

Objectif **BAC** *T^{1^e} ST2S*



Entraînement

COURS MÉTHODES EXERCICES CORRIGÉS

Maths

T^{1^e} ST2S

HACHETTE

Tout
pour réussir !



Digitized by the Internet Archive
in 2023 with funding from
Kahle/Austin Foundation

Objectif **BAC** *T^{le} ST2S* **Entraînement**

Maths

Gérard Guilhemat

Grégory Viateau

Alain Vidal



HACHETTE
Éducation

Également parus dans la même collection

- Mathématiques Terminale STI
- Mathématiques Terminale STG
- Histoire-Géographie Terminale STG
- Comptabilité et finance d'entreprise Terminale STG
- Économie-Droit Terminale STG
- Français 1^{res} STG/ STI/ STL/ ST2S
- Philosophie Terminale STG/ STI/ STL/ ST2S
- Anglais Terminale STG/ STI/ STL/ ST2S
- Mathématiques Terminale ST2S
- Sciences physiques et chimiques Terminale ST2S

Les auteurs remercient Monsieur Sébastien Chauzu pour sa collaboration.

Conception graphique

Photos de couverture : Eye-Wire

Couverture : Alain Vambacas

Intérieur : Jehanne Marie Husson

Mise en page, schémas

Jérôme Pagès

© HACHETTE LIVRE 2008, 43, quai de Grenelle, 75905 PARIS CEDEX 15
I.S.B.N. 978-2-01-180712-0

www.hachette-education.com

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5 d'une part, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.



Pour Hachette Éducation, le principe est d'utiliser des papiers composés de fibres naturelles, renouvelables, recyclables, fabriqués à partir de bois issus de forêts qui adoptent un système d'aménagement durable.

En outre, Hachette Éducation attend de ses fournisseurs de papier qu'ils s'inscrivent dans une démarche de certification environnementale reconnue.

A v a n t - p r o p o s

C'est l'année du BAC : plein feux sur l'entraînement !

Cet ouvrage vous propose une préparation complète à l'épreuve de Mathématiques du Baccalauréat ST2S.

Vous pouvez l'utiliser tout au long de l'année ou pour vos révisions intensives à l'approche de l'épreuve.

Dans chaque chapitre, vous trouverez la garantie de la réussite :

Le cours : tous les points clés du programme sont repris de manière claire et efficace.

La synthèse : les points essentiels du cours à retenir.

Les méthodes : des exercices « type bac » sont traités pas à pas pour mettre en évidence toutes les méthodes à retenir.

Les exercices d'entraînement : à vous de jouer !

C'est l'occasion d'appliquer les méthodes vues précédemment et de tester votre maîtrise du cours.

Les corrigés des exercices : ils vous permettront de vous évaluer et de consolider tous les savoir-faire.

Les tests : à la fin de chaque chapitre, évaluez vos connaissances en répondant au QCM.

S o m m a i r e

✕ 1	Les suites numériques	5
✕ 2	Les séries statistiques à une variable	35
✕ 3	Les séries statistiques à deux variables	59
✕ 4	Les probabilités	81
✕ 5	Les fonctions	113
6	La fonction logarithme décimal	161
7	Les fonctions exponentielles	195

Les suites numériques

Le cours

Les suites arithmétiques – les suites géométriques

● Les suites arithmétiques

Définition : On passe d'un terme au suivant en ajoutant à chaque fois un même nombre r appelé raison de la suite.

La suite est donc définie par la donnée du premier terme u_0 ou u_1 (précisé dans l'exercice) et de la raison r .

Exemple 1 : 1, 3, 5, 7, 9, 11...

Alors $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$...

On passe d'un terme au suivant en rajoutant 2.

Cette suite est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

Expression de u_{n+1} en fonction de u_n : $u_{n+1} = u_n + r$.

Expression de u_n en fonction de n et u_0 : $u_n = u_0 + rn$.

Dans l'exemple 1, $u_n = 1 + 2n$.

Expression de u_n en fonction de n et u_p : $u_n = u_p + r(n - p)$.

Dans l'exemple 1, en prenant $p = 1$, on obtient :

$$u_n = u_1 + 2(n - 1) = 3 + 2n - 2 = 1 + 2n.$$

On retrouve ainsi la formule précédente en utilisant la valeur de u_1 au lieu de u_0 .

(On utilisera cette expression lorsque la suite est définie à partir de u_1 et non de u_0 .)

Si $r \geq 0$, alors la suite est croissante ($u_{n+1} \geq u_n$: les nombres de la suite sont de plus en plus grands).

Si $r \leq 0$, alors la suite est décroissante ($u_{n+1} \leq u_n$: les nombres de la suite sont de plus en plus petits).

● Les suites géométriques

Définition : On passe d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois par un même nombre q appelé **raison de la suite**. La suite est donc définie par la donnée du premier terme u_0 ou u_1 et de la raison q .

En ST2S, on se limite à $u_0 > 0$ et $q > 0$.

Exemple 2 : 1, 3, 9, 27, 81...

Alors $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 9$, $u_3 = 27$...

On passe d'un terme au suivant en multipliant par 3.

Cette suite est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \times 3 \end{cases}$$

Expression de u_{n+1} en fonction de u_n : $u_{n+1} = u_n \times q$.

Expression de u_n en fonction de n et u_0 : $u_n = u_0 \times q^n$.

Dans l'exemple 2, $u_n = 1 \times 3^n = 3^n$.

Expression de u_n en fonction de n et u_p : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Dans l'exemple, en prenant $p = 1$, on obtient : $u_n = u_1 \times 3^{n-1} = 3 \times 3^{n-1}$.
On retrouve bien la même formule : en effet, $3 \times 3^{n-1} = 3^n$.

(On utilisera cette expression lorsque la suite est définie à partir de u_1 et non de u_0 .)

Si $q \geq 1$, alors la suite est croissante ($u_{n+1} \geq u_n$).

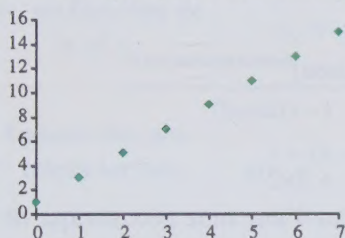
Si $0 < q \leq 1$, alors la suite est décroissante ($u_{n+1} \leq u_n$).

Représentation graphique

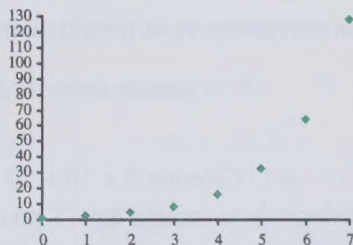
Une suite (u_n) est représentée dans le plan par l'ensemble des points de coordonnées $(n ; u_n)$.

On ne reliera pas les points puisque seuls les nombres entiers ont une image.

Représentation d'une suite arithmétique (suite de l'exemple 1)



Représentation d'une suite géométrique (suite de l'exemple 2)



Remarque : On constate que dans le cas d'une suite arithmétique, les points sont alignés. Pour cela, on dit que les termes d'une suite arithmétique suivent une **progression linéaire**. Réciproquement, si les points sont alignés, il s'agit d'une suite arithmétique.

Calculs de sommes : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

● Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

On utilise la formule : $S = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$.

Comme $(n + 1)$ représente le nombre de termes de S , on pourra retenir la formulation suivante :

$$S = (\text{nombre de termes de } S) \times \frac{(\text{premier terme de } S) + (\text{dernier terme de } S)}{2}.$$

Cette formulation a l'avantage d'être valable pour toute somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Exemple : Calculer $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 99$.

Il s'agit de la somme des 50 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

$$S = 50 \times \frac{1 + 99}{2} = 50 \times 50 = 2\,500.$$

● Somme des premiers termes d'une suite géométrique

On utilise la formule $S = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

On pourra retenir la formulation suivante :

$$S = (\text{premier terme de } S) \times \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes de } S)}}{1 - (\text{raison})}.$$

Exemple : Calculer $5 + 10 + 20 + 40 + \dots + 5 \times 2^{10}$.

Il s'agit de la somme des 11 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 2.

$$S = 5 \times (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}) = 5 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 5 \times \frac{1 - 2\,048}{-1} = 10\,235.$$

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	On passe d'un terme au suivant en ajoutant à chaque fois un même nombre r (raison de la suite).	On passe d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois par un même nombre q (raison de la suite).
u_{n+1} en fonction de u_n	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n \times q$
u_n en fonction de n et u_0	$u_n = u_0 + rn$	$u_n = u_0 \times q^n$
u_n en fonction de n et u_p	$u_n = u_p + r(n - p)$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme des premiers termes	$S = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$	$S = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
Sens de variation	Si $r \geq 0$, alors la suite est croissante ($u_{n+1} \geq u_n$). Si $r \leq 0$, alors la suite est décroissante ($u_{n+1} \leq u_n$).	Si $q \geq 1$, alors la suite est croissante ($u_{n+1} \geq u_n$). Si $0 < q \leq 1$, alors la suite est décroissante ($u_{n+1} \leq u_n$).
Représentation graphique	Les points sont alignés.	

Les formules de calculs de sommes peuvent être retenues ainsi :

Arithmétique

$$S = (\text{nombre de termes de } S) \times \frac{(\text{premier terme de } S) + (\text{dernier terme de } S)}{2}$$

Géométrique

$$S = (\text{premier terme de } S) \times \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes de } S)}}{1 - (\text{raison})}$$

Les méthodes

1

Comment montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique ?

• Montrer qu'une suite est arithmétique

À l'aide de l'énoncé, on repère le premier terme et la raison et on écrit :

$$\begin{cases} u_0 = \dots \\ u_{n+1} = u_n + \dots \end{cases}$$

Exemple 1

Enoncé

Au 1^{er} janvier 2000, la population de la ville A est de 3 500 habitants. En étudiant l'évolution de la population de cette ville, entre 2000 et 2007, on observe que celle-ci a augmenté de 250 personnes tous les ans.

On note u_0 la population au 1^{er} janvier 2000 et u_n la population au 1^{er} janvier 2000 + n .

On définit ainsi une suite (u_n) .

Montrer que cette suite est une suite arithmétique.

Corrigé commenté

Le premier terme de la suite est $u_0 = 3\,500$.

Pour obtenir u_{n+1} , il faut rajouter 250 à u_n .

$$\text{Alors } \begin{cases} u_0 = 3\,500 \\ u_{n+1} = u_n + 250 \end{cases}$$

Cette suite est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3\,500$ et de raison 250.

Exemple 2

Énoncé

Le 1^{er} août 2007 une pisciculture comporte 2 000 poissons dans un de ses bassins.

Le pisciculteur, inquiet de l'évolution de sa population, décide de les compter hebdomadairement.

Il remarque que leur nombre diminue de 20 toutes les semaines.

On note u_0 le nombre de poissons le 1^{er} août 2007 et u_n le nombre de poissons au bout de la n -ième semaine.

On définit ainsi une suite (u_n) .

Montrer que cette suite est une suite arithmétique.

Corrigé commenté

Le premier terme de la suite est $u_0 = 2\,000$.

Pour obtenir u_{n+1} , il faut soustraire 20 à u_n .

$$\text{Alors } \begin{cases} u_0 = 2\,000 \\ u_{n+1} = u_n - 20 \end{cases}$$

Cette suite est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2\,000$ et de raison (-20) .

Montrer qu'une suite est géométrique

À l'aide de l'énoncé, on repère le premier terme et la raison et on écrit :

$$\begin{cases} u_0 = \dots \\ u_{n+1} = u_n \times \dots \end{cases}$$

RAPPEL

Augmenter un nombre de $a\%$ revient à le multiplier par $1 + \frac{a}{100}$.

Diminuer un nombre de $a\%$ revient à le multiplier par $1 - \frac{a}{100}$.

Exemple 3

Énoncé

Au 1^{er} janvier 2000, la population de la ville B est de 650 habitants.

En étudiant l'évolution de la population de cette ville, entre 2000 et 2007, on observe que celle-ci a augmenté de 5 % tous les ans.

On note v_0 la population au 1^{er} janvier 2000 et v_n la population au 1^{er} janvier 2000 + n .

On définit ainsi une suite (v_n) .

Montrer que cette suite est une suite géométrique.

Corrigé commenté

Le premier terme de la suite est $v_0 = 650$.

Augmenter un nombre de 5 % revient à le multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1,05$.

Donc, pour obtenir v_{n+1} il faut multiplier v_n par 1,05.

$$\text{Alors } \begin{cases} v_0 = 650 \\ v_{n+1} = v_n \times 1,05 \end{cases}$$

Cette suite est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = 650$ et de raison 1,05.

Exemple 4

Énoncé

Dans un autre de ses bassins comportant 1 500 poissons au 1^{er} août 2007, le pisciculteur de l'exemple 2 remarque que le nombre de poissons diminue de 2 % toutes les semaines.

On note v_0 le nombre de poissons le 1^{er} août 2007, v_n le nombre de poissons au bout de la n -ième semaine.

On définit ainsi une suite (v_n) .

Montrer que cette suite est une suite géométrique.

Corrigé commenté

Le premier terme de la suite est $v_0 = 1\,500$.

Diminuer un nombre de 2 % revient à le multiplier par $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.
Donc, pour obtenir v_{n+1} il faut multiplier v_n par 0,98.

$$\text{Alors } \begin{cases} v_0 = 1\,500 \\ v_{n+1} = v_n \times 0,98 \end{cases}$$

Cette suite est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,500$ et de raison 0,98.

Comment calculer un terme d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique ?

- Pour une suite arithmétique dont on connaît le premier terme u_0 et la raison r

On utilise l'expression de u_n en fonction de n : $u_n = u_0 + rn$.

Exemple 1 (suite)

Énoncé

Pour la ville A, on désire estimer la population de cette ville en 2020, dans l'hypothèse où l'évolution de la population suivrait la même progression.

Corrigé commenté

Alors la population en 2020 correspond à la population en l'an 2000 + n avec $n = 20$.

On cherche donc u_{20} .

Or, $u_n = u_0 + r \times n$ donc $u_{20} = 3\,500 + 250 \times 20 = 8\,500$.

La population de la ville A en 2020 serait de 8 500 habitants.

Exemple 2 (suite)

Énoncé

Le pisciculteur se demande quel sera le nombre de poissons au bout de 10 semaines s'il ne trouve pas la cause de la disparition de ses poissons.

Corrigé commenté

Le nombre de poissons au bout de la dixième semaine est donné par u_{10} .

On cherche donc u_{10} .

Or $u_n = u_0 + r \times n$ donc $u_{10} = 2\,000 - 20 \times 10 = 1\,800$.

Le nombre de poissons la dixième semaine sera de 1 800.

- Pour une suite géométrique dont on connaît le premier terme u_0 et la raison q

On utilise l'expression de u_n en fonction de n : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple 3 (suite)

Énoncé

Pour la ville B, on désire estimer la population de cette ville en 2020, dans l'hypothèse où l'évolution de la population suivrait la même progression.

Corrigé commenté

Alors la population en 2020 correspond à la population en l'an 2000 + n avec $n = 20$.

On cherche donc v_{20} .

Or $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_{20} = 650 \times (1,05)^{20} \approx 1\,725$.

La population de la ville B en 2020 serait d'environ 1 725 habitants.

Exemple 4 (suite)

Énoncé

Le pisciculteur se demande quel sera le nombre de poissons au bout de 10 semaines s'il ne trouve pas la cause de la disparition de ses poissons.

Corrigé commenté

Le nombre de poissons au bout de la dixième semaine est donné par v_{10} .

On cherche donc v_{10} .

Or $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_{10} = 1\,500 \times (0,98)^{10} \approx 1\,226$.

Le nombre de poissons la dixième semaine sera d'environ 1 226.

3

Comment calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ?

- Pour une suite arithmétique

On utilise la formule :

$$S = (\text{nombre de termes de } S) \times \frac{(\text{premier terme de } S) + (\text{dernier terme de } S)}{2}$$

Exemple 5

Énoncé

M. X postule dans une entreprise, celle-ci lui propose, à compter du 1^{er} janvier 2009, un salaire de départ de 1 600 € augmenté tous les mois de 15 €.

M. X désire connaître le montant total S de ses salaires au bout de 2 années.

Corrigé commenté

On note u_n le salaire proposé à M. X au n -ième mois de son contrat.

Alors la suite (u_n) ainsi définie est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1\,600$ et de raison 15.

Le salaire proposé à M. X le 24^e mois de son contrat est u_{24} .

Le montant total des salaires au bout de 2 années est $S = u_1 + \dots + u_{24}$.

Nous devons donc d'abord calculer u_{24} , on utilise alors la relation :

$$u_n = u_p + r(n - p).$$

Soit $u_{24} = u_1 + 15 \times (24 - 1)$.

Donc $u_{24} = 1\,600 + 15 \times (24 - 1) = 1\,600 + 345 = 1\,945$.

La somme $S = u_1 + \dots + u_{24}$ comporte 24 termes. Le premier terme est u_1 et le dernier est u_{24} .

Or :

$$S = (\text{nombre de termes de } S) \times \frac{(\text{premier terme de } S) + (\text{dernier terme de } S)}{2}.$$

$$\text{Alors } S = 24 \times \frac{u_1 + u_{24}}{2} = 24 \times \frac{1\,600 + 1\,945}{2} = 42\,540.$$

Le montant total de ses salaires au bout des 2 années est de 42 540 €.

Exemple 6

Énoncé

Une entreprise décide de réduire ses rejets polluants.

Les rejets sont évalués à 50 tonnes pour 2008.

Elle fait le choix de diminuer chaque année ces rejets de 0,5 tonne.

Quelle quantité S aura-t-elle, malgré tout, rejeté entre 2008 et 2012 ?

Corrigé commenté

On note u_n la quantité rejetée durant la n -ième année.

Alors la suite (u_n) ainsi définie est une suite arithmétique de premier terme

$u_0 = 50$ et de raison $-0,5$.

La quantité rejetée durant l'année 2012 est u_4 .

La quantité totale de rejets polluants entre 2008 et 2012 est :

$$S = u_0 + \dots + u_4.$$

Nous devons donc d'abord calculer u_4 , on utilise la relation $u_n = u_0 + rn$.

$$\text{Soit } u_4 = u_0 - 0,5 \times 4.$$

$$\text{Donc } u_4 = 50 - 0,5 \times 4 = 48.$$

La somme $S = u_0 + \dots + u_4$ comporte 5 termes. Le premier terme est u_0 et le dernier est u_4 .

Or :

$$S = (\text{nombre de termes de } S) \times \frac{(\text{premier terme de } S) + (\text{dernier terme de } S)}{2}.$$

$$\text{Alors } S = 5 \times \frac{u_0 + u_4}{2} = 5 \times \frac{50 + 48}{2} = 245.$$

De 2008 à 2012, cette entreprise aura rejeté 245 tonnes de polluants.

● Pour une suite géométrique

On utilise la formule :

$$S = (\text{premier terme de } S) \times \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes de } S)}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple 7

Énoncé

M. Y postule dans une entreprise, celle-ci lui propose, à compter du 1^{er} janvier 2009, un salaire de départ de 1 700 € puis une augmentation de 0,6 % tous les mois.

M. Y désire connaître le montant total S de ses salaires au bout de 2 années.

Corrigé commenté

On note v_n le salaire proposé à M. X au n -ième mois de son contrat.

Augmenter un nombre de 0,6 % revient à le multiplier par :

$$1 + \frac{0,6}{100} = 1,006.$$

Alors la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 1\,700$ et de raison 1,006.

Le montant total des salaires au bout de 2 années est :

$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_{24}.$$

Cette somme comporte 24 termes.

$$\text{Or } S = (\text{premier terme de } S) \times \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes de } S)}}{1 - (\text{raison})}.$$

$$\text{Alors } S = 1\,700 \times \frac{1 - 1,006^{24}}{1 - 1,006} \approx 43\,743,07 \text{ €}.$$

Le montant total de ses salaires au bout des 2 années est d'environ 43 743,07 €.

Exemple 8

Énoncé

Une entreprise décide de réduire ses rejets polluants.

Les rejets sont évalués à 70 tonnes pour 2008.

Elle fait le choix de diminuer chaque année ces rejets de 2 %.

Quelle quantité S aura-t-elle, malgré tout, rejetée entre 2008 et 2012 ?

Corrigé commenté

On note v_n la quantité rejetée durant la n -ième année.

Diminuer un nombre de 2 % revient à le multiplier par $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.

Alors la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 70$ et de raison 0,98.

La quantité totale de rejets polluants entre 2008 et 2012 est :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4.$$

Cette somme comporte 5 termes (on débute la numérotation à u_0).

$$\text{Or } S = (\text{premier terme de } S) \times \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes de } S)}}{1 - (\text{raison})}.$$

$$\text{Alors } S = 70 \times \frac{1 - 0,98^5}{1 - 0,98} \approx 336,28.$$

De 2008 à 2012, cette entreprise aura rejeté environ 336,28 tonnes de polluants.

Comment obtenir et comparer les termes de suites à l'aide de la calculatrice ?

Donnée

Soient la suite arithmétique (u_n) de premier terme 50 000 et de raison 2 000 et la suite géométrique (v_n) de premier terme 30 000 et de raison 1,06.

On désire obtenir, afin de les comparer, les termes des suites.

Corrigé commenté

On commence par exprimer u_n et v_n en fonction de n .

Alors $u_n = 50\,000 + 2\,000n$ et $v_n = 30\,000 \times 1,06^n$.

On utilise ensuite l'éditeur de fonctions de la calculatrice.

CASIO GRAPH 25-35-65-85

MENU TABLE



Entrer sur la ligne Y1 : l'expression de u_n .

et sur la ligne Y2 : l'expression de v_n .

La variable x s'obtient avec $\boxed{X, \theta, T}$

```
Table Func  :Y=
Y1:50000+2000X [-]
Y2:30000x1.06^X [-]
Y3: [-]
Y4: [-]
Y5: [-]
Y6: [-]
[SEL] [DEL] [TYPE] [STVL] [SET] [TABL]
```

Choisir **SET** ou **RANG** (F5)

Et compléter comme ci-dessous :

```
Table Settings
X
Start:0
End :50
Step :1
```


Choisir **TABLE** (F6)

X	Y1	Y2
16	82000	76210
17	84000	80783
18	86000	85630
19	88000	90767

FORM DEL ROW EDIT G-COM G-PLT 19

TI 82-82 STAT 83-83 PLUS

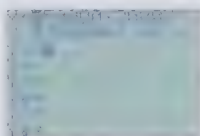
Y =

Remarque pour la TI 82 Stat.fr : **f(x)**

Entrer sur la ligne Y1 = l'expression de u_n .

et sur la ligne Y2 = l'expression de v_n .

La variable x s'obtient avec **X, θ , T**



2nd **TBLSET**

Et compléter comme ci-dessous :



2nd **TABLE**



On constate que c'est à partir du rang 19 que $v_n < u_n$.

Les exercices

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

- 1** (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. Calculer u_{20} , puis la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.
- 2** (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 4$ et $u_{17} = 58,4$. Quelle est sa raison ?
- 3** (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 256$ et de raison 1,5. Calculer u_8 , puis la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_8$.
- 4** (u_n) est une suite géométrique telle que $u_0 = 25$ et $u_4 = 51,84$. Quelle est sa raison ?
- 5** La somme des sept premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,5 est 571,5. Quel est son premier terme ?
- 6** La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison 3 est 26 572. Calculer n sachant que le premier terme est 0,1.
- 7** Calculer les sommes :
- $$S_1 = 138 + 147 + 156 + 165 + 174 + \dots + 1\,416.$$
- $$S_2 = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + \dots + 40\,960.$$
- $$S_3 = 1\,000 + 900 + 810 + 729 + \dots \quad (S_3 \text{ contient 8 termes}).$$
- $$S_4 = 3 + 4,3 + 5,6 + 6,9 + 8,2 + \dots \quad (S_4 \text{ contient 100 termes}).$$
- 8** Lors d'une période de crue, la hauteur d'eau d'une rivière était de 2,50 m à midi. Elle augmente régulièrement de 5 cm par heure. À quelle heure sera atteinte la cote d'alerte qui est de 3,80 m ?
- 9** Que devient un capital de 2 500 € placé pendant 8 ans à intérêts composés au taux annuel de 6 % ?
- 10** La population d'un département rural diminue de 2 % en moyenne par an. Dans combien d'années la population aura-t-elle diminué de moitié ?

 Un pays en voie de développement comptait, en l'an 2000, quatre millions d'enfants d'âge scolaire mais seuls 800 000 d'entre eux étaient scolarisés.

Des études statistiques ont montré que l'on pouvait construire un modèle mathématique de l'évolution de la situation en considérant que :

- la population d'âge scolaire augmente de 3 % par an ;
- la population scolarisée augmente de 160 000 par an.

On note p_n la population d'âge scolaire et s_n la population scolarisée en l'an $(2000 + n)$, p_n et s_n étant exprimés en milliers et arrondis à l'unité si nécessaire.

On a ainsi $p_0 = 4\,000$ et $s_0 = 800$.

- 1) Quelle est la nature de la suite (p_n) ? En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
 - 2) Quelle est la nature de la suite (s_n) ? En déduire l'expression de s_n en fonction de n .
 - 3) Calculer p_3 et p_{16} puis s_3 et s_{16} .
 - 4) Quel était le pourcentage d'enfants scolarisés dans la population d'âge scolaire en 2000 ? Et en 2003 ? Quel sera-t-il en 2016 ?
 - 5) On veut déterminer en quelle année, pour la première fois, plus de la moitié de la population d'âge scolaire sera scolarisée.
- Pour cela on envisage de remplir à l'aide d'un tableur un tableau du type ci-dessous :

	A	B	C	D
1	Année	n	Population d'âge scolaire : p_n	Population scolarisée : s_n
2	2000	0	4 000	800
3	2001	1		
4	2002	2		
5	2003	3		
6	2004	4		
...	...	...		

- a) Quelle formule faut-il écrire en C3, à recopier vers le bas, pour remplir la colonne C ?
- b) Quelle formule faut-il écrire en D3 pour remplir la colonne D ?
- c) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier n tel que :

$$s_n > \frac{1}{2} p_n \text{ et conclure.}$$

12 Marie désire placer 300 € à la banque. Le banquier lui propose ces deux placements :

- un placement A à intérêts simples au taux annuel de 4 % ;
- un placement B à intérêts composés au taux annuel de 3,5 %.

On note a_n le capital disponible au bout de n années avec le placement A, et b_n le capital disponible au bout de n années avec le placement B. Le placement initial est : $a_0 = b_0 = 300$.

Tous les résultats seront donnés avec deux décimales.

1) a) Calculer a_1 et a_2 .

b) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n . Quelle est la nature et la raison de la suite (a_n) ?

c) Exprimer a_n en fonction de n .

2) a) Calculer b_1 et b_2 .

b) Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n . Quelle est la nature et la raison de la suite (b_n) ?

c) Exprimer b_n en fonction de n .

3) On veut utiliser un tableur pour faire une simulation.

	A	B	C
1	Nombre d'années	Placement A	Placement B
2	0	300,00	300,00
3	1		
4	2		
5	3		

a) Quelle formule faut-il écrire dans la case B3 à recopier vers le bas ?

b) Quelle formule faut-il écrire dans la case C3 à recopier vers le bas ?

c) Si Marie place son argent 5 ans, quel est le placement le plus intéressant ?

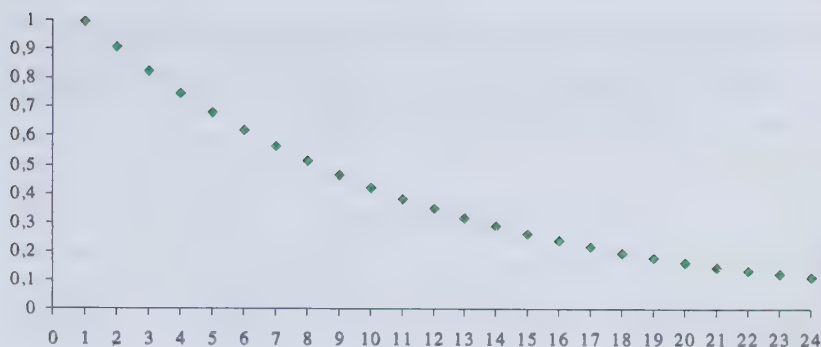
d) À partir de combien d'année le placement B est plus intéressant que le placement A ?

13 Un laboratoire effectue des tests concernant un nouveau médicament. Après la prise du médicament, on a mesuré toutes les heures pendant 24h la concentration du médicament dans le sang d'un patient en g/l.

On note u_1 la concentration au bout d'une heure, u_2 au bout de deux heures, ... u_n la concentration au bout de n heures.

Partie A : Observation

On a représenté la suite (u_n) .



1) Déterminer graphiquement la valeur de u_5 à 0,1 près.

2) S'agit-il d'une suite arithmétique ? Justifier.

3) D'après les mesures, on a :

$$u_1 \approx 1 ; u_2 \approx 0,91 ; u_3 \approx 0,83 ; u_4 \approx 0,755.$$

Calculer $\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \frac{u_4}{u_3}$ (arrondir les résultats au centième).

Quelle semble être la nature de la suite (u_n) ? Quelle semble être sa raison ?
Quel est son sens de variation ?

Partie B : Modélisation

Après plusieurs observations, on a constaté qu'au bout d'une heure, la concentration dans le sang du médicament est de 1 g/l et qu'elle diminue de 9% par heure.

On décide de prendre comme modèle mathématique une suite (u_n) définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \times 0,91 \end{cases}$$

1) Expliquer le choix de ce modèle. Quelle est la nature et la raison de la suite (u_n) ?

2) Calculer u_2, u_3, u_4 à 0,01 près. Le modèle choisi semble-t-il convenir ?

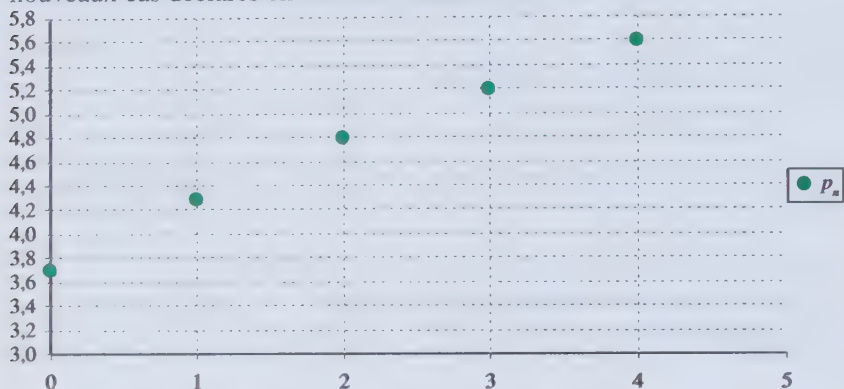
3) Exprimer u_n en fonction de n .

4) On considère que le médicament n'est plus efficace lorsque sa concentration dans le sang est inférieure à 0,2 g/l. Le patient doit alors prendre un autre comprimé. Combien d'heures un comprimé est-il valable ?

5) Si on veut que le médicament fasse effet pendant 24 h, quelle doit être la concentration initiale u_1 (à 0,01 près) ?

11 On s'intéresse aux cas déclarés de SIDA en France depuis 1989.

On a représenté ci-dessous la suite (p_n) donnant le nombre de nouveaux cas déclarés en milliers l'année $1989 + n$.



- 1) Déterminer graphiquement le nombre de cas déclarés en 1993.
- 2) La suite (p_n) est-elle arithmétique ? Justifier.
- 3) On décide de modéliser cette situation à l'aide d'une suite arithmétique. Soit (r_n) la suite arithmétique de premier terme $r_0 = 3,7$ et de raison $0,4$.
 - a) Calculer r_1, r_2, r_3, r_4 .
 - b) Représenter en rouge cette suite sur le graphique précédent.
- 4) On décide de modéliser cette situation à l'aide d'une suite géométrique : Soit (q_n) la suite géométrique de premier terme $q_0 = 3,7$ et de raison $1,11$.
 - a) Calculer q_1, q_2, q_3, q_4 (arrondir à $0,01$ près).
 - b) Quel est le taux d'augmentation annuel associé à cette progression ?
 - c) Représenter en bleu cette suite sur le graphique précédent.
- 5) On suppose dans cette question que l'évolution du nombre de cas déclarés suit le modèle de la suite (r_n) .
 - a) Exprimer r_n en fonction de n .
 - b) En déduire le nombre de cas en 2010.
 - c) Calculer alors le nombre total de cas déclarés depuis 1989.
- 6) On suppose dans cette question que l'évolution du nombre de cas déclarés suit le modèle de la suite (q_n) .
 - a) Exprimer q_n en fonction de n .
 - b) En déduire le nombre de cas en 2010.
 - c) Calculer alors le nombre total de cas déclarés depuis 1989.

7) À l'aide d'une calculatrice, déterminer :

a) En quelle année le nombre de cas déclarés aurait dépassé 10 000, si l'évolution suit le modèle de la suite (r_n) .

b) Même question si l'évolution suit le modèle de la suite (q_n) .

1.1 Un club de sport propose deux formules d'abonnement.

Formule A : Une cotisation annuelle de 50 € à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 1 000 €.

Formule B : Une cotisation initiale de 100 € qui augmente de 10 % par an.

Cependant, dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 5 € sur le montant de la cotisation annuelle.

Soit B_n le montant de la cotisation annuelle la $n^{\text{ième}}$ année avec la formule B.

Par ailleurs on note T_n (resp. S_n) la **somme totale** versée au club par un membre pendant n années avec la formule A (resp. B).

1) Déterminer T_n .

2) Justifier que, pour $n \geq 1$, on a : $B_{n+1} = B_n \times 1,1 - 5$.

3) Pour étudier la suite (B_n) on introduit alors la suite (u_n) définie par :

$$u_n = B_n - 50.$$

4) Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer u_n puis B_n en fonction de n .

c) Montrer que $S_n = 500 \times (1,1^n - 1) + 50n$.

4) Pour un client qui désire s'inscrire pour 4 ans, quelle est la formule la plus avantageuse ?

5) Au bout de combien d'années la formule A devient-elle au total plus avantageuse ?

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

1 $u_{20} = u_0 + 20 \times 3 = 2 + 60 = 62.$

$$S = 21 \times \left(\frac{2+62}{2} \right) = 672 \text{ (attention, } S \text{ contient 21 termes de } u_0 \text{ à } u_{20}).$$

2 $u_{17} = u_0 + 17r$ (si r est la raison). D'où $4 + 17r = 58,4$ puis $17r = 54,4$

d'où $r = \frac{54,4}{17}$ et donc $r = 3,2.$

3 $u_8 = u_0 \times 1,5^8 = 256 \times 1,5^8 = 6\,561.$

$$S = 256 \times \left(\frac{1-1,5^9}{1-1,5} \right) = 19\,171 \text{ (attention, } S \text{ contient 9 termes).}$$

4 $u_4 = u_0 \times q^4$ (si q est la raison). D'où $25 \times q^4 = 51,84$ puis $q^4 = 2,0736.$
 Pour trouver q , on remarque que $1^4 = 1$ et que $2^4 = 16$ donc q est entre 1 et 2.
 On essaie alors $1,1^4 = 1,4641$ puis $1,2^4 = 2,0736.$ On constate donc que $q = 1,2.$

Remarque : une autre méthode pour résoudre une équation du type $a^n = b$ sera vue dans le chapitre 6, *La fonction logarithme décimal.*

5 Si l'on note u_0 le premier terme, le texte se traduit par :

$$u_0 \times \left(\frac{1-0,5^9}{1-0,5} \right) = 571,5 \text{ c'est-à-dire } u_0 \times 1,984375 = 571,5 \text{ d'où } u_0 = 288.$$

6 On a : $0,1 \times \left(\frac{1-3^n}{1-3} \right) = 26\,572$ d'où $1-3^n = \frac{26\,572 \times (-2)}{0,1}.$

Soit $1-3^n = -531\,440$ puis $3^n = 531\,441.$

Après essais successifs on constate que $3^{12} = 531\,441$ et donc $n = 12.$

(On peut aussi utiliser le logarithme décimal.)

7 • On voit que les termes de S_1 forment une suite arithmétique de raison 9.

Pour calculer S_1 , il reste à trouver son nombre de termes.

Posons $u_0 = 138$ et $u_n = 1\,416$. Alors puisque $u_n = u_0 + n \times 9$.

On obtient : $138 + 9n = 1\,416$ d'où $n = 142$.

On en déduit que $1\,416 = u_{142}$ et que donc S_1 contient 143 termes (de u_0 à u_{142} ...).

$$\text{Finalement : } S_1 = 143 \times \left(\frac{138 + 1\,416}{2} \right) = 111\,111.$$

• Il s'agit cette fois d'une suite géométrique de raison 2.

En posant $u_n = 40\,960$, on a : $5 \times 2^n = 40\,960$ d'où $2^n = 8192$ puis $n = 13$ (après essais ou en utilisant le logarithme décimal).

$$\text{Donc : } S_2 = 5 \times \left(\frac{1 - 2^{14}}{1 - 2} \right) = 81\,915.$$

• Suite géométrique de raison 0,9 donc :

$$S_3 = 5 \times \left(\frac{1 - 0,9^8}{1 - 0,9} \right) = 5\,695,3279.$$

• Suite arithmétique de raison 1,3. Il faut le dernier terme.

Or si l'on note u_0 le premier terme, le centième est :

$$u_{99} = 3 + 99 \times 1,3 = 131,7.$$

$$\text{D'où : } S_4 = 100 \times \left(\frac{3 + 131,7}{2} \right) = 6\,735.$$

 Notons $u_0 = 2,50$ la hauteur d'eau à midi et u_n la hauteur d'eau n heures plus tard.

(u_n) est une suite arithmétique de raison 0,05 (attention aux unités), donc :

$$u_n = 2,5 + 0,05n.$$

On cherche n tel que $u_n = 3,8$ c'est-à-dire $2,5 + 0,05n = 3,8$ d'où $0,05n = 1,3$ puis $n = 26$.

C'est donc 26 heures plus tard que la cote d'alerte sera atteinte, c'est-à-dire le lendemain à 14 h.

 Le capital augmente de 6 % par an, il est donc chaque année multiplié par : $1 + \frac{6}{100} = 1,06$.

Au bout de 8 ans il sera donc devenu : $2\,500 \times 1,06^8 \approx 3\,984,62$ €.

10 Chaque année la population diminue de 2 %, elle est donc multipliée par : $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.

Au bout de n années elle aura été multipliée par $0,98^n$.

Elle aura diminué de moitié si $0,98^n = 0,5$.

Après essais, on trouve $0,98^{33} \approx 0,513$; $0,98^{34} \approx 0,503$; $0,98^{35} \approx 0,493 \dots$

Ce sera donc au bout d'un peu plus de 34 ans.

EXERCICES DE TYPE BAC

11 1) Augmenter un nombre de 3 % revient à le multiplier par 1,03 donc on passe de p_n à p_{n+1} en multipliant par 1,03, ce qui signifie que (p_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $p_0 = 4\,000$.

Nous en déduisons en utilisant la formule $u_n = u_0 \times q^n$ que :

$$p_n = 4\,000 \times 1,03^n.$$

2) On passe de s_n à s_{n+1} en ajoutant 160 donc (s_n) est une suite arithmétique de raison 160 et de premier terme $s_0 = 800$.

En utilisant la formule $u_n = u_0 + rn$, nous en déduisons que :

$$s_n = 800 + 160n.$$

3) En remplaçant n par 3 puis par 16 dans $p_n = 4\,000 \times 1,03^n$, nous obtenons $p_3 = 4\,000 \times 1,03^3 \approx 4\,371$ et $p_{16} \approx 6\,419$.

En remplaçant n par 3 puis par 16 dans $s_n = 800 + 160n$, nous obtenons $s_3 = 800 + 160 \times 3 = 1\,280$ et $s_{16} = 3\,360$.

4) En 2000, le pourcentage était $\frac{s_0}{p_0} = \frac{800}{1\,000} = 0,8$ soit 80 %.

En 2003, $\frac{s_3}{p_3} = \frac{1\,280}{4\,371} \approx 0,29$ soit 29 %.

En 2016, $\frac{s_{16}}{p_{16}} = \frac{3\,360}{6\,419} \approx 0,52$ soit 52 %.

5) a) Formules possibles à écrire en C3 :

Nous pouvons utiliser la formule $p_n = 4\,000 \times 1,03^n$

auquel cas nous écrirons $= 4\,000 * 1,03^B3$ ou $= \$C\$2 * 1,03^B3$.

Ou bien la formule $p_{n+1} = p_n \times 1,03$ auquel cas nous écrirons $= C2 * 1,03$.

Remarque : dans Excel, le symbole * remplace le symbole $\times$ (multiplication).

b) Formules possibles à écrire en D3 :

Nous pouvons utiliser la formule $s_n = 800 + 130n$ auquel cas nous écrirons $= 800 + 160 * B3$ ou $= \$D\$2 + 160 * B3$.

Ou bien la formule $s_{n+1} = s_n + 160$, auquel cas nous écrirons $= D2 + 160$.

c) À l'aide de la calculatrice (voir méthode), on obtient :

$$s_{13} = 2\,880 \text{ et } p_{13} \approx 5\,874 \text{ puis } s_{14} = 3\,040 \text{ et } p_{14} \approx 6\,050,$$

$$\text{donc } s_{13} = 2\,880 \text{ et } \frac{1}{2} p_{13} \approx 2\,937 \text{ } s_{14} = 3\,040 \text{ et } \frac{1}{2} p_{14} \approx 3\,025.$$

C'est donc en 2014 que, pour la première fois, la population scolarisée représentera plus de la moitié de la population d'âge scolaire.

Affichage sur CASIO

Table Func :Y=

Y1=800+160X [—]

Y2=4000x1.03^X [—]

Y3: [—]

Y4: [—]

Y5: [—]

Y6: [—]

Y T X1 Y1 X

X	Y1	Y2
12	2720	5703
13	2880	5874.1
14	3040	6050.3
15	3200	6231.9

FORM DEL ROW EDIT G-CON F-PLT

Affichage sur TI

Y1=800+160X

Y2=4000x1.03^X

Y3:

Y4:

Y5:

Y6:

X	Y1	Y2
12	2720	5703
13	2880	5874.1
14	3040	6050.3
15	3200	6231.9

FORM DEL ROW EDIT G-CON F-PLT

12) a) Un placement à intérêts simples au taux de 4 % signifie que chaque année, le capital augmente de 4 % de 300, soit de $0,04 \times 300 = 12$ €.

Donc, $a_1 = 300 + 12 = 312$ et $a_2 = 312 + 12 = 324$.

b) $a_{n+1} = a_n + 12$. La suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 12 et de premier terme $a_1 = 312$.

c) Nous utilisons la formule $a_n = a_0 + rn$ ce qui donne $a_n = 300 + 12n$.

2) a) Un placement à intérêts composés au taux de 3,5 % signifie que chaque année, le capital est multiplié par $1 + \frac{3,5}{100} = 1,035$.

Donc, $b_1 = 300 \times 1,035 = 310,50$ et $b_2 = 310,50 \times 1,035 \approx 321,37$.

b) $b_{n+1} = b_n \times 1,035$. La suite (b_n) est une suite géométrique de raison 1,035 et de premier terme $b_1 = 310,50$.

c) Nous utilisons la formule $b_n = b_0 \times q^n$ ce qui donne $b_n = 300 \times 1,035^n$.

3) a) La formule la plus simple est : $= B2 + 12$, mais on peut aussi écrire : $= B2 + 0,04 * \$B\2 ou $= B2 + 0,04 * B\$2$.

b) La formule la plus simple est : $= C2 * 1,035$.

On peut aussi écrire : $= 300 * 1,035^A3$ ou : $= \$C\$2 * 1,035^A3$.

Remarque : dans Excel, le symbole $*$ remplace le symbole $\times$ (multiplication).

11 a) D'après la calculatrice, $a_5 = 360$ et $b_5 = 356,31$ donc pour 5 ans, le placement A est plus intéressant.

11 b) La calculatrice nous donne : $a_8 = 396$ et $b_8 = 395,04$

$a_9 = 408$ et $b_9 = 408,87$

C'est donc à partir de 9 ans que le placement B devient plus intéressant que le placement A.

Affichage sur CASIO

Table Func :Y=

V1=300+12X []

V2=300*1.035^X []

V3: []

V4: []

V5: []

V6: []

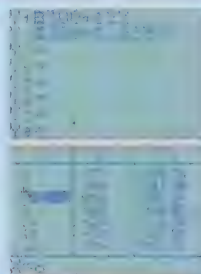
[SEL] [DEL] [TYPE] [STYL] [SET] [ITABL]

X	V1	V2
7	384	381.68
8	396	395.04
9	408	408.86
10	420	423.17

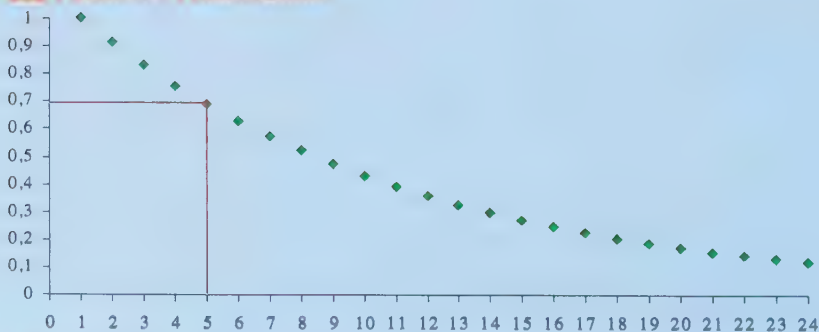
8

[FORM] [DEL] [ROW] [EDIT] [CON] [G] [PLT]

Affichage sur TI



13 Partiel : Observation



1) $u_5 \approx 0,7$ (justification sur le graphique avec les traits de construction rouge).

Il ne s'agit pas d'une suite arithmétique puisque les points ne sont pas alignés.

$$3) \frac{u_2}{u_1} \approx \frac{0,91}{1} \approx 0,91 ; \frac{u_3}{u_2} \approx \frac{0,83}{0,91} \approx 0,91 ; \frac{u_4}{u_3} \approx \frac{0,755}{0,83} \approx 0,91.$$

Le quotient de deux termes consécutifs semble constant, égal à 0,91. On passe donc d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois par 0,91. La suite (u_n) semble donc être une suite géométrique de raison 0,91. Elle est décroissante.

