succès la désignation d'un juré est d'origine mexicaine, la désignation d'un juré constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{79,1}{100} = 0,791$. La population du comté est suffisamment grande pour que désigner 870 jurés au hasard puisse s'assimiler à 870 « tirages avec remise, c'est-à-dire à 870 répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,791$. Le nombre X de jurés d'origine mexicaine, c'est-à-dire de succès dans ce schéma de Bernoulli, suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 870$ et $p = 0,791$.

L'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence $\frac{X}{870}$ est alors $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ avec $n = 870$, a est le plus petit entier tel que $p(X \geq a) > 0,025$ et b le plus petit entier tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$.

Avec le tableur, la commande = CRITERE.LOI.BINOMIALE(870;0,791;0,025) donne $a = 664$;

la commande = CRITERE.LOI.BINOMIALE(870;0,791;0,975) donne $b = 711$.

D'où l'intervalle $\left[\frac{664}{870}; \frac{711}{870}\right]$.

La fréquence de jurés observée dans le procès est $f = \frac{339}{870}$ donc $f \notin \left[\frac{664}{870}; \frac{711}{870}\right]$:

la proportion p d'individus d'origine mexicaine ne peut être remise en cause, **on rejette l'hypothèse selon laquelle la désignation du jury s'est faite au hasard au risque de 5 %**.

▲ L'hypothèse serait même rejetée à des seuils bien plus faibles [utiliser le tableau] du fait de la très forte sous-représentation des jurés d'origine mexicaine.

12 1. On suppose le nombre de professeurs disponibles suffisamment grand pour qu'en choisir 405 puisse être assimilé à des tirages indépendants avec remise. Sous l'hypothèse que le choix des professeurs du réseau d'établissements se fait au hasard dans une population dont la proportion d'enseignants noirs est $p = \frac{15,4}{100} = 0,154$, et si on appelle succès la désignation d'un enseignant noir, le choix d'un enseignant constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,154$. Le nombre X d'enseignants noirs suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 405$ et $p = 0,154$.

L'intervalle de fluctuation à 95 % correspondant est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ avec $n = 405$, a le plus petit entier tel que $p(X \leq a) > 0,025$ et b le plus petit entier tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$. Avec le tableau, dans la cellule A1, on saisit 0, dans la cellule B1, on saisit = LOI.BINOMIALE(A1;405;0,154;1), puis on sélectionne les cellules A1 et B1, qu'on étend jusqu'à la ligne 406 avec la poignée de recopie : on obtient le tableau des probabilités cumulées $p(X \leq k)$ pour k entier variant de 0 à 405. Voici l'extrait permettant de trouver a et b :

k	$p(X \leq k)$
...	...
47	0,017 6
48	0,025 2
...	...
76	0,972
77	0,979

Ainsi $a = 48$ et $b = 77$, d'où l'intervalle $\left[\frac{48}{405}; \frac{77}{405}\right]$.

La fréquence $f = \frac{15}{405}$ réellement observée au sein du réseau n'appartient pas à cet intervalle (elle est très en dessous), donc on rejette l'hypothèse que le recrutement a eu lieu sans discrimination en risque de 5 % : **on a sous-recruté au sein de la population noire.**

2. En reprenant le même raisonnement avec $p' = \frac{5,7}{100} = 0,057$, la simulation obtenue dans la colonne C, en étendant la formule =LOI.BINOMIALE(A1;405;0,057;1) saisie en C1, on obtient $a' = 14$ et $b' = 31$, d'où l'intervalle de fluctuation à 95 % $\left[\frac{14}{405}; \frac{31}{405}\right]$.

Comme la fréquence observée est $f = \frac{15}{405}$, celle-ci appartient à l'intervalle $\left[\frac{14}{405}; \frac{31}{405}\right]$, donc **on ne peut pas condamner le réseau d'établissements d'Hazelwood au seuil de 5 %.**

13 1. a. La proportion d'écrans défectueux est $f = \frac{15}{40} = 0,375$, soit **37,5 %** !

b. Dans la cellule A1, on saisit 0 ; dans la cellule B1, on saisit :
=LOI.BINOMIALE(A1;40;0,23;1).

On étend les cellules A1 et B1 jusqu'à la ligne 41 : on obtient la valeur 40 dans la cellule A41 et la valeur 1 dans la cellule B41 (qui contient =LOI.BINOMIALE(A41;40;0,23;1)). L'intervalle de fluctuation à 90 % de la fréquence $\frac{X}{n}$ est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ avec $n = 40$, a et b les plus petits entiers tels que $p(X \leq a) > 0,05$ et $p(X \leq b) > 0,95$.

On donne l'extrait du tableau des probabilités cumulées $p(X \leq k)$ qui permet de trouver a et b .

k	$p(X \leq k)$
4	0,031
5	0,076
$\vdots$	$\vdots$
13	0,942
14	0,972

On en déduit $a = 5$ et $b = 14$, d'où l'intervalle de fluctuation à 90 %, $\left[\frac{5}{40}; \frac{14}{40}\right]$.

c. Sous l'hypothèse que la proportion d'écran défectueux est de 23 %, si on appelle succès le fait que l'écran soit défectueux, tester un écran au hasard constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{23}{100} = 0,23$.

Le nombre d'écrans produits est suffisamment grand pour que contrôler 40 écrans au hasard puisse être assimilé à 40 tirages indépendants avec remise. Le nombre X d'écrans défectueux (de succès dans ce schéma de Bernoulli) suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,23$. La fréquence obtenue sur notre lot d'écrans est $f = \frac{14}{40}$ (soit 35 %).

Or $\frac{14}{40} \in \left[\frac{5}{40}; \frac{14}{40} \right]$, donc on accepte au seuil de 10 % l'hypothèse selon laquelle la proportion d'écrans défectueux dans la production totale est bien $p = 0,23$: **le contrôle ne signale rien d'anormal.**

2. On procède comme au 1. Dans la cellule A1, on saisit 0, dans la cellule B1, on saisit =LOI.BINOMIALE(A1;400;0,23;1), et on étend les deux cellules jusqu'à la ligne 401.

Si Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,23$, l'intervalle de fluctuation à 90 % de $\frac{Y}{n}$ est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$ avec $n = 400$, a et b les plus petits entiers tels que $p(Y \leq a) > 0,05$ et $p(Y \leq b) \geq 0,95$.

Le tableau donne, à 10^{-3} près, $p(Y \leq 77) \approx 0,040$, $p(Y \leq 78) \approx 0,052$, donc $a = 78$ et $p(Y \leq 105) \approx 0,944$, $p(Y \leq 106) \approx 0,956$, donc $b = 106$. D'où l'intervalle $\left[\frac{78}{400}; \frac{106}{400} \right]$.

La fréquence observée est $f = \frac{28}{100} = \frac{112}{400}$.

Or $f \notin \left[\frac{78}{400}; \frac{106}{400} \right]$, donc on rejette l'hypothèse, au risque de 10 %, selon laquelle la proportion d'écrans défectueux dans la production globale est de 23 % : **le contrôle signale une anomalie au risque 10 %.**

14 1. On peut se dire qu'à chaque lancer du dé, la tortue a 5 fois plus de chances d'avancer que le lièvre... ou qu'un dé n'a que 6 faces, donc obtenir 6 a de fortes chances d'arriver au moins une fois en 6 coups... Je parierais plutôt sur le lièvre (mais je connais mes classiques, donc méfiance...)

2. a. L et T représentent respectivement les numéros de cases du lièvre et de la tortue.

b. À la ligne 6 : TANT_QUE (L < 6 et T < 6) FAIRE. On lance le dé tant que personne n'est arrivé dans la case 6.

À la ligne 11 : L PREND_LA_VALEUR 6. Si le dé tombe sur 6, le lièvre saute dans la case 6.

À la ligne 15 : T PREND_LA_VALEUR T + 1. Sinon, la tortue avance d'une case.

À la ligne 20 : AFFICHER « La **tortue** gagne ». La tortue est arrivée à la case 6.

À la ligne 24 : AFFICHER « Le **lièvre** gagne ». Le lièvre est arrivé à la case 6.

c. Sur une vingtaine de parties, **le lièvre** a gagné 12 fois. Cela conforte ma première idée. Et chez vous ?

3. L'algorithme devient :

```

VARIABLES
x EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
L EST_DU_TYPE NOMBRE
T EST_DU_TYPE NOMBRE
V EST_DU_TYPE NOMBRE
f EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
V PREND_LA_VALEUR 0
POUR N ALLANT_DE 1 A 200
    DEBUT_POUR
    T PREND_LA_VALEUR 0
    L PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE (L<6 ET T<6) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        x PREND_LA_VALEUR floor(random()*6+1)
        SI (x==6) ALORS
            DEBUT_SI
            L PREND_LA_VALEUR 6
            FIN_SI
        SINON
            DEBUT_SINON
            T PREND_LA_VALEUR T+1
            FIN_SINON
        FIN_TANT_QUE
    SI (T==6) ALORS
        DEBUT_SI
        V PREND_LA_VALEUR V+1
        FIN_SI
    FIN_POUR
    f PREND_LA_VALEUR V/200
    AFFICHER "La fréquence de victoires de la tortue est"
    AFFICHER f
FIN_ALGORITHME

```

On observe que la fréquence de victoires de la tortue est généralement comprise entre 0,28 et 0,38. En tous cas, systématiquement inférieure à 0,5 : **c'est le lièvre qui semble gagner le plus souvent.**

4. a. Si le 6 n'est pas sorti en 6 lancers, la tortue gagne, sinon, le lièvre a déjà gagné. **Le nombre maximal de lancers possibles est $n = 6$.**

b. Le dé est bien équilibré, aussi ses faces sont-elles équiprobables. Chaque lancer, si on appelle succès le fait que la tortue avance d'une case, c'est-à-dire que le dé tombe sur 1, 2, 3, 4 ou 5, constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{5}{6}$. Puisqu'on répète 6 fois la même épreuve de Bernoulli de manière indépendante, le nombre X de succès dans ce schéma de Bernoulli suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{5}{6}$.

La tortue gagne si, et seulement si, $X = 6$.

$$\text{Or } p(X=6) = p^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15\,625}{46\,656} \approx 0,335 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Cela conforte l'idée que le lièvre gagne, en moyenne, plus souvent que la tortue.

15 1. Chaque lancer, si on appelle succès le fait que la pièce tombe sur Pile, constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{4}{10} = 0,4$. Puisqu'on répète 20 fois la même épreuve de Bernoulli de manière indépendante, X le nombre de Pile, c'est-à-dire de succès dans ce schéma de Bernoulli, **suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,4$.**

2. a. La variable **P** représente le nombre de succès (Pile) à mesure que la partie se déroule. **F** représente la fréquence de succès au bout des 20 lancers. **i** sert à numérotter les lancers (permet d'incrémenter la boucle POUR).

b. On obtient l'algorithme suivant :

```

VARIABLES
P EST_DU_TYPE NOMBRE
f EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
V EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME
V PREND_LA_VALEUR 0
POUR N ALLANT_DE 1 A 1000
  DEBUT_POUR
  P PREND_LA_VALEUR 0
  f PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A 20
    DEBUT_POUR
    SI (random() < 0.4) ALORS
      DEBUT_SI
      P PREND_LA_VALEUR P+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  f PREND_LA_VALEUR P/20
  SI (f < 0.2 OU f > 0.6) ALORS
    DEBUT_SI
    V PREND_LA_VALEUR V+1
    FIN_SI
  FIN_POUR
  AFFICHER "Le nombre de victoires est:"
  AFFICHER V
FIN_ALGORITHME

```

3. En 10 simulations, le nombre de parties gagnées varie (chez moi) entre 26 et 47. Ainsi, au plus 47 parties sur 1 000, soit 4,7 % des parties donnent une fréquence hors de l'intervalle de fluctuation à 95 %. On vérifie bien ici que **moins de 5 % des variables aléatoires suivant la loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0,4$ ont une fréquence à l'extérieur de l'intervalle de fluctuation à 95 %.**

16 1. a. Chaque jour, si on décide d'appeler succès l'événement « un garçon est désigné », et échec « une fille est désignée », le choix de l'enfant qui débarrasse la table peut être modélisé par une épreuve de Bernoulli de paramètre p , la probabilité qu'un garçon soit désigné. Le choix se faisant de façon équiprobable, $p = \frac{3}{5}$ (il y a 3 garçons parmi 5 enfants).

La répétition de cette même épreuve de Bernoulli, pendant 7 jours, de façon indépendante, constitue un schéma de Bernoulli, et si X désigne le nombre de jours où un garçon est désigné, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{3}{5}$.

Son espérance est $E(X) = np = 7 \times \frac{3}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$.

Ainsi, le nombre moyen de jours où c'est un garçon qui risque de débarrasser la table est 4,2.

b. Si Y désigne le nombre de jours où une fille est désignée, $X + Y = 7$. Donc $E(X + Y) = E(7) = 7$

Ainsi $E(X) + E(Y) = 7$ par linéarité de l'espérance, soit $E(Y) = 7 - E(X) = 7 - 4,2 = 2,8$.

Le nombre moyen de jours où c'est une fille qui risque de débarrasser la table est 2,8.

▲ Ce calcul justifie ce que le bon sens prévoyait : les jours où les garçons ne débarrassent pas, c'est aux filles de débarrasser.

c. Chaque jour, on peut appeler succès l'événement « Cédrik débarrasse la table » et échec son événement contraire : cela constitue une nouvelle épreuve de Bernoulli de paramètre $p' = \frac{1}{5}$, et la répétition, pendant 7 jours, de façon indépendante, de cette même épreuve constitue un schéma de Bernoulli. Si Z désigne le nombre de jours où Cédrik débarrasse la table, Z suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 7$, $p' = \frac{1}{5}$.

Son espérance est donc $E(Z) = np' = \frac{7}{5} = 1,4$. On a donc $E(Z) = \frac{1}{3} E(X)$: la répétition au hasard de la corvée est équitable entre chacun des 3 garçons.

Le nombre moyen de jours où c'est un garçon qui risque de devoir débarrasser la table est 1,9.

▲ $E(Z) = 7 \times \frac{1}{5}$ témoigne la répartition équitable entre les 5 enfants.

d. Si on note S_i l'événement « un garçon est désigné le jour i », l'événement considéré peut se noter $S_1 S_2 \bar{S}_3$. Les désignations sont des expériences identiques et indépendantes. On a donc $p(S_1 S_2 \bar{S}_3) = p(S_1) \times p(S_2) \times p(\bar{S}_3)$ d'après le chapitre 6, savoir-faire 2.).

Or, $p(S_1) = p(S_2) = \frac{3}{5}$ et $p(\bar{S}_3) = 1 - p(S_3) = \frac{2}{5}$.

Donc $p(S_1 S_2 \bar{S}_3) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} = \frac{18}{125} = \mathbf{0,144}$.

2. a. Soit k le coefficient de proportionnalité entre l'âge et probabilité d'être désigné, alors :

$$p_1 = 4k ; \quad p_2 = 6k ; \quad p_3 = 8k ; \quad p_4 = 10k ; \quad p_5 = 12k.$$

Or $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$, donc $4k + 6k + 8k + 10k + 12k = 1$, d'où $40k = 1$

et $k = \frac{1}{40}$. Donc :

$$p_1 = 4k = \frac{1}{10}, \quad p_2 = 6k = \frac{3}{20}, \quad p_3 = 8k = \frac{1}{5}, \quad p_4 = 10k = \frac{1}{4}, \quad p_5 = 12k = \frac{3}{10}.$$

b. Un jour donné, la probabilité qu'un garçon soit désigné est :

$$p = p_2 + p_3 + p_5 = \frac{3}{20} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{13}{20}.$$

Par le même raisonnement qu'au 1. a., si X désigne le nombre de jours de la semaine où un garçon est désigné, X suit une loi binomiale de paramètre $n = 7$ et $p = \frac{13}{20}$.

Son espérance (nombre moyen de jours où un garçon risque d'être désigné) est :

$$E(X) = np = 7 \times \frac{13}{20} = \frac{91}{20} = 4,55.$$

Le nombre moyen de jours où les garçons risquent de débarrasser est plus grand que la semaine précédente : **les filles sont gagnantes.**

c. Par le même raisonnement, Cédrik risque en moyenne de débarrasser la table $n \times p_3 = 7 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$ jours par semaine : c'est comme la semaine précédente !

Au mieux proteste-t-il par « solidarité » avec son grand frère.

Pour Daphné, ce risque passe de 1,4 jours (même raisonnement) à $n \times p_4 = \frac{7}{4} = 1,75$ jours.

Daphné se réjouit à tort, sauf si elle est contente pour sa petite sœur.

17 1. On note E_n « la roue s'arrête au moins une fois sur le secteur bleu au cours des n rotations »

• Alors $\bar{E}_n$ est l'événement « la roue ne s'arrête jamais sur le secteur bleu ».

À chaque rotation de la roue, celle-ci s'arrête sur le secteur bleu (« succès ») avec probabilité $p = \frac{1}{4}$, et sur le secteur gris sinon : il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,25$.

Le jeu consiste à répéter n fois, de manière indépendante, cette même épreuve de Bernoulli. Le nombre de fois X où elle s'arrête sur un secteur bleu (nombre de succès) suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,25$.

Alors $p(\bar{E}_n) = p(X = 0) = (1 - p)^n = 0,75^n$ donc :

$$p(E_n) = 1 - p(\bar{E}_n) = 1 - 0,75^n.$$

- On résout alors dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p(E_n) \geq 0,99$, qui équivaut successivement à :

$$1 - 0,75^n \geq 0,99$$

$$-0,75^n \geq -0,01$$

$$0,75^n \leq 0,01.$$

Or $0 < 0,75 < 1$, donc la suite géométrique $(0,75^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Or en construisant le tableau des termes consécutifs de cette suite à la calculatrice (voir chapitre 4), on obtient $0,75^8 \approx 0,1001$ à 10^{-4} près et $0,75^9 \approx 0,075$ à 10^{-4} près, donc :

$$0,75^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq 9.$$

Le plus petit entier n tel que la roue s'arrête au moins une fois sur le secteur bleu avec une probabilité supérieure à 0,99 est donc $n = 9$.

2. $p(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,25^2 \times (1 - 0,25)^{10-2} = 45 \times 0,25^2 \times 0,75^8$ donc :

$$p_2 \approx 0,282 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

3. Sous l'hypothèse que la roue est bien réglée, si on appelle succès le fait que la roue s'arrête exactement deux fois sur le secteur bleu, chaque jeu constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p_2 = 0,282$.

Le nombre de succès Y , si on répète n fois ce même jeu de façon indépendante, suit donc une loi binomiale de paramètres $N = 200$, $p_2 = 0,282$.

L'intervalle de fluctuation théorique à 95 % est $\left[\frac{a}{N}; \frac{b}{N} \right]$ avec $a = 44$, le plus petit entier tel que $p(X \leq a) > 0,025$ et $b = 69$, le plus petit entier tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$. Cet intervalle est donc $\left[\frac{44}{200}; \frac{69}{200} \right]$.

La fréquence observée sur notre expérience est $f = \frac{45}{200}$.

Elle appartient à l'intervalle $\left[\frac{44}{200}; \frac{69}{200} \right]$, donc **on ne rejette pas l'hypothèse que la roue est bien réglée, au seuil de 5 %.**

L'intervalle de fluctuation théorique à 90 % est $\left[\frac{a'}{N}; \frac{b'}{N} \right]$ avec $a' = 46$, le plus petit entier tel que $p(X \leq a') > 0,05$ et $b' = 67$, le plus petit entier tel que $p(X \leq b') \geq 0,95$. Cet intervalle est donc $\left[\frac{46}{200}; \frac{67}{200} \right]$.

La fréquence observée, $\frac{45}{200}$, n'appartient à l'intervalle $\left[\frac{46}{200}; \frac{67}{200} \right]$, donc **on rejette au risque de 10 %, l'hypothèse que la roue est bien réglée.**

On vérifie ici le fait qu'on élimine davantage d'échantillons au seuil de 10 % qu'au seuil de 5 %.

18 1. Dans la cellule A62, la somme se calcule avec la formule = SOMME(A2:A61). La commande = ENT(ALEA()+0,7) renvoie la valeur 1 avec probabilité 0,7 et 0 le reste du temps, donc simule une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,7$ si l'on convient que le succès consiste à obtenir 1.

■ Dans cette formule, \$A62:\$GR62 désigne la plage de cellules à examiner et A63 contient la condition à vérifier. Si une cellule de la plage est égale à A63, alors elle est comptabilisée (NB).

Notons x le nombre de 1 obtenus. Il y a donc $60 - x$ fois le chiffre 0 et la somme des valeurs vaut $x \times 1 + (60 - x) \times 0 = x$.

Cette somme est donc égale nombre de succès lorsqu'on a répété 60 fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,7$: **c'est bien une simulation d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,7$.**

2. Dans la cellule GS62, on saisit = MOYENNE(A62:GR62). Ce calcul correspond à la moyenne de 200 valeurs de la variable aléatoire X . La valeur obtenue est proche de 42, l'espérance de la variable aléatoire X : $E(X) = np = 60 \times 0,7 = 42$.

3. Dans la cellule A64, il faut saisir = NB.SI(\$A62:\$GR62;A63).

4. Dans la cellule A65, il faut saisir = A64/200.

5. Les cellules BI64, BI65 et BI66 doivent respectivement contenir les formules = NB.SI(\$A62:\$GR62;BI63), = BI64/200 et = LOI.BINOMIALE(BI63;60;0,7;0). Tous ces résultats sont d'ailleurs égaux ou proches de 0.

6. On sélectionne les cellules A63 à BI66, puis avec l'assistant graphique :

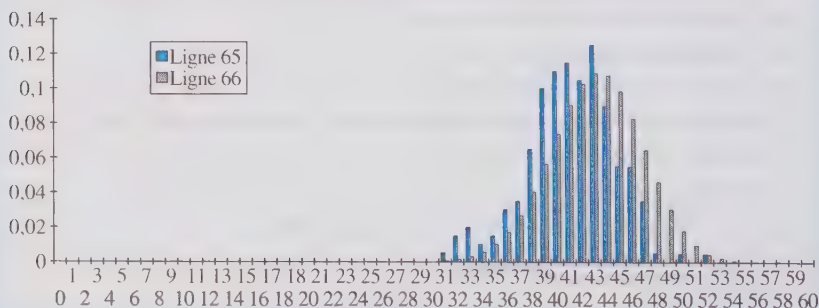
Étape 1 : on choisit le type « Colonne ».

Étape 2 : on s'assure d'avoir coché « Séries de données en ligne », « Première ligne comme étiquettes ».

Étape 3 : on supprime la série nommée Ligne 64.

Étape 4 : on termine avec le titre du graphique.

Comparaison entre les fréquences obtenues par simulation et la loi de X



7. C'est la « **fluctuation d'échantillonnage** » qui explique cette différence entre la loi de X , répartition théorique des fréquences, et les fréquences observées sur un échantillon.

19 1. On peut modéliser le résultat du lancer de deux dés par des couples $(i; j)$ où i et j sont des entiers compris entre 1 et 6 sous l'hypothèse que les dés sont bien équilibrés, ces couples sont équiprobables. Calculons les différentes sommes possibles à l'aide d'un tableau à double entrée :

Dé 1 : $i \backslash$ Dé 2 : j	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Il y a donc 21 couples favorables à l'événement « obtenir une somme supérieure ou égale à 7 » pour 36 couples équiprobables possibles, donc sous l'hypothèse que les dés sont bien équilibrés, **la probabilité que Lubiana gagne un bonbon est $p = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.**

2. Un lancer constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{7}{12}$ si on décide d'appeler succès l'événement « le bonbon est gagné » (c'est-à-dire « la somme obtenue est supérieure ou égale à 7 »). En répétant 5 fois de manière indépendante cette même épreuve de Bernoulli, cela constitue un schéma de Bernoulli et le nombre X de succès (de bonbons gagnés) suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{7}{12}$.

$$p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5),$$

$$\begin{aligned} p(X \geq 3) &= \binom{5}{3} \times \left(\frac{7}{12}\right)^3 \times \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \binom{5}{4} \times \left(\frac{7}{12}\right)^4 \times \left(\frac{5}{12}\right)^1 + \binom{5}{5} \times \left(\frac{7}{12}\right)^5 \times \left(\frac{5}{12}\right)^0 \\ &= \frac{10 \times 7^3 \times 5^2 + 5 \times 7^4 \times 5 + 1 \times 7^5}{12^5} \\ &= \frac{162\,582}{248\,832} = \frac{27\,097}{41\,472} \end{aligned}$$

$$p(X \geq 3) \approx 0,653 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

3. L'intervalle de fluctuation théorique à 95 % de la fréquence $\frac{X}{5}$ est $\left[\frac{a}{5}; \frac{b}{5}\right]$, où a est le plus petit entier tel que $p(X \leq a) > 0,025$ et b le plus petit entier tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$.

Sur tableur, l'instruction = CRITERE.LOI.BINOMINALE $\left(5; \frac{7}{12}; 0,025\right)$ renvoie $a = 1$ et l'instruction = CRITERE.LOI.BINOMINALE $\left(5; \frac{7}{12}; 0,975\right)$ renvoie $b = 5$.

L'intervalle est donc $\left[\frac{1}{5}; \frac{5}{5}\right]$.

La fréquence observée pour les gains de Lubiana est $f = \frac{1}{5}$, qui appartient à $\left[\frac{1}{5}; 1\right]$,

donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse au seuil de 5 % que les dés sont bien équilibrés : la réponse du maître est correcte.

4. On répète 400 fois de manière indépendante, cette même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{7}{12}$. Le nombre Y de succès suit donc une loi binomiale de paramètres

$$N = 400 \text{ et } p = \frac{7}{12}.$$

Comme en 3., l'instruction = CRITERE.LOI.BINOMINALE $\left(400; \frac{7}{12}; 0,025\right)$ renvoie la valeur 214 et l'instruction = CRITERE.LOI.BINOMINALE $\left(400; \frac{7}{12}; 0,975\right)$ renvoie la valeur 253.

L'intervalle de fluctuation théorique à 95 % pour la fréquence $\frac{Y}{N}$ est donc :

$$\left[\frac{214}{400}; \frac{253}{400}\right].$$

La fréquence observée par Lubiana étant de $\frac{202}{400}$, qui n'appartient pas à cet intervalle, on peut rejeter au risque de 5 % l'hypothèse selon laquelle les dés sont bien équilibrés : **son accusation semble fondée !**

▲ On ne peut jamais écarter de manière certaine une hypothèse. Les enfants n'ont peut-être pas eu de chance pendant tout l'après-midi.

20 1. Au cours d'un lancer, on appelle succès le fait que la pièce donne PILE : cela constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$ (pièce supposée bien équilibrée). Lorsqu'on répète 10 fois cette même épreuve de façon indépendante, le nombre X de succès dans ce schéma de Bernoulli suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$. Alors :

$$p(X \text{ est pair})$$

$$= p(X = 0) + p(X = 2) + p(X = 4) + p(X = 6) + p(X = 8) + p(X = 10)$$

$$\begin{aligned} &= \binom{10}{0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{10}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &\quad + \binom{10}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{10}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{10}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times (1 + 45 + 210 + 210 + 45 + 1) = \frac{1}{2^{10}} \times 512 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$p(X \text{ est pair}) = \frac{1}{2}.$$

6 événements sont favorables à « X est pair » pour 11 valeurs possibles pour X , mais elles ne sont pas équiprobables, ce qui explique que $p(X \text{ est pair})$ soit différent de $\frac{6}{11}$!

2. Pour n répétitions indépendantes de cette même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$, le nombre Y de succès suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2} = 0,5$.

L'intervalle de fluctuation théorique à 90 % est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, où a et b sont les plus petits entiers tels que $p(Y \leq a) > 0,05$ et $p(Y \leq b) \geq 0,95$.

Son amplitude est donc $\frac{b}{n} - \frac{a}{n} = \frac{b-a}{n}$.

Sur tableur, on saisit dans la cellule A1 la commande = 1 comme première valeur de n , et dans la cellule B1, la commande :

= (CRITERE.LOI.BINOMINALE(A1;0,5;0,95) - CRITERE.LOI.BINOMINALE(A1;0,5;0,05))/A1.

On étend les deux cellules A1 et B1 (qui contiennent toutes deux la valeur 1) jusqu'à la ligne 262, première fois où l'amplitude passe sous la valeur 0,1. **Ainsi, $n = 262$.**

21 1. a. Les boules étant indiscernables au toucher, chaque boule peut être tirée de manière équiprobable, la proportion de boules rouge étant p , si on appelle succès le fait d'obtenir une boule rouge, un tirage constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Les n tirages se faisant avec remise, on répète n fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante, ce qui constitue un schéma de Bernoulli. Le nombre S_n boules rouges obtenues, c'est-à-dire le nombre de succès, suit donc **une loi binomiale de paramètres n et p .**

 Voir cours **11.1.** et **3.**

b. $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$.

2. Par linéarité de l'espérance :

$$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n} \times S_n\right) = \frac{1}{n} \times E(S_n) \text{ car } \frac{1}{n} \text{ est une constante.}$$

$$\text{Donc } E(F_n) = \frac{1}{n} \times np = p.$$

$$\text{Par ailleurs } V(F_n) = V\left(\frac{1}{n} \times S_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times V(S_n) \text{ soit :}$$

$$V(F_n) = \frac{1}{n^2} \times np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$E(F_n) = p \text{ et } V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

3. Pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = x(1-x) = -x^2 + x$.

• 1^{re} méthode : $0 \leq x \leq 1$ donc $1-x \geq 0$ et $x(1-x) \geq 0$: $f(x) \geq 0$ sur $[0; 1]$.

De plus, $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ (forme canonique).

Pourtant $x \in [0; 1]$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, donc $f(x) \leq \frac{1}{4}$ et $f(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in [0; 1]$.

Donc le maximum de f sur $[0; 1]$ est $\frac{1}{4}$, atteint pour $x = \frac{1}{2}$.

• 2^e méthode : f est dérivable sur $[0; 1]$ et $f'(x) = -2x + 1$.

On en déduit le tableau de signes de f' puis de variations de f .

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	0

f est affine de coefficient directeur $a = -2 < 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Donc f est positive sur $[0; 1]$ et son maximum est $\frac{1}{4}$, atteint pour $x = \frac{1}{2}$.

La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ est donc bien définie sur $[0; 1]$ et comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, le maximum de g est $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, atteint pour $x = \frac{1}{4}$.

Donc, pour tout $p \in [0; 1]$, $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$.

Donc pour $n \geq 30$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$, $p \in [0; 1]$, donc :

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \times \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{2}.$$

Ainsi $0 \leq 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{1,96}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $1,96 > 0$

$$0 \leq 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ car } \frac{1,96}{2} < 1$$

Donc l'intervalle $I_n = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$ est inclus dans

l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, donc :

$$p \left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) \geq p(F_n \in I_n).$$

Or $0 < 30 \leq n$ et $0 < 0,2 \leq p \leq 0,8$, donc $30 \times 0,2 \leq np$, soit $np \geq 6 \geq 5$ et $1 - p \geq 0,2 > 0$, donc $n(1 - p) \geq 6 \geq 5$.

La propriété donnée dans l'énoncé s'applique, donc $p(F_n \in I_n) \approx 0,95$.

On en déduit (même s'il s'agit d'une approximation) :

$$p \left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) \geq 0,95.$$

22 1. a. $\binom{n+1}{k+1}$ désigne le nombre de chemins amenant $k+1$ succès au cours des $n+1$ répétitions de l'épreuve de Bernoulli. Pour obtenir $k+1$ succès :

- Soit la dernière répétition amène un succès et les n répétitions précédentes comportaient k succès. Cela correspond à $\binom{n}{k}$ branches.

- Soit la dernière répétition amène un échec, et les n répétitions précédentes comportaient déjà les $k+1$ succès. Cela correspond à $\binom{n}{k+1}$ branches.

$$\text{Donc } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

b. $\binom{n}{n-k}$ correspond au nombre de chemins amenant $n-k$ succès au cours des n répétitions de l'épreuve de Bernoulli. Ces chemins sont aussi ceux qui amènent à $n - (n-k) = k$ échecs au cours de ces n répétitions : ils sont au nombre de $\binom{n}{k}$ (par symétrie de la définition entre échec et succès). Donc :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

2. a. $\binom{15}{12} = \binom{15}{15-3} = \binom{15}{3}$. D'après **1. b.** avec $n = 15$ et $p = 3$:

$$\binom{15}{12} = 455.$$

b. $\binom{15}{2} + \binom{15}{3} = \binom{16}{3}$ d'après **1. a.** avec $n = 15$, $p = 2$.

Donc $\binom{15}{2} = \binom{16}{3} - \binom{15}{3} = 560 - 455$ soit :

$$\binom{15}{2} = 105.$$

23 1. Choisir un électeur au hasard, si on appelle succès le fait qu'il fasse confiance au député, constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{52}{100} = 0,52$.

On suppose que le nombre d'électeurs est suffisamment grand pour que constituer un échantillon de 100 électeurs puisse s'assimiler à 100 tirages indépendants successifs avec remise.

Le nombre X d'électeurs faisant confiance au député, c'est-à-dire de succès dans le schéma de Bernoulli, suit donc une **loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$** .

2. a. $p(X \leq 41) < 0,025$ et $p(X \leq 42) > 0,025$, donc **$a = 42$** .

$p(X \leq 61) < 0,975$ et $p(X \leq 62) \geq 0,975$, donc **$b = 62$** .

b. C'est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, soit $\left[\frac{42}{100}; \frac{62}{100}\right]$.

L'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est égal à $\left[0,52 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,52 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right]$, soit **$[0,42; 0,62]$** : ils sont identiques.

3. Si $f \in [0,42; 0,62]$, **on ne rejette pas l'hypothèse au seuil de 5 %**.

Si $f \notin [0,42; 0,62]$, **on rejette l'hypothèse au risque de 5 %**.

4. Ici $f = \frac{43}{100} \in [0,42; 0,62]$, donc **on peut considérer, au seuil de 5 %, l'affirmation du député comme exacte**.

24 1. Sous l'hypothèse que les voisins donnent bien leur bonbon au hasard, chacun des trois enfants reçoit le bonbon avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Une visite, si on appelle succès le fait que Pierre reçoive le bonbon, constitue donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$. Le nombre X de bonbons reçus par Pierre, c'est-à-dire de succès au cours de 50 répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli, suit donc une **loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{3}$** .

2. a. On a graphiquement $p(X = 10) \approx 0,016$.

En fait $p(X = 10) = \binom{50}{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{50-10} = \binom{50}{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{40}$

$$p(X = 10) = \binom{50}{10} \times \frac{2^{40}}{3^{50}} \approx 0,0157 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

b. $p(X = 10) = p(X = 0) + p(X = 1) + \dots + p(X = 10)$.

Or, par hypothèse $p(X = k) < 10^{-4}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ et 4 ;

graphiquement $p(X = k) < 0,005$ pour $k = 5, 6, 7$ et 8 ;

$p(X = 9) < 0,01$; $p(X = 10) \approx 0,016 < 0,017$.

Donc **$P(X \leq 10) < 5 \times 0,0001 + 4 \times 0,005 + 0,01 + 0,017 < 0,05$** .

3. L'intervalle de fluctuation à 90 % de la fréquence $\frac{X}{50}$ est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ avec $n = 50$, a et b les plus petits entiers tels que $p(X \leq a) > 0,05$ et $p(X \leq b) \geq 0,95$.

D'après 2. b., $a > 10$. Or, la fréquence observée chez Pierre est $f = \frac{10}{50}$, donc cette fréquence n'est pas dans l'intervalle de fluctuation à 90 % : on rejette l'hypothèse, au seuil de 10 %, selon laquelle la distribution s'est faite au hasard. **On conseillera à Pierre de changer de déguisement l'année prochaine au risque 10 %.**

25 1. Les boules sont indiscernables au toucher, donc les tirages sont équiprobables. Si X désigne le gain algébrique, sa loi de probabilité est :

x_i (en €)	$0 - 3 = -3$	$2 - 3 = -1$	$6 - 3 = 3$
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10} = 0,3$	$\frac{3}{10} = 0,3$	$\frac{4}{10} = 0,4$

L'espérance du gain est $E(X) = -3 \times 0,3 + (-1) \times 0,3 + 3 \times 0,4 = 0$. Le jeu est donc équitable : **réponse c.**

2. Si pour un tirage, on appelle succès l'événement « la boule tirée est blanche », on peut modéliser chaque tirage par une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{4}{10} = 0,4$. Si A désigne l'événement « au moins une boule tirée est blanche », et X le nombre de boules blanches tirées au cours de ces 4 répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$, et $p(A) = p(X \geq 1)$.

Or $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$ et $P(X = 0) = (1 - 0,4)^4 = 0,6^4 = \frac{81}{625}$.

Donc $p(A) = 1 - \frac{81}{625} = \frac{544}{625}$: **réponse b.**

3. Si, pour un tirage, on appelle succès l'événement « la boule tirée est rouge », on obtient une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{10} = 0,3$. Si Y désigne le nombre de boules rouges obtenues en répétant 5 fois cette même épreuve de Bernoulli de façon indépendante, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,3$.

Ainsi, $P(Y = 2) = \binom{5}{2} \times 0,3^2 \times (1 - 0,3)^{5-2} = 10 \times 0,3^2 \times 0,7^3 = 0,3087$:

réponse a.