Partie B : Modélisation

1) $u_1 = 1$ car au bout d'une heure, la concentration dans le sang est de 1 g/l et $u_{n+1} = u_n \times 0,91$ car une multiplication par 0,91 (par heure) revient à une diminution de 9% (par heure).

(u_n) est une suite géométrique de raison 0,91 et de premier terme $u_1 = 1$.

2) On utilise la calculatrice: $u_2 = 0,91$; $u_3 \approx 0,83$; $u_4 \approx 0,75$.

On retrouve à peu près les valeurs de la partie A donc le modèle choisi semble bien convenir.

3) Nous utilisons la formule $u_n = u_p \times q^{n-p}$ en remplaçant p par 1, on obtient $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ce qui donne en remplaçant u_1 par 1 et q par 0,91 :

$$u_n = 1 \times 0,91^{n-1} \text{ et donc } u_n = 0,91^{n-1}.$$

4) On utilise la calculatrice. On voit que $u_{18} \approx 0,201$ et $u_{19} \approx 0,183$. La concentration de médicaments dans le sang reste supérieure à 0,2 pendant 18 h. Au bout de 19 h, elle est inférieure à 0,2.

Un comprimé est donc valable 18 h.

5) On veut $u_{24} \geq 0,2$. Or, $u_{24} = u_1 \times 0,91^{24-1}$
(en utilisant la formule $u_n = u_1 \times q^{n-1}$).

$$\text{Donc } u_1 \times 0,91^{24-1} \geq 0,2 \text{ ce qui donne } u_1 \geq \frac{0,2}{0,91^{23}} \approx 1,75.$$

Pour que le médicament fasse effet pendant 24 h, la concentration initiale u_1 doit être supérieure ou égale à 1,75 g/l.

10) 1993 = 1989 + 4, il s'agit alors de lire p_4 . Soit $p_4 = 5,6$.

Le nombre de cas déclarés en 1993 était de 5 600.

2) La suite (p_n) n'est pas arithmétique.

En effet $p_1 - p_0 = 0,4$ et $p_2 - p_1 = 0,5$.

3) a) $r_0 = 3,7$ et $r_{n+1} = r_n + 0,4$. Alors $r_1 = 4,1$; $r_2 = 4,5$; $r_3 = 4,9$ et $r_4 = 5,3$.

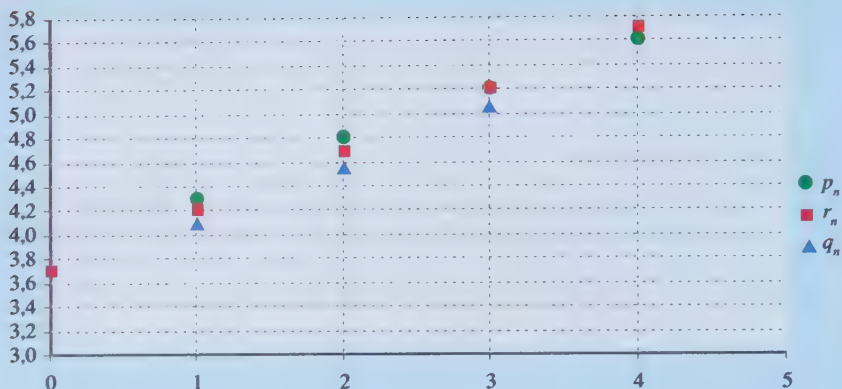
b) Voir ci-dessous.

4) a) $q_0 = 3,7$ et $q_{n+1} = 1,11 \times q_n$.

Alors $q_1 = 4,11$, $q_2 = 4,56$, $q_3 = 5,06$ et $q_4 = 5,62$.

b) Multiplier par 1,11 revient à augmenter de 11 %.

c)



5) a) $r_n = 3,7 + 0,4n$.

b) $r_{21} = 3,7 + 0,4 \times 21 = 12,1$. Le nombre de cas en 2010 serait de 12 100.

c) $S = 22 \times \frac{3,7 + 12,1}{2} = 173,8$. Soit 173 800 cas.

6) a) $q_n = 3,7 \times (1,11)^n$.

b) $q_{21} = 3,7 \times (1,11)^{21} \approx 33,11$. Le nombre de cas en 2010 serait de 33 110.

c) $S = 3,7 \times \frac{1 - (1,11)^{22}}{1 - 1,11} \approx 300,5$. Soit environ 300 500 cas.

7) a) À l'aide de la calculatrice, on trouve $r_{15} = 9,7$ et $r_{16} = 10,1$.

C'est donc en 2005 que le nombre de cas aurait dépassé 10 000.

b) À l'aide de la calculatrice, on trouve $q_9 \approx 9,46$ et $q_{10} = 10,5$.

C'est donc en 2000 que le nombre de cas aurait dépassé 10 000.

Affichage sur CASIO

Table Func :Y=

V1=3.7+.4X

V2=3.7x1.11^X

V3:

V4:

V5:

V6:

[SEL] [DEL] [TYPE] [STN] [SET] [TABL]

V1=3.7+0.4X

X	V1	V2
14	9.3	15.948
15	9.7	17.102
16	10.1	18.65
17	10.5	20.11

9.7

[FORM] [DEL] [ROW] [EDIT] [R-COM] [G-PLT]

V2=3.7x1.11^X

X	V1	V2
8	6.9	8.5267
9	7.3	9.46
10	7.7	10.505
11	8.1	11.661

9.46473662

[FORM] [DEL] [ROW] [EDIT] [R-COM] [G-PLT]

Affichage sur TI

V1=3.7+.4X

V2=3.7x1.11^X

V3:

V4:

V5:

V6:

V7:

V8:

V9:

V10:

V11:

V12:

V13:

V14:

V15:

V16:

V17:

V18:

V19:

V20:

V21:

V22:

V23:

V24:

V25:

V26:

V27:

V28:

V29:

V30:

V31:

V32:

V33:

V34:

V35:

V36:

V37:

V38:

V39:

V40:

V41:

V42:

V43:

V44:

V45:

V46:

V47:

V48:

V49:

V50:

V51:

V52:

V53:

V54:

V55:

V56:

V57:

V58:

V59:

V60:

V61:

V62:

V63:

V64:

V65:

V66:

V67:

V68:

V69:

V70:

V71:

V72:

V73:

V74:

V75:

V76:

V77:

V78:

V79:

V80:

V81:

V82:

V83:

V84:

V85:

V86:

V87:

V88:

V89:

V90:

V91:

V92:

V93:

V94:

V95:

V96:

V97:

V98:

V99:

V100:

V101:

V102:

V103:

V104:

V105:

V106:

V107:

V108:

V109:

V110:

V111:

V112:

V113:

V114:

V115:

V116:

V117:

V118:

V119:

V120:

V121:

V122:

V123:

V124:

V125:

V126:

V127:

V128:

V129:

V130:

V131:

V132:

V133:

V134:

V135:

V136:

V137:

V138:

V139:

V140:

V141:

V142:

V143:

V144:

V145:

V146:

V147:

V148:

V149:

V150:

V151:

V152:

V153:

V154:

V155:

V156:

V157:

V158:

V159:

V160:

V161:

V162:

V163:

V164:

V165:

V166:

V167:

V168:

V169:

V170:

V171:

V172:

V173:

V174:

V175:

V176:

V177:

V178:

V179:

V180:

V181:

V182:

V183:

V184:

V185:

V186:

V187:

V188:

V189:

V190:

V191:

V192:

V193:

V194:

V195:

V196:

V197:

V198:

V199:

V200:

V201:

V202:

V203:

V204:

V205:

V206:

V207:

V208:

V209:

V210:

V211:

V212:

V213:

V214:

V215:

V216:

V217:

V218:

V219:

V220:

V221:

V222:

V223:

V224:

V225:

V226:

V227:

V228:

V229:

V230:

V231:

V232:

V233:

V234:

V235:

V236:

V237:

V238:

V239:

V240:

V241:

V242:

V243:

V244:

V245:

V246:

V247:

V248:

V249:

V250:

V251:

V252:

V253:

V254:

V255:

V256:

V257:

V258:

V259:

V260:

V261:

V262:

V263:

V264:

V265:

V266:

V267:

V268:

V269:

V270:

V271:

V272:

V273:

V274:

V275:

V276:

V277:

V278:

V279:

V280:

V281:

V282:

V283:

V284:

V285:

V286:

V287:

V288:

V289:

V290:

V291:

V292:

V293:

V294:

V295:

V296:

V297:

V298:

V299:

V300:

V301:

V302:

V303:

V304:

V305:

V306:

V307:

V308:

V309:

V310:

V311:

V312:

V313:

V314:

V315:

V316:

V317:

V318:

V319:

V320:

V321:

V322:

V323:

V324:

V325:

V326:

V327:

V328:

V329:

V330:

V331:

V332:

V333:

V334:

V335:

V336:

V337:

V338:

V339:

V340:

V341:

V342:

V343:

V344:

V345:

V346:

V347:

V348:

V349:

V350:

V351:

V352:

V353:

V354:

V355:

V356:

V357:

V358:

V359:

V360:

V361:

V362:

V363:

V364:

V365:

V366:

V367:

V368:

V369:

V370:

V371:

V372:

V373:

V374:

V375:

V376:

V377:

V378:

V379:

V380:

V381:

V382:

V383:

V384:

V385:

V386:

V387:

V388:

V389:

V390:

V391:

V392:

V393:

V394:

V395:

V396:

V397:

V398:

V399:

V400:

V401:

V402:

V403:

V404:

V405:

V406:

V407:

V408:

V409:

V410:

V411:

V412:

V413:

V414:

V415:

V416:

V417:

V418:

V419:

V420:

V421:

V422:

V423:

V424:

V425:

V426:

V427:

V428:

V429:

V430:

V431:

V432:

V433:

V434:

V435:

V436:

V437:

V438:

V439:

V440:

V441:

V442:

V443:

V444:

V445:

V446:

V447:

V448:

V449:

V450:

V451:

V452:

V453:

V454:

V455:

V456:

V457:

V458:

V459:

V460:

V461:

V462:

V463:

V464:

V465:

V466:

V467:

V468:

V469:

V470:

V471:

V472:

V473:

V474:

V475:

V476:

V477:

V478:

V479:

V480:

V481:

V482:

V483:

V484:

V485:

V486:

V487:

V488:

V489:

V490:

V491:

V492:

V493:

V494:

V495:

V496:

V497:

V498:

V499:

V500:

V501:

V502:

V503:

V504:

V505:

V506:

V507:

V508:

V509:

V510:

V511:

V512:

V513:

V514:

V515:

V516:

V517:

V518:

V519:

V520:

V521:

V522:

V523:

V524:

V525:

V526:

V527:

V528:

V529:

V530:

V531:

V532:

V533:

V534:

V535:

V536:

V537:

V538:

V539:

V540:

V541:

V542:

V543:

V544:

V545:

V546:

V547:

V548:

V549:

V550:

V551:

V552:

V553:

V554:

V555:

V556:

V557:

V558:

V559:

V560:

V561:

V562:

V563:

V564:

V565:

V566:

V567:

V568:

V569:

V570:

V571:

V572:

V573:

V574:

V575:

V576:

V577:

V578:

V579:

V580:

V581:

V582:

V583:

V584:

V585:

V586:

V587:

V588:

V589:

V590:

V591:

V592:

V593:

V594:

V595:

V596:

V597:

V598:

V599:

V600:

V601:

V602:

V603:

V604:

V605:

V606:

V607:

V608:

V609:

V610:

V611:

V612:

V613:

V614:

V615:

V616:

V617:

V618:

V619:

V620:

V621:

V622:

V623:

V624:

V625:

V626:

V627:

V628:

V629:

V630:

V631:

V632:

V633:

V634:

V635:

V636:

V637:

V638:

V639:

V640:

V641:

V642:

V643:

V644:

V645:

V646:

V647:

V648:

V649:

V650:

V651:

V652:

V653:

V654:

V655:

V656:

V657:

V658:

V659:

V660:

V661:

V662:

V663:

V664:

V665:

V666:

V667:

V668:

V669:

V670:

V671:

V672:

V673:

V674:

V675:

V676:

V677:

V678:

V679:

V680:

V681:

V682:

V683:

V684:

V685:

V686:

V687:

V688:

V689:

V690:

V691:

V692:

V693:

V694:

V695:

V696:

V697:

V698:

V699:

V700:

V701:

V702:

V703:

V704:

V705:

V706:

V707:

V708:

V709:

V710:

V711:

V712:

V713:

V714:

V715:

V716:

V717:

V718:

V719:

V720:

V721:

V722:

V723:

V724:

V725:

V726:

V727:

V728:

V729:

V730:

V731:

V732:

V733:

V734:

V735:

V736:

V737:

V738:

V739:

V740:

V741:

V742:

V743:

V744:

V745:

V746:

V747:

V748:

V749:

V750:

V751:

V752:

V753:

V754:

V755:

V756:

V757:

V758:

V759:

V760:

V761:

V762:

V763:

V764:

V765:

V766:

V767:

V768:

V769:

V770:

V771:

V772:

V773:

V774:

V775:

V776:

V777:

V778:

V779:

V780:

V781:

V782:

V783:

V784:

V785:

V786:

V787:

V788:

V789:

V790:

V791:

V792:

V793:

V794:

V795:

V796:

V797:

V798:

V799:

V800:

V801:

V802:

V803:

V804:

V805:

V806:

V807:

V808:

V809:

V810:

V811:

V812:

V813:

V814:

V815:

V816:

V817:

V818:

V819:

V820:

V821:

V822:

V823:

V824:

V825:

V826:

V827:

V828:

V829:

V830:

V831:

V832:

V833:

V834:

V835:

V836:

V837:

V838:

V839:

V840:

V841:

V842:

V843:

V844:

V845:

V846:

V847:

V848:

V849:

V850:

V851:

V852:

V853:

V854:

V855:

V856:

V857:

V858:

V859:

V860:

V861:

V862:

V863:

V864:

V865:

V866:

V867:

V868:

V869:

V870:

V871:

V872:

V873:

V874:

V875:

V876:

V877:

V878:

V879:

V880:

V881:

V882:

V883:

V884:

V885:

V886:

V887:

V888:

V889:

V890:

V891:

V892:

V893:

V894:

V895:

V896:

V897:

V898:

V899:

V900:

V901:

V902:

V903:

V904:

V905:

V906:

V907:

V908:

V909:

V910:

V911:

V912:

V913:

V914:

V915:

V916:

V917:

V918:

V919:

V920:

V921:

V922:

V923:

V924:

V925:

V926:

V927:

V928:

V929:

V930:

V931:

V932:

V933:

V934:

V935:

V936:

V937:

V938:

V939:

V940:

V941:

V942:

V943:

V944:

V945:

V946:

V947:

V948:

V949:

V950:

V951:

V952:

V953:

V954:

V955:

V956:

V957:

V958:

V959:

V960:

V961:

V962:

V963:

V964:

V965:

V966:

V967:

V968:

V969:

V970:

V971:

V972:

V973:

V974:

V975:

V976:

V977:

V978:

V979:

V980:

V981:

V982:

V983:

V984:

V985:

V986:

V987:

V988:

V989:

V990:

V991:

V992:

V993:

V994:

V995:

V996:

V997:

V998:

V999:

V1000:

13 1) Il est clair que $T_n = 1\,000 + 50n$.

2) On a $B_1 = 100$ puis, la seconde année, la cotisation augmente de 10 % soit $100 \times 1,1 = 110$ mais avec la remise de 5 € on a finalement $B_2 = 105$ donc :

$$B_2 = B_1 \times 1,1 - 5.$$

Il en est de même les années suivantes, donc plus généralement, pour $n \geq 1$, on a $B_{n+1} = B_n \times 1,1 - 5$.

3) a) On a $u_{n+1} = B_{n+1} - 50$ donc :

$$u_{n+1} = B_n \times 1,1 - 5 - 50 = B_n \times 1,1 - 55$$

Or $u_n = B_n - 50 \Leftrightarrow B_n = u_n + 50$ on a donc :

$$u_{n+1} = (u_n + 50) \times 1,1 - 55 = u_n \times 1,1 + 55 - 55 \text{ d'où } u_{n+1} = u_n \times 1,1.$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme $u_1 = B_1 - 50 = 50$.

b) On en déduit que $u_n = u_1 \times 1,1^{n-1}$ c'est-à-dire $u_n = 50 \times 1,1^{n-1}$ et donc $B_n = 50 \times 1,1^{n-1} + 50$.

On peut remarquer que la formule convient aussi pour $n = 1$.

$$\text{c) } S_n = B_1 + B_2 + \dots + B_n = 50 \times 1,1^0 + 50 + 50 \times 1,1^1 + 50 \\ + \dots + 50 \times 1,1^{n-1} + 50$$

En regroupant les termes, cela donne :

$$S_n = 50 (1 + 1,1 + \dots + 1,1^{n-1}) + 50n.$$

$$S_n = 50 \left(\frac{1 - 1,1^n}{1 - 1,1} \right) + 50n.$$

$$S_n = 500 (1,1^n - 1) + 50n$$

4) On a $T_4 = 1\,200$ et $S_4 = 432,05$ donc c'est bien sûr la formule B qui est la plus avantageuse.

5) On cherche le plus petit entier n tel que $T_n < S_n$, c'est-à-dire :

$$1\,000 + 50n < 500 (1,1^n - 1) + 50n$$

d'où après simplification, $1,1^n > 3$.

On peut alors par essais successifs constater que $1,1^{11} = 2,85\dots$ et $1,1^{12} = 3,13\dots$

Il faut donc au moins 12 ans pour que la formule A devienne plus avantageuse.

Testez-vous

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont **une seule** est exacte.

1 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$, et soit $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$ alors :

- 1) **a)** $u_7 = 20$ **b)** $u_7 = 23$ **c)** $u_7 = 26$ **d)** $u_7 = 29$
2) **a)** $S = 94$ **b)** $S = 97$ **c)** $S = 100$ **d)** $S = 103$

2 Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = 2$, et soit $S = v_0 + v_1 + \dots + v_8$ alors :

- 1) **a)** $v_8 = 1\,280$ **b)** $v_8 = 640$ **c)** $v_8 = 2\,560$ **d)** $v_8 = 256$
2) **a)** $S = 1\,275$ **b)** $S = 2\,555$ **c)** $S = -637,5$ **d)** $S = 8\,955$

3 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_2 = 12$ et $u_8 = 96$, alors :

- 1) **a)** $r = 14$ **b)** $r = 12$ **c)** $r = -6$ **d)** $r = 20$
2) **a)** $u_0 = 2$ **b)** $u_0 = -12$ **c)** $u_0 = 8$ **d)** $u_0 = -16$

4 Soit (v_n) une suite géométrique de raison q telle que $v_5 = 5\,120$ et $v_6 = 4\,096$, alors :

- 1) **a)** $q = 1,25$ **b)** $q = 0,6$ **c)** $q = 0,8$ **d)** $q = 1,32$
2) **a)** $v_0 = 15\,625$ **b)** $v_0 = 12\,500$ **c)** $v_0 = 10\,000$ **d)** $v_0 = 19\,531,25$

5 La somme $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 217$ vaut :

- a)** 23 762 **b)** 23 871 **c)** 23 653 **d)** 248 321

6 La somme $1 + 5 + 25 + 125 + \dots + 15\,625$ vaut :

- a)** 97 656 **b)** 3 906 **c)** 2 441 406 **d)** 19 531

Solutions

1 1) **b)** ; 2) **c)** **2** 1) **a)** ; 2) **b)** **3** 1) **a)** ; 2) **a)**

4 1) **c)** ; 2) **a)** **5** **c)** **6** **d)**

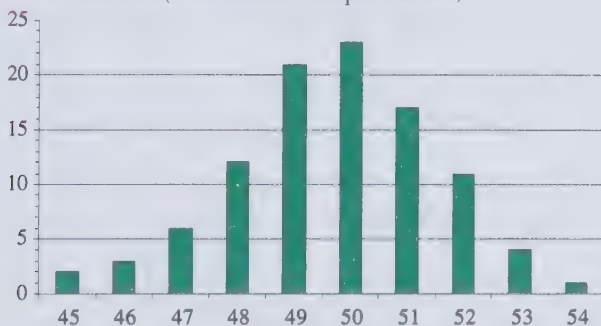
Les séries statistiques à une variable

Le cours

Exemples de séries statistiques

Nous nous appuierons sur les deux exemples suivants pour illustrer les points abordés dans le cours.

Exemple 1 : cas discret (on connaît chaque valeur)



Dans ce tableau sont indiquées les tailles de 100 bébés à la naissance.

Taille (en cm)	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Effectif	2	3	6	12	21	23	17	11	4	1

On lit par exemple que 6 bébés mesuraient 47 cm.

On peut représenter ces données à l'aide d'un diagramme en barres. La hauteur de chaque barre correspond à l'effectif.

Exemple 2 : cas continu (les valeurs sont réparties par classes).

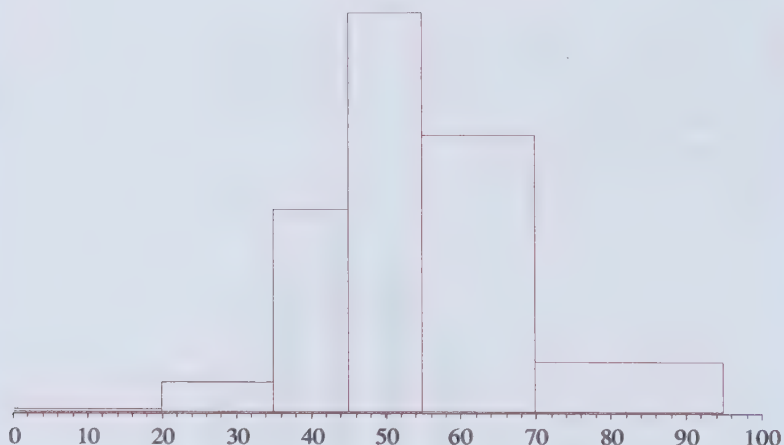
On a relevé les âges de 400 personnes dont le décès est attribué à l'alcool. Comme il y a beaucoup de résultats possibles, on les a regroupés par classes (intervalles).

Âge	[0 ; 20[	[20 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 70[	[70 ; 95[
Effectif	2	15	68	134	139	42

Exemple de calcul de fréquence :

Parmi les 400 personnes, 134 avaient entre 45 et 55 ans.

Comme $\frac{134}{400} = 0,335$, on peut en déduire que 33,5% des personnes dont le décès est attribué à l'alcool ont entre 45 et 55 ans.



On peut représenter ces données à l'aide d'un histogramme.

On constate que le rectangle correspondant à la classe [45 ; 55[(et à un effectif de 134) monte plus haut que le rectangle correspondant à la classe [55 ; 70[(et à un effectif de 139).

C'est parce que dans un histogramme, les effectifs sont proportionnels aux aires des rectangles, et non pas à leurs hauteurs comme dans un diagramme en barres.

Les indicateurs de centralité

La moyenne

Définition : Dans le cas d'une variable statistique x prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans une population de n individus, la moyenne

arithmétique est définie par $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum x_i$.

Dans le cas d'une série donnée avec effectifs n_i , on utilise la formule :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i x_i.$$

Dans le cas de valeurs regroupées par intervalles (ou classes), on prend pour x_i les centres des intervalles.

Rappel : Le symbole $\sum$ (sigma) signifie « somme » : on fait la somme des produits $n_i x_i$ (chaque valeur est multipliée par son effectif), puis on divise par l'effectif total.

Dans l'exemple 1 :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 45 + 3 \times 46 + 6 \times 47 + \dots + 1 \times 54}{100} \text{ soit } \bar{x} = 49,7.$$

Dans l'exemple 2, on a d'abord besoin de connaître le centre des classes. Alors on rajoute une ligne au tableau :

Âge	[0 ; 20[	[20 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 70[	[70 ; 95[
Effectif	2	15	68	134	139	42
Centre	10	27,5	40	50	62,5	82,5

On obtient par exemple 27,5 par le calcul $\frac{20+35}{2}$.

$$\bar{x} = \frac{2 \times 10 + 15 \times 27,5 + 68 \times 40 + 134 \times 50 + 139 \times 62,5 + 42 \times 82,5}{400} \approx 55.$$

Calcul à partir de la distribution des fréquences

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i x_i = \sum \frac{n_i}{n} x_i \text{ donc } \bar{x} = \sum f_i x_i.$$

$$\left(f_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\text{effectif de la valeur } x_i}{\text{effectif total}} \text{ représente la fréquence de la valeur } x_i \right)$$

Exemple : 20 % des élèves d'une classe ont eu 15 à un devoir, 50 % ont eu 10 et 30 % ont eu 8.

La moyenne de la classe est : $0,20 \times 15 + 0,50 \times 10 + 0,30 \times 8 = 10,4$.

Calcul à partir d'une répartition par groupes

On répartit n nombres en deux groupes distincts, l'un contenant n_1 éléments, l'autre n_2 éléments. Si $\bar{x}_1$ est la moyenne du premier groupe et $\bar{x}_2$ celle du deuxième groupe, alors la moyenne de tous les nombres est :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n}.$$

Exemple : il y a dans une classe 20 garçons et 10 filles. La moyenne en français des garçons est de 11,5 et celle des filles est de 12,5. Quelle est la moyenne de la classe ?

Il ne faut bien sûr pas faire $\frac{11,5 + 12,5}{2} = 12$ car on doit tenir compte du

fait que comme il y a plus de garçons que de filles, le 11,5 doit avoir un coefficient plus important que le 12,5.

On fait donc $\bar{x} = \frac{20 \times 11,5 + 10 \times 12,5}{30} \approx 11,8$.

● La médiane

Définition : La **médiane Me** est la valeur du caractère qui partage la série en deux séries d'effectifs égaux, les valeurs étant classées dans l'ordre croissant.

• Dans le cas d'un caractère discret :

- si l'effectif est impair, la médiane est la valeur centrale ;
- si l'effectif est pair, on prend pour médiane la moyenne des deux valeurs centrales.

Exemple : 6 6 9 9 9 14 15 15 16

$$Me = 9$$

4 5 6 9 12 15

$$Me = \frac{6+9}{2} = 7,5.$$

Dans l'exemple 1, $Me = 50$ (car la 50^e et la 51^e valeur sont égales à 50).

- Dans le cas d'un caractère continu :

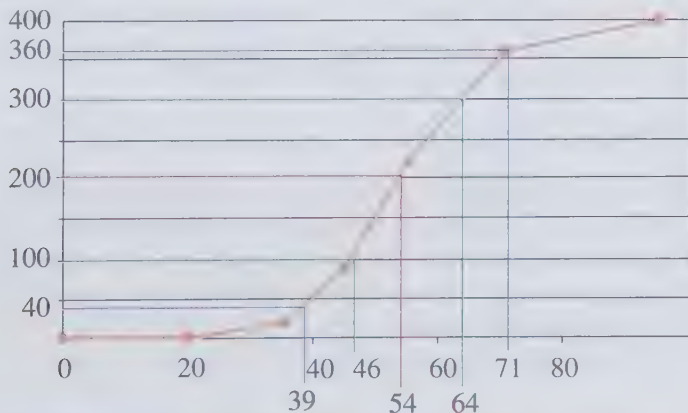
La médiane s'obtient par lecture graphique. On utilise la courbe (ou polygone) des fréquences cumulées croissantes. La médiane est l'abscisse du point correspondant à une fréquence de 50 % (donc d'ordonnée 50 % ou 0,5). Si on dispose de la courbe des effectifs cumulés, la médiane est l'abscisse du point dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total.

Exemple : Reprenons l'exemple 2. Pour déterminer la médiane graphiquement, on a besoin de la courbe des effectifs cumulés croissants (ou fréquences). Rajoutons une ligne au tableau.

Âge	[0 ; 20[	[20 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 70[	[70 ; 95[
Effectif	2	15	68	134	139	42
Effectif cumulé croissant	2	17	85	219	358	400

Le 85 dans le tableau signifie que 85 personnes avaient moins de 45 ans. On l'obtient par le calcul : $2 + 15 + 68 = 85$.

Traçons la courbe des effectifs cumulés croissants. Pour cela, nous plaçons les points de coordonnées (0 ; 0), (20 ; 2), (35 ; 17), (45 ; 85), (55 ; 219), (70 ; 358) et (95 ; 400) puis nous les relierons par des segments de droite.



Les traits de construction rouges permettent de déterminer la médiane par lecture graphique : $Me = 54$ (environ).

Les traits de constructions bleus et verts permettent de déterminer les quartiles et les déciles (voir paragraphe suivant).

Les indicateurs de dispersion

L'écart-type

Définition : L'écart-type d'une série x est défini par la formule

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \text{ Cette formule n'est pas à connaître puisqu'on}$$

déterminera l'écart-type à la calculatrice (voir *Méthodes*, point 2).

On retiendra juste que l'écart-type est un indicateur de dispersion, puisque son calcul est basé sur les écarts des valeurs à la moyenne $(x_i - \bar{x})$.

Dans l'exemple 1, on obtient à la calculatrice $\sigma(x) \approx 1,80$.

(L'écart-type est donné par σx sur TI, et par σn sur Casio.)

```
1-Var Stats
x̄=49.7
Σx=4970
Σx²=247334
Sx=1.811857688
σx=1.802775638
↓n=100
```

Exemple 1 sur TI

```
1-Variable
x̄=55.0125
Σx=22005
Σx²=1.2841E+06
σn=13.5669577
σn-1=13.5839483
↓n=400
```

Exemple 2 sur Casio

Dans l'exemple 2, en entrant comme valeurs les centres des classes, on obtient à la calculatrice $\sigma(x) \approx 13,57$.

Les quartiles et les déciles

Définition : Le **premier quartile** Q_1 est la plus petite valeur (de la série) telle que 25 % au moins des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1 . Le **troisième quartile** Q_3 est la plus petite valeur telle que 75 % au moins des valeurs soient inférieures ou égales à Q_3 . L'**intervalle interquartile** est $[Q_1 ; Q_3]$. L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$.

Le **premier décile** D_1 est la plus petite valeur telle que 10 % au moins des valeurs soient inférieures ou égales à D_1 . Le **neuvième décile** D_9 est la plus petite valeur telle que 90 % au moins des valeurs soient inférieures ou égales à D_9 . L'**intervalle interdécile** est $[D_1 ; D_9]$. L'**écart interdécile** est $D_9 - D_1$.

Exemple : Dans l'exemple 1, il y a 100 valeurs, donc Q_1 est la 25^e valeur et Q_3 est la 75^e valeur. $Q_1 = 49$ et $Q_3 = 51$. L'écart interquartile est 2. De même, D_1 est la 10^e valeur et D_9 la 90^e : $D_1 = 47$ et $D_9 = 52$. L'écart interdécile est 5. Dans l'exemple 2, on détermine les quartiles et les déciles sur le graphique ci-dessus.

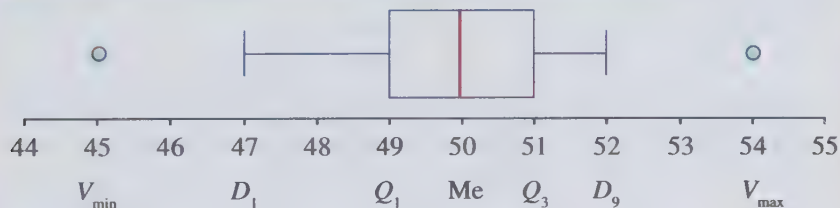
Détermination des quartiles (traits de construction verts) :

Q_1 correspond à 25 % de 400 (l'effectif total) donc à un effectif de 100. On lit sur le graphique (p. 39) $Q_1 = 46$. Q_3 correspond à 75 % de 400, donc à un effectif de 300. On lit sur le graphique $Q_3 = 64$.

Détermination des déciles (traits de construction bleus) :

D_1 correspond à 10% de 400 (l'effectif total) donc à un effectif de 40. On lit sur le graphique $D_1 = 39$. D_9 correspond à 90 % de 400, donc à un effectif de 360. On lit sur le graphique $D_9 = 71$.

● Exemple de diagramme en boîte : (cas de l'exemple 1)



$V_{\min} = 45$ et $V_{\max} = 54$ correspondent à la plus petite et à la plus grande valeur de la série.

$D_1 = 47$ et $D_9 = 52$ correspondent au premier et au neuvième décile.

$Q_1 = 49$ et $Q_3 = 51$ correspondent au premier et au troisième quartile.

$Me = 50$ est la médiane.

On décide parfois de ne pas représenter les déciles sur le diagramme, auquel cas « les extrémités de la moustache » (47 et 52 sur le graphique) indiquent non plus les déciles, mais la plus petite et la plus grande valeur. Dans un exercice, le type de diagramme (avec ou sans déciles) sera indiqué dans l'énoncé.

À retenir

• **La moyenne** : Dans le cas d'une variable statistique x prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans une population de n individus, la moyenne arithmétique est définie par

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum x_i.$$

Dans le cas d'une série donnée avec effectifs n_i : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i x_i.$

Dans le cas de valeurs regroupées par intervalles (ou classes), on prend pour x_i les centres des intervalles.

• **La médiane Me** est la valeur du caractère qui partage la série en deux séries d'effectifs égaux, les valeurs étant classées dans l'ordre croissant.

Dans le cas d'un caractère discret :

- si l'effectif est impair, la médiane est la valeur centrale ;
- si l'effectif est pair, on prend pour médiane la moyenne des deux valeurs centrales.

Dans le cas d'un caractère continu, la médiane s'obtient par lecture graphique.

• **L'écart-type** s'obtient à l'aide de la calculatrice.

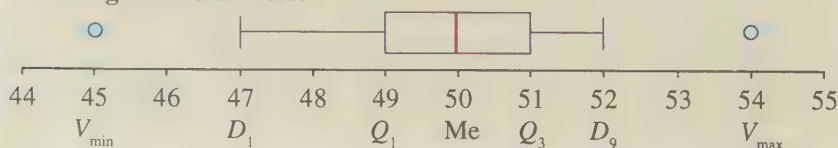
• **Les quartiles** : Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur (de la série) telle que 25% au moins des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1 . Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur telle que 75 % au moins des valeurs soient inférieures ou égales à Q_3 .

L'intervalle interquartile est $[Q_1 ; Q_3]$. L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$.

• **Les déciles** : Le premier décile D_1 est la plus petite valeur telle que 10 % au moins des valeurs soient inférieures ou égales à D_1 . Le neuvième décile D_9 est la plus petite valeur telle que 90 % au moins des valeurs soient inférieures ou égales à D_9 .

L'intervalle interdécile est $[D_1 ; D_9]$. L'écart interdécile est $D_9 - D_1$.

• **Le diagramme en boîte** :



Les méthodes

1

Comment construire un diagramme en boîte ?

Énoncé

En début d'année scolaire, le professeur principal d'une classe de terminale ST2S décide d'étudier les notes de ses élèves au baccalauréat de français l'année précédente.

Il a relevé dans le tableau ci-dessous les notes des 33 élèves de la classe.

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	0	1	1	3	4	5	5	5	4	3	1	1	0	0	0

Construire le diagramme en boîte correspondant à cette série.

Les « extrémités des moustaches » seront les valeurs extrêmes de la série.

Corrigé commenté

Pour construire le diagramme en boîte correspondant à cette série, nous devons connaître sa médiane Me , le premier quartile Q_1 , le troisième quartile Q_3 , le minimum $\min$ et le maximum $\max$ de cette série.

On dresse alors le tableau des effectifs cumulés croissants :

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	0	1	1	3	4	5	5	5	4	3	1	1	0	0	0
Effectifs cumulés croissants	0	1	2	5	9	14	19	24	28	31	32	33	33	33	33

Le minimum de la série est la plus petite valeur prise donc ici **$\min = 7$** .

Le maximum de la série est la plus grande valeur prise donc ici **$\max = 17$** .

La médiane Me est la valeur du caractère qui partage la série en deux séries d'effectifs égaux, les valeurs étant classées dans l'ordre croissant :

- si l'effectif est impair, la médiane est la valeur centrale ;
- si l'effectif est pair, on prend pour médiane la moyenne des deux valeurs centrales.

L'effectif de cette série est de 33. Il s'agit d'un nombre impair, la médiane est donc la valeur centrale soit la 17^e valeur. La 14^e valeur est 11 et la 15^e, la 16^e..., jusqu'à la 19^e sont des 12. La 17^e valeur est donc un 12.

Donc $Me = 12$.

Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur telle que 25 % au moins des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1 .

On calcule donc 25 % de l'effectif de la série, arrondi à l'entier supérieur :

$$\frac{25}{100} \times 33 = 8,25.$$

Donc le premier quartile est la 9^e valeur soit (le dernier) 10 : **$Q_1 = 10$.**

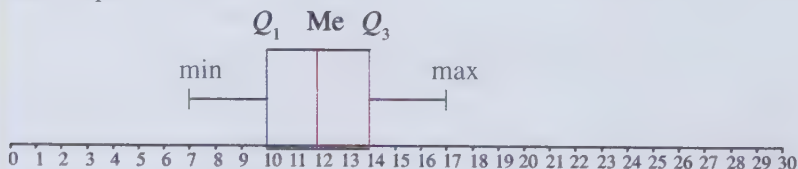
Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur, telle que 75 % au moins des valeurs soient inférieures ou égales à Q_3 .

On calcule donc 75 % de l'effectif de la série, arrondi à l'entier supérieur :

$$\frac{75}{100} \times 33 = 24,75.$$

Donc le troisième quartile est la 25^e valeur, soit (le premier) 14 : **$Q_3 = 14$.**

Il ne reste plus qu'à représenter le diagramme en boîte en choisissant une unité adaptée.



Comment déterminer la moyenne et l'écart-type d'une série à caractère continu ?

Énoncé

Le tableau suivant est un extrait d'une étude statistique sur la gravité des accidents de la route en fonction de la vitesse.

Cette étude ne concerne que les accidents avec choc frontal concernant des occupants-avant munis de la ceinture de sécurité. Pour faciliter l'étude, la vitesse d'un véhicule lors de chaque accident a été transformée en « vitesse équivalente contre un obstacle rigide », cette dernière est exprimée en kilomètres par heure.

Vitesse	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[	[65 ; 75[	[75 ; 85[	[85 ; 100[	Total
Nombre de tués	1	13	39	115	85	26	3	282

- 1) Calculer la moyenne de cette série arrondie au km/h près.
- 2) Calculer l'écart-type de cette série.

Corrigé commenté

- 1) On commence par calculer les centres x_i de chaque classe $[a_i ; b_i]$:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}.$$

Vitesse	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[	[65 ; 75[	[75 ; 85[	[85 ; 100[
Centre	$\frac{25+35}{2} = 30$	40	50	60	70	80	92,5
Nombre de tués	1	13	39	115	85	26	3

Alors :

$$\bar{x} = \frac{30 \times 1 + 40 \times 13 + 50 \times 39 + 60 \times 115 + 70 \times 85 + 80 \times 26 + 92,5 \times 3}{282}$$

$$\bar{x} \approx 62,79.$$

La vitesse moyenne est donc d'environ **63 km/h**.

2) On entre les valeurs des centres des classes et les effectifs correspondants dans les listes de la calculatrice en mode statistique.

Affichage sur CASIO

List 1	List 2	List 3	List 4
SUB			
5	70	85	
6	80	26	
7	92,5	3	
8			

Taper : **CALC** puis **SET**
ou **RANG** afin de préciser List2 pour 1VarFreq

1Var XList	:List1
1Var Freq	:List2
2Var XList	:List1
2Var YList	:List2
2Var Freq	:1

Remarque : il faudra penser à modifier à nouveau cette ligne lorsqu'on désirera calculer une moyenne non pondérée.

Taper : **1Var**

1-Variable	
$\bar{x}$	=62,7925531
Σx	=17707,5
Σx^2	=1,1417E+06
$\sigma_{\Sigma n}$	=10,2917743
$\sigma_{\Sigma n-1}$	=10,3100708
n	=282

Affichage sur TI

L1	L2	L3
5	70	85
6	80	26
7	92,5	3
8		

STAT puis **CALC**

1	1-Var Stats	On tape L_1, L_2
---	-------------	--------------------

1 : 1-Var Stats On tape L_1, L_2

1-Var Stats	
$\bar{x}$	=62,7925531
Σx	=17707,5
Σx^2	=1,1417E+06
$\sigma_{\Sigma n}$	=10,2917743
$\sigma_{\Sigma n-1}$	=10,3100708
n	=282

ENTER

1-Var Stats	
$\bar{x}$	=62,7925531
Σx	=17707,5
Σx^2	=1,1417E+06
$\sigma_{\Sigma n}$	=10,2917743
$\sigma_{\Sigma n-1}$	=10,3100708
n	=282

On lit $\sigma \approx 10,29$

Remarque 1 : La moyenne $\bar{x}$ est aussi donnée par la calculatrice à la première ligne.

Remarque 2 : En prenant les centres des intervalles comme valeurs de x , on n'obtient que des valeurs approchées de la moyenne et de l'écart-type.

Les exercices

1 Les salaires nets des 31 employés de l'entreprise ESIRP sont donnés ci-après, en valeurs arrondies à 10 € près :

1 620, 1 710, 2 050, 1 400, 1 360, 1 100, 1 150, 960, 1 100, 1 640, 1 370, 1 310, 1 140, 1 860, 1 100, 1 460, 810, 1 560, 1 020, 840, 1 280, 960, 1 240, 1 310, 1 130, 1 020, 1 280, 880, 990, 1 160, 1 450.

1) Ranger ces salaires par valeur croissante.

2) Déterminer la médiane Me et les quartiles Q_1 et Q_3 .

3) Donner l'intervalle interquartile.

Quel pourcentage des employés contient-il ?

4) Calculer la moyenne et l'écart-type.

5) Quel est le pourcentage des employés qui ont leur salaire dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$?

2 Le tableau ci-dessous donne les résultats d'une enquête réalisée auprès de 400 lycéens sur la durée moyenne (en minutes) de leur trajet matinal pour se rendre au lycée.

Durée du trajet	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 45[	[45 ; 60[
Effectif	17	33	76	136	81	57

1) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série arrondis à la minute.

2) On considère qu'une durée « normale » devrait se situer dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$, déterminer cet intervalle.

3 La distribution (en pourcentage) des employés d'une grande entreprise selon leur salaire net (en centaines d'euros) est donnée par le tableau suivant :

Salaire	[7 ; 9[	[9 ; 11[	[11 ; 13[	[13 ; 15[	[15 ; 17[	[17 ; 19[	[19 ; 21[
%	a	16	18	20	16	12	b

1) Sachant que le salaire moyen est de 1 320 € montrer que les deux pourcentages manquants a et b sont solutions du système :
$$\begin{cases} a + b = 18 \\ 2a + 5b = 48 \end{cases}$$

2) Résoudre ce système pour trouver a et b .

 Le directeur d'une école d'infirmières cherche à comparer les deux dernières promotions d'élèves lors de leur entrée dans l'école. Il a relevé dans les dossiers les notes de français des 33 élèves de chaque promotion pour dresser les tableaux des effectifs ci-dessous.

Promotion 2006

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	1	2	3	4	4	5	4	4	3	2	1	0	0	0	0

Promotion 2007

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	0	0	1	2	4	6	7	6	4	2	1	0	0	0	0

1) Construire sur un même graphique les deux diagrammes en boîtes (sans les déciles) correspondants aux deux promotions.

2) Quels renseignements peut-on tirer de la comparaison des notes de français entre les promotions 2006 et 2007 ?

 Deux traitements A et B s'appliquent à la même maladie. On les a testés sur des échantillons comparables et on a constaté que, selon le traitement choisi, les durées de guérison se répartissent comme suit :

Durée de guérison (en mois)	Fréquences (en %)	
	Traitement A	Traitement B
[0 ; 3[	2	12
[3 ; 5[	3	18
[5 ; 6[	6	21
[6 ; 7[	10	14
[7 ; 8[	18	12
[8 ; 9[	23	8
[9 ; 10[	18	5
[10 ; 12[	12	6
[12 ; 18[	8	4

- 1) Calculer la moyenne et l'écart-type de chacune des deux séries arrondis au dixième.
- 2) Tracer sur le même graphique les polygones des effectifs cumulés associés à chacune des deux séries, en déduire par lecture graphique des valeurs approchées des deux médianes.
- 3) Commenter les résultats (efficacité relative des deux traitements).

6 Étude du prix d'un article

Une étude sur le prix (en €) pratiqué par diverses boutiques pour un même article a donné les résultats suivants :

Prix	Centres des classes	Fréquences (en %)	Fréquences cumulées
[34 ; 42[		12	
[42 ; 46[		20	
[46 ; ...[	48	24	
[... ; ...[			
[58 ; 70[		8	
Total			

Dans les calculs qui suivent on arrondira tous les résultats à l'euro le plus proche.

Partie A

- 1) Compléter le tableau.
- 2) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ .
- 3) On décide qu'un prix « normal » pour cet article devrait se situer dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$. Déterminer cet intervalle.

Partie B

- 1) Tracer le polygone des fréquences cumulées.
- 2) En déduire par lecture graphique les valeurs de la médiane, des quartiles et du premier et du neuvième décile.
- 3) Recopier et compléter alors la phrase :
« On a constaté que la moitié des boutiques vend l'article étudié moins de €, et qu'un quart le vend moins de €. »
À l'opposé il y en a 10 % qui osent le proposer à plus de €, alors qu'un prix normal devrait se situer entre et € ! »

La fondation « Toupourmoa » a réalisé une étude sur l'âge (variable y) de 400 de ses adhérents et sur le montant (en euros) des dons qu'ils effectuent (variable x).

L'enquête a révélé que : 10 % des adhérents ont moins de 35 ans.

15 % des adhérents ont 75 ans et plus.

À l'aide de ces renseignements, compléter le tableau puis répondre aux questions posées.

Âge (y)	[15 ; 35]	[35 ; 55]	[55 ; 75]	[75 ; 95]	Total
Don (x)					
[0 ; 100[	24		18	26	88
[100 ; 300[	12		80	14	168
[300 ; 500[		28			122
[500 ; 1 000[	0		9		
Total		120			400

- Quel est le pourcentage de dons de moins de 100 € ?
- Quel est le pourcentage de dons de moins de 100 € chez les adhérents de moins de 35 ans ?
- Quel est le pourcentage de dons de moins de 300 € chez les adhérents de 55 ans et plus ?
- Quel est le pourcentage de dons de 500 € et plus chez les adhérents de moins de 55 ans ?
- Quel est l'âge moyen $\bar{y}$ des adhérents ?
- Dans cette question on s'intéresse uniquement au **montant des dons** et on construit le tableau suivant (à compléter) :

Montant du don	Effectifs n_i	Centres x_i	Effectifs cumulés
[0 ; 100[	88		
[100 ; 300[	168		
[300 ; 500[	122	400	
[500 ; 1000[			

- Tracer le polygone des effectifs cumulés (croissants).
- En déduire, par lecture graphique, des valeurs approchées (arrondies à la dizaine d'euros) de Me , Q_1 , Q_3 , D_1 et D_9 .

- c) Tracer le diagramme en boîte associé à cette série.
- d) Calculer $\bar{x}$ et $\sigma(x)$ (arrondis à la dizaine d'euros).
- e) On décide qu'un don « normal » devrait se situer dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$.

Déterminer cet intervalle puis compléter la phrase du trésorier de la fondation :

« D'après l'étude que nous avons menée, la moitié de nos adhérents donne moins de €, un quart donne moins de € et il y en a même 10 % qui donnent moins de € alors qu'un don normal devrait se situer entre € et €. »

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

1) On peut utiliser une calculatrice. Par exemple sur une TI, après avoir entré les 31 valeurs dans la liste L_1 , on va dans le menu 2nd List puis SortA(L_1) range les valeurs par ordre croissant.

On obtient :

810, 840, 880, 960, 960, 990, 1 020, 1 040, 1 100, 1 100, 1 100, 1 130, 1 140, 1 150, 1 160, 1 240, 1 280, 1 280, 1 310, 1 310, 1 360, 1 370, 1 400, 1 450, 1 460, 1 560, 1 620, 1 640, 1 710, 1 860, 2 050.

2) La médiane est le 16^e salaire de la liste ordonnée donc : $Me = 1\,240$.

$31 \times 0,25 = 7,75$ donc Q_1 est le 8^e salaire : $Q_1 = 1\,040$.

$31 \times 0,75 = 23,25$ donc Q_3 est le 24^e salaire : $Q_3 = 1\,450$.

On pourra vérifier que ces valeurs sont données (en général) par les calculatrices.

3) L'intervalle interquartile est donc $[1\,040 ; 1\,450]$.

En théorie il contient 50 % de l'effectif total. Ici il contient 17 employés sur les 31 soit environ 55 %.

4) Une calculatrice donne : $\bar{x} = 1267,09...$ et $\sigma = 294,32...$

Donc en arrondissant à la dizaine d'euros : $\bar{x} = 1270$ et $\sigma = 290$.

5) L'intervalle est $[1\,270 - 2 \times 290 ; 1\,270 + 2 \times 290] = [690 ; 1\,850]$

On constate qu'il contient 29 employés sur 31 soit environ 94 %.

2) On détermine les centres des intervalles qui sont dans l'ordre :

2,5 ; 7,5 ; 15 ; 25 ; 37,5 ; 52,5.

On entre ces valeurs dans une liste (L_1) puis les effectifs dans une autre liste (L_2) et on obtient :

$\bar{x} = 27,15$ et $\sigma = 14,16...$ donc, arrondis à la minute, $\bar{x} = 27$ et $\sigma = 14$.

3) La durée « normale » d'un trajet devrait donc se situer dans l'intervalle $[13 ; 41]$.

5) Il y a deux inconnues à déterminer donc deux équations sont nécessaires. En notant que les effectifs sont donnés en pourcentage, on déduit que leur total doit être égal à 100 donc :

$$a + 16 + 18 + 20 + 16 + 12 + b = 100 \text{ d'où } a + b = 18.$$

D'autre part, la moyenne est 1 320 (soit 13,2 en centaines d'euros).

$$\text{Or, } \bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}$$

Les x_i étant les centres des intervalles, soit dans l'ordre 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 et 20, on obtient :

$$\frac{8a + 10 \times 16 + 12 \times 18 + 14 \times 20 + 16 \times 16 + 18 \times 12 + 20b}{100} = 13,2$$

D'où : $8a + 20b + 160 + 216 + 280 + 256 + 216 = 1\,320$ et donc :

$$8a + 20b = 192.$$

On remarque que cette équation est simplifiable par 4 ce qui donne :

$$2a + 5b = 48.$$

2) Pour résoudre le système
$$\begin{cases} a + b = 18 \\ 2a + 5b = 48 \end{cases}$$

on peut procéder par substitution.

De la première équation on tire : $b = 18 - a$ et en reportant cette valeur dans la seconde, on obtient :

$$2a + 5(18 - a) = 48 \text{ d'où } 2a - 5a = 48 - 90,$$

soit $-3a = -42$ et donc $a = 14$.

Alors : $b = 18 - 14$

d'où $b = 4$.

1) Promotion 2006 :

Me est la 17^e note de la liste ordonnée, donc Me = 11 (le troisième 11...)

$33 \times 0,25 = 8,25$ donc Q_1 est la 9^e note : $Q_1 = 9$

$33 \times 0,75 = 24,75$ donc Q_3 est la 25^e note : $Q_3 = 13$

Promotion 2007 : On trouve de même, Me = 12, $Q_1 = 11$ et $Q_3 = 13$

D'où les diagrammes en boîte :

Promotion 2007



Promotion 2006



0 5 10 15 20

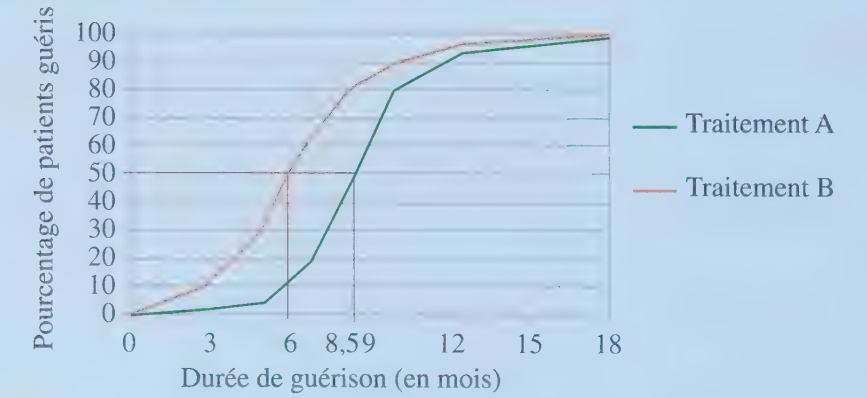
2) On peut donc constater que la promotion 2006 était moins homogène et globalement un peu plus faible que la promotion 2007.

5 Les centres des intervalles étant : 1,5 ; 4 ; 5,5 ; 6,5 ; 7,5 ; 8,5 ; 9,5 ; 11 et 15 on obtient :

Pour le traitement A : $\bar{x} = 8,665$ et $\sigma = 2,64\dots$ donc $\bar{x} \approx 8,7$ et $\sigma \approx 2,6$

Pour le traitement B : $\bar{x} = 6,28$ et $\sigma = 3,04\dots$ donc $\bar{x} \approx 6,3$ et $\sigma \approx 3$

Durée de guérison (en mois)	Fréquences (en %)		Fréquences cumulées croissantes (en %)	
	Traitement A	Traitement B	Traitement A	Traitement B
[0 ; 3[	2	12	2	12
[3 ; 5[	3	18	5	30
[5 ; 6[	6	21	11	51
[6 ; 7[	10	14	21	65
[7 ; 8[	18	12	39	77
[8 ; 9[	23	8	62	85
[9 ; 10[	18	5	80	90
[10 ; 12[	12	6	92	96
[12 ; 18[	8	4	100	100



On lit alors pour A, $Me \approx 8,5$ et pour B, $Me \approx 6$.

3) En comparant les moyennes on voit que (en moyenne !) on est guéri plus vite avec le traitement B mais les écarts-types montrent qu'il y a en contrepartie une plus grande variation des durées de guérison.

La comparaison des médianes permet d'affirmer (par exemple) qu'il faut deux mois et demi de plus avec le traitement A pour qu'au moins la moitié des malades soient guéris.

6 Partie A

1) On obtient :

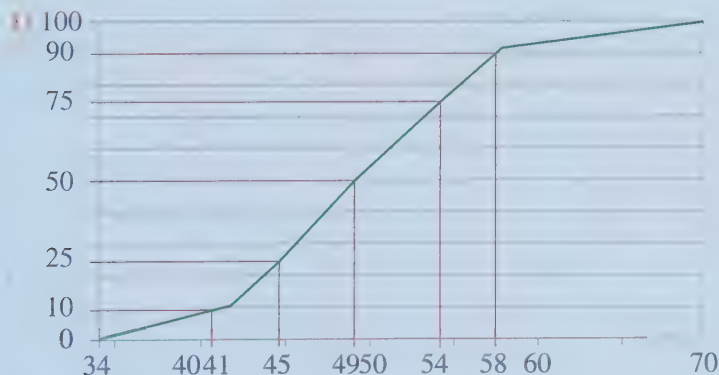
Prix	Centres des classes	Fréquences (en %)	Fréquences cumulées
[34 ; 42[	38	12	12
[42 ; 46[	44	20	32
[46 ; 50[	48	24	56
[50 ; 58[	54	36	92
[58 ; 70[	64	8	100
Total		100	

2) Une calculatrice donne :

$\bar{x} = 49,44\dots$ et $\sigma = 6,82\dots$ donc en valeurs arrondies, $\bar{x} = 49$ et $\sigma = 7$.

3) L'intervalle « normal » du prix est donc [42 ; 56].

Partie B



2) On lit (environ) $Me = 49$, $Q_1 = 45$, $Q_3 = 54$, $D_1 = 41$ et $D_9 = 58$.

1) « On a constaté que la moitié des boutiques vend l'article étudié moins de 49 €, et qu'un quart le vend moins de 45 €.

À l'opposé il y en a 10 % qui osent le proposer à plus de **58 €**, alors qu'un prix normal devrait se situer entre **42** et **56 €** !

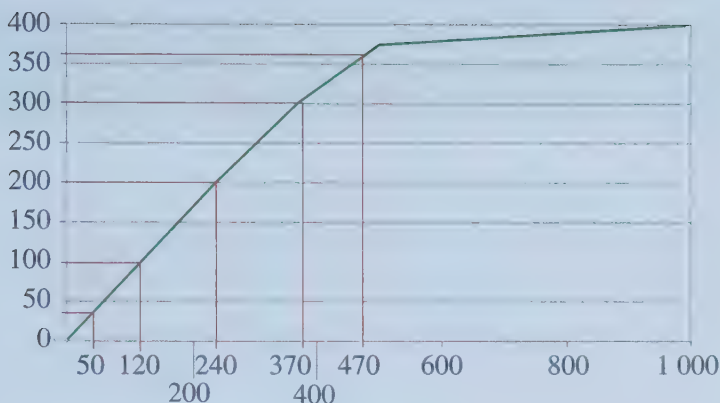
 10 % de 400, c'est 40, 15 % de 400, c'est 60 d'où le tableau complété :

Don (x)	Âge (y)	[15 ; 35[	[35 ; 55[	[55 ; 75[	[75 ; 95[	Total
[0 ; 100[		24	20	18	26	88
[100 ; 300[		12	62	80	14	168
[300 ; 500[		4	28	73	17	122
[500 ; 1 000[		0	10	9	3	22
Total		40	120	180	60	400

- 1) Il y a 88 dons de moins de 100 € sur 400, et $88/400 = 0,22$ donc **22 %**.
- 2) Les adhérents de moins de 35 ans sont 40 et parmi eux 24 donnent moins de 100 € soit **60 %**.
- 3) Les adhérents de 55 ans et plus sont $180 + 60 = 240$
et parmi eux $18 + 26 + 80 + 14 = 138$ donnent moins de 300 € soit **57,5 %**.
- 4) Les adhérents de moins de 55 ans sont $40 + 120 = 160$ et parmi eux 10 donnent 500 € et plus soit **6,25 %**.
- 5) Les centres des classes d'âge sont 25, 45, 65 et 85 et les effectifs correspondants 40, 120, 180 et 60 donc l'âge moyen est $\bar{y} = 58$ ans (obtenu par exemple avec une calculatrice).
- 6) On obtient :

Montant du don	Effectifs n_i	Centres x_i	Effectifs cumulés
[0 ; 100[	88	50	88
[100 ; 300[	168	200	256
[300 ; 500[	122	400	378
[500 ; 1 000[	22	750	400

 D'où le polygone des effectifs cumulés (on rappelle que les effectifs cumulés doivent être associés aux bornes supérieures des intervalles correspondants) :



b) On lit approximativement :

$Me = 240$, $Q_1 = 120$, $Q_3 = 370$, $D_1 = 50$ et $D_9 = 470$.

c) D'où le diagramme en boîte :



d) La calculatrice donne : $\bar{x} = 258,25$ et $\sigma(x) = 174,34$ donc :

$$\bar{x} \approx 260 \text{ et } \sigma(x) \approx 170.$$

e) L'intervalle « normal » est $[90 ; 430]$ d'où :

« ... la moitié de nos adhérents donne moins de **240 €** (la médiane), un quart donne moins de **120 €** (Q_1) et il y en a même 10 % qui donnent moins de **50 €** (D_1) alors qu'un don normal devrait se situer entre **90 €** et **430 €**. »

Testez-vous

A On donne la série de notes : 14, 16, 12, 9, 11, 18, 7, 8, 9, 16, 7, 9, 18, 6.

- Le pourcentage de notes en dessous de la moyenne est :
a) 50 % b) 40 % c) 60 % d) 30 %
- La médiane de cette série est :
a) 9 b) 9,5 c) 10 d) 11
- Le premier quartile est :
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10
- La moyenne arrondie à 10^{-1} est :
a) 10,5 b) 10,8 c) 11,1 d) 11,4
- L'écart-type arrondi à 10^{-2} est :
a) 3,96 b) 3,98 c) 4,06 d) 4,08

B Des étudiants de formation continue sont répartis selon leur âge dans le tableau suivant :

Âge	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	45 et plus
Effectif	38	59	47	24	12	2

- Si l'on veut que toutes les classes aient la même amplitude la limite de la dernière classe doit être :
a) 48 b) 50 c) 53 d) 55
- Le centre de la classe [35 ; 40[est :
a) 37 b) 37,5 c) 38 d) 38,5
- La proportion d'étudiants âgés de moins de 35 ans est environ :
a) 57 % b) 63 % c) 74 % d) 79 %
- Si l'on prend 47,5 comme centre de la dernière classe, alors la moyenne (arrondie à l'unité) est :
a) 30 b) 32 c) 34 d) 36
- Dans les mêmes conditions l'écart-type est :
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

Réponses : **A** 1. a) 2. c) 3. b) 4. d) 5. d) **B** 1. b) 2. b) 3. d) 4. a) 5. c)

Les séries statistiques à deux variables

Le cours

Exemple de tableau à double entrée et calculs de fréquences

Exemple 1 : Dans ce tableau est indiqué le nombre d'élèves entrés en BEP en France à la rentrée scolaire 2005 selon le sexe et le type de BEP (production ou services).

Formation suivie	Filles	Garçons	Total
BEP Production	7 896	71 141	79 037
BEP Services	71 975	32 235	104 210
Total	79 871	103 376	183 247

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, DEPP.

Définition : On définit la **fréquence** de A sachant B par :

$$f_B(A) = \frac{\text{Effectif de } A \cap B}{\text{Effectif de } B}.$$

On dit aussi fréquence de A parmi B . On donne souvent les fréquences en pourcentage (auquel cas, il faut penser à multiplier le résultat obtenu par 100).

Exemple 2 :

- **Fréquence des filles en BEP (ou pourcentage de filles en BEP) :**

$$\frac{\text{nombre de filles en BEP}}{\text{nombre total d'élèves en BEP}} = \frac{79\,871}{183\,247} \approx 0,4359 \approx 43,59 \, \%.$$

- **Fréquence des filles en BEP Production (ou pourcentage de filles en BEP Production) :**

$$\frac{\text{nombre de filles en BEP Production}}{\text{nombre total d'élèves en BEP Production}} = \frac{7\,896}{79\,037} \approx 0,0999 \approx 9,99 \, \%.$$

- **Fréquence des BEP Production parmi les filles :**

$$\frac{\text{nombre de filles en BEP Production}}{\text{nombre total de filles en BEP}} = \frac{7\,896}{79\,871} \approx 0,0989 \approx 9,89 \, \%.$$

Nuage de points – Point moyen – Ajustement affine

Dans ce paragraphe, on étudie simultanément deux caractères d'une population, prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $y_1, y_2, \dots, y_n$, dans le but de savoir s'ils sont liés ou non par une certaine relation. Si oui, on dit qu'ils présentent une corrélation.

- **Cas des séries chronologiques**

On étudie l'évolution d'un caractère au fil du temps ; le second caractère est donc le temps.

Exemple 3 : Nous utiliserons l'exemple suivant pour illustrer ce paragraphe.

	Consommation de tabac : x (en grammes, par personne de 15 ans et plus et par jour)	Prix du tabac : y (Indice base 100 en 1970)
2000	4,6	147,1
2001	4,6	152,1
2002	4,4	161,9
2003	3,9	181,3
2004	3,3	221,1
2005	3,2	218,4
2006	3,3	215,7

Insee ; Institut Gustave Roussy.

Définition : Dans le plan muni d'un repère, on appelle **nuage de points** de la série l'ensemble des points $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$... $M_n(x_n; y_n)$.

Définition : Le **point moyen** du nuage est le point $G(\bar{x}; \bar{y})$.

Exemple : Dans l'exemple 3,

$$\bar{x} = \frac{4,6 \times 2 + 4,4 + 3,9 + 3,3 \times 2 + 3,2}{7} = 3,9.$$

$$\text{et } \bar{y} = \frac{147,1 + 152,1 + 161,9 + 181,3 + 221,1 + 218,4 + 215,7}{7} \approx 185,4.$$

donc le point moyen du nuage est le point $G(3,9; 185,4)$.

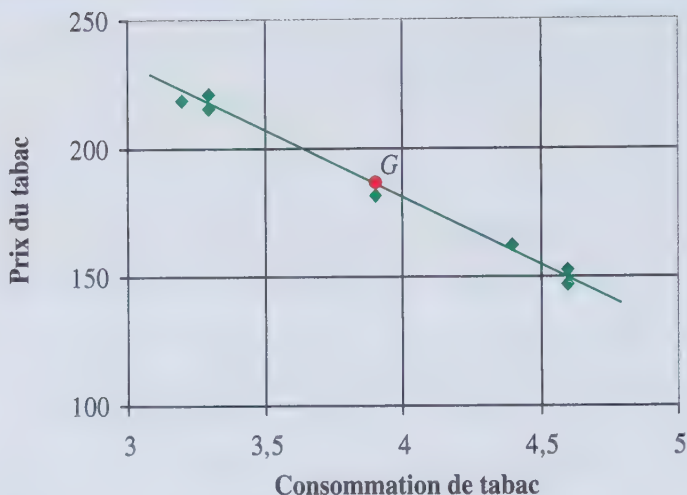
Remarque : On peut aussi obtenir les coordonnées du point moyen à la calculatrice (voir *Méthodes*, point 2).

Définition : Certains nuages laissent pressentir qu'il existe une relation entre les deux caractères. Quand les points sont sensiblement alignés, on peut construire une droite passant au plus près de ces points. On dit que cette droite réalise **un ajustement affine** du nuage de points.

On détermine cette droite soit graphiquement, soit à l'aide de la calculatrice par la **méthode des moindres carrés** (voir *Méthodes*, point 2). **La droite obtenue par la méthode des moindres carrés passe toujours par le point moyen du nuage.**

Exemple : Nous représentons en bleu le nuage de points associé à l'exemple 3. Nous avons placé en rouge le point moyen G . Les points ont l'air sensiblement alignés sur une droite.

On peut établir à la calculatrice que la droite des moindres carrés a pour équation : $y = -51x + 384$. Nous avons représenté cette droite en vert.



À retenir

Fréquence de A sachant B : $f_B(A) = \frac{\text{Effectif de } A \cap B}{\text{Effectif de } B}$

On dit aussi fréquence de A parmi B. On donne souvent les fréquences en pourcentage (auquel cas, il faut penser à multiplier le résultat obtenu par 100).

Nuage de points : Dans le plan muni d'un repère, on appelle nuage de points de la série l'ensemble des points :

$$M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n).$$

Point moyen : Le point moyen du nuage est le point $G(\bar{x}; \bar{y})$.

Ajustement affine : Certains nuages laissent pressentir qu'il existe une relation entre les deux caractères. Quand les points sont sensiblement alignés, on peut construire une droite passant au plus près de ces points. On dit que cette droite réalise un ajustement affine du nuage de points.

Les méthodes

1

Comment effectuer un ajustement affine d'un nuage de points ?

Si on connaît deux points de la droite

Énoncé

Au cours de six années consécutives, l'infirmière d'un lycée a relevé le nombre d'élèves fumeurs.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de fumeurs : y_i	115	133	150	167	180	200

Vérifier graphiquement que la droite passant par $M_1(1 ; 115)$ et $M_6(6 ; 200)$ réalise un bon ajustement affine du nuage de points M_i , de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

Déterminer une équation de la droite (M_1M_6) .

Corrigé commenté

On commence par représenter le nuage de points dans un repère orthogonal. Les unités seront généralement données dans l'énoncé.

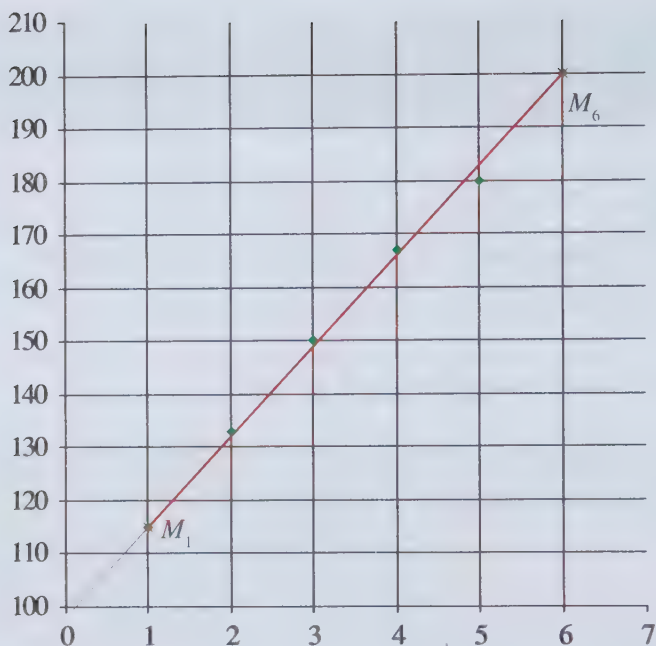
Par exemple ici on pourra prendre :

- sur l'axe des abscisses, 2 cm pour une année ;
- sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 10 fumeurs.

On commencera la graduation à 100 fumeurs.

Voir page suivante.

On constate que les points du nuage sont sensiblement alignés, la droite (M_1M_6) passe assez près des points du nuage, elle réalise donc un bon ajustement affine des points du nuage.



2: L'équation de la droite (M_1M_6) est de la forme $y = ax + b$ où a est le coefficient directeur de cette droite et b est l'ordonnée à l'origine.

Rappel : Si une droite passe par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

$$\text{alors } a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

$$\text{Alors ici } a = \frac{200 - 115}{6 - 1} = \frac{85}{5} = 17 \text{ d'où } y = 17x + b.$$

Or la droite (M_1M_6) passe par le point $M_1(1; 115)$ donc $115 = 17 \times 1 + b$ d'où $b = 115 - 17 = 98$.

L'équation de la droite (M_1M_6) est donc : $y = 17x + 98$.

● Si on connaît un point et le coefficient directeur de la droite

Exemple :

Le montant du PIB (Produit Intérieur Brut) par habitant de l'Union européenne, exprimé en milliers de dollars, des années 1994 à 1999 est donné par le tableau suivant :

Année	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
PIB par habitants : y_i	18,3	19,4	20	20,6	21,5	22,5

1) On considère le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ pour $1 \leq i \leq 6$.

Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

L'ordonnée de G sera arrondie au dixième.

2) On prend comme droite d'ajustement la droite D passant par G et de coefficient directeur 0,8.

Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points et tracer la droite D . Donner une équation de cette droite.

Corrigé commenté

1) Le point moyen du nuage est le point $G(\bar{x} ; \bar{y})$.

On calcule donc $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$.

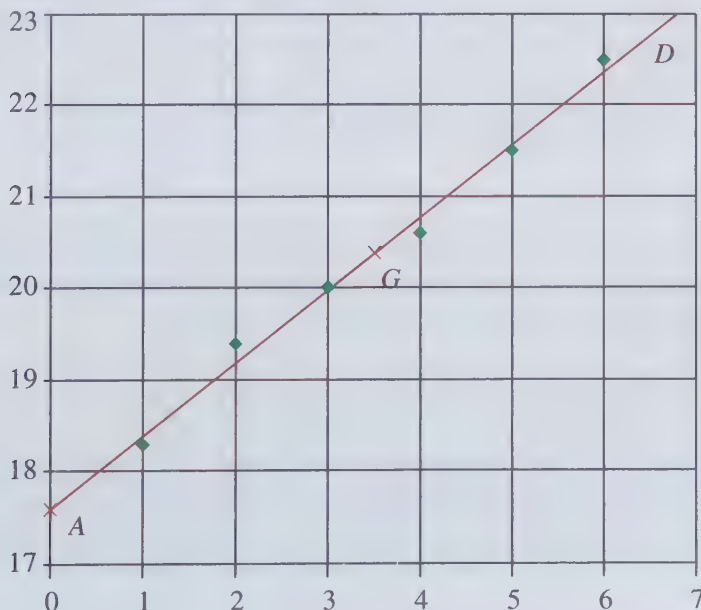
puis $\bar{y} = \frac{18,3+19,4+20+20,6+21,5+22,5}{6} \approx 20,4$.

Alors $G(3,5 ; 20,4)$.

2) On représente le nuage de points. On pourra ici prendre comme unités graphiques :

– axe des abscisses : 1 cm pour 1 année ;

– axe des ordonnées : 1 cm pour 1 millier de dollars en commençant la graduation à 17 milliers de dollars.



La droite D a une équation de la forme $y = 0,8x + b$, cette droite passe par le point $G(3,5 ; 20,4)$.

Alors, $20,4 = 0,8 \times 3,5 + b$ d'où $b = 20,4 - 0,8 \times 3,5 = 17,6$

La droite D passe donc par le point A de coordonnées $(0 ; 17,6)$ et par $G(3,5 ; 20,4)$. Son équation est donc $y = 0,8x + 17,6$.

● Si on connaît l'équation de la droite d'ajustement

Exercice

Le chiffre d'affaires d'une entreprise pharmaceutique, exprimé en millions d'euros, entre 2000 et 2005 est donné par le tableau suivant :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaires y_i	3,12	3,23	3,65	4,28	4,54	4,76

On prend la droite D d'équation : $y = 0,4x + 2,53$ comme droite d'ajustement du nuage des points $M_i(x_i ; y_i)$.

1) Montrer que le point moyen G du nuage appartient à cette droite.

2) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points et tracer la droite D .

Corrigé commenté

1) Le point moyen du nuage est le point $G(\bar{x} ; \bar{y})$.

On calcule $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$.

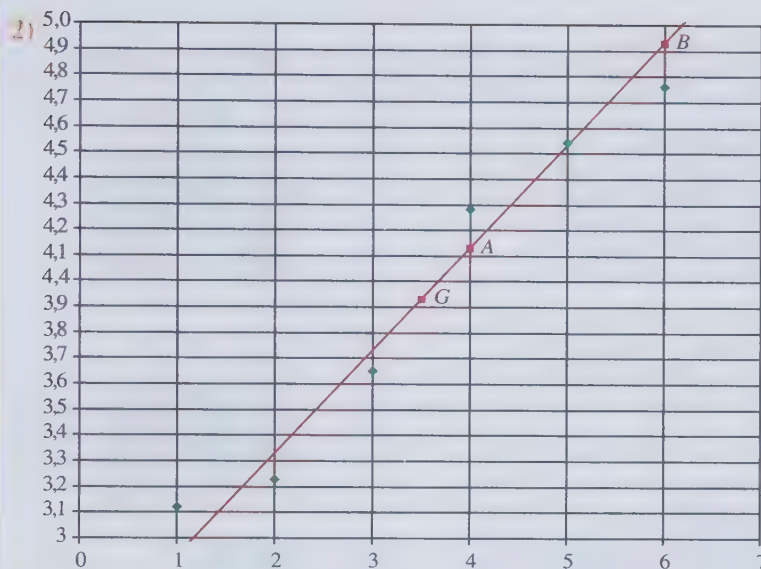
et $\bar{y} = \frac{3,12+3,23+3,65+4,28+4,54+4,76}{6} = 3,93$.

Alors $G(3,5 ; 3,93)$.

Remarque : On aurait pu utiliser la calculatrice en mode statistique et utiliser la fonction : 2 Var (voir méthode suivante).

Pour que G appartienne à la droite D , ses coordonnées doivent vérifier l'équation de la droite D .

Or $0,4 \times 3,5 + 2,53 = 3,93$ donc les coordonnées de G vérifient l'équation de D , il appartient donc à cette droite.



Pour tracer la droite D , nous connaissons déjà un point, le point G . Il reste à calculer les coordonnées de 1 ou 2 autres points de la droite.

Par exemple pour $x = 4$, $y = 0,4 \times 4 + 2,53 = 4,13$ donc la droite D passe par le point $A(4 ; 4,13)$.

De même pour $x = 6$, $y = 0,4 \times 6 + 2,53 = 4,93$ donc la droite D passe par le point $B(6 ; 4,93)$.

2

Comment réaliser un ajustement affine par la méthode des moindres carrés ?

Énoncé

Le tableau suivant donne la consommation moyenne d'eau minérale en litres par Français entre 1995 et 2004.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Consommation y_i (en litres)	117	115	122	134	142	149	152	150	168	169

Déterminer, à l'aide de la calculatrice, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite (D) d'ajustement affine de y en x sous la forme $y = ax + b$ où a et b seront arrondis à 0,1 près.

Corrigé commenté

Affichage sur CASIO

MENU **STAT**



Entrer les valeurs x_i dans LiSt 1
et les valeurs y_i dans LiSt 2.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	117		
2	1	115		
3	2	122		
4	3	134		
		117		

Taper **CALC** (F2)

puis **SET** ou **RANG** (F6)

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
8	7	150		
9	8	168		
10	9	169		
11				

1Var 2Var REG SET
1Var XList :List1
1Var Freq :1
2Var XList :List1
2Var YList :List2
2Var Freq :1

LIST

Taper **EXIT** **REG** (F3)

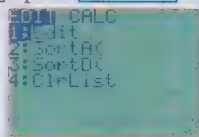
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	117		
2	1	115		
3	2	122		
4	3	134		
		117		

Taper **X** (F1)

LinearReg
a = 6.3030303
b = 113.436363
r = 0.97673122
r² = 0.95400388
MSa = 19.7530303
y = ax + b

Affichage sur TI

STAT puis **ENTER**

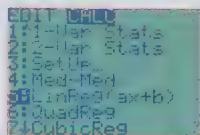


Entrer les valeurs x_i dans L1
et les valeurs y_i dans L2.

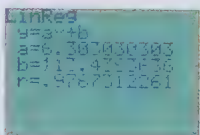
L1	L2	L3
0	117	
1	115	
2	122	
3	134	
4	117	
	117	

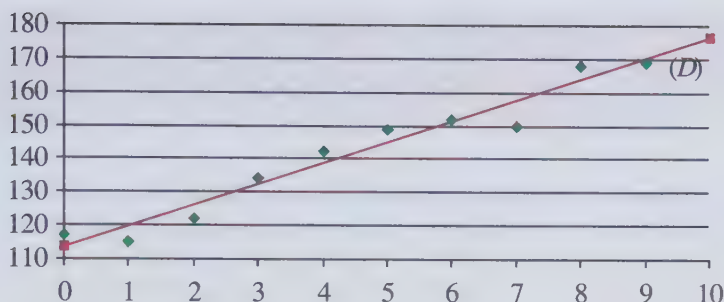
STAT **CALC**

LinReg(ax+b)



ENTER





La droite (D) a pour équation $y = 6,3x + 113,4$.

Pour le tracé de la droite on pourra se référer à la méthode 1.

Complément : Comment obtenir les coordonnées du point moyen du nuage ?

Affichage sur CASIO

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
8	7	150		
9	8	168		
10	9	169		
11				

GRAPH CALC TEST INTP DISTR D

Taper **CALC** (F2)

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
8	7	150		
9	8	168		
10	9	169		
11				

1VAR 2VAR REG SET

Choisir **2VAR**

2-Variable
$\bar{x} = 4,5$
$\Sigma x = 45$
$\Sigma x^2 = 285$
$\bar{y} = 2.87228132$
$\Sigma y = 28.7228132$
$\bar{y} = 3.02765035$
$n = 10$

Les coordonnées du point moyen sont données par $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

Pour obtenir $\bar{y}$, il suffit de descendre :

2-Variable
$\Sigma x = 45$
$\Sigma x^2 = 285$
$\bar{x} = 2.87228132$
$\Sigma y = 28.7228132$
$\bar{y} = 3.02765035$
$n = 10$
$\bar{y} = 141,8$

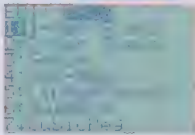
On lit G (4,5 ; 141,8)

Affichage sur TI

STAT puis **ENTER**

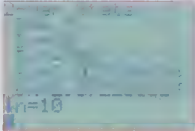


Taper **STAT** **CALC**



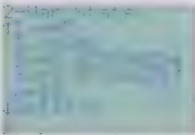
Choisir 2-Var Stats

Taper 2-Var Stats L1,L2



Les coordonnées du point moyen sont données par $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

Pour obtenir $\bar{y}$, il suffit de descendre :



On lit G (4,5 ; 141,8)

Les exercices

11 On a relevé dans le tableau ci-dessous le taux de cholestérol (en grammes par litre de sang) et l'âge (en années) d'un échantillon de 200 personnes.

Âge Taux	[20 , 30[	[30 , 40[	[40 , 50[	[50 , 60[	[60 , 70[	[70 , 80[	Total
[1,6 ; 1,8]	13	15	12	9	5	4	58
[1,8 ; 2,0]	4	13	11	9	7	5	49
[2,0 ; 2,2]	4	9	7	8	10	7	45
[2,2 ; 2,4]	0	3	5	5	8	9	30
[2,4 ; 2,6]	1	2	3	3	4	5	18
Total	22	42	38	34	34	30	200

Cet exercice est un QCM. Trouver la bonne réponse parmi les quatre propositions A, B, C, D.

1) Le nombre de personnes ayant moins de 50 ans est :	A. 80 B. 136 C. 102 D. 64
2) Le pourcentage de personnes d'au moins 60 ans est :	A. 32 % B. 15 % C. 64 % D. 17 %
3) Le nombre de personnes qui ont entre 40 et 60 ans et dont le taux de cholestérol est inférieur à 2 g/l est :	A. 72 B. 107 C. 31 D. 41
4) Le pourcentage de personnes ayant un taux de cholestérol inférieur à 2,2 g/l est :	A. 76 % B. 24 % C. 53,5 % D. 46,5 %
5) Le nombre de personnes qui ont au moins 50 ans et dont le taux de cholestérol est d'au moins 2,2 g/l est :	A. 14 B. 34 C. 48 D. 98

6) Le pourcentage de personnes ayant moins de 30 ans et un taux de cholestérol d'au moins 2 g/l est :

- A. 5 %
- B. 11 %
- C. 2,5 %
- D. 8,5 %

7) Le pourcentage de personnes de 60 ans et plus parmi les personnes ayant un taux de cholestérol d'au moins 2,4 g/l est :

- A. 4,5 %
- B. 32 %
- C. 50 %
- D. 9 %

8) Le pourcentage de personnes qui ont un taux de cholestérol inférieur à 2 g/l parmi les personnes de moins de 40 ans est environ :

- A. 22,5 %
- B. 70,3 %
- C. 47,2 %
- D. 29,6 %

X 3 L'évolution de la taille moyenne d'un enfant entre 6 et 30 mois est donnée par le tableau suivant :

Âge en mois : x_i	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Taille en cm : y_i	66	71	74	77	80	83	85	88	90

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal avec pour unités : 1 cm pour 2 mois en abscisse et 1 cm pour 2 cm en ordonnée en graduant à partir de 60.

2) On réalise un ajustement affine de ce nuage en prenant pour droite d'ajustement la droite Δ passant par les points extrêmes du nuage $M_1(6; 66)$ et $M_9(30; 90)$.

Déterminer une équation de Δ puis tracer Δ sur le graphique.

3) Quelle prévision peut-on faire pour la taille moyenne d'un enfant de 3 ans avec cet ajustement ?

X 1 Dans le service de soins d'un hôpital, on a lancé en 2002 un plan de lutte contre les maladies nosocomiales.

Les mesures prises ont été efficaces comme le montre le tableau ci-dessous où l'on a relevé pour six années consécutives le pourcentage y de malades ayant contracté une telle maladie.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	2	3	4	5	6	7
Pourcentage : y_i	14,3	13	12,6	10,8	10,6	8,6

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$.

2) Déterminer le point moyen G .

3) On réalise un ajustement affine de ce nuage avec la droite Δ passant par G et de coefficient directeur : $-1,1$.

Déterminer l'équation réduite de Δ puis tracer Δ sur le graphique.

4) L'objectif du directeur de l'hôpital est de ramener le pourcentage y en dessous de 5 %. Si l'évolution constatée se poursuit, en quelle année peut-il espérer atteindre ce but ? (On donnera une solution graphique et une autre par le calcul.)

 Le tableau suivant donne l'évolution du taux d'équipement des français en téléphone portable.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année : x_i	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Taux d'équipement : y_i	19,2	34,3	49,4	62	64	69	74	79,7

ARCEP, 2006.

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$.

2) Déterminer le point moyen G .

3) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation réduite $y = ax + b$ de la droite d'ajustement Δ obtenue par la méthode des moindres carrés (on arrondira a et b au dixième).

4) Tracer Δ sur le graphique.

5) Avec cet ajustement, en quelle année peut-on prévoir qu'au moins neuf français sur dix posséderont un téléphone portable ?

 Une réaction chimique permet d'obtenir un certain produit P .

Le pourcentage de produit P obtenu (rendement de la réaction) dépend de la température.

Lors d'essais en laboratoire on a pu constater les résultats suivants :

Température en $^{\circ}\text{C}$: x_i	4	8	12	16	20	28	36	48
Rendement en % : y_i	38,8	43,1	45,6	46,2	50,3	52,2	56,4	65,8

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal avec pour unités :

– 1 cm pour 4 $^{\circ}\text{C}$ en abscisse ;

– 1 cm pour 2 % en ordonnée en graduant à partir de 38 %.

2) Calculer les coordonnées du point moyen G et le placer.

3) On choisit comme droite d'ajustement la droite Δ passant par G et par le point $A(4; 40)$. Déterminer l'équation réduite de Δ .

4) Tracer Δ .

5) L'expérience devenant de plus en plus dangereuse quand la température augmente, on décide de choisir une température de 40 °C pour la production industrielle du produit P .

Quel est le rendement prévisible dans ces conditions ?

 Avec le développement des énergies renouvelables le coût de production de l'énergie éolienne ne cesse de baisser comme le montre le tableau ci-dessous (les prix sont en dollars par baril équivalent pétrole) :

Année	1998	2000	2002	2003	2006
Rang de l'année : x_i	- 2	0	2	3	6
Prix : y_i	96	90	73	63	54

OCDE, 2007.

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$.

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer sur le graphique.

3) À l'aide de la calculatrice déterminer une équation de la droite d'ajustement D obtenue par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients au dixième).

4) Tracer D sur le graphique.

5) Quelle prévision peut-on faire pour le coût de production d'un « baril » d'énergie éolienne en 2015 ? En 2020 ?

Ces prévisions vous paraissent-elles raisonnables ?

 On a relevé la dépense en électricité d'une entreprise (en k€) de 2000 à 2008.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépense : y_i	32,6	33,8	35,3	35,8	36,5	37,9	39,4	40,3	41,4

1) De combien la dépense a-t-elle augmenté en pourcentage entre 2000 et 2008 ?

2) Calculer la dépense moyenne sur cette période de 9 ans.

3) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$.

On prendra pour unités :

– 1 cm par année en abscisse ;

– 1 cm pour 1 k€ en ordonnée, en graduant à partir de 30 k€.

- 4) Placer le point moyen G , dont on précisera les coordonnées.
- 5) Tracer la droite (AB) où A et B sont les points extrêmes du nuage, c'est-à-dire $A(1 ; 32,6)$ et $B(9 ; 41,4)$, puis déterminer son équation réduite.
- 6) (AB) passe-t-elle par G ? (Justifier par le calcul.)
- 7) On admet que cette droite réalise un ajustement acceptable de la série.
Donner alors à l'aide du graphique l'estimation que l'on pouvait faire fin 2008 pour la dépense en 2010. (On fera apparaître les constructions utiles à cette lecture.)
- 8) Retrouver le résultat précédent par le calcul.
- 9) En réalité, la dépense en électricité a subi de 2008 à 2009 une hausse de 3,2 %, suivie, de 2009 à 2010, d'une hausse de 4,5 %. Quel a été le montant réel de la dépense en 2010 ?

10) Plusieurs pharmacies vendent le même article de parapharmacie à des prix différents.

Une enquête menée auprès de sept d'entre elles en vue d'établir une relation entre le prix de vente choisi (en euros) et le nombre d'articles vendus en un mois a donné les résultats suivants :

Prix de vente : x_i	19	22	24	27	28	32	34
Nombre d'articles vendus : y_i	40	32	32	26	20	15	9

- 1) Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés.
- 2) L'article est fourni aux pharmaciens par un seul grossiste au prix de 10 € l'unité.

À l'aide de la question 1) montrer que l'expression du bénéfice brut $B(x)$ réalisé en un mois par une pharmacie, en fonction de x (seulement), est :

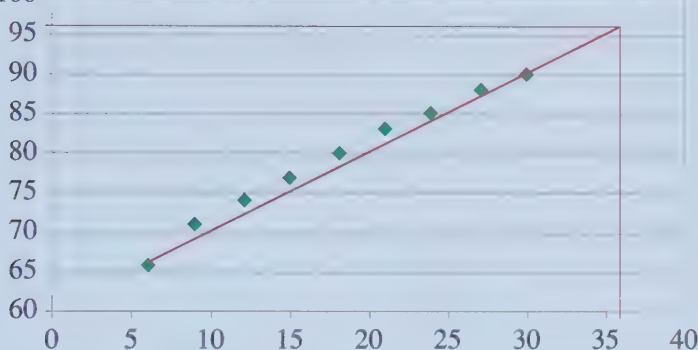
$$B(x) = -2x^2 + 98x - 780.$$

- 3) Étudier les variations de B en fonction de x sur l'intervalle $[10 ; 34]$, en déduire la valeur de x pour laquelle B est maximum et préciser ce maximum.

Corrigés

1) Réponses du QCM : 1) C, 2) A, 3) D, 4) A, 5) B, 6) C, 7) C, 8) B.

2) 1) 100



2) Soit $y = ax + b$ l'équation de Δ .

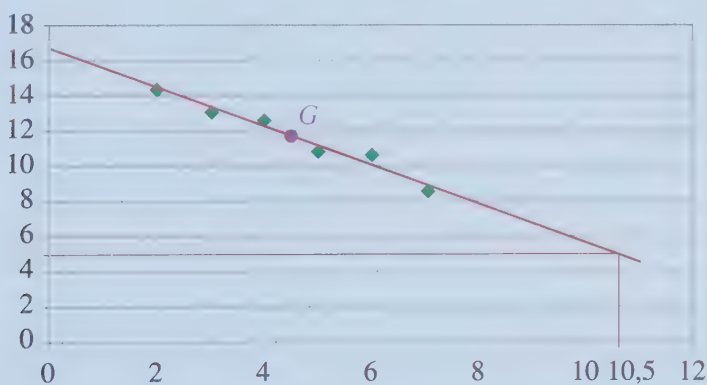
Le coefficient directeur de Δ est : $a = \frac{90 - 66}{30 - 6} = \frac{24}{24} = 1$ et $M_1(6 ; 66) \in \Delta$

donc $1 \times 6 + b = 66$ d'où $b = 60$. Δ a donc pour équation : $y = x + 60$.

3) 3 ans correspond à $x = 36$ et alors $y = 96$.

Donc on peut prévoir une taille moyenne de 96 cm pour un enfant de 3 ans.

3) 1)



2) $G(4,5 ; 11,65)$.

3) On connaît le coefficient directeur de Δ donc son équation est de la forme :

$$y = -1,1x + b.$$

De plus, elle passe par G on doit donc avoir : $y_G = -1,1x_G + b$ d'où :

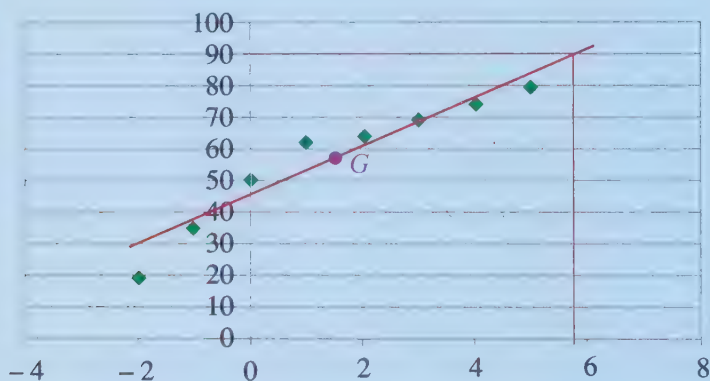
$$-1,1 \times 4,5 + b = 11,65. \text{ Donc } b = 11,65 + 4,95 \Leftrightarrow b = 16,6.$$

Δ a donc pour équation : $y = -1,1x + 16,6$.

Pour la tracer on utilise G et par exemple le point $A(1 ; 15,5)$ ou le point $B(6 ; 10)$ etc...

4) On veut : $y < 5 \Leftrightarrow -1,1x + 16,6 < 5 \Leftrightarrow -1,1x < -11,6 \Leftrightarrow x > 10,54...$

C'est donc en 2011 que le directeur peut espérer atteindre l'objectif qu'il s'est fixé.



2) $G(1,5 ; 56,45)$.

3) La calculatrice donne : $a = 8,128...$ et $b = 44,257...$

Donc, arrondis au dixième, $a = 8,1$ et $b = 44,3$.