4. Pour chaque question, on appelle succès l'événement « choisir la bonne réponse ». Le choix se faisant de façon équiprobable, la probabilité de choisir la bonne réponse pour 3 propositions est donc $p = \frac{1}{3}$.

L'élève répète 4 fois cette même épreuve de Bernoulli de paramètre $q = \frac{1}{3}$, de manière indépendante, donc le nombre X de bonnes réponses obtenues suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$, $p = \frac{1}{3}$.

Ainsi, pour tout entier k compris entre 0 et 4 :

$$p(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}.$$

D'où la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$	$4 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$	$6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$
x_i	3	4	
$p(X = x_i)$	$4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$	

Or $X = 0$ apporte $0 \times 2 = 0$ points, enlève $4 \times 1 = 4$ points soit un gain de -4 , donc ramené à 0 ;

$X = 1$ apporte $1 \times 2 = 2$ points, enlève $3 \times 1 = 3$ points soit un gain de -1 , donc ramené à 0 ;

$X = 2$ apporte $2 \times 2 = 4$ points, enlève $2 \times 1 = 2$ points soit un gain de 2 points ;

$X = 3$ apporte $2 \times 3 = 6$ points, enlève $1 \times 1 = 1$ points soit un gain de 5 points ;

$X = 4$ apporte $2 \times 4 = 8$ points, enlève $0 \times 1 = 0$ point soit un gain de 8 points.

Ainsi la loi du gain G est donnée par :

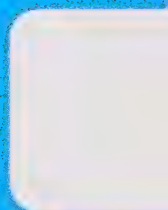
y_i	0	2	5	8
$p(G = g_i)$	$\frac{16}{81} + \frac{32}{81} = \frac{48}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

L'espérance du gain est :

$$E(G) = 0 \times \frac{48}{81} + 2 \times \frac{24}{81} + 5 \times \frac{8}{81} + 8 \times \frac{1}{81}$$

$$E(G) = \frac{96}{81} = \frac{32}{27} : \text{réponse a.}$$

Géométrie





8

Vecteurs du plan

I GÉOMÉTRIE NON NÉCESSAIREMENT REPÉRÉE

1. Rappels

■ Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.



- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut alors noter $\vec{u}$.
- $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$... sont des représentants du vecteur nul $\vec{0}$.

■ Milieu d'un segment

I est le milieu de $[AB]$ si, et seulement si, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

■ Relation de Chasles

Pour tous points du plan A , B et C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2. Vecteurs colinéaires

■ Définition

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

■ Conséquences

- $(AB) \parallel (CD)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points A , B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3. Expression en fonction de deux vecteurs non colinéaires

■ Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

Alors tout vecteur du plan s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.



Autrement dit, pour tout vecteur $\overrightarrow{AB}$, il existe un unique couple de réels $(\alpha; \beta)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

II GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

■ Propriété

Le triplet $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère du plan si, et seulement si, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs non colinéaires du plan.

Dans tout ce paragraphe, on se place dans un repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Condition de colinéarité

■ Propriété 1

Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan repéré.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

2. Vecteur directeur d'une droite

■ Définition

Soit $d = (AB)$ une droite du plan, et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.



- Toute droite parallèle à l'axe des abscisses admet pour vecteur directeur $\vec{i}$.
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet pour vecteur directeur $\vec{j}$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d , alors les vecteurs directeurs de d sont les vecteurs de la forme $\lambda\vec{u}$, $\lambda \neq 0$.

■ Propriété 2

Soit d la droite affine d'équation réduite $y = mx + p$.

Alors $\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de d .

■ Propriété 3

Soit d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Soit M un point du plan.

$M \in d$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

3. Équation cartésienne d'une droite

■ Théorème-définition

Soit d une droite du plan. On appelle équation cartésienne de d toute équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a , b et c sont des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.



Toute droite du plan admet une infinité d'équations cartésiennes.

SAVOIR-FAIRE

1. Utiliser la relation de Chasles pour exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

On dispose initialement d'une relation entre des vecteurs formés par les points A, B, C et M.

On commence par introduire le point A dans chacun des vecteurs, en appliquant la relation de Chasles.

On fait apparaître les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en utilisant les égalités :

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}.$$

On distribue, puis on isole $\overrightarrow{AM}$.

EXEMPLE : Soit M un point défini par :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BM} - 5\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}.$$

Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Introduisons le point A :

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.$$

Faisons apparaître les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

On a donc :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BM} - 5\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}) - 5(-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$



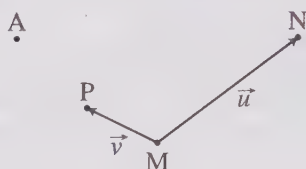
Attention : Ne pas oublier les parenthèses lorsqu'il y a un coefficient devant le vecteur auquel on applique la relation de Chasles.

2. Représenter $\vec{u} + \vec{v}$ et $\lambda\vec{u}$

• Pour construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$, on part du point A et on dispose « bout à bout » un représentant de $\vec{u}$ et un représentant de $\vec{v}$.

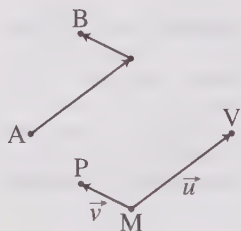
• Pour construire le point D défini par $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$, on trace la parallèle à (AB) passant par C, puis on y place le point D de sorte que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient de même sens si $\lambda > 0$, de sens contraire si $\lambda < 0$, puis que $CD = |\lambda| \times AB$.

EXEMPLE : Soient A, M, N et P des points du plan. $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{MP}$.



Construire les points B, C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{AC} = -2\vec{v}$.

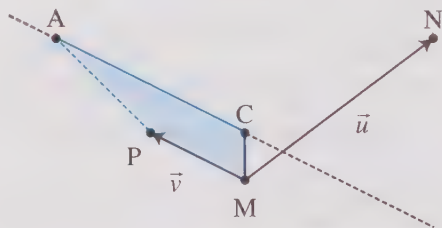
- Construction du point B :



- Construction du point C défini par $\overrightarrow{AC} = -2\vec{v}$.

On trace la parallèle à (MP) passant par A.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MP}$ doivent être de sens contraire avec $AC = 2MP$.



Pour placer le point C avec exactitude, il suffit ici d'observer le quadrillage.

3. Démontrer le parallélisme ou l'alignement

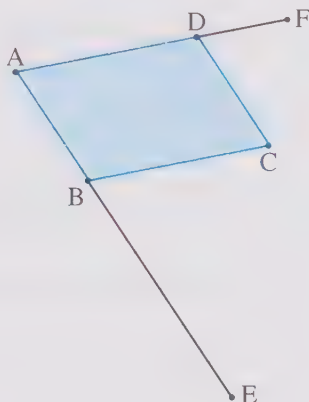
Pour démontrer que (AB) et (CD) sont parallèles :

On choisit deux vecteurs non colinéaires du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui semblent avoir un rôle central dans l'exercice. On exprime $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{CD}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On cherche ensuite le réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$.

Pour démontrer que A, B et C sont alignés, on procède comme précédemment avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ou avec deux autres vecteurs formés par ces trois points).

EXEMPLE : Soient $ABCD$ un parallélogramme, E et F deux points du plan tels que $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Démontrer que les points C , E , F sont alignés.



Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$:

- $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}$.

Or $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$.

Donc $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

- $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

- Finalement, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

On remarque que les coefficients obtenus sont proportionnels, et que $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CF}$.

On en conclut que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires, donc que les points C , E et F sont alignés.

4. Déterminer un vecteur directeur d'une droite connaissant une équation cartésienne

La droite d admet pour équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.

- **Cas où $b \neq 0$**

Isoler y pour obtenir l'équation réduite de d : $y = mx + p$.

$\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de d .

- **Cas où $b = 0$**

d admet alors une équation de la forme $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$). Elle est donc parallèle à l'axe des ordonnées et $\vec{j}$ est un vecteur directeur de d .

EXEMPLE : Le plan est muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d d'équation $2x - 3y + 4 = 0$.

Les vecteurs $\vec{v}(-3; 2)$ et $\vec{w}(\frac{9}{10}; \frac{3}{5})$ sont-ils des vecteurs directeurs de d ?

$$\bullet 2x - 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 3y \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

$\vec{u}(1; \frac{2}{3})$ est donc un vecteur directeur de d .

$$\bullet 1 \times 2 - \frac{2}{3} \times (-3) = 4 \neq 0, \text{ donc } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

$\vec{v}$ n'est donc pas un vecteur directeur de d .

$$\bullet 1 \times \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 0, \text{ donc } \vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires.}$$

$\vec{w}$ est donc aussi un vecteur directeur de d .

5. Déterminer une équation cartésienne de droite, connaissant un point et un vecteur directeur

La droite d passe par $A(x_A; y_A)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

Reprendre la condition d'appartenance à d (propriété 3) :

Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ puis appliquer la condition de colinéarité (propriété 1).

Écrire la relation ainsi obtenue sous la forme $ax + by + c = 0$.

EXEMPLE : Le plan est muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit d la droite passant par $A(3; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 5)$.

Déterminer une équation cartésienne de d .

Soit $M(x; y)$ un point du plan. $\overrightarrow{AM}(x-3; y+2)$.

$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow (x-3) \times 5 - (y+2) \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - y - 17 = 0$$

Donc d admet pour équation cartésienne $5x - y - 17 = 0$.

EXERCICES D'APPLICATION

8

1 RELATION DE CHASLES

★ 15 min ► p. 383

1. Simplifier au maximum les sommes suivantes :

a. $\overline{AB} + \overline{CA} + \overline{BC}$

b. $2\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{BD}$

c. $\overline{BA} - \overline{BC}$

d. $\overline{AB} - \overline{BC} + 2\overline{BD}$

2. Dans chacun des cas suivants, exprimer $2\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{BD}$ en fonction de $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$.

a. $\overline{AM} + 2\overline{BA} - 3\overline{CA} = \vec{0}$

b. $\overline{AM} + \overline{BC} = \vec{0}$

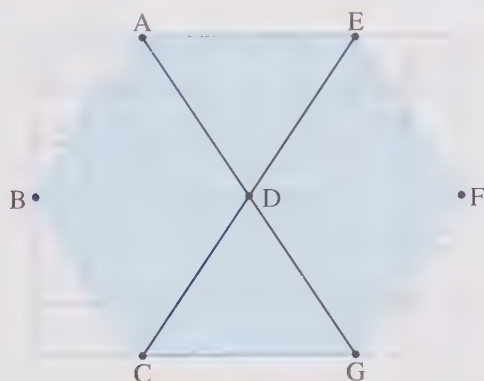
c. $\overline{MB} = 2 \cdot \overline{CB}$

d. $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$

Voir savoir-faire 1.

2 ÉGALITÉ DE VECTEURS, SOMME DE VECTEURS

★ 15 min ► p. 383

1. Trouver tous les vecteurs égaux à $\overline{AD}$.2. Trouver tous les représentants du vecteur $\vec{u} = \overline{AB} + \overline{AE}$.

3. Compléter :

a. $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{A...}$

b. $\vec{u} = \overline{AB} + \overline{AE}$

c. $\overline{AB} + \overline{DB} = \overline{F...} (= \overline{...})$

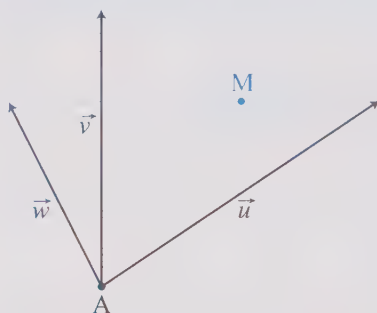
d. $\overline{AB} + \overline{FG} = \overline{...}$

e. $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{...}$

f. $\overline{BA} + \overline{DA} + \overline{EA} = \overline{...}$

3 CONSTRUCTIONS

★ 15 min ► P. 384



1. Reproduire la figure ci-dessus, puis construire les points B, C, D, E définis par :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} + 2\vec{v} ; \quad \overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{w} ; \quad \overrightarrow{DA} = \vec{u} - 2\vec{w} ;$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\vec{u} ; \quad \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \frac{4}{3}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}.$$

2. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

▲ Voir le savoir-faire 2.

4 VECTEURS ET TRIANGLE

★ 15 min ► P. 384

Soit ABC un triangle non plat, et M, N les points définis par :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BA} \text{ et } 4\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NC} = \vec{0}.$$

- Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
- Faire une figure.
- Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

5 VECTEURS ET PARALLÉLOGRAMMES

★★ 20 min ► P. 385

On considère un quadrilatère quelconque ABCD et on appelle I, J, K, L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

- Faire une figure.
- Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

▲ Voir le savoir-faire 3.

- Démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.
- Redémontrer le résultat précédent à l'aide d'un théorème du collège.

6 QUESTION DE COURS

★ 10 min ► P. 386

On se place dans le repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit (d) la droite affine d'équation réduite $y = mx + p$. Démontrer que $\vec{u}(l; m)$ est un vecteur directeur de d .

7 VECTEURS ET DROITES

★★ 25 min ► P. 386

On se place dans le repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Pour chacune des droites ci-dessous,

1. d_1 d'équation cartésienne : $3x - 2y + 6 = 0$;

2. d_2 d'équation cartésienne : $2x + 5 = 0$;

3. d_3 d'équation cartésienne : $x + y = 0$;

4. d_4 d'équation cartésienne : $3x + y = \pi$;

déterminer si possible :

a. un vecteur directeur $\vec{u}$ dont l'abscisse vaut 1 ;

b. un vecteur directeur $\vec{v}$ dont l'ordonnée vaut 1 ;

c. un vecteur directeur $\vec{w}$ dont la somme des coordonnées vaut 1.

Utiliser les remarques du II.2.

8 DROITES PARALLÈLES

★ 20 min ► P. 387

On se place dans le repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points $A(2; 5)$,

$B(-6; \frac{1}{2})$ et $C(3; -2)$, et le vecteur $\vec{u}(-\frac{3}{2}; 1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ , passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

3. Déterminer, de deux façons différentes, une équation cartésienne de la droite (d) , parallèle à (AB) et passant par C.

4. Vérifier que Δ et (OC) sont parallèles.

9 ALGORITHME (POINTS ALIGNÉS)

★ 20 min ► P. 388

1. Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points $A(1; 3)$ et $B(-2; 5)$.

On donne l'algorithme page suivante, permettant de tester si le point $M(x; y)$ appartient ou non à la droite (AB).

Tester l'algorithme dans les cas suivants :

- a. $M(-5; 7)$;
- b. $M(5; -7)$;
- c. $M(1; 3)$.

VARIABLES

x EST_DU_TYPE NOMBRE

y EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

LIRE x

LIRE y

SI $(2*(x-1)-(y-3)=0)$ ALORS

DEBUT_SI

AFFICHER "M appartient à (AB)"

FIN_SI

SINON

DEBUT_SINON

AFFICHER "M n'appartient pas à (AB)"

FIN_SINON

AFFICHER " , avec A(1;3) et B(-2;5)"

FIN_ALGORITHME

2. Comment modifier l'algorithme pour qu'il donne une condition nécessaire et suffisante pour que trois points quelconques du plan $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $M(x; y)$ soit alignés.

10 CONSTRUCTION DE DROITES

★★ 30 min ► p. 389

Dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les droites :

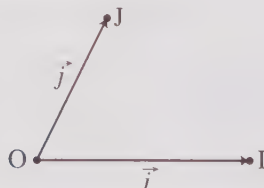
$$D_1 : 2x - 3y - 4 = 0, \quad D_2 : x + \frac{y}{2} + 2 = 0,$$

$$D_3 : 5x - 15 = 0, \quad D_4 : 5y + 1 = 0.$$

On note D_5 la droite passant par $A(2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2; -7)$.

Tracer ces droites dans chacun des cas suivants :

- 1. le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est orthonormal ;
- 2. le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est le suivant :



$\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

8

11 BARYCENTRE

★★ 30 min ► p. 390

Soient A, B, C trois points non alignés.

1. Soit D le point défini par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, et I le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

a. Faire une figure

b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Démontrer que I est le milieu du segment [AD].

2. Soit G le point du plan défini par $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

a. Montrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Démontrer que G est le milieu du segment [AI], puis construire le point G à la règle non graduée et au compas.

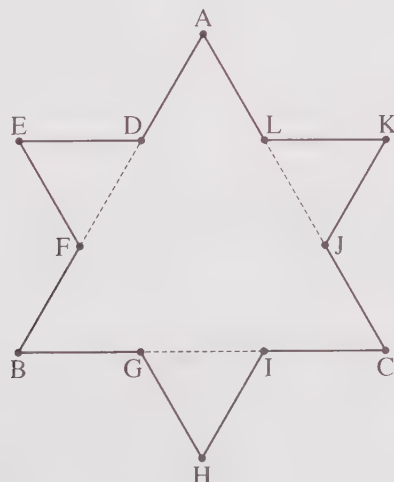
On utilise l'équivalence :

$$P \text{ milieu de } [MN] \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MN}.$$

12 FLOCON DE VON KUCH

★★ 30 min ► p. 391

Pour construire la figure ci-dessous, on a construit un triangle équilatéral ABC. Ensuite, on a divisé chacun de ses côtés en trois segments de même longueur. Puis on a construit un triangle équilatéral sur le segment du milieu, avant d'effacer ce dernier.



▲ Ce procédé, réitéré à l'infini, donne ce que l'on appelle le Flocon de Von Koch.

1. Exprimer $\overline{DB}$, puis $\overline{CL}$, en fonction des vecteurs $\overline{BC}$ et $\overline{BA}$.
2. a. Démontrer que les droites (ED) et (BC) sont parallèles. Exprimer alors $\overline{ED}$ en fonction de $\overline{BC}$.
b. En procédant de même, exprimer $\overline{LK}$ en fonction de $\overline{BC}$.
3. En remarquant que $\overline{EK} = \overline{ED} + \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{CL} + \overline{LK}$, exprimer $\overline{EK}$ en fonction des vecteurs $\overline{BC}$ et $\overline{BA}$.
4. Démontrer alors que les points E, D, L et K sont alignés.

13 DÉMONSTRATION

★ 10 min ► P. 391

L'objet de cet exercice est de démontrer la formule donnant les coordonnées du milieu d'un segment.

Dans un repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, et on note I le milieu du segment [AB].

1. Rappeler une relation liant les vecteurs $\overline{IA}$ et $\overline{IB}$.
2. En déduire que $\overline{OI} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$.

▲ Voir le savoir-faire 1.

3. En passant aux coordonnées, démontrer que I a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

14 COLINÉARITÉ

★★ 25 min ► P. 392

Dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(1; 3)$, $B(-5; 2)$ et $C(0; -3)$.

1. Soit M le point de coordonnées $(7; t)$, avec $t \in \mathbb{R}$. Déterminer le réel t pour lequel :
a. A, B, M sont alignés ;
b. $(AB) \parallel (CM)$;
c. $\overline{CA}$ soit un vecteur directeur de la droite (OM).
2. Reprendre les mêmes questions avec $M(t; t^2)$.

▲ Le point $M(t; t^2)$ appartient à la courbe de la fonction carré [d'équation $y = x^2$].

15 ALGORITHME

★★ 20 min ► p. 393

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Écrire un algorithme permettant de savoir si le vecteur $\vec{u}(\alpha; \beta)$ est un vecteur directeur de la droite (d) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, a et b étant non nuls.

Après avoir exclu le cas $\vec{u} = \vec{0}$, il faudra distinguer les cas $b = 0$ et $b \neq 0$.

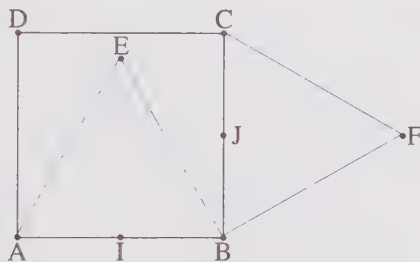
16 REPÈRE LIÉ À UNE FIGURE

★ 25 min ► p. 394

ABCD est un carré.

ABE et CBF sont des triangles équilatéraux.

On note I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[BC]$.



On cherche à savoir si les points D, E et F sont alignés.

1. Pourquoi peut-on affirmer que le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est orthonormal ?
2. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, I et J dans ce repère.

Dire que M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$, signifie que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$.

3. Calculer les distances EI et JF.

Dans un repère orthonormé, la distance entre les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

4. Déterminer alors les coordonnées des points E et F.
5. Les points D, E et F sont-ils alignés ?

17 DROITE D'EULER

★★ 35 min ► p. 396

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les points $A(-1; 2)$, $B(5; 2)$ et $C(3; 8)$.

1. Faire une figure à compléter tout au long de l'exercice.
2. Déterminer les coordonnées des milieux I et J respectivement de $[AB]$ et $[BC]$.
3. Déterminer le point D tel que $DA = DB = DC$. Comment s'appelle D ?

En notant $(x; y)$ les coordonnées de D, la première égalité donne $x = 2$, puis on calcule y à l'aide d'une autre égalité).

4. On note H le point du plan tel que $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

- a. Déterminer les coordonnées de H.
 - b. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéaires.
 - c. En déduire que la droite (CH) est perpendiculaire à la droite (AB).
 - d. On démontre de même que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires. Qu'en déduit-on alors pour H ?
5. On note G le centre de gravité du triangle ABC. À l'aide d'une relation vectorielle liant les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CI}$, déterminer les coordonnées de G.
6. Démontrer que les points D, G et H sont alignés.

18 DROITES CONCOURANTES

★★ 25 min ► p. 397

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère le quadrilatère ABCD, où $A(0; 4)$, $B(-4; -2)$, $C(8; -4)$ et $D\left(4; \frac{10}{3}\right)$.

1. Faire une figure
2. Démontrer que ABCD est un trapèze
3. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AD]$, puis du milieu J de $[BC]$.
4. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB), (DC) et (IJ).
5. Démontrer que ces trois droites sont concourantes.

On pourra montrer que le point d'intersection de deux de ces droites appartient à la troisième.

19 ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE DROITE

★★ 5 min ► p. 399

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit $A(a; b)$ un point du plan, non situé sur un axe.

Démontrer que la droite (OA) admet pour équation cartésienne $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$.

20 ENSEMBLE DE POINTS

★★ 25 min ► p. 399

Soient A, B, C trois points du plan et k un réel quelconque.

Soient les points D, E, F, M définis par :

$$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

1. Faire une figure avec $k = 2$ puis avec $k = -\frac{1}{2}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AF}$. Qu'en déduit-on ?
3. Quel ensemble décrit M lorsque k décrit $\mathbb{R}$? Lorsque k décrit $[0; +\infty[$? Lorsque k décrit le segment $[0; 1]$?

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

21 CERCLE ET DROITE

★★ 20 min ► p. 400

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Équation cartésienne d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon $R > 0$.

Démontrer qu'un point $M(x; y)$ du plan appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2 \quad (\text{équation cartésienne de } \mathcal{C}).$$

2. Système d'équations paramétriques d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

Démontrer qu'un point $M(x; y)$ du plan appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si

$$\text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

 x et y sont exprimés en fonction d'un réel t appelé paramètre.

3. Application : Déterminer l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2)$ avec le cercle $\mathcal{C}$ de centre $B(1; 1)$ et de rayon 3.

22 ALIGNEMENT

★★ 15 min ► p. 401

Soient A, B, C et D quatre points non alignés.

Soit H le point du plan défini par $2\overrightarrow{HA} - 5\overrightarrow{HB} = \vec{0}$.

Soit K le point défini par $3\overrightarrow{KC} + 4\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

Soit G le point défini par $2\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + 4\overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

On veut démontrer que G, H et K sont alignés.

1. Établir que $2\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB} = -3\overrightarrow{GH}$.
2. Établir que $3\overrightarrow{GC} - 4\overrightarrow{GB} = 7\overrightarrow{GK}$.
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GK}$ sont colinéaires, puis conclure.

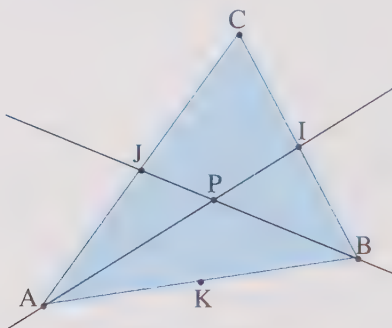
23 MÉDIANES D'UN TRIANGLE

★★★ 35 min ► P. 402

Soit ABC un triangle non plat. On note I, J et K les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB], et P le point d'intersection de (AI) et (BJ).

L'objectif de cet exercice est de démontrer que P appartient aussi à la troisième médiane (CK), et que P est situé « aux deux tiers en partant du sommet ».

▲ Pour cela, on va exprimer différents vecteurs en fonction des vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



1. Puisque P appartient à (AI), il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AI}$.
 - a. Établir que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.
 - b. Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (1).
2. Puisque P appartient à (BJ), il existe un réel β tel que $\overrightarrow{BP} = \beta \overrightarrow{BJ}$.
 - a. Exprimer $\overrightarrow{BJ}$, puis $\overrightarrow{BP}$, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
 - b. En déduire une expression de $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (2).
3. En comparant les expressions (1) et (2), déterminer les valeurs de α et de β .
Établir ensuite que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
4. On veut maintenant démontrer que P appartient également à la médiane issue de C.
 - a. Exprimer $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
 - b. En déduire que les points C, P et K sont alignés.

▲ Les médianes du triangle quelconque ABC sont bien concourantes en un point P qui vérifie $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$. P s'appelle centre de gravité du triangle ABC.

24 TRAPÈZE

★★★ 30 min ▶ P. 403

L'objectif de cet exercice est de montrer que dans un trapèze, qui n'est pas un parallélogramme, les milieux de deux côtés parallèles sont alignés avec le point d'intersection de deux côtés non parallèles.

Il s'agit de la généralisation du résultat observé dans l'exercice 18.

Soit ABCD un trapèze non parallélogramme de bases $[AB]$ et $[CD]$; on note I le point d'intersection des droites (AD) et (BC), J le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[CD]$.

1. Faire une figure.

2. Les points I, A et D étant alignés, il existe un réel k_1 tel que $\overrightarrow{IA} = k_1 \cdot \overrightarrow{ID}$. De même, il existe un réel k_2 tel que $\overrightarrow{IB} = k_2 \cdot \overrightarrow{IC}$.

De plus, les droites (AB) et (DC) étant parallèles, il existe un réel k_3 tel que $\overrightarrow{AB} = k_3 \cdot \overrightarrow{DC}$.

a. Montrer que $(k_1 - k_3)\overrightarrow{ID} = (k_2 - k_3)\overrightarrow{IC}$.

Partir de l'égalité $\overrightarrow{AB} = k_3 \cdot \overrightarrow{DC}$.

b. En déduire que $k_1 = k_2 = k_3$. Quel théorème de géométrie a-t-on démontré ?

Raisonnement par l'absurde.

c. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = k_1 \overrightarrow{IK}$ et conclure.

25 ALGORITHME : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

★★ 45 min ▶ P. 404

Partie A : Question préliminaire :

Dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la droite (d) d'équation $ax + by = c$, $(a; b) \neq (0; 0)$. Démontrer que $\vec{v}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (d) .

Distinguer les cas $b \neq 0$ et $b = 0$.

Partie B

Le but de cette partie est d'écrire un algorithme donnant, s'il y a lieu, l'unique solution du système (S), d'inconnues x et y :

$$(S) \begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases} \quad \text{où} \quad (a_1; b_1) \neq (0; 0) \quad \text{et} \quad (a_2; b_2) \neq (0; 0).$$

1. Dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on définit les droites (d_1) et (d_2) ainsi :

$$(d_1): a_1x + b_1 \cdot y = c_1 \quad \text{avec} \quad (a_1; b_1) \neq (0; 0),$$

$$(d_2): a_2x + b_2 \cdot y = c_2 \quad \text{avec} \quad (a_2; b_2) \neq (0; 0).$$

En remarquant que le couple $(x; y)$ est solution du système (S) si, et seulement si, le point $M(x; y)$ appartient à (d_1) et à (d_2) , démontrer que (S) admet une solution unique si, et seulement si, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

2. Dans le cas où le système admet une unique solution $(x_0; y_0)$, démontrer que :

$$x_0 = \frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 b_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 b_1} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{a_1 \cdot c_2 - a_2 c_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 b_1}.$$

 Résoudre le système par combinaisons linéaires.

3. Que se passe-t-il lorsque la condition n'est pas vérifiée ?

4. Écrire un algorithme comportant en entrée $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, et indiquant si le système admet ou non une unique solution, et la valeur de la solution le cas échéant.

5. Vérifier la validité de votre algorithme sur les exemples suivant :

$$\text{a. } \begin{cases} 2x - 2y = 16 \\ -x + 2y = -13 \end{cases} ; \quad \text{b. } \begin{cases} 21x - 14y = 7 \\ -x + \frac{2y}{3} = 1 \end{cases} ; \quad \text{c. } \begin{cases} \sqrt{3}x - 2y = -\sqrt{3} \\ 2x - \sqrt{3}y = -1 \end{cases}.$$

CONTRÔLE

26 QUESTION DE COURS



15 min

► P. 406

On se place dans un repère du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - yx' = 0$.

27 DROITES



30 min

► P. 406

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé.

On considère les points :

$$A\left(-\frac{5}{2}; \frac{13}{3}\right), \quad B\left(\frac{13}{2}; \frac{4}{3}\right), \quad C\left(-\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right), \quad D\left(\frac{1}{2}; \frac{10}{3}\right) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{18}\right).$$

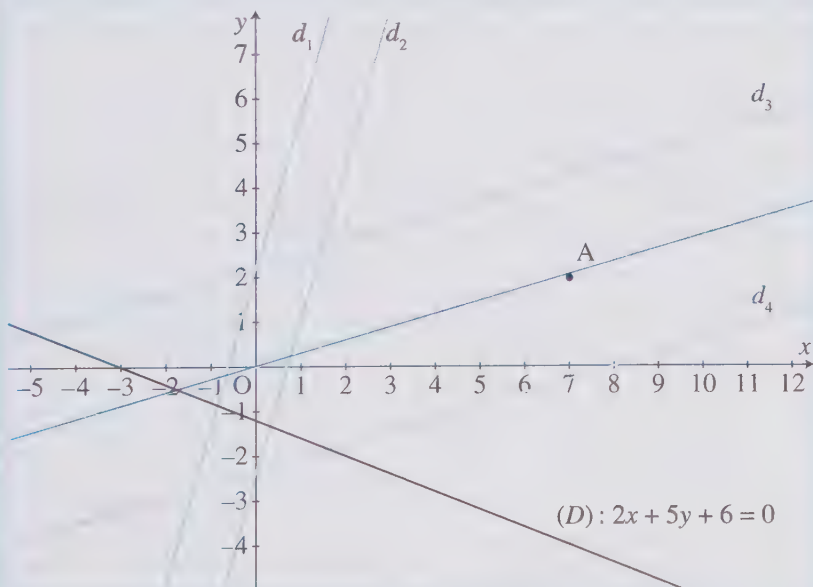
1. D appartient-il à la droite (AB) ?
2. Soit (d) la droite parallèle à (AC) passant par D.
- a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) .
- b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).
- c. Les droites (d) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.
- d. Déterminer les coordonnées du point F, intersection des droites (d) et (BC).
3. Déterminer la nature du quadrilatère ADEC.

CONTRÔLE

28 QCM

★★ 20 min ► p. 407

À chaque question correspond une seule bonne réponse.



1. La droite (OA) a pour équation :
 - a. $7x - 2y = 0$;
 - b. $2x - 7y = 0$;
 - c. $2x + 7y = 0$;
 - d. $7x + 2y = 0$.

2. Un vecteur directeur de (D) est :

- a. $\vec{u}(5; 2)$;
- b. $\vec{v}(2; -5)$;
- c. $\vec{w}(5; -2)$;
- d. $\vec{t}\left(1; -\frac{5}{2}\right)$.

3. La droite d'équation cartésienne $2x - 7y + 16 = 0$ est :

- a. d_1 ; b. d_2 ; c. d_3 ; d. d_4 .

4. La droite Δ d'équation $3x - 4 = 0$...

- a. passe par l'origine du repère ;
- b. passe par le point de coordonnées $(1; 0)$;
- c. est parallèle à l'axe des abscisses ;
- d. est parallèle à l'axe des ordonnées.

29 PROBLÈME

★★ 25 min ► P. 408

On considère un triangle non plat ABC.

Soit D le symétrique de A par rapport à B, E le point défini par $\overrightarrow{CE} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$,

et F le point défini par $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure et placer les points D, E et F.
2. Exprimer $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}$, puis $\overrightarrow{AF}$, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Soit I le milieu du segment $[BC]$. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Démontrer que les droites (ID) et (EF) sont parallèles.

CORRIGÉS

8

$$\begin{aligned} \boxed{1} \text{ a. } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

$$\text{c. } \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BD} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. a. } \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{CA} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CA} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{CB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \text{ 1. } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{BC}.$$

$$\begin{aligned} \text{2. } \vec{u} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \text{ (car } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD})} \\ &= \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Les représentants du vecteur $\vec{u}$ sont donc $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{DG}$, et $\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned} \text{3. a. } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \text{ (car } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC})} \\ &= \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} \text{ (car } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED})} \\ &= \overrightarrow{EA}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} \text{ (car } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED})} \\ &= \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC} \text{ (car } \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{GC})} \\ &= \overrightarrow{FC} (= \overrightarrow{EB}). \end{aligned}$$

d. $\overline{AB} + \overline{FG} = \overline{ED} + \overline{DC} = \overline{EC}$

$$\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AE}$$

e. $= (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CG}$

$$= \overline{AC} + \overline{CG} = \overline{AG}.$$

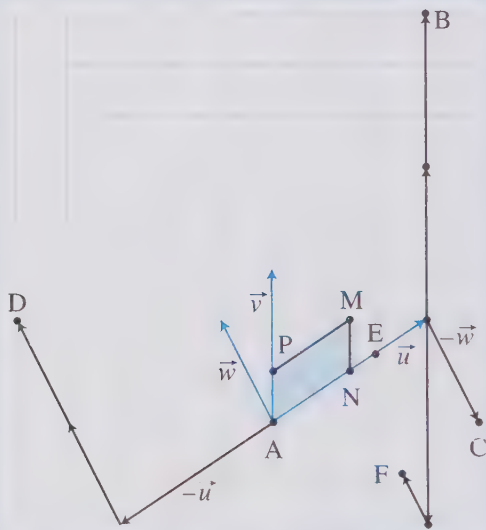
f. $\overline{BA} + \overline{DA} + \overline{EA} = -\overline{AB} - \overline{AD} - \overline{AE}$

$$= -(\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE})$$

$$= -\overline{AG} \text{ d'après e.}$$

$$= \overline{GA}.$$

3 1. Pour le point D, $\overline{AD} = -\overline{DA} = -\vec{u} + 2\vec{w}$.



2. Construisons le parallélogramme ANMP, dont les côtés ont pour direction celles des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}.$$

4 1. • $\overline{BA} + \overline{AM} = \frac{4}{3}\overline{BA}$, d'où $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{BA}$ soit $\overline{AM} = -\frac{1}{3}\overline{AB}$.

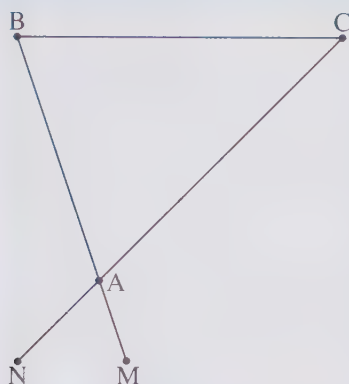
• $4\overline{NA} - (\overline{NA} + \overline{AC}) = \vec{0}$, d'où :

$$3\overline{NA} - \overline{AC} = \vec{0} ;$$

$$-\overline{AC} = 3\overline{AN} ;$$

$$\overline{AN} = -\frac{1}{3}\overline{AC}.$$

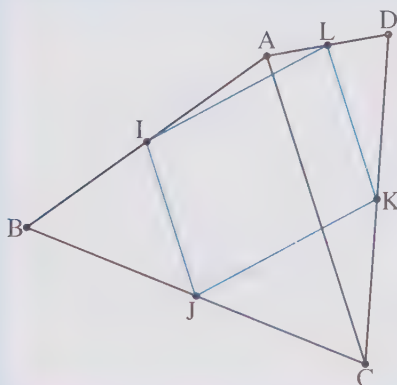
2.



$$\begin{aligned} 3. \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

5 1.



$$2. \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Exprimons maintenant $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de ces mêmes vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

3. Il suffit de montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.

$$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} \left(= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right).$$

Donc IJKL est un parallélogramme.

4. • D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, $(IJ) \parallel (AC)$.

D'après le théorème des milieux dans le triangle ADC, $(LK) \parallel (AC)$.

On en déduit que $(IJ) \parallel (LK)$.

• D'après le théorème des milieux dans le triangle ABD, $(IL) \parallel (BD)$.

D'après le théorème des milieux dans le triangle BDC, $(JK) \parallel (BD)$.

On en déduit que $(IL) \parallel (JK)$.

Le quadrilatère IJKL a ses côtés opposés parallèles, c'est donc un **parallélogramme**.