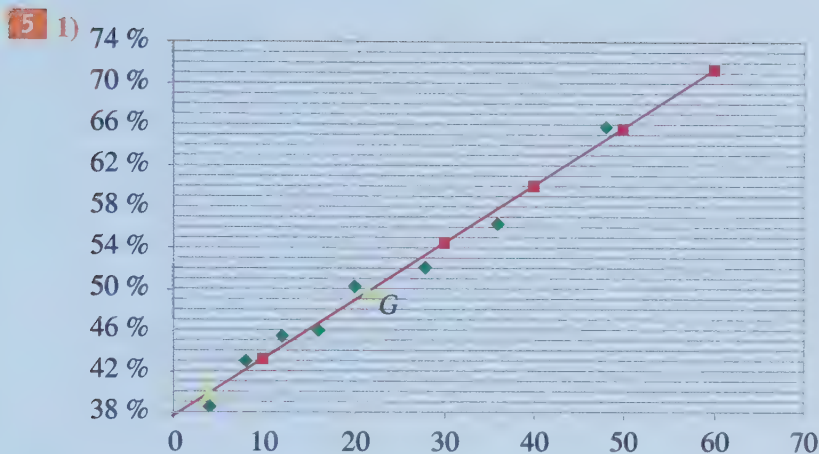
Δ a pour équation : $y = 8,1x + 44,3$.

4) Pour tracer Δ on peut utiliser par exemple les points $A(0 ; 44,3)$, $B(5 ; 84,8)$ et aussi le point G (car la droite obtenue par la méthode des moindres carrés passe toujours par G).

5) 9/10 correspond à 90 %, on cherche donc l'année à partir de laquelle on aura : $y \geq 90$.

$$\text{Or } y \geq 90 \Leftrightarrow 8,1x + 44,3 \geq 90 \Leftrightarrow 8,1x \geq 45,7 \Leftrightarrow x \geq 5,64...$$

C'est donc en 2006 qu'on peut prévoir un taux d'équipement d'au moins 90 %.



2) $G(21,5; 49,8)$.

3) Soit $y = ax + b$ l'équation réduite de Δ . Le coefficient directeur de Δ est

$$a = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A} \text{ donc } a = \frac{49,8 - 40}{21,5 - 4} = \frac{9,8}{17,5} = 0,56$$

De plus $A \in \Delta$ donc $y_A = 0,56x_A + b$, d'où l'on tire :

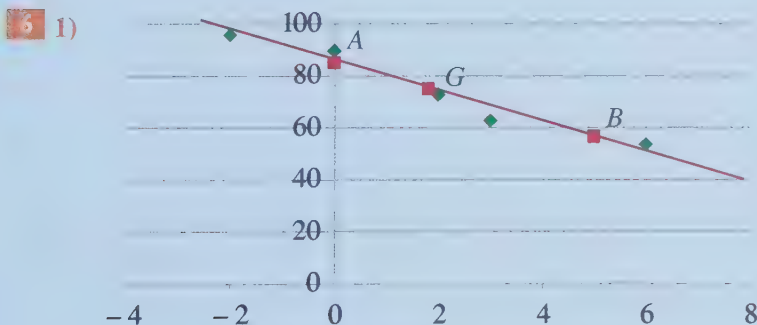
$$b = 40 - 0,56 \times 4 = 37,76.$$

Δ a donc pour équation : $y = 0,56x + 37,76$.

4) Pour tracer Δ , il suffit de placer les points A et G, mais on peut aussi utiliser d'autres points comme B(60 ; 71,36) ou C(50 ; 65,76), etc.

5) Pour $x = 40$ on obtient $y = 0,56 \times 40 + 37,76$ donc $y = 60,16$.

On peut donc prévoir un rendement d'environ 60,2 % lors de la production industrielle.



2) On obtient : $\bar{x} = 1,8$ et $\bar{y} = 75,2$.

La calculatrice donne : $a = -5,701\dots$ donc $a \approx -5,7$ et $b = 85,461\dots$ donc $b \approx 85,5$.

Une équation de D est : $y = -5,7x + 85,5$.

Pour tracer D on peut utiliser les points $A(0 ; 85,5)$ et $B(5 ; 57)$ par exemple, et constater que D passe par G .

2015 correspond à $x = 15$ et en reportant dans l'équation de D .

On obtient :

$$y = -5,7 \times 15 + 85,5 \text{ d'où } y = 0 !$$

De même pour $x = 20$ on obtient $y = -28,5$!

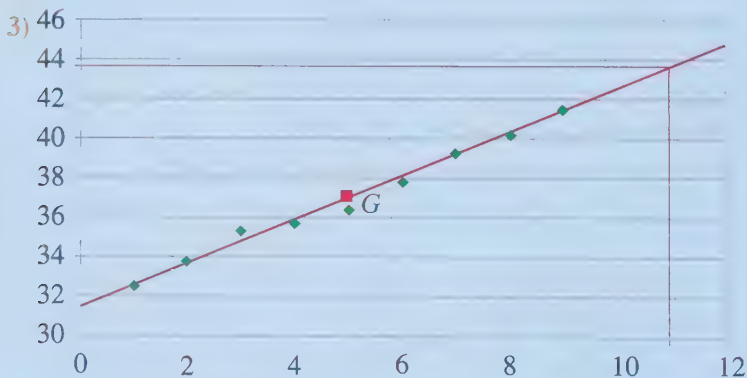
Ces prévisions de coût sont bien sûr aberrantes.

À ce propos, noter que dans ce genre d'exercices les valeurs prévisibles obtenues n'ont en général de sens qu'à court terme et encore si elles ne sont pas contredites par des événements imprévus.

En bref, il faut toujours relativiser...

 $\frac{41,4 - 32,6}{32,6} \approx 0,27$ donc une augmentation d'environ 27 %.

2) $\bar{y} = 37$ donc la dépense moyenne a été de 37 000 €.



4) $G(5 ; 37)$.

Soit $y = ax + b$ l'équation réduite de (AB) alors les coordonnées des points

A et B doivent vérifier cette équation, d'où le système :
$$\begin{cases} a + b = 32,6 \\ 9a + b = 41,4 \end{cases}$$

Par différence, on obtient : $8a = 8,8$ d'où $a = 1,1$ puis $b = 32,6 - 1,1$ donc $b = 31,5$. (AB) a donc pour équation : $y = 1,1x + 31,5$.

On aurait pu utiliser la méthode donnée p. 64.

$G \in (AB)$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de (AB).

Or $1,1x_G + 31,5 = 5,5 + 31,5 = 37 = y_G$.

(AB) passe donc bien par G.

2010 correspond à $x = 11$ et on lit alors (voir graphique) $y \approx 43,5$.

On pouvait donc prévoir fin 2008 une dépense d'environ 43 500 € pour 2010.

En remplaçant x par 11 dans l'équation de (AB), on obtient :

$y = 1,1 \times 11 + 31,5 = 43,6$ ce qui confirme la lecture graphique.

$41,4 \times 1,032 \approx 42,72$ et $42,72 \times 1,045 \approx 44,64$. La dépense réelle en 2010 a donc été supérieure aux prévisions.

1) La calculatrice donne $a = -2$ et $b = 78$.

L'équation est donc : $y = -2x + 78$.

x étant le prix de vente et 10 le prix d'achat, le bénéfice réalisé sur un article est donc $(x - 10)$.

Le nombre d'articles vendus en un mois est y donc le bénéfice mensuel d'une pharmacie est :

$B(x) = y(x - 10)$ or, d'après la question 1), on peut remplacer y par $-2x + 78$ d'où :

$B(x) = (-2x + 78)(x - 10)$ d'où en développant : $B(x) = -2x^2 + 98x - 780$.

Pour étudier les variations de B calculons sa dérivée : $B'(x) = -4x + 98$ Elle s'annule pour $x = 24,5$ d'où le tableau de variation :

x	10	24,5	34	
$B'(x)$		+	0	-
$B(x)$	0	420,5	240	

On constate donc que c'est en choisissant un prix de vente de 24,50 € que le bénéfice maximum de 420,50 € est atteint.

Testez-vous

De 2003 à 2007, un laboratoire pharmaceutique a établi la statistique de la production annuelle P d'un médicament qu'il commercialise.

Les années sont numérotées de 0 à 4 (variable x).

On a choisi la base 100 en 2003 pour établir les indices de production (variable y).

Année	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x	0	1	2	3	4
Production P	17 550	19 305	...	19 656	21 060
Indice : y	100	110	108	112	...

Pour chacune des affirmations suivantes, trouver la réponse exacte parmi les trois réponses proposées.

1 La production en 2005 a été de :

- a) 19 206 b) 18 954 c) 9 104

2 L'indice de 2007 a été :

- a) 116 b) 118 c) 120

3 Entre 2003 et 2006 la production a augmenté de :

- a) 12 % b) 15 % c) 18 %

4 La production moyenne pour les années 2003 à 2007 a été de :

- a) 19 305 b) 19 410 c) 19 540

5 L'écart-type de la série des indices arrondis à 10^{-2} est :

- a) 6,45 b) 5,72 c) 8,46

6 Le point moyen du nuage représentant la série est :

- a) $G(2,5 ; 110)$ b) $G(2 ; 112)$ c) $G(2 ; 110)$

7 L'équation de la droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés est :

- a) $y = 4,5x + 102$ b) $y = 4,2x + 101,6$ c) $y = 3,9x + 98$

8 Si la tendance se poursuit, la production prévisible en 2010 sera de :

- a) 22 990,50 b) 25 201,80 c) 23 105,20

Réponses : **1** b) ; **2** c) ; **3** a) ; **4** a) ; **5** a) ; **6** c) ; **7** b) ; **8** a).

Les probabilités

Le cours

Vocabulaire

• On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont les résultats dépendent du hasard.

Exemple : lancer un dé à six faces.

• On appelle **univers**, et on note en général Ω , l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

• Un **événement** est une partie de l'univers, c'est-à-dire un groupe de résultats.

Exemple : « Obtenir un nombre pair » est un événement. Pour l'écrire symboliquement, on le désigne par une lettre, par exemple E , et on peut écrire $E = \{2 ; 4 ; 6\}$.

• Un **événement élémentaire** est un événement qui ne contient qu'un élément.

Exemple : l'événement « obtenir un nombre pair » est la réunion de trois événements élémentaires : « obtenir un 2 », « obtenir un 4 » et « obtenir un 6 ».

• On dit qu'un événement est l'**événement contraire** de A , et on le note $\bar{A}$, s'il contient tous les éléments de l'univers n'appartenant pas à A .

Exemple : l'événement contraire de E est l'événement $\bar{E} = \{1 ; 3 ; 5\}$, c'est-à-dire « obtenir un nombre impair ».

- On appelle **intersection** de deux événements A et B , et on note $A \cap B$, l'ensemble des résultats appartenant à la fois à A et à B (un résultat doit appartenir aux deux événements A et B pour être dans leur intersection).
- On appelle **réunion** de deux événements A et B , et on note $A \cup B$, l'ensemble des résultats appartenant à A ou à B (il suffit qu'un résultat appartienne à un des deux événements A ou B pour être dans leur réunion).
- Deux événements sont **incompatibles** ou **disjoints** si leur intersection est vide, c'est-à-dire si aucun résultat n'appartient aux deux événements.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. C'est l'**expérience aléatoire**. On considère les événements A : « la carte tirée est un as » et B : « la carte tirée est un pique ».

On peut noter ces événements comme suit :

$$A = \{AP ; AC ; AK ; AT\}$$

(« AK » signifie « la carte tirée est l'as de carreau »)

$$B = \{7P ; 8P ; 9P ; 10P ; VP ; DP ; RP ; AP\}$$

$$A \cup B = \{AP ; AC ; AK ; AT ; 7P ; 8P ; 9P ; 10P ; VP ; DP ; RP\}$$

En français, l'événement $A \cup B$ est : « la carte tirée est un as ou un pique ».

On remarque que pour savoir combien il y a de résultats dans $A \cup B$, on ajoute ceux de A (les as) et ceux de B (les piques), mais on enlève l'as de pique qu'on a compté en double.

$$A \cap B = \{AP\}$$

En français, l'événement $A \cap B$ est : « la carte tirée est un as et un pique », ou plus simplement « la carte tirée est l'as de pique ».

Les événements A et B ne sont pas incompatibles puisque leur intersection $A \cap B$ n'est pas vide (as de pique), mais par exemple, les événements « la carte tirée est un trèfle » et « la carte tirée est un pique » sont incompatibles.



Les probabilités

Définition : On effectue une expérience N fois. Un événement se réalise n fois. La **fréquence** de cet événement est $\frac{n}{N}$. La fréquence est un nombre compris entre 0 et 1.

Exemple : On lance une pièce de monnaie 10 fois. On obtient 7 piles, 3 faces. Fréquence de pile : $\frac{7}{10} = 0,7$.

On lance la pièce 100 fois. On obtient 41 piles, 59 faces.

Fréquence de pile : $\frac{41}{100} = 0,41$.

On lance la pièce 1 000 fois. On obtient 485 piles, 515 faces.

Fréquence de piles : $\frac{485}{1\,000} = 0,485$.

Quand on lance la pièce un très grand nombre de fois, la fréquence des piles est relativement proche de 0,5 (et plus le nombre de lancers est élevé, plus le résultat est stable). On dit que la probabilité de l'événement « Obtenir pile » est 0,5 ou $1/2$: on a une chance sur deux d'obtenir pile.

Définition : La probabilité d'un événement A est un nombre, noté $p(A)$, compris entre 0 et 1.

Propriétés : La somme des probabilités de tous les résultats possibles est égale à 1 : $p(\Omega) = 1$ (Ω représente l'univers, l'ensemble des résultats possibles).

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**. Dans ce cas, dans un univers comportant n éléments, la probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$ et

la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{n}$$

ou
$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple : On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Il y a **équiprobabilité**.

Probabilité d'obtenir le roi de cœur : $\frac{1}{32}$.

Probabilité d'obtenir un roi : $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Probabilité d'obtenir un cœur : $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Propriétés :

- Si A et B sont deux événements **quelconques** :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

- Si A et B sont deux événements **incompatibles** (disjoints), alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Cette propriété se généralise à plus de deux événements.

- On en déduit que :

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1 \text{ ou } p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Exemple :

1. A et B sont deux événements tels que :

$$p(A) = 0,7, p(B) = 0,5 \text{ et } p(A \cap B) = 0,3.$$

Alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$= 0,7 + 0,5 - 0,3$$

$$p(A \cup B) = 0,9$$

2. Dans un club de sports, 60 % des adhérents sont mineurs, 25 % des adhérents ont entre 18 et 30 ans. On choisit un adhérent au hasard. On considère qu'il y a équiprobabilité. On définit les événements :

A : « l'adhérent choisi est mineur. » $p(A) = 60 \% = 0,60$

B : « l'adhérent choisi a entre 18 et 30 ans. » $p(B) = 25 \% = 0,25$

C : « l'adhérent choisi a 30 ans ou moins. »

D : « l'adhérent choisi a plus de 30 ans. »

On cherche les probabilités des événements C et D .

L'ensemble des adhérents de 30 ans ou moins est la réunion des adhérents mineurs et des adhérents de 18 à 30 ans donc $C = A \cup B$.

Les événements A et B sont incompatibles (aucun adhérent ne peut être mineur et avoir plus de 18 ans !),

donc $p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0,60 + 0,25 = 0,85$.

L'événement D est l'événement contraire de C : $D = \bar{C}$.

Donc $p(D) = p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - 0,85 = 0,15$.



Les probabilités conditionnelles

Définition : A et B étant deux événements tels que $p(B) \neq 0$, on définit la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant B réalisé,

noté $p_B(A)$, par $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

On a donc $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$.

Définition : Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

On dit que les événements A et B sont **indépendants** si :

$$p_B(A) = p(A) \text{ ou } p_A(B) = p(B).$$

Propriété : A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Les exercices sur les probabilités conditionnelles se traitent à l'aide d'arbres (voir *Méthodes*, point 4) ou de tableaux (*Méthodes*, point 5).

Exemple :

Une urne contient 10 boules : 6 blanches, 4 noires. On tire deux boules successivement. On définit les événements :

B_1 : « on obtient une boule blanche au premier tirage »

B_2 : « on obtient une boule blanche au deuxième tirage »

N_1 : « on obtient une boule noire au premier tirage »

N_2 : « on obtient une boule noire au deuxième tirage »

• Premier cas de figure

On effectue des tirages avec remise (on tire une boule, on la remet et on retire une boule).

Alors : $p(B_1) = p(B_2) = \frac{\text{Nombre de boules blanches}}{\text{Nombre total de boules}} = \frac{6}{10} = 0,6$.

Le résultat du deuxième tirage ne dépend pas du résultat du premier tirage : les deux tirages sont indépendants.

On en déduit que la probabilité de tirer deux boules blanches est :

$$p(B1 \cap B2) = p(B1) \times p(B2) = 0,6 \times 0,6 = 0,36.$$

Ici, il ne s'agit pas de probabilités conditionnelles.

• Deuxième cas de figure

On effectue des tirages sans remise (on tire une boule, puis une autre sans avoir remis la première). On a toujours $p(B_1) = \frac{6}{10}$ mais $p(B_2)$ est beaucoup moins évident.

En effet, les événements B_1 et B_2 ne sont plus indépendants :

– si on a tiré une boule blanche au premier tirage (c'est-à-dire si B_1 est réalisé), il n'y a plus que 5 boules blanches dans l'urne, sur 9 boules en tout, et donc la probabilité de tirer une boule blanche au second tirage sachant qu'on a tiré une boule blanche au premier est : $p_{B_1}(B_2) = \frac{5}{9}$.

– si on a tiré une boule noire au premier tirage (c'est-à-dire si B_1 n'est pas réalisé), il y a 6 toujours boules blanches dans l'urne, sur 9 boules en tout, et donc la probabilité de tirer une boule blanche au second tirage sachant qu'on a tiré une boule noire au premier est : $P_{N_1}(B_2) = \frac{6}{9}$.

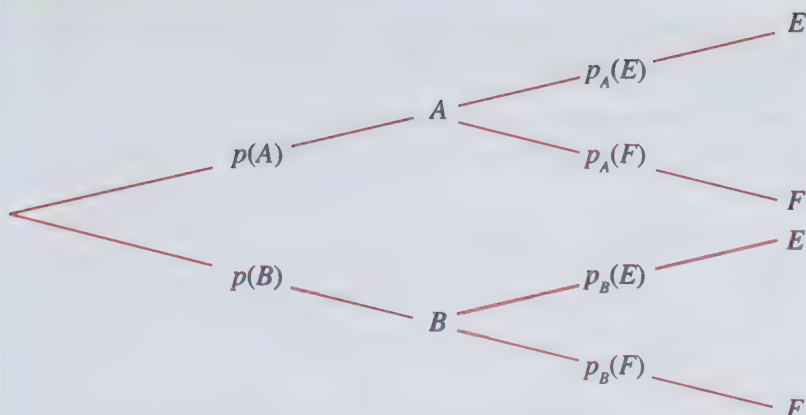
La probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage varie selon le résultat du premier tirage. Les événements B_1 et B_2 ne sont donc pas indépendants. Il s'agit de probabilités conditionnelles.

L'utilisation d'un arbre

Pour simplifier ce genre de situation, on utilise un arbre.

Étant donné deux expériences, l'une ayant deux résultats possibles A et B , l'autre ayant deux résultats possibles E et F , on peut tracer l'arbre ci-contre.

Définition : Chaque segment est appelé une **branche**, un **nœud** est la jonction de plusieurs branches, un **chemin** est l'événement réalisé en suivant des branches successives.



Sur cet arbre, chaque expérience a deux résultats possibles. S'il y a plus de deux résultats possibles, on rajoute des branches (voir exercices).

• **Somme des probabilités des branches issues d'un même nœud**

Les branches partant d'un nœud représentent tous les résultats possibles, donc la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 :

$$p(A) + p(B) = 1 ; p_A(E) + p_A(F) = 1 ; p_B(E) + p_B(F) = 1.$$

• **Probabilité d'un chemin**

Lorsqu'on calcule la probabilité de deux événements successifs, cela se traduit par une multiplication. Ainsi, la probabilité d'un chemin est produit des probabilités portées sur ses branches. En effet :

$$\begin{aligned} p(A \cap E) &= p(A) \times p_A(E) & p(A \cap F) &= p(A) \times p_A(F) \\ p(B \cap E) &= p(B) \times p_B(E) & p(B \cap F) &= p(B) \times p_B(F) \end{aligned}$$

• **Formule des probabilités totales**

Pour calculer la probabilité d'un événement, on ajoute les probabilités des chemins qui y aboutissent. En effet, dans un arbre, tous les chemins constituent des événements incompatibles.

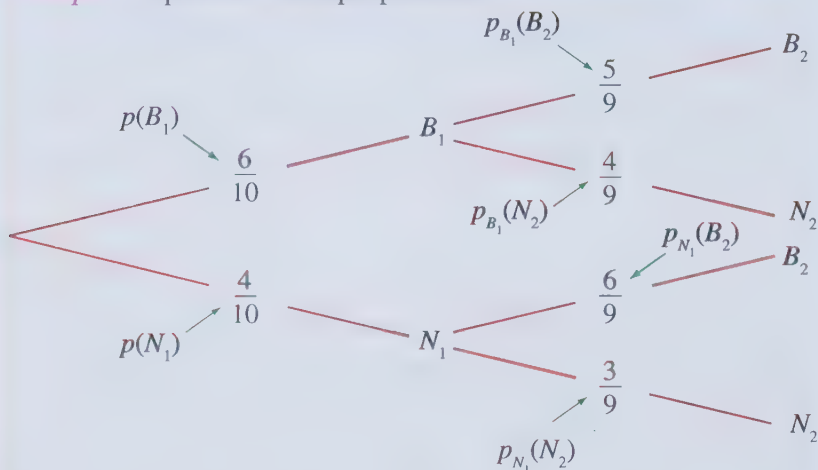
$$\begin{aligned} p(E) &= p(A \cap E) + p(B \cap E) = p(A) \times p_A(E) + p(B) \times p_B(E). \\ p(F) &= p(A \cap F) + p(B \cap F) = p(A) \times p_A(F) + p(B) \times p_B(F). \end{aligned}$$

Principes de l'arbre : En résumé, on retiendra :

- la somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées sur ses branches ;

– la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent (formule des probabilités totales).

Exemple : Reprenons l'exemple précédent.



1 La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1. Cela permet d'obtenir les résultats suivants :

À partir de $p(B_1) = \frac{6}{10}$, comme $p(B_1) + p(N_1) = 1$, on obtient :

$$p(N_1) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}.$$

De même, $p_{B_1}(B_2) = \frac{5}{9}$ donne $p_{B_1}(N_2) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

et $p_{N_1}(B_2) = \frac{6}{9}$ donne $p_{N_1}(N_2) = 1 - \frac{6}{9} = \frac{3}{9}$.

2 La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées sur ses branches. Ainsi, pour calculer la probabilité de tirer deux boules blanches, on multiplie la probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage par la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage (sachant que la première était blanche). On a donc :

– Probabilité de tirer deux boules blanches :

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

– Probabilité de tirer deux boules noires :

$$p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \times p_{N_1}(N_2) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}.$$

3) D'après la formule des probabilités totales, pour calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage, on va additionner les probabilités des deux cas suivants :

1) on obtient une blanche puis une blanche (noté $B_1 \cap B_2$) ;

2) on obtient une noire puis une blanche (noté $N_1 \cap B_2$).

Donc la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage est :

$$p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(B_2)$$

$$p(B_2) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Exemple de tableau à double entrée

Une enquête a été menée sur le mode de vie de 700 femmes de plus de 40 ans, toutes atteintes d'un cancer lié au tabac. On a résumé les résultats dans le tableau suivant :

	Femmes n'ayant jamais fumé	Fumeuses ou anciennes fumeuses	Total
Femmes consommant beaucoup de bêta-carotène	7	35	42
Femmes consommant peu de bêta-carotène	322	336	658
Total	329	371	700

On choisit au hasard une femme parmi celles qui ont développé un cancer lié au tabac. On note A l'événement : « la femme choisie consomme beaucoup d'aliments riches en bêta-carotène » et B l'événement : « la femme choisie est une fumeuse ou une ancienne fumeuse ».

$$\begin{aligned} p(B) &= \frac{\text{Nombre de fumeuses ou anciennes fumeuses}}{\text{Nombre total de femmes}} \\ &= \frac{371}{700} = 0,53. \end{aligned}$$

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de femmes consommant beaucoup de } \beta\text{-carotène}}{\text{Nombre total de femmes}}$$

$$= \frac{42}{700} = 0,06.$$

• L'événement $A \cap B$ est « la femme choisie consomme beaucoup d'aliments riches en β -carotène et est une fumeuse ou ancienne fumeuse ».

On lit dans le tableau que 35 femmes consomment beaucoup d'aliments riches en β -carotène et sont fumeuses ou anciennes fumeuses, et il y a 700 femmes au total, donc :

$$p(A \cap B) = \frac{35}{700} = 0,05.$$

• L'événement $A \cup B$ est « la femme choisie consomme beaucoup d'aliments riches en β -carotène ou est une fumeuse ou ancienne fumeuse ».

Il faut ajouter les 42 femmes qui consomment beaucoup d'aliments riches en β -carotène et les 371 fumeuses, mais on doit alors retrancher les 35 femmes qui sont dans les deux catégories et qu'on a comptées en double :

$$p(A \cup B) = \frac{371 + 42 - 35}{700} = 0,54.$$

Plus simplement, on peut utiliser la formule :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,06 + 0,53 - 0,05 = 0,54.$$

• $p_B(A)$ est la probabilité que la femme choisie consomme beaucoup d'aliments riche en β -carotène **sachant qu'elle est fumeuse ou ancienne fumeuse**.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,05}{0,53} \approx 0,094.$$

On peut aussi calculer $p_B(A)$ directement à partir du tableau :

$$p_B(A) = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Nombre de femmes consommant beaucoup} \\ \text{de } \beta\text{-carotène parmi les fumeuses} \end{array} \right)}{\text{Nombre de fumeuses (ou anciennes fumeuses)}}$$

$$= \frac{35}{371} \approx 0,094.$$

À retenir

- La probabilité d'un événement A , notée $p(A)$, est comprise entre 0 et 1. La somme des probabilités de tous les résultats possibles est égale à 1 :

$$p(\Omega) = 1.$$

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**. Dans ce cas, dans un univers comportant n éléments,

la probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$ et la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{n}$$

ou
$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Si A et B sont deux événements quelconques :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Si A et B sont deux événements incompatibles (disjoints), alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Cette propriété se généralise à plus de deux événements.

On en déduit que : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ ou $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

• Les probabilités conditionnelles

A et B étant deux événements tels que $p(B) \neq 0$, on définit la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant B réalisé, noté $p_B(A)$, par :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}. \text{ On a donc } p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A).$$

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

On dit que les événements A et B sont **indépendants** si :

$$p_B(A) = p(A) \text{ ou } p_A(B) = p(B).$$

A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

• Les principes de l'arbre

– La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

– La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées sur ses branches.

– La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent (formule des probabilités totales).

Les méthodes

1

Comment compléter un tableau à double entrée ?

Énoncé

Dans une entreprise pharmaceutique de dimension européenne, une étude statistique a montré que sur 10 000 clients de la communauté européenne, 82 % sont français.

On sait aussi que 4 % des clients français et 10 % des clients étrangers ont eu un incident de paiement dans l'année.

Compléter le tableau suivant où les pourcentages ci-dessus sont respectés.

	Nombre de clients français	Nombre de clients étrangers	Total
Nombre de clients ayant eu un incident de paiement	3	5	6
Nombre de clients n'ayant pas eu d'incident de paiement	9	8	7
Total	2	4	1

10 000

Corrigé commenté

Première étape : On commence par vérifier la cohérence du texte de l'énoncé avec les renseignements portés dans le tableau.

Ici la case 1 nous renseigne sur le nombre de clients.

Deuxième étape : On complète les autres cases en utilisant tous les renseignements de l'énoncé.

a) 82 % des clients sont des français : $\frac{82}{100} \times 10\,000 = 8\,200$.

Nous pouvons donc remplir la case **2**.

b) 4 % des clients français ont eu un incident de paiement :

$\frac{4}{100} \times 8\,200 = 328$. Nous pouvons donc remplir la case **3**.

c) 10 % des clients étrangers ont eu un incident de paiement.

Nous ne connaissons pas ici le nombre de clients étrangers.

Troisième étape : Il faut calculer les renseignements nécessaires en lisant les cases déjà remplies.

Ici, connaissant les cases **2** et **3** nous pouvons compléter la case **4** :

$$10\,000 - 8\,200 = 1\,800.$$

Nous pouvons alors utiliser le dernier renseignement du texte :

$$\frac{10}{100} \times 1\,800 = 180. \text{ D'où la case } \mathbf{5}.$$

Quatrième étape : On termine de compléter le tableau en utilisant les cases déjà remplies.

$$\mathbf{3} + \mathbf{5} = \mathbf{6} : 328 + 180 = 508.$$

$$\mathbf{1} - \mathbf{6} = \mathbf{7} : 10\,000 - 508 = 9\,492.$$

$$\mathbf{4} - \mathbf{5} = \mathbf{8} : 1\,800 - 180 = 1\,620.$$

$$\mathbf{2} - \mathbf{3} = \mathbf{9} : 8\,200 - 328 = 7\,872.$$

Cinquième étape : On vérifie que les sommes des lignes et des colonnes sont bien cohérentes. Ici en particulier : $7\,872 + 1\,620 = 9\,492$.

D'où le tableau complété :

	Nombre de clients français	Nombre de clients étrangers	Total
Nombre de clients ayant eu un incident de paiement	3 328	5 180	6 508
Nombre de clients n'ayant pas eu d'incident de paiement	9 7 872	8 1 620	7 9 492
Total	2 8 200	4 1 800	1 10 000

Comment utiliser un tableau à double entrée pour le calcul de probabilités ?

Énoncé

Nous reprenons ici les données concernant les clients de l'entreprise pharmaceutique de la méthode 1.

	Nombre de clients français	Nombre de clients étrangers	Total
Nombre de clients ayant eu un incident de paiement	3 328	5 180	6 508
Nombre de clients n'ayant pas eu d'incident de paiement	9 7 872	8 1 620	7 9 492
Total	2 8 200	4 1 800	1 10 000

On choisit un client au hasard parmi les 10 000.

On est en situation d'équiprobabilité.

On considère les événements suivants :

F : « Le client choisi est français ».

I : « Le client choisi a eu un incident de paiement ».

1) Définir par une phrase les événements :

a) $\bar{F}$ et $\bar{I}$.

b) $F \cap I$ et $\bar{F} \cap \bar{I}$.

c) $F \cup I$ et $\bar{F} \cup \bar{I}$.

2) Calculer la probabilité de F et de I puis de celle de chacun des événements précédents.

3) On choisit un client au hasard parmi ceux ayant eu un incident de paiement. Déterminer la probabilité que le client soit français.

4) On choisit un client au hasard parmi les étrangers. Déterminer la probabilité que le client n'ait pas eu d'incident de paiement.

Corrigé commenté

1) Il s'agit, ici, de traduire par une phrase en français les notations de l'énoncé. On utilise alors les définitions du cours.

a) Les événements contraires

On dit qu'un événement est l'**événement contraire** de A , et on le note $\bar{A}$ s'il contient tous les éléments de l'univers n'appartenant pas à A .

$\bar{F}$ est donc l'événement contraire de F : « Le client choisi est étranger ».

$\bar{I}$ est donc l'événement contraire de I : « Le client choisi n'a pas eu d'incident de paiement ».

b) L'intersection de deux événements

On appelle **intersection** de deux événements A et B , et on note $A \cap B$, l'ensemble des résultats appartenant à la fois à A et à B .

$F \cap I$ est donc l'événement : « Le client choisi est un client français qui a eu un incident de paiement. »

$\bar{F} \cap \bar{I}$ est donc l'événement : « Le client choisi est un client étranger qui n'a pas eu d'incident de paiement. »

c) La réunion de deux événements

On appelle **réunion** de deux événements A et B , et on note $A \cup B$, l'ensemble des résultats appartenant à A ou à B .

$F \cup I$ est donc l'événement : « Le client choisi est un client français ou est un client qui a eu un incident de paiement ».

$\bar{F} \cup \bar{I}$ est donc l'événement : « Le client choisi est un client étranger ou est un client qui n'a pas eu d'incident de paiement ».

2) Il s'agit ici de calculer des probabilités.

Deux cas se présentent :

- Premier cas : on repère la case correspondante à l'événement recherché, il ne reste plus alors qu'à diviser le nombre correspondant par l'effectif total.

Dans un cas d'équiprobabilité et d'un univers comportant n éléments, la probabilité d'un événement A est : $p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Dans notre situation, on s'intéresse aux 10 000 clients, le nombre de cas possibles dans le choix d'un client au hasard est donc de 10 000.

D'après la case ② : le nombre de cas favorables à l'événement F est de 8 200.

$$\text{Alors } p(F) = \frac{8\,200}{10\,000} = 0,82.$$

(La probabilité de choisir un client français est de 8 200 sur 10 000.)

D'après la case ❹ : le nombre de cas favorables à l'événement I est de 508.

$$\text{Alors } p(I) = \frac{508}{10\,000} = 0,0508.$$

$$\text{De même } p(\bar{F}) = \frac{1\,800}{10\,000} = 0,18 \text{ (case ❺)}.$$

Remarque : On aurait également pu utiliser la formule $p(\bar{F}) = 1 - p(F)$.

$$\text{Alors } p(\bar{F}) = 1 - 0,82 = 0,18.$$

$$p(\bar{I}) = \frac{9\,492}{10\,000} = 0,9492 \text{ (case ❻)}.$$

$$p(F \cap I) = \frac{328}{10\,000} = 0,0328 \text{ (case ❸)}.$$

$$p(\bar{F} \cap \bar{I}) = \frac{1\,620}{10\,000} = 0,162 \text{ (case ❽)}.$$

• Deuxième cas : une lecture directe des cases du tableau ne suffit pas, il faut effectuer un calcul préalable. C'est le cas lorsqu'il s'agit de calculer la probabilité d'une réunion.

On utilise alors les probabilités calculées précédemment et la formule :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } p(F \cup I) &= p(F) + p(I) - p(F \cap I) \\ &= 0,82 + 0,0508 - 0,0328 = 0,838. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } p(\bar{F} \cup \bar{I}) &= p(\bar{F}) + p(\bar{I}) - p(\bar{F} \cap \bar{I}) \\ &= 0,18 + 0,9492 - 0,162 = 0,9672. \end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu additionner également les cases du tableau :

En effet le nombre de cas favorables à $F \cup I$ est alors la somme des cases ❸, ❺ et ❹ : $328 + 7\,872 + 180 = 8\,380$.

$$\text{Alors, } p(F \cup I) = \frac{8\,380}{10\,000} = 0,838.$$

❸ On restreint maintenant le nombre de cas possibles.

Dans cette question on ne s'intéresse qu'aux clients ayant eu un incident de paiement.

Deux possibilités de rédaction sont alors possibles :

- **Soit on effectue un changement d'univers**

L'univers de référence devient l'ensemble des clients ayant eu un incident de paiement. Il comporte alors 508 éléments.

Parmi les clients ayant eu un incident de paiement 328 sont français,

alors la probabilité cherchée est $\frac{328}{508} \approx 0,65$.

- **Soit on utilise les probabilités conditionnelles**

Ici, sachant que le client a eu un incident de paiement, nous cherchons la probabilité qu'il soit français, c'est-à-dire $p_I(F)$.

Or, A et B étant deux événements tels que $p(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant B réalisé est $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

$$\text{Alors } p_I(F) = \frac{p(F \cap I)}{p(I)} = \frac{0,0328}{0,0508} \approx 0,65.$$

4) De même, ici on cherche $p_{\bar{F}}(\bar{I}) = \frac{p(\bar{F} \cap \bar{I})}{p(\bar{F})} = \frac{0,162}{0,18} \approx 0,9$.

On aurait pu aussi effectuer $\frac{1\,620}{1\,800} \approx 0,9$.

3

Comment compléter un arbre pondéré ?

Énoncé

Le matin, M. Delachance prend son parapluie 4 fois sur 10. Lorsqu'il prend son parapluie, il pleut une fois sur deux, le temps est nuageux 3 fois sur 8, sinon il fait beau. Lorsqu'il ne prend pas son parapluie, il fait beau 3 fois sur 4 et le temps est nuageux 1 fois sur 4.

Traduire à l'aide d'un arbre les données de l'énoncé.

Corrigé commenté

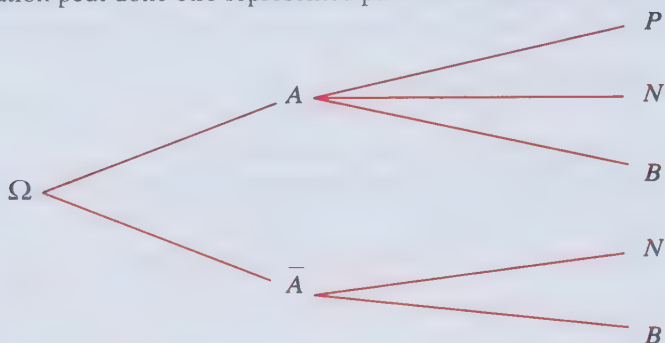
On appelle A l'événement : « M. Delachance prend son parapluie ».

Alors $\bar{A}$ est l'événement contraire de A : « M. Delachance ne prend pas son parapluie ».

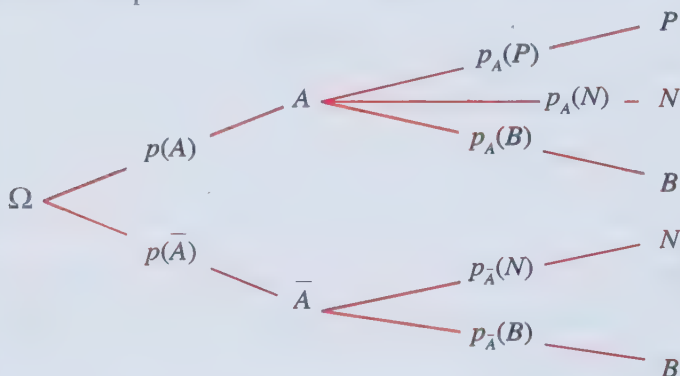
P est l'événement : « Il pleut » ; N est l'événement : « Le temps est nuageux ».

B est l'événement : « Il fait beau ».

La situation peut donc être représentée par l'arbre suivant :



Il reste à compléter l'arbre en ajoutant sur chacune des branches les probabilités correspondantes :



Le premier renseignement donné par le texte représente la probabilité que

M. Delachance prenne son parapluie ; soit $p(A) = \frac{4}{10}$.

Donc $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{6}{10}$. Effectivement, M. Delachance ne prend pas son parapluie 6 fois sur 10.

Le deuxième renseignement est que, lorsqu'il prend son parapluie, il pleut une fois sur deux : cela nous donne $p_A(P) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Le troisième renseignement : lorsqu'il prend son parapluie, le temps est

nuageux 3 fois sur 8 nous donne $p_A(N) = \frac{3}{8} = 0,375$.

Il reste à compléter $p_A(B)$, c'est-à-dire : sachant qu'il prend son parapluie, quelle est la probabilité qu'il fasse beau ?

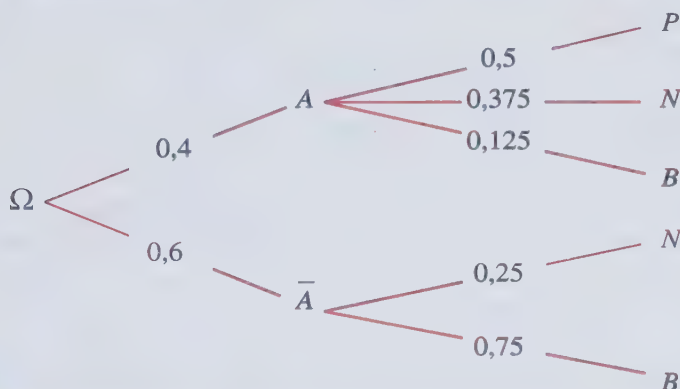
Or les branches partant d'un nœud représentent tous les résultats possibles, donc la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Donc $p_A(B) = 1 - 0,5 - 0,375 = 0,125$.

Lorsqu'il ne prend pas son parapluie, il fait beau 3 fois sur 4, ce renseignement nous permet de trouver : $p_{\bar{A}}(B) = \frac{3}{4} = 0,75$.

Alors $p_{\bar{A}}(N) = 0,25$.

L'arbre devient alors :



4

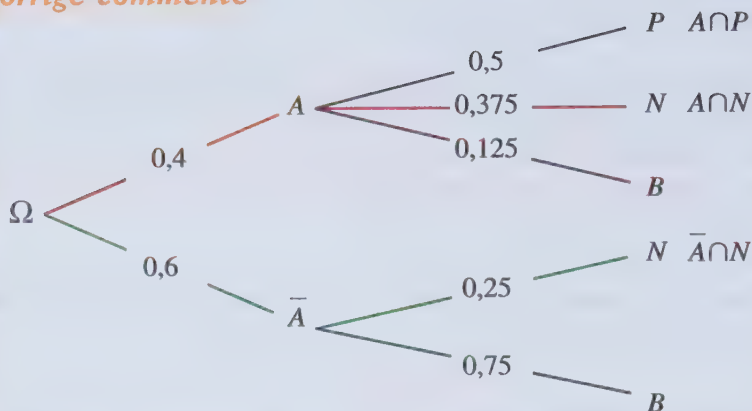
Comment utiliser un arbre pondéré pour le calcul de probabilités ?

Énoncé

Nous reprenons ici l'énoncé et l'arbre construit à la méthode 3.

- 1) Calculer $p(A \cap N)$ et $p(\bar{A} \cap N)$.
- 2) En déduire la probabilité que le temps soit nuageux.
- 3) Calculer $p(A \cap P)$.
- 4) En déduire la probabilité qu'il pleuve.

Corrigé commenté



1) L'événement $A \cap N$ correspond à : « M. Delachance prend son parapluie et il pleut ».

$p(A \cap N) = p(A) \times p_A(N)$. L'événement $A \cap N$ est donc réalisé en suivant le chemin rouge. Alors $p(A \cap N) = 0,4 \times 0,375 = 0,15$.

De même l'événement $\bar{A} \cap N$ est réalisé en suivant le chemin vert.

Alors $p(\bar{A} \cap N) = 0,6 \times 0,25 = 0,15$.

2) Il y a deux chemins qui mènent à N : $A \cap N$ et $\bar{A} \cap N$.

De plus, A et $\bar{A}$ sont des événements incompatibles et leur réunion constitue l'événement N .

D'après la formule des probabilités totales :

$$p(N) = p(A \cap N) + p(\bar{A} \cap N) = 0,15 + 0,15 = 0,3.$$

3) $p(A \cap P) = p(A) \times p_A(P) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$ (chemin du haut).

4) $p(P) = p(A \cap P) + p(\bar{A} \cap P) = 0,2 + 0 = 0,2$.

Remarque : On peut en déduire que la probabilité qu'il fasse beau est :

$$1 - (0,2 + 0,3) = 0,5.$$

Les exercices

1 Un laboratoire a effectué une enquête sur un médicament qu'il commercialise et dont la posologie peut varier de 1 à 6 comprimés par jour. On a demandé à 225 hommes et 125 femmes traités avec ce médicament la dose quotidienne prescrite par leur médecin.

1 Compléter le tableau ci-dessous (donnant les résultats de cette enquête) sachant que :

- pour 8 % des hommes la posologie est de 6 comprimés par jour ;
- pour 12 % des femmes la posologie est de 2 comprimés par jour.

Dose quotidienne	1 cp	2 cp	3 cp	4 cp	5 cp	6 cp	Total
Homme	17	22	76				225
Femme	4			32			125
Total			115	79		39	

Les résultats suivants seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

2 On choisit au hasard une personne ayant participé à l'enquête et on considère les événements :

A : « Cette personne est une femme .»

B : « Cette personne prend un seul comprimé par jour .»

a) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

b) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer sa probabilité.

c) Calculer $p(A \cup B)$.

3) Calculer la probabilité conditionnelle $p_B(A)$.

2 Une administration emploie 250 personnes classées en trois catégories : A, B, C. 32 % des employés sont des hommes. 40 % des hommes sont dans la catégorie A. La catégorie C compte 20 % du personnel dont 10 hommes. Dans la catégorie B, il y a autant de femmes que d'hommes.

1 À l'aide de ces renseignements, compléter le tableau :

Catégorie	A	B	C	Total
Sexe				
Femme				
Homme				
Total				250

2) On choisit au hasard une personne parmi les employés et on considère les événements :

F : « la personne choisie est une femme » ;

A : « la personne choisie est de catégorie A » ;

E : « la personne choisie est une femme de la catégorie A ».

Calculer les probabilités $p(F)$, $p(A)$, $p(E)$ et $p(F \cup A)$.

3) Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme sachant qu'elle est de la catégorie A.

11 Un centre communal d'action sociale (CCAS) gère un fichier de 450 enfants qui participent chaque mercredi après-midi à une et une seule des activités suivantes :

Activités de plein air – Activités culturelles – Activités manuelles.

On a relevé que :

– 60 % des enfants sont inscrits pour les activités de plein air et 30 % pour les activités manuelles.

Pour les activités de plein air il y a autant de garçons que de filles.

– 56 % des enfants sont des garçons.

– 20 % des enfants inscrits pour les activités culturelles sont des filles.

1) À l'aide de ces renseignements compléter le tableau :

Activités	Plein air	Culturelles	Manuelles	Total
Garçons				
Filles				
Total				450

Les résultats des questions suivantes seront donnés sous forme décimale.

2) On tire au hasard une des 450 fiches d'inscription et on considère les événements :

A : « La fiche tirée est celle d'un enfant ayant choisi les activités manuelles » ;

B : « La fiche tirée est celle d'une fille ».

a) Définir par une phrase les événements $\bar{A}$ et $A \cap B$.

b) Calculer la probabilité des événements A , $\bar{A}$, B et $A \cap B$.

c) En déduire la probabilité de $A \cup B$.

3) On tire maintenant au hasard une des fiches d'un enfant pratiquant une activité manuelle.

Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

 Une entreprise fabrique des parfums haut de gamme. Il existe sur le marché des contrefaçons et on estime que 0,5 % des flacons proposés à la vente sont des copies.

Pour éliminer ces copies, on a mis au point un test optique permettant, sans rompre le ruban de garantie, de se faire une opinion sur la conformité du produit.

Une étude a montré que :

- lorsque le produit est une copie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- lorsque le produit est un original, le test est négatif dans 95 % des cas.

1) Pour un flacon choisi au hasard et soumis au test, calculer les probabilités que :

- a) le produit soit un original ;
 - b) le test soit positif sachant que le produit est un original ;
 - c) le produit soit une copie et que le test soit positif ;
 - d) le produit soit un original et que le test soit positif ;
 - e) le test soit positif ;
 - f) le produit soit un original sachant que le test est positif.
- 2) Exprimer brièvement votre opinion sur la fiabilité de ce test.

 Un lycée propose trois options facultatives : arts plastiques, histoire des arts et musique.

Un élève ne peut choisir qu'une seule des trois options.

Le groupe des élèves de Seconde ayant fait un de ces choix à la rentrée 2006 se décomposait comme suit : 35 % en arts plastiques, 45 % en histoire des arts et 20 % en musique.

À la rentrée 2007, ces élèves sont tous passés en Première et 60 % des élèves en arts plastiques, 70 % en histoire des arts et 80 % en musique ont conservé leur option.

Dans le courant de l'année 2007, un animateur (ne connaissant pas les élèves) organise une réunion du groupe des élèves inscrits en 2006 dans une des trois options.

On définit les événements suivants :

A : « L'élève était inscrit en arts plastiques à la rentrée 2006. »

H : « L'élève était inscrit en histoire des arts à la rentrée 2006. »

M : « L'élève était inscrit en musique à la rentrée 2006. »

C : « L'élève a conservé son option en 2007. »

1) Décrire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) L'animateur choisit un élève au hasard.

a) Calculer la probabilité de l'événement : « Il était inscrit en arts plastiques en 2006 et a conservé son option en 2007 ».

b) Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,685.

3) L'animateur souhaite connaître les motivations des élèves qui n'ont pas conservé leur option en 2007.

Il demande à ces élèves de lever la main et en interroge un au hasard.

Calculer la probabilité que cet élève ait été inscrit en histoire des arts en 2006.

 Les probabilités seront données sous forme décimale arrondie au milliè.

Lors d'une enquête réalisée auprès des familles d'une région concernant leur habitation principale, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et enfin 5 % en sont « occupants à titre gratuit ».

Chaque famille interrogée habite soit un appartement, soit une maison individuelle.

On a constaté que 60 % des propriétaires et 10 % des « occupants à titre gratuit » habitent une maison individuelle, 80 % des locataires habitent un appartement.

Pour une famille de cette région choisie au hasard on considère les événements :

L : « Elle est locataire .»

E : « Elle est propriétaire .»

G : « Elle est occupante à titre gratuit .»

A : « Elle habite un appartement .»

1) À l'aide de l'énoncé, donner les probabilités $p_E(\bar{A})$, $p_L(A)$ et $p_G(\bar{A})$.

b) Construire un arbre pondéré résumant la situation.

2) Calculer la probabilité de l'événement : « La famille est propriétaire et habite un appartement ».

3) Montrer que $p(A) = 0,585$.

4) On interroge au hasard une famille habitant un appartement. Quelle est la probabilité qu'elle en soit propriétaire ?

 La visite d'un site touristique peut se faire soit à pied soit en car. À la fin de la visite un souvenir représentant le site est proposé au prix de 12 €.

Des études statistiques ont permis d'établir que :

- 70 % des touristes visitent en car ;
- 18 % visitent à pied et achètent le souvenir ;
- parmi ceux qui visitent en car, 80 % achètent le souvenir.

Pour un touriste quelconque visitant le site, on considère les événements :

C : « il visite en car » ;

S : « il achète le souvenir ».

1) a) D'après le texte, quelles sont les valeurs de $p(C)$, $p(\bar{C} \cap S)$ et $p_C(S)$?

b) En déduire $p(\bar{C})$ puis $p_{\bar{C}}(S)$.

2) Établir un arbre pondéré résumant la situation.

3) a) Montrer que $p(S) = 0,74$.

b) En déduire la recette prévisible provenant de la vente du souvenir, lors d'une journée où 400 touristes sont attendus sur le site.

c) Un touriste a acheté le souvenir. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué la visite à pied ?

3 Problème de la « confiance d'un test »

Une étude statistique a montré que 0,4 % des individus d'une population étaient atteints d'une certaine maladie.

Un laboratoire met sur le marché un test de dépistage de cette maladie qui, après essais, a obtenu des résultats apparemment satisfaisants puisque :

- 97 % des personnes malades ont réagi positivement ;
- 98 % des personnes non malades ont réagi négativement.

On souhaite contrôler quand même la fiabilité de ce test par un calcul de probabilité.

Pour une personne choisie au hasard dans la population soient les événements :

M : « elle est atteinte de la maladie »,

T : « elle a réagi positivement au test ».

1) Résumer les données du texte dans un arbre pondéré.

2) Calculer $p(T)$.

3) Calculer la probabilité que la personne soit effectivement malade sachant qu'elle a eu un test positif. Commenter.

4) Comment améliorer les performances de ce test ?

Corrigés

1) $225 \times 0,08 = 18$ et $125 \times 0,12 = 15$ d'où le tableau complété :

Dose quotidienne	1 cp	2 cp	3 cp	4 cp	5 cp	6 cp	Total
Homme	17	22	76	47	45	18	225
Femme	4	15	39	32	14	21	125
Total	21	37	115	79	59	39	350

$$2) a) p(A) = \frac{125}{350} = \frac{5}{14} \quad p(B) = \frac{21}{350} = \frac{3}{50}$$

b) L'événement $A \cap B$ est : « Cette personne est une femme qui prend un seul comprimé par jour » et $p(A \cap B) = \frac{4}{350} = \frac{2}{175}$.

$$c) p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

$$\text{Donc } p(A \cup B) = \frac{125}{350} + \frac{21}{350} - \frac{4}{350} = \frac{142}{350} = \frac{71}{175}.$$

$$3) p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{4}{350}}{\frac{21}{350}} = \frac{4}{350} \times \frac{350}{21} = \frac{4}{21}.$$

2) 1) On calcule le nombre d'hommes : $250 \times 0,32 = 80$.

Le nombre d'hommes dans la catégorie A : $80 \times 0,4 = 32$.

Le nombre d'employés dans la catégorie C : $250 \times 0,2 = 50$.

et compte tenu des autres renseignements on obtient le tableau complété :

Catégorie	A	B	C	Total
Sexe				
Femme	92	38	40	170
Homme	32	38	10	80
Total	124	76	50	250

$$2) p(F) = \frac{170}{250} = 0,68 \quad p(A) = \frac{124}{250} = 0,496 \quad p(E) = \frac{92}{250} = 0,368.$$

Par ailleurs, on remarque que $E = F \cap A$

$$\text{or } p(F \cup A) = p(F) + p(A) - p(F \cap A).$$

On a donc $p(F \cup A) = 0,68 + 0,496 - 0,368 = 0,808$.

Remarque : On pouvait aussi dénombrer $F \cup A$ à l'aide du tableau en calculant :

$$32 + 92 + 38 + 40 = 202 \text{ d'où } p(A \cup B) = \frac{202}{250} = 0,808.$$

3) On cherche $p_A(F) = \frac{p(F \cap A)}{p(A)} = \frac{0,368}{0,496} \approx 0,74$.

1) $450 \times 0,6 = 270$; $450 \times 0,3 = 135$; $450 \times 0,56 = 252$;
 $450 - 270 - 135 = 45$ et $45 \times 0,20 = 9$.

D'où le tableau complété :

Activités	Plein air	Culturelles	Manuelles	Total
Garçons	135	36	81	252
Filles	135	9	54	198
Total	270	45	135	450

2) a) $\bar{A}$ est l'événement contraire de A c'est-à-dire : « La fiche tirée est celle d'un enfant n'ayant pas choisi les activités manuelles ».

$A \cap B$ est l'événement : « La fiche tirée est celle d'une fille ayant choisi les activités manuelles ».

b) $p(A) = \frac{135}{450} = 0,3$.

Remarque : On savait d'après le texte que 30 % des enfants ont choisi les activités manuelles.

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 0,7 \quad p(B) = \frac{198}{450} = 0,44 \quad p(A \cap B) = \frac{54}{450} = 0,12.$$

3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,3 + 0,44 - 0,12 = 0,62$.

4) On demande la probabilité conditionnelle $p_A(B)$,

or $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,12}{0,3} = 0,4$.

Remarque : On peut obtenir directement ce résultat par le calcul $\frac{54}{135} = 0,4$.

1) Notons C l'événement : « le produit est une copie » et T l'événement : « le test est positif ».

Alors $\bar{C}$ est l'événement : « le produit est un original »,
et $\bar{T}$ est l'événement : « le test est négatif ».

Le texte donne $p(C) = 0,005$; $p_{\bar{C}}(T) = 0,85$ et $p_{\bar{C}}(\bar{T}) = 0,95$.

1) Les probabilités demandées sont successivement :

a) $p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - 0,005 = 0,995$.

b) $p_{\bar{C}}(T) = 1 - p_{\bar{C}}(\bar{T}) = 1 - 0,95 = 0,05$ (principe des nœuds).

c) $p(C \cap T) = p(C) \times p_{\bar{C}}(T) = 0,005 \times 0,85 = 0,00425$.

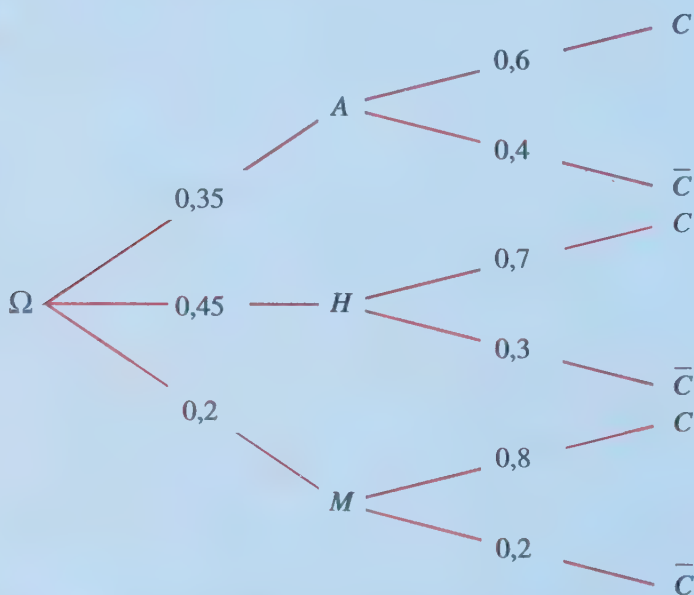
d) $p(\bar{C} \cap T) = p(\bar{C}) \times p_{\bar{C}}(T) = 0,995 \times 0,05 = 0,04975$.

e) $p(T) = p(C \cap T) + p(\bar{C} \cap T) = 0,00425 + 0,04975 = 0,054$ (d'après la formule des probabilités totales).

f) $p_T(\bar{C}) = \frac{p(\bar{C} \cap T)}{p(T)} = \frac{0,04975}{0,054} \approx 0,92$.

2) Le dernier résultat montre que 92 % des flacons rejetés par le test le sont à tort, ce test n'est donc pas du tout fiable en l'état.

5. 1)



2) a) L'événement considéré est $A \cap C$ et $p(A \cap C) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$.

b) Les événements A, H, M forment une partition de Ω donc d'après la formule des probabilités totales : $p(C) = p(A \cap C) + p(H \cap C) + p(M \cap C)$.

De même qu'au a) on obtient :

$$p(H \cap C) = 0,45 \times 0,7 = 0,315 \text{ et } p(M \cap C) = 0,2 \times 0,8 = 0,16.$$

D'où $p(C) = 0,21 + 0,315 + 0,16 = 0,685$.

3) La probabilité demandée est $p_{\bar{C}}(H) = \frac{p(H \cap \bar{C})}{p(\bar{C})}$

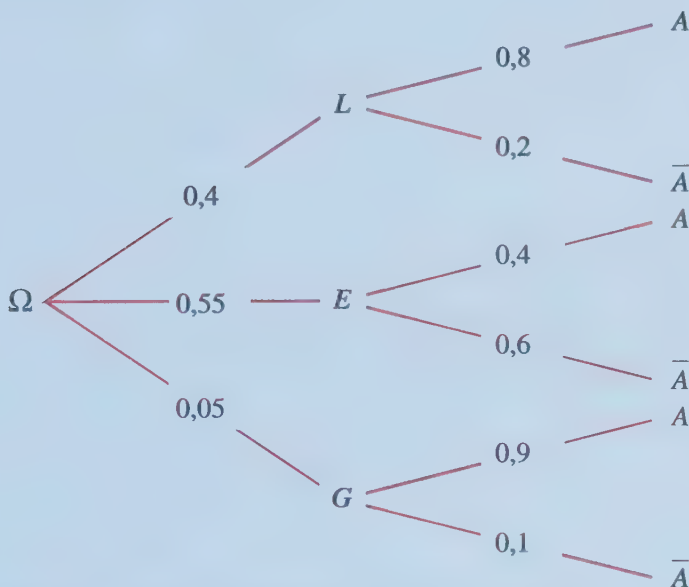
or $p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - 0,685 = 0,315$,

et $p(H \cap \bar{C}) = 0,45 \times 0,3 = 0,135$ donc $p_C(H) = \frac{0,135}{0,315} \approx 0,43$.

1) a) L'événement $\bar{A}$ est : « La famille habite une maison individuelle » donc :

$$p_E(\bar{A}) = 0,6 \quad p_L(A) = 0,8 \text{ et } p_G(\bar{A}) = 0,1.$$

b) On obtient alors l'arbre suivant :



2) On demande $p(E \cap A)$ et $p(E \cap A) = 0,55 \times 0,4 = 0,22$.

3) Les événements L, E, G forment une partition de Ω donc d'après la formule des probabilités totales : $p(A) = p(L \cap A) + p(E \cap A) + p(G \cap A)$.

Or (de même qu'en 2)) on a :

$$p(L \cap A) = 0,4 \times 0,8 = 0,32 \text{ et } p(G \cap A) = 0,05 \times 0,9 = 0,045.$$

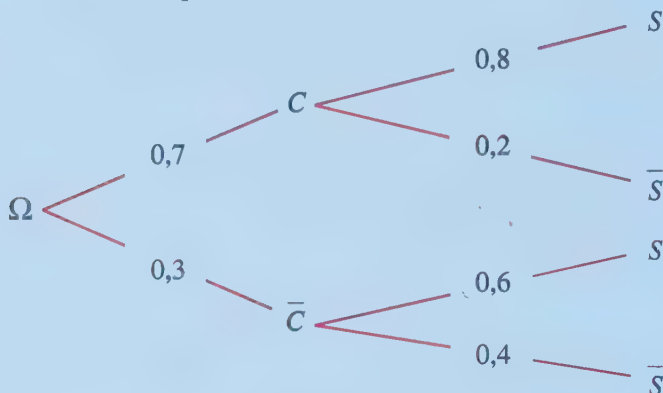
D'où $p(A) = 0,32 + 0,22 + 0,045 = 0,585$.

4) On demande $p_A(E) = \frac{p(E \cap A)}{p(E)} = \frac{0,22}{0,585} \approx 0,376$.

1) a) D'après le texte, $p(C) = 0,7$, $p(\bar{C} \cap S) = 0,18$ et $p_C(S) = 0,8$.

b) $p(\bar{C}) = 1 - p(C)$ donc $p(\bar{C}) = 0,3$ et $p_{\bar{C}}(S) = \frac{p(\bar{C} \cap S)}{p(\bar{C})} = \frac{0,18}{0,3} = 0,6$.

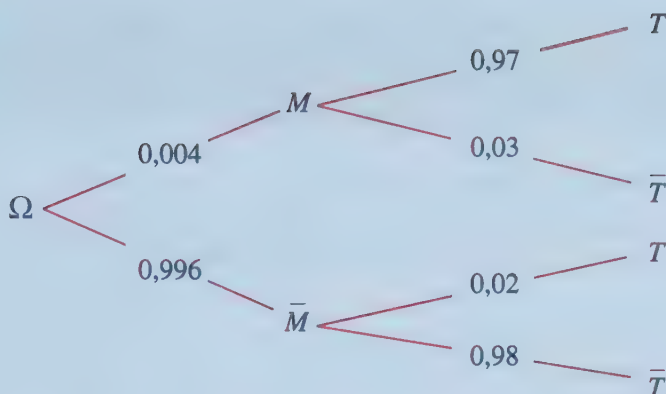
2) On en déduit l'arbre pondéré :



3) a) D'après la formule des probabilités totales : $p(S) = p(C \cap S) + p(\bar{C} \cap S)$.
Donc $p(S) = 0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,6 = 0,56 + 0,18 = 0,74$.

b) D'après la question précédente on peut espérer que 74 % des touristes vont acheter le souvenir donc s'il y en a 400, cela fait $400 \times 0,74 = 296$.
La recette prévisible est donc $296 \times 12 = 3\,552$ €.

4) On cherche $p_S(\bar{C})$ or $p_S(\bar{C}) = \frac{p(S \cap \bar{C})}{p(S)} = \frac{0,18}{0,74} \approx 0,243$.



2) D'après la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T).$$

$$\text{Donc } p(T) = 0,004 \times 0,97 + 0,996 \times 0,02 = 0,0238.$$

$$3) p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0,00388}{0,0238} \approx 0,163.$$

Ce résultat, étonnant *a priori*, montre que seulement 16,3 % des personnes ayant eu un test positif sont effectivement malades ! Ce test est donc en l'état très mauvais...

4) Pour l'améliorer il faudrait augmenter $p_T(M)$ (passer de 0,163 à 0,8 voire 0,99...).

Pour cela deux solutions : augmenter $p(M \cap T)$ ou diminuer $p(T)$.

Or on ne peut agir sur $p(M)$ et $p_M(T) = 0,97$ donc $p(M \cap T)$ ne peut être augmenté que de très peu (en passant de 0,97 à 0,99 par exemple).

Il faut donc diminuer $p(T)$ et pour cela diminuer $p_{\bar{M}}(T)$ c'est-à-dire la probabilité d'erreur sur les personnes non malades.

Ainsi, si l'on passe de 0,02 à 0,001 par exemple, un calcul analogue à celui déjà fait montre qu'alors $p_T(M) \approx 0,8$.

A posteriori on comprend que pour qu'un test de dépistage soit correct il doit être presque parfait sur les personnes non malades. En effet celles-ci sont en général beaucoup plus nombreuses que les malades.

Testez-vous

A et B sont deux événements tels que $p(A) = 0,5$ et $p(B) = 0,4$.

Associer à chaque affirmation de la colonne de gauche (1. 2. et 3.) celle de la colonne de droite (a) b) c) ou d)) qui lui correspond :

- | | |
|---|------------------------|
| 1 A et B sont incompatibles. | a) $p(A \cap B) = 0,2$ |
| 2 A et B sont indépendants. | b) $p(A \cap B) = 0,3$ |
| 3 $p(A \cap B) = 0,1$. | c) $p(A \cup B) = 0,8$ |
| | d) $p(A \cup B) = 0,9$ |

Dans les deux exercices suivants, déterminer la bonne réponse parmi les réponses proposées.

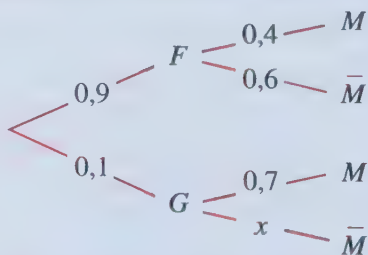
Avec un tableau : Dans un lycée, on a interrogé les 80 élèves de ST2S et on a noté les résultats dans le tableau ci-dessous. On choisit un élève au hasard, on note les événements : F « l'élève choisi est une fille » et M « l'élève choisi veut travailler dans le secteur médical ».

	Veut travailler dans le secteur médical	Ne veut pas travailler dans le secteur médical	Total
Fille	45	29	74
Garçon	5	1	6
Total	50	30	80

- | | | | | |
|---------------------------|-----------|----------|----------|-----------|
| 4 $p(F) =$ | a) 0,5625 | b) 0,9 | c) 0,925 | d) 0,608 |
| 5 $p(F \cap M) =$ | a) 0,5625 | b) 0,9 | c) 0,676 | d) 0,9875 |
| 6 $p(F \cup M) =$ | a) 0,5625 | b) 1,55 | c) 1 | d) 0,9875 |
| 7 $p_F(M) \approx$ | a) 0,9 | b) 0,608 | c) 0,625 | d) 0,5625 |

Avec un arbre : Dans un autre lycée, on a interrogé les élèves de ST2S et on a noté les probabilités des événements précédents sur l'arbre ci-dessous.

- | | | |
|--------------------------|---------|---------|
| 8 $x =$ | a) 0,1 | b) 0,3 |
| | c) 0,7 | d) 0,9 |
| 9 $p(F \cap M) =$ | a) 0,13 | b) 0,36 |
| | c) 0,4 | d) 0,9 |
| 10 $p_F(M) =$ | a) 0,36 | b) 0,4 |
| | c) 0,6 | d) 0,9 |
| 11 $p(M) =$ | a) 0,11 | b) 0,36 |
| | c) 1,1 | d) 0,43 |



Réponses : **1** d), **2** a), **3** c), **4** c), **5** a), **6** d), **7** b), **8** b), **9** b), **10** b), **11** d).

Les fonctions

Le cours

Définition graphique du nombre dérivé

• Détermination à partir de la tangente

Définition : Si la courbe d'une fonction f admet au point d'abscisse a une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, **on appelle nombre dérivé de f en a , et on note $f'(a)$, le coefficient directeur de cette tangente.**

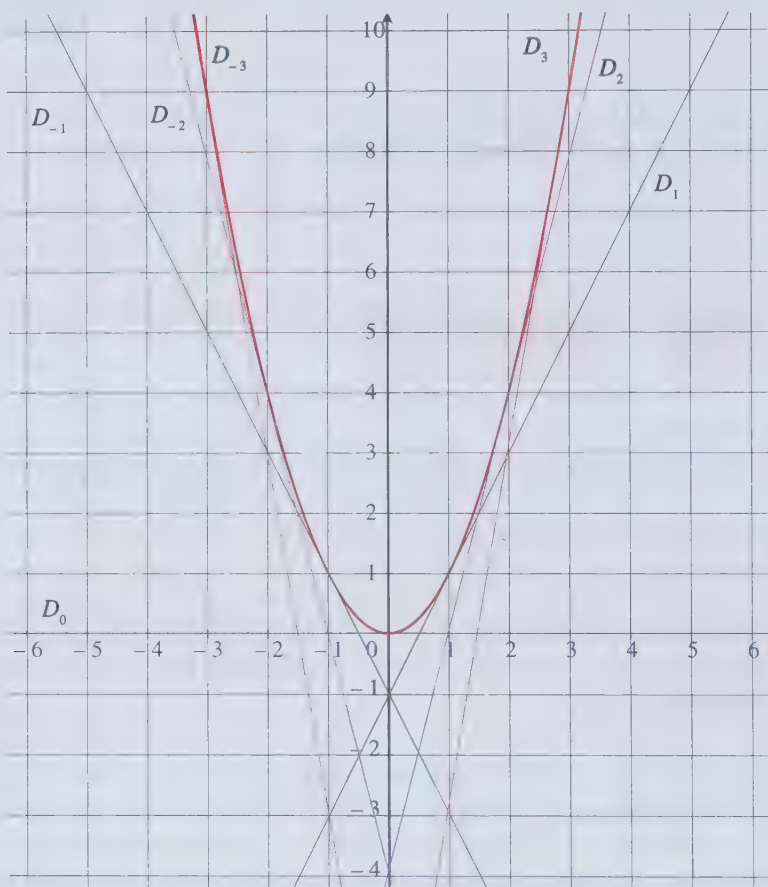
Selon le contexte, on peut déterminer le nombre dérivé de deux façons : à partir de la tangente ou par un calcul préalable de la fonction dérivée de f . Le nombre dérivé de f en a étant le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a , on peut le déterminer graphiquement si la tangente correspondante est donnée.

On peut procéder par lecture graphique ou, si on connaît deux points M et N de la tangente, utiliser la formule
$$f'(a) = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}.$$

Deux exemples de détermination à partir du calcul de la fonction dérivée sont donnés plus loin.

Exemple : On a représenté la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $I = [-3 ; 3]$ ainsi que les tangentes $D_{-3}, D_{-2}, D_{-1}, D_0, D_1, D_2, D_3$ aux points d'abscisses $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ et 3 .

Le nombre dérivé en 1 est le coefficient directeur de D_1 (tangente à la courbe au point d'abscisse 1) : c'est 2. On note $f'(1) = 2$ (voir *Méthodes*, point 2).



Après avoir déterminé de même les nombres dérivés en $-3, -2, -1, 0, 2$ et 3 , nous avons noté leurs valeurs dans le tableau ci-dessous.

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(a)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

On constate sur ces exemples que $f'(a)$ est le double a .

Nous allons l'admettre: pour tout nombre a , le nombre dérivé de la fonction carrée ($f : x \mapsto x^2$) au point d'abscisse a est égale à $2a$. On note $f'(a) = 2a$.

La fonction dérivée et formules de calcul

Définition : On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle admet un nombre dérivé pour tout réel de I . On appelle alors **fonction dérivée**, et on note f' , la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Exemple : Nous pouvons constater que la courbe représentative de la fonction carrée admet une tangente en tout point, et nous avons vu que le coefficient directeur de cette tangente au point d'abscisse x est $2x$. Cela signifie que la fonction carrée est dérivable et que sa fonction dérivée est la fonction f' définie par $f'(x) = 2x$.

• Cas des fonctions de référence

De même, on constate que les courbes des autres fonctions de référence admettent elles aussi des tangentes en chaque point, et que ces tangentes ne sont jamais parallèles à l'axe des ordonnées, à une exception près : la fonction racine carrée admet en 0 une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Ces fonctions sont donc toutes dérivables sur leurs intervalles de définition, à l'exception de la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0. Nous avons noté dans le tableau ci-dessous la fonction dérivée de chacune des fonctions de référence.

$f(x)$	b	x	$ax + b$	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	a	$2x$	$3x^2$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
f dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$	$] 0 ; +\infty[$

a et b sont des constantes.

Exemples de détermination du nombre dérivé :

1) On donne la fonction f définie par $f(t) = t^3$ (on peut utiliser indifféremment la variable x ou t). Calculons le nombre dérivé de f en 5.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après le tableau précédent:

$$f'(t) = 3t^2, \text{ donc } f'(5) = 3 \times 5^2 = 75.$$

2) On considère la fonction g définie par $g(t) = \sqrt{t}$. Calculons le coefficient directeur de la tangente au point de la courbe de g d'abscisse 4.

La fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Le coefficient

directeur de la tangente au point d'abscisse 4 est $g'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

• Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété : Somme de fonctions

Si deux fonctions f et g sont dérivables sur un intervalle I , alors leur somme $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

Propriété : Produit d'une fonction par un réel

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si k est un nombre réel, alors kf est également dérivable sur I , et $(kf)' = kf'$.

Exemple : Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = 4t^3$.

Alors u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(t) = 4 \times 3t^2 = 12t^2$.

Remarque : Cette propriété est aussi valable lorsqu'on divise par un réel k , puisque diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse.

Ainsi, si $u(x) = \frac{x}{4}$ alors $u(x) = \frac{1}{4} \times x$ et donc $u'(x) = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$.

si $v(t) = \frac{t^2}{2}$, alors $v(t) = \frac{1}{2} \times t^2$ donc $v'(t) = \frac{1}{2} \times 2t = \frac{2t}{2} = t$.

Exemple : En combinant les deux propriétés ci-dessus, on peut dériver les fonctions suivantes :

Si $f(t) = 3t^2 + 6$, alors $f'(t) = 3 \times 2t + 0 = 6t$.

Si $g(x) = \frac{x}{4} + 2 + 5x$, alors $g'(x) = \frac{1}{4} + 0 + 5 \times 1 = \frac{1}{4} + 5 = \frac{21}{4}$.

Si $x(t) = 5t^3 + 4 + \frac{t^2}{2}$, alors $x'(t) = 5 \times 3t^2 + 0 + \frac{2t}{2} = 15t^2 + t$.



Application aux études de fonctions

L'intérêt principal de la notion de fonction dérivée réside dans le résultat suivant :

Théorème : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Si f' est **positive** sur I , alors f est **croissante** sur I .

Si f' est **négative** sur I , alors f est **décroissante** sur I .

Si f' est **nulle** sur I , alors f est **constante** sur I .

Ce résultat découle immédiatement de la définition du nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente. En effet, si f' est positive sur I , alors toutes les tangentes ont un coefficient directeur positif, donc elles « montent », ce qui signifie que la fonction f est croissante. Si f' est négative sur I , alors toutes les tangentes ont un coefficient directeur négatif, donc elles « descendent », ce qui signifie que la fonction f est décroissante.

Exemple : Un laboratoire pharmaceutique peut produire entre 0 et 10 hL d'un médicament par jour.

Suite à une étude économique, on se rend compte que les bénéfices sont donnés en centaines d'euros par la formule $b(x) = 3x - \frac{x^2}{4}$, où x représente le nombre d'hectolitres produits.

On veut connaître la production journalière pour laquelle les bénéfices sont maximums et le montant des ces bénéfices.

Pour cela, on va étudier la fonction b sur l'intervalle $[0 ; 10]$ et chercher son maximum.

b est dérivable sur $[0 ; 10]$ et $b'(x) = 3 - \frac{2x}{4} = 3 - \frac{x}{2}$.

On cherche alors le signe de $3 - \frac{x}{2}$:

$$3 - \frac{x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq \frac{x}{2} \Leftrightarrow 6 \geq x$$

Donc b' est positive sur $[0 ; 6]$ et négative sur $[6 ; 10]$.

Autre méthode : $3 - \frac{x}{2}$ peut s'écrire $-\frac{1}{2}x + 3$. C'est l'expression d'une

fonction affine qui s'annule en 6. Elle est représentée par une droite de coefficient directeur négatif, donc c'est une fonction décroissante, et donc de signe d'abord positif puis négatif.

On peut alors faire le tableau de variation de b :

x	0	6	10	
$b'(x)$		+	0	-
$b(x)$	0	↗ 9	↘ 5	

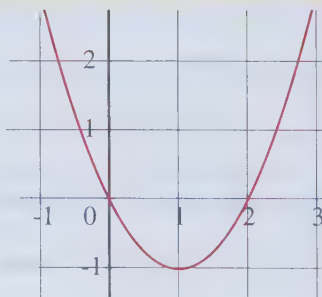
On lit dans le tableau de variation que le maximum de b est 9 et qu'il est atteint pour $x = 6$ ce qui signifie que les bénéfices sont maximum quand le laboratoire produit 6 hL par jour, et il fait alors 900 € de bénéfices.

Théorème : Si f est dérivable sur un intervalle I et atteint un maximum ou un minimum local en a distinct des extrémités de I , alors $f'(a) = 0$.

Exemple : On donne la courbe d'une fonction f .

f admet un minimum en 1.

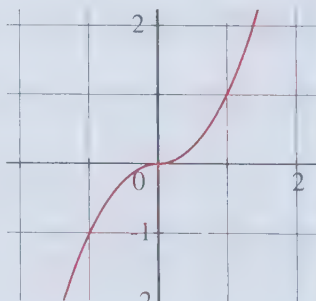
On peut donc dire que $f'(1) = 0$.



Cependant, le fait que $f'(a) = 0$ ne signifie pas nécessairement que f admet un minimum ou un maximum (local) en a .

En effet, si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$ et donc $f'(0) = 0$.

Pourtant, comme on peut le voir sur la courbe ci-contre, f n'a ni minimum ni maximum en 0.

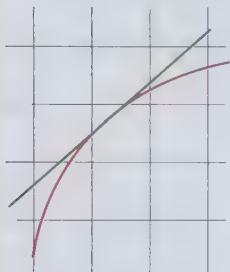


• Position relative de la courbe par rapport à une tangente

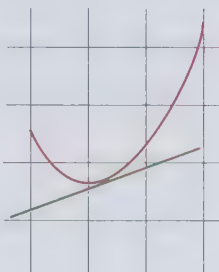
Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On considère une tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en un point A . La position de la courbe par rapport à la tangente va nous donner des indications sur les variations de la fonction dérivée f' .

On retiendra les trois cas suivants :

1^{er} cas



2nd cas

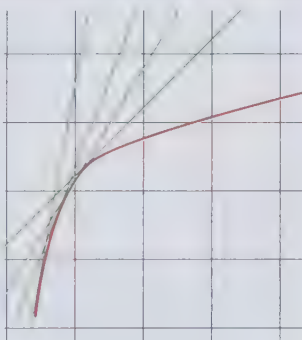


3^e cas



1^{er} cas : La courbe est au-dessous de la tangente

Cela signifie que lorsqu'on suit la courbe de gauche à droite, le coefficient directeur des tangentes, c'est-à-dire le nombre dérivé, diminue. Donc la fonction dérivée f' est décroissante. Sur le graphique ci-contre, f est croissante mais croît de moins en moins vite.



2nd cas : La courbe est au-dessus de la tangente

Cela signifie que la fonction dérivée f' est croissante (même principe).

3^e cas : La courbe traverse la tangente

Ce cas se produit quand la fonction dérivée f' change de sens de variation : sur le dessin ci-dessus, elle est d'abord décroissante, puis devient croissante.

À retenir

• Nombre dérivé

Si la courbe d'une fonction f admet au point d'abscisse a une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, on appelle **nombre dérivé** de f en a , et on note $f'(a)$, le **coefficient directeur** de cette tangente.

• Détermination du nombre dérivé de f en a à partir de deux points M et N de la tangente à la courbe au point d'abscisse a :

On utilise la formule de calcul d'un coefficient directeur :

$$f'(a) = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$$

• Fonction dérivée

On dit qu'une fonction est **dérivable** sur un intervalle I si elle admet un nombre dérivé pour tout réel de I . On appelle alors **fonction dérivée**, et on note f' , la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$.

$f(x)$	b	x	$ax + b$	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	a	$2x$	$3x^2$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
f dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$	$] 0 ; +\infty[$

a et b sont des constantes.

• Somme de fonctions dérivables

Si deux fonctions f et g sont dérivables sur un intervalle I , alors leur somme $f + g$ est également dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.

• Multiplication d'une fonction par un réel

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si k est un nombre réel, alors kf est également dérivable sur I , et $(kf)' = kf'$.

• Théorèmes

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est **positive** sur I , alors f est **croissante** sur I .
- Si f' est **négative** sur I , alors f est **décroissante** sur I .
- Si f' est **nulle** sur I , alors f est **constante** sur I .
- Si f est dérivable sur un intervalle I et atteint un maximum ou un minimum local en a distinct des extrémités de I , alors $f'(a) = 0$.

Les méthodes

1

Comment obtenir la courbe représentative d'une fonction et un tableau de valeurs à l'aide d'une calculatrice ?

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $[-6 ; 6]$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.

On désire obtenir un tableau de valeurs de f avec un pas de 1 et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Corrigé commenté

CASIO GRAPH 25-35-65-85

TI 82-82 STAT 83-83 PLUS

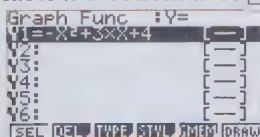
Pour obtenir la courbe représentative de f

MENU **GRAPH**



Entrer sur la ligne Y1 : l'expression de $f(x)$.

La variable x s'obtient avec $\boxed{X, \theta, T}$

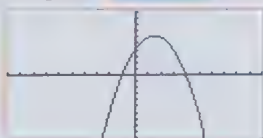


EXE

puis

DRAW

(F6)

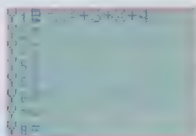


Taper **Y =**

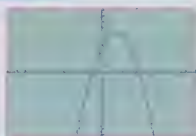
Remarque : pour la TI 82 Stat.fr : $\boxed{f(x)}$

Entrer sur la ligne Y1 = l'expression de $f(x)$.

La variable x s'obtient avec $\boxed{X, \theta, T}$



Taper **GRAPH**



On peut modifier la fenêtre graphique :

SHIFT **V-WINDOW**

```
View Window
Xmin :-6
max :6
scale:1
dot :0.09523809
Ymin :-10
max :10
INIT TRIG STD STO RCL
```

Ici $X_{\min} = -6$ et $X_{\max} = 6$ car

f est définie sur $[-6 ; 6]$.

$Y_{\min}$ et $Y_{\max}$ sont à choisir afin d'obtenir le meilleur affichage de la courbe.

On peut modifier la fenêtre graphique : **WINDOW**



Ici $X_{\min} = -6$ et $X_{\max} = 6$ car

f est définie sur $[-6 ; 6]$.

$Y_{\min}$ et $Y_{\max}$ sont à choisir afin d'obtenir le meilleur affichage de la courbe.

Pour obtenir le tableau de valeurs de f

MENU **TABLE**

On définit les caractéristiques de la table : (ensemble de définition et pas).

SET ou **RANG** (F5)

```
Table Settings
X
Start:-6
End :6
Step :1
```

Ici le pas est de 1.

TABL (F6)

```

  X      Y1
  -6     -50
  -5     -36
  -4     -24
  -3     -14
-6
```

FORM DEL ROW EDIT FCON G-PLT

On définit le pas et le minimum.

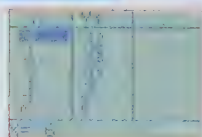
2nd **Tblset**

(**Deftable** sur TI 82 Stat.fr).



Ici le pas est de 1.

2nd **Table**



Comment lire des images et des nombres dérivés ?

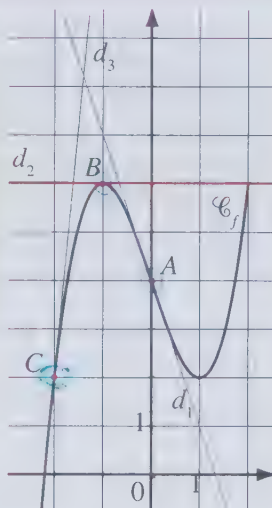
Énoncé

La courbe $\mathcal{C}_f$, ci-contre, représente une fonction f définie sur $[-3 ; 2]$.

Les droites d_1 , d_2 et d_3 sont les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 ; -1 et -2 .

a) Lire sur le graphique : $f(0)$, $f(-1)$ et $f(-2)$.

b) Lire sur le graphique : $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(-2)$.



Corrigé commenté

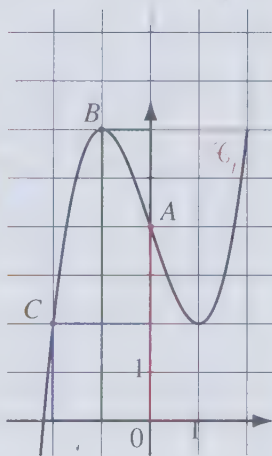
La représentation graphique (ou courbe représentative) de la fonction f , notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; f(x))$ (x appartenant à l'ensemble de définition de f).

$f(x)$ est donc l'ordonnée du point de la courbe dont l'abscisse est x .

a) Le point A a pour coordonnées $(0 ; 4)$ [segment rouge]. Alors $f(0) = 4$.

Le point B a pour coordonnées $(-1 ; 6)$ [segments verts]. Alors $f(-1) = 6$.

Le point C a pour coordonnées $(-2 ; 2)$ [segments bleus]. Alors $f(-2) = 2$.



b) Le nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

1) Pour lire sur le graphique $f'(0)$, il s'agit donc de déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

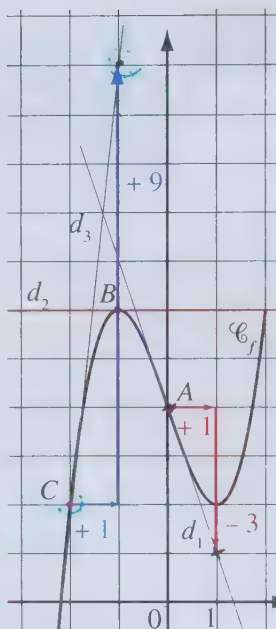
Or le point de la courbe d'abscisse 0 est le point A, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc la droite d_1 .

1^{re} méthode : on lit directement le coefficient directeur sur le graphique (tracé rouge) :

$$f'(0) = \frac{\text{déplacement en ordonnée}}{\text{déplacement en abscisse}} = \frac{-3}{+1} = -3.$$

2^{de} méthode : Si une droite passe le point M (x_M ; y_M) et le point N (x_N ; y_N) alors son coefficient

$$\text{directeur est } a = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$$



Ici, la droite d_1 passe par le point A (0 ; 4) et le point (1 ; 1), alors :

$$f'(0) = \frac{1 - 4}{1 - 0} = -3.$$

2) Pour lire sur le graphique $f'(-1)$, il s'agit donc de déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 .

Or, le point de la courbe d'abscisse -1 est le point B, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 est donc la droite d_2 .

La droite d_2 est parallèle à l'axe des abscisses, alors son coefficient directeur est nul, d'où $f'(-1) = 0$

3) Pour lire sur le graphique $f'(-2)$, il s'agit donc de déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 .

Or le point de la courbe d'abscisse -2 est le point C, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 est donc la droite d_3 . (tracé bleu)

$$\text{On lit : } f'(-2) = \frac{9}{1} = 9.$$

Par le calcul : la droite d_3 passe par le point C (-2 ; 2) et le point (-1 ; 11).

$$\text{Alors } f'(-2) = \frac{11 - 2}{-1 - (-2)} = \frac{9}{-1 + 2} = \frac{9}{1} = 9.$$

Comment tracer la tangente à une courbe ?

Énoncé

La courbe $\mathcal{C}_f$ de la méthode précédente est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Tracer la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Donner l'équation de cette tangente.

Corrigé commenté

• Tracé de T

1) On commence par calculer les coordonnées du point de la courbe d'abscisse 2.

Pour cela on calcule l'image de 2 par f :

$$f(2) = 2^3 - 3 \times 2 + 4 = 8 - 6 + 4 = 6.$$

2) Puis on détermine la fonction dérivée de f : $f'(x) = 3x^2 - 3$.

3) On calcule le nombre dérivé de f en 2 : $f'(2) = 3 \times 2^2 - 3 = 9$.

4) Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est donc de 9.

5) Il ne reste plus qu'à tracer la droite T passant par le point D de coordonnées $(2 ; 6)$ et de coefficient directeur 9.

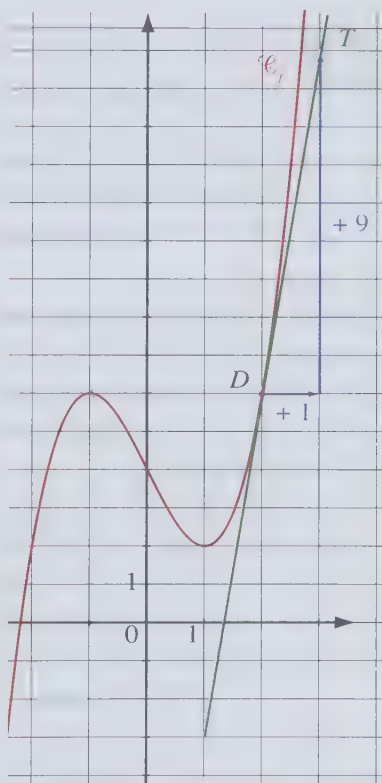
• Détermination de l'équation de T

1^{re} méthode :

Le coefficient directeur de la droite T est 9. Alors T admet une équation de la forme : $y = 9x + b$.

Il reste donc à déterminer l'ordonnée à l'origine.

Or T passe par le point $D(2 ; 6)$.



Donc ses coordonnées vérifient l'équation de T : $6 = 9 \times 2 + b$.

D'où $b = 6 - 18 = -12$.

L'équation de T est donc :

$$y = 9x - 12.$$

2^{de} méthode :

On utilise : la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a possède une équation réduite de la forme :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Alors l'équation de T est $y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$.

Soit d'après les calculs réalisés dans la première partie :

$$y = 9(x - 2) + 6.$$

$$y = 9x - 18 + 6.$$

$$\text{d'où } y = 9x - 12.$$

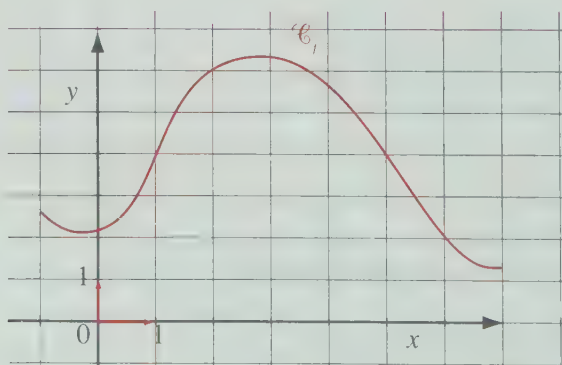
4

Comment résoudre graphiquement des équations et des inéquations de la forme $f(x) = k$ et $f(x) \geq k$?

Énoncé

Soit la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous représentant une fonction f définie sur $[-1 ; 7]$.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$ et l'inéquation $f(x) \geq 4$.



Corrigé commenté

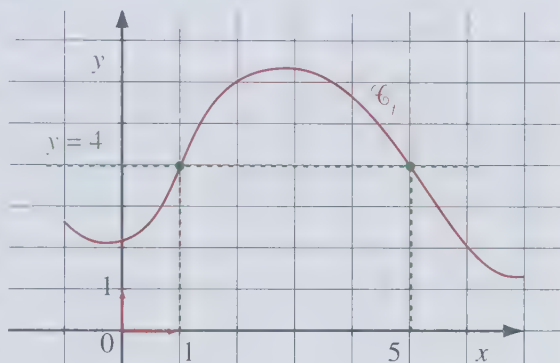
Résoudre une équation du type $f(x) = k$, c'est trouver les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est k .

Il s'agit donc ici de trouver les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est 4. Pour cela :

1) On trace la droite parallèle à l'axe des abscisses qui coupe l'axe des ordonnées en 4, c'est-à-dire, la droite d'équation $y = 4$.

2) Les solutions recherchées sont les abscisses des points d'intersection de cette droite et de la courbe.

3) On lit $x = 1$ ou $x = 5$, on écrira $S = \{1 ; 5\}$.



Résoudre une inéquation du type $f(x) \geq k$, c'est trouver les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est supérieure à k .