6 Soit $(d) : y = mx + p$.

• Soit A le point de (d) d'abscisse 0.

$$y_A = mx_A + p = m \times 0 + p = 0 + p = p \text{ donc } A(0 ; p).$$

• Soit B le point de (d) d'abscisse 1.

$$y_B = m \times 1 + p = m + p \text{ donc } B(1 ; m + p).$$

• $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (d) , et a pour coordonnées :

$$(1 - 0 ; m + p - p) = (1 ; m).$$

En notant $\vec{u} = \overrightarrow{AB} : \vec{u}(1 ; m)$ est un vecteur directeur de (d) .

7 1. $d_1 : 3x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = 3x + 6 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$.

a. $\vec{u}(1 ; \frac{3}{2})$ est un vecteur directeur de d_1 .

b. $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{u}$ a pour coordonnées $(\frac{2}{3} ; 1)$.

c. $\vec{w} = k\vec{u}(k ; \frac{3}{2}k)$. Or $k + \frac{3}{2}k = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$.

Donc $\vec{w}(\frac{2}{5} ; \frac{3}{5})$ est un vecteur directeur de d_1 .

2. d_2 est parallèle à l'axe des ordonnées. $\vec{j}(0 ; 1)$ est un vecteur directeur de d_2 .

a. **Il n'existe pas de vecteur directeur de d_2 d'abscisse 1.**

b. $\vec{v} = \vec{j}(0 ; 1)$ est un vecteur directeur de (d_2) .

c. $\vec{w} = \vec{j}$ est un vecteur directeur de (d_2) .

3. $d_3 : x + y = 0$. Or $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.

a. $\vec{u}(1 ; -1)$ est un vecteur directeur de (d_3) .

b. $\vec{v} = -\vec{u}(-1 ; 1)$ est un vecteur directeur de (d_3) .

c. Quel que soit le réel k , $k\vec{u}(k ; -k)$ et $k + (-k) = 0$, donc **il n'existe pas de vecteur directeur de d_3 dont la somme des coordonnées vaut 1.**

4. $d_4 : y = -3x + \pi$

a. $\vec{u}(1 ; -3)$.

b. $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{u}$ soit $\vec{v}(-\frac{1}{3} ; 1)$ est un vecteur directeur de d_4 .

c. $\vec{w} = k\vec{u}(k; -3k)$. Or $k + (-3k) = 1 \Leftrightarrow -2k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$.

Donc $\vec{w}\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est un vecteur directeur de d_4 .

8 1. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overline{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Or $\overline{AM}(x-2; y-5)$ et $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow (x-2) \times 1 - (y-5) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x-2 + \frac{3}{2}y - \frac{15}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{3}{2}y - \frac{19}{2} = 0 \quad (\Leftrightarrow 2x + 3y - 19 = 0).$$

Δ a pour équation cartésienne $x + \frac{3}{2}y - \frac{19}{2} = 0$, ou encore $2x + 3y - 19 = 0$.

2. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$M \in (AB) \Leftrightarrow \overline{AM}$ et $\overline{AB}$ sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow (x-2) \times \left(-\frac{9}{2}\right) - (y-5) \times (-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{2}x + 9 + 8y - 40 = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2}x + 8y - 31 = 0.$$

(AB) admet pour équation cartésienne $-\frac{9}{2}x + 8y - 31 = 0$.

3. 1^{re} méthode :

(AB) a pour équation réduite $y = \frac{9}{16}x + \frac{31}{8}$.

$(d) \parallel (AB)$ donc $(d): y = \frac{9}{16}x + p$.

$C \in (d)$ donc $y_C = \frac{9}{16}x_C + p$, soit $-2 = \frac{9}{16} \times 3 + p$,

d'où $p = -2 - \frac{27}{16} = -\frac{59}{16}$, donc $(d): y = \frac{9}{16}x - \frac{59}{16}$.

Une équation cartésienne de (d) est $\frac{9}{16}x - y - \frac{59}{16} = 0$, ou encore :

$$9x - 16y - 59 = 0.$$

2^e méthode :

$\overline{AB}\left(-8; -\frac{9}{2}\right)$ est un vecteur directeur de (d) .

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$M \in (d) \Leftrightarrow \overline{CM}$ et $\overline{AB}$ sont colinéaires (avec $\overline{CM}(x-3; y+2)$)

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(-\frac{9}{2}\right) - (y+2)(-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{2}x + \frac{27}{2} + 8y + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{2}x + 8y + \frac{59}{2} = 0.$$

$$(d) -\frac{9}{2}x + 8y + \frac{59}{2} = 0 \text{ ou encore } 9x - 16y - 59 = 0.$$

4. Vérifions que $\overline{OC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : $\overline{OC}(3; -2)$ et $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.

$$3 \times 1 - (-2) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 3 - 3 = 0,$$

donc $\overline{OC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

D'où (OC) et Δ sont parallèles.

9 1. a. $M(-5; 7)$ appartient à (AB).

b. $M(5; -7)$ n'appartient pas à (AB).

c. $M(1; 3) = A$ appartient à (AB).

2. Soient $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $M(x; y)$ trois points du plan.

A, B et M sont alignés si, et seulement si, $\overline{AB}$ et $\overline{AM}$ sont colinéaires.

Or $\overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ et $\overline{AM}(x - x_A; y - y_A)$.

Donc A, B et M sont alignés si, et seulement si :

$$(x - x_A) \times (y_B - y_A) - (x_B - x_A) \times (y - y_A) = 0.$$

D'où l'algorithme ci-dessous :

VARIABLES

x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
xA EST_DU_TYPE NOMBRE
yA EST_DU_TYPE NOMBRE
xB EST_DU_TYPE NOMBRE
yB EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

LIRE x
LIRE y
LIRE xA
LIRE yA
LIRE xB
LIRE yB

SI $((x - xA) \times (yB - yA) - (y - yA) \times (xB - xA) == 0)$ ALORS

DEBUT_SI

AFFICHER "M appartient à (AB)"

FIN_SI

SINON

DEBUT_SINON

AFFICHER "M n'appartient pas à (AB)"

FIN_SINON

FIN_ALGORITHME

10 Déterminons l'équation réduite des droites D_1 , D_2 et D_4 (les droites affines sont celles dont le terme en y apparaît dans l'équation).

• $2x - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. D_1 a pour équation réduite $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.

On cherche un point et un vecteur directeur de D_1 à coordonnées entières.

Avec $x = 2$, on obtient le point $A(2; 0)$.

D'après le cours, $\vec{u}\left(1; \frac{2}{3}\right)$ est un vecteur de D_1 , donc $3\vec{u}(3; 2)$ est également un vecteur de D_1 , à coordonnées entières.

• $x + \frac{y}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 4$.

D_2 a pour équation réduite $y = -2x - 4$.

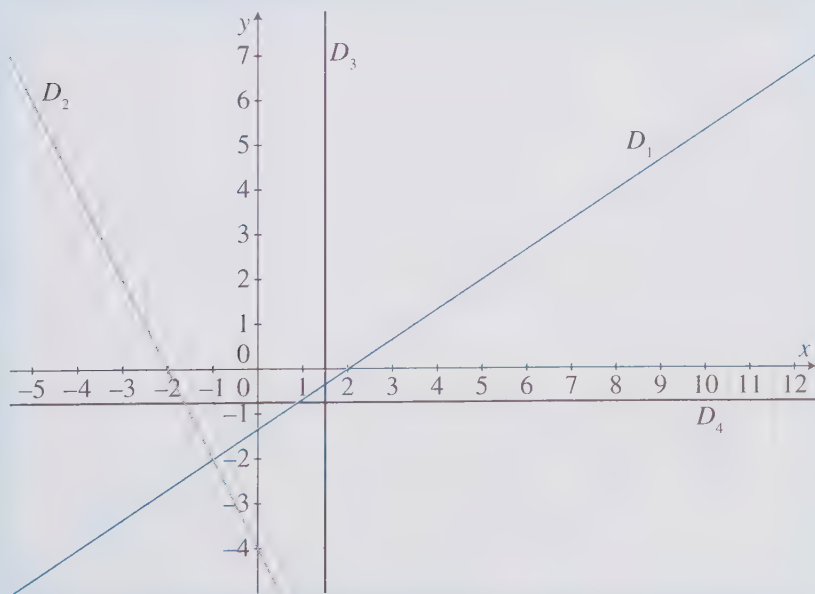
D_2 passe par le point de coordonnées $(0; -4)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}(0; -2)$.

• $5x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. D_3 est parallèle à l'axe des ordonnées.

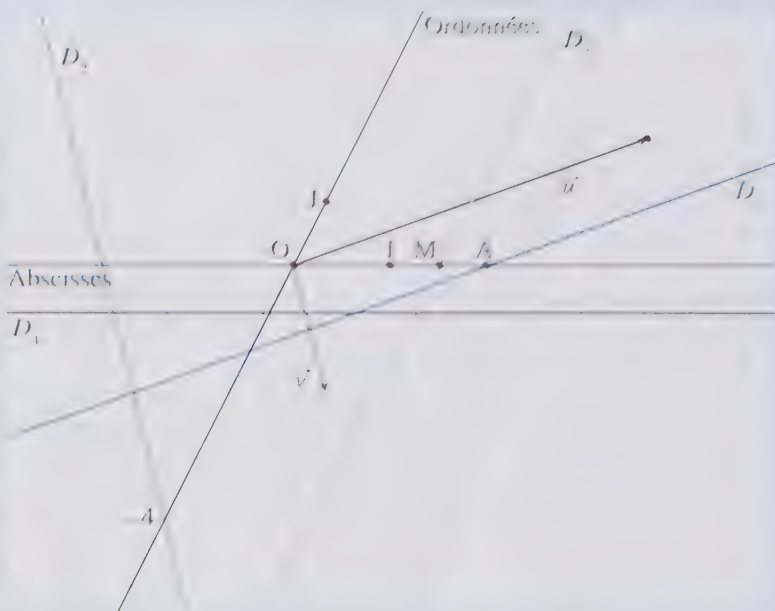
• $4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}$.

D_4 a pour équation réduite $y = -\frac{3}{4}$.

1. Dans un repère orthonormal :



2. Dans le repère non orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$:



11. a.



b. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.

Or $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc $ABDC$ est un parallélogramme dont les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu. **J est donc le milieu de $[AD]$.**

2. a. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}$. Alors :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

b. On en déduit que $\overline{AB} + \overline{AC} = -4\overline{GA}$, soit $\overline{AB} + \overline{AC} = 4\overline{AG}$.

D'où $\overline{AG} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC}$.

3. $\overline{AG} = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{4}\overline{AD}$ (1).

I étant le milieu de $[AD]$, on a de plus $\overline{AD} = 2\overline{AI}$ (2).

Il découle des égalités (1) et (2) que $\overline{AG} = \frac{1}{4}(2\overline{AI}) = \frac{1}{2}\overline{AI}$.

On en déduit que **G est le milieu de $[AI]$.**

12 1. $\overline{DB} = -\frac{2}{3}\overline{BA}$ et $\overline{CL} = \frac{2}{3}\overline{CA} = \frac{2}{3}(\overline{CB} + \overline{BA})$ donc :

$$\overline{CL} = -\frac{2}{3}\overline{BC} + \frac{2}{3}\overline{BA}.$$

2. a. • Le triangle DEF étant équilatéral. $\widehat{EDF} = 60^\circ (= \widehat{EDB})$.

ABC étant équilatéral, $\widehat{ABC} = 60^\circ (= \widehat{DBC})$.

(DE) et (BC) sont sécantes à la droite (AB), avec $\widehat{EDB} = \widehat{DBC} = 60^\circ$. Les angles $\widehat{EDB}$ et $\widehat{DBC}$ sont donc alternes internes, et $(ED) \parallel (BC)$.

• $ED = \frac{1}{3}BC$: $(ED) \parallel (BC)$ et les vecteurs $\overline{ED}$ et $\overline{BC}$ sont de même sens donc :

$$\overline{ED} = \frac{1}{3}\overline{BC}.$$

b. • (LK) et (BC) sont sécantes à la droite (AC). $\widehat{KLJ} = 60^\circ$ et $\widehat{ACB} = 60^\circ$ (triangles équilatéraux), donc $(LK) \parallel (BC)$.

• $\overline{LK} = \frac{1}{3}\overline{BC}$.

3. $\overline{EK} = \overline{ED} + \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{CL} + \overline{LK}$

$$\overline{EK} = \frac{1}{3}\overline{BC} + \left(-\frac{2}{3}\overline{BA}\right) + \overline{BC} + \left(-\frac{2}{3}\overline{BC} + \frac{2}{3}\overline{BA}\right) + \frac{1}{3}\overline{BC}$$

$$\overline{EK} = \overline{BC}.$$

4. $\overline{ED} = \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{1}{3}\overline{EK}$, donc E, D, K sont alignés.

$$\overline{LK} = \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{1}{3}\overline{EK}, \text{ donc L, E, K sont alignés.}$$

On en déduit que **E, K, L et D sont alignés.**

13 1. $\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$ (voir cours).

2. Introduisons le point O à l'aide de la relation de Chasles : on obtient :

$$(\overline{IO} + \overline{OA}) + (\overline{IO} + \overline{OB}) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= \vec{0}. \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= 2\overrightarrow{OI} \\ \overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \end{aligned}$$

3.

Le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ont les mêmes coordonnées $(x_M; y_M)$.

$$\overrightarrow{OI}(x_I; y_I) \text{ et } \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\left(\frac{1}{2}(x_A + x_B); \frac{1}{2}(y_A + y_B)\right).$$

$$\text{D'où } x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

14 1. a. A, B, M sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AB}(-6; -1)$ et $\overrightarrow{AM}(6; t-3)$ d'où :

$$A, B, M \text{ sont alignés } \Leftrightarrow -6(t-3) - (-1) \times 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6t + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 4 \text{ (et } M(7; 4)).$$

b. $(AB) \parallel (CM) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{CM}(7; t+3)$ d'où :

$$(AB) \parallel (CM) \Leftrightarrow -6(t+3) - (-1) \times 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6t - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{11}{6} \text{ (et } M(7; -\frac{11}{6})).$$

c. $\overrightarrow{CA}$ est un vecteur directeur de (OM) si, et seulement si, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{CA}(1; 6)$ et $\overrightarrow{OM}(7; t)$, d'où :

$$\overrightarrow{CA} \text{ dirige } (OM) \Leftrightarrow 1 \times t - 6 \times 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 42 \text{ (et } M(7; 42)).$$

2. a. $\overrightarrow{AM}(t-1; t^2-3)$.

A, B, M sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow -6(t^2-3) - (-1)(t-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6t^2 + t + 17 = 0.$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-6) \times 17 = 409 > 0 \text{ donc :}$$

$$A, B, M \text{ sont alignés } \Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{409}}{-12} \text{ ou } t = \frac{-1 - \sqrt{409}}{-12}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1 - \sqrt{409}}{12} \text{ ou } t = \frac{1 + \sqrt{409}}{12}.$$

b. $\overrightarrow{CM}(t-0; t^2+3)$ donc :

$$\begin{aligned}(AB) \parallel (CM) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow -6 \times (t^2+3) - (-1) \times (t-0) = 0 \\ &\Leftrightarrow -6t^2 + t - 18 = 0.\end{aligned}$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-6) \times (-18) = -431 < 0.$$

L'équation $-6t^2 + t - 18 = 0$ n'admet pas de solution.

Il n'existe donc pas de valeur de t pour laquelle $M(t; t^2)$ vérifie $(AB) \parallel (CM)$.

c. $\overrightarrow{CA}$ est un vecteur directeur de (OM)

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{OM} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow 1 \times t^2 - 6 \times t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t = 0 \\ &\Leftrightarrow t(t-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 6.\end{aligned}$$

Le cas $t = 0$ est à exclure, car il correspond à $M = O(0; 0)$. Les points O et M ne permettent pas de définir une droite.

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \text{ dirige } (OM) &\Leftrightarrow t = 6 \\ &\Leftrightarrow M(6; 36).\end{aligned}$$

tion carré. Taper dans la barre de saisie $f(x) = x^2$.

15 (d) : $ax + by + c = 0$ (a et b non simultanément nuls).

• Si $b \neq 0$, alors (d) a pour équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Un vecteur directeur de (d) est donc $\vec{v}\left(1; -\frac{a}{b}\right)$.

Dans ce cas, $\vec{u}(\alpha; \beta)$ est un vecteur directeur de (d) si, et seulement, si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si, $\alpha \times \left(-\frac{a}{b}\right) - \beta \times 1 = 0$.

• Si $b = 0$, alors (d) a pour équation $x = -\frac{c}{a}$ (b étant nul, a ne peut pas l'être), et admet pour vecteur directeur $\vec{j}(0; 1)$.

Dans ce cas, $\vec{u}(\alpha; \beta)$ est un vecteur directeur de (d) si, et seulement, si, $\vec{u}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si, $\alpha \times 1 - \beta \times 0 = 0$ soit $\alpha = 0$.

D'où l'algorithme :

```

VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  alpha EST_DU_TYPE NOMBRE
  beta EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE alpha
  LIRE beta
  SI (alpha==0 ET beta==0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "erreur"
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
    SI (b!=0) ALORS
      DEBUT_SI
      SI (beta+alpha*a/b==0) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "u est un vecteur directeur de d"
        FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        AFFICHER "u n'est pas un vecteur directeur de d"
        FIN_SINON
      FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SI
      SI (alpha==0) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "u est un vecteur directeur de d"
        FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        AFFICHER "u n'est pas un vecteur directeur de d"
        FIN_SINON
      FIN_SI
    FIN_SINON
  FIN_SINON
FIN_ALGORITHME

```

16 1. ABCD est un carré, donc $AB = AD$ et $\widehat{BAD} = 90^\circ$.
Donc $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormal.

2. • $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ donc $A(0; 0)$.

• $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \overrightarrow{AD}$ donc $B(1; 0)$.

• $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $C(1; 1)$.

- $\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$ donc $\mathbf{D}(0; 1)$.
- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$ donc $\mathbf{I}(\frac{1}{2}; 0)$.
- $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\mathbf{J}(1; \frac{1}{2})$.

3. Dans le triangle AEB équilatéral, la médiane (EI) est aussi la hauteur issue de E. Donc, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEI rectangle en I :

$$AE^2 = AI^2 + IE^2, \text{ soit } 1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + IE^2.$$

$$\text{D'où } IE^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ et } \mathbf{IE} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{De même pour (JF), hauteur issue de F du triangle équilatéral BCF : } \mathbf{JF} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

 La formule de la distance n'est valable que dans un repère orthonormal.

4. Comme le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est orthogonal.

$$\bullet \mathbf{EI}^2 = (x_E - x_I)^2 + (y_E - y_I)^2.$$

$$\frac{3}{4} = 0^2 - (y_E - 0)^2, \text{ d'où } y_E^2 = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Comme } y_E > 0, y_E = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \mathbf{E}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\bullet \mathbf{JF}^2 = (x_F - x_J)^2 + (y_F - y_J)^2.$$

$$\frac{3}{4} = (x_F - 1)^2 + 0^2 \text{ car } y_F = y_J = \frac{1}{2}.$$

$$x_F^2 - 2x_F + 1 = \frac{3}{4} \text{ soit } x_F^2 - 2x_F + \frac{1}{4} = 0.$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{4} = 3 > 0.$$

L'équation admet deux solutions :

$$x_F = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad x_F = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

Ici, $x_F > 1$.

$$\text{Donc } x_F = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \mathbf{F}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

$$5. \overrightarrow{DE}(x_E - x_D; y_E - y_D), \text{ d'où } \overrightarrow{DE}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right).$$

$$\overrightarrow{DF}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0; \frac{1}{2} - 1\right), \text{ d'où } \overrightarrow{DF}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

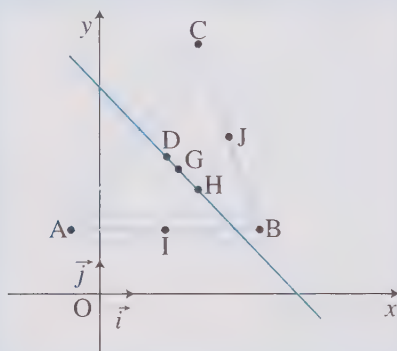
$$\text{Or } \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)$$

(3^e identité remarquable)

$$= -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 = 0.$$

Donc $\overline{DE}$ et $\overline{DF}$ sont colinéaires et **D, E et F sont alignés.**

17 1.



2. $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, donc $I\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{2+2}{2}\right)$ soit **I(2 ; 2).**

$J\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$, donc $J\left(\frac{5+3}{2}; \frac{2+8}{2}\right)$ soit **J(4 ; 5).**

3. • $DA^2 = DB^2$, donc comme le repère est orthonormal :

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = x^2 + y^2 - 10x - 4y + 29 \Leftrightarrow 12x = 24 \Leftrightarrow x = 2.$$

• $DB^2 = DC^2 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2.$

Comme $x = 2$:

$$(-3)^2 + y^2 - 4y + 4 = (-1)^2 + y^2 - 16y + 64 \Leftrightarrow 12y = 1 + 64 - 9 - 4$$

$$\Leftrightarrow 12y = 52 \Leftrightarrow y = \frac{13}{3}.$$

$D\left(2; \frac{13}{3}\right)$. D est le centre du cercle circonscrit au triangle.

4. a. $\overline{DH} = \overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}$, donc :

$$\begin{cases} x_H - 2 = (-1-2) + (5-2) + (3-2) \\ y_H - \frac{13}{3} = \left(2 - \frac{13}{3}\right) + \left(2 - \frac{13}{3}\right) + \left(8 - \frac{13}{3}\right) \end{cases} \text{ d'où :}$$

$$\begin{cases} x_H = -3 + 3 + 1 + 2 = 3 \\ y_H = 12 - 2 \times \frac{13}{3} = +\frac{10}{3} \end{cases} \text{ et } \mathbf{H\left(3; \frac{10}{3}\right)}.$$

b. $\overrightarrow{CH}\left(3-3; \frac{10}{3}-8\right)$, donc $\overrightarrow{CH}\left(0; -\frac{14}{3}\right)$.

$\overrightarrow{ID}\left(2-2; \frac{13}{3}-2\right)$, donc $\overrightarrow{ID}\left(0; \frac{7}{3}\right)$.

Donc $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéaires.



Ces deux vecteurs sont colinéaires à j .

c. D'après b., $(CH) \parallel (ID)$.

Or le centre du cercle circonscrit D est sur la médiatrice de $[AB]$ et le milieu I de $[AB]$ également.

$I \neq D$, donc (ID) est la médiatrice de $[AB]$.

Par conséquent $(ID) \perp (AB)$, donc $(CH) \perp (AB)$.

d. $(CH) \perp (AB)$, donc (CH) est la hauteur issue de C de ABC.

Puisque $(AH) \perp (BC)$, (AH) est la hauteur issue de A de ABC.

H est le point d'intersection de ces deux hauteurs, **H est donc l'orthocentre du triangle ABC.**

5. $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$, donc par passage aux coordonnées :

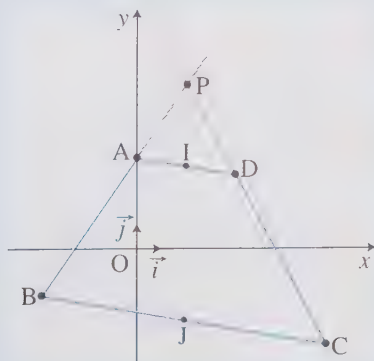
$$\begin{cases} x_G - 3 = \frac{2}{3}(2 - 3) \\ y_G - 8 = \frac{2}{3}(2 - 8) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x_G = \frac{7}{3} \\ y_G = 4 \end{cases} \text{ et } G\left(\frac{7}{3}; 4\right).$$

6. $\overrightarrow{DG}\left(\frac{7}{3}-2; 4-\frac{13}{3}\right)$, d'où $\overrightarrow{DG}\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{DH}\left(3-2; \frac{10}{3}-\frac{13}{3}\right)$ soit $\overrightarrow{DH}(1; -1)$.

On remarque que $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$. Ces vecteurs sont donc colinéaires, et **les points D, G, H sont alignés.**

18 1.



2. $\overline{AD}\left(4-0; \frac{10}{3}-4\right)$, donc $\overline{AD}\left(4; -\frac{2}{3}\right)$.

$\overline{BC}(8-(-4); -4-(-2))$, donc $\overline{BC}(12; -2)$.

$\overline{BC} = 3\overline{AD}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AD}$ sont colinéaires
($BC \parallel AD$). **ABCD est donc un trapèze.**

3. $I\left(\frac{0+4}{2}; \frac{4+\frac{10}{3}}{2}\right)$, soit $I\left(2; \frac{11}{3}\right)$.

$J\left(\frac{-4+8}{2}; \frac{-2-4}{2}\right)$, soit $J(2; -3)$.

4. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

• $M \in (AB) \Leftrightarrow \overline{AM}$ et $\overline{AB}$ sont colinéaires.

Or, $\overline{AM}(x; y-4)$ et $\overline{AB}(-4; -6)$.

$$M \in (AB) \Leftrightarrow x \times (-6) - (y-4) \times (-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x + 4y - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 2y - 8 = 0.$$

(AB) : $-3x + 2y - 8 = 0$.

• $M \in (CD) \Leftrightarrow \overline{CM}$ et $\overline{CD}$ sont colinéaires.

Or, $\overline{CM}(x-8; y+4)$ et $\overline{CD}\left(-4; \frac{22}{3}\right)$.

$$M \in (CD) \Leftrightarrow (x-8)\left(\frac{22}{3}\right) - (y+4)(-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{22}{3}x + 4y - \frac{128}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 11x + 6y - 64 = 0 \text{ (en multipliant par } \frac{3}{2}\text{)}.$$

(CD) : $11x + 6y - 64 = 0$.

• $M \in (IJ) \Leftrightarrow \overline{IM}$ et $\overline{IJ}$ sont colinéaires.

Or, $\overline{IM}\left(x-2; y-\frac{11}{3}\right)$ et $\overline{IJ}\left(2-2; -3-\frac{11}{3}\right)$ soit $\overline{IJ}\left(0; -\frac{20}{3}\right)$.

$$M \in (IJ) \Leftrightarrow (x-2) \times \left(-\frac{20}{3}\right) - \left(y-\frac{11}{3}\right) \times 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \times \left(-\frac{20}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0.$$

(IJ) : $x-2 = 0$.

5. Déterminons les coordonnées du point d'intersection P de (AB) et (IJ).

$$\begin{cases} P \in (AB) \\ P \in (IJ) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_P + 2y_P - 8 = 0 \\ x_P - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_P = 3 \times 2 + 8 \\ x_P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_P = 7 \\ x_P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow P(2; 7).$$

• Vérifions que $P(2; 7)$ appartient aussi à (CD) :

$$11x_P + 6y_P - 64 = 11 \times 2 + 6 \times 7 - 64 = 0, \text{ donc } P \in (CD).$$

Donc (AB) , (CD) , et (IJ) sont sécantes en $P(2; 7)$.

19 $\overrightarrow{OA}(a; b)$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$M \in (OA) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow (x-0) \times b - (y-0) \times a = 0$$

$$\Leftrightarrow xb - ya = 0.$$

A n'étant pas sur l'axe des abscisses, $b \neq 0$,

A n'étant pas sur l'axe des ordonnées, $a \neq 0$,

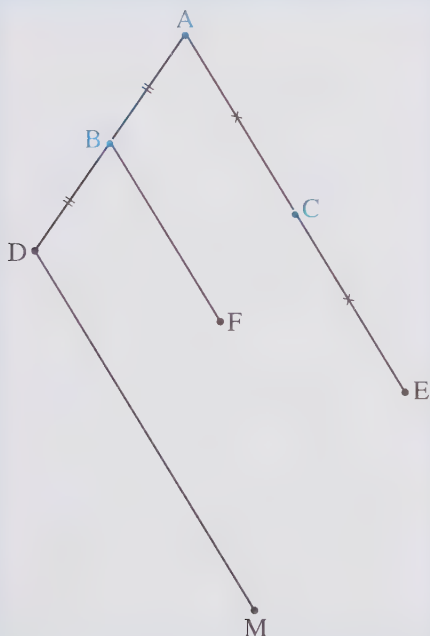
donc $ab \neq 0$.

D'où $M \in (OA) \Leftrightarrow xb - ya = 0$

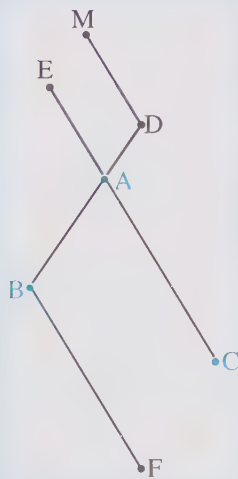
$$\Leftrightarrow \frac{xb}{ab} - \frac{ya}{ab} = \frac{0}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

20 1. $k = 2$



$$k = -\frac{1}{2}$$



2. Exprimons $\overline{AM}$ en fonction de $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$:

$$\begin{aligned}\overline{AM} &= \overline{AD} + \overline{AE} \\ &= k \cdot \overline{AB} + k \cdot \overline{AC} \\ &= k(\overline{AB} + \overline{AC}) \\ &= k\overline{AF}.\end{aligned}$$

$\overline{AM} = k\overline{AF}$, donc les vecteurs $\overline{AM}$ et $\overline{AF}$ sont colinéaires.

Donc les points A, M et F sont alignés.

3. Lorsque k décrit $\mathbb{R}$, **M décrit la droite (AF).**

Lorsque k décrit $[0; +\infty[$, **M décrit la demi-droite [AF).**

Lorsque k décrit $[0; 1]$, **M décrit le segment [AF].**

21 1. $M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = R$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \text{ (car une distance est } > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

2. $M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overline{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \overline{AM} = t \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x - x_A = t\alpha \\ y - y_A = t\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta. \end{cases}$$

3. • D'après 2., un point $M(x; y)$ du plan appartient à (D) si, et seulement si, il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

• D'après 1., un point $M(x; y)$ du plan appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si :

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

$$\bullet \text{ Finalement, } M(x; y) \in (D) \cap \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ t^2 + (1 + 2t)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ 5t^2 + 4t - 8 = 0. \end{cases}$$

$\Delta = 4^2 - 4 \times 5 \times (-8) = 176 > 0$, donc l'équation $5t^2 + 4t - 8 = 0$ admet deux solutions.

Comme $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{11}$, ce sont :

$$t_1 = \frac{-4 + 4\sqrt{11}}{10} = \frac{-2 + 2\sqrt{11}}{5} \text{ et } t_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{11}}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } M(x; y) \in \mathcal{C} \cap (D) &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-2 + 2\sqrt{11}}{5} \\ x = \frac{3 + 2\sqrt{11}}{5} \\ y = \frac{6 + 4\sqrt{11}}{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-2 - 2\sqrt{11}}{5} \\ x = \frac{3 - 2\sqrt{11}}{5} \\ y = \frac{6 - 4\sqrt{11}}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ et (D) sont sécants en :

$$P\left(\frac{3 + 2\sqrt{11}}{5}; \frac{6 + 4\sqrt{11}}{5}\right) \text{ et } Q\left(\frac{3 - 2\sqrt{11}}{5}; \frac{6 - 4\sqrt{11}}{5}\right).$$

22 1. Introduisons le point G dans l'égalité $2\overrightarrow{HA} - 5\overrightarrow{HB} = \vec{0}$:

$$2\overrightarrow{HA} - 5\overrightarrow{HB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GA}) - 5(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{HG} + 2\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{HG}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB} = -3\overrightarrow{GH}.$$

2. De même pour la seconde égalité :

$$3\overrightarrow{KC} + 4\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GC}) + 4(\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{KG} + 3\overrightarrow{GC} + 4\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC} + 4\overrightarrow{GD} = 7\overrightarrow{GK}.$$

3. On a de plus :

$$\begin{aligned} \underbrace{2\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB}}_{-3\overrightarrow{GH}} + \underbrace{3\overrightarrow{GC} + 4\overrightarrow{GD}}_{7\overrightarrow{GK}} &= \vec{0} \\ -3\overrightarrow{GH} + 7\overrightarrow{GK} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } 7\overrightarrow{GK} = 3\overrightarrow{GH} \text{ et } \overrightarrow{GK} = \frac{3}{7}\overrightarrow{GH}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires, donc les points G, K et H sont alignés.

$$\boxed{23} \quad 1. \text{ a. } \overline{AB} + \overline{AC} = (\overline{AI} + \overline{IB}) + (\overline{AI} + \overline{IC}) \\ = 2\overline{AI} + \overline{IB} + \overline{IC}.$$

Mais comme I est le milieu de [BC], $\overline{IB} + \overline{IC} = \vec{0}$, d'où :

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AI} + \vec{0} = 2\overline{AI}.$$

$$\text{b. } \overline{AP} = \alpha \overline{AI} = \frac{\alpha}{2} (\overline{AB} + \overline{AC}), \text{ d'où } \overline{AP} = \frac{\alpha}{2} \overline{AB} + \frac{\alpha}{2} \overline{AC} \quad (1).$$

$$2. \text{ a. } \bullet \overline{BJ} = \overline{BA} + \overline{AJ} = -\overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AC} \text{ (car J milieu de [AC])}.$$

$$\bullet \overline{BP} = \beta \overline{BJ} = \beta \left(-\overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AC} \right), \text{ d'où } \overline{BP} = -\beta \overline{AB} + \frac{\beta}{2} \overline{AC}.$$

$$\text{b. } \overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AB} - \beta \overline{AB} + \frac{\beta}{2} \overline{AC} \text{ d'où :}$$

$$\overline{AP} = (1 - \beta) \overline{AB} + \frac{\beta}{2} \overline{AC} \quad (2).$$

$$3. \begin{cases} \overline{AP} = \frac{\alpha}{2} \overline{AB} + \frac{\alpha}{2} \overline{AC} \\ \overline{AP} = (1 - \beta) \overline{AB} + \frac{\beta}{2} \overline{AC}. \end{cases}$$

$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ n'étant pas colinéaires (puisque ABC non plat), le vecteur $\overline{AP}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$.

$$\text{D'où } \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 1 - \beta \text{ (coefficients de } \overline{AB}) \\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \text{ (coefficients de } \overline{AC}). \end{cases}$$

$$\text{D'où } \alpha = \beta \text{ et } \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha ;$$

$$\text{soit } \frac{3}{2} \alpha = 1 \text{ soit } \alpha = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Donc } \alpha = \beta = \frac{2}{3} \text{ et } \overline{AP} = \frac{1}{3} \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AC}.$$

$$4. \text{ a. } \bullet \overline{CK} = \overline{CA} + \overline{AK} = -\overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{AB} \text{ (car K est le milieu de [AB])}.$$

$$\bullet \overline{CP} = \overline{CA} + \overline{AP} = -\overline{AC} + \frac{1}{3} \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AC} = \frac{1}{3} \overline{AB} - \frac{2}{3} \overline{AC}.$$

$$\text{b. } \overline{CK} = \frac{1}{2} \overline{AB} - \overline{AC} \text{ et } \overline{CP} = \frac{1}{3} \overline{AB} - \frac{2}{3} \overline{AC}.$$

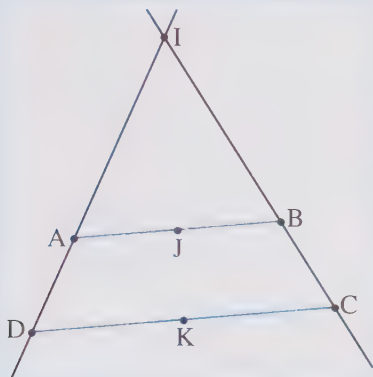
En comparant les coefficients de $\overline{AC}$, on voit que si $\overline{CK}$ et $\overline{CP}$ sont colinéaires, alors

$$\overline{CP} = \frac{2}{3} \overline{CK}.$$

$$\frac{2}{3} \overline{CK} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \overline{AB} - \overline{AC} \right) = \frac{1}{3} \overline{AB} - \frac{2}{3} \overline{AC} = \overline{CP}.$$

$\overline{CK}$ et $\overline{CP}$ sont bien colinéaires donc les points C, K, P sont alignés.

24 1.



2. a. On introduit le point I :

$$\overrightarrow{AB} = k_3 \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = k_3 \cdot (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC})$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{IA} + k_2 \cdot \overrightarrow{IC} = k_3 \cdot (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC})$$

$$\Leftrightarrow -k_1 \cdot \overrightarrow{ID} + k_2 \cdot \overrightarrow{IC} = -k_3 \cdot \overrightarrow{ID} + k_3 \cdot \overrightarrow{IC}$$

$$\Leftrightarrow (k_2 - k_3) \cdot \overrightarrow{IC} = (k_1 - k_3) \cdot \overrightarrow{ID}.$$

b. On raisonne par l'absurde.

• Si $k_1 \neq k_3$ alors $k_1 - k_3 \neq 0$ et $\overrightarrow{ID} = \frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_3} \overrightarrow{IC}$, ce qui implique que I, D et C sont alignés.

C'est impossible. Donc $k_1 = k_3$.

• Si $k_2 \neq k_3$ alors $k_2 - k_3 \neq 0$ et $\overrightarrow{IC} = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} \overrightarrow{ID}$ d'où I, C, D sont alignés.

C'est impossible. Donc $k_2 = k_3$.

$$\text{Donc } k_1 = k_3 = k_2, \text{ il existe donc un réel } k_1 \text{ tel que } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = k_1 \overrightarrow{ID} \\ \overrightarrow{IB} = k_1 \overrightarrow{IC} \\ \overrightarrow{AB} = k_1 \overrightarrow{DC}. \end{cases}$$

C'est le théorème de Thalès appliqué au triangle IDC.

c. $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{ID} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} ;$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = k_1 \cdot \overrightarrow{ID} + \frac{1}{2} \times k_1 \cdot \overrightarrow{DC}.$$

$$\overrightarrow{IJ} = k_1 \left(\overrightarrow{ID} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} \right) = k_1 \cdot \overrightarrow{IK}.$$

$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires donc I, J et K sont alignés.

25 Partie A

- Si $b \neq 0$, alors (d) a pour équation réduite $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, et $\vec{u}\left(1; -\frac{a}{b}\right)$ est un vecteur directeur de (d) . Or $\vec{v} = (-b) \cdot \vec{u}$, avec $(-b) \neq 0$, donc $\vec{v}$ est également un vecteur directeur de (d) .
- Si $b = 0$, alors $\vec{j}(0; 1)$ est un vecteur directeur de (d) . Or, $\vec{v}$ a pour coordonnées $(-b; a) = (0; a)$, donc $\vec{v} = a \cdot \vec{j}$ avec $a \neq 0$, donc $\vec{v}$ est également un vecteur directeur de (d) .

Partie B

1. Le système admet une unique solution

$\Leftrightarrow$ les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes

$\Leftrightarrow$ leurs vecteurs directeurs $\vec{v}_1(-b_1; a_1)$ et $\vec{v}_2(-b_2; a_2)$ ne sont pas colinéaires

$$\Leftrightarrow -b_1a_2 - a_1(-b_2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

2. On se place ici dans le cas où le système admet une unique solution, c'est-à-dire où $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Si $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ alors, en multipliant la première ligne par a_2 et la seconde par a_1 ,

$$\text{on obtient } \begin{cases} a_2a_1x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2. \end{cases}$$

D'où, en retranchant la 1^{re} ligne à la 2^e: $(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$.

$$\text{Comme } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

D'autre part, en multipliant la première ligne par b_2 et la seconde par b_1 , on obtient :

$$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1 \\ b_1a_2x + b_1b_2y = b_1c_2, \end{cases}$$

puis, en retranchant la 2^e ligne à la 1^{re} :

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

$$\text{Comme } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Donc, lorsque $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, l'unique solution du système est le couple :

$$\left(\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right).$$

3. La condition n'est pas vérifiée lorsque les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles. Il peut alors y avoir :

- **aucune solution**, si les droites sont parallèles disjointes
- **une infinité de solutions**, si les droites sont confondues (ce sont les couples de coordonnées de tous les points de la droite $(d_1) (= (d_2))$).

4.

VARIABLES

```
a1 EST_DU_TYPE NOMBRE
b1 EST_DU_TYPE NOMBRE
c1 EST_DU_TYPE NOMBRE
a2 EST_DU_TYPE NOMBRE
b2 EST_DU_TYPE NOMBRE
c2 EST_DU_TYPE NOMBRE
x0 EST_DU_TYPE NOMBRE
y0 EST_DU_TYPE NOMBRE
```

DEBUT_ALGORITHME

LIRE a1

LIRE b1

LIRE c1

LIRE a2

LIRE b2

LIRE c2

SI $(a1*b2 - a2*b1 == 0)$ ALORS

DEBUT_SI

AFFICHER "le système n'admet pas une unique solution"

FIN_SI

SINON

DEBUT_SINON

x0 PREND_LA_VALEUR $(c1*b2 - c2*b1)/(a1*b2 - a2*b1)$ y0 PREND_LA_VALEUR $(a1*c2 - a2*c1)/(a1*b2 - a2*b1)$

AFFICHER "le système admet une solution unique qui est ("

AFFICHER x0

AFFICHER " ; "

AFFICHER y0

AFFICHER "),"

FIN_SINON

FIN_ALGORITHME

5. a. $a_1 = 2$; $b_1 = -2$; $c_1 = 16$; $a_2 = -1$; $b_2 = 2$; $c_2 = -13$.

Algorithme lancé

le système admet une solution unique qui est (3 ; -5).

Algorithme terminé

b. $a_1 = 21$; $b_1 = -14$; $c_1 = 7$; $a_2 = -1$; $b_2 = \frac{2}{3}$; $c_2 = 1$.

Algorithme lancé

le système n'admet pas une unique solution

Algorithme terminé

c. $a_1 = \sqrt{3}$; $b_1 = -2$; $c_1 = -\sqrt{3}$; $a_2 = 2$; $b_2 = -\sqrt{3}$; $c_2 = -1$.

Algorithme lancé

le système admet une solution unique qui est (1 ; 1.7320508).

Algorithme terminé

On voit ici la limite de cet algorithme : il nous donne une valeur approchée de y_0 au lieu de nous donner sa valeur exacte qui est $\sqrt{3}$.

26 • Sens direct :

Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Alors $x = kx'$ et $y = ky'$.

Alors $xy' - x'y = (kx')y' - x'(ky') = kx'y' - kx'y' = 0$.

• Réciproque :

Supposons que $xy' - x'y = 0$.

– Cas où $x \neq 0$. $y' = \frac{x'y}{x}$. Posons $k = \frac{x'}{x}$.

$y' = ky$ et $kx = \frac{x'}{x} \times x = x'$, donc $\vec{v} = k\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

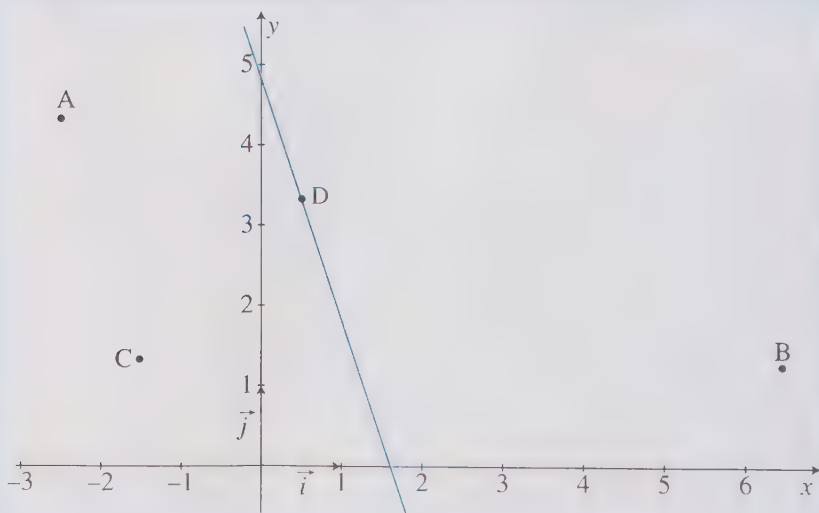
– Cas où $x = 0$

Ou bien $y = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} = 0\vec{v}$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires.

Ou bien $y \neq 0$, alors $xy' - x'y = 0 \Leftrightarrow x'y = 0 \Leftrightarrow x' = 0$ (car $y \neq 0$).

$\vec{u}(0; y)$ et $\vec{v}(0; y')$ donc $\vec{v} = \frac{y'}{y}\vec{u}$ (puis que $y \neq 0$). $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont encore colinéaires.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

27

1. $\overrightarrow{AB} \left(\frac{13}{2} + \frac{5}{2}; \frac{4}{3} - \frac{13}{3} \right)$ soit $\overrightarrow{AB}(9; -3)$.

$\overrightarrow{AD} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}; \frac{10}{3} - \frac{13}{3} \right)$ soit $\overrightarrow{AD}(3; -1)$.

$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AD}$, donc A, B, D sont alignés.

2. a. (d) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AC}(1; -3)$. Soit $M(x; y)$ un point du plan,

$$M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) \times (-3) - \left(y - \frac{10}{3}\right) \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - y + \frac{3}{2} + \frac{10}{3} = 0 \Leftrightarrow -3x - y + \frac{29}{6} = 0.$$

$$(d) : -3x - y + \frac{29}{6} = 0.$$

b. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$M \in (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \left(x - \frac{13}{2}\right) \times 0 - \left(y - \frac{4}{3}\right) \times (-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(y - \frac{4}{3}\right) \times (-8) = 0 \Leftrightarrow y - \frac{4}{3} = 0.$$

$$(BC) : y - \frac{4}{3} = 0 \text{ ou encore } 3y - 4 = 0.$$

c. (d) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AC}(1; -3)$, et (BC) admet pour vecteur directeur $\vec{i}(1; 0)$.

$1 \times 0 - (-3) \times 1 \neq 0$, donc $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{i}$ ne sont pas colinéaires.

Les droites (d) et (BC) ne sont pas parallèles.

$$d. (d) \text{ et } (BC) \text{ sont donc sécantes en un point } F, \text{ qui vérifie } \begin{cases} -3x_F - y_F + \frac{29}{6} = 0 \\ y_F = \frac{4}{3}, \end{cases}$$

$$d'où $-\frac{4}{3} + \frac{29}{6} = 3x_F$, d'où $x_F = \frac{21}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$. **Donc** $F\left(\frac{7}{6}; \frac{4}{3}\right)$.$$

$$3. \overrightarrow{AD}(3; -1) \text{ et } \overrightarrow{CE}\left(\frac{4}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right); \frac{7}{18} - \frac{4}{3}\right). \text{ D'où } \overrightarrow{CE}\left(\frac{17}{6}; -\frac{17}{18}\right).$$

$$\text{Or } 3 \times \left(-\frac{17}{18}\right) - (-1) \times \frac{17}{6} = -\frac{17}{6} + \frac{17}{6} = 0.$$

$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires de même sens $\left(\overrightarrow{CE} = \frac{17}{18} \times \overrightarrow{AD}\right)$, non égaux.

Donc ADEC est un trapèze de bases [AD] et [CE].

[28] 1. Réponse b. $\overrightarrow{OA}(7; 2)$.

$$M(x; y) \in (OA) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{OA} \text{ sont colinéaires} \\ \Leftrightarrow x \times 2 - y \times 7 = 0.$$

$$2. \text{ Réponse c. } (D) : 2x + 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow 5y = -2x - 6 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x - \frac{6}{5}.$$

$\vec{u}_1\left(1; -\frac{2}{5}\right)$ est un vecteur directeur de (D), donc $5\vec{u}_1(5; -2)$ également.

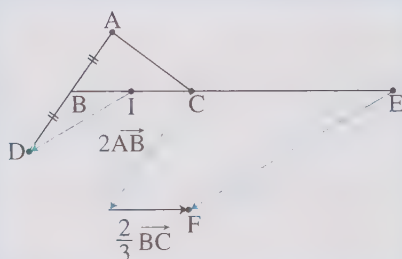
$$3. \text{ Réponse c. } 2x - 7y + 16 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{7}x + \frac{16}{7}.$$

Cette droite admet pour vecteur directeur $\vec{v}_1 \left(1; \frac{2}{7}\right)$ et aussi $\vec{v}_2 (7; 2)$, elle est donc parallèle à (OA) : il s'agit de d_3 ou d_4 . Son ordonnée à l'origine vaut $+\frac{16}{7} > 0$, c'est donc d_3 .

4. Réponse d.

- $3 \times 0 - 4 = -4 \neq 0$, donc $O(0; 0) \notin \Delta$.
- $3 \times 1 - 4 = -1 \neq 0$, donc $I(1; 0) \notin \Delta$.
- $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$. Ceci est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

29 1.



$$2. \bullet \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -1 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\bullet \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \frac{5}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \frac{5}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{8}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\bullet \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}.$$

3. I est le milieu de [BC], donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

En introduisant le point A, cela donne :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ soit } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}.$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

4. On exprime $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\bullet \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + 2\overrightarrow{AB},$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{ID} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\bullet \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = -\left(-\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{8}{3}\overrightarrow{AC}\right) + \left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}\right),$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

On remarque que $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$. Les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, donc les droites (ID) et (EF) sont parallèles.

Angles orientés et trigonométrie

I RAPPELS

1. Repérage sur le cercle trigonométrique

■ Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, et orienté de la manière suivante :

- le sens positif est le sens contraire au sens des aiguilles d'une montre,
- le sens négatif est le sens des aiguilles d'une montre.

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

■ Définition

À tout réel t , est associé un unique point image M du cercle trigonométrique, obtenu en se déplaçant d'une longueur $|t|$ sur le cercle à partir de I :

- dans le sens direct si t est positif,
- dans le sens indirect si t est négatif.

On dit alors que M a pour **affiche** t et on note $M(t)$.

■ Propriété

Tout point du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels.

Si t est un affiche du point M , alors tous les réels de la forme $t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont également des affiches de M .

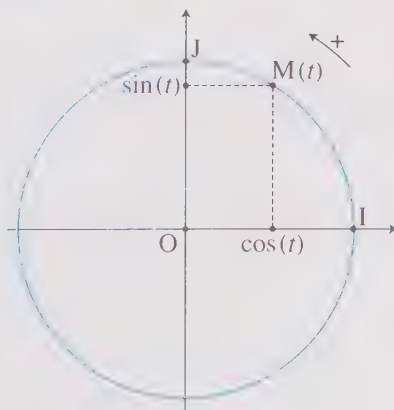
2. Cosinus et sinus d'un nombre réel

■ Définition

Soit t un réel, et M son point image sur le cercle trigonométrique.

On appelle **cosinus** de t , et on note $\cos(t)$ l'abscisse du point M .

On appelle **sinus** de t , et on note $\sin(t)$, l'ordonnée du point M .



■ Première propriétés

Pour tout réel t :

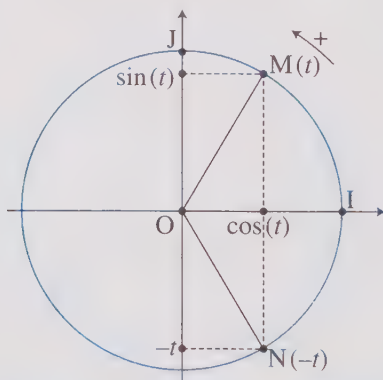
- $-1 \leq \cos t \leq 1$ et $-1 \leq \sin t \leq 1$;
- $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$;
- si $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$ et $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$.

■ Valeurs remarquables

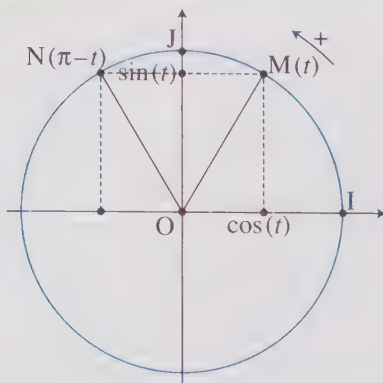
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

■ Propriétés : angles associés

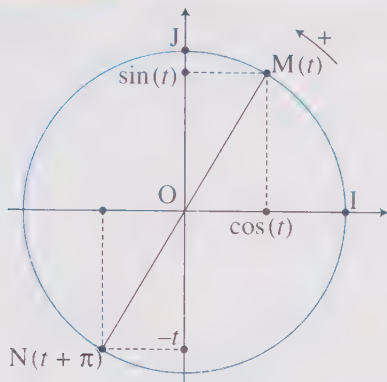
Les égalités suivantes sont vraies pour tout réel t :



$$\cos(-t) = \cos(t) \text{ et } \sin(-t) = -\sin(t)$$

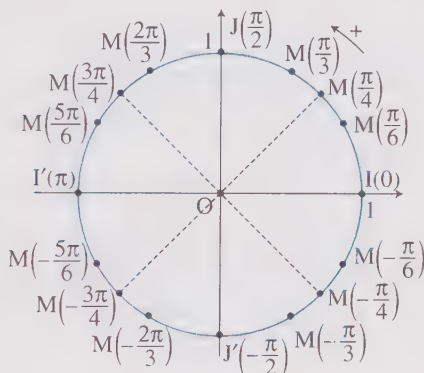


$$\cos(\pi - t) = -\cos(t) \text{ et } \sin(\pi - t) = \sin(t)$$



$$\cos(t + \pi) = -\cos(t) \text{ et } \sin(t + \pi) = -\sin(t)$$

■ Points remarquables du cercle trigonométrique



II ANGLES ORIENTÉS

1. Le radian

■ Définition

Le radian est une nouvelle mesure d'angle.

Elle est proportionnelle à la mesure en degrés, et π radians correspondent à 180° .

Correspondance à retenir :

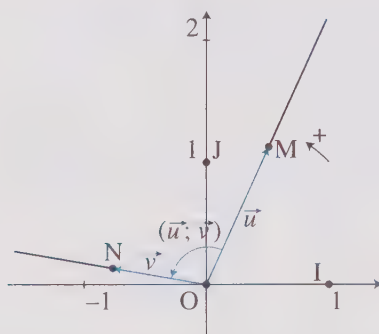
	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	2π
	180	90	60	45	30	360

2. Notion d'angle orienté

On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit M et N les points définis par $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.

On trace les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$.



On peut effectuer une rotation, autour du point O, qui permet de passer de la demi-droite $[OM)$ à la demi-droite $[ON)$.

On appelle **angle orienté** $(\vec{u}; \vec{v})$ l'angle de cette rotation.

3. Mesure en radians d'un angle orienté

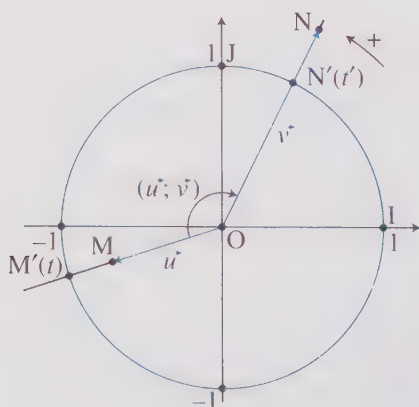
■ Théorème-définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soient M et N les points définis par $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.

Soient M' et N' les points d'intersection du cercle trigonométrique avec respectivement $[OM)$ et $[ON)$.

Les mesures en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ sont les réels $t' - t$, où t est un affixe de M' et t' est un affixe de N'.



■ Propriété-définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. L'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ admet une unique mesure α appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

On l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.

• Les autres mesures de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ sont les réels de la forme $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On note $(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

• Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et M et N les points définis par $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$. Alors $\widehat{MON} = |\alpha|(\text{rad})$, où α est la mesure principale de $(\vec{u}; \vec{v})$.

4. Premières propriétés des angles orientés

■ Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls :

• $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v})$;

• Relation de Chasles : $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w})$;

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$(\vec{u}; \vec{v}) = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad (\vec{u}; \vec{v}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

■ Propriété

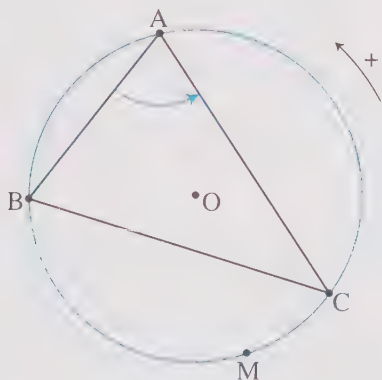
• Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et k, k' deux réels non nuls.

$$(k\vec{u}; k'\vec{v}) = \begin{cases} (\vec{u}; \vec{v}) & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont de même signe} \\ (\vec{u}; \vec{v}) + \pi & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont de signes opposés} \end{cases}$$

5. Résultats de géométrie appliqués aux angles orientés

■ Définition

Dire que le triangle ABC est direct signifie que la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est positive.



■ Somme des angles d'un triangle

Soient A, B et C trois points non alignés :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

■ Théorème de l'angle inscrit

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et A et B deux points de $\mathcal{C}$.

Pour tout point M distinct de A et de B, $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 2 \times (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$.

6. Cosinus et sinus d'un angle orienté

■ Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soit t une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$, le cosinus et le sinus de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ sont respectivement le cosinus et le sinus du réel t .

SAVOIR-FAIRE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $\cos x = \cos a$ (ou $\sin x = \sin a$)

Placer sur le cercle trigonométrique le point M d'affixe a , puis, s'il existe, l'autre point du cercle ayant même abscisse (respectivement même ordonnée). Les solutions de l'équation sont tous les affixes de ces points.

On peut également retenir les résultats suivant :

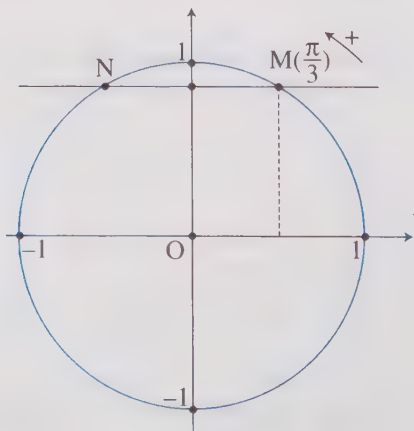
- $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -a + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;
- $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = \pi - a + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

EXEMPLE : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Plaçons $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

L'autre point du cercle ayant pour ordonnée $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le point $N\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. D'où :

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right).$$



2. Déterminer la mesure principale d'un angle dont on connaît une mesure θ

Notons α la mesure principale de l'angle.

Si $-\pi < \theta \leq \pi$, alors $\alpha = \theta$.

Si $\theta \leq -\pi$, on cherche le plus petit multiple de 2π (de la forme $2k\pi$) tel que $\theta + 2k\pi > -\pi$.

Si $\theta > \pi$, on cherche le plus petit multiple de 2π (de la forme $2k\pi$) tel que $\theta - 2k\pi \leq \pi$.

EXEMPLE : Déterminons la mesure principale de $(\vec{u} ; \vec{v}) = \frac{-31\pi}{7} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\text{Ici, } \theta = \frac{-31\pi}{7} \leq -\pi.$$

$$\theta + 2\pi = \frac{-31\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} = \frac{-17\pi}{7} \leq -\pi, \text{ donc on continue :}$$

$$\theta + 4\pi = \frac{-17\pi}{7} + 2\pi = \frac{-17\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} = \frac{-3\pi}{7} > -\pi, \text{ donc on s'arrête.}$$

$$\text{On a bien } \alpha = \frac{-3\pi}{7} \in]-\pi ; \pi].$$

La mesure principale de $(\vec{u} ; \vec{v})$ est $\frac{-3\pi}{7}$.

3. Résoudre une équation de la forme $2(\vec{u} ; \vec{v}) = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$2(\vec{u} ; \vec{v}) = \theta + 2k\pi \text{ } (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\vec{u} ; \vec{v}) = \frac{\theta}{2} + k\pi \text{ } (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left((\vec{u} ; \vec{v}) = \frac{\theta}{2} + 2k\pi \text{ } (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } (\vec{u} ; \vec{v}) = \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + 2k\pi \text{ } (k \in \mathbb{Z}) \right).$$

EXEMPLE : Voir savoir-faire 4.

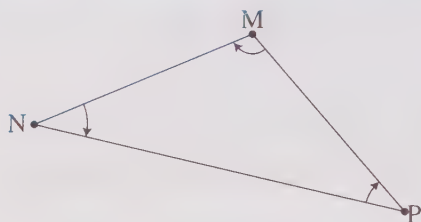
4. Appliquer la règle de la somme des angles orientés dans un triangle

Sur la figure, faire apparaître les angles orientés, tous positivement ou tous négativement, et écrire la formule de la somme des angles.

EXEMPLE : Dans le plan orienté, MNP est un triangle isocèle en M tel que

$$(\overrightarrow{MP} ; \overrightarrow{MN}) = -\frac{3\pi}{5} + 2k\pi \text{ } (k \in \mathbb{Z}).$$

Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{PN} ; \overrightarrow{PM})$.



$$(\overrightarrow{MP}; \overrightarrow{MN}) + (\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NP}) + (\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

MNP étant isocèle en M, $(\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NP}) = (\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM})$, d'où :

$$-\frac{3\pi}{5} + 2 \times (\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$2 \times (\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM}) = \frac{8\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM}) = \frac{4\pi}{5} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM}) = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } (\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM}) = \frac{9\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

L'angle $\widehat{NPM}$ étant aigu, sa mesure ne peut valoir $\frac{4\pi}{5}$ (puisque $\frac{4\pi}{5} > \frac{\pi}{2}$),

$$\text{d'où } (\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM}) = \frac{9\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM}) = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad -\frac{\pi}{5} \text{ étant la mesure principale de l'angle}$$

$$(\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM}).$$

EXERCICES D'APPLICATION

1 LECTURE DE SINUS ET COSINUS

★ 5 min ▶ P. 432

Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus suivants :

1. $\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\sin(-\pi)$, $\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$.

2. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right)$.

2 LECTURE SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

★ 15 min ▶ P. 432

1. Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ tels que :

a. $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b. $\sin t = -\frac{1}{2}$; c. $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; d. $\sin(t) = \sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)$.

2. Déterminer tous les réels t tels que :

a. $\cos(t) = \cos \frac{\pi}{8}$; b. $\sin(t) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; c. $\cos t = \frac{1}{2}$; d. $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

e. $\sin t = -1$; f. $\cos(2t) = 1$; g. $\sin(2t) = \sin \frac{\pi}{3}$; h. $\sin(-t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

▲ Voir le savoir-faire 1.

3 ÉQUATIONS AVEC ANGLES ASSOCIÉS

★★ 10 min ▶ P. 434

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, d'inconnue t :

a. $\cos(\pi - t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b. $\sin(\pi + t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; c. $\sin(-t) = \frac{1}{2}$;

d. $\sqrt{2} \sin(\pi - t) + 1 = 0$; e. $2 \cos(t - \pi) = 1$.

▲ Voir I.2. Propriétés angles associés.

4 MESURES PRINCIPALES

★★ 15 min ▶ P. 434

1. Exprimer en radians les angles suivants :

a. $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = -135^\circ$; b. $\widehat{AOB} = 120^\circ$;

c. $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = 150^\circ$; d. $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = -20^\circ$.

2. Déterminer la mesure principale de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ dans les cas suivants :

a. $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{67\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) ;$

b. $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{35\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) ;$

c. $(\vec{u}; \vec{v}) = -121\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) ;$

d. $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{82\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) .$

 Voir le savoir-faire 2.

5 EXPRESSIONS D'ANGLES

★ 10 min ► P. 435

Soit ABC un triangle quelconque. On note $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{AC}$. À l'aide d'une figure, exprimer chacun des angles ci-dessous en fonction de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$

a. $(\vec{u}; -\vec{v}) ;$ b. $(-\vec{u}; -\vec{v}) ;$ c. $(-\vec{u}; \vec{v}) ;$

d. $\left(2\vec{u}; \frac{1}{3}\vec{v}\right) ;$ e. $\left(-\frac{1}{2}\vec{u}; -4\vec{v}\right).$

 Voir le cours II.4.

6 ALGORITHME

★ 15 min ► P. 436

Écrire un algorithme qui, à partir de deux réels non nuls k_1 et k_2 , donne une relation entre l'angle $(k_1 \vec{u}; k_2 \vec{v})$ et l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$.

7 CONSTRUCTIONS

★ 20 min ► P. 437

1. Sur le cercle trigonométrique, placer les points $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$, $C\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Déterminer les mesures des angles $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

3. Construire le point M du cercle trigonométrique tel que :

$$(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

4. Construire le point N d'affixe $\frac{5\pi}{12}$, à l'aide uniquement du compas et de la règle non graduée.

8 DÉTERMINATION D'ANGLES

★ 20 min ▶ P. 438

1. ABC est un triangle équilatéral direct. Déterminer :
 $(\overline{AB}; \overline{AC})$; $(\overline{CB}; \overline{CA})$; $(\overline{AB}; \overline{CB})$; $(\overline{BA}; \overline{AC})$; $(\overline{AB}; \overline{CA})$.
2. ABCD est un carré direct de centre O. Déterminer :
 $(\overline{CD}; \overline{CA})$; $(\overline{BC}; \overline{OB})$; $(\overline{DO}; \overline{AC})$; $(\overline{OA}; \overline{OC})$; $(\overline{BA}; \overline{CD})$; $(\overline{OB}; \overline{AD})$.
3. ABC est un triangle équilatéral direct de centre O, et I le pied de la médiane issue de C. Déterminer $(\overline{BA}; \overline{AC})$; $(\overline{OB}; \overline{OC})$; $(\overline{AB}; \overline{OC})$.

▲ S'aider des figures codées.

9 ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE

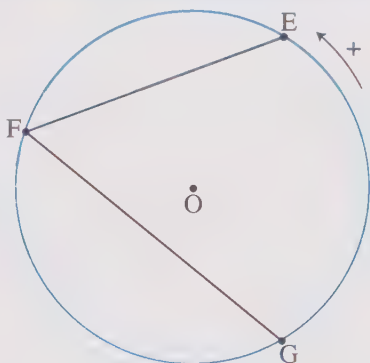
★ 10 min ▶ P. 439

Le cercle représenté ci-contre a pour centre O.

Sachant que :

$$(\overline{EO}; \overline{EG}) = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

déterminer une mesure en radians de l'angle $(\overline{FE}; \overline{FG})$.



10 SIMPLIFICATIONS

★ 5 min ▶ P. 440

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan. Simplifier :

- | | | |
|--|---|---|
| a. $(\vec{u}; \vec{u})$ | b. $(\vec{v}; -\vec{v})$ | c. $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{w}; \vec{u})$ |
| d. $(\vec{u}; \vec{w}) - (\vec{u}; \vec{v})$ | e. $(-\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{u}; \vec{v})$ | f. $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{w}; \vec{u}) + (\vec{v}; \vec{w})$ |

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

11 UTILISATION DE LA RELATION DE CHASLES

★★ 15 min ▶ P. 440

1. À l'aide de la relation de Chasles, exprimer $(\vec{u}; -\vec{v})$ en fonction de $(\vec{u}; \vec{v})$.
2. Exprimer $(-\vec{u}; -\vec{v})$ en fonction de $(\vec{u}; \vec{v})$.
3. Exprimer $(-\vec{u}; \vec{v})$ en fonction de $(\vec{u}; \vec{v})$.

4. Application

On donne $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{7} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Déterminer $(\vec{v}; \vec{w})$, $(\vec{u}; -\vec{v})$, $(-\vec{u}; \vec{w})$, $(-\vec{v}; -\vec{w})$.

12 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS

★★ 25 min ► P. 441

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos^2(t) = \frac{3}{4}$;

b. $2\cos^2(t) - \cos(t) - 1 = 0$;

Poser $X = \cos t$.

c. $(2\sin(t) - 1) \times (2\sin(t) + \sqrt{2}) = 0$.

2. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ les inéquations suivantes :

a. $\cos t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b. $\sin t < 0$; c. $-\frac{1}{2} \leq \cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos(t) = \cos(t + \pi)$; b. $\sin(2t) = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$.

13 LIEN ENTRE $\cos(a)$ ET $\sin(a)$

★★ 10 min ► P. 443

1. Soit a un réel tel que $\cos(a) = \frac{5}{7}$.

Déterminer la valeur de $\sin(a)$, sachant que $a \in [0 ; \pi]$.

2. Soit b un réel vérifiant :

$$b \in \left] -\pi ; -\frac{\pi}{2} \right] \text{ et } \sin(b) = -\frac{4}{5}.$$

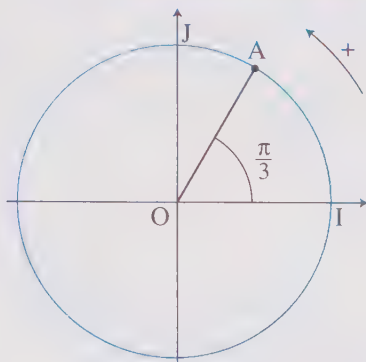
Déterminer la valeur exacte de $\cos(b)$.

3. Sachant que $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

14 DÉMONSTRATIONS

★ 10 min ► P. 443

Le but de cet exercice est d'établir par une démonstration les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{3}$ et de $\sin \frac{\pi}{3}$. Le plan est orienté et muni du repère orthonormal $(O ; I ; J)$.



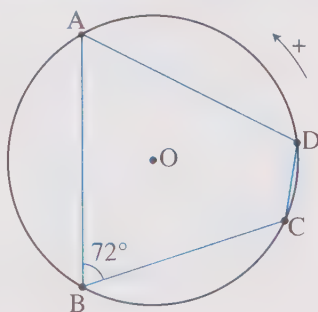
1. Quelle est la nature du triangle OIA ? Justifier.
2. Soit H le projeté orthonormal du point A sur l'axe des abscisses. Calculer OH puis AH.

15 QUADRILATÈRE INSCRIT DANS UN CERCLE

★ 10 min ► P. 444

ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O, et tel que :

$$(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



1. Établir, en justifiant, que $2(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
2. En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$.



Voir savoir-faire 3.

16 ANGLES D'UN QUADRILATÈRE

★★ 10 min ► P. 444

Dans le plan orienté, on considère le quadrilatère direct ABCD.

1. Questions de cours

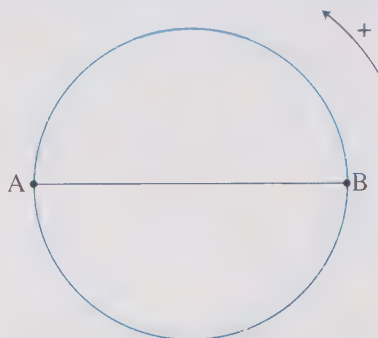
Rappeler la relation liant les angles orientés positivement du triangle ABC, puis du triangle ACD.

2. Démontrer que la somme des mesures des angles, orientés positivement, d'un quadrilatère est constante (à 2π près), et donner sa valeur.

17 UNE APPLICATION DE LA RELATION DE CHASLES

★★ 25 min ► P. 445

Soient A et B deux points du plan orienté, et Γ le cercle de diamètre $[AB]$.



On considère un point M du cercle, autre que A et B, à partir duquel on construit les triangles équilatéraux directs MAA' et MBB' .

1. Faire une figure (figure n° 1), avec M appartenant au demi-cercle supérieur, et une autre figure (figure n° 2), avec M appartenant au demi-cercle inférieur. Déterminer, dans chaque cas et en justifiant, la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$.

2. En utilisant la relation de Chasles pour les angles orientés, démontrer que :

$$(\overrightarrow{MA'}; \overrightarrow{MB'}) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}).$$

 Faire apparaître les angles $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MA'})$ et $(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MB'})$.

3. En déduire, selon la position du point M, la nature du triangle $MA'B'$ en précisant s'il est direct ou indirect.

18 THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT POUR LES ANGLES ORIENTÉS

★★ 25 min ► P. 446

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, A et B deux points distincts de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diamétralement opposés. M est un point du cercle, distinct de A et de B.

 Il n'est pas nécessaire de définir un sens direct.

1. Faire une figure avec M situé sur le grand arc $\widehat{AB}$, et une autre figure avec M situé sur le petit arc $\widehat{AB}$.

2. Quelle est la nature du triangle AMO ? En déduire une relation liant les angles $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MO})$ et $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA})$. Quelle est la nature du triangle BMO ?

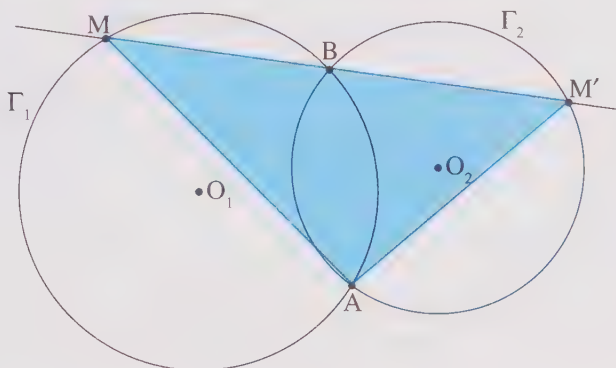
En déduire une relation liant les angles $(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM})$.

3. Établir alors l'égalité $2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

19 CERCLES SÉCANTS

★★ 30 min ▶ P. 447

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 , de centres respectivement O_1 et O_2 , sont sécants en A et en B. Soit M un point du cercle Γ_1 , situé sur le grand arc $\widehat{AB}$. La droite (BM) coupe Γ_2 en M' .



On veut démontrer que l'angle $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'})$ est indépendant de la position du point M.

▲ Construire la figure sur GeoGebra, et observer ce résultat en déplaçant le point M.

1. a. Quelle est la nature des triangles O_1MB et $O_2M'B$?
b. Établir une relation liant $(\overrightarrow{O_1M}; \overrightarrow{O_1B})$ et $(\overrightarrow{BO_1}; \overrightarrow{BM})$.
c. Établir une relation liant $(\overrightarrow{O_2B}; \overrightarrow{O_2M'})$ et $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BO_2})$.
2. Exprimer, en justifiant, l'angle $(\overrightarrow{O_1M}; \overrightarrow{O_1B})$ en fonction de $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB})$.
Exprimer également $(\overrightarrow{O_2B}; \overrightarrow{O_2M'})$ en fonction de $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM'})$.
3. Démontrer que la somme $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BO_1}) + (\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BM'})$ est indépendante de la position de M et M' . À quoi est-elle égale ?

▲ Il suffit d'observer la figure.

4. Dédire des question 1. et 2. les égalités suivantes :
a. $2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = \pi + 2(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BO_1})$;
b. $2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM'}) = \pi + 2(\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BM'})$.
5. Établir enfin que, pour tout point M, $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BO_1})$.