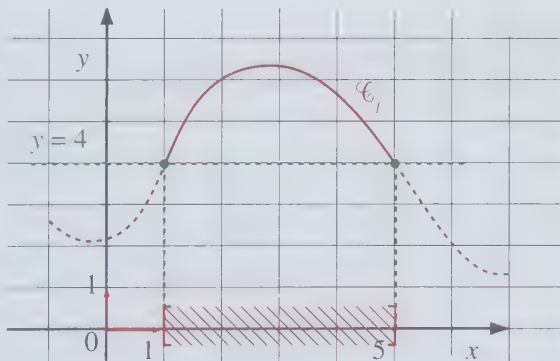
Il s'agit donc ici de trouver les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée est supérieure à 4.

Pour cela :

1) On trace la droite parallèle à l'axe des abscisses qui coupe l'axe des ordonnées en 4, c'est-à-dire, la droite d'équation $y = 4$.

2) Les solutions recherchées sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessus de cette droite.

3) On lit $1 \leq x \leq 5$ on écrira $S = [1 ; 5]$.

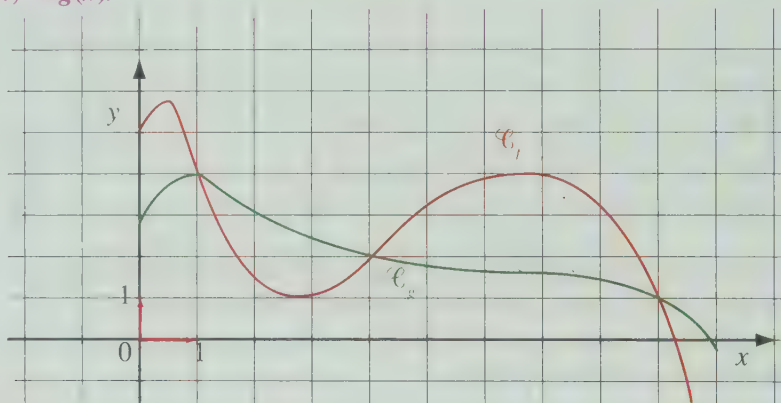


Comment résoudre graphiquement des équations et des inéquations de la forme $f(x) = g(x)$ et $f(x) > g(x)$?

Énoncé

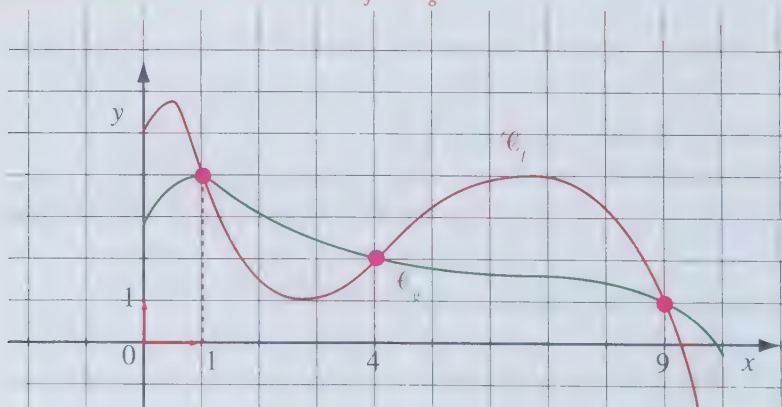
Soit les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ci-dessous représentant des fonction f et g définies sur $[0 ; 10]$.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ et l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.



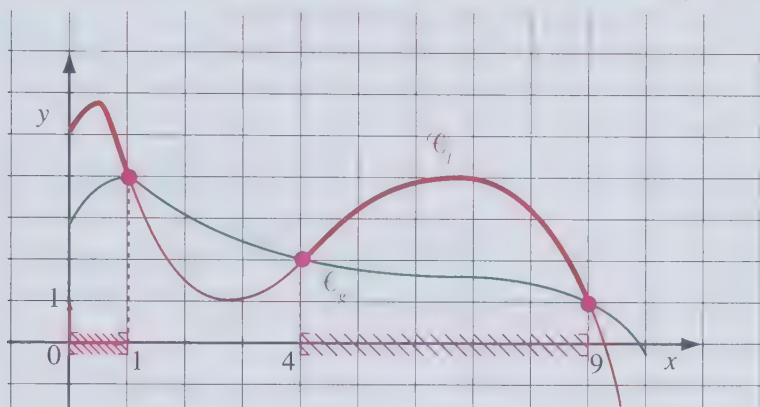
Corrigé commenté

Résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$, c'est trouver les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



On lit $x = 1$ ou $x = 4$ ou $x = 9$, on écrira $S = \{1 ; 4 ; 9\}$.

Résoudre une inéquation du type $f(x) \geq g(x)$, c'est trouver les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés au dessus de ceux de la courbe $\mathcal{C}_g$.



On lit $0 \leq x \leq 1$ ou $4 \leq x \leq 9$ on écrira $S = [0 ; 1] \cup [4 ; 9]$

6

Comment étudier le signe de la dérivée d'une fonction afin d'en déduire son sens de variation ?

Énoncé

1. Soit les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$, respectivement par :

$$f_1(x) = 2x^3 + 5x + 10 ;$$

$$f_2(x) = -\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 - 2x - 7 ;$$

$$f_3(x) = 2x^2 - 5x + 3.$$

a) Calculer la fonction dérivée de chacune des trois fonctions précédentes.

b) En déduire leur sens de variation sur $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 1$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Montrer que $f'(x) = (x - 1)(x - 5)$.

3) En déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; 10]$.

Corrigé commenté

Il s'agit de calculer la dérivée des fonctions données dans l'énoncé, d'en déduire leur signe puis d'utiliser le théorème suivant :

– si f' est positive sur I , alors f est croissante sur I ;

– si f' est négative sur I , alors f est décroissante sur I .

I.1) $f_1'(x) = 6x^2 + 5$.

Le signe de f_1' est ici évident, en effet, x^2 est toujours positif, de même pour $6x^2$ et $6x^2 + 5$.

Alors $f_1'(x) > 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $f_2'(x) = -8x^2 + 8x - 2$.

Le signe de f_2' n'est pas évident. Il faut factoriser f_2' .

Or $f_2'(x) = -2(4x^2 - 4x + 1) = -2(2x - 1)^2$.

$(2x - 1)^2 \geq 0$, d'où $f_2'(x) \leq 0$. Alors, f_2 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$f_3'(x) = 4x - 5$. Le signe de f_3' n'est pas évident.

f_3' est une fonction affine de coefficient directeur 4 qui est positif.

f_3' est donc une fonction croissante qui s'annule en $\frac{5}{4}$.

Alors, $f_3'(x) \leq 0$ pour $x \leq \frac{5}{4}$ et $f_3'(x) \geq 0$ pour $x \geq \frac{5}{4}$.

Alors f_3 est décroissante pour $x \leq \frac{5}{4}$ et f_3 est croissante pour $x \geq \frac{5}{4}$.

II.1) $f(x) = \frac{1}{3} \times x^3 - 3 \times x^2 + 5 \times x + 1$.

Alors, $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 3 \times 2x + 5$. Soit, $f'(x) = x^2 - 6x + 5$.

2) Il s'agit de montrer que $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$.

Or $(x - 1)(x - 5) = x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5 = f'(x)$.

3) La question précédente a permis d'obtenir la forme factorisée de $f'(x)$.

Celle-ci est un produit de deux fonctions affines. Elle va nous permettre d'étudier le signe de cette fonction à l'aide d'un tableau de signes.

$x \mapsto x - 1$ est une fonction affine de coefficient directeur 1, elle est donc croissante, de plus, $x - 1 = 0$ pour $x = 1$ donc elle s'annule en 1.

Cette fonction est donc négative pour $x \leq 1$ et positive pour $x \geq 1$.

De même $x \mapsto x - 5$ est négative pour $x \leq 5$ et positive pour $x \geq 5$.

Nous pouvons donc établir le tableau de signes du produit $(x - 1)(x - 5)$.

x	0	1	5	10
$x - 1$	-	0	+	+
$x - 5$	-	-	0	+
$(x - 1)(x - 5)$	+	0	-	+

f est donc croissante sur $[0 ; 1]$ et sur $[5 ; 10]$ et f est décroissante sur $[1 ; 5]$.

Nous pouvons alors établir le tableau de variations de f .

Ne pas oublier de mettre les valeurs exactes des images de 0 ; 1 ; 5 et 10.

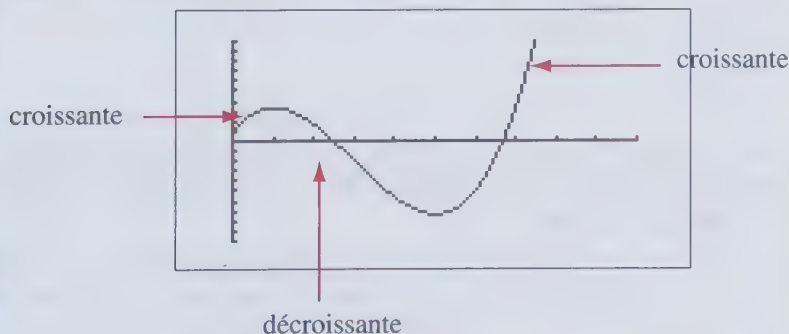
x	0	1	5	10			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			$\frac{10}{3}$		$-\frac{22}{3}$		$\frac{253}{3}$

Diagramme de variation : une flèche part de 1 et pointe vers $\frac{10}{3}$, une autre flèche part de $\frac{10}{3}$ et pointe vers $-\frac{22}{3}$, et une troisième flèche part de $-\frac{22}{3}$ et pointe vers $\frac{253}{3}$.

Remarque 1 : Nous pouvons déduire du tableau de variation que le maximum de f sur $[0 ; 10]$ est $\frac{253}{3}$ et que le minimum de f sur $[0 ; 10]$ est

$$-\frac{22}{3}.$$

Remarque 2 : Un tracé de la courbe représentative de f à la calculatrice permet de vérifier la cohérence de ce tableau de variation.



Comment établir le sens de variation d'une fonction à partir de son expression algébrique ?

Énoncé

I. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$.

Établir le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

II. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = \frac{t-8}{t+4}$.

1) Montrer que $g(t) = 1 - \frac{12}{t+4}$.

2) En déduire le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$.

Corrigé commenté

Cette méthode est pertinente lorsqu'on ne sait pas calculer la dérivée de la fonction.

Il s'agit, en utilisant les règles sur les inégalités, d'appliquer la définition du sens de variation d'une fonction : **f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I , si pour tous réels a et b de I avec $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement $f(a) \geq f(b)$).**

On pourra retenir qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante change l'ordre.

Il s'agit, tout d'abord, de décomposer la fonction en un enchaînement de fonctions élémentaires (en respectant les règles de priorité).

La fonction f se décompose alors comme ci-dessous :

$$f: x \mapsto x^2 \mapsto x^2 + 1 \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Ainsi, calculer l'image du nombre x revient tout d'abord à l'élever au carré, puis à ajouter 1 au résultat obtenu et enfin à prendre l'inverse de ce dernier résultat.

Pour effectuer cette décomposition, on pourra éventuellement, pour s'aider, prendre un exemple. En effet pour calculer l'image de 2, on effectue l'en-

chaînement suivant : $f: 2 \mapsto 2^2 \mapsto 4 + 1 \mapsto \frac{1}{5}$.

Il reste alors à appliquer cet enchaînement à l'inégalité $a \leq b$.

L'ensemble de définition de f est $[0 ; +\infty[$ donc, soit deux nombres a et b :

$$0 \leq a \leq b$$

Élever au carré des nombres positifs conserve l'ordre, donc :

$$0 \leq a^2 \leq b^2$$

Ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre, alors : $1 \leq a^2 + 1 \leq b^2 + 1$

Prendre l'inverse de nombres de même signe change l'ordre, alors :

$$1 \geq \frac{1}{a^2 + 1} \geq \frac{1}{b^2 + 1}.$$

Alors, **pour $0 \leq a \leq b$: $f(a) \geq f(b)$**

Conclusion : la fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

L'énoncé demande parfois de transformer l'expression de la fonction afin de pouvoir utiliser la méthode du I.

II. 1) $1 - \frac{12}{t+4} = \frac{t+4}{t+4} - \frac{12}{t+4} = \frac{t-8}{t+4} = g(t)$. Alors $g(t) = 1 - \frac{12}{t+4}$.

2) L'ensemble de définition de f est $[0 ; +\infty[$ donc, soit deux nombres a et b :

$$0 \leq a \leq b$$

Ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre, alors :

$$4 \leq a + 4 \leq b + 4.$$

Prendre l'inverse de nombres de même signe change l'ordre, alors :

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{a+4} \geq \frac{1}{b+4}.$$

Multiplier par un même nombre négatif les deux membres d'une inégalité change l'ordre, donc :

$$(-12) \times \frac{1}{4} \leq (-12) \times \frac{1}{a+4} \leq (-12) \times \frac{1}{b+4}.$$

D'où : $(-3) \leq -\frac{12}{a+4} \leq -\frac{12}{b+4}.$

Ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre.

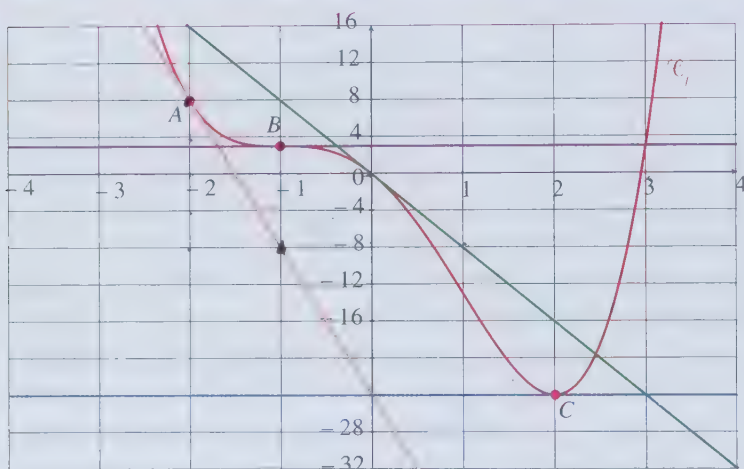
Alors, $-2 \leq 1 - \frac{12}{a+4} \leq 1 - \frac{12}{b+4}.$

Alors, **pour $0 \leq a \leq b$: $f(a) \leq f(b)$.**

Conclusion : la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Les exercices

1



Le graphique ci-dessus donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.

Sont aussi représentées les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points $A(-2; 8)$, $B(-1; 3)$, $O(0; 0)$ et $C(2; -24)$.

Déduire du graphique les valeurs des nombres dérivés :

$$f'(-2), f'(-1), f'(0) \text{ et } f'(2).$$

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 4]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$$

Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.

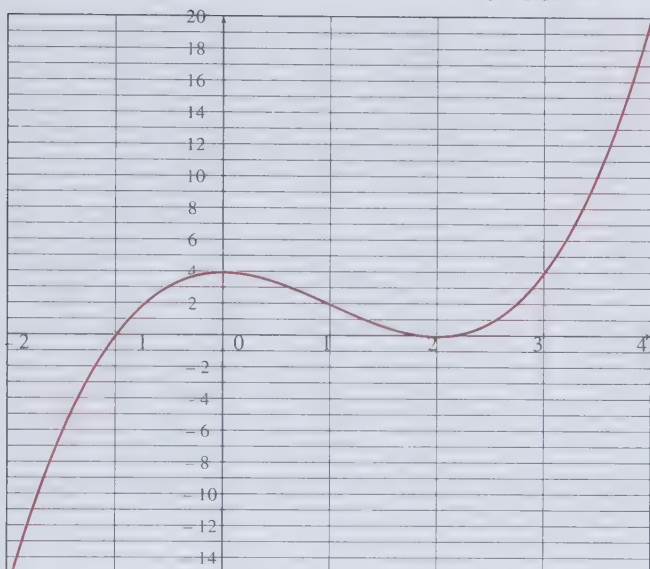
1) Calculer sa dérivée.

2) Compléter le tableau de valeurs (de la dérivée) :

x	-1	0	1	3
$f'(x)$				

3) Tracer sur le graphique les tangentes aux points d'abscisses -1, 0, 1 et 3.

$f'(x) = 0$: 2 solutions : -1 et 2



5 Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, calculer sa dérivée puis en déduire ses variations sur l'intervalle I .

1) $f(x) = 3x^2 - 6x - 4$ $I = [0 ; 4]$.

2) $f(x) = 2x^3 - 6x^2$ $I = [-1 ; 3]$.

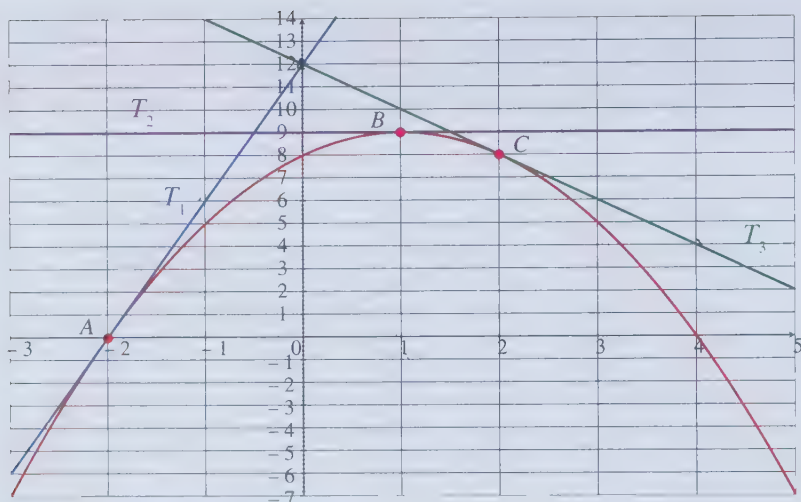
3) $f(x) = -5x + 6 + \frac{4}{x}$ $I = [1 ; 5]$.

4) $f(x) = 3x^3 + 4x - \frac{6}{x}$ $I = [1 ; 6]$.

5) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 9}{x}$ $I = [1 ; 10]$.

1 Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I = [-3 ; 5]$.

Sont également représentées les tangentes T_1 , T_2 et T_3 aux points A, B et C d'abscisses respectives -2, 1 et 2.



Partie A : Lectures graphiques

- 1) Quelles sont les valeurs de $f(-2)$, $f(0)$, $f(5)$?
- 2) Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?
- 3) Donner dans un tableau le signe de $f(x)$ pour $x \in I$.
- 4) Établir le tableau de variation de f .
- 5) Quelles sont les valeurs des nombres dérivés $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(2)$?

Partie B : Calculs

Dans cette partie on donne $f(x) = (x + 2)(4 - x)$ et on veut vérifier par le calcul certains résultats de la partie A.

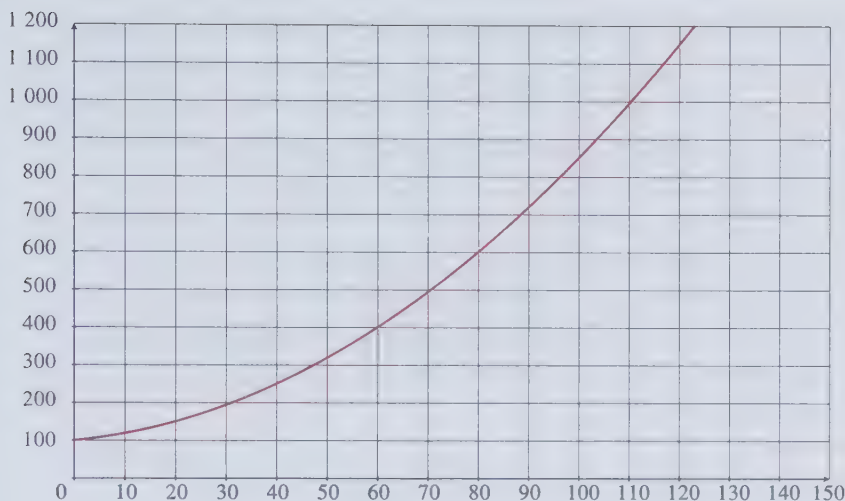
- 1) Calculer $f(-2)$, $f(0)$ et $f(5)$.
- 2) Étudier dans un tableau le signe de $f(x)$ pour $x \in I$.
- 3) Développer $f(x)$ puis calculer la dérivée de f .
- 4) Calculer $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

 Un petit laboratoire produit chaque jour x litres d'un certain produit pour un coût de production en euros noté $C(x)$.

On suppose que toute la production est vendue au prix de 7,50 € le litre. La courbe représentative de $\mathcal{C}$ est donnée page suivante.

Partie A

- 1) Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :



- a) Quel est le coût de production de 40 litres ? De 100 litres ?
- b) Quelle production correspond à un coût de 400 € ?
- 2) L'entreprise est-elle bénéficiaire si elle produit 40 litres ? 100 litres ?
- 3) Exprimer en fonction de x la recette journalière $R(x)$ du laboratoire puis, tracer sur le graphique la droite représentant R .
- 4) En déduire entre quelles limites doit se situer la production journalière pour que le laboratoire soit bénéficiaire.

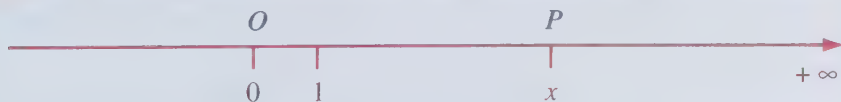
Partie B

Pour la suite de l'exercice on admet que la fonction C est définie par :

$$C(x) = 0,0625x^2 + 1,25x + 100.$$

- 1) Exprimer en fonction de x le bénéfice journalier $B(x)$ réalisé par le laboratoire.
- 2) Étudier les variations de B et construire son tableau de variation.
- 3) En déduire le bénéfice maximal que le laboratoire peut réaliser et la production pour laquelle il est obtenu.

Le mouvement d'une particule P (assimilable à un point) le long d'une droite D est complètement déterminé par l'équation $x = f(t)$, où t représente



le temps et x l'abscisse de P dans un repère de D d'origine O .

La vitesse de P à l'instant t_0 est alors $v(t_0) = f'(t_0)$.

Application 1

Une particule se déplace sur une ligne horizontale selon la loi :

$$x = f(t) = 19,6t - 4,9t^2 \quad (t \text{ est en secondes, } x \text{ est en mètres}).$$

1) Quelle est sa vitesse au départ ?

2) Au bout de combien de temps sa vitesse sera-t-elle réduite de moitié ?

À quelle distance de l'origine sera-t-elle alors ?

3) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$. En déduire la distance maximale atteinte par la particule et le temps au bout duquel elle sera revenue à son point de départ.

Application 2

Une particule se déplace sur une ligne horizontale selon la loi :

$$x = f(t) = t^3 - 6t^2 + 15t \quad (t \text{ en secondes, } x \text{ en mètres}).$$

1) Calculer sa vitesse de déplacement $v(t) = f'(t)$.

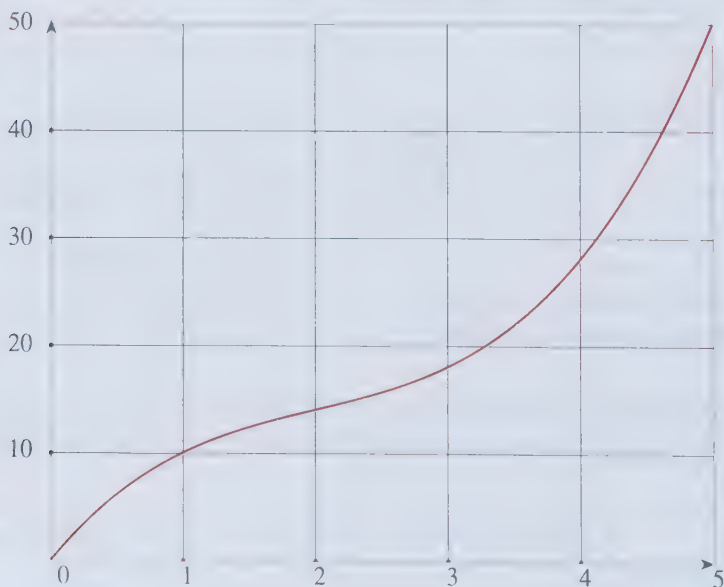
2) Étude des variations de la vitesse

a) Calculer $v'(t)$ puis étudier son signe.

b) Établir le tableau de variation de v sur $[0 ; 5]$.

c) À quel instant t_0 la vitesse est-elle minimale ?

3) La courbe représentative de f sur $[0 ; 5]$ est donnée ci-dessous.



- a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse t_0 .
- b) Tracer T sur le graphique.
- c) Que constate-t-on sur la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T ?
- d) On souhaite retrouver ce dernier résultat par le calcul.

Pour cela :

- a) Justifier que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T dépend du signe de :

$$d(t) = f(t) - (3t + 8)$$
- b) Calculer $d(t)$ puis vérifier que $d(t) = (t - 2)^3$
- c) En déduire le signe de $d(t)$ et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T .

7 Partie A – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0 ; 45]$ par $f(t) = 45t^2 - t^3$.

- 1) a) Montrer que $f'(t) = 3t(30 - t)$.
- b) Étudier dans un tableau le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle I .
- c) En déduire le tableau de variation de f sur I .
- 2) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	0	10	20	25	30	35	40	45
$f(t)$	0		10 000			12 250		

- 3) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal avec pour unités 1 cm pour 10 en abscisse et 1 cm pour 1 000 en ordonnée.

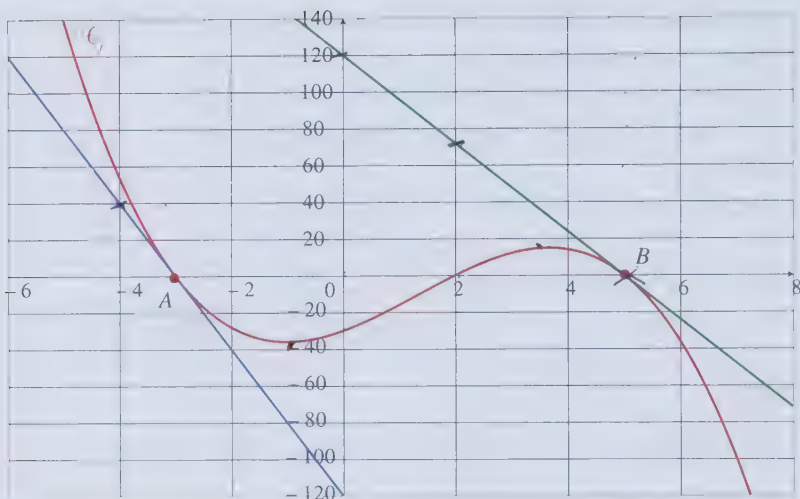
Partie B – Application

À la suite d'une épidémie dans une région, on a constaté que le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est donné par $f(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0 ; 45]$.

- 1) En utilisant la partie A, déterminer le nombre maximal de personnes malades et le jour où il est atteint durant cette période de 45 jours.
- 2) Déterminer graphiquement la période pendant laquelle le nombre de personnes malades est supérieur ou égal à 10 000 (faire apparaître sur le dessin les traits de construction utiles).

Le graphique ci-après donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I = [-5 ; 7]$.

Sont également représentées les tangentes aux points A et B de $\mathcal{C}_f$.



Partie A – Lectures graphiques

- 1) Quelles sont les valeurs de $f(-5)$, $f(2)$, $f(7)$?
- 2) Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?
- 3) Quelles sont les valeurs des nombres dérivés $f'(-3)$ et $f'(5)$?

Partie B – Calculs

Dans cette partie on donne : $f(x) = (x + 3)(2 - x)(x - 5)$.

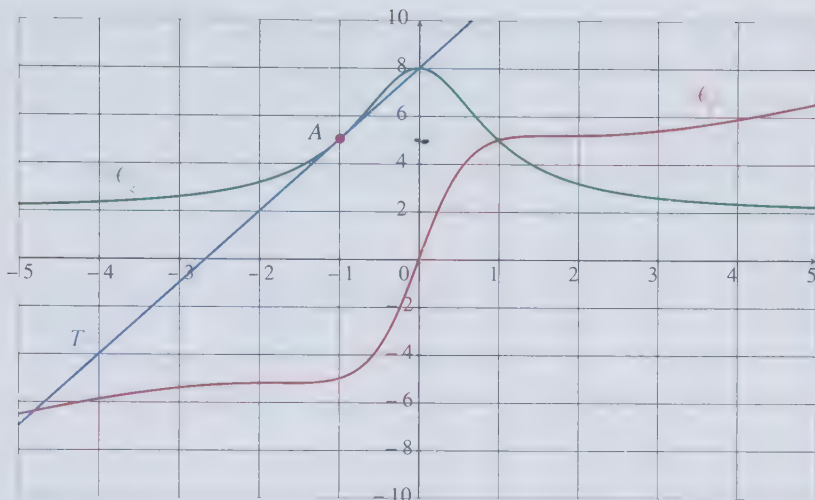
et on se propose de retrouver certains résultats de la partie A par le calcul.

- 1) Calculer $f(-5)$, $f(2)$, $f(7)$.
- 2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- 3) Développer $f(x)$ puis calculer la dérivée $f'(x)$.
- 4) Calculer $f'(-3)$ et $f'(5)$.
- 5) Déterminer les équations des tangentes en A et en B.

 Le graphique (page suivante) donne les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ ainsi que la tangente T au point A de $\mathcal{C}_g$.

Partie A – Lectures graphiques

- 1) Quelles sont les valeurs de $f(-1)$, $f(1)$, $g(-1)$, $g(1)$?
- 2) L'une de ces deux fonctions est paire, l'autre impaire. Préciser laquelle en justifiant.



- 3) Déterminer les ensembles de solutions des équations :
a) $f(x) = 0$. **b)** $f(x) = 5$. **c)** $g(x) = 0$. **d)** $g(x) = 5$.
- 4) Donner un intervalle sur lequel f est croissante et négative.
- 5) Donner un intervalle sur lequel g est décroissante et positive.
- 6) Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$?
- 7) Quelle est la valeur du nombre dérivé $g'(-1)$?

Partie B – Calculs

Dans cette partie on donne les expressions de $f(x)$ et $g(x)$:

$$f(x) = \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x^2 + 8}{x^2 + 1}$$

et on se propose de retrouver certains résultats de la partie A par le calcul.

- 1) Calculer $f(-1)$, $f(1)$, $g(-1)$ et $g(1)$.
- 2) Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 5$.
- 3) On donne $g'(x) = \frac{-12x}{(x^2 + 1)^2}$
 - a)** Calculer $g'(-1)$.
 - b)** Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

10 Un imprimeur doit concevoir une petite affiche publicitaire (voir figure) respectant les contraintes suivantes :

- la largeur ne doit pas dépasser 50 cm ;
- les marges du haut et du bas mesurent 8 cm.
- les marges des côtés mesurent 5 cm ;
- L'aire de l'affiche est $0,1 \text{ m}^2$.

De plus, il doit réaliser cette affiche de façon à ce que l'aire de la surface imprimable (centre de l'affiche) soit maximale. On note respectivement x et y la largeur et la hauteur de l'affiche en cm.

- 1) Dédire du texte une relation liant x et y .
- 2) On note $A(x)$ l'aire de la surface imprimable.

Montrer que : $A(x) = 1160 - 16x - \frac{10000}{x}$.

- 3) Déterminer l'intervalle I dans lequel peut varier x .

4) Calculer la dérivée $A'(x)$ puis vérifier que $A'(x) = \frac{16(x - 25)(x + 25)}{x^2}$

5) Étudier le signe de $A'(x)$ en déduire le tableau de variation de A sur I .

6) En déduire les dimensions de l'affiche satisfaisant les contraintes données et telle que la surface imprimable soit maximale.

11 Après la Seconde guerre mondiale, des villes nouvelles ont vu le jour en France. Dans ce problème, nous allons étudier l'évolution de la population de deux d'entre-elles, que nous appellerons ville A et ville B .

Ces deux villes ont été créées en 1950. Nous connaissons leurs nombres d'habitants grâce à un recensement décennal, le premier a eu lieu en 1960, le second en 1970...

Partie A

Dans cette partie, nous nous intéressons à la ville B .

On constate que le nombre d'habitants de la ville B , exprimé en milliers d'habitants est donnée par la fonction g définie sur $[0 ; 5]$ par :

$$g(x) = x^2 + 10.$$

(x représente le nombre de décennies depuis la création de la ville).

1) Combien d'habitants y avait-il à la création de la ville ?

2) a) Calculer l'image de $\frac{2}{3}$.



b) Traduire $x = \frac{2}{3}$ en années et mois.

3) a) Déterminer les antécédents de 26.

b) Déterminer au bout de combien d'années la population initiale aura doublé.

4) a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$g(x)$		10,25	11		14			22,25		30,25	

b) Tracer $\mathcal{C}_g$, la courbe représentative de g , dans un repère orthonormé d'unités :

– sur l'axe des abscisses : 2 cm pour une unité ;

– sur l'axe des ordonnées : 1 cm pour 5 (milliers d'habitants).

Partie B

Dans cette partie, nous voulons comparer l'évolution de la population des deux villes.

1) On considère que la population de la ville A, exprimée en milliers d'habitants, est donnée par : $f(x) = 5x + 6$; $x \in [0 ; 5]$.

Dans le repère précédent tracer D , la représentation graphique de f .

2) À l'aide du graphique :

a) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les deux villes ont le même nombre d'habitants

b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la population de la ville B est inférieure à celle de la ville A.

3) Par le calcul :

a) Montrer que $g(x) - f(x) = x^2 - 5x + 4$.

b) Montrer que $(x - 1)(x - 4) = x^2 - 5x + 4$.

c) En déduire la résolution de l'équation $g(x) = f(x)$.

d) À l'aide d'un tableau de signes, résoudre $g(x) \leq f(x)$.

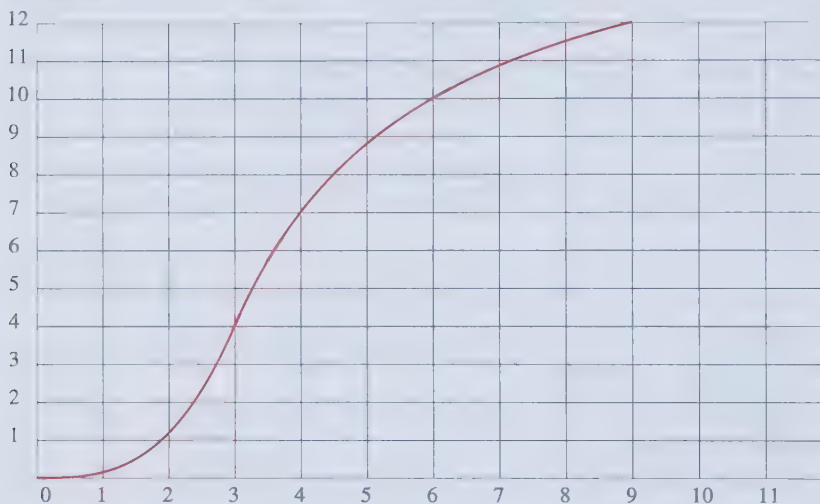
Vérifier la cohérence de ces résultats avec la réponse à la question 2)iii) de la partie B.

12 Début janvier 2012 apparaissent les premiers cas d'une épidémie inconnue dans une région de Chine. Elle prend vite beaucoup d'ampleur, inquiétant partout dans le monde la communauté médicale. Début mars, le gouvernement chinois met en place des mesures préventives dans le but de ralentir la propagation de ce fléau. Dans la nuit du mardi 15 mai 2012, le Docteur Chang et son équipe terminent la mise au point d'un traitement. Hélas, ce traitement doit durer plusieurs mois, et les malades, très contagieux, doivent être isolés dans des hôpitaux spécialisés.

Le 1^{er} juillet 2012 ouvrent les premiers centres de soins spécialisés, permettant d'accueillir 500 malades. Ensuite, chaque mois, ouvrent de nouveaux centres permettant de traiter 500 nouveaux malades.

Aujourd'hui, 1^{er} octobre 2012, on se demande si on parviendra à endiguer l'épidémie. On considère qu'on y sera parvenu si les capacités d'accueil des établissements de soins deviennent supérieures au nombre de malades.

Les autorités chinoises ont relevé le nombre de malades régulièrement et nous ont transmis cette information sur le graphique ci-dessous.



En abscisse, x représente le nombre de mois écoulés depuis le 1^{er} janvier 2012 (donc $x = 0$ correspond au 1^{er} janvier 2012, $x = 1$ au 1^{er} février 2012, $x = 2$ au 1^{er} mars 2012...).

En ordonnée, y représente le nombre de milliers de malades.

Partie A : Étude du graphique

1) D'après le graphique, quel était le nombre de malades au 1^{er} avril 2012 ? Au 1^{er} mai 2012 ? Au 1^{er} octobre 2012 ?

À quelle date le nombre de malades atteint-il 10 000 ?

2) Quel est le sens de variation de la fonction représentée ?

3) Représenter la tangente à la courbe au point de coordonnées (3 ; 4) sachant qu'elle passe par le point A(4 ; 8).

Quel est son coefficient directeur ?

4) Observer la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Le programme de prévention lancé début mars semble-t-il efficace ? Expliquer.

Partie B : Choix du modèle

Un mathématicien propose de modéliser la situation à partir du 1^{er} avril 2012 à l'aide d'une fonction f définie sur $[3 ; 40]$ par : $f(x) = 16 - \frac{36}{x}$.

x correspondant au nombre de mois écoulés depuis le 1^{er} janvier 2012, et $f(x)$ au nombre de malades en milliers.

1) Calculer les images de 3, de 4, de 9.

Calculer les antécédents éventuels de 10.

2) Calculer la fonction dérivée f' .

3) Quel est le sens de variation de f ?

4) Combien vaut le nombre dérivé en 3 ?

5) Expliquer pourquoi la fonction proposée semble convenir.

6) Expliquer pourquoi le nombre de malades (en milliers) pouvant être accueillis dans des établissements de soins peut être représenté par la fonction g définie par $g(x) = 0,5x - 2,5$ sur $[5 ; 40]$.

Partie C : Prévisions

On décide d'utiliser un tableau pour faire les prévisions futures à l'aide des fonctions f et g définies précédemment.

	A	B	C	D	E	F
1	Nombres de mois écoulés depuis le 1 ^{er} janvier 2012	3	4	5	6	
2	Nombre de malades en milliers					
3	Capacités d'accueil des centres de soins (en milliers de malades)	0	0	0		
4						
5						
6						
7						

1) Quelle formule faut-il taper dans la case B2, que l'on recopiera vers la droite afin de remplir automatiquement les cases C2, D2... ?

2) Quelle formule faut-il taper dans la case E3, que l'on recopiera vers la droite afin de remplir automatiquement les cases E4, E5... ?

3) À l'aide d'un tableau ou de la fonction table de votre calculatrice, poursuivez les prévisions jusqu'au 40^e mois.

Parviendra-t-on à éradiquer l'épidémie ? Si oui, à quelle date ? Quel sera alors le nombre de malades ?

Corrigés

1 Les nombres dérivés cherchés sont les coefficients directeurs des tangentes en A , B , O et C respectivement.

On lit donc (voir *Méthodes*, point 2) :

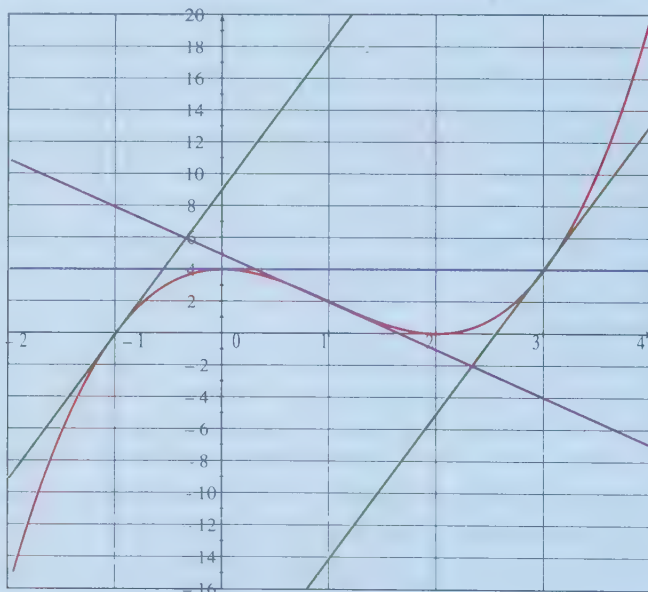
$$f'(-2) = -16 \quad f'(-1) = 0 \quad f'(0) = -8 \quad \text{et} \quad f'(2) = 0.$$

2 1) $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Avec éventuellement une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

x	-1	0	1	3
$f'(x)$	9	0	-3	9

4 On construit alors les tangentes demandées grâce aux nombres dérivés qui donnent leurs coefficients directeurs (voir *Méthodes*, point 2), d'où le graphique :



Remarque : On peut noter que les tangentes en -1 et en 3 sont parallèles car elles ont le même coefficient directeur 9.

1) $f'(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ d'où le tableau de variation :

x	0	1	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-4	-7	20

2) $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$.

x	-1	0	2	3	
$6x$	-	0	+	+	
$x-2$	-		-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		0		0	
	-8		-8		

3) $f'(x) = -5 - \frac{4}{x^2}$. On constate que pour $x \in [1 ; 5]$ on a $f'(x) < 0$

donc f est strictement décroissante sur I .

4) $f'(x) = 9x^2 + 4 + \frac{6}{x^2}$

Pour $x \in I$ on a $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur I .

5) Remarquer que $f(x) = x - 7 + \frac{9}{x}$.

$$\text{D'où } f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x^2}.$$

Pour $x \in I$ on a $x + 3 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x - 3)$, d'où le tableau de variation :

x	1	3	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	3	-1	3,9

Partie A : Lectures graphiques

1) On lit $f(-2) = 0$; $f(0) = 8$; $f(5) = -7$.

2) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

On lit donc deux solutions : -2 et 4.

3) Tableau de signe de $f(x)$:

x	-3	-2	4	5	
$f(x)$	-	0	+	0	-

4) Tableau de variation de f :

x	-3	1	5
$f(x)$	-7	9	-7

5) Le nombre dérivé $f'(-2)$ est, par définition, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2.

Or le point d'abscisse -2 est A et la tangente en ce point est T_1 qui a pour coefficient directeur 6, on a donc $f'(-2) = 6$.

De même, $f'(1) = 0$ (coefficient directeur de T_2) ;

et $f'(2) = -2$ (coefficient directeur de T_3).

Partie B : Calculs

1) $f(-2) = (-2+2)(4+2) = 0 \times 6 = 0$

De même, $f(0) = 2 \times 4 = 8$ et $f(5) = 7 \times (-1) = -7$.

2) On obtient le signe de $f(x)$ en étudiant le signe des deux facteurs, d'où le tableau :

x	-3	-2	4	5
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$4-x$	$+$		0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0

3) En développant on obtient $f(x) = 4x - x^2 + 8 - 2x$ donc :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8.$$

D'où $f'(x) = -2x + 2$.

4) On retrouve alors :

$$f'(-2) = 4 + 2 = 6 \quad f'(1) = -2 + 2 = 0 \quad \text{et} \quad f'(2) = -4 + 2 = -2.$$

Partie A

1) a) On lit $C(40) = 250$ et $C(100) = 850$.

b) Un coût de production de 400 € correspond à une production de 60 litres.

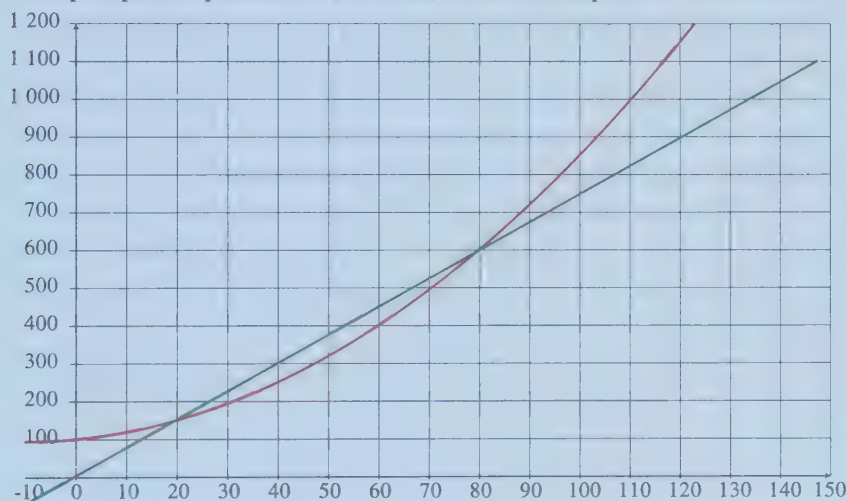
2) La vente de 40 litres rapporte $40 \times 7,50 = 300$ € et le coût de production de ces 40 litres est de 250 €, le laboratoire réalise donc un bénéfice de 50 €.

Pour 100 litres, la vente rapporte 750 € mais la fabrication a coûté 850 €, le laboratoire subit donc une perte de 100 €.

3) La vente de x litres rapporte $7,50 \times x$ euros.

La recette journalière est donc $R(x) = 7,5x$.

Sa représentation graphique est la droite d'équation $y = 7,5x$ qui passe (par exemple) par les points $O(0 ; 0)$ et $A(80 ; 600)$, ce qui donne :



4) On constate que la recette est supérieure au coût de production pour x compris entre 20 et 80. Le laboratoire est donc bénéficiaire pour une production comprise entre 20 et 80 litres.

Partie B

1) Le bénéfice journalier est : $B(x) = R(x) - C(x)$.

donc $B(x) = 7,5x - (0,0625x^2 + 1,25x + 100) = -0,0625x^2 + 6,25x - 100$.

2) Pour étudier les variations de B , calculons sa dérivée :

$$B'(x) = -0,125x + 6,25.$$

B' s'annule pour $x = \frac{6,25}{0,125} = 50$, d'où le tableau de variation :

x	20	50	80
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	0	56,25	0

3) On en déduit que pour obtenir un bénéfice maximal de 56,25 € le laboratoire doit fabriquer 50 litres du produit par jour.

6 Application 1

1) La vitesse est $v(t) = f'(t) = 19,6 - 9,8t$.

donc au départ on a $v(0) = f'(0) = 19,6 \text{ m.s}^{-1}$.

2) Sa vitesse sera réduite de moitié lorsqu'elle sera égale à $\frac{19,6}{2} = 9,8$.

$$\text{Or } f'(t) = 9,8 \Leftrightarrow 19,6 - 9,8t = 9,8 \Leftrightarrow 9,8t = 9,8 \Leftrightarrow t = 1.$$

C'est donc au bout d'une seconde.