20 ANGLES ORIENTÉS ET VECTEURS DIRECTEURS | ★★ | 30 min | ► P. 448

Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O; I; J)$.

Sur le cercle trigonométrique, on considère les points $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

La tangente au cercle en C est notée (T), et coupe l'axe des abscisses au point D.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées du milieu K de [BJ].
3. Déterminer, en justifiant avec soin, la mesure principale de l'angle $(\vec{i}; \overline{OK})$.
4. Montrer que les droites (OA) et (T) sont parallèles.
5. Déterminer alors les coordonnées du point D.

 Utiliser les connaissances du chapitre 9.

6. Vérifier que les vecteurs $\overline{CA}$ et $\overline{OK}$ sont colinéaires.
7. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overline{CD}; \overline{CA})$.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

21 ALGORITHME MESURE PRINCIPALE | ★★★ | 45 min | ► P. 449

Partie A

Soit x un réel. L'algorithme suivant renvoie un réel noté x_0 .

```

VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  SI (x<0) ALORS
    DEBUT_SI
      TANT_QUE (x<=-1) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
          x PREND_LA_VALEUR x+2
        FIN_TANT_QUE
      FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
        TANT_QUE (x>1) FAIRE
          DEBUT_TANT_QUE
            x PREND_LA_VALEUR x-2
          FIN_TANT_QUE
        FIN_SINON
      AFFICHER "x0 = "
      AFFICHER x
    FIN_ALGORITHME
  
```

1. Appliquer l'algorithme aux réels $-2,23$; $6,89$; $5,89$; 11 ; -14 ; $0,4$. Quels sont les résultats obtenus ?
2. À quel intervalle appartient x_0 ? Que dire de la différence $x - x_0$?

Partie B

Un mesure d'angle est souvent donnée sous la forme d'une fraction de π .

Soit donc $x = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.



On dit qu'un nombre réel est rationnel lorsqu'il peut s'écrire $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Écrire sous forme d'un quotient chacun des nombre $x + 2$ et $x - 2$.
2. Écrire un algorithme qui, à partir du rationnel $x = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$), donne le

rationnel $x_0 = \frac{p_0}{q}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} x_0 \in]-1; 1] \\ (x - x_0) \text{ est un multiple de } 2. \end{cases}$$

3. En déduire un algorithme qui, à la mesure d'angle $\frac{p\pi}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$) associe

sa mesure principale.

4. Appliquer ce dernier algorithme aux cas suivants :

a. $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

b. $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{25\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

c. $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{65\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

d. $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{7\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

e. $(\vec{u}; \vec{v}) = -21\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

22

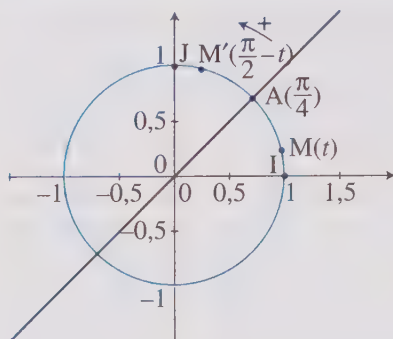
NOUVEAUX ANGLES ASSOCIÉS

★★★ 45 min ► P. 452

Partie A

Soit t un réel quelconque, et M le point du cercle trigonométrique d'affixe t . On

note M' le point d'affixe $\frac{\pi}{2} - t$.



1. Démontrer que (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$.
2. En déduire que (OA) est également la médiatrice du segment $[MM']$.

 Raisonner sur le triangle MOM' .

3. Déterminer l'équation réduite de la droite (OA). Établir une relation entre $\cos(t)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, $\sin(t)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, traduisant le fait que le milieu K de $[MM']$ appartient à (OA).
4. En admettant que toute droite perpendiculaire à (OA) admet pour vecteur directeur $\vec{u}(1; -1)$, établir une seconde relation entre $\cos(t)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, $\sin(t)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.
5. Déduire des questions 3. et 4. les égalités suivantes, vraies pour tout réel t :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t).$$

Partie B : Application

On donne $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

1. Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

 Calculer $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \dots$

2. Vérifier que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (justifier avec soin), puis en déduire les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

23 VALEURS EXACTES DE $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ET DE $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

★★ 30 min ► P. 453

Partie A

Soient O et B deux points distincts du plan. Quel est l'ensemble des points M du plan vérifiant :

- a. $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OB}$, $k \in \mathbb{R}$; b. $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OB}$, $k \geq 0$; c. $OM = 1$.

Partie B

Dans le plan muni du repère orthonormal (O ; I ; J), on note A le point du cercle trigonométrique d'affixe $\frac{\pi}{4}$ et B le milieu du segment [AI].

Faire une figure à compléter au fur et à mesure.

- Déterminer, en justifiant, la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OB})$.
- Déterminer les coordonnées du point du point B, puis la valeur exacte de la distance OB.

Soit C le point défini par $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \overrightarrow{OB}$.

- Démontrer que C est à l'intersection de la demi-droite [OB) et du cercle trigonométrique.

▲ Si $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD}$, alors $AB = |k| \times CD$.

- Déterminer les coordonnées de C.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et de $\sin \frac{\pi}{8}$.

24 ENSEMBLES DE POINTS

★★★ 15 min ► P. 455

Soient A et B deux points distincts.

- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que :

a. $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM}) = 0 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

b. $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM}) = 0 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

c. $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que :

a. $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

b. $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

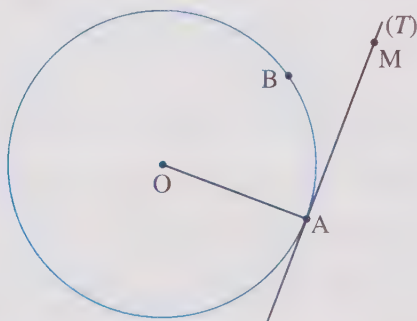
▲ Raisonner à l'aide de schémas.

25 PROBLÈME OUVERT

★★ | 15 min | ► P. 456

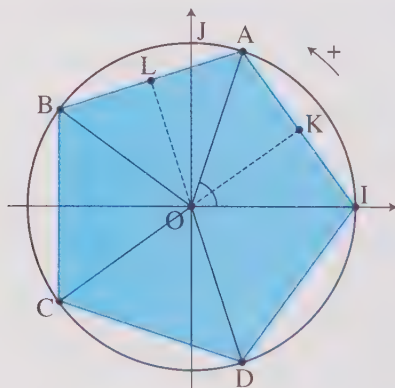
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O , et A et B deux points distincts de $\mathcal{C}$. On note (T) la tangente au cercle en A .

Démontrer que, pour tout point M de (T) autre que A , $2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

**26** PENTAGONE RÉGULIER

★★ | 50 min | ► P. 457

Le but de cet exercice est de construire, à la règle non graduée et au compas, un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 (« cercle unitaire »).



On se place dans le plan muni du repère orthonormal $(O; I; J)$.

Si AIDCBA est un pentagone régulier inscrit dans un cercle de centre O , alors :

$$(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OI}) \\ = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

θ désignant la mesure principale en radians, de ces angles.

1. Déterminer la valeur de θ .
2. Exprimer les coordonnées des points A , B , C et D en fonction de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
3. Déterminer les coordonnées du milieu K de $[IA]$ et du milieu L de $[AB]$.

4. On admet que, pour des raisons de symétrie, il existe un réel t tel que :

$$\overrightarrow{OK} = t\overrightarrow{OC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OL} = t\overrightarrow{OD}.$$

- a. Quel est le signe de t ?

- b. Établir le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) + \cos(2\theta) = 2t \cos(\theta) \\ \sin(\theta) + \sin(2\theta) = -2t \sin(\theta) \\ 1 + \cos(\theta) = 2t \cos(2\theta) \\ \sin(\theta) = -2t \sin(2\theta) \end{cases}$$

5. En déduire les égalités :

$$\cos(\theta) + \frac{1 + \cos(\theta)}{2t} = 2t \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{2t} = -2t \sin(\theta).$$

6. Démontrer alors que $t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$, puis que $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

7. Construction à la règle non graduée et au compas :

- a. Placer les points $I'(-1; 0)$ et $M_1(0; 2)$. Calculer $I'M_1$.

- b. Le cercle de centre I' et passant par M_1 coupe la demi-droite $[OI)$ en M_2 . Quelle est l'abscisse du point M_2 ?

- c. À l'aide du compas, construire le milieu M_3 du segment $[OM_2]$, puis le milieu M_4 du segment $[OM_3]$. Quelle est l'abscisse du point M_4 ?

- d. Placer les points A, D et K. Terminer la construction du pentagone régulier.

CONTRÔLE

27 QCM

★ 15 min ► P. 458

Dans le plan muni du repère orthonormal direct $(O; I; J)$, on considère le cercle trigonométrique.

1. Le point B a pour affixe :

a. $-\frac{3\pi}{4}$; b. $\frac{7\pi}{6}$; c. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d. $\frac{5\pi}{6}$.

2. Le point A a pour affixe :

a. $\frac{\pi}{5}$; b. $-\frac{2\pi}{5}$; c. $-\frac{3\pi}{5}$; d. $-\frac{\pi}{5}$.

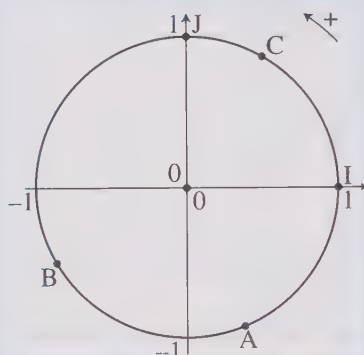
3. Le triangle OIC est :

a. équilatéral ; b. isocèle non équilatéral ;

c. isocèle rectangle ; d. quelconque.

4. la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB})$ est :

a. π ; b. $\frac{7\pi}{6}$; c. $\frac{2\pi}{3}$; d. $\frac{5\pi}{6}$.



28 PROBLÈME

★★ 35 min ► p. 459

Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O; I; J)$. M désigne un point du cercle trigonométrique d'affixe t , avec $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées, et H est le milieu du segment $[MM']$.

On veut exprimer, en fonction de t , l'aire $\mathcal{A}(t)$ du triangle JMM'.

1. Faire une figure avec $t = \frac{\pi}{6}$, et une autre avec $t = \frac{\pi}{6}$.

2. Quelle est la nature du triangle JMM' ? Le démontrer.

3. Déterminer les coordonnées des points M' et H.

4. Exprimer en fonction de t la distance MM' .

5. Exprimer JH en fonction de t

On distinguera les cas $t > 0$ et $t < 0$, pour finalement obtenir une formule commune.

6. Établir alors que, pour tout $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\mathcal{A}(t) = \cos(t) \times (1 - \sin(t))$.

7. Calculer $\mathcal{A}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

CONTRÔLE

9

29 EXERCICE

★★ 20 min ► P. 460

1. Questions de cours

Soit M un point du cercle trigonométrique d'affixe t , démontrer que :

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos(t) = \cos \frac{3\pi}{4}$; b. $\sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c. $\cos(t) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$; d. $\sin(2t) = 1$.

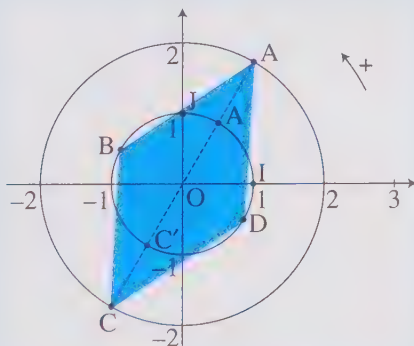
30 PROBLÈME

★★ 30 min ► P. 461

Dans le plan muni du repère orthonormal direct $(O ; I ; J)$, on a tracé le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon 2.

Le point A appartient à $\mathcal{C}'$ et a pour abscisse 1.

C est le symétrique de A par rapport à l'origine O . B et D sont des points de $\mathcal{C}$ construits de sorte que $ABCD$ soit un losange.



- Déterminer les coordonnées de A , et en déduire celles du milieu A' de $[OA]$.
- En déduire les coordonnées du milieu C' de $[OC]$, puis celles du point C .
- Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OD})$. En déduire les coordonnées du point D .
- Déterminer, en justifiant, les coordonnées de B .
- Calculer la longueur du côté du losange.

CORRIGÉS

1. $\bullet -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = -\frac{4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, donc $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\bullet \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\bullet \sin(-\pi) = 0$.

$\bullet \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

2. $\bullet \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$, donc $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\bullet -\frac{17\pi}{3} + 2\pi = -\frac{11\pi}{3} \leq -\pi$; $-\frac{11\pi}{3} + 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \leq -\pi$;

$-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$.

Donc $\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\bullet \frac{29\pi}{6} - 2\pi = \frac{17\pi}{6} > \pi$; $\frac{17\pi}{6} - 2\pi = \frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$.

Donc $\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.



Voir le savoir-faire 2.

2 1. a. $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(t = \frac{\pi}{6} \text{ ou } t = -\frac{\pi}{6}\right)$.

b. $\sin t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(t = -\frac{\pi}{6} \text{ ou } t = -\frac{5\pi}{6}\right)$.

c. $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left(t = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4}\right)$.

d. $\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ car $\frac{17\pi}{5} - 4\pi = -\frac{3\pi}{5} \in]-\pi; \pi]$ donc :

$$\sin t = \sin\left(\frac{17\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \sin t = \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{3\pi}{5} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = \pi - \left(-\frac{3\pi}{5}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{3\pi}{5} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

car $\frac{8\pi}{5} - 2\pi = -\frac{2\pi}{5} \in]-\pi; \pi]$.

$$2. a. \cos(t) = \cos \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$b. \sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{car } \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \in]-\pi; \pi].$$

$$c. \cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos t = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$d. \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin t = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$e. \sin t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$f. \cos(2t) = 1 \Leftrightarrow \cos(2t) = \cos(0)$$

$$\Leftrightarrow 2t = 0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } 2t = -0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2t = 0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = 4\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = 0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$g. \sin(2t) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } 2t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{ou } t = \frac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{car } \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6} \text{ et } \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

$$h. \sin(-t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow -\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ car, pour tout réel } t, \sin(-t) = -\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{3} \text{ a. } \cos(\pi - t) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos t = \cos \frac{3\pi}{4} \\
 &\Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \sin(\pi + t) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &\Leftrightarrow \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin t = \sin \frac{\pi}{3} \\
 &\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } \sin(-t) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin t = -\frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
 &\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d. } \sqrt{2}\sin(\pi - t) + 1 &= 0 \Leftrightarrow \sin(\pi - t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin t = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &\Leftrightarrow \sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
 &\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e. } 2\cos(t - \pi) &= 1 \\
 &\Leftrightarrow \cos(t - \pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\pi - t) = \frac{1}{2} \text{ car } \cos(-X) = \cos X \\
 &\Leftrightarrow -\cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos t = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
 &\Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 1. $180^\circ = \pi$ radians. La mesure en degrés étant proportionnelle à la mesure en radians, 135° correspond à t radians tel que :

$$t = \frac{135}{180} \times \pi = \frac{27}{36} \times \pi = \frac{3}{4} \times \pi.$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{h. } \frac{120}{180} \times \pi = \frac{2\pi}{3}, \text{ d'où } \widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{i. } \frac{150}{180} \times \pi = \frac{5\pi}{6}, \text{ d'où } (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

d. $-\frac{20}{180} \times \pi = -\frac{\pi}{9}$, d'où $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{9} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2. a. $\frac{67\pi}{6} > \pi$; $\frac{67\pi}{6} - 2\pi = \frac{55\pi}{6} > \pi$; $\frac{55\pi}{6} - 2\pi = \frac{43\pi}{6} > \pi \dots$

$\frac{67\pi}{6} - 5 \times 2\pi = \frac{7\pi}{6} > \pi$; $\frac{67\pi}{6} - 6 \times 2\pi = -\frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$.

La mesure principale de $(\vec{u}; \vec{v})$ est donc $-\frac{5\pi}{6}$.

b. $-\frac{35\pi}{4} + 4 \times 2\pi = -\frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$.

La mesure principale de $(\vec{u}; \vec{v})$ est $-\frac{3\pi}{4}$.

c. $-121\pi + 60 \times 2\pi = -\pi \notin]-\pi; \pi]$;

$-121\pi + 61 \times 2\pi = \pi \in]-\pi; \pi]$.

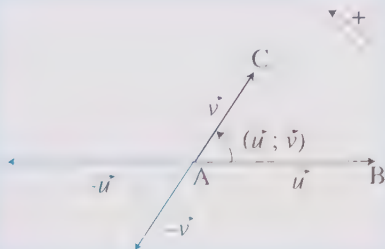
La mesure principale de $(\vec{u}; \vec{v})$ est π .

d. $-\frac{82\pi}{3} = -\frac{81\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -27\pi - \frac{\pi}{3} = -28\pi + \frac{2\pi}{3}$;

$-\frac{82\pi}{3} + 14 \times 2\pi = \frac{2\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$.

La mesure principale de $(\vec{u}; \vec{v})$ est $\frac{2\pi}{3}$.

5



a. $(-\vec{v}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{v}) = (-\vec{v}; \vec{v}) = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

d'où $(-\vec{u}; -\vec{v}) + (\vec{u}; \vec{v}) = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

$(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) - \pi$,

ce qui équivaut à :

$$(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi.$$

b. $(-\vec{u}; -\vec{v}) + (-\vec{v}; \vec{u}) = \pi$,

$(-\vec{u}; -\vec{v}) - (\vec{u}; -\vec{v}) = \pi$,

$(-\vec{u}; -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}; -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$ d'après a.,

d'où $(-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$.

c. $(-\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{u}) = -\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

$(-\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) - \pi$,

$(-\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$.

d. $\left(2\vec{u}; \frac{1}{3}\vec{v}\right) = (\vec{u}; \vec{v})$.

e. $-\frac{1}{2}$ et -4 sont de même signe donc :

$\left(-\frac{1}{2}\vec{u}; -4\vec{v}\right) = (\vec{u}; \vec{v})$.

6

```

VARIABLES
  k1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  k2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE k1
  LIRE k2
  SI (k1==0 ou k2==0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "erreur"
  FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
    SI (k1*k2>0) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "("
      AFFICHER k1
      AFFICHER "u ; "
      AFFICHER k2
      AFFICHER "v) = {u,v} + 2k.PI [k entier relatif]"
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "{ "
      AFFICHER k1
      AFFICHER "u ; "
      AFFICHER k2
      AFFICHER "v) = {u,v} + PI + 2k.PI [k entier relatif]"
    FIN_SINON
  FIN_SINON
FIN_ALGORITHME

```

Avec $k_1 = -2$ et $k_2 = 3$, on obtient :

```

***Algorithme lancé***
(-2u ; 3v) = {u,v} + PI + 2k.PI [k entier relatif]
***Algorithme terminé***

```

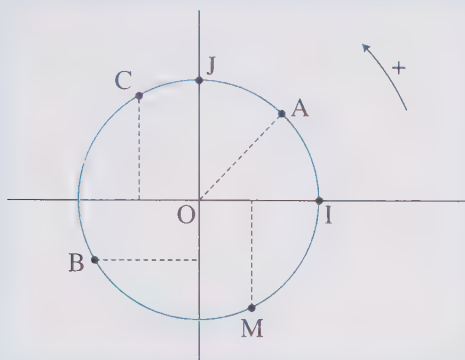
Avec $k_1 = 2$ et $k_2 = \frac{1}{3}$, on obtient :

```

***Algorithme lancé***
[2u ; 0.33333333v] = {u,v} + 2k.PI [k entier relatif]
***Algorithme terminé***

```

7 1.



A est sur la bissectrice de $\widehat{IOJ}$. $y_B = -\frac{1}{2}$ et $x_C = -\frac{1}{2}$.

$$2. (\overline{OA}; \overline{OC}) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} + k2\pi; (\overline{OC}; \overline{OA}) = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(\overline{OB}; \overline{OC}) = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(\overline{OA}; \overline{OB}) = -\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{26\pi}{24} = -\frac{13\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

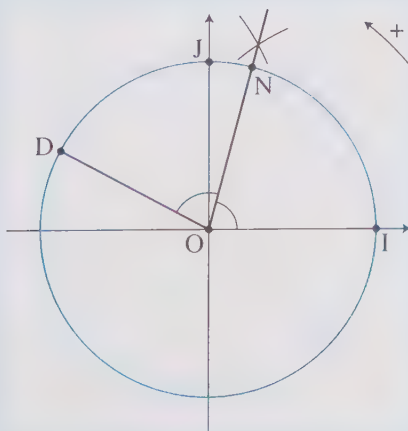
3. Notons t l'affixe du point M qui appartient à $] -\pi; \pi]$:

$$-\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \in]-\pi; \pi], \quad \text{donc} \quad t = -\frac{\pi}{3}.$$

4. $(\overline{OI}; \overline{ON}) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Notons D le point d'affixe $\frac{5\pi}{6}$:

$$2(\overline{OI}; \overline{ON}) = (\overline{OI}; \overline{OD}).$$

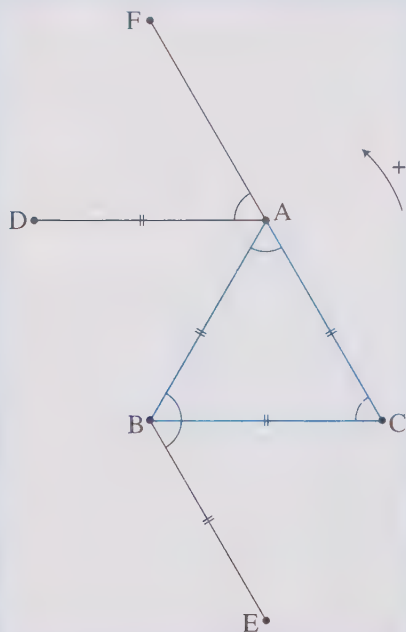
N est donc situé à l'intersection du cercle trigonométrique, et de la bissectrice intérieure de l'angle $(\overline{OI}; \overline{OD})$.



8

1.

▲ Pour déterminer $(\vec{u}; \vec{v})$, choisir des représentants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ partant d'un même point



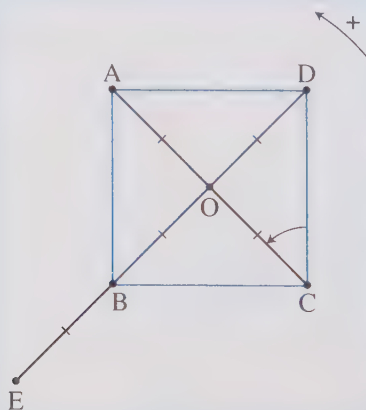
$$\bullet (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \bullet (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BE}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AF}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2.

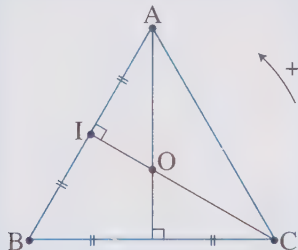


- $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$
- $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE}) = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$
- $(\overrightarrow{DO}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{DO}; 2\overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{DO}; \overrightarrow{OC})$
 $= (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

▲ Voir cours II.4.

- $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$
- $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BA}) = 0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$
- $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{BC}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

3.



- $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}) = (-\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
 $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

- $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 2\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Par symétrie, $3(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = 2\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$;

$$(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) ;$$

d'où $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$ vaut 0 ou $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} \ (+2k\pi; k \in \mathbb{Z}).$

Comme la mesure principale de $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$ est dans $]0; \pi[$:

$$(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

- $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{IC}) = (2\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IC})$
 $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

9

• Dans le triangle OEG :

$$(\overrightarrow{EO}; \overrightarrow{EG}) + (\overrightarrow{GE}; \overrightarrow{GO}) + (\overrightarrow{OG}; \overrightarrow{OE}) = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

EOG est isocèle en O, donc $(\overrightarrow{EO}; \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{GE}; \overrightarrow{GO}) = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

D'où $\frac{2\pi}{7} + (\overrightarrow{OG}; \overrightarrow{OE}) = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

$$(\overrightarrow{OG}; \overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{7} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

• D'après le théorème de l'angle inscrit :

$$2(\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FE}) = (\overrightarrow{OG}; \overrightarrow{OE});$$

$$2(\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FE}) = \frac{5\pi}{7} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{D'où } (\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FE}) = \frac{5\pi}{14} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FE}) = \frac{5\pi}{14} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } (\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FE}) = \frac{19\pi}{14} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Comme $(\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FE})$ est un angle aigu :

$$(\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FE}) = \frac{5\pi}{14} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$



Voir le savoir-faire 3.

10 a. $(\vec{u}; \vec{v}) = 0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

b. $(\vec{v}; -\vec{v}) = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

c. $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{w}; \vec{u}) = (\vec{w}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{w}; \vec{v})$.

d. $(\vec{u}; \vec{w}) - (\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{w}) + (\vec{v}; \vec{u})$
 $= (\vec{v}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w})$.

e. $(-\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi + (\vec{u}; \vec{v})$
 $= 2(\vec{u}; \vec{v}) + \pi$.

f. $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{w}; \vec{u}) + (\vec{v}; \vec{w})$
 $= (\vec{w}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w})$
 $= (\vec{w}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{w}; \vec{w})$
 $= 0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

11 1. $(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; -\vec{v})$
 $= (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$.

2. $(-\vec{u}; -\vec{v}) = (-\vec{u}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; -\vec{v})$
 $= \pi + (\vec{u}; \vec{v}) + \pi = (\vec{u}; \vec{v}) + 2\pi$
 $= (\vec{u}; \vec{v})$.

3. $(-\vec{u}; \vec{v}) = (-\vec{u}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{v})$
 $= \pi + (\vec{u}; \vec{v})$.

$$\begin{aligned}
 4. \bullet (\vec{v}; \vec{w}) &= (\vec{v}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{w}) \\
 &= -(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{u}; \vec{w}) \\
 &= -\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
 &= \frac{13\pi}{56} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet (\vec{u}; -\vec{v}) &= (\vec{u}; \vec{v}) + \pi = \frac{\pi}{7} + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
 &= \frac{8\pi}{7} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet (-\vec{u}; \vec{w}) &= (\vec{u}; \vec{w}) + \pi \\
 &= \frac{3\pi}{8} + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
 &= \frac{11\pi}{8} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
 &= -\frac{5\pi}{8} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

$$\bullet (-\vec{v}; -\vec{w}) = (\vec{v}; \vec{w}) = \frac{13\pi}{56} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\boxed{12} \text{ 1. a. } \cos^2(t) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left[\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos t = \cos \frac{\pi}{6} \text{ ou } \cos t = \cos \frac{5\pi}{6} \right].$$

$$\Leftrightarrow \left[t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right]$$

$$\text{b. } 2X^2 - X - 1 = 0; \Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9.$$

$$X = \frac{1-4}{4} = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = \frac{1+3}{4} = 1.$$

$$\text{D'où } 2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos t = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos t = 1 \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos t = \cos \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \cos t = \cos 0 \right]$$

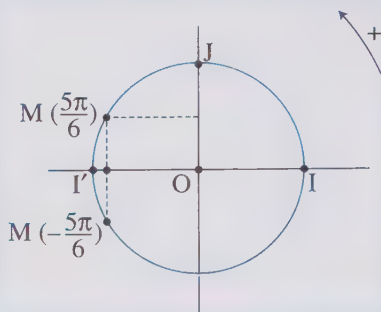
$$\Leftrightarrow \left[t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } t = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right].$$

$$\text{c. } (2\sin t - 1)(2\sin t + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\sin t = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin t = \sin \frac{\pi}{6} \text{ ou } \sin t = \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right].$$

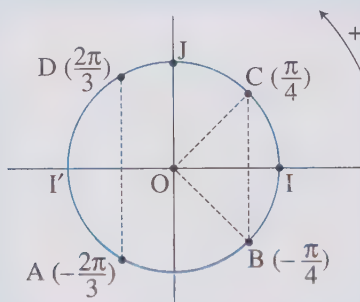
2. a.



$$\cos t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos t \geq \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right].$$

b. $\sin t < 0 \Leftrightarrow t \in]-\pi; 0[.$

c.



$$-\frac{1}{2} \leq \cos t < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right].$$

► Pour déterminer les intervalles, parcourir le cercle trigonométrique à partir du point I' et en tournant dans le sens positif.

3. a. $\cos t = \cos(t + \pi) \Leftrightarrow [t = t + \pi + 2k\pi \text{ ou } t = -t - \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})]$

$$\Leftrightarrow [0 = \pi + 2k\pi \text{ ou } 2t = -\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})]$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right].$$

► Voir les savoir-faire 1. et 3.

b. $\sin 2t = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \left[2t = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } 2t = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right]$

$$\Leftrightarrow \left[t = -\frac{\pi}{10} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } t = \frac{2\pi}{5} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[t = -\frac{\pi}{10} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{9\pi}{10} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{7\pi}{5} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \right].$$

13 1. $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ soit $\left(\frac{5}{7}\right)^2 + \sin^2 a = 1$,

d'où $\sin^2 a = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$,

$$\sin a = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \text{ ou } \sin a = -\sqrt{\frac{24}{49}} = -\frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Comme $a \in [0; \pi]$, $\sin a > 0$, **$\sin a = \frac{2\sqrt{6}}{7}$** .

2. $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$ soit $\cos^2 b + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1$,

d'où $\cos^2 b = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ et $\cos b = \frac{3}{5}$ ou $\cos b = -\frac{3}{5}$.

Comme $b \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos b < 0$ d'où :

$$\cos b = -\frac{3}{5}.$$

3. $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1$ d'où :

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{2+\sqrt{3}}{4} = 1 ; \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4} (> 0).$$

D'où $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ou $\cos \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Comme $\frac{7\pi}{12} \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0$ et **$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$** .

14 1. OIA est isocèle en O car $OI = OA = 1$.

De plus, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

OIA est isocèle avec un angle de 60° , **donc OIA est un triangle équilatéral.**

2. • Par conséquent, la hauteur issue de A du triangle OIA est confondue avec la médiane issue de A.

D'où H milieu de [OI], et **$\overline{OH} = \frac{1}{2}$** .

• D'après le théorème de Pythagore dans AOH rectangle en H :

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

$AH > 0$, d'où **$\overline{AH} = +\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$** .

15 1. D'après le théorème de l'angle inscrit :

- $2(\overline{DC}; \overline{DA}) = (\overline{OC}; \overline{OA})$.
- $2(\overline{BC}; \overline{BA}) = (\overline{OC}; \overline{OA}) = 2 \times \frac{2\pi}{5}$.

D'où $2(\overline{DC}; \overline{DA}) = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2. On en déduit que :

$$(\overline{DC}; \overline{DA}) = \frac{2\pi}{5} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

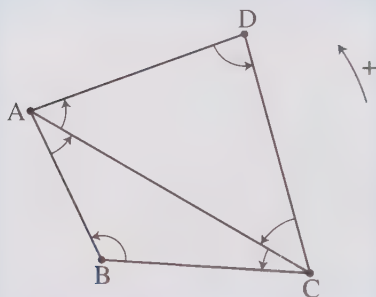
$$(\overline{DC}; \overline{DA}) = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } (\overline{DC}; \overline{DA}) = \frac{2\pi}{5} + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

La mesure principale de $(\overline{DC}; \overline{DA})$ est négative donc :

$$(\overline{DC}; \overline{DA}) = \frac{7\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\overline{DC}; \overline{DA}) = -\frac{3\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

16



$$1. \bullet (\overline{AB}; \overline{AC}) + (\overline{BC}; \overline{BA}) + (\overline{CA}; \overline{CB}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet (\overline{AC}; \overline{AD}) + (\overline{CD}; \overline{CA}) + (\overline{DA}; \overline{DC}) = \pi + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}).$$

2. Ajoutons ces deux égalités membre à membre :

$$[(\overline{AB}; \overline{AC}) + (\overline{AC}; \overline{AD})] + (\overline{BC}; \overline{BA}) + [(\overline{CD}; \overline{CA}) + (\overline{CA}; \overline{CB})] + (\overline{DA}; \overline{DC}) = 2\pi + 2\pi \quad (k + k' \in \mathbb{Z}).$$

D'après la relation de Chasles :

$$(\overline{AB}; \overline{AD}) + (\overline{BC}; \overline{BA}) + (\overline{CD}; \overline{CB}) + (\overline{DA}; \overline{DC}) = 2k''\pi \quad (k'' \in \mathbb{Z}).$$

La somme des angles, orientés positivement, d'un quadrilatère, vaut 0 à 2π près.

On obtient le même résultat si on considère les angles orientés négativement.

17 1. M appartenant au cercle de diamètre $[AB]$, le triangle MAB est rectangle en M.

Dans le cas où M est sur le demi-cercle supérieur :

$$(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

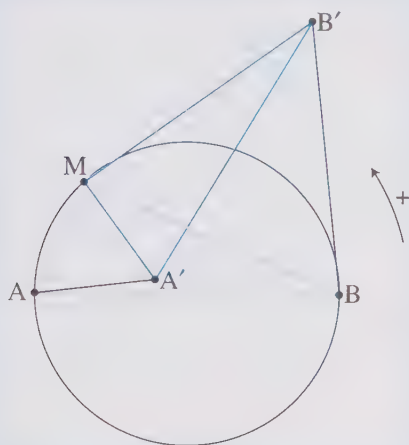


Figure 1

Dans le cas où est sur le demi-cercle inférieur :

$$(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

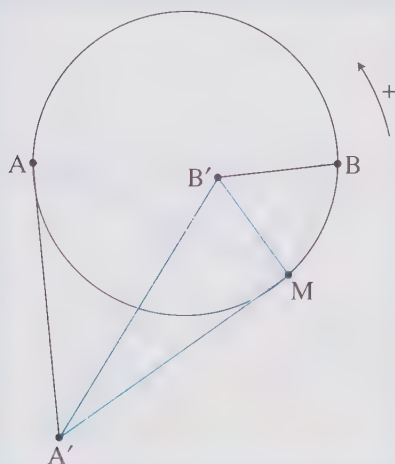


Figure 2

$$\begin{aligned} 2. (\overrightarrow{MA'} ; \overrightarrow{MB'}) &= (\overrightarrow{MA'} ; \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MB'}) \\ &= -\frac{\pi}{3} + (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{3} \\ &= (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}). \end{aligned}$$

3. Lorsque M est sur le demi-cercle supérieur :

$$(\overrightarrow{MA'}; \overrightarrow{MB'}) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Le triangle MA'B' est donc rectangle en M et direct.

Lorsque M est sur le demi-cercle inférieur :

$$(\overrightarrow{MA'}; \overrightarrow{MB'}) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Le triangle MA'B' est donc rectangle en M et indirect.

18 1.

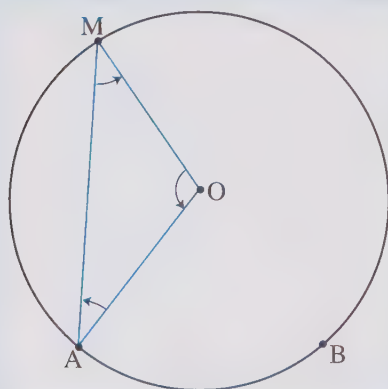


Figure 1 : M est sur le grand arc $\widehat{AB}$

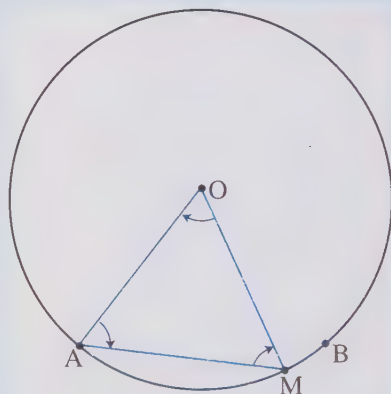


Figure 2 : M est sur le petit arc $\widehat{AB}$

2. • AMO est isocèle en O, d'où $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AM})$

Dans le triangle AMO :

$$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

D'où $2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ (1).

• BMO est isocèle en O donc :

$$(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}) = \pi + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$$

$$2(\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}) = \pi + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$$
 (2)

3. En ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2) :

$$2[(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO}; \overrightarrow{MB})] + (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA}) = 2\pi + 2\pi(k + k')$$

$(k + k' \in \mathbb{Z})$. D'où, en appliquant la relation de Chasles :

$$2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) = 2k''\pi \quad (k'' \in \mathbb{Z}),$$

soit encore :

$$2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}).$$

$$\text{D'où } 2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}).$$

19 1. a. O_1MB est isocèle en O_1 , et $O_2M'B$ est isocèle en O_2 .

$$b. (\overrightarrow{O_1M}; \overrightarrow{O_1B}) + [(\overrightarrow{BO_1}; \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MO_1})] = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{soit } (\overrightarrow{O_1M}; \overrightarrow{O_1B}) + 2(\overrightarrow{BO_1}; \overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$c. (\overrightarrow{O_2B}; \overrightarrow{O_2M'}) + [(\overrightarrow{M'O_2}; \overrightarrow{M'B}) + (\overrightarrow{BM'}; \overrightarrow{BO_2})] = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{soit } (\overrightarrow{O_2B}; \overrightarrow{O_2M'}) + 2(\overrightarrow{BM'}; \overrightarrow{BO_2}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. D'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\bullet (\overrightarrow{O_1M}; \overrightarrow{O_1B}) = 2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}),$$

$$\bullet (\overrightarrow{O_2B}; \overrightarrow{O_2M'}) = 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM'}).$$

$$3. (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BO_1}) + (\overrightarrow{BO_1}; \overrightarrow{BO_2}) + (\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BM'}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{d'où } (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BO_1}) + (\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BM'}) = \pi - (\overrightarrow{BO_1}; \overrightarrow{BO_2}).$$

$$4. a. 2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{O_1M}; \overrightarrow{O_1B}) \quad (\text{d'après 2})$$

$$= -2(\overrightarrow{BO_1}; \overrightarrow{BM}) + \pi \quad (\text{d'après 1. b.})$$

$$2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BO_1}) + \pi \quad (1)$$

$$b. 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{O_2B}; \overrightarrow{O_2M'})$$

$$= \pi - 2(\overrightarrow{BM'}; \overrightarrow{BO_2}).$$

$$2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM'}) = 2(\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BM'}) + \pi \quad (2)$$

5. En ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient :

$$2[(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM'})] = 2[(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BO_1}) + (\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BM'})] + 2\pi$$

$$2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = 2[\pi - (\overrightarrow{BO_1}; \overrightarrow{BO_2})] + 2\pi$$

$$2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = 2(\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BO_1}) + 4\pi$$

$$2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = 2(\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BO_1}) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BO_1}) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

c'est-à-dire :

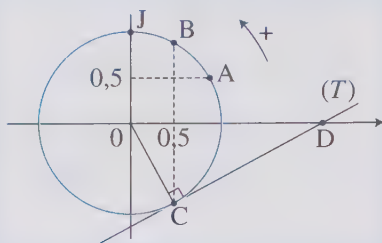
$$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BO_1}) \text{ ou } (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BO_1}) + \pi.$$

D'après la figure :

$$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = (\overrightarrow{BO_2}; \overrightarrow{BO_1}).$$

 Voir le savoir-faire 3.

20 1.



$$2. \text{ K } \left(\frac{\frac{1}{2} + 0}{2}; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2} \right) \text{ soit } \text{K} \left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \right).$$

3. • OBJ est isocèle en O. Sa médiane (OK) est donc confondue avec la bissectrice de $\widehat{BOJ}$, d'où $2(\overline{OB}; \overline{OK}) = (\overline{OB}; \overline{OJ}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

d'où $(\overline{OB}; \overline{OK}) = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire :

$$(\overline{OB}; \overline{OK}) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } (\overline{OB}; \overline{OK}) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \text{ } (k \in \mathbb{Z}).$$

D'après la figure $(\overline{OB}; \overline{OK}) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

• On en déduit que $(\vec{i}; \overline{OK}) = (\vec{i}; \overline{OB}) + (\overline{OB}; \overline{OK}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$

$$(\vec{i}; \overline{OK}) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ } (k \in \mathbb{Z}).$$

4. • (T) et (OC) sont perpendiculaires par définition de la tangente

• $(\overline{OC}; \overline{OA}) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), donc (OC) $\perp$ (OA).

(T) et (OA) sont perpendiculaires à la même droite (OC).

Donc (T) et (OA) sont parallèles.

5. (T) a donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

$D \in (T)$ donc $\overline{CD}$ et $\overline{OA}$ sont colinéaires.

De plus, comme $y_D = 0$, $\overline{CD} \left(x_D - \frac{1}{2}; 0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$ soit $\overline{CD} \left(x_D - \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

$$\text{D'où } \left(x_D - \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$$\frac{x_D}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0; \frac{x_D}{2} = 1; x_D = 2 \text{ d'où } \mathbf{D(2; 0)}.$$

$$6. \overrightarrow{CA} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \text{ soit } \overrightarrow{CA} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} x_{\overrightarrow{CA}} y_{\overrightarrow{OK}} - x_{\overrightarrow{OK}} y_{\overrightarrow{CA}} &= \frac{(\sqrt{3}-1)}{2} \times \frac{(\sqrt{3}+2)}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}+1}{8} = 0. \end{aligned}$$

$\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont bien colinéaires.

7. • $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires et de même sens :

$$\overrightarrow{CD} = \alpha \overrightarrow{OA} \text{ avec } \alpha > 0$$

• $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OK}$ également :

$$\overrightarrow{CA} = \beta \overrightarrow{OK} \text{ avec } \beta > 0.$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) &= (\alpha \overrightarrow{OA}; \beta \overrightarrow{OK}) \\ &= (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OK}) \\ &= \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{3\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

21 Partie A

1. Les résultats donnés sont respectivement $-0,23$; $0,89$; $-0,11$; 1 ; 0 et $0,4$.
2. Le réel obtenu x_0 appartient à l'intervalle $]-1; 1]$. $(x - x_0)$ est un multiple de 2.

Partie B

1. Soit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors :

$$\begin{aligned} x + 2 &= \frac{p}{q} + 2 \text{ et } x - 2 = \frac{p}{q} - 2 \\ x + 2 &= \frac{p+2q}{q} \text{ et } x - 2 = \frac{p-2q}{q}. \end{aligned}$$

2. D'après 1, ajouter ou retrancher 2 à $x = \frac{p}{q}$ équivaut à ajouter ou retrancher $2q$ au numérateur p .

On réitère cette opération jusqu'à ce que $-1 < \frac{p}{q} \leq 1$, c'est-à-dire $-q < p \leq q$, c'est-à-dire tant que $p \leq q$ ou que $p > -q$.

```

VARIABLES
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  q EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  LIRE q
  SI (q<=0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "erreur"
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
    SI (p<0) ALORS
      DEBUT_SI
      TANT_QUE (p/q<=-1) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        p PREND_LA_VALEUR p+2*q
        FIN_TANT_QUE
      FIN_SI
    SI (p>=0) ALORS
      DEBUT_SI
      TANT_QUE (p/q>1) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        p PREND_LA_VALEUR p-2*q
        FIN_TANT_QUE
      FIN_SI
    AFFICHER "x0 = "
    AFFICHER p
    AFFICHER " / "
    AFFICHER q
    FIN_SINON
  FIN_ALGORITHME

```

Pour $x = \frac{67}{6}$, on obtient :

```

***Algorithme lancé***
x0 = -5 / 6
***Algorithme terminé***

```

3. Considérons la mesure d'angle $x\pi = \frac{p\pi}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Il existe un entier relatif k_0 tel que $x\pi + 2k_0\pi \in]-\pi; \pi]$ ($\alpha = x\pi + 2k_0\pi$ est mesure principale de l'angle).

Or $-\pi < x\pi + 2k_0\pi \leq \pi \Leftrightarrow -1 < x + 2k_0 \leq 1$.

Posons $x_0 = x + 2k_0$. Alors $x_0 \in]-1; 1]$, et $(x - x_0) = 2k_0$ est un multiple de 2.

Le rationnel $x_0 = \frac{p_0}{q_0}$ est celui donné par l'algorithme de la question précédente.

La mesure principale de l'angle est alors :

$$\alpha = x\pi + 2k_0\pi = (x + 2k_0)\pi = x_0\pi = \frac{p_0 \times \pi}{q_0}.$$

VARIABLES

p EST_DU_TYPE NOMBRE

q EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

LIRE p

LIRE q

SI (q<=0) ALORS

DEBUT_SI

AFFICHER "erreur"

FIN_SI

SINON

DEBUT_SINON

SI (p<0) ALORS

DEBUT_SI

TANT_QUE (p/q<=-1) FAIRE

DEBUT_TANT_QUE

p PREND_LA_VALEUR p+2*q

FIN_TANT_QUE

FIN_SI

SI (p>=0) ALORS

DEBUT_SI

TANT_QUE (p/q>1) FAIRE

DEBUT_TANT_QUE

p PREND_LA_VALEUR p-2*q

FIN_TANT_QUE

FIN_SI

AFFICHER "la mesure principale de l'angle vaut"

AFFICHER p

AFFICHER " *Pi/"

AFFICHER q

FIN_SINON

FIN_ALGORITHME

Pour $x\pi = \frac{67\pi}{6}$, on obtient :

Algorithme lancé

la mesure principale de l'angle vaut -5 *Pi/6

Algorithme terminé

4. Notons α la mesure principale de l'angle $(\vec{u} ; \vec{v})$

a. $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$;

b. $\alpha = -\frac{\pi}{4}$;

c. $\alpha = \frac{5\pi}{6}$;

d. $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

e. $\alpha = \pi$ ($p = -21$ et $q = 1$).

22 Partie A

$$1. (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4} - t + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$$

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM'}) = \left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - t + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$$

$$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM'}), \text{ donc } (OA) \text{ est la bissectrice de l'angle } \widehat{MOM'}.$$

2. OMM' étant isocèle en O, la bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$ est confondue avec la médiatrice du segment $[MM']$, donc (OA) est la médiatrice du segment $[MM']$.

3. • (OA) a pour équation réduite $y = mx + p$ avec $p = 0$, puisque (OA) passe

par O. $A \in (OA)$, donc $y_A = mx_A + 0$ soit $\frac{\sqrt{2}}{2} = m \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $m = 1$.

L'équation réduite de la droite (OA) est $y = x$.

$$\bullet K \left(\frac{\cos(t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{2}; \frac{\sin(t) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{2} \right)$$

Comme $K \in (OA)$, $y_K = x_K$.

Donc $2x_K = 2y_K$ c'est-à-dire :

$$\cos(t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad (1).$$

4. $(MM') \perp (OA)$ donc $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, avec :

$$\overrightarrow{MM'} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \cos(t); \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \sin(t) \right), \text{ d'où :}$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \cos(t) \right] \times (-1) - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \sin(t) \right] \times 1 = 0.$$

$$\cos(t) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\sin(t) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad (2).$$

5. • En ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient :

$$2\cos(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right). \text{ D'où :}$$

$$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

• En soustrayant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 2\sin(t). \text{ D'où :}$$

$$\sin(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

Partie B

$$1. \bullet \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}, \text{ donc } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}. \text{ D'où :}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

• On remarque que $\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$, soit $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{12} \right)$.

Donc $\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) = -\sin \frac{\pi}{12}$.

$$\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

2. • $\cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$ est l'unique réel x qui vérifie :

$$\begin{cases} x^2 + \sin^2 \left(\frac{\pi}{12} \right) = 1. \\ x > 0 \end{cases}$$

On a bien $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} > 0$ et :

$$\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{16} + \frac{8 - 2\sqrt{12}}{16} = 1.$$

Donc $\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

• $\sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$

$$\sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

• $\sin \left(\frac{7\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

23 Partie A

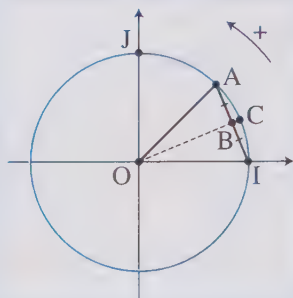
a. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OB}$, $k \in \mathbb{R}$, est la **droite** (OM) .

b. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OB}$, $k \geq 0$ est la **demi-droite** $[OB)$.

c. L'ensemble des points M du plan tels que $OM = 1$ est le **cercle de centre O et de rayon 1**.

Partie B

1. Le triangle OIA étant isocèle en O ($OI = OA = 1$), sa médiane (OB) est confondue avec la bissectrice de l'angle $\widehat{IOA}$.



Donc, comme $(\overline{OI}; \overline{OA}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$:

$$(\overline{OI}; \overline{OB}) = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$2. \bullet B \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}; \frac{0 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right) \text{ soit } B \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

$$\bullet OB = \sqrt{\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2} = \sqrt{\frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{16} + \frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{8 + 4\sqrt{2}}}{4}$$

$$OB = \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4} \text{ soit } OB = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

3. $\bullet \overline{OC} = k \overline{OB}$ avec $k = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} > 0$ donc, d'après la **partie A**, $C \in [OB)$.

$$\bullet OC = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times OB = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = 1,$$

donc **C appartient au cercle de centre O et de rayon 1.**

4. Les coordonnées de C sont égales à celles du vecteur $\overline{OC}$.

$$\overline{OC} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \overline{OB} \text{ a pour coordonnées ;}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{4}; \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

$$\text{D'où } C \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right).$$

5. C est le point du cercle trigonométrique d'affixe $\frac{\pi}{8}$, donc $C \left(\cos \frac{\pi}{8}; \sin \frac{\pi}{8} \right)$.

On déduit du 4. que :

$$\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) = \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) \text{ et } \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right).$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 \times \sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \quad (\text{multiplication par le conjugué}), \text{ d'où :}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 \times \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

24 1. L'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM})$ n'est défini que si $\overrightarrow{AM} \neq \vec{0}$, c'est-à-dire si, $M \neq A$.

a.



$\mathcal{C}$ est la demi-droite $[AB)$ privée de A

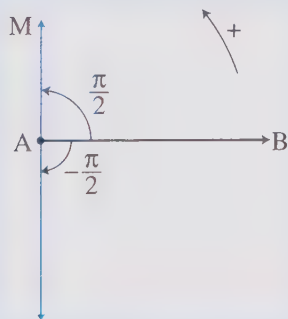
b. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = 0 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\mathcal{C}$ est la droite (AB) privée de A.

c. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



$\mathcal{C}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par A, privée du point A.

2. L'angle $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$ est défini si $M \neq A$ et $M \neq B$.

a. $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

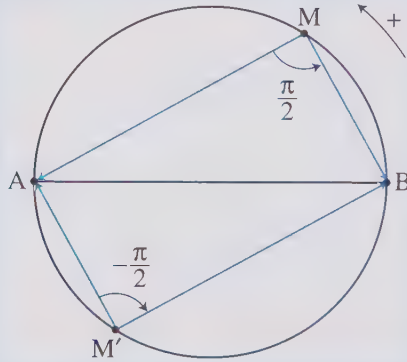


$\mathcal{C}$ est le segment $[AB]$ privé de ses extrémités A et B.

$$\text{b. } (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

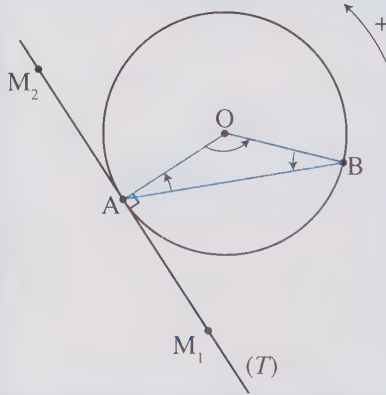
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\Leftrightarrow M \neq A$ et $M \neq B$ et AMB est rectangle en M



$\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B .

25



$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) + 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) = \pi \quad (1) \text{ car } AOB \text{ isocèle en } O.$$

$$\text{Or, } (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AO}) = \pm \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

par définition de la tangente,

$$\text{d'où } 2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{D'après (1), on a alors } 2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) + \pi - (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$2(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}).$$

26 1. $5\theta = 2\pi$ donc $\theta = \frac{2\pi}{5}$ ($\frac{2\pi}{5} \in]-\pi; \pi]$).

2. **A** ($\cos \theta$; $\sin \theta$).

B a pour affixe 2θ , donc **B** ($\cos 2\theta$; $\sin 2\theta$).

C a pour affixe $3\theta = \frac{6\pi}{5}$, donc aussi $-\frac{4\pi}{5} = -2\theta$. D'où **C** ($\cos 2\theta$; $-\sin 2\theta$).

D a pour affixe $4\theta = \frac{8\pi}{5}$, donc aussi $-\frac{2\pi}{5} = -\theta$. D'où **D** ($\cos \theta$; $-\sin \theta$).

3. **K** ($\frac{1+\cos \theta}{2}$; $\frac{\sin \theta}{2}$) et **L** ($\frac{\cos \theta + \cos 2\theta}{2}$; $\frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{2}$).

4. a. t est négatif, car $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont de sens contraire.

b. $\overrightarrow{OK} = t\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+\cos \theta}{2} = t \cos 2\theta \\ \frac{\sin \theta}{2} = -t \sin 2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\cos \theta = 2t \cos 2\theta \\ \sin \theta = -2t \sin 2\theta \end{cases}$

$\overrightarrow{OL} = t\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos \theta + \cos 2\theta}{2} = t \cos \theta \\ \frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{2} = -t \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta + \cos 2\theta = 2t \cos \theta & (1) \\ \sin \theta + \sin 2\theta = -2t \sin \theta & (2) \end{cases}$

5. • $\cos 2\theta = \frac{1+\cos \theta}{2t}$ donc (1) $\Leftrightarrow \cos \theta + \frac{1+\cos \theta}{2t} = 2t \cos \theta$.

• $\sin 2\theta = -\frac{\sin \theta}{2t}$ donc (2) $\Leftrightarrow \sin \theta - \frac{\sin \theta}{2t} = -2t \sin \theta$.

6. • (2) $\Leftrightarrow \sin \theta - \frac{\sin \theta}{2t} = -2t \sin \theta$.

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2t} = -2t \text{ (on divise par } \sin \theta \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2t - 1 = -4t^2 \text{ (on multiplie par } 2t \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 2t - 1 = 0.$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20 > 0.$$

Comme $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$:

$$(2) \Leftrightarrow t = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ ou } t = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Comme $t < 0$, $t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$.

• (1) $\Leftrightarrow \cos \theta \left(1 + \frac{1}{2t} - 2t\right) = -\frac{1}{2t}$

$$\Leftrightarrow \cos \theta (2t + 1 - 4t^2) = -1 \text{ (on multiplie par } 2t \neq 0)$$

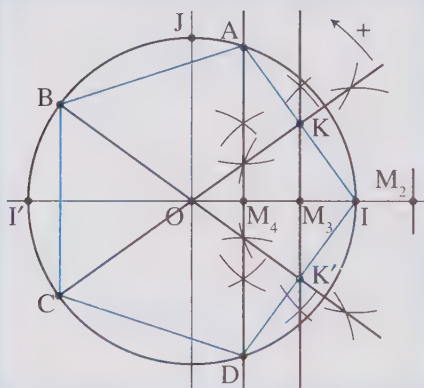
$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{4t^2 - 2t - 1}.$$

$$\begin{aligned}\text{Or } 4t^2 - 2t - 1 &= 4 \frac{(-1 - \sqrt{5})^2}{16} - 2 \times \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - 1 \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \cos \theta = \frac{1}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1 \times (\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

7.



a. $I'OM_1$ est rectangle en O, donc $I'M_1^2 = I'O^2 + OM_1^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, donc :

$$\text{IM}_1 = \sqrt{5}.$$

b. I' , O et M_2 étant alignés dans cet ordre, $I'M_2 = I'O + OM_2$ soit $\sqrt{5} = 1 + x_{M_2}$, donc $x_{M_2} = \sqrt{5} - 1$.

$$\text{c. } x_{M_3} = \frac{x_0 + x_{M_2}}{2} = \frac{0 + \sqrt{5} - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

$$x_{M_4} = \frac{x_0 + x_{M_3}}{2} = \frac{0 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos \frac{2\pi}{5}.$$

d. Après avoir placé A et D, on construit K. $[KO]$ coupe le cercle en C. On construit le milieu K' de $[ID]$. $[K'O]$ coupe le cercle en B.

Il ne reste plus qu'à relier à la règle les points I, A, B, C et D.

27 1. Réponse b.

$$y_B = -\frac{1}{2} \text{ et } x_B < 0, \text{ donc } B\left(-\frac{5\pi}{6}\right).$$

$$\text{Or, } -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = -\frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

2. Réponse b.

$0 < x_A < \frac{1}{2}$, donc A a un affixe dans l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3} \right[$.

Comparons les réels $-\frac{2\pi}{5}$; $-\frac{3\pi}{5}$; $-\frac{\pi}{5}$ avec $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{3}$ en les mettant au même dénominateur $2 \times 5 \times 3$:

$$-\frac{2\pi}{5} = \frac{-12\pi}{30}; -\frac{3\pi}{5} = \frac{-18\pi}{30}; -\frac{\pi}{5} = \frac{-6\pi}{30}; -\frac{\pi}{2} = \frac{-15\pi}{30} \text{ et } -\frac{\pi}{3} = \frac{-10\pi}{30}.$$

Seul $-\frac{2\pi}{5}$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

3. Réponse a.

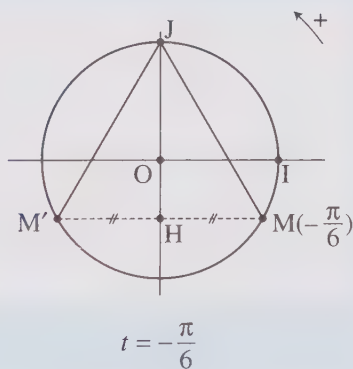
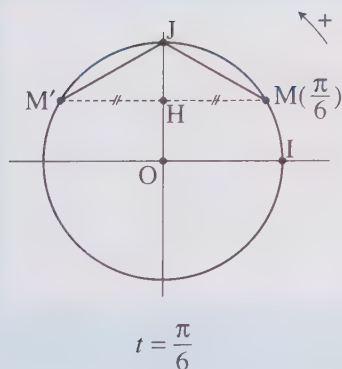
OIC est isocèle en O car $OI = OC = 1$.

De plus, $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

D'où $\widehat{OIC} = \widehat{OCI} = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$. Le triangle OIC est équilatéral.

$$\begin{aligned} 4. \text{ Réponse d. } (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) &= -\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

28 1.



2. J étant situé sur l'axe des ordonnées, qui est la médiatrice de $[MM']$, on sait que J est équidistant de M et de M' .

$JM = JM'$ donc **JMM' est isocèle en J.**

3. $M(\cos(t); \sin(t))$, $M'(-\cos(t); \sin(t))$ et

$$H\left(\frac{\cos(t) + (-\cos(t))}{2}; \frac{\sin(t) + \sin(t)}{2}\right)$$

Soit **$H(0; \sin(t))$.**

$$\begin{aligned} 4. MM' &= \sqrt{(x_{M'} - x_M)^2 + (y_{M'} - y_M)^2} = \sqrt{(-2\cos t)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{4\cos^2(t)} = 2 \times |\cos(t)| \end{aligned}$$

Mais, comme $t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\cos(t) > 0$ donc $|\cos(t)| = \cos(t)$ et :

$$\mathbf{MM}' = 2\cos(t).$$

5. • Si $t \geq 0$, les points O, H, J sont alignés dans cet ordre et

$$\mathbf{JH} = \mathbf{OJ} - \mathbf{OH} = 1 - |\sin(t)| = 1 - \sin(t) \text{ (car } t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right], \text{ donc } \sin(t) \geq 0).$$

• Si $t < 0$, les points H, O, J sont alignés dans cet ordre et $\mathbf{JH} = \mathbf{OJ} + \mathbf{OH} = 1 + |\sin(t)|$.

$$\text{Or, } t \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[\text{, donc } \sin(t) < 0, \text{ donc } |\sin(t)| = -\sin(t), \text{ d'où } \mathbf{JH} = 1 - \sin(t).$$

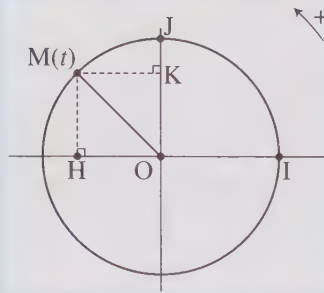
Dans tous les cas, $\mathbf{JH} = 1 - \sin(t)$.

$$\begin{aligned} 6. \text{ Soit } t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\text{, } \mathcal{A}(t) &= \frac{\mathbf{MM}' \times \mathbf{JH}}{2} \\ &= \frac{2 \cdot \cos(t) \times (1 - \sin(t))}{2} \\ \mathcal{A}(t) &= \cos(t) \times (1 - \sin(t)). \end{aligned}$$

$$7. \mathcal{A}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\mathcal{A}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \times \left(1 - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

29 1.



Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et K le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

$$\mathbf{M}(\cos t; \sin t), \mathbf{H}(\cos t; 0) \text{ et } \mathbf{K}(0; \sin t).$$

Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore donne :

$$\mathbf{OM}^2 = \mathbf{OH}^2 + \mathbf{HM}^2.$$

$$\text{Or, } \mathbf{OH} = \sqrt{(\cos t)^2 + 0^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = |\cos t|;$$

$$\mathbf{HM} = \mathbf{OK} = \sqrt{0 + (\sin t)^2} = |\sin t|.$$

D'où $1^2 = |\cos t|^2 + |\sin t|^2$ soit :

$$1 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2$$

Si x est un réel, alors :

$$|x|^2 = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ (-x)^2 = +x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas, $|x|^2 = x^2$.

2. a. $\cos t = \cos \frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b. $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c. $\cos t = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \cos t = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos(t) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{4\pi}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

d. $\sin(2t) = 1 \Leftrightarrow \sin(2t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (\text{ou } 2t = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

[30] 1. • $A(1; y_A)$ et $OA = 2$, donc $OA^2 = 4$.

On sait de plus que $y_A > 0$.

$$OA^2 = 4 \Leftrightarrow 1^2 + y_A^2 = 4 \Leftrightarrow y_A^2 = 3 \Leftrightarrow y_A = \sqrt{3} \text{ ou } y_A = -\sqrt{3} \text{ (impossible)}$$

Donc $A(1; \sqrt{3})$.

• $A' \left(\frac{x_A + 0}{2}; \frac{y_A + 0}{2} \right)$ soit $A' \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

2. • Le point C' est diamétralement opposé à A' .

Par conséquent $C' \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

• C' est le milieu de $[OC]$, donc $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OC'}$,

donc $\overrightarrow{OC}(-1; -\sqrt{3})$ et $C(-1; -\sqrt{3})$.

3. • ABCD est un losange de centre O, donc ses diagonales sont perpendiculaires :

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

• $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OD})$

$$-\frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{3} + (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OD}),$$

d'où $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

• D appartient au cercle trigonométrique, donc $D \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} \right)$.

4. B est diamétralement opposé à D.

Les coordonnées de B sont donc $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

$$\begin{aligned} 5. AD &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 2)^2}{4} + \frac{(-1 - 2\sqrt{3})^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3 - 4\sqrt{3} + 4 + 1 + 4\sqrt{3} + 12}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{20}{4}} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Donc le losange a ses quatre côtés de longueur égale à $\sqrt{5}$.

Produit scalaire dans le plan

I NORME D'UN VECTEUR

1. Généralités

■ **Définition :** Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan et A et B deux points du plan tels que $\overline{AB} = \vec{u}$.

On appelle **norme de $\vec{u}$** , et on note $\|\vec{u}\|$, la distance AB.

- Pour tous points A et B du plan, $\|\overline{AB}\| = AB$.
- $\|\vec{0}\| = 0$.

■ **Propriétés :** Soit λ un réel et $\vec{u}$ un vecteur. Alors $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

■ **Définition :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, ou si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls

avec $(\vec{u}; \vec{v}) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

On peut alors noter $\vec{u} \perp \vec{v}$.

■ Par convention, $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

■ **Propriétés :** Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

■ **Propriétés :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

■ **Propriétés-définition :** Soit O un point, et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan.

• Le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est orthogonal si, et seulement si, $\vec{i} \perp \vec{j}$.

• Le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est orthonormal si, et seulement si, $\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$.

■ **Attention !** $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ n'est pas égal à $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

2. Expression de la norme d'un vecteur en repère orthonormal

■ **Propriétés :** Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, le vecteur $\vec{u}(x; y)$ a pour norme :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

■ On retrouve la formule de la distance en repère orthonormal :

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$,

et $AB = \|\overline{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

II LES DIFFÉRENTES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1. Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

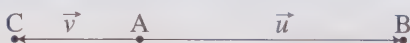
■ **Définition :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

■ **Définition équivalente :** Soient A, B, C trois points alignés, alors :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \begin{cases} AB \times AC & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AC} \text{ sont de même sens;} \\ -AB \times AC & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AC} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$$



$A \in [BC]$ donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -AB \times AC < 0.$$



$A \notin [BC]$ donc :

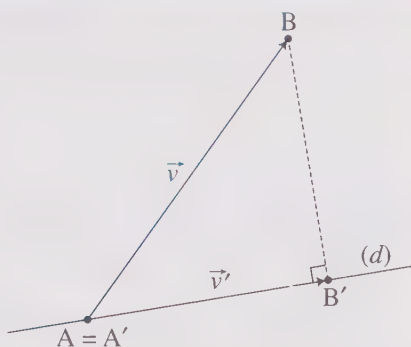
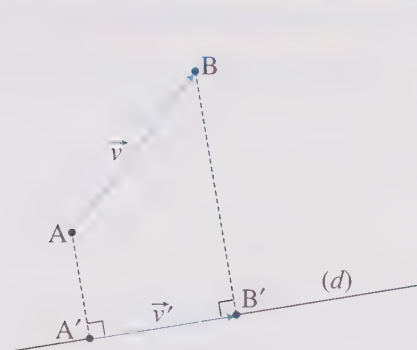
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC > 0.$$

2. Produit scalaire de deux vecteurs quelconques

■ **Projeté orthogonal d'un vecteur sur une droite**

Soit $\vec{v} = \overline{AB}$ un vecteur du plan, et (d) une droite.

On appelle projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la droite (d) le vecteur $\vec{v}' = \overline{A'B'}$, où A' et B' sont les projetés orthogonaux des points A et B sur (d) .



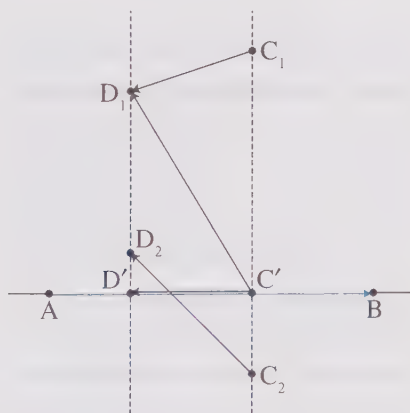
■ **Définition :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit (d) une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}$.

Alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est égal à $\vec{u} \cdot \vec{v}'$, où $\vec{v}'$ désigne le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la droite (d) .

■ **Définition équivalente :** Soient A, B, C trois points non alignés. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}.$$

EXEMPLE



$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{C_1D_1} &= \overline{AB} \cdot \overline{C_2D_2} = \overline{AB} \cdot \overline{C'D'_1} = \overline{AB} \cdot \overline{C'D'} = -AB \times C'D' \\ &= -8 \times 3 = -24. \end{aligned}$$

3. Premières propriétés

■ **Propriétés :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$ et $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

4. Expression du produit scalaire en repère orthonormal

■ **Propriétés :** Dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ vaut $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2.$$

On retrouve la formule $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Expression du produit scalaire à l'aide d'un angle

■ **Théorème :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls.} \end{cases}$$

■ **Conséquence :**

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

6. Expression du produit scalaire à l'aide des normes

■ **Propriété :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

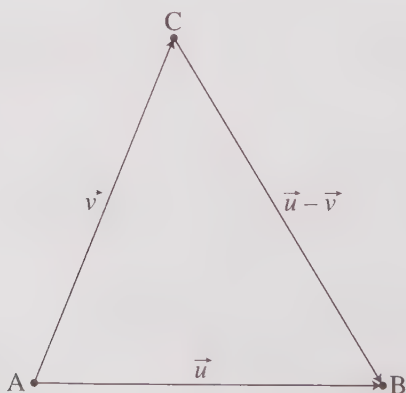
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est donné par chacune des expressions suivantes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

■ **Conséquence :** Soient A, B et C trois points du plan :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2).$$



7. Autres propriétés du produit scalaire

■ **Propriété** : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan, et k un réel.

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.
- $k\vec{u} \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot k\vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

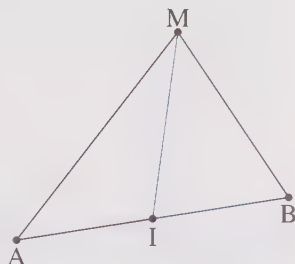
III APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1. Dans un triangle quelconque

■ **Théorème de la médiane**

Soient A et B deux points distincts, et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$



2. Sur un cercle

■ **Propriété** : Soient A et B deux points distincts du plan. M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si, et seulement si, $\overline{MA} \perp \overline{MB}$.

■ **Conséquence** : Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tout cercle admet une équation de la forme :

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

3. Vecteur normal à une droite

■ **Définition** : Soit (d) une droite, et A et B deux points distincts de (d) .

On appelle vecteur normal à (d) tout vecteur non nul $\vec{n}$ tel que $\vec{n} \perp \overline{AB}$.



Si $\vec{n}$ est normal à (d) , alors $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de (d) .

■ **Propriété** : Soit (d) la droite passant par le point A de vecteur normal $\vec{n}$. Soit M un point du plan. Alors :

$$M \in (d) \text{ si, et seulement si, } \overline{AM} \perp \vec{n}.$$

■ **Conséquences** : Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

- toute droite (d) de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ ($c \in \mathbb{R}$)
- la droite d'équation $ax + by + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a; b) \neq (0; 0)$) admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}(a; b)$.

4. Formules d'addition et de duplication en trigonométrie

■ **Théorème :** Soient a et b des réels :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) ;$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) ;$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) ;$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

(formules d'addition).

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) ;$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

(formules de duplication).

SAVOIR-FAIRE

1. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à partir d'une figure (sans coordonnées)

Deux questions à se poser en premier lieu :

- Connaît-on le projeté orthogonal de B sur (AC) ou celui de C sur (AB) ?
- A-t-on des informations permettant de calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$?

Si ce n'est pas le cas, on peut tenter de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et (ou) $\overrightarrow{AC}$ de façon à faire apparaître des vecteurs orthogonaux

EXEMPLE

Dans la figure ci-contre, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ et H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.

Le point E appartient au cercle de centre B passant par H et :

$$\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{DE}.$$

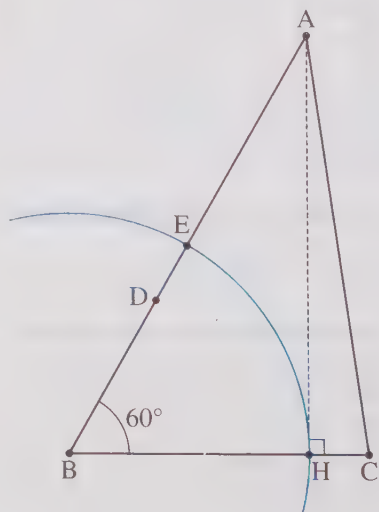
1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Calculer $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{DB}$ et en déduire la distance DH.

1. • H est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = +4 \times 5 = 20.$$

• On ne connaît ni le projeté orthogonal de B sur (AC), ni celui de C sur (AB) ni la mesure de $\widehat{BAC}$.



On décompose :

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= (\overline{AH} + \overline{HB}) \cdot (\overline{AH} + \overline{HC}) \\ &= \overline{AH} \cdot \overline{AH} + \overline{AH} \cdot \overline{HC} + \overline{HB} \cdot \overline{AH} + \overline{HB} \cdot \overline{HC} \\ &= +AH^2 + 0 + 0 - HB \times HC = 7^2 - 4 \times 1 = \mathbf{45}.\end{aligned}$$

$$2. \bullet \overline{BH} \cdot \overline{DB} = \overline{BH} \cdot (-\overline{BD}) = -\overline{BH} \cdot \overline{BD}.$$

Or $\overline{BH} \cdot \overline{BD} = BH \times BD \times \cos(\widehat{HBD})$ avec $\widehat{HBD} = \widehat{CBA} = 60^\circ$.

$$\text{D'où } \overline{BH} \cdot \overline{DB} = -BH \times BD \times \cos(60^\circ) = -4 \times 3 \times \frac{1}{2}.$$

$$\overline{BH} \cdot \overline{DB} = -6.$$

(BE = 4 donc DE = 1 et BD = 3).

$$\begin{aligned}\bullet \overline{BH} \cdot \overline{DB} &= \overline{DB} \cdot \overline{BH} = \frac{1}{2} (\|\overline{DB} + \overline{BH}\|^2 - \|\overline{DB}\|^2 - \|\overline{BH}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\overline{DH}\|^2 - DB^2 - BH^2),\end{aligned}$$

$$\text{soit } -6 = \frac{1}{2} (DH^2 - 3^2 - 4^2).$$

$$\text{D'où } DH^2 - 25 = -6 \times 2 = -12.$$

$$\text{Donc } DH^2 = 13 \text{ et } \mathbf{DH = \sqrt{13}}.$$

2. Déterminer l'équation d'un cercle

• Pour déterminer l'équation du cercle Γ de diamètre $[AB]$ dans un repère orthonormal, on utilise la propriété du paragraphe III-3., puis on passe aux coordonnées et on développe :

$$\begin{aligned}M(x; y) \in \Gamma &\Leftrightarrow \overline{MA} \perp \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 \Leftrightarrow \dots\end{aligned}$$

• Pour déterminer l'équation du cercle Γ de centre Ω et de rayon R , on procède ainsi :

$$\begin{aligned}M(x; y) \in \Gamma &\Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2 \Leftrightarrow \dots\end{aligned}$$

(élever les distances au carré permet de ne pas travailler avec des racines carrées)

EXEMPLE : Dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A(3; -2) et B(5; 1). Déterminer l'équation du cercle Γ de diamètre $[AB]$. Les points K(3; 1) et L(4; 4/3) appartiennent-ils au cercle ?

• Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-5) + (y+2)(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 + y^2 + y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + y^2 + y + 13 = 0.$$

Γ admet donc pour équation $x^2 - 8x + y^2 + y + 13 = 0$.

• $3^2 - 8 \times 3 + 1^2 + 1 + 13 = 0$, donc $K \in \Gamma$.

• $4^2 - 8 \times 4 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} + 13 = \frac{1}{9} \neq 0$, donc $L \notin \Gamma$.