On a $f(1) = 19,6 - 4,9 = 14,7$. Elle sera donc alors à une distance de 14,7 m.

3) $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 9,8t = 19,6 \Leftrightarrow t = 2$ d'où le tableau de variation :

t	0	2	4
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	19,6	0

Il en résulte que la distance maximale est 19,6 m et qu'au bout de 4 secondes elle sera revenue à son point de départ.

Application 2

1) $v(t) = 3t^2 - 12t + 15$.

2) a) $v'(t) = 6t - 12 = 6(t - 2)$

donc $v'(t)$ s'annule pour $t = 2$ et $v'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 2$.

b) D'où le tableau de variation :

t	0	2	5		
$v'(t)$		-	0	+	
$v(t)$	15		3		30

c) On constate que la vitesse est minimale à l'instant $t_0 = 2$.

3) a) T a pour coefficient directeur $f'(2) = v(2) = 3$ donc son équation réduite est de la forme $y = 3t + b$.

De plus, elle passe par le point de coordonnées $(2 ; f(2))$ et $f(2) = 14$.

On en déduit que l'on doit avoir : $14 = 3 \times 2 + b$ d'où $b = 8$.

T a donc pour équation : $y = 3t + 8$.

Elle passe (par exemple) par les points de coordonnées $(0 ; 8)$ et $(4 ; 20)$.

b) D'où le graphique :



c) On constate que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T pour $t < 2$ et au-dessus pour $t > 2$.

(On dit que le point d'abscisse $t_0 = 2$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$)

4) a) Si $d(t) > 0$ alors $f(t) > 3t + 8$ donc $\mathcal{C}_f$ sera au-dessus de T et inversement.

b) $d(t) = t^3 - 6t^2 + 15t - (3t + 8) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8$

et $(t-2)^3 = (t-2)^2(t-2) = (t^2 - 4t + 4)(t-2) = t^3 - 2t^2 - 4t^2 + 8t + 4t - 8$.

On a donc bien $d(t) = (t-2)^3$.

c) Si $t > 2$ alors $t-2 > 0$ d'où $(t-2)^3 > 0$ et alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T .

Si $t < 2$ alors $t-2 < 0$ d'où $(t-2)^3 < 0$ et alors $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de T .

Partie A – Étude d'une fonction

1) a) $f'(t) = 45 \times 2t - 3t^2 = 90t - 3t^2 = 3t(30 - t)$.

b) On obtient le tableau de signes :

t	0		30		45
$3t$	0	+		+	
$30 - t$		+	0	-	
$f'(t)$	0	+	0	-	

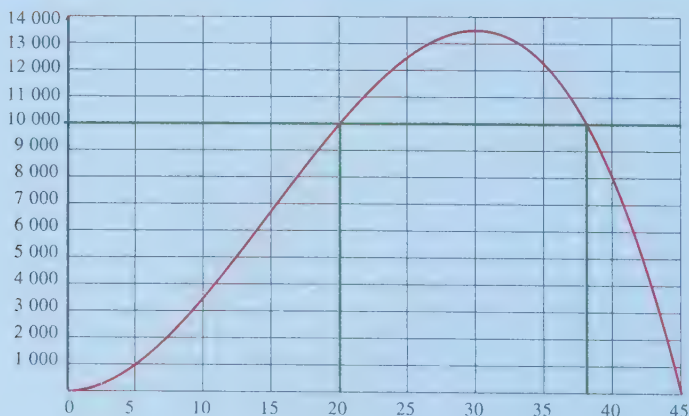
c) D'où le tableau de variation :

t	0		30		45
$f(t)$	0		13 500		0

2)

t	0	10	20	25	30	35	40	45
$f(t)$	0	3 500	10 000	12 500	13 500	12 250	8 000	0

3)



Partie B – Application

- 1) D'après le tableau de variation de la partie A, le nombre maximal de malades est 13 500. Il est atteint le 30^e jour de l'épidémie.
- 2) Le nombre de personnes malades est supérieur ou égal à 10 000 entre le 20^e et le 38^e jour de l'épidémie (voir graphique, page précédente).

Partie A – Lectures graphiques

- 1) On lit $f(-5) = 140$, $f(2) = 0$ et $f(7) = -100$.
- 2) L'équation $f(x) = 0$ a pour solutions -3 ; 2 et 5 (abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses).
- 3) $f'(-3) = -40$ (coefficient directeur de la tangente en A).
 $f'(5) = -24$ (coefficient directeur de la tangente en B).

Partie B – Calculs

- 1) $f(-5) = (-2)(7)(-10) = 140$.
 $f(2) = (5)(0)(-3) = 0$.
 $f(7) = (10)(-5)(2) = -100$.
- 2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(2-x)(x-5) = 0$.
 $\Leftrightarrow x+3 = 0$ ou $2-x = 0$ ou $x-5 = 0$.
 $\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 2$ ou $x = 5$.
- 3) En développant, on obtient :
$$\begin{aligned} f(x) &= (2x - x^2 + 6 - 3x)(x - 5) \\ &= (-x^2 - x + 6)(x - 5) \\ &= -x^3 + 5x^2 - x^2 + 5x + 6x - 30 \\ &= -x^3 + 4x^2 + 11x - 30. \end{aligned}$$

D'où : $f'(x) = -3x^2 + 8x + 11$.

- 4) On a donc : $f'(-3) = -3 \times 9 + 8 \times (-3) + 11 = -27 - 24 + 11 = -40$.
et : $f'(5) = -3 \times 25 + 8 \times 5 + 11 = -75 + 40 + 11 = -24$.

5) La tangente en A a pour coefficient directeur $f'(-3) = -40$, son équation est donc de la forme $y = -40x + b$.

Pour calculer b , traduisons que cette tangente passe par A et donc que les coordonnées de A vérifient l'équation :

$$y_A = -40x_A + b \Leftrightarrow 0 = -40 \times (-3) + b \text{ d'où } b = -120.$$

Finalement, la tangente en A a pour équation : $y = -40x - 120$.

Et, de même, on obtient l'équation de la tangente en B : $y = -24x + 120$.

Partie A : Lectures graphiques

1) $f(-1) = -5$ $f(1) = 5$ $g(-1) = 5$ $g(1) = 5$.

2) f et g sont définies sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ qui est symétrique par rapport à 0.

f est impaire car sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

g est paire car $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3) a) L'équation $f(x) = 0$ a une seule solution : 0.

b) L'équation $f(x) = 5$ a une seule solution : 1.

c) L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

d) L'équation $g(x) = 5$ a deux solutions : -1 et 1 .

4) f est croissante et négative sur (par exemple) l'intervalle $[-5 ; 0]$.

5) g est décroissante et positive sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

6) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ pour $1 \leq x \leq 5$, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est l'intervalle $[1 ; 5]$.

7) $g'(-1)$ est le coefficient directeur de T , c'est-à-dire 3.

Partie B : Calculs

1) $f(-1) = \frac{(-1)^3 + 9 \times (-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{-10}{2} = -5$ $f(1) = \frac{1+9}{1+1} = 5$.

$$g(-1) = \frac{2 \times (-1)^2 + 8}{(-1)^2 + 1} = \frac{2+8}{1+1} = \frac{10}{2} = 5 \quad g(1) = \frac{10}{2} = 5.$$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 9x = 0$.

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + 9 = 0.$$

Mais $x^2 + 9 = 0$ est impossible, il y a donc une seule solution : 0.

$$g(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 8}{x^2 + 1} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 8 = 5x^2 + 5.$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) = 0.$$

D'où les deux solutions : -1 et 1 .

3) a) $g'(-1) = \frac{-12 \times (-1)}{((-1)^2 + 1)^2} = \frac{12}{2^2} = \frac{12}{4} = 3$.

b) Le sens de variation de g dépend du signe de sa dérivée, or pour $x \in [0 ; 5]$, on a $-12x \leq 0$ et $(x^2 + 1)^2 > 0$ donc $g'(x) \leq 0$.

g est donc décroissante sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

10 1) L'aire de l'affiche est égale à $x \times y$ en cm^2 (puisque x et y sont en cm).

Or $0,1 \text{ m}^2 = 1000 \text{ cm}^2$ on a donc : $xy = 1\,000$.

2) Compte tenu des marges imposées, l'aire de la surface imprimable est : $(x - 10)(y - 16)$.

Or d'après la première question, on a : $y = \frac{1\,000}{x}$.

$$\text{D'où : } A(x) = (x - 10) \left(\frac{1\,000}{x} - 16 \right) = 1\,000 - 16x - \frac{10\,000}{x} + 160.$$

$$\text{Ce qui donne bien : } A(x) = 1160 - 16x - \frac{10\,000}{x}.$$

3) Compte tenu des marges de 5 cm de chaque côté, x doit être au moins égal à 10 et ne doit pas dépasser 50, donc $I = [10 ; 50]$.

$$\begin{aligned} \text{4) } A(x) &= 1160 - 16x - 10\,000 \times \frac{1}{x} \\ \text{donc } A'(x) &= -16 - 10\,000 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$A'(x) = -16 + \frac{10\,000}{x^2} = \frac{10\,000 - 16x^2}{x^2} = \frac{16(625 - x^2)}{x^2} = \frac{16(25 - x)(25 + x)}{x^2}$$

5) On peut noter que pour $x \in I$ on a $25 + x > 0$ et $x^2 > 0$ le signe de $A'(x)$ ne dépend donc de $25 - x$. D'où le tableau de variation de A :

x	10	25	50
$A'(x)$	+	0	-
$A(x)$	0	360	160

6) On constate donc que la surface imprimable a une aire maximale de 360 cm^2 lorsque $x = 25$.

$$\text{On a alors } y = \frac{1\,000}{25} = 40.$$

L'affiche devra donc faire 25 cm de largeur sur 40 cm de hauteur.

11 Partie A

1) À la création de la ville : $x = 0$, le nombre d'habitants est alors égal à $g(0)$:
 $g(0) = 0^2 + 10 = 10$.

La population de la ville à sa création est donc de 10 000 habitants.

2) a) $g\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 10 = \frac{4}{9} + \frac{90}{9} = \frac{94}{9}$.

b) x est exprimé en décennies, alors $x = \frac{2}{3}$ représente $\frac{2}{3}$ de décennies soit

$$\frac{2}{3} \times 10 \text{ années.}$$

Or $\frac{20}{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3}$.

Donc $x = \frac{2}{3}$ représente 6 ans et 8 mois.

3) a) On résout $g(x) = 26 \Leftrightarrow x^2 + 10 = 26 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 4)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -4$. Or $x \geq 0$ donc $S = \{4\}$.

26 possède un seul antécédent par g : 4.

b) Soit x le nombre d'années demandées, il s'agit de résoudre :

$$g(x) = 2g(0) \Leftrightarrow g(x) = 20 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt{10} \text{ ou } x = -\sqrt{10}, \text{ or } x \geq 0,$$

d'où $S = \{ \sqrt{10} \}$. Or $\sqrt{10} \approx 3,16$.

Donc c'est au bout de 32 ans que la population aura doublé.

4) a)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$g(x)$	10	10,25	11	12,25	14	16,25	19	22,25	26	30,25	35

b) Voir courbe (page suivante).

Partie B

f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite d'équation réduite :

$$y = 5x + 6.$$

1)

x	0	2	5
$f(x)$	6	16	31

D est la droite passant par les points de coordonnées :

$$(0 ; 6) ; (2 ; 16) ; (5 ; 31).$$

2) a) Il s'agit de résoudre graphiquement $g(x) = f(x)$ c'est-à-dire de trouver les abscisses des points d'intersections de $\mathcal{C}_g$ et de D .

On lit sur le graphique $x = 1$ et $x = 4$.

b) Il s'agit de résoudre graphiquement $g(x) \leq f(x)$, c'est-à-dire de trouver les abscisses des points de $\mathcal{C}_g$ situés en dessous de D .

On lit sur le graphique $1 \leq x \leq 4$ soit $x \in [1 ; 4]$.

3) a) $g(x) - f(x) = x^2 + 10 - (5x + 6) = x^2 + 10 - 5x - 6 = x^2 - 5x + 4.$

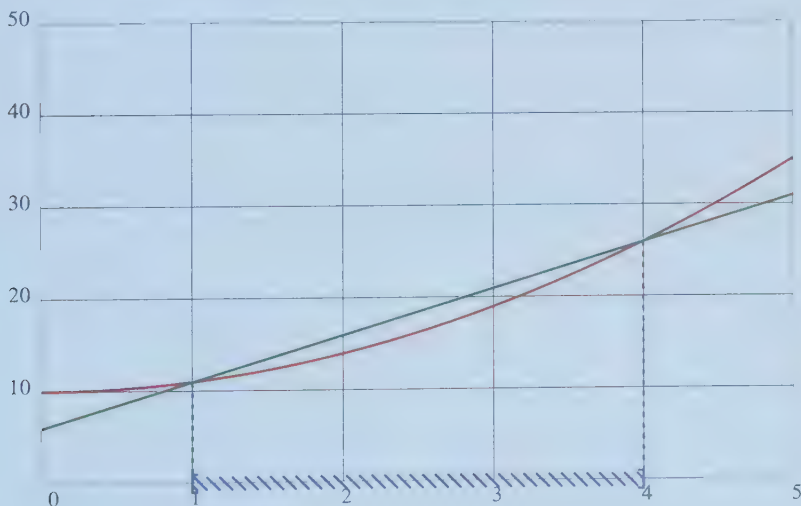
b) $(x - 1)(x - 4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4.$

c) $g(x) = f(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4$ d'où $S = \{1 ; 4\}.$

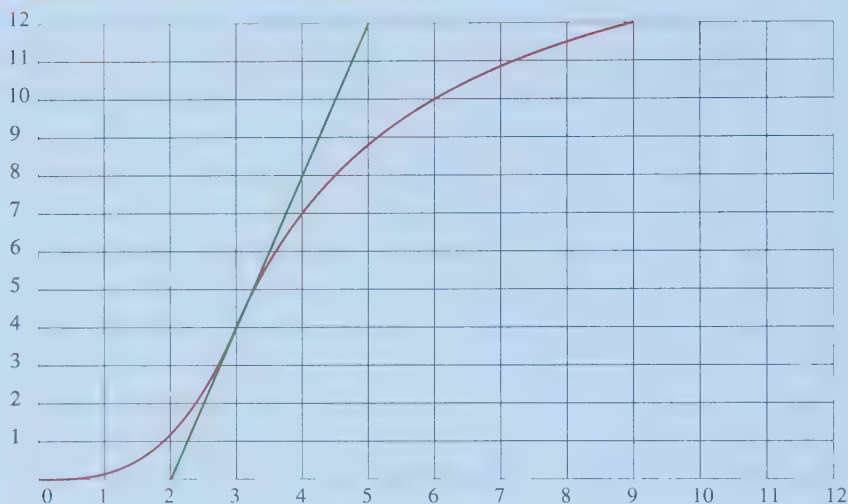
d) $g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) \leq 0.$ On effectue un tableau de signes :

x	0	1	4	5
$x - 1$	-	0	+	+
$x - 4$	-	-	0	+
$(x - 1)(x - 4)$	+	0	-	+

$S = [1 ; 4]$. On retrouve le résultat obtenu par la méthode graphique.



12 Partie A : Étude du graphique



1) Il y avait 4 000 malades au 1^{er} avril 2012, 7 000 malades au 1^{er} mai 2012, 12 000 malades au 1^{er} octobre 2012.

Le nombre de malades atteint 10 000 au 1^{er} juillet 2012.

2) La fonction représentée est croissante.

3) Le coefficient directeur de la tangente représentée est $a = \frac{8-4}{4-3} = \frac{4}{1} = 4$.

4) La courbe traverse sa tangente.

Cela signifie que la vitesse d'augmentation du nombre de malades diminue. Le programme de prévention semble donc efficace.

Partie B : Choix du modèle

$$1) f(3) = 16 - \frac{36}{3} = 4 ; f(4) = 16 - \frac{36}{4} = 7 ; f(9) = 16 - \frac{36}{9} = 12.$$

$$f(x) = 10 \Leftrightarrow 16 - \frac{36}{x} = 10 \Leftrightarrow -\frac{36}{x} = -6 \Leftrightarrow x = \frac{36}{6} \Leftrightarrow x = 6.$$

Le seul antécédent de 10 est 6.

$$2) f'(x) = 0 - \frac{-36}{x^2} = \frac{36}{x^2}.$$

Il est clair que f' est strictement positive donc f est strictement croissante.

$$4) f'(3) = \frac{36}{3^2} = 4.$$

5) La fonction proposée semble convenir car on trouve les mêmes résultats dans la partie B avec la fonction f et dans la partie A avec le graphique.

6) La fonction g , définie par $g(x) = 0,5x - 2,5$ sur $[5 ; 40]$, est la fonction affine qui vaut 0 quand $x = 5$ (ce qui correspond au 1^{er} juin 2012), 0,5 quand $x = 6$ (donc au 1^{er} juillet 2012) puis augmente de 0,5 chaque fois que x augmente de 1 (donc chaque mois).

Elle représente bien les capacités d'accueil qui sont de 0 millier de malades le 1^{er} juin 2012, 0,5 millier de malades le 1^{er} juillet 2012, puis qui augmentent de 0,5 millier chaque mois.

Partie C : Calculs

1) La formule qu'on va taper dans la case B2 et recopier vers la droite est :
=16-36/B1.

(Cette formule nous donne le nombre de malades en fonction du nombre de mois écoulés depuis le 1^{er} janvier 2012 : c'est la formule de calcul de la fonction f adaptée au tableur.)

2) La formule qu'on va taper dans la case E3 et recopier vers la droite est :
=0,5*E1-2,5

(C'est la formule de calcul de la fonction g adaptée au tableur.)

3) On voit sur le tableur ou sur les tables de la calculatrice que le nombre de malades reste supérieur au nombre de places en centres de soins jusqu'au 34^e mois. Ensuite, au bout de 35 mois écoulés, il y a 14 971 malades pour 15 000 places en centres de soins.

On parviendra donc à éradiquer l'épidémie au bout de 35 mois, c'est-à-dire au 1^{er} décembre 2014. Il y aura alors 14 971 malades.

Testez-vous

Dans tout l'exercice, f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $I = [0 ; 10]$ et sa courbe représentative est notée $\mathcal{C}_f$.

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte, entourer la bonne.

1 Si f est constante sur I alors, quel que soit $x \in I$, $f'(x) =$

- a) 1 b) 0 c) x

2 Si $f(x) = 1,2x^3 - 5,6x^2 + 7$ alors $f'(x) =$

- a) $3,6x^2 - 11,2x$ b) $3,6x^2 - 5,6x$ c) $4,8x^2 - 11,2x + 7$

3 Si $f(x) = 5x^2 + 6x + 3$ alors f est...

- a) décroissante sur I b) constante sur I c) croissante sur I

4 Si la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -5x + 3$ alors $f'(2) =$

- a) 3 b) -5 c) -7

5 Si $f'(4) = 3$ alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 est parallèle à la droite d'équation :

- a) $y = 4x - 1$ b) $y = 3x + 5$ c) $y = -4x + 3$

6 Si $f(x) = \frac{x+5}{2}$ alors $f'(x) =$

- a) 0 b) 0,5 c) 1

7 Si $f'(x) = -3x^2 + 7$ alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur...

- a) 2 b) 43 c) -5

8 Si $f(3) = 4$ et si $f'(3) = 1$

alors une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 est :

- a) $y = 4x + 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = 3x + 5$

Réponses : **1** b) ; **2** a) ; **3** c) ; **4** b) ; **5** b) ; **6** b) ; **7** c) ; **8** b).

La fonction logarithme décimal

Le cours

Introduction

En chimie, l'acidité d'une solution est mesurée par son pH, défini en fonction de la concentration en ions H_3O^+ , par : $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$.

$[\text{H}_3\text{O}^+]$ est la concentration (en moles par litre) d'ions H_3O^+ de la solution.

$\log$ est une fonction appelée logarithme décimal.

Notre calculatrice permet de calculer l'image d'un nombre par diverses fonctions à l'aide des touches correspondantes : cos, sin, tan... Elle dispose aussi de la touche $\log$.

En tapant « $\log 2 =$ » sur la calculatrice, on obtient une valeur approchée de $\log 2$ (on dit « logarithme décimal de 2 » ou « log de 2 ») : $\log 2 \approx 0,301$.

À l'aide de la calculatrice (ou d'Excel), nous pouvons constater diverses propriétés de cette fonction $\log$.

Ensemble de définition

En cherchant (à la calculatrice) le logarithme décimal de nombres quelconques, on se rend compte que **seuls les nombres strictement positifs ont une image par la fonction $\log$** (on obtient un message d'erreur si le nombre est négatif ou nul).

On peut donc supposer, et on admettra que :

L'ensemble de définition de la fonction logarithme décimal est :
 $]0 ; +\infty[$.

Formules algébriques

Toujours à l'aide de la calculatrice ou d'Excel, nous pouvons remplir un tableau de valeurs de cette fonction (valeurs données à 10^{-3} près) :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log x$	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1

Deux valeurs semblent exactes et nous l'admettons :

$$\log 1 = 0 \text{ et } \log 10 = 1.$$

On peut faire diverses constatations dans ce tableau :

$$\log 2 + \log 3 \approx 0,301 + 0,477 \approx 0,778 \approx \log 6 \quad (\text{et } 2 \times 3 = 6).$$

$$\log 2 + \log 4 \approx 0,301 + 0,602 \approx 0,903 \approx \log 8 \quad (\text{et } 2 \times 4 = 8).$$

$$\log 2 + \log 5 \approx 0,301 + 0,699 \approx 1 \approx \log 10 \quad (\text{et } 2 \times 5 = 10).$$

Il semblerait que le logarithme d'un produit, par exemple $\log 6 = \log (2 \times 3)$, soit égal à la somme des logarithmes, donc sur cet exemple $\log 2 + \log 3$.

Nous pouvons prendre divers exemples à la calculatrice qui confirment ce résultat. Nous allons l'admettre :

Propriété 1 : Pour tous réels strictement positifs x et y , on a :

$$\log (x \times y) = \log x + \log y.$$

À partir de cette formule, on en déduit que :

$$\log x + \log \left(\frac{1}{x} \right) = \log \left(x \times \frac{1}{x} \right) = \log 1 = 0$$

Donc $\log \left(\frac{1}{x} \right)$ est l'opposé de $\log x$.

Propriété 2 : Pour tout réel x strictement positif :

$$\log \left(\frac{1}{x} \right) = -\log x.$$

On peut aussi l'écrire : $\log (x^{-1}) = -\log x$.

On déduit aussi de la première formule que :

$$-\log(x^2) = \log(x \times x) = \log x + \log x = 2 \log x ;$$

$$-\log(x^3) = \log(x^2 \times x) = \log x^2 + \log x = 2 \log x + \log x = 3 \log x.$$

Et ainsi de suite...

Propriété 3 : Soit un réel strictement positif x et un entier relatif n .

$$\text{Alors : } \log(x^n) = n \log x$$

Remarque : Cette formule reste valable si n est négatif.

Nous pouvons le vérifier avec $n = -2$ par exemple :

$$\log(x^{-2}) = \log(x^{-1} \times x^{-1}) = 2 \log(x^{-1}) = 2 \times (-\log x) = -2 \log x.$$

Si x est un nombre strictement positif, alors $x = (\sqrt{x})^2$.

On en déduit que $\log x = \log[(\sqrt{x})^2] = 2 \log(\sqrt{x})$, et donc :

$$\log(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log x.$$

Propriété 4 : Soit un réel strictement positif x .

$$\text{Alors : } \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$$

En utilisant les deux premières formules, on peut écrire :

$$\text{D'où : } \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \log x + \log\left(\frac{1}{y}\right) = \log x - \log y.$$

Propriété 5 : Pour tous réels strictement positifs x et y , on a :

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

Cas des puissances de 10

D'après la calculatrice, $\log 10 = 1$.

En appliquant la formule (3) aux puissances de 10, on obtient :

$$-\log(10^2) = 2 \times \log 10 = 2 \times 1 = 2 ;$$

$$-\log(10^5) = 5 \times \log 10 = 5 \times 1 = 5 ;$$

$$-\log(10^{-3}) = -3 \times \log 10 = -3 \times 1 = -3.$$

D'une manière générale :

Propriété 6 : Pour tout entier relatif n , on a :

$$\log(10^n) = n$$

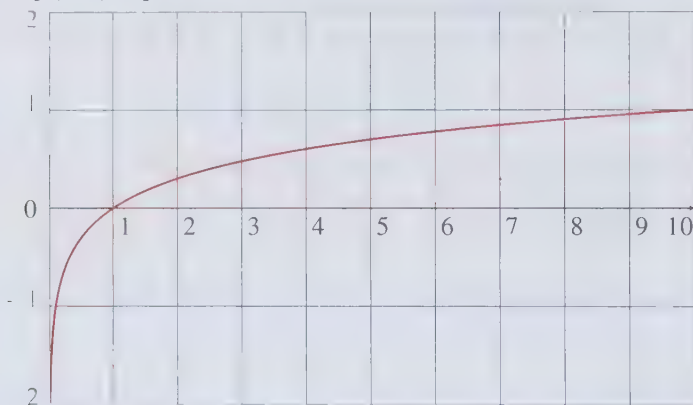
● Application

Nous avons vu que $\log 2 \approx 0,301$. Sachant cela, nous pouvons calculer $\log 2000$ à 10^{-3} près. En effet :

$$\log 2000 = \log 2 + \log 1000 = \log 2 + 3 \approx 3,301.$$

■ Signe et sens de variation de la fonction logarithme décimal

Nous avons représenté à l'aide d'un logiciel la fonction logarithme décimal sur $]0,01 ; 10]$.



Nous allons admettre à partir de ce graphique que la fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

De plus, comme $\log(1) = 0$, on en déduit que :

La fonction logarithme décimal est strictement négative sur $]0 ; 1[$ et strictement positive sur $]1 ; +\infty[$.

Conséquences : Étant donné deux réels x et y strictement positifs, on a :

$$x = y \Leftrightarrow \log x = \log y ;$$

$$x < y \Leftrightarrow \log x < \log y.$$

Étant donné un réel x strictement positif et un entier relatif n , on a :

$$\log x = n \Leftrightarrow x = 10^n.$$

Ce dernier résultat est presque immédiat.

En effet, $\log x = n \Leftrightarrow \log x = \log (10^n)$ (puisque $\log (10^n) = n$) $\Leftrightarrow x = 10^n$.

Applications à la résolution d'équations et d'inéquations

1) Déterminer n tel que $2^n = 32768$.

$$2^n = 32768 \Leftrightarrow \log (2^n) = \log 32768 \Leftrightarrow n \log 2 = \log 32768$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\log 32\,768}{\log 2}.$$

En tapant ce résultat à la calculatrice, on obtient $n = 15$.

3) On place un capital de 1 000 € sur un compte à intérêts composés rapportant 3,5 % par an.

Au bout de n années, il y aura sur le compte $1\,000 \times 1,035^n$ €.

On veut savoir au bout de combien de temps il y aura plus de 3 000 € sur ce compte.

On doit résoudre l'inéquation :

$$1\,000 \times 1,035^n > 3\,000 \text{ qui revient à } 1,035^n > 3.$$

Comme la fonction logarithme décimal est strictement croissante, on a :

$$\log (1,035^n) > \log 3 \text{ donc } n \log 1,035 > \log 3.$$

$$\text{et enfin } n > \frac{\log 3}{\log 1,035} \approx 31,9.$$

Attention ! En divisant les deux membres par $\log 1,035$, on ne change pas le sens de l'inégalité, car $\log 1,035$ est positif puisque $1,035 > 1$.

Donc il y aura plus de 3 000 € sur le compte au bout de 32 ans.

À retenir

L'ensemble de définition de la fonction logarithme décimal est $]0 ; +\infty[$.

• Formules algébriques

(1) $\log (x \times y) = \log x + \log y$

(2) $\log \left(\frac{1}{x} \right) = -\log x$

(3) $\log (x^n) = n \log x$

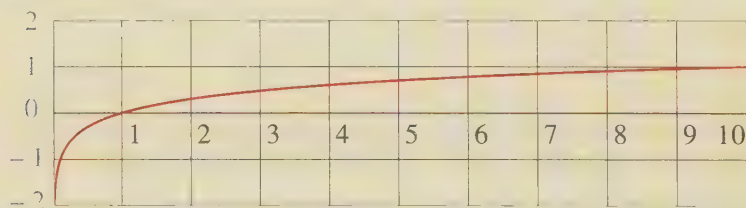
(4) $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$

(5) $\log \left(\frac{x}{y} \right) = \log x - \log y$

(6) $\log (10^n) = n$

En particulier, $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$.

• Représentation graphique, signe et sens de variation de la fonction logarithme décimal



La fonction logarithme décimal est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction logarithme décimal est **strictement négative** sur $]0 ; 1[$ et **strictement positive** sur $]1 ; +\infty[$.

Étant donné deux réels x et y strictement positifs, on a :

$$x = y \Leftrightarrow \log x = \log y.$$

$$x < y \Leftrightarrow \log x < \log y.$$

Étant donné un réel x strictement positif et un entier relatif n , on a :

$$\log x = n \Leftrightarrow x = 10^n.$$

Les méthodes

1

Comment simplifier des écritures utilisant les logarithmes décimaux ?

Énoncé

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \log 0,25 + \log 4\,000$$

$$B = \log 121\,000 - \log 11$$

$$C = \log 12 - \log 6 + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$D = \frac{1}{2} \log(4^{-3}) + 3\log 2$$

$$E = 4\log 25 - 2\log(\sqrt{5})$$

Corrigé commenté

Il s'agit d'utiliser les six règles de calcul :

$$\log(x \times y) = \log x + \log y \quad (\text{Propriété 1})$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x \quad (\text{Propriété 2})$$

$$\log(x^n) = n \log x \quad (\text{Propriété 3})$$

$$\log(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log x \quad (\text{Propriété 4})$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \quad (\text{Propriété 5})$$

$$\log(10^n) = n \quad (\text{Propriété 6})$$

Remarque : plusieurs méthodes sont possibles selon la règle utilisée.

$$A = \log 0,25 + \log 4\,000 = \log(0,25 \times 4\,000) \quad (1)$$

$$= \log 1\,000$$

$$= \log(10^3) \quad (6)$$

$$= 3.$$

$$B = \log 121\,000 = \log(121 \times 1\,000) \\ = \log 121 + \log 1\,000 \quad (1)$$

$$= \log(11^2) + 3$$

$$= 2 \log 11 + 3. \quad (3)$$

$$C = \log 12 - \log 6 + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \log\left(\frac{12}{6}\right) + \log 3 - \log 2 + \log\left(\frac{1}{3}\right) \quad (5)$$

$$= \log 2 + \log 3 - \log 2 - \log 3 \quad (2)$$

$$= 0.$$

Remarque : On aurait pu également transformer C comme ci-dessous :

$$C = \log 12 - \log 6 + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{1}{3}\right) = \log\left(\frac{12}{6} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \log 1 = 0.$$

$$D = \frac{1}{2} \log(4^{-3}) + 3 \log 2 = -\frac{3}{2} \log 4 + 3 \log 2$$

$$= -\frac{3}{2} \log(2^2) + 3 \log 2$$

$$= -3 \log 2 + 3 \log 2 \quad (3)$$

$$= 0.$$

$$E = 4 \log 25 - 2 \log(\sqrt{5}) = 4 \log(5^2) - 2 \times \frac{1}{2} \log 5 \quad (4)$$

$$= 8 \log 5 - \log 5 \quad (3)$$

$$= 7 \log 5$$

2

Comment résoudre des équations et des inéquations ?

Énoncé

1) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $\log x = 2$.

b) $\log x = -1$.

c) $2 \log x + 1 = 0$.

d) $\log x > 10$.

e) $\log x < -50$.

f) $\log(x+1) = \log(2x-3)$.

2) Trouver le plus petit entier naturel n tel que :

a) $1,1^n > 3$.

b) $0,98^n < 0,5$.

c) $50 \times 1,5^n > 3\,000$.

d) $4\,000 \times (1,06)^n \geq 4\,500 \times (1,04)^n$.

Corrigé commenté

Il s'agit d'utiliser ici les propriétés vues dans le cours.

Étant donné deux réels x et y strictement positifs, on a :

$$\log x = \log y \Leftrightarrow x = y$$

$$\log x < \log y \Leftrightarrow x < y$$

$$\log x > \log y \Leftrightarrow x > y$$

1) a) Pour tout entier relatif n , on a : $\log 10^n = n$.

Alors, $\log x = 2 \Leftrightarrow \log x = \log (10^2) \Leftrightarrow x = 10^2$ d'où $S = \{10^2\}$.

b) De même, $\log x = -1 \Leftrightarrow \log x = \log (10^{-1}) \Leftrightarrow x = 10^{-1}$ d'où $S = \{10^{-1}\}$.

c) $2\log x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2\log x = -4 \Leftrightarrow \log x = -2 \Leftrightarrow x = 10^{-2}$
d'où $S = \{10^{-2}\}$.

Remarque : Pour ces exemples, on aurait pu utiliser la propriété :

Étant donné un réel x strictement positif et un entier relatif n , on a :

$$\log x = n \Leftrightarrow x = 10^n.$$

d) $\log x > 10 \Leftrightarrow \log x > \log (10^{10}) \Leftrightarrow x > 10^{10}$ d'où $S =]10^{10}; +\infty[$.

e) $\log x < -50 \Leftrightarrow \log x < \log (10^{-50}) \Leftrightarrow x < 10^{-50}$ d'où $S =]0; 10^{-50}[$.

En effet, la fonction logarithme décimal est définie sur $]0; +\infty[$.

f) Pour ce type d'équations de la forme : $\log u(x) = \log v(x)$.

Étape 1 : Il faut tout d'abord trouver l'ensemble de définition de cette équation, c'est-à-dire trouver les valeurs de x pour lesquelles $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

Étape 2 : On utilise : $\log u(x) = \log v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$, puis on résout cette équation.

Étape 3 : On ne garde que les solutions qui appartiennent à l'ensemble de définition.

Étape 1 : $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ et $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

L'ensemble de définition de l'équation est donc $]\frac{3}{2}; +\infty[$.

Étape 2 : $\log(x + 1) = \log(2x - 3) \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow -x = -4 \Leftrightarrow x = 4$.

Étape 3 : $4 \in]\frac{3}{2}; +\infty[$ d'où $S = \{4\}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } 1,1^n > 3 &\Leftrightarrow \log(1,1^n) > \log 3 && \text{En effet, } x > y \Leftrightarrow \log x > \log y. \\ &\Leftrightarrow n \log(1,1) > \log 3 && \text{En effet, } \log(x^n) = n \log x. \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\log 3}{\log(1,1)} && \text{En effet, } \log 1,1 > 0 \text{ et diviser les deux} \\ & && \text{membres d'une inégalité par un même} \\ & && \text{nombre positif conserve l'ordre.} \\ &\Leftrightarrow n > 11,526... && \text{À l'aide de la calculatrice.} \end{aligned}$$

Alors le plus petit entier n vérifiant cette inégalité est **12**.

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,98^n < 0,5 &\Leftrightarrow \log(0,98^n) < \log 0,5 && \text{En effet, } x < y \Leftrightarrow \log x < \log y. \\ &\Leftrightarrow n \log(0,98) < \log 0,5 && \text{En effet, } \log(x^n) = n \log x. \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\log 0,5}{\log 0,98} && \text{En effet, } \log 0,98 < 0 \text{ et diviser les deux} \\ & && \text{membres d'une inégalité par un même} \\ & && \text{nombre négatif change l'ordre.} \\ &\Leftrightarrow n > 34,309... && \text{À l'aide de la calculatrice.} \end{aligned}$$

Alors le plus petit entier n vérifiant cette inégalité est **35**.

Pour le **a)** et le **b)**, il faut transformer l'inégalité pour la mettre sous la forme $a^n > b$.

$$\begin{aligned} \text{c) } 50 \times 1,5^n > 3\,000 &\Leftrightarrow 1,5^n > \frac{3\,000}{50} \\ &\Leftrightarrow 1,5^n > 60 \\ &\Leftrightarrow \log(1,5^n) > \log 60 \\ &\Leftrightarrow n \log 1,5 > \log 60 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\log 60}{\log 1,5} && \text{En effet, } \log 1,5 > 0. \\ &\Leftrightarrow n > 10,09... \end{aligned}$$

Alors le plus petit entier n vérifiant cette inégalité est **11**.

$$\begin{aligned} \text{d) } 4\,000 \times (1,06)^n &\geq 4\,500 \times (1,04)^n && \Leftrightarrow \frac{(1,06)^n}{(1,04)^n} \geq \frac{4\,500}{4\,000} \\ & && \Leftrightarrow \left(\frac{1,06}{1,04}\right)^n \geq \frac{9}{8} \\ & && \Leftrightarrow \log \left[\left(\frac{1,06}{1,04}\right)^n \right] \geq \log \left(\frac{9}{8}\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n \log \left(\frac{1,06}{1,04} \right) \geq \log \left(\frac{9}{8} \right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\log \left(\frac{9}{8} \right)}{\log \left(\frac{1,06}{1,04} \right)} \text{ car } \log \left(\frac{1,06}{1,04} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 6,18 \dots$$

Alors le plus petit entier n vérifiant cette inégalité est 7.

3

Comment utiliser le logarithme décimal pour étudier des suites géométriques ?

Énoncé

1) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 1,5.

Quel est le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 3\,000$?

2) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 0,3.

Quel est le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq 10^{-4}$?

Corrigé commenté

1) $u_n = u_0 \times q^n$. Alors, $u_n = 3 \times (1,5)^n$.

Il s'agit donc de résoudre l'inéquation $3 \times (1,5)^n \geq 3\,000$.

Cette inéquation est équivalente à $(1,5)^n \geq 1\,000$.

Or, $x \geq y \Leftrightarrow \log x \geq \log y$.

Alors, $(1,5)^n \geq 1\,000 \Leftrightarrow \log (1,5)^n \geq \log 1\,000$

$$\Leftrightarrow n \log (1,5) \geq \log 10^3$$

$$\Leftrightarrow n \log (1,5) \geq 3$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{3}{\log(1,5)} \quad \text{En effet, } \log (1,5) > 0.$$

$$\Leftrightarrow n \geq 17,03 \dots$$

Le plus petit entier n tel que $u_n \geq 3\,000$ est donc 18.

2) $u_n = u_0 \times q^n$. Alors, $u_n = 2 \times (0,3)^n$.

Il s'agit donc de résoudre l'inéquation $2 \times (0,3)^n \leq 10^{-4}$.

Cette inéquation est équivalente à $(0,3)^n \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$

Or, $x \geq y \Leftrightarrow \log x \geq \log y$.

$$\text{Alors, } (0,3)^n \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \log (0,3)^n \leq \log \left(\frac{1}{2} \times 10^{-4} \right).$$

$$\Leftrightarrow n \log(0,3) \leq \log \left(\frac{1}{2} \right) + \log (10^{-4}).$$

$$\Leftrightarrow n \log(0,3) \leq -\log (2) - 4.$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\log(2) - 4}{\log(0,3)} \quad \text{En effet, } \log (0,3) < 0.$$

$$\Leftrightarrow n \geq 8,22\dots$$

Le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-4}$ est donc **9**.

Si $a < 1$ alors $\log a < 0$ et si $a > 1$ alors $\log a > 0$.

Alors, pour la résolution de l'inéquation, il faut être vigilant, lors d'une division par $\log a$, à conserver ou à changer le sens de l'inégalité. On pensera, également, à arrondir à l'entier naturel immédiatement supérieur lors de la conclusion.

Les exercices

1) Écrire en fonction de $\log 2$ les nombres suivants :

$$a = \log \left(\frac{5}{3} \right) + \log 1,2.$$

$$b = \log 3 - \log 150.$$

$$c = \log 8000.$$

$$d = \log 0,2 + 3 \log 0,001.$$

$$e = \frac{1}{2} \log 49 - \log 14.$$

$$f = 3 - 2 \log 5.$$

2) Calculer la valeur exacte de la somme suivante :

$$S = \log \left(\frac{1}{2} \right) + \log \left(\frac{2}{3} \right) + \log \left(\frac{3}{4} \right) + \dots + \log \left(\frac{98}{99} \right) + \log \left(\frac{99}{100} \right).$$

1) Résoudre les équations :

a) $\log(x + 1) = 1.$

b) $\log(x + 2) = 1 + \log x.$

c) $\log(2x + 3) = 0.$

d) $\log(x + 3) + \log(x + 2) = \log(6 - x).$

2) Résoudre les inéquations :

a) $\log(-x + 5) < 0.$

b) $\log(2x - 3) > \log(6 - x).$

c) $\log x + \log 2 \leq -2.$

d) $\log(x - 4) + \log(x - 2) < 3 \log 2.$

3) Développer le produit $(x + 3)(x - 2)$ puis résoudre les équations :

$(E_1) : (\log x)^3 + (\log x)^2 - 6 \log x = 0.$

$(E_2) : \log(x^3) + \log(x^2) - 6 \log x = 0.$

Un observatoire météorologique de montagne a noté que l'épaisseur moyenne du manteau neigeux qui était de 116 cm en 1960 diminuait régulièrement depuis de 1,9 % par an à cause du réchauffement climatique.

- 1) Quelle était l'épaisseur moyenne en 2000 ?
- 2) À partir de quelle année l'épaisseur moyenne aura-t-elle été divisée par 4 (par rapport à 1960) si l'évolution se poursuit à ce rythme ?

 La luminosité (ou éclat) d'une étoile est appelée **magnitude**.

Dans l'antiquité les astronomes croyaient que les étoiles étaient fixes et toutes à la même distance. Ils avaient alors classé les étoiles en six « grandeurs » car ils pensaient que plus une étoile était brillante plus elle était grosse. On parlait alors d'étoile de première grandeur (pour les plus brillantes) etc.

À notre époque, on distingue :

1. La **magnitude apparente** notée m (luminosité observée depuis la Terre) qui dépend de la distance d de l'étoile à la Terre.

2. La **magnitude absolue** notée M qui caractérise l'intensité réelle de la lumière émise par l'étoile.

Les nombres m , d et M sont liés par la relation : $m - M = 5 \log d - 5$ où d est exprimé en **parsecs**. Le parsec est une unité de distance astronomique telle que : $1 \text{ parsec} \approx 3,09 \times 10^{16} \text{ m} \approx 3,26 \text{ a.l. (année-lumière)}$.

Exprimer d en fonction de m et M puis compléter le tableau ci-dessous :

Étoile	m	M	d
Antarès	0,92	- 5,28	
Bételgeuse	0,41	- 7,2	
Sirius	- 1,46	1,4	
Vega	0	0,58	

 On admet qu'entre 0 et 2 ans le taux d'anticorps présents dans le sang d'un nourrisson (en g/L) est donné approximativement en fonction de son âge x (en mois) par :

$$f(x) = x + 28,6 - 27,6 \log(x + 4).$$

1) Calculer le taux d'anticorps d'un bébé de 6 mois.

2) Compléter avec des valeurs arrondies au dixième le tableau suivant :

x	0	1	3	6	8	10	12	15	18	21	24
$f(x)$			8,3			7,0					

3) Tracer la courbe représentative de f .

4) À quel âge un nourrisson retrouve-t-il le taux d'anticorps qu'il avait à la naissance ?

7 1) On considère une suite géométrique (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = u_n \times 5.$$

Exprimer u_n en fonction de n , puis déterminer n tel que $u_n > 30\,000$.

2) On considère une suite géométrique (u_n) définie par $u_1 = 1$ et

$$u_{n+1} = u_n \times 0,5.$$

Exprimer u_n en fonction de n , puis déterminer n tel que $u_n < 10^{-5}$.

4 On admet que tant qu'un organisme est vivant, la quantité de carbone 14 qu'il contient est constante.

Après sa mort, cette quantité diminue selon une loi connue et donc, connaissant la proportion x de carbone 14 restant on peut en déduire l'âge approximatif $f(x)$ (en siècles) de l'organisme grâce à la formule :

$$f(x) = -187,2 \log x.$$

1) Calculer l'âge d'un fossile qui contient encore 35 % de son carbone 14.

2) Quel pourcentage de carbone 14 contient une momie âgée de 4 000 ans ?

3) Quel est le sens de variation de f ?

4) Compléter avec des valeurs arrondies au dixième le tableau suivant :

x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$									

5) Tracer la courbe représentative de f .

5 On admet que la capacité pulmonaire $f(x)$ d'un être humain (exprimée en litres) à l'âge x (exprimé en années) est donnée pour $x \in [10 ; 100]$ par la formule :

$$f(x) = \frac{253 \log x - 220}{x}.$$

1) Calculer la capacité pulmonaire à 40 ans.

2) La courbe représentative de f est donnée page suivante.

D'après le graphique :

1) À quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ?

Quelle est cette valeur maximale ?

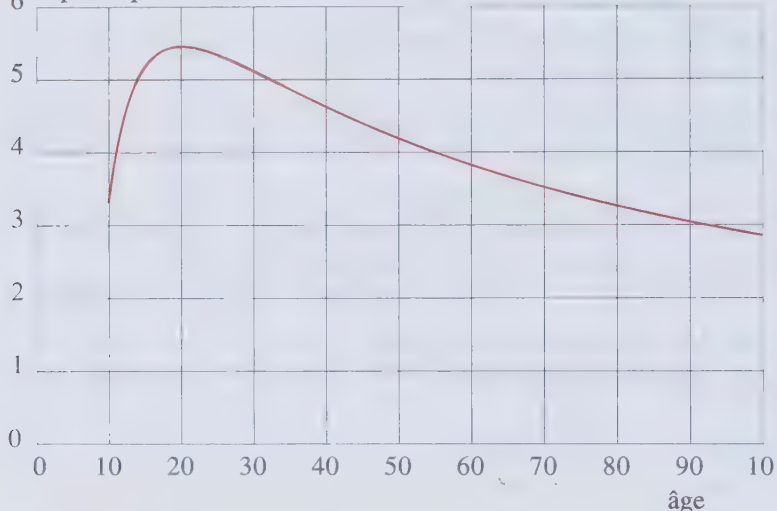
2) Déterminer l'intervalle d'âge durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres.

3) On admet que la dérivée de f est définie approximativement par :

$$f'(x) = \frac{110(3 - 2,3 \log x)}{x^2}$$

- Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ (on donnera la solution arrondie à 10^{-1}).
- Étudier le signe de $f'(x)$ puis établir le tableau de variation de f .
- En déduire la valeur du maximum de f (et comparer avec 2.iii).

6 capacité pulmonaire



10 On se propose d'étudier la répartition des températures au sein d'un cylindre métallique creux de 20 cm de diamètre extérieur et de 2 cm de diamètre intérieur, chauffé préalablement.

Soit $T(x)$ la température (en degrés Celsius) en un point situé à la distance x (en cm) de l'axe du cylindre.

On a établi que, pour $x \in [1 ; 10]$, $T(x)$ est donné en fonction de x par :

$$T(x) = a \log x - 2x^2 + b \quad (\text{où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes}).$$

1) Sachant que l'on a relevé une température de 145 °C à la surface intérieure du cylindre et de 30 °C à la surface extérieure, déterminer a et b .

(On notera qu'un point de la surface intérieure est à 1 cm de l'axe du cylindre et qu'un point de la surface extérieure est à 10 cm de l'axe).

2) On admet dorénavant que : $T(x) = 83 \log x - 2x^2 + 147$.

a) Compléter avec des valeurs arrondies à l'unité le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(x)$		164				140				

b) Tracer la représentation graphique de T .

3) Par lecture graphique, déterminer à quelle distance de l'axe, la température :

a) est égale à 100°C .

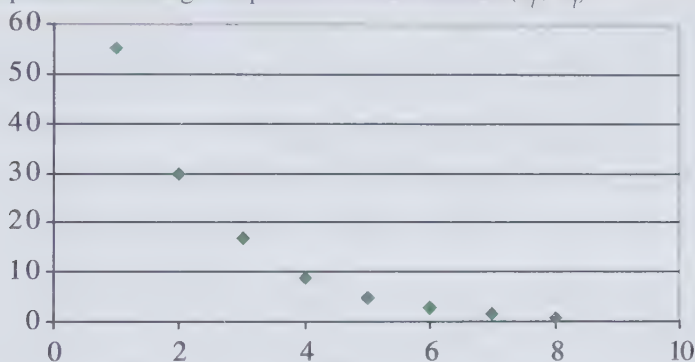
b) est maximale.

11 On lâche une balle d'une hauteur de 1 mètre. Celle-ci effectue alors plusieurs rebonds sur le sol avant de s'immobiliser.

Le tableau ci-dessous donne les hauteurs (en cm) des huit premiers rebonds.

Numéro du rebond : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Hauteur du rebond : h_i	55	30	17	9	5	3	1,5	0,8

On a représenté le nuage de points de coordonnées $(x_i; h_i)$:



1) Dire pourquoi un ajustement affine ne paraît pas justifié.

2) On décide alors d'effectuer un changement de variable en posant :

$$y = \log h.$$

Compléter le tableau suivant avec des valeurs arrondies au centième :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i = \log h_i$		1,48			0,70			-0,10

3) Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$. Que remarque-t-on ?

4) Déterminer avec la calculatrice l'équation $y = ax + b$ de la droite D d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés (on arrondira a et b au centième).

5) À l'aide de cet ajustement, déterminer quel est le premier rebond dont la hauteur sera inférieure à 1 mm.

12 Lors de l'épidémie de SRAS (*Severe Acute Respiratory Syndrome*) de 2003 le nombre N de cas déclarés dans une partie du monde a évolué comme suit :

Jour	4 avril	11 avril	18 avril	23 avril	28 avril	6 mai
Rang du jour : x_i	4	11	18	23	28	36
N_i	2322	2890	3461	4288	5050	6972

À la date du 6 mai, constatant que l'évolution n'est pas linéaire et dans le but de faire des prévisions on décide de faire un changement d'inconnue en posant : $y = \log N$

1) Compléter avec des valeurs arrondies au centième le tableau ci-dessous :

x_i	4	11	18	23	28	36
$y_i = \log N_i$	3,37					

2) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

3) Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer.

4) On choisit comme droite d'ajustement celle qui passe par G et qui a pour coefficient directeur 0,015.

Déterminer son équation (réduite) et la tracer.

5) Si l'évolution s'était poursuivie à ce rythme, à quelle date pouvait-on prévoir un nombre de cas déclarés supérieur à 10 000 ?

13 L'acuité visuelle peut être caractérisée par l'angle de résolution minimal (*Minimum Angle of Resolution*) de l'œil.

Dans l'échelle classique (Monoyer) notée en dixièmes, une acuité de 10/10 correspond à un MAR de 1 minute, une acuité de 5/10 à un MAR de 2 minutes, etc.

On recommande aujourd'hui aux ophtalmologistes d'utiliser l'échelle LogMAR où l'acuité est mesurée par le log du MAR.

On a ainsi la correspondance :

MAR (en minutes)	Valeur LogMAR (arrondie à 10^{-1})	Valeur Monoyer (en dixièmes)
20		
10	1	1
8		
5	0,7	2
4		2,5
2,5		
2	0,3	
1		10
0,5		

1) Compléter le tableau.

2) Soit M la valeur du MAR, L la valeur LogMAR, et D la valeur Monoyer.

Exprimer :

1) L en fonction de M .

b) D en fonction de M .

c) L en fonction de D .

d) D en fonction de L .

14 L'écrevisse américaine fut introduite pour la première fois en Europe à la fin du XIX^e siècle. La présence de celle-ci dans nos cours d'eau entraîne la disparition des écrevisses autochtones.

Dans une rivière du centre de la France, suite à la détection de la présence d'écrevisses américaines en 2000, on décide d'effectuer un recensement annuel des populations d'écrevisses autochtones et américaines.

Ces populations ont été modélisées par les deux suites ci-dessous :

– soit u_n la population d'écrevisses autochtones en $2000 + n$, exprimée en milliers ;

– soit v_n la population d'écrevisses américaines en $2000 + n$, exprimée en milliers.

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison 0,9.

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 0.5$ et de raison 1,2.

1) À partir de quelle année peut-on prévoir que la population d'écrevisses américaines dépasse la population d'écrevisses autochtones ?

2) À combien peut-on estimer les populations respectives à cette date (à la centaine près) ?

15 Partie A : Le décibel

Pour une fréquence donnée, l'oreille humaine est capable de percevoir un son dont on mesure le niveau d'intensité L en décibel (dB) par $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ où I est l'intensité sonore du son étudié alors que I_0 est l'intensité sonore d'un son de référence : $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

1) Le système audio qu'on vient d'installer dans une discothèque a un rendement (intensité sonore) de $I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

Quel est le niveau d'intensité sonore L correspondant en décibel ?

2) Or, la sonorisation de la discothèque doit pouvoir fournir un niveau sonore de 120 dB. Quelle est l'intensité sonore I correspondante ?

Partie B : L'amplificateur

La discothèque doit donc s'équiper d'un amplificateur pour gagner les 60 dB manquant.

Le gain en dB d'un amplificateur est donné par la formule $G = 10 \log A$.

A est le gain en puissance, c'est-à-dire le rapport $A = \frac{P_s}{P_E}$, où P_E désigne la puissance d'entrée et P_s la puissance de sortie de l'amplificateur.

1) On teste un premier modèle qui double la puissance ($A = 2$).

Le niveau sonore en décibel est-il doublé ? Expliquer.

2) On teste un deuxième modèle qui multiplie la puissance par 10 ($A = 10$). Quel est le gain en décibel ?

3) Quel doit être le gain en puissance pour obtenir un gain de 60 dB ?

4) Lors des tests de l'amplificateur, on fixe la puissance d'entrée à $P_E = 4 \times 10^{-3}$ W et on mesure la puissance de sortie P_s que l'on fait varier. On veut construire à l'aide d'un tableur une table de correspondance qui va nous donner le gain en décibel en fonction de P_s .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	Puissance d'entrée en W	0,004							
1									
2									
	Puissance de sortie en W	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
3									
	Gain en décibel								
4									
5									

Quelle formule faut-il écrire dans la case B4, utilisant la valeur de la puissance d'entrée écrite en B1, que l'on va ensuite recopier vers la droite ?

Partie C : La loi

Afin d'être en règle vis-à-vis de la loi sur le tapage nocturne, le gérant de la discothèque doit s'assurer que le niveau sonore à l'extérieur de son établissement est inférieur à 25 dB quand il est de 120 dB à l'intérieur. Aussi, il fait installer des plaques d'isolation phonique dans les murs. Chaque plaque absorbe 10 % de l'intensité du son exprimée en décibel qui lui parvient.

On pose $u_0 = 120$ et on appelle u_n l'intensité du son en décibel mesurée après la traversé de n plaques d'isolation phonique.

1) Calculer u_1 , u_2 .

2) Déterminer la relation entre u_{n+1} et u_n .

Quelle est la nature de la suite u_n ?

3) Exprimer u_n en fonction de n .

4) Quel niveau d'intensité sonore obtient-on avec 10 plaques d'isolation phonique ? (arrondir à l'unité)

5) Déterminer le nombre de plaques nécessaires pour que la discothèque soit en règle.

10 Un écran circulaire est placé à **mi-chemin** entre un observateur et une source sonore. On admet que la diminution D du niveau sonore (en décibels) qui en résulte est donnée par :

$$D = k \times \log \left(1 + \frac{R^2}{L^2} \right)$$

où L est la distance en mètres entre l'observateur et l'écran

et R est le rayon en mètres de l'écran.

1) Calculer la valeur du coefficient k sachant que pour $R = 1,5$ et $L = 0,5$ on a mesuré une diminution de 20 dB du niveau sonore.

2) Dans cette question l'observateur est situé à 5 m de la source sonore.

On arrondira les résultats au centième.

3) Quelle diminution du niveau sonore pourra noter l'observateur si l'écran a un rayon de 1,80 m ?

4) Quel rayon faudrait-il choisir pour l'écran pour que la diminution du niveau sonore soit de 40 dB ?

1) Dans ce genre d'exercice penser à utiliser les propriétés algébriques de la fonction log et se souvenir que, pour n entier relatif, $\log(10^n) = n$.
Donc, par exemple : $\log 100 = 2$; $\log 1000 = 3$; $\log 0,1 = -1$; $\log 0,01 = -2$.

On peut alors écrire (par exemple) :

$$a = \log\left(\frac{5}{3} \times 1,2\right) = \log\left(\frac{6}{3}\right) = \log 2.$$

$$b = \log\left(\frac{3}{150}\right) = \log\left(\frac{1}{50}\right) = \log\left(\frac{2}{100}\right) = \log 2 - \log 100 = \log 2 - 2.$$

$$c = \log 8 + \log 1000 = \log(2^3) + 3 = 3 \log 2 + 3.$$

$$d = \log(2 \times 0,1) + 3 \times (-3) = \log 2 + \log 0,1 - 9 = \log 2 - 1 - 9 = \log 2 - 10.$$

$$e = \frac{1}{2} \log(7^2) - \log(2 \times 7) = \frac{1}{2} \times 2 \log 7 - \log 2 - \log 7 = -\log 2.$$

$$f = 3 - 2 \log\left(\frac{10}{2}\right) = 3 - 2(\log 10 - \log 2) = 3 - 2(1 - \log 2) = 1 + 2 \log 2.$$

Remarque: On peut pour chaque calcul trouver d'autres démarches, ainsi pour f on aurait pu écrire :

$$f = \log 1000 - \log(5^2) = \log\left(\frac{1000}{25}\right) = \log 40 = \log 4 + \log 10 = 2 \log 2 + 1$$

etc.

2) Deux façons pour calculer S :

Méthode 1 : $\log a + \log b = \log(ab)$ donc

$$S = \log\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100}\right).$$

Or dans le produit de fractions qui est dans la parenthèse on voit que les nombres se simplifient deux à deux, de 2 à 99, et donc il reste :

$$S = \log\left(\frac{1}{100}\right) = -\log 100 \text{ donc } S = -2.$$

Méthode 2 : $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$ donc,

$$S = \log 1 - \log 2 + \log 2 - \log 3 + \log 3 - \log 4 + \dots + \log 99 - \log 100.$$

Et on voit que les termes s'annulent deux à deux, de $\log 2$ à $\log 99$, il reste :

$$S = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2.$$

 Penser à déterminer l'**ensemble de définition** de l'équation considérée que nous noterons D puis écrire l'équation sous la forme **$\log a = \log b$** . Elle équivaut alors à $a = b$ (idem pour les inéquations).

 Cette équation n'est définie que si $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Donc $D =]-1 ; +\infty[$ et elle est alors équivalente à : $\log(x + 1) = \log 10$.

Donc à $x + 1 = 10$ d'où $x = 9$. On a $9 \in D$ donc $S = \{9\}$.

 Il faut : $x + 2 > 0$ et $x > 0$ donc $D =]0 ; +\infty[$, et elle équivaut à :

$$\log(x + 2) = \log 10 + \log x \Leftrightarrow \log(x + 2) = \log(10x) \Leftrightarrow x + 2 = 10x.$$

$$\text{D'où } x = \frac{2}{9} \text{ et puisque } \frac{2}{9} \in D, S = \left\{ \frac{2}{9} \right\}.$$

 $D =]-1,5 ; +\infty[$ et elle équivaut à :

$$\log(2x + 3) = \log 1 \Leftrightarrow 2x + 3 = 1 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1.$$

$-1 \in D$ donc $S = \{-1\}$.

 Il faut : $x + 3 > 0$, $x + 2 > 0$ et $6 - x > 0$ c'est-à-dire $x > -3$, $x > -2$ et $x < 6$ donc $D =]-2 ; 6[$ et elle équivaut à :

$$\log[(x + 3)(x + 2)] = \log(6 - x) \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 6 - x \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0.$$

D'où $x(x + 6) = 0$ et donc $x = 0$ ou $x = -6$.

$0 \in D$ mais $-6 \notin D$ donc $S = \{0\}$.

 Il faut $-x + 5 > 0 \Leftrightarrow x < 5$ donc $D =]-\infty ; 5[$ et l'inéquation équivaut à $\log(-x + 5) < \log 1 \Leftrightarrow -x + 5 < 1 \Leftrightarrow x > 4$.

Donc, compte tenu de D , $S =]4 ; 5[$.

 Il faut $2x - 3 > 0$ et $6 - x > 0$ donc $x > 1,5$ et $x < 6$ d'où $D =]1,5 ; 6[$.

Elle équivaut à : $2x - 3 > 6 - x \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3$ d'où $S =]3 ; 6[$.

 $D =]0 ; +\infty[$ et on a $\log(2x) < \log(10^{-2}) \Leftrightarrow 2x < 0,01 \Leftrightarrow x < 0,005$.

Donc $S =]0 ; 0,005[$.

 $D =]4 ; +\infty[$ et on a $\log[(x - 4)(x - 2)] < \log(2^3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 < 8$.

soit $x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow x(x - 6) < 0$ or, si $x \in D$ on a $x > 0$, donc il faut et il suffit que $x - 6 < 0$ donc $x < 6$. $S =]4 ; 6[$.

 $(x + 3)(x - 2) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6.$

L'équation (E_1) n'est définie que pour $x > 0$ et si l'on pose $X = \log x$ elle devient : $X^3 + X^2 - 6X = 0$ (E).

Pour la résoudre, il faut factoriser, or $X^3 + X^2 - 6X = X(X^2 + X - 6)$ et d'après la question préliminaire $X^2 + X - 6 = (X + 3)(X - 2)$.

Donc finalement $(E_1) \Leftrightarrow X(X + 3)(X - 2) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ ou $X = -3$ ou $X = 2$.

Donc en revenant à x , on a : $\log x = 0$ ou $\log x = -3$ ou $\log x = 2$.

D'où $x = 1$ ou $x = 10^{-3}$ ou $x = 10^2$, ces trois nombres étant positifs, on peut conclure que $S = \{0,001 ; 1 ; 100\}$.

(E_2) elle aussi n'est définie que pour $x > 0$ et elle « ressemble » à (E_1) à première vue. Pourtant elle est entièrement différente car si l'on applique la propriété $\log(x^n) = n \log x$ elle devient : $3 \log x + 2 \log x - 6 \log x = 0$.

C'est-à-dire : $-\log x = 0$ donc $\log x = 0$ donc $x = 1$.

(E_2) n'a donc qu'une solution, $S = \{1\}$.

 Diminuer un nombre de 1,9 % revient à le multiplier par :

$$1 - 0,019 = 0,981.$$

Donc si l'on note E_n l'épaisseur moyenne en $(1960 + n)$, on a :

$$E_0 = 116 \text{ puis } E_1 = 116 \times 0,981 ; E_2 = 116 \times 0,981^2 \text{ etc.}$$

$$E_n = 116 \times 0,981^n$$

(E_n) est une suite géométrique de raison 0,981.

 $2000 = 1960 + 40$ et $E_{40} = 116 \times 0,981^{40} = 53,854 \dots$ soit environ 54 cm.

 $\frac{116}{4} = 29$ on cherche donc le plus petit entier n pour lequel $E_n \leq 29$.

C'est-à-dire : $116 \times 0,981^n \leq 29 \Leftrightarrow 0,981^n \leq \frac{29}{116} \Leftrightarrow 0,981^n \leq 0,25$.

Utilisons alors la fonction $\log$:

$$\log(0,981^n) \leq \log 0,25 \Leftrightarrow n \log 0,981 \leq \log 0,25 \Leftrightarrow n \geq \frac{\log 0,25}{\log 0,981}.$$

On notera l'inversion de l'inégalité car $\log 0,981$ est un nombre négatif !

Finalement cela donne : $n \geq 72,26 \dots$ donc il faut n au moins égal à 73.

C'est donc à partir de 2033 qu'elle aura été divisée par 4.

 $m - M = 5 \log d - 5$ donc $\log d = \frac{m - M + 5}{5}$ d'où $d = 10^{\frac{m - M + 5}{5}}$.

On a alors, pour Antarès par exemple, $\frac{m - M + 5}{5} = \frac{0,92 + 5,28 + 5}{5} = 2,24$.

Donc la distance d'Antarès à la Terre est $d = 10^{2,24} \approx 173,78$ parsecs, soit environ 566,5 a.l.

On trouve de même, pour Bételgeuse : $d \approx 332,7$ parsecs, pour Sirius : $d \approx 2,7$ parsecs, pour Vega : $d \approx 7,7$ parsecs.

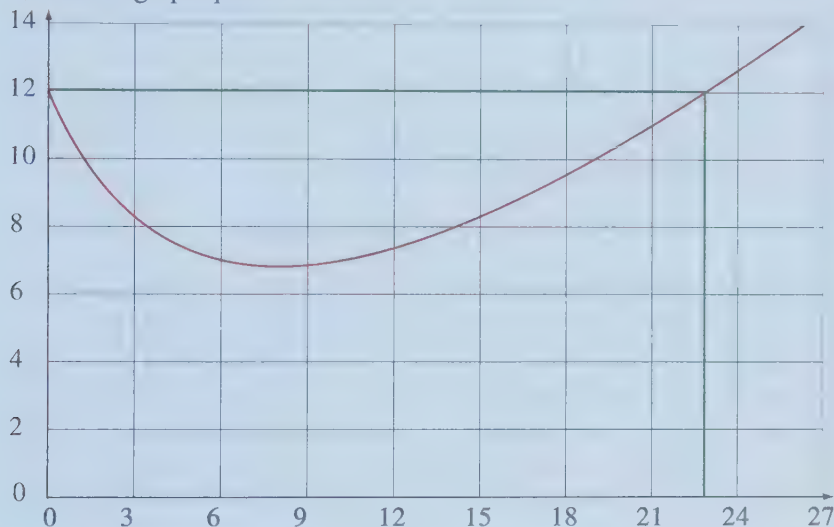
6 1) $f(6) = 6 + 28,6 - 27,6 \log 10$ or $\log 10 = 1$ donc $f(6) = 7$.

Un bébé de 6 mois a donc un taux d'anticorps de 7 g/L.

2) Avec une calculatrice on obtient les valeurs suivantes :

x	0	1	3	6	8	10	12	15	18	21	24
$f(x)$	12	10,3	8,3	7	6,8	7,0	7,4	8,3	9,5	11,0	12,7

3) D'où le graphique :



4) Le tracé vert montre qu'un nourrisson retrouve le taux d'anticorps de 12 g/L qu'il avait à la naissance à environ 23 mois.

7 1) Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 5. La formule $u_n = u_0 \times q^n$ donne $u_n = 3 \times 5^n$.

On cherche n tel que $u_n > 30\,000$, cela revient à $3 \times 5^n > 30\,000$.

Puis à $5^n > 10\,000$.

Comme la fonction logarithme est strictement croissante, on a :

$$\log(5^n) > \log 10\,000 \text{ puis } n \log 5 > 4 \text{ et donc } n > \frac{4}{\log 5} \text{ soit } n > 5,7\dots$$

(on ne change pas le sens de l'inégalité car on divise par $\log 5$ qui est positif puisque $5 > 1$). Il faut donc prendre $n \geq 6$.

2) Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 0,5.

La formule $u_n = u_p \times q^{n-p}$ donne $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ et donc :

$$u_n = 1 \times 0,5^{n-1} = 0,5^{n-1}.$$

On cherche n tel que $u_n < 10^{-5}$, cela revient à $0,5^{n-1} < 10^{-5}$.

Comme la fonction logarithme est strictement croissante, on a :

$$\log(0,5^{n-1}) < \log(10^{-5}) \text{ puis } (n-1) \log 0,5 < -5 \text{ et donc } n-1 > \frac{-5}{\log 0,5}$$

soit $n-1 > 16,6\dots$ (on ne change pas le sens de l'inégalité car on divise par $\log 0,5$ qui est négatif puisque $0,5 < 1$). Il faut donc prendre $n \geq 18$.

1) 35 % correspond à $x = 0,35$ et $f(0,35) = -187,2 \log(0,35) \approx 85,35$.

Ce fossile a donc environ 8 500 ans.

2) On cherche x pour que $f(x) = 40$, c'est-à-dire :

$$-187,2 \log x = 40 \Leftrightarrow \log x = \frac{40}{-187,2}.$$

D'où $\log x \approx -0,214$. On en déduit $x \approx 10^{-0,214} \approx 61$.

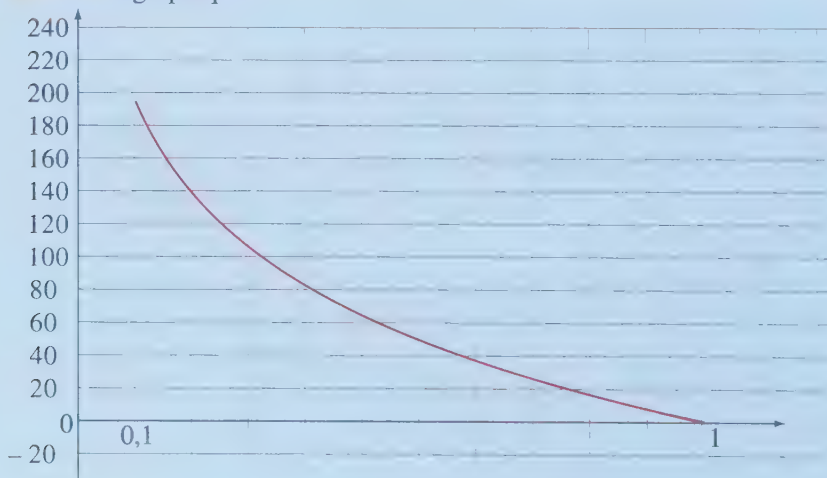
Donc cette momie contient encore environ 61 % de son carbone 14.

3) La fonction $\log$ étant strictement croissante, en la multipliant par le nombre négatif $(-187,2)$ on obtient une fonction (f) strictement décroissante.

4) On obtient les valeurs suivantes :

x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$	130,9	97,9	74,5	56,4	41,5	29	18,1	8,6	0

5) D'où le graphique :



7) $f(40) = \frac{253 \log 40 - 220}{40} \approx 4,6$ donc la capacité pulmonaire à 40 ans est d'environ 4,6 litres.

2) D'après le graphique, on atteint une capacité maximale de 5,5 litres à 20 ans.

b) La capacité reste supérieure à 5 litres entre (environ) 14 et 32 ans.

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2,3 \log x = 0 \Leftrightarrow \log x = \frac{3}{2,3} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{3}{2,3}} \approx 20,2$.

b) De même, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log x \leq \frac{3}{2,3} \Leftrightarrow x \leq 20,2$.

D'où le tableau de variation de f :

x	10	20,2	100
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	3,3	5,5	2,9

On retrouve ainsi une valeur du maximum en accord avec le graphique.

10) D'après le texte on a : $T(1) = 145$ et $T(10) = 30$.

Donc : $a \log 1 - 2 + b = 145$ et $a \log 10 - 200 + b = 30$.

Or $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$, donc ces deux équations se réduisent à :

$$-2 + b = 145 \text{ et } a - 200 + b = 30.$$

Alors la première donne : **$b = 147$** .

Et en reportant cette valeur dans la seconde, on obtient :

$$a = 30 + 200 - 147 \text{ donc } \mathbf{a = 83}.$$

D'où : $T(x) = 83 \log x - 2x^2 + 147$.

* 2) Avec une calculatrice on obtient les valeurs arrondies suivantes :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(x)$	145	164	169	165	155	140	119	94	64	30

b) D'où le graphique page suivante.

3) On lit alors facilement que :

a) la température est de 100°C à environ 7,8 cm de l'axe.

b) la température est maximale à environ 3 cm de l'axe.

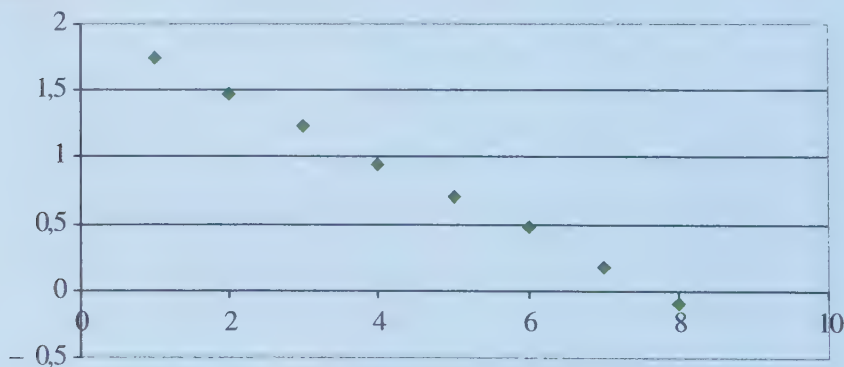


Les points du nuage dessinent plutôt une courbe qu'une droite donc un ajustement affine ne paraît pas justifié.

2) On obtient les valeurs suivantes :

x_L	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_L = \log h_L$	1,74	1,48	1,23	0,95	0,70	0,48	0,18	-0,10

D'où le nuage de points dont on peut remarquer l'alignement presque parfait.



La calculatrice donne $a = -0,26004\dots$ et $b = 2,00464\dots$

Donc, arrondis au centième, $a \approx -0,26$ et $b \approx 2$.

L'équation de D est donc : $y = -0,26x + 2$.

5) 1 mm = 0,1 cm donc on cherche x pour avoir $h < 0,1$.

Or on a :

$$h < 0,1 \Leftrightarrow \log h < -1 \Leftrightarrow y < -1 \Leftrightarrow -0,26x + 2 < -1 \Leftrightarrow -0,26x < -3.$$

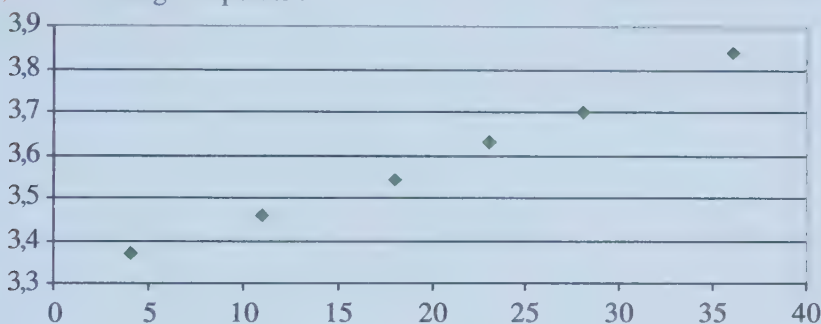
$$\text{D'où } x > \frac{3}{0,26} \Leftrightarrow x > 11,53\dots$$

Le premier rebond d'une hauteur inférieure à 1 mm sera donc le douzième.

12 1) On obtient les valeurs suivantes :

x_i	4	11	18	23	28	36
$y_i = \log N_i$	3,37	3,46	3,54	3,63	3,70	3,84

2) D'où le nuage de points :



3) On obtient : $\bar{x} = 20$ et $\bar{y} = 3,59$ donc $G(20 ; 3,59)$.

4) L'équation est de la forme $y = 0,015x + b$.

Et comme la droite passe par G on doit avoir :

$$3,59 = 0,015 \times 20 + b \text{ d'où } b = 3,29.$$

L'équation est donc : $y = 0,015x + 3,29$.

Pour le tracé, on peut utiliser le point G et par exemple le point $A(4 ; 3,35)$.

$$5) N > 10\,000 \Leftrightarrow \log N > \log 10\,000 \Leftrightarrow y > 4.$$

D'après la question précédente, cela revient à : $0,015x + 3,29 > 4$.

$$\text{C'est-à-dire } 0,015x > 0,71 \Leftrightarrow x > 47,33\dots$$

On pouvait donc prévoir que les 10 000 cas déclarés soient dépassés à la date de rang 48, c'est-à-dire le 18 mai.

13 1) On obtient les valeurs suivantes :

MAR (en minutes)	Valeur LogMAR (arrondie à 10^{-1})	Valeur Monoyer (en dixièmes)
20	1,3	0,5
10	1	1
8	0,9	1,25
5	0,7	2
4	0,6	2,5
2,5	0,4	4
2	0,3	5
1	0	10
0,5	-0,3	20

2) a) Par définition : $L = \log M$.

b) $D = \frac{10}{M}$.

c) $L = \log M$ et $M = \frac{10}{D}$. Donc $L = \log\left(\frac{10}{D}\right) = \log 10 - \log D$.

D'où $L = 1 - \log D$.

d) D'après la question précédente, $\log D = 1 - L$ donc $D = 10^{1-L}$.

14 1) On cherche le plus petit entier n tel que $v_n > u_n$.

Or $v_n = 0,5 \times 1,2^n$ et $u_n = 7 \times 0,9^n$ d'où

$$u_n < v_n \Leftrightarrow 7 \times 0,9^n < 0,5 \times 1,2^n \Leftrightarrow \left(\frac{0,9}{1,2}\right)^n < \frac{0,5}{7} \Leftrightarrow \log\left[\left(\frac{0,9}{1,2}\right)^n\right] < \log\left(\frac{0,5}{7}\right)$$

$$\text{Donc } u_n < v_n \Leftrightarrow n \log\left(\frac{0,9}{1,2}\right) < \log\left(\frac{0,5}{7}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\log\left(\frac{0,5}{7}\right)}{\log\left(\frac{0,9}{1,2}\right)} \Leftrightarrow n > 9,17...$$

On notera le changement de sens de l'inégalité car $\log\left(\frac{0,9}{1,2}\right)$ est un nombre négatif.

C'est donc en **2010** que la population d'écrevisses américaines dépassera la population d'écrevisses autochtones.

$$2) v_{10} = 0,5 \times 1,2^{10} = 3,095... \quad \text{et} \quad u_{10} = 7 \times 0,9^{10} = 2,440...$$

On peut donc estimer qu'en 2010 la population d'écrevisses américaines aura atteint environ 3100 individus alors qu'il n'y aura plus que 2400 écrevisses autochtones.

15 Partie A : Le décibel

1) On utilise la formule $L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \log 10^6 = 60$.

Le niveau d'intensité sonore L correspondant est de 60 dB.

2) On doit résoudre cette équation :

$$10 \log \frac{I}{I_0} = 120 \Leftrightarrow 10 \log \frac{I}{10^{-12}} = 120 \Leftrightarrow \log \frac{I}{10^{-12}} = 12 \text{ (en divisant par 10).}$$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 10^{12} \Leftrightarrow I = 10^{12} \times 10^{-12} = 10^0 = 1.$$

L'intensité sonore I correspondante est de 1 W/m².

Partie B : L'amplificateur

Le gain en dB d'un amplificateur est donné par la formule $G = 10 \log A$.

A est le gain en puissance, c'est-à-dire le rapport $A = \frac{P_S}{P_E}$, où P_E désigne la puissance d'entrée et P_S la puissance de sortie de l'amplificateur.

1) Si $A = 2$, alors le gain de l'amplificateur est de $G = 10 \log 2 \approx 3$ dB.

Le niveau sonore augmente de 3 dB. Il n'est donc pas doublé.

2) Si $A = 10$, alors le gain de l'amplificateur est de $G = 10 \log 10 = 10$ dB.

Le gain est alors de 10 dB.

3) Pour obtenir un gain de 60 dB, il faut $10 \log A = 60$ donc $\log A = 6$

Et donc $A = 10^6$.

Pour obtenir un gain de 60 dB, il faut un gain en puissance de 10^6 (c'est-à-dire que la puissance doit être multipliée par 1 000 000).

4) Le gain en dB est donné par la formule $G = 10 \log A$.

Or, $A = \frac{P_S}{P_E}$, donc $G = 10 \log \frac{P_S}{P_E}$.

La valeur de P_E est dans la case B1. Lorsqu'on copie la formule dans les cases C4, D4... on veut que le tableur prenne toujours la valeur dans la case B1. Aussi nous allons écrire dans la formule $\$B\1 (seul le \$ devant le B est nécessaire).

La valeur de P_S est dans la case B3. Lorsqu'on copie la formule dans les cases C4, D4, ... on veut que le tableur prenne les valeurs dans les cases C3, D3... Aussi nous allons écrire dans la formule B3 (sans \$ devant le B ; on peut en mettre un devant le 3 mais cela n'apporte rien).

Ainsi, la formule la plus simple à écrire dans la case B4 est :

$$=10*\log(B3/\$B\$1) \quad \text{ou} \quad =10*\log(B3/\$B1)$$

Partie C : La loi

On pose $u_0 = 120$ et on appelle u_n l'intensité du son en décibel mesurée après la traversé de n plaques d'isolation phonique.

1) Une diminution de 10 % revient à une multiplication par $1 - \frac{10}{100} = 0,9$.

$$u_1 = u_0 \times 0,9 = 120 \times 0,9 = 108.$$

$$u_2 = u_1 \times 0,9 = 108 \times 0,9 = 97,2.$$

$$2) u_{n+1} = u_n \times 0,9.$$

La suite u_n est une suite géométrique puisqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant par un même nombre (0,9).

3) On utilise la formule $u_n = u_0 \times q^n$. On obtient $u_n = 120 \times 0,9^n$.

4) Avec 10 plaques d'isolation phonique, on obtient un niveau d'intensité sonore de $u_{10} = 120 \times 0,9^{10} \approx 42$ dB.

5) Pour que la discothèque soit en règle, il faut un niveau d'intensité sonore inférieur à 25 dB. On cherche donc le plus petit entier n

$$\text{tel que } u_n < 25, \text{ ce qui revient à : } 120 \times 0,9^n < 25 \Leftrightarrow 0,9^n < \frac{25}{120}$$

$$\Leftrightarrow n \log 0,9 < \log \frac{25}{120}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\log \frac{25}{120}}{\log 0,9}.$$

(On change le sens de l'inégalité car on divise par $\log 0,9$ qui est négatif).

On obtient à la calculatrice $n > 14,88$.

15 plaques sont donc nécessaires pour que la discothèque soit en règle.

15) En reportant dans la formule $R = 1,5$; $L = 0,5$ et $D = 20$, on obtient :

$$20 = k \times \log \left(1 + \frac{1,5^2}{0,5^2} \right) \Leftrightarrow 20 = k \times \log 10$$

or $\log 10 = 1$, on a donc $k = 20$.

2) Attention ! L est la distance entre l'observateur et l'écran qui est situé à mi-chemin entre lui et la source sonore. On a donc $L = 2,5$ (et non 5).

a) Si $R = 1,8$ on obtient :

$$D = 20 \times \log \left(1 + \frac{1,8^2}{2,5^2} \right) = 20 \times \log(1,5184) \approx \mathbf{3,63 \text{ dB}}$$

b) On cherche R pour que :

$$20 \times \log \left(1 + \frac{R^2}{2,5^2} \right) = 40 \Leftrightarrow \log \left(1 + \frac{R^2}{2,5^2} \right) = 2$$

$$\text{Or } \log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2$$

$$\text{Il faut donc } 1 + \frac{R^2}{2,5^2} = 100 \Leftrightarrow R^2 = 99 \times 2,5^2 \Leftrightarrow R^2 = 618,75$$

$$\text{D'où } R = \sqrt{618,75} \approx \mathbf{24,87 \text{ m}} \text{ (résultat plutôt irréaliste !)}$$

Testez-vous

Cet exercice est un QCM.

Pour chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Remarque : On peut répondre à plusieurs de ces questions à l'aide d'une calculatrice mais il est recommandé de faire ce test sans calculatrice si l'on veut vraiment s'entraîner.

1 $\log 20 - \log 2 =$

- a) $\log 18$
- b) 1
- c) 0,1

2 $\log 500 + \log 2 =$

- a) $\log 502$
- b) $\log 250$
- c) 3

3 L'équation $\log(x - 7) = 2$ a pour solution :

- a) $x = 107$
- b) $x = 9$
- c) $x = 27$

4 L'ensemble des solutions de l'inéquation $\log(x - 3) < 0$ est :

- a) $S =]-\infty ; 4[$
- b) $S =]3 ; 4[$
- c) $S =]-\infty ; 3[$

5 L'ensemble des solutions de l'équation $(\log x)^3 - \log x = 0$ est :

- a) $S = \{1\}$
- b) $S = \emptyset$
- c) $S = \{0,1 ; 1 ; 10\}$

6 Le plus petit entier n tel que $0,83^n < 0,1$ est :

- a) $n = 13$
- b) $n = 12$
- c) $n = 11$

7 Le plus petit entier n tel que $1,02^n > 1\,000$ est :

- a) $n = 112$
- b) $n = 267$
- c) $n = 349$

8 Si $v_n = 5 \times 1,4^n$ alors on a $100 < v_n < 1\,000$ pour les valeurs de n comprises (au sens large) entre...

- a) 9 et 15
- b) 24 et 36
- c) 7 et 48

Réponses : **1** b) ; **2** c) ; **3** a) ; **4** b) ; **5** c) ; **6** a) ; **7** c) ; **8** a).

Les fonctions exponentielles

Le cours

Introduction

On place un capital de 1 000 € sur un compte à intérêts composés rapportant 3,5 % par an.

- Au bout d'un an, il y aura sur le compte $1\,000 \times 1,035 = 1\,035$ €.
- Au bout de deux ans : $1\,000 \times 1,035^2 \approx 1\,071,23$ €.
- Au bout de cinq ans : $1\,000 \times 1,035^5 \approx 1\,187,69$ €.

On peut ainsi définir une fonction u (ou une suite (u_n)) qui à un nombre n associe le capital disponible u_n (ou $u(n)$) sur le compte au bout de n années.

On a la formule : $u(n) = 1\,000 \times 1,035^n$.

$1,035^n$ n'est en principe défini que si n est un nombre entier, mais en pratique, les intérêts sont calculés tous les mois (parfois tous les 15 jours). On peut donc se demander combien il y aura sur le compte au bout de 2 ans et demi (2,5 ans), ou au bout de 5 ans et 3 mois (5,25 ans) ou au bout de 9 mois (0,75 an) par exemple.

Afin de pouvoir obtenir simplement ces résultats, on a étendu la fonction u aux nombres réels et notre calculatrice peut calculer le capital disponible :

- au bout de 2 ans et demi : $1\,000 \times 1,035^{2,5} \approx 1\,089,81$ € ;
- au bout de 5 ans et 3 mois : $1\,000 \times 1,035^{5,25} \approx 1\,197,94$ € ;
- au bout de 9 mois : $1\,000 \times 1,035^{0,75} \approx 1\,026,14$ €.

On utilise dans ces calculs la fonction $x \mapsto 1,035^x$. On l'appelle fonction exponentielle de base 1,035. On peut calculer ses valeurs en utilisant la touche x^y , y^x ou $^{\wedge}$ de la calculatrice (selon le modèle).

On peut définir d'autres fonctions exponentielles :

$$x \mapsto 2^x, x \mapsto 0,1^x \dots$$

D'une manière générale, pour tout nombre a strictement positif, on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction exponentielle de base a : $x \mapsto a^x$.

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (mais la formule de calcul de la dérivée n'est pas au programme en ST2S).

Des exemples étudiés à l'aide de la calculatrice permettent de constater que les propriétés déjà connues depuis le collège sur les exposants entiers s'étendent aux exposants réels, à savoir :

Propriétés : Soient x, y, a, b des réels avec a et b strictement positifs. Alors :

1) a^x est strictement positif.

2) $a^x \times a^y = a^{x+y}$.

3) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

5) $(ab)^x = a^x b^x$.

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

7) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Exemples d'applications

– de la propriété 2) : $a^x \times a^y = a^{x+y}$.

$$3^{0,5} \times 3^{0,5} = 3^{0,5+0,5} = 3^1 = 3.$$

On voit que $3^{0,5}$ est le nombre qui multiplié par lui-même donne 3 : c'est $\sqrt{3}$. D'une manière générale, pour tout nombre x strictement positif, $x^{0,5} = \sqrt{x}$.

– de la propriété 3) : $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

– de la propriété 7) : $(a^x)^y = a^{xy}$.

Pour résoudre sur $]0 ; +\infty[$ l'équation $x^3 = 2197$, on élève les deux membres à l'exposant $\frac{1}{3}$. On obtient : $(x^3)^{\frac{1}{3}} = 2197^{\frac{1}{3}}$.

Or, $(x^3)^{\frac{1}{3}} = x^{3 \times \frac{1}{3}} = x^1 = x$.

On obtient donc : $x = 2197^{\frac{1}{3}}$, donc $x = 13$.

En résumé, la solution de l'équation $x^3 = 2197$ est $x = 2197^{\frac{1}{3}}$.

En procédant de même, on obtient que la solution sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation $x^4 = 16$ est $x = 16^{\frac{1}{4}} = 2$.



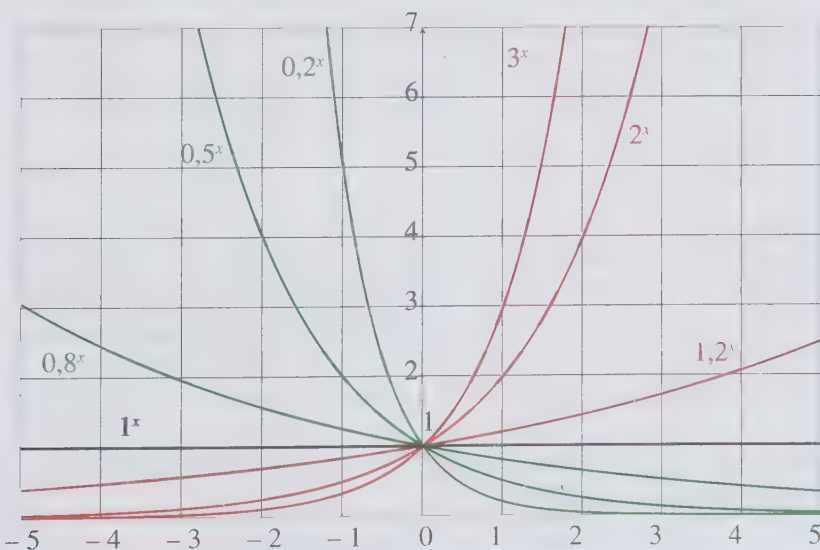
Le sens de variation

On a représenté à l'aide d'un logiciel de géométrie plusieurs courbes de fonctions exponentielles sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

En vert les fonctions : $x \mapsto 0,2^x$, $x \mapsto 0,5^x$, $x \mapsto 0,8^x$.

En bleu les fonctions : $x \mapsto 1,2^x$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 3^x$.

La droite noire est la représentation de la fonction $x \mapsto 1^x$ (1^x est constamment égal à 1 donc c'est la droite d'équation $y = 1$).



On constate que les fonctions représentées en vert (pour lesquelles $a < 1$) sont strictement décroissantes et que les fonctions représentées en rouge (pour lesquelles $a > 1$) sont strictement croissantes.

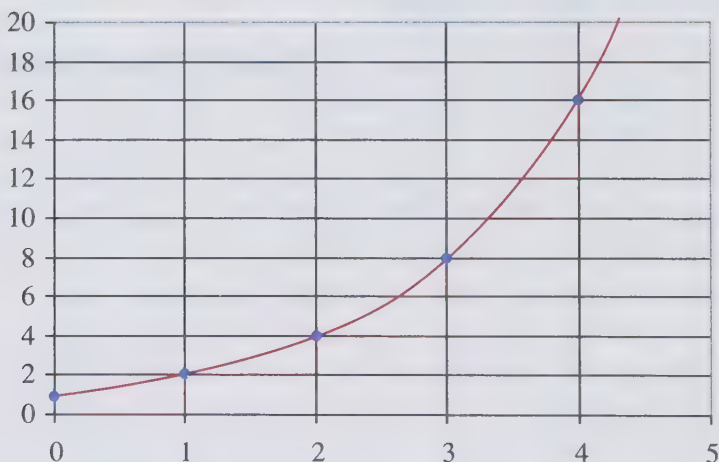
On peut généraliser ce résultat :

Propriété : Soit a un réel strictement positif et la fonction $f : x \mapsto a^x$ (définie sur $\mathbb{R}$).

- Si $0 < a < 1$, alors f est strictement décroissante.
- Si $a > 1$, alors f est strictement croissante.
- Si $a = 1$, f est constante, égale à 1.



Fonctions exponentielles et suites géométriques



La courbe rouge représente la fonction $x \mapsto 2^x$, et les points bleus la suite (2^n) . Bien sûr, les points représentant la suite sont sur la courbe rouge.

Dans la représentation graphique d'une suite géométrique de premier terme égal à 1 (dans l'exemple ci-dessus $u_n = 2^n$), les points sont situés sur la courbe d'une fonction exponentielle (dans ce cas, la fonction $x \mapsto 2^x$).

Pour cela, on dit que les termes d'une suite géométrique suivent une croissance exponentielle.

À retenir

• La fonction exponentielle

Pour tout nombre a strictement positif, on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction exponentielle de base a : $x \mapsto a^x$.

• Propriétés

Soient x, y, a, b des réels avec a et b strictement positifs.

Alors :

1) a^x est strictement positif.

$$2) a^x \times a^y = a^{x+y}.$$

$$3) a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

$$4) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

$$5) (