3. Déterminer le centre

et le rayon d'un cercle connaissant son équation

Soit Γ le cercle admettant pour équation, dans un repère orthonormal, $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Pour déterminer le centre et le rayon de Γ , il faut mettre $x^2 + ax$ et $y^2 + by$ sous forme canonique :

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}.$$

EXEMPLE : Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on cherche à déterminer le centre et le rayon du cercle Γ d'équation :

$$x^2 + 3x + y^2 - 4y + 5 = 0.$$

$$x^2 + 3x + y^2 - 4y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \times \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - 2 \times 2y + 2^2 - 2^2 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y-2)^2 - 4 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \text{ avec } M(x; y) \text{ et } \Omega\left(-\frac{3}{2}; 2\right).$$

Le cercle Γ a pour centre $\Omega\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ et pour rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. Dédire de $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$ les valeurs exactes de $\cos(a)$ et $\sin(a)$

La méthode la plus simple consiste à appliquer uniquement la première formule de duplication. L'égalité $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ permet de déterminer $\cos(a)$, et l'égalité $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ permet de calculer $\sin(a)$.

EXEMPLE : En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

$$\bullet \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2} + 2}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2} \text{ ou } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2} \left(\text{car } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0\right).$$

$$\bullet \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

(positif car $\sqrt{2} < 2$)

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \text{ ou } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \left(\text{car } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0\right).$$

5. Reconnaître les ensembles de points

En travaillant par équivalence, on aboutit à l'une des situations de la colonne de gauche du tableau. Il faut ensuite savoir reconnaître l'ensemble des points M vérifiant cette condition.

Soient A, B, C trois points et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

$AM = 0$	Le point A
$AM = r \ (r > 0)$	Le cercle de centre A et de rayon r
$AM = AB$	Le cercle de centre A passant par B
$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$	Le cercle de diamètre $[AB]$
$AM = BM$	La médiatrice du segment $[AB]$
$\overline{AM} \cdot \overline{BC} = 0$	La droite perpendiculaire à (BC) passant par A
$\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$	La droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$

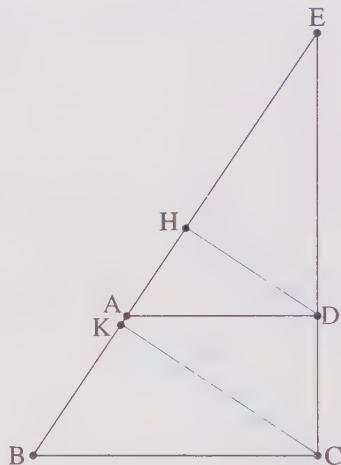
EXERCICES D'APPLICATION

1 PROJECTIONS ORTHOGONALES

★ 15 min ► P. 484

ABCD est un trapèze rectangle de bases [BC] et [AD]. Les droites (AB) et (CD) se coupent en E. K est le pied de la hauteur issue de C du triangle BCE, et H est le pied de la hauteur issue de D du triangle ADE.

1. Déterminer tous les produits scalaires égaux à $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$, puis tous les produits scalaires égaux à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.



On doit en trouver respectivement quatre, puis six.

2. On a de plus $AD = 4$, $BC = 6$ et $CD = 3$. En calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ de deux manières différentes, déterminer la valeur exacte de $\cos(\hat{E})$. En déduire une valeur approchée à 10^{-1} près, en degrés, de l'angle $\hat{E}$.

2 AVEC DES NORMES

★ 5 min ► P. 484

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vérifiant $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 9$, $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 6$.

Calculer :

- a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$; b. $\|\vec{u} - \vec{v}\|$; c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$; d. $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{v}$.

Voir cours 11.6. et 7.

3 AVEC DES ANGLES EN RADIANES

★★ 30 min ► P. 485

Les questions 1. 2. et 3. sont indépendantes

1. Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. On considère, sur le cercle trigonométrique, les points A, B et C d'affixes respectifs $\frac{\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{9}$ et $\frac{-7\pi}{18}$. Calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$.

Voir le chapitre Trigonométrie : mesure d'angles orientés.

2. Soit ABC un triangle rectangle isocèle en B et I le milieu de [BC]. On note a la longueur du côté AB. Exprimer en fonction de a :

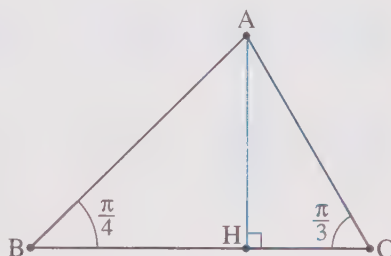
a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; c. AC ; d. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{IC}$.

3. ABC est un triangle tel que :

$$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4} \text{ et } \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}.$$

H désignant le pied de la hauteur issue de A, on a de plus $HC = 1$.

a. Démontrer que $AH = BH = \sqrt{3}$.



$\tan \widehat{ABH} = \dots$

b. En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 - \sqrt{3}$.

c. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

4 CALCULS EN REPÈRE ORTHONORMAL

★★ 40 min ▶ p. 486

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. On considère les vecteurs $\vec{u}\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{3}; -\frac{3}{4}\right)$ et $\vec{w}\left(1; -\frac{4}{3}\right)$.

a. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ puis $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

b. En déduire $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ et $3\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w})$.

2. On considère maintenant les points $A(5; -2)$, $B(-7; 4)$, $M(x; y)$ et $N(3; y')$.

À quelle condition a-t-on...

a. $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = 5$;

▶ Voir le savoir-faire 5.

c. ANB rectangle en A ; d. MAO rectangle en O ;

e. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$; f. ANB rectangle en N.

3. Déterminer, dans chaque cas, si le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est orthogonal, orthonormal ou ni l'un ni l'autre.

a. $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

b. $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{5}{3}\vec{i} + \frac{5}{4}\vec{j}$;

c. $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$, θ désignant un réel quelconque ;

d. $\vec{u} = \frac{a}{a+3}\vec{i} + \frac{3}{a+3}\vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{3}{\sqrt{9+a^2}}\vec{i} - \frac{a}{\sqrt{9+a^2}}\vec{j}$, a désignant un réel autre que -3 .

▶ Voir cours, fin du II.1.

5 ALGORITHME

★ 10 min ▶ P. 488

Écrire un algorithme donnant la valeur du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dont les coordonnées en repère orthonormal sont $\vec{u}(x_1; y_1)$ et $\vec{v}(x_2; y_2)$.

6 ÉQUATIONS DE DROITES ET DE CERCLES

★★ 40 min ▶ P. 488

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1) passant par $A(-3; 4)$ et de vecteur normal $\vec{n}_1(5; -1)$, puis de la droite (d_2) passant par $B(12; 7)$ et de vecteur normal $\vec{j}$.

2. Déterminer un vecteur $\vec{n}_3$ normal à la droite (d_3) d'équation $3x - \frac{y}{2} + 11 = 0$, puis un vecteur $\vec{n}_4$ normal à la droite (d_4) d'équation $y = -\frac{2x}{3} + 1$.

3. Déterminer une équation du cercle Γ_1 de diamètre $[AB]$, où $A(4; 5)$ et $B(7; -5)$.

4. Déterminer une équation du cercle Γ_2 de centre $\Omega(-1; 2)$ et de rayon $R = \frac{3}{4}$.

5. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_3 d'équation $x^2 + y^2 + 6y = 0$.

6. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_4 d'équation :

$$x^2 - 2x + y^2 + 3y + \frac{5}{4} = 0.$$

▶ Voir les savoir-faire 2. et 3.

7 FORMULES D'ADDITION ET DE DUPLICATION

★★ 20 min ▶ P. 490

Dans tout cet exercice, a et b désignent des réels.

1. a. **Question de cours.** Compléter : $\cos(a+b) = \dots$ $\sin(a+b) = \dots$

b. **Application** : en remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

2. a. Question de cours

Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ uniquement, puis en fonction de $\sin(a)$ uniquement.

 Voir le savoir-faire 4.

b. Application

En remarquant que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, puis celle de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

8 TRIANGLES RECTANGLES

★★ 10 min ► p. 491

Soit ABC un triangle rectangle en A, I le milieu de [BC] et H pied de la hauteur issue de A. On note K et L les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC). Le but de cet exercice est de démontrer que les droites (KL) et (AI) sont perpendiculaires.

1. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

 Voir le chapitre Géométrie plane.

2. En remarquant que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}$, démontrer que :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AL}).$$

3. Justifier l'égalité :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH},$$

et conclure.

9 UNE PROPRIÉTÉ DU RECTANGLE

★ 5 min ► p. 492

Soit ABCD un rectangle.

Démontrer que, pour tout point M du plan, $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

 Appliquer le théorème de la médiane.

10 ENSEMBLE DE POINTS

★ 10 min ► p. 492

Soit A, B deux points du plan ; on note I le milieu de [AB].

1. Démontrer que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

2. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3AB.$$

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

11 PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

★★ 20 min ► P. 493

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

1. Construire les points D et E extérieurs au triangle et tels que les triangles ABD et ACE soient rectangles isocèles en A.

2. Démontrer que les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{EAB}$ sont égaux.

3. En remarquant que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, établir que :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}).$$

4. En déduire que les droites (AI) et (DE) sont perpendiculaires.

12 DROITES PERPENDICULAIRES

★ 10 min ► P. 494

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Soient (d) et (d') deux droites affines de coefficients directeurs respectifs m et m' . Démontrer que $(d) \perp (d')$ si, et seulement si, $m \times m' = -1$.

2. **Application** : Déterminer l'équation réduite de la perpendiculaire à $(d) : 2x - 3y + 5 = 0$ passant par A(1 ; 4).

13 ENSEMBLES DE POINTS

★★ 45 min ► P. 495

Dans tout cet exercice, A et B sont deux points distincts, et I est le milieu du segment [AB].

1. Soit M un point quelconque du plan.

a. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.



On remarquera que $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$.

b. **Application** : Supposons que $AB = 1$. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre I et de rayon 2. Démontrer que, pour tout point P du cercle, le produit scalaire $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ est constant, et donner sa valeur.

2. On suppose dans cette question que $AB = 6$.

a. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$.



On pourra montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$ si, et seulement si, $MI = 4$.

b. Déterminer de même l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -18.$$

c. Déterminer enfin l'ensemble $\mathcal{G}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$.

3. Soit M un point quelconque du plan.

a. Supposons tout d'abord que M est sur le cercle de diamètre [AB]. Que vaut alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$?

b. Quel est le signe de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ lorsque M est à l'extérieur du cercle de diamètre [AB] ? Et si M est à l'intérieur du cercle ?

c. On a donc les équivalences :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} > 0 \Leftrightarrow M$ est à l'extérieur du cercle de diamètre [AB].

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de diamètre [AB].

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} < 0 \Leftrightarrow M$ est à l'intérieur du cercle de diamètre [AB].

Application : Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on donne $A(-2; -2)$ et $B(3; 1)$. Donner la position de chacun des points suivants par rapport au cercle

de diamètre [AB] : $M_1\left(-\frac{7}{3}; -1\right)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$ et $M_3\left(0; \frac{5}{2}\right)$.

14 ALGORITHME

★★ 15 min ► p. 496

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit (d) la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Écrire un algorithme permettant de dire si un vecteur $\vec{v}(r; s)$ est normal ou non à (d) .

15 POINTS COCYCLIQUES

★★ 35 min ► p. 497

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de

centre O et de rayon 2, et les points du cercle $A(-2; 0)$, $B(-1; \sqrt{3})$, $C(0; -2)$

et $D(1; y_D)$ avec $y_D < 0$

1. Vérifier que A, B et C appartiennent à $\mathcal{C}$ puis déterminer y_D .

2. Faire une figure à compléter au fur et à mesure.

3. On note M le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Déterminer les coordonnées du point M.

 Utiliser la colinéarité.

4. Vérifier que l'on a l'égalité :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

16 PROPRIÉTÉS DU CERCLE

★★ 20 min ► p. 498

1. On considère dans le plan un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R . Soit M un point du plan et d une droite passant par M , et coupant le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B . Soit A' le symétrique de A par rapport à O .

Établir que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$$

et en déduire que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2.$$

2. Soit EFGH un quadrilatère inscrit dans un cercle, et dont les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ se coupent en un point I . Démontrer la relation $\overline{IE} \cdot \overline{IG} = \overline{IF} \cdot \overline{IH}$.



Penser à utiliser le résultat de la question 1.

17 THÉORÈME DE LA MÉDIANE

★★ 25 min ► p. 500

Dans tout cet exercice, A et B sont deux points du plan, et I le milieu du segment $[AB]$.

1. Démonstration du théorème de la médiane

En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$, démontrer que :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

2. *Application.* On suppose de plus que $AB = 4$.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$, pour les valeurs de k suivantes :

a. $k = 10$; b. $k = 8$; c. $k = 5$.

18 FORMULES D'ADDITION ET DE DUPLICATION

★★ 20 min ► p. 500

1. Soit a un réel de l'intervalle $]-\pi; 0[$ vérifiant $\cos(a) = \frac{3}{5}$. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$.



Quelle est la relation liant $\cos a$ et $\sin a$?

2. Déterminer $\cos(t)$ sachant que $\cos(2t) = \frac{1}{3}$.

3. Déterminer $\cos(t)$ sachant que $\sin(2t) = -\frac{1}{4}$ et que $2t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

19 INDENTITÉ D'APOLLONIUS

★ 10 min ► P. 501

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : « la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses côtés ».

Soit donc ABCD un parallélogramme.

1. Montrer que :

$$AC^2 = AB^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + BC^2$$

$$BD^2 = BC^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} + CD^2.$$

2. En déduire l'égalité d'Appolonius.

20 RELATION D'EULER

★★ 15 min ► P. 502

1. Soit ABC un triangle. Démontrer que pour tout point M du plan :

$$\overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{BM} \cdot \overline{CA} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} = 0.$$



On pourra décomposer les vecteurs $\overline{BM}$ et $\overline{CM}$ en $\overline{BA} + \overline{AM}$ et $\overline{CA} + \overline{AM}$.

2. Soit ABC un triangle. On veut démontrer que ses hauteurs sont concourantes. Soit I le point d'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B du triangle.

À l'aide de la relation d'Euler, démontrer que $\overline{CI} \cdot \overline{AB} = 0$ et conclure.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

21 DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

★★ 25 min ► P. 502

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit (d) la droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$.

1. Vérifier que $A(-1; 1) \in (d)$, puis trouver un vecteur normal à (d) que l'on notera $\vec{n}$.

2. Faire une figure et placer le point $P(1; -4)$.

3. On veut déterminer la distance de P à la droite (d) , c'est-à-dire la distance PH, où H est le projeté orthogonal de P sur (d) .

a. Exprimer $\overline{AP} \cdot \vec{n}$ en fonction de la distance HP.

b. En déduire la distance de P à la droite (d) .



La distance d'un point M à une droite (d) est, par définition, la distance MH où H désigne le projeté orthogonal de M sur (d) .

22 ALGORITHME

★★★ 30 min ► P. 502

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

On considère le cercle Γ d'équation :

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

1. Soient a, b, c trois constantes réelles.

Démontrer que l'équation $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ est équivalente à :

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}.$$

2. À quelle condition, portant sur a, b , et c , l'équation $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ est-elle celle d'un cercle ? Dans ce cas, définir son centre et son rayon.

3. Écrire un algorithme donnant, le cas échéant, le centre et le rayon du cercle Γ d'équation : $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

4. **Application** : pour chacune des équations suivantes, déterminer s'il s'agit d'une équation de cercle et, si oui, donner son centre et son rayon.

a. $x^2 + 3x + y^2 - 4y + \frac{21}{4} = 0$; b. $x^2 + y^2 + y + 1 = 0$.



Voir le savoir-faire 3.

23 FORMULE DE CAUCHY-SCHWARZ

★★★ 20 min ► P. 505

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Montrer que, pour tout réel t :

$$\|\vec{u} + t\vec{v}\|^2 = t^2 \|\vec{u}\|^2 + 2t\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

2. Pourquoi peut-on affirmer que le polynôme du second degré

$$P : t \rightarrow t^2 \|\vec{u}\|^2 + 2t\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

admet un discriminant Δ négatif ou nul ?

Quel est le signe, sur $\mathbb{R}$, de $P(t)$?

3. Montrer alors que $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$.

4. En déduire la formule de Cauchy-Schwarz, valable pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$|(\vec{u} \cdot \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

24 ENSEMBLES DE POINTS

★★ 35 min ► P. 505

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(-2; 7)$ et $B(1; 3)$, et on note I le milieu de $[AB]$.

1. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 0$. Construire cet ensemble et en donner une équation.

2. On veut maintenant déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 = -50.$$

- Montrer que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- Construire le point H de la droite (AB) qui vérifie $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = -25$.
- Décrire alors l'ensemble (F) en justifiant.

On pourra faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{IH}$ dans le produit scalaire $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

25 FORMULE D'AL-KASCHI

★★ 20 min ► P. 507

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

- Démontrer que $BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- En déduire la formule d'Al-Kaschi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$.
- Application :** Soit ABC un triangle vérifiant $AB = 5$ cm, $\widehat{BAC} = 30^\circ$ et $AC = 4$ cm.

Après avoir construit ce triangle, calculer la longueur du côté [BC].

26 LOI DES SINUS

★★ 25 min ► P. 507

Soit ABC un triangle non plat. On note $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$.

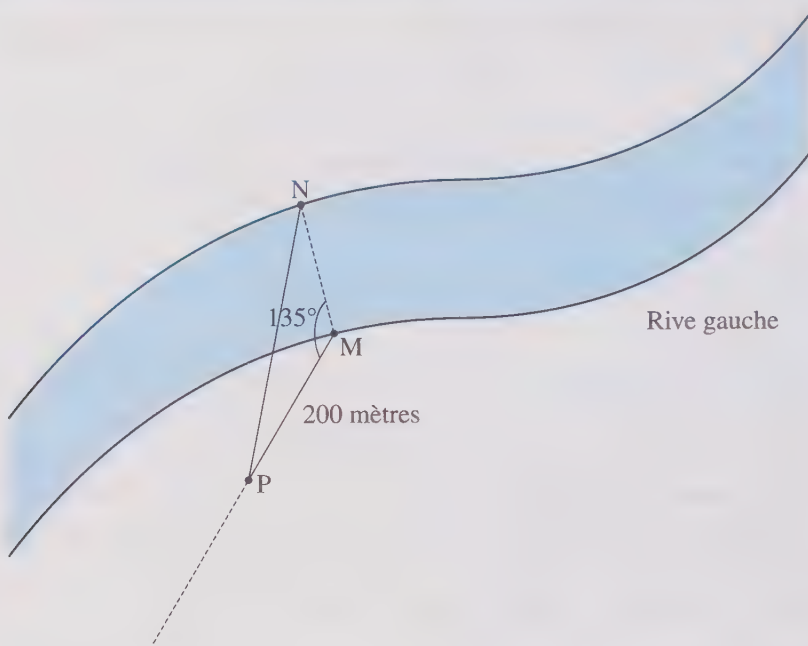
- Soit H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC.
- Exprimer la longueur AH en fonction de l'angle $\widehat{B}$, puis de l'angle $\widehat{C}$.
- En déduire que $\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$.
- Soit K le pied de la hauteur issue de B du triangle ABC. En procédant de même, établir l'égalité $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$.

La formule $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ s'appelle la loi des sinus.

3. Application :

Un homme, situé sur la rive gauche d'un fleuve, souhaite mesurer la distance entre deux arbres (M et N) situés en bordure du fleuve. Pour cela, il dispose d'une boussole.

Initialement placé en M, il mesure un angle de 135° à partir du point M puis avance selon cette direction de 200 mètres. Il arrive ainsi au point P, d'où il mesure que $\widehat{MPN} = 20^\circ$.



À partir de ces données, déterminer la valeur exacte de la distance MN , puis en donner une valeur approchée au centimètre près.

CONTRÔLE

27 PROBLÈME DE « TYPE BAC »

★★ 45 min ▶ p. 508

Partie A

On considère deux points A et B du plan et on désigne par I le milieu du segment $[AB]$.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$.
2. En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Partie B

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, les points A , B et C ont pour coordonnées respectives $A(7; 4)$, $B(-2; 1)$, $C(1; -2)$.

1. a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1; -3)$ est normal à la droite (AB) .
b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ , perpendiculaire à (AB) passant par C .

- b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
- c. Montrer que $CB^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BA}$.
- d. Démontrer que le point C appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$ défini dans la **partie A**.

CONTRÔLE

28 QUESTION DE COURS

★ 10 min ► P. 509

Soient a et b deux réels.

Dans le plan muni du repère orthonormal direct $(O ; I ; J)$, on nomme A et B les points du cercle trigonométrique d'affixes respectifs a et b .

En calculant de deux manières différentes le produit scalaire $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$, exprimer $\cos(a - b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\sin(a)$, $\cos(b)$, $\sin(b)$.

29 PROBLÈME

★★ 25 min ► P. 510

Soit ABC un triangle, et H le pied de la hauteur issue de A.

Le but de cet exercice est de démontrer l'équivalence suivante :

ABC est rectangle en A si, et seulement si, $AB^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$.

1. On suppose que ABC est rectangle en A.

a. Montrer que $AB^2 = \overline{CB} \cdot \overline{AB}$.

b. Montrer ensuite que $\overline{CB} \cdot \overline{AB} = \overline{CB} \cdot \overline{HB}$.

c. Conclure.

2. On suppose maintenant que $AB^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$.

En décomposant le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis conclure.

CORRIGÉS

1 1. • Le projeté orthogonal de $\overline{AB}$ sur (CE) est $\overline{DC}$, donc $\overline{CE} \cdot \overline{AB} = \overline{CE} \cdot \overline{DC}$.
 $\overline{DC}$ est également le projeté orthogonal sur (CE) de $\overline{AC}$ et de $\overline{DB}$ donc :

$$\overline{CE} \cdot \overline{AB} = \overline{CE} \cdot \overline{AC} = \overline{CE} \cdot \overline{DB}.$$

Le projeté orthogonal de $\overline{CE}$ sur (AB) est $\overline{KE}$, donc :

$$\overline{CE} \cdot \overline{AB} = \overline{KE} \cdot \overline{AB}.$$

Finalement :

$$\overline{CE} \cdot \overline{AB} = \overline{CE} \cdot \overline{DC} = \overline{CE} \cdot \overline{AC} = \overline{CE} \cdot \overline{DB} = \overline{KE} \cdot \overline{AB}.$$

• Par projection orthogonale sur (AB) , on obtient :

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{KH} = \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \overline{AB} \cdot \overline{KD}.$$

Par projection orthogonale sur (CD) , on obtient :

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{DC} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{CD} = \overline{DB} \cdot \overline{CD}.$$

Finalement :

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{KH} = \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \overline{AB} \cdot \overline{KD} = \overline{DC} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{CD} = \overline{DB} \cdot \overline{CD}.$$

2. • D'une part, $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = \overline{DC} \cdot \overline{DC} = +DC^2 = 9$.

• D'autre part, $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = AB \times DC \times \cos(\overline{AB}; \overline{DC})$, avec $DC = 3$ et :

$$\cos(\overline{AB}; \overline{DC}) = \cos(\overline{EB}; \overline{EC}) = \cos \hat{E}.$$

Soit L le projeté orthogonal de A sur (BC) :

$$LB = 6 - 4 = 2 \quad \text{et} \quad LA = CD = 3.$$

Le triangle LAB étant rectangle en L :

$$AB^2 = LA^2 + LB^2 = 3^2 + 2^2 = 13,$$

d'où $AB = \sqrt{13}$.

• On a donc $9 = \sqrt{13} \times 3 \times \cos \hat{E}$, d'où :

$$\cos \hat{E} = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{et} \quad \hat{E} \approx 33,7^\circ.$$

2 a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$$= \frac{1}{2}(9^2 - 4^2 - 6^2) = \frac{29}{2}.$$

b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2),$

soit $\frac{29}{2} = \frac{1}{2}(4^2 + 6^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2),$

d'où $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 23.$

Donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{23}$ (car une norme est toujours positive)

c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$

$$= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 16 - 36 = -20.$$

$$\begin{aligned} \text{d. } (3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot \vec{v} &= 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2 \\ &= 3 \times \frac{29}{2} - 2 \times 36 = -\frac{57}{2} = -28,5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{3} \text{ 1. } \bullet \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \\ &= 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{7\pi}{9} - \frac{\pi}{9}\right) \\ &= \cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= OA \times OC \times \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) \\ &= 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{-7\pi}{18} - \frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{-9\pi}{18}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

2. a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$, car B est le projeté orthogonal de C sur (AB).

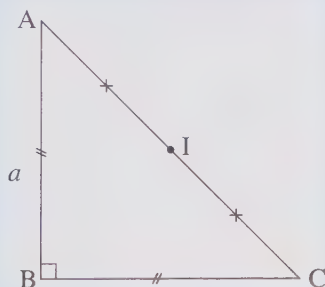
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 = a$.

b. ABC est rectangle en B donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

c. $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, car ABC est rectangle en B.

Donc $AC = \sqrt{2} \times a$.



d. ABC étant isocèle en B, la médiane (BI) est aussi la hauteur issue de B du triangle. D'où $(BI) \perp (AC)$. Alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{IC} &= \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IC} = -IC^2 = -\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = -\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{2a^2}{4} = -\frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ a. } \bullet \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AH}{HC}.$$

$$\text{Or, } \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

D'où $\frac{AH}{HC} = \sqrt{3}$, soit $\frac{AH}{1} = \sqrt{3}$, et $AH = \sqrt{3}$.

• $\widehat{ABH} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{BHA} = \frac{\pi}{2}$, donc $\widehat{BAH} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Comme $\widehat{ABH} = \widehat{BAH}$, le triangle ABH est isocèle en H.

Donc $BH = HA = \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \text{b. } \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= (\overline{AH} + \overline{HB}) \cdot (\overline{AH} + \overline{HC}) \\ &= AH^2 + \overline{AH} \cdot \overline{HC} + \overline{HB} \cdot \overline{AH} + \overline{HB} \cdot \overline{HC} \\ &= \sqrt{3}^2 + 0 + 0 - HB \times HC \text{ (car } \overline{HB} \text{ et } \overline{HC} \text{ sont de sens contraire)} \\ &= 3 - \sqrt{3} \times 1. \end{aligned}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3 - \sqrt{3}.$$

c. • $\widehat{BAC} = \pi - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{12\pi - 3\pi - 4\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$.

• $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, avec $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$ et

$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{3+1} = 2$ (théorème de Pythagore dans ABH et ACH rectangles en H).

• D'après b., $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3 - \sqrt{3} = \sqrt{6} \times 2 \times \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

$$\text{Donc } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{(3 - \sqrt{3}) \times \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

4 I. a. • $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{5}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{6} + 0 = -\frac{5}{6}$.

• $\vec{u} \cdot \vec{w} = -\frac{5}{2} \times 1 + 0 \times -\frac{4}{3} = -\frac{5}{2}$.

• $\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{3} \times 1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

b. • $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{5}{2} + \frac{4}{3} = \frac{-15+8}{6} = -\frac{7}{6}$.

• $3\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 3(\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}) = 3\left(-\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\right) = -\frac{5}{2} - 4 = -\frac{13}{2}$.

2. a. $\overline{ON}(3; y')$ et $\overline{AB}(-12; 6)$ donc :

$$\overline{ON} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow 3 \times (-12) + y' \times 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6y' = +36$$

$$\overline{ON} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow y' = +6.$$

b. $\overline{AB} \cdot \overline{OM} = 5 \Leftrightarrow -12 \times x + 6 \times y = 0$

$$\overline{AB} \cdot \overline{OM} = 5 \Leftrightarrow y = 2x$$

(équation de droite).

c. ANB est rectangle en A $\Leftrightarrow \overline{AB} \perp \overline{AN}$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AN} = 0 \text{ avec } \overline{AN}(-2; y' + 2)$$

$$\Leftrightarrow -12 \times (-2) + 6 \times (y' + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y' + 2 = \frac{-24}{6}$$

$$\Leftrightarrow y' = -4 - 2$$

$$\Leftrightarrow y' = -6.$$

d. MAO est rectangle en O $\Leftrightarrow \overline{OM} \perp \overline{OA}$

$$\Leftrightarrow \overline{OM} \cdot \overline{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \times 5 + y \times (-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 2y = 0$$

(équation de droite linéaire).

e. $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow (5-x) \times (-7-x) + (-2-y) \times (4-y) = 0$

$$\Leftrightarrow -35 + 2x + x^2 - 8 - 2y + y^2 = 0.$$

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y - 43 = 0$$

(équation de cercle).

f. ANB est rectangle en N $\Leftrightarrow \overline{NA} \cdot \overline{NB} = 0$

$$\Leftrightarrow (5-3) \times (-7-3) + (-2-y') \times (4-y')$$

$$\Leftrightarrow -20 - 8 - 2y' + y'^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y'^2 - 2y' - 28 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times (-28) = 116 = (2\sqrt{29})^2, \text{ donc les racines sont :}$$

$$y'_1 = \frac{2 - 2\sqrt{29}}{2} = 1 - \sqrt{29} \text{ et } y'_2 = 1 + \sqrt{29}.$$

ANB est rectangle en N si, et seulement si, $y' = 1 - \sqrt{29}$ ou $y' = 1 + \sqrt{29}$.

3. a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,$

donc $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$ est orthogonal.

• $\|\vec{u}\|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1, \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$

donc $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormal ($\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$).

b. • $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1 + 1 = 2 \neq 0,$

donc $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$ n'est pas orthogonal.

À fortiori, il n'est pas non plus orthonormal.

$$\begin{aligned} \bullet \vec{u} \cdot \vec{v} &= \cos \theta \times (-\sin \theta) + \sin \theta \times \cos \theta \\ &= \sin \theta \times \cos \theta + \sin \theta \times \cos \theta = 0, \end{aligned}$$

donc $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$ est orthogonal.

$$\bullet \|\vec{u}\|^2 = (\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

$$\|\vec{v}\|^2 = (-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$$

donc $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormal.

d. Soit $a \neq -3$.

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{a \times 3}{(a+3) \times \sqrt{9+a^2}} + \frac{3 \times (-a)}{(a+3) \times \sqrt{9+a^2}} = 0,$$

donc $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$ est orthogonal.

$$\bullet \|\vec{u}\|^2 = \left(\frac{a}{a+3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a+3}\right)^2 = \frac{a^2+9}{(a+3)^2} = \frac{a^2+9}{a^2+6a+9}.$$

$$\|\vec{u}\|^2 = 1 \Leftrightarrow a^2+9 = a^2+6a+9 \Leftrightarrow 6a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{9+a^2}}\right)^2 + \left(\frac{-a}{\sqrt{9+a^2}}\right)^2 = \frac{9+a^2}{9+a^2} = 1.$$

Donc :

• si $a \neq 0$ (et $a \neq -3$), $\|\vec{u}\| \neq 1$ et $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$ n'est pas orthonormal ;

• si $a = 0$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormal.

5

VARIABLES

```
x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
y1 EST_DU_TYPE NOMBRE
x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
y2 EST_DU_TYPE NOMBRE
a EST_DU_TYPE NOMBRE
```

DEBUT_ALGORITHME

```
LIRE x1
LIRE y1
LIRE x2
LIRE y2
a PREND_LA_VALEUR x1*x2+y1*y2
AFFICHER "le produit scalaire de u et v vaut"
AFFICHER a
```

FIN_ALGORITHME

6 1. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} \bullet M \in (d_1) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow (x+3) \times 5 + (y-4) \times (-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - y + 19 = 0. \end{aligned}$$

Donc (d_1) a pour équation $5x - y + 19 = 0$.

$$\bullet M \in (d_2) \Leftrightarrow \overline{BM} \cdot \vec{j} = 0 \text{ avec } \vec{j}(0; 1) \\ \Leftrightarrow (x-12) \times 0 + (y-7) \times 1 = 0 \Leftrightarrow y = 7.$$

Donc (d_2) a pour équation $y = 7$.

$$2. \text{ D'après le cours, } \vec{n}_3 \left(3; -\frac{1}{2} \right) \text{ est normal à } (d_3).$$

• Déterminons une équation cartésienne de (d_4) :

$$y = -\frac{2x}{3} + 1 \Leftrightarrow 3y = -2x + 3 \Leftrightarrow 2x + 3y - 3 = 0.$$

Donc $\vec{n}_4(2; 3)$ est normal à (d_4) .

Il existe une infinité de solutions pour n : tous les vecteurs dont les coordonnées sont proportionnelles à $\left(3; -\frac{1}{2} \right)$. De même pour $\vec{n}_4$.

3. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow (4-x)(7-x) + (5-y)(-5-y) = 0 \\ \Leftrightarrow 28 - 11x + x^2 - 25 + y^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 11x + y^2 + 3 = 0.$$

Donc Γ_1 a pour équation $x^2 - 11x + y^2 + 3 = 0$.

4. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = \frac{9}{16}.$$

Donc Γ a pour équation $x^2 + 2x + y^2 - 4y + \frac{71}{16} = 0$.

$$5. x^2 + y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y + 3^2 - 3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-(-3))^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow PM^2 = 3^2 \text{ avec } P(0; -3).$$

Donc le cercle Γ_3 a pour centre $P(0; -3)$ et pour rayon 3.

$$6. x^2 - 2x + y^2 + 3y + \frac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + y^2 + 2 \times \frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow QM^2 = \sqrt{2}^2 \text{ avec } Q\left(1; -\frac{3}{2}\right).$$

Donc Γ_4 a pour centre $Q\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ et pour rayon $\sqrt{2}$.

7 1. a. $\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$;

$$\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b.$$

$$\begin{aligned} \text{h. } \bullet \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ (réel négatif).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

2. a. $\bullet \cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1.$

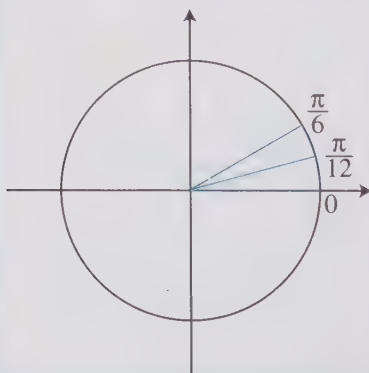
$\bullet \cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a).$

b. $\bullet$ Si $a = \frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{6} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1,$

soit $\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1$, puis $2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3} + 2}{2},$

d'où $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}.$

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ vaut soit $\sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{4}}$ soit $-\sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{4}}.$



D'après le cercle trigonométrique, $\cos \frac{\pi}{12}$ est strictement positif, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}.$$

• D'après la 2^e formule, $\cos \frac{\pi}{6} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$,

$$\text{soit } \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\text{puis } \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Comme $\sin \frac{\pi}{12} > 0$:

$$\sin \frac{\pi}{12} = +\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\boxed{8} \quad 1. \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) \\ = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}.$$

$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ car I est le milieu de [BC], d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$;

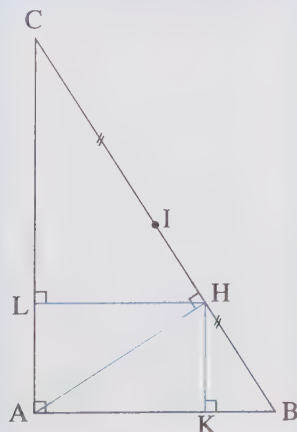
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

$$2. \quad \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}) \\ = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AL}].$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{KA}$,

$$\text{donc } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KA} + 0 + 0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AL}],$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AL}).$$



3. • Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{HA}$ sur (AB) est $\overrightarrow{KA}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KA}$.
- Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AH}$ sur (AC) est $\overrightarrow{AL}$, donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AL}$.
- $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH})$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HA})$
 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CB}$
 $= \frac{1}{2} \times 0 = 0$, car $(AH) \perp (BC)$.

Donc les droites (AI) et (KL) sont perpendiculaires.

9 Soit I le centre du rectangle $ABCD$

D'après le théorème de la médiane, pour tout point M du plan :

$$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2}, \text{ car } I \text{ est le milieu de } [AC].$$

$$MB^2 + MD^2 = 2MI^2 + \frac{BD^2}{2}, \text{ car } I \text{ est le milieu de } [BD].$$

Comme $ABCD$ est un rectangle, ses diagonales ont même longueur :

$$AC = BD, \text{ donc } \frac{AC^2}{2} = \frac{BD^2}{2}$$

$$\text{Donc } MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

10 1. Soit M un point quelconque du plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}.\end{aligned}$$

I étant le milieu de $[AB]$, les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés, c'est-à-dire $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

2. Soit M un point du plan,

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3AB \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = 3AB$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \|\overrightarrow{MI}\| = 3AB \text{ (car } 2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2 \times MI = 3AB$$

$$\Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}AB$$

Donc l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3AB$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{3}{2}AB$ (noté $\mathcal{C}$).

Or, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}) \\ &= \frac{1}{2}(0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + 0) \\ \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}).\end{aligned}$$

4. Or $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -AC \times AD \times \cos(\widehat{CAD})$,

et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \times AE \times \cos(\widehat{BAE})$.

Comme $AD = AB$, $AC = AE$ et $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} &= -AC \times AD \times \cos(\widehat{CAD}) \\ &= -AE \times AB \times \cos(\widehat{BAE}) = -\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$.

Donc les droites (AI) et (DE) sont perpendiculaires.

12 1. Les équations réduites de (d) et (d') sont respectivement $(d): y = mx + p$ (où $p \in \mathbb{R}$) et $(d'): y = m'x + p'$ (où $p' \in \mathbb{R}$).

D'après le chapitre de Géométrie plane, $\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de (d) , et $\vec{u}'(1; m')$ est un vecteur directeur de (d') .

Donc $(d) \perp (d') \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \times 1 + m \times m' = 0.$$

$(d) \perp (d') \Leftrightarrow m \times m' = -1.$

2. On détermine l'équation réduite de (d) en isolant y pour obtenir son coefficient directeur :

$$2x - 3y + 5 = 0 \Leftrightarrow 3y = 2x + 5 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Le coefficient directeur de (d) vaut donc $m = \frac{2}{3}$.

• Notons (d') la perpendiculaire à (d) passant par A

$(d'): y = m'x + p'$ avec $mm' = -1$, soit $m' = \frac{-1}{m} = -\frac{3}{2}$.

Comme $A(1; 4) \in (d')$, on a de plus $4 = -\frac{3}{2} \times 1 + p'$, donc $p' = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.

(d') a donc pour équation réduite $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$.

13



$$\begin{aligned}
 1. \text{ a. } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
 &= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
 &= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IB}
 \end{aligned}$$

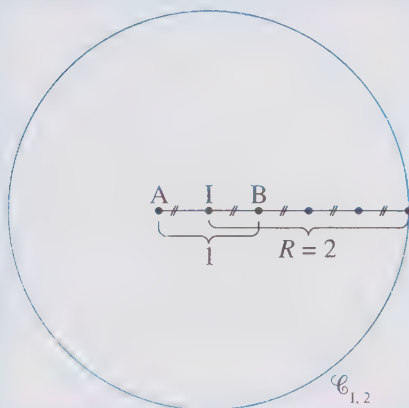
car $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires et de sens contraire.

Comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $IA = IB = \frac{1}{2} AB$. d'où :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} - \frac{AB}{2} \times \frac{AB}{2} = MI^2 + 0 - \frac{AB^2}{4}.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

b.



Soit P un point du cercle.

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PI^2 - \frac{AB^2}{4} \text{ (d'après le résultat du a.)}$$

$$= 2^2 - \frac{1^2}{4} = \frac{15}{4}, \text{ donc :}$$

pour tout point P du cercle, le produit scalaire $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ est constant et égal à $\frac{15}{4}$.

$$2. \text{ a. } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 7 \text{ d'après 1. a.}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = 7 + \frac{36}{4} = 16 \Leftrightarrow MI = 4 \text{ ou } MI = -4$$

$$\Leftrightarrow M = 4 \text{ (car une distance est toujours positive).}$$

L'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$ est donc le cercle de centre I et de rayon 4.

$$b. \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -18 \Leftrightarrow MI^2 = -18 + \frac{36}{4} \Leftrightarrow MI^2 = -9, \text{ ce qui est impossible.}$$

(F) est donc l'ensemble vide.

$$c. \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9 \Leftrightarrow MI^2 = -9 + \frac{36}{4} = 0 \Leftrightarrow MI = 0 \Leftrightarrow M = I.$$

Donc $\mathcal{G}$ est réduit au point I.

3. a. Si M appartient au cercle de diamètre [AB], alors AMB est rectangle en M.

$$\text{Donc } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

b. • Si M est à l'extérieur du cercle de diamètre [AB] (et de centre I), alors $IM > R$,

$$R \text{ désignant le rayon du cercle. } R = \frac{AB}{2} \text{ donc } IM > \frac{AB}{2}.$$

Comme la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: $IM^2 > \frac{AB^2}{4}$

$$\text{D'où } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} > 0.$$

• Si M est à l'intérieur du cercle, $IM < R$ soit $IM < \frac{AB}{2}$. Donc $IM^2 < \frac{AB^2}{4}$.

$$\text{D'où } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} < 0.$$

$$c. \bullet \overrightarrow{M_1A} \cdot \overrightarrow{M_1B} = \left(-2 + \frac{7}{3}\right) \times \left(3 + \frac{7}{3}\right) + (-2+1)(1+1) = \frac{16}{9} - 2 = -\frac{2}{9}.$$

$-\frac{2}{9} < 0$, donc M_1 est à l'intérieur du cercle.

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{M_2A} \cdot \overrightarrow{M_2B} &= \left(-2 + \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \left(3 + \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) + \left(-2 - \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \\ &= -6 + \frac{\sqrt{17}-1}{2} + \frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4} - 2 + \frac{\sqrt{17}-1}{2} + \frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4} \\ &= -8 + (\sqrt{17}-1) + \frac{17-2\sqrt{17}+1}{2} \\ &= -9 + \sqrt{17} + 9 - \sqrt{17} = 0. \end{aligned}$$

Donc M_2 est sur le cercle.

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{M_3A} \cdot \overrightarrow{M_3B} &= (-2-0)(3-0) + \left(-2 - \frac{5}{2}\right) \left(1 - \frac{5}{2}\right) \\ &= -2 \times 3 + \left(-\frac{9}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -6 + \frac{27}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$\frac{3}{4} > 0$, donc M_3 est à l'extérieur du cercle.

14 $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à (d) .

Donc $\vec{v}(r; s)$ est normal à (d) si, et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires si et seulement si $r \times b - s \times a = 0$

VARIABLES

r EST_DU_TYPE NOMBRE
s EST_DU_TYPE NOMBRE
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME

LIRE r
LIRE s
LIRE a
LIRE b
SI (r*b-s*a==0) ALORS
 DEBUT_SI
 AFFICHER "v est normal à (d)"
 FIN_SI
SINON
 DEBUT_SINON
 AFFICHER "v n'est pas un vecteur normal à (d)"
 FIN_SINON
FIN_ALGORITHME

15 1. • $OA^2 = (-2)^2 + 0^2 = 4$, donc $OA = 2$ et $A \in (\mathcal{C})$.

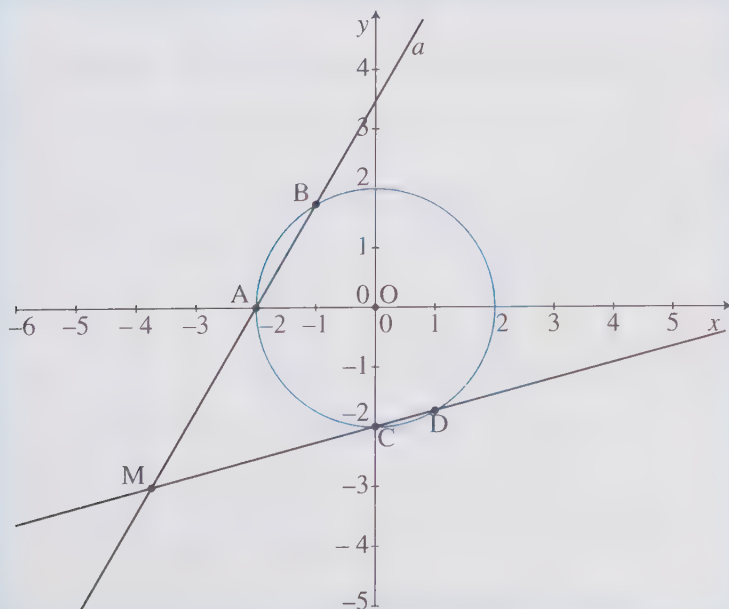
$OB^2 = (-1)^2 + \sqrt{3}^2 = 4$, donc $OB = 2$ et $B \in (\mathcal{C})$.

$OC = 0^2 + (-2)^2 = 4$, donc $OC = 2$ et $C \in (\mathcal{C})$.

• $D \in (\mathcal{C})$, donc $OD^2 = 4$, donc $1^2 + y_D^2 = 4$, donc $y_D^2 = 3$, donc $y_D = -\sqrt{3}$ ou $y_D = \sqrt{3}$.

Comme $y_D < 0$, $y_D = -\sqrt{3}$.

2.



3. • $M(x; y) \in (AB)$, donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, avec $\overrightarrow{AM}(x+2; y)$ et $\overrightarrow{AB}(1; \sqrt{3})$.

Donc $\sqrt{3}(x+2) - y \times 1 = 0$, soit $\sqrt{3}x - y = -2\sqrt{3}$ (1).

• $M(x; y) \in (CD)$, donc $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, avec $\overrightarrow{CM}(x; y+2)$ et $\overrightarrow{CD}(1; 2-\sqrt{3})$.

Donc $(2-\sqrt{3})x - (y+2) \times 1 = 0$, soit $(2-\sqrt{3})x - y = 2$ (2).

• En soustrayant membre à membre les équations (1) et (2), on obtient $x(2\sqrt{3}-2) = -2\sqrt{3}-2$, d'où :

$$x = \frac{-2(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}-1)} = -\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)} = -\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = -\frac{4+2\sqrt{3}}{3-1} = -2-\sqrt{3}.$$

Puis, d'après l'équation (1), $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} - 3 + 2\sqrt{3} = -3$.

D'où $M(-2-\sqrt{3}; -3)$.

4. $\overrightarrow{MA}(\sqrt{3}; 3)$ et $\overrightarrow{MB}(1+\sqrt{3}; 3+\sqrt{3})$, donc :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \sqrt{3}(1+\sqrt{3}) + 3(3+\sqrt{3}) = 12 + 4\sqrt{3}.$$

$\overrightarrow{MC}(2+\sqrt{3}; 1)$ et $\overrightarrow{MD}(3+\sqrt{3}; 3-\sqrt{3})$ donc :

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = (2+\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) + 3-\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3}.$$

Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.

16 1. • $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B})$

$$= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{A'B}.$$

A' étant diamétralement opposé à A , le triangle $AA'B$ est rectangle en B .

Donc $\overrightarrow{A'B} \perp \overrightarrow{AB}$.

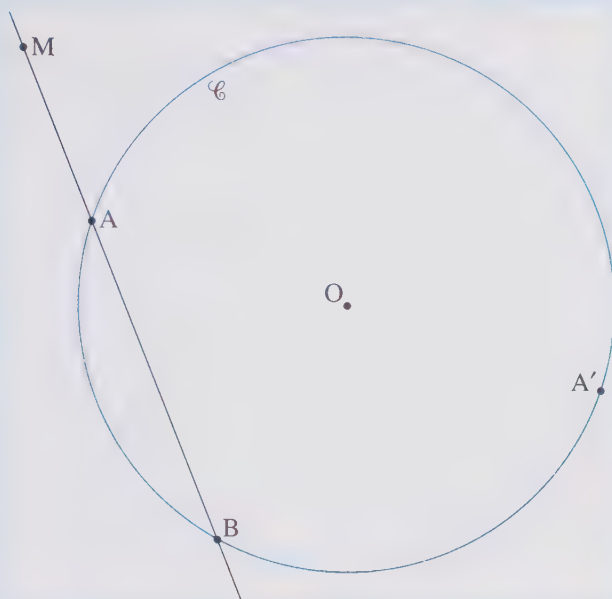
Comme A, M, B sont alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont colinéaires.

Donc $\overrightarrow{A'B} \perp \overrightarrow{MA}$.

$$\text{D'où } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + 0 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}) \\ &= MO^2 + \overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} \\ &= MO^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \vec{0} - OA \times OA'. \end{aligned}$$

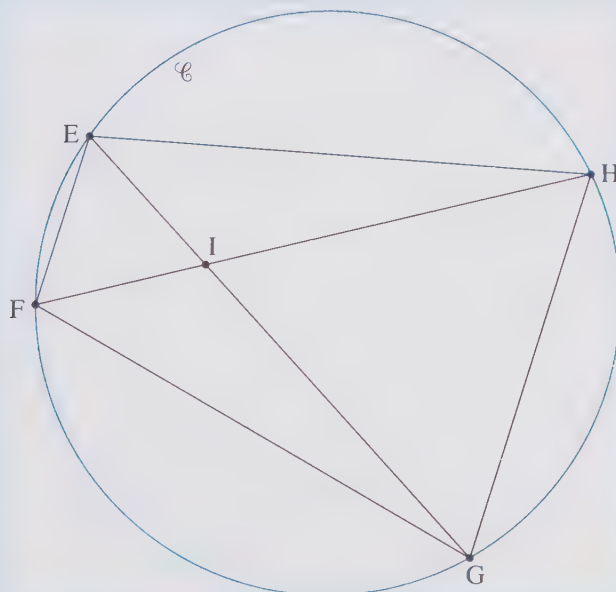
$$\text{Donc } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = MO^2 - R^2.$$



2. Soit O le centre du cercle et R son rayon. Le résultat du 1. appliqué au point I , donne successivement :

$$\overline{IE} \cdot \overline{IG} = IO^2 - R^2 \text{ et } \overline{IF} \cdot \overline{IH} = IO^2 - R^2.$$

Donc $\overline{IE} \cdot \overline{IG} = \overline{IF} \cdot \overline{IH}$.



$$\begin{aligned}
 \boxed{17} \quad 1. \quad MA^2 + MB^2 &= \overline{MA} \cdot \overline{MA} + \overline{MB} \cdot \overline{MB} \\
 &= (\overline{MI} + \overline{IA}) \cdot (\overline{MI} + \overline{IA}) + (\overline{MI} + \overline{IB}) \cdot (\overline{MI} + \overline{IB}) \\
 &= MI^2 + 2\overline{IA} \cdot \overline{MI} + IA^2 + MI^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IB} + IB^2.
 \end{aligned}$$

$$IA = IB = \frac{AB}{2} \text{ d'où :}$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\overline{MI} \cdot (\overline{IA} + \overline{IB}) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

I est le milieu de $[AB]$, donc $\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$ d'où :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$2. \text{ a. } MA^2 + MB^2 = 10 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 10 \left(\text{avec } \frac{AB^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8 \right)$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 = 10 - 8 = 2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow IM = 1.$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre I de rayon 1.

$$\text{b. } MA^2 + MB^2 = 8 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 8$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow IM = 0$$

$$\Leftrightarrow M = I$$

L'ensemble cherché est le point I.

$$\text{c. } MA^2 + MB^2 = 5 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 5 \Leftrightarrow 2MI^2 = 5 - 8$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = -\frac{3}{2} \text{ (impossible).}$$

L'ensemble cherché est l'ensemble vide.

$$\begin{aligned}
 \boxed{18} \quad 1. \quad \cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos a \times \cos \frac{\pi}{6} - \sin a \times \sin \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin a \times \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \text{ d'où :}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + (\sin a)^2 = 1$$

$$(\sin a)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sin a = \frac{4}{5} \text{ ou } \sin a = -\frac{4}{5}.$$

Comme $a \in]-\pi; 0[$, $\sin a < 0$, donc $\sin a = -\frac{4}{5}$.

D'où $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{10} - \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{1}{2}$ et :

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}.$$

$$2. \cos(2t) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2\cos^2(t) - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(t) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } \cos(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$3. \sin(2t) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sin(t)\cos(t) = -\frac{1}{4}.$$

Cette équation à deux inconnues est difficile à exploiter. Il est préférable d'utiliser l'équation : $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

Calculons $\cos(2t)$: $\cos^2(2t) + \sin^2(2t) = 1$

$$(\cos(2t))^2 + \frac{1}{16} = 1$$

$$(\cos(2t))^2 = \frac{15}{16}.$$

$$\text{Donc } \cos(2t) = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ ou } \cos(2t) = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{Comme } 2t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \cos(2t) \geq 0 \text{ donc } \cos(2t) = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\cos(2t) = \frac{\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow 2\cos^2(t) - 1 = \frac{\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow \cos^2(t) = \frac{4 + \sqrt{15}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos(t) = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } \cos(t) = -\frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\cos t > 0 \text{ donc } \cos t = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\boxed{19} \text{ 1. } AC^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AC}$$

$$= (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot (\overline{AB} + \overline{BC})$$

$$AC^2 = AB^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + BC^2.$$

$$\text{De même } BD^2 = (\overline{BC} + \overline{CD}) \cdot (\overline{BC} + \overline{CD})$$

$$BD^2 = BC^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} + CD^2.$$

$$2. AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + BC^2 + CD^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD}$$

Les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{DC}$ sont égaux, donc $\overline{CD} = -\overline{AB}$ et :

$$2\overline{AB} \cdot \overline{BC} + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD} = 2\overline{BC} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) = 2\overline{BC} \cdot \vec{0} = 0.$$

Finalement, $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$.

$$\begin{aligned} \text{20 1. } & \overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{BM} \cdot \overline{CA} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{AM} \cdot \overline{BC} + (\overline{BA} + \overline{AM}) \cdot \overline{CA} + (\overline{CA} + \overline{AM}) \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{AM} \cdot (\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}) + \overline{BA} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB}. \end{aligned}$$

Or, $(\overline{BC} + \overline{CA}) + \overline{AB} = \overline{BA} + \overline{AB} = \overline{BB} = \vec{0}$,

et $\overline{BA} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = \overline{CA} \cdot (\overline{BA} + \overline{AB}) = \overline{CA} \cdot \vec{0} = 0$.

Donc :

$$\overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{BM} \cdot \overline{CA} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} = \overline{AM} \cdot \vec{0} + 0$$

$$\overline{AM} + \overline{BC} + \overline{BM} \cdot \overline{CA} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} = \mathbf{0}.$$

2. $\overline{IA} \perp \overline{BC}$ et $\overline{IB} \perp \overline{AC}$.

D'après la relation d'Euler appliquée au point I :

$$\overline{AI} \cdot \overline{BC} + \overline{BI} \cdot \overline{CA} + \overline{CI} \cdot \overline{AB} = 0.$$

$\overline{IA} \perp \overline{BC}$ et $\overline{IB} \perp \overline{AC}$ d'où :

$$0 + 0 + \overline{CI} \cdot \overline{AB} = 0.$$

Donc $\overline{CI} \perp \overline{AB}$, d'où $(\mathbf{CI}) \perp (\mathbf{AB})$.

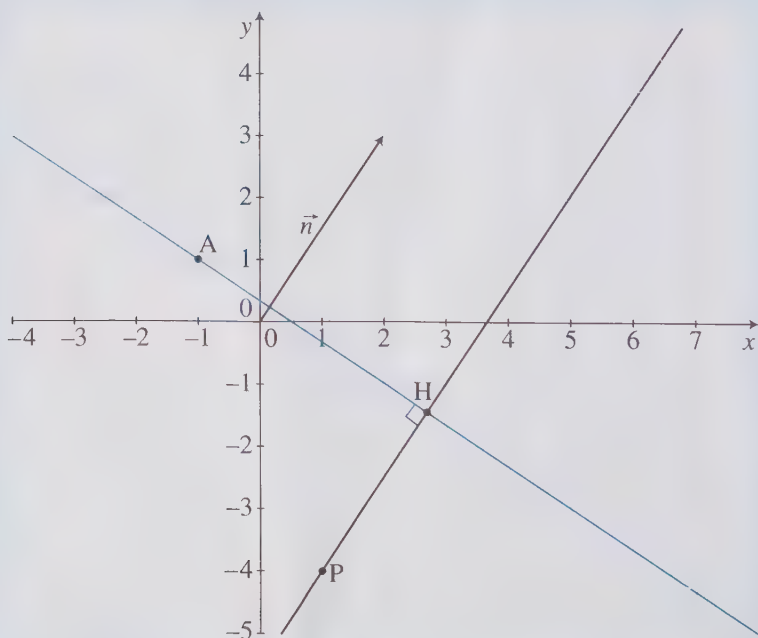
Donc I appartient à la hauteur issue de C du triangle ABC.

Les hauteurs du triangle sont donc concourantes en I.

$$\text{21 1. } \bullet 2 \times (-1) + 3 \times 1 - 1 = 0, \text{ donc } A \in (d).$$

• D'après le cours, $\vec{n}(2; 3)$ est normal à (d) .

2.



$$3. a. \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HP}) \cdot \vec{n}$$

$$= \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HP} \cdot \vec{n} = 0 + \overrightarrow{HP} \cdot \vec{n}.$$

De plus, $\overrightarrow{HP} \cdot \vec{n} = -HP \times \|\vec{n}\|$ car $\overrightarrow{HP}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires de sens contraire.

Finalement, $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = -HP \times \|\vec{n}\|$

$$= -HP \times \sqrt{2^2 + 3^2}.$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = -\sqrt{13}HP.$$

b. La distance de P à la droite (d) est égale à HP.

$$\text{Or, } HP = -\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\sqrt{13}},$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = (1 - (-1)) \times 2 + (-4 - 1) \times 3 = -11, \text{ donc :}$$

$$HP = -\frac{-11}{\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{13}} \approx 3,05.$$

 Toujours vérifier que le résultat obtenu est positif.

La distance de P à la droite (d) est donc égale à $\frac{11}{\sqrt{13}}$.

$$\boxed{22} \text{ 1. } x^2 + ax + y^2 + by + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}.$$

2. Cette équation est celle d'un cercle si, et seulement si :

$$\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} > 0$$

(ce qui équivaut à $a^2 + b^2 - 4c > 0$).

En effet, dans ce cas seulement,

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$$

$$\text{avec } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} > 0 \text{ et } \Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right).$$

3.

```

VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
R EST_DU_TYPE NOMBRE
t EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  t PREND_LA_VALEUR a*a+b*b-4*c
  SI (t<=0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "cette équation n'est pas celle d'un cercle"
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
    x PREND_LA_VALEUR -a/2
    y PREND_LA_VALEUR -b/2
    R PREND_LA_VALEUR sqrt(t)/2
    AFFICHER "l'équation est celle du cercle de rayon R ="
    AFFICHER R
    AFFICHER "et dont le centre a pour coordonnées ["
    AFFICHER x
    AFFICHER ";"
    AFFICHER y
    AFFICHER "]"
    FIN_SINON
  FIN_ALGORITHME

```

Dans ce logiciel, la fonction « racine carrée » est notée « sqrt ».

4. a. En entrant $a = 3$; $b = -4$ et $c = \frac{21}{4}$, on obtient :

Algorithme lancé***

Cette équation est celle du cercle de rayon $R=1$ et dont le centre a pour coordonnée $(-1,5;2)$

Algorithme terminé***

b. En entrant $a = 0$; $b = 1$ et $c = 1$, on obtient :

Algorithme lancé

cette équation n'est pas celle d'un cercle

Algorithme terminé

23 1. Soit t un réel.

$$\|\vec{t\vec{u}} + \vec{v}\|^2 = (t\vec{u} + \vec{v}) \cdot (t\vec{u} + \vec{v}) = t^2 \vec{u} \cdot \vec{u} + t\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot t\vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{t\vec{u}} + \vec{v}\|^2 = t^2 \|\vec{u}\|^2 + 2t\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

2. Pour tout réel t , $p(t) = \|\vec{t\vec{u}} + \vec{v}\|^2 \geq 0$.

$P(t)$ ne change pas de signe, on est donc dans le cas :

$$\Delta \leq 0.$$



Voir le chapitre Second degré.

3. $P(t) = at^2 + bt + c$ avec $a = \|\vec{u}\|^2$; $b = 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $c = \|\vec{v}\|^2$.

$$\Delta = (2\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 = 4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2.$$

Comme $\Delta \leq 0$, $4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq 4\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2$ d'où, en divisant par 4 (> 0) :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2.$$

4. En appliquant la fonction racine carrée qui est croissante :

$$\sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \leq \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2}$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \sqrt{\|\vec{u}\|^2} \times \sqrt{\|\vec{v}\|^2}$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$



Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

Appliqué au réel $(\vec{u} \cdot \vec{v})$, cela donne $\sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = |\vec{u} \cdot \vec{v}|$.

24 1. • $MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow MA = MB$ (car MA et MB sont tous deux positifs).

$\Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice de $[AB]$.

$\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

• $\mathcal{E}$ est donc la droite perpendiculaire à (AB) et passant par I

Soit $M(x; y)$ un point du plan,

$$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \overline{MI} \cdot \overline{AB} = 0 \text{ avec } I\left(-\frac{1}{2}; 5\right) \text{ et } \overline{AB}(3; -4)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} - x\right) \times 3 + (5 - y) \times (-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 4y - \frac{43}{2} = 0.$$

La droite $\mathcal{E}$ a pour équation $-3x + 4y - \frac{43}{2} = 0$.

$$2. a. MA^2 - MB^2 = (\overline{MI} + \overline{IA})^2 - (\overline{MI} + \overline{IB})^2$$

$$= MI^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} + IA^2 - (MI^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IB} + IB^2)$$

$$= 2\overline{MI} \cdot (\overline{IA} - \overline{IB}) + IA^2 - IB^2 = 2\overline{MI} \cdot \overline{BA}$$

(car, I étant le milieu de $[AB]$, $IA = IB$.)

$$MA^2 - MB^2 = 2\overline{IM} \cdot \overline{AB}.$$

b. $H \in (AB)$ et $\overline{IH} \cdot \overline{AB} < 0$, donc les vecteurs $\overline{IH}$ et $\overline{AB}$ sont colinéaires de sens contraire.

$$\text{Donc } \overline{IH} \cdot \overline{AB} = -IH \times AB.$$

$$\text{Or, } AB = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

D'où $\overline{IH} \cdot \overline{AB} = -IH \times AB = -25$, donc $-IH \times 5 = -25$, donc :

$$IH = 5.$$



Pour construire H, on reporte la longueur AB à partir du point I.

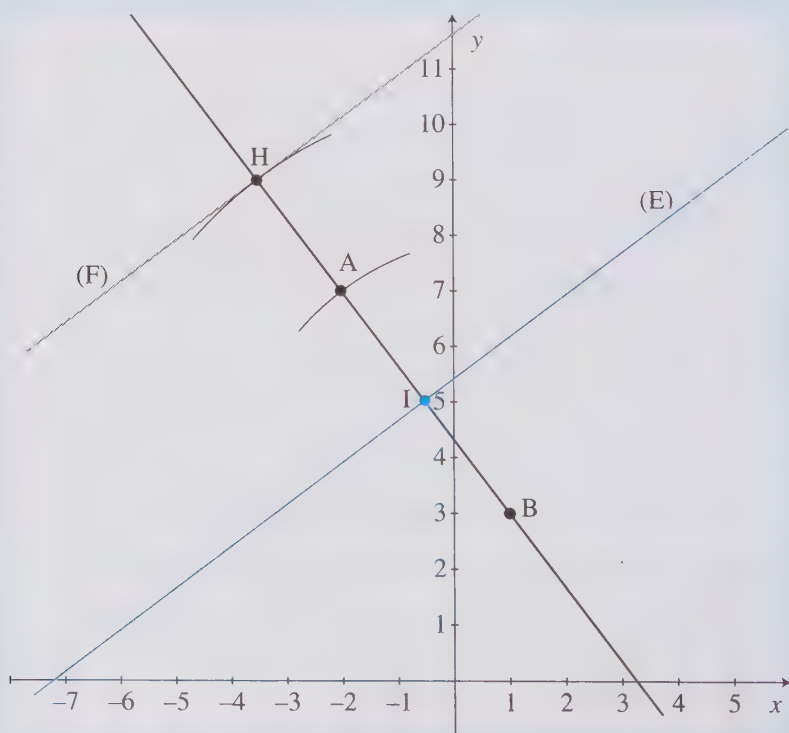
$$\text{c. } MA^2 - MB^2 = -50 \Leftrightarrow 2\overline{IM} \cdot \overline{AB} = -50 \Leftrightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = -25$$

$$\Leftrightarrow (\overline{IH} + \overline{HM}) \cdot \overline{AB} = -25$$

$$\Leftrightarrow \overline{IH} \cdot \overline{AB} + \overline{HM} \cdot \overline{AB} = -25 \Leftrightarrow -25 + \overline{HM} \cdot \overline{AB} = -25$$

$$\Leftrightarrow \overline{HM} \cdot \overline{AB} = 0.$$

L'ensemble (F) est donc perpendiculaire à (AB) passant par H.



25 1. $BC^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BC} = (\overline{BA} + \overline{AC}) \cdot (\overline{BA} + \overline{AC})$

$$BC^2 = BA^2 + 2\overline{BA} \cdot \overline{AC} + AC^2.$$

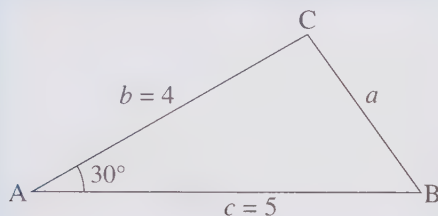
2. On en déduit que $a^2 = c^2 + b^2 + 2\overline{BA} \cdot \overline{AC}$.

Or $\overline{BA} \cdot \overline{AC} = -\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$= -c \times b \times \cos \hat{A}.$$

D'où $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

3.



D'après la formule d'Al-Kaschi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$= 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos(30^\circ)$$

$$= 41 - 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 41 - 20\sqrt{3} \quad (\text{positif}).$$

a désigne une longueur donc $a = +\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$ d'où :

$$BC = \sqrt{41 - 20\sqrt{3}} \approx 2,52 \text{ cm}.$$

26 1. a. • Dans ABH rectangle en H :

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{c},$$

d'où $AH = c \sin \hat{B}$.

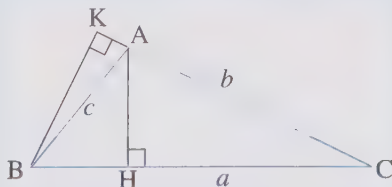
• Dans ACH rectangle en H :

$$\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{b},$$

d'où $AH = b \sin \hat{C}$.

b. On en déduit que :

$$c \sin \hat{B} = b \sin \hat{C} \quad (1).$$



Comme ABC n'est pas plat, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ ont des mesures autres que 0 ou π (radians).

Donc $\sin \hat{B} \neq 0$ et $\sin \hat{C} \neq 0$.

On peut donc diviser chaque membre de l'égalité (1) par $\sin \hat{B} \times \sin \hat{C} (\neq 0)$, d'où :

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}.$$

2. • Dans BKC rectangle en K, $\sin \widehat{C} = \frac{BK}{BC}$,

d'où $BK = a \sin \widehat{C}$

• Dans BKA rectangle en K :

$$\sin \widehat{BAK} = \frac{BK}{AB}.$$

Or $\widehat{BAK} = \pi - \widehat{BAC}$, donc $\sin(\widehat{BAK}) = \sin \widehat{BAC} = \sin \widehat{A}$.

▀ Voir le chapitre 9, Angles orientés et trigonométrie.

$\sin \widehat{A} = \frac{BK}{c}$, d'où $BK = c \sin \widehat{A}$.

• On en déduit que $a \sin \widehat{C} = c \sin \widehat{A}$, puis, comme $\sin \widehat{C} \times \sin \widehat{A} \neq 0$:

$$\frac{\sin \widehat{C}}{c} = \frac{\sin \widehat{A}}{a}.$$

3. D'après la loi des sinus, en notant $p = MN$, $m = PN$ et $n = PM$:

$$\frac{p}{\sin \widehat{P}} = \frac{n}{\sin \widehat{N}}, \text{ soit } \frac{p}{\sin(20^\circ)} = \frac{200}{\sin(\widehat{N})}.$$

De plus, $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} = 180^\circ$,

donc $\widehat{N} = 180^\circ - \widehat{P} - \widehat{M} = 180^\circ - 20^\circ - 135^\circ = 25^\circ$.

$$\text{Donc } p = \frac{200 \times \sin(20^\circ)}{\sin(25^\circ)}.$$

MN vaut environ 161,86 mètres.

27 Partie A

1. Voir corrigé de l'exercice 13.1.a.

2. $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = IA^2$

$\Leftrightarrow MI = IA$ (car des distances sont positives)

$\Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre I, de rayon IA.

$\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre I passant par A (donc de diamètre [AB]).

Partie B

1. a. $\overline{AB}(-9; -3)$.

$$\vec{n} \cdot \overline{AB} = 1 \times (-9) + (-3) \times (-3) = -9 + 9 = 0.$$

$\vec{n} \neq 0$, donc $\vec{n}$ est bien un vecteur normal à (AB).

b. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \overline{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 7) \times 1 + (y - 4) \times (-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3y + 5 = 0.$$

Donc (AB) admet pour équation cartésienne $x - 3y + 5 = 0$.

2. a. Soit $M(x; y)$ un point du plan

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \times (-9) + (y+2) \times (-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -9x - 3y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + y - 1 = 0.$$

Donc Δ admet pour équation cartésienne $3x + y - 1 = 0$.

b. H vérifie : $\begin{cases} H \in (AB) \\ \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB} \end{cases}$, avec $\overrightarrow{CH}(x_H - 1; y_H + 2)$ soit :

$$\begin{cases} x_H - 3y_H + 5 = 0 \\ (-9)(x_H - 1) + (-3)(y_H + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H - 3y_H = -5 \\ -9x_H - 3y_H = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H - 3y_H = -5 \\ 3x_H + y_H = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -5 + 3y_H \\ -15 + 9y_H + y_H = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -5 + 3 \times \frac{8}{5} = -\frac{1}{5} \\ y_H = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Donc $H\left(-\frac{1}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

c. • $\overrightarrow{CB} = (-3; 3)$, donc $CB^2 = (-3)^2 + 3^2 = 18$.

• $\overrightarrow{BH}\left(\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right)$ et $\overrightarrow{BA}(9; 3)$,

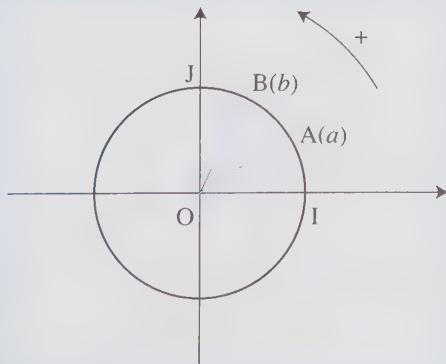
$$\text{donc } \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{9}{5} \times 9 + \frac{3}{5} \times 3 = \frac{81+9}{5} = \frac{90}{5} = 18.$$

Donc $CB^2 = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA}$.

d. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 6 \times (-3) + 6 \times 3 = -18 + 18 = 0$.

Donc C appartient au cercle (E) de diamètre [AB].

28



- $A(\cos a; \sin a)$ et $B(\cos b; \sin b)$ donc

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}).$

Or $OA = OB = 1$ (rayon du cercle) et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = b - a$ (voir chapitre Angles orientés), d'où $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos(b - a).$

- En comparant les deux résultats, on obtient :

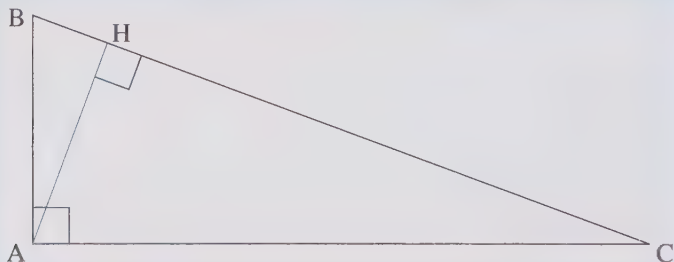
$$\cos(b - a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

29 1. ABC est rectangle en A.

$$\begin{aligned} \text{a. } AB^2 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

ABC étant rectangle en A, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ d'où :

$$AB^2 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB}.$$



Autre méthode :

$$\begin{aligned} AB^2 &= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours vérifiée car ABC est rectangle en A, donc :

$$AB^2 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{b. } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HB}.$$

Or $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ par définition du point H, donc :

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HB}.$$

c. Finalement :

$$AB^2 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HB} = (-\overrightarrow{BC}) \cdot (-\overrightarrow{BH})$$

$$AB^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH}.$$

2. On suppose que $AB^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$

$$\begin{aligned} \bullet \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= \overline{AB} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = AB^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \\ &= \overline{BH} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \\ &= (\overline{AB} + \overline{BH}) \cdot \overline{BC} = \overline{AH} \cdot \overline{BC}. \end{aligned}$$

H est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc :

$$\overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0.$$

• Donc $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ et ABC est rectangle en A.

Achévé d'imprimer par Normandie Roto Impression s.a.s., 61250 Lonrai - France
N° d'imprimeur : 114408 - Dépôt légal n° 94893-0/02 - décembre 2011



100 % EXOS

Maths 1^{re} S



*Un maximum
d'entraînement
pour un maximum
de réussite !*

Des **fiches de cours** pour mémoriser l'essentiel du programme

250 **exercices** progressifs pour s'entraîner
et des exercices d'approfondissement pour se préparer à la T^{le}

Des **sujets de contrôle** pour s'évaluer

Tous les **corrigés**, avec des explications pas à pas



L'achat de cet ouvrage vous permet d'accéder, **GRATUITEMENT**, pendant un an, à toutes les **ressources** d'**annabac.com** en **maths 1^{re} S** : quiz audio, tests interactifs, exercices et sujets corrigés...

Toute la COLLECTION 100 % EXOS

Maths	2 ^{de}	Maths	T ^{le} S obl.
Maths	1 ^{re} S	Maths	T ^{le} S obl. et spé.
Maths	1 ^{re} ES/L	Maths	T ^{le} ES obl. et spé.
Physique-Chimie	1 ^{re} S	Physique	T ^{le} S obl. et spé.
SVT	1 ^{re} S	Chimie	T ^{le} S obl. et spé.
		SVT	T ^{le} S obl. et spé.

13,50 €

49 8855 6
ISBN : 978-2-218-94893-0

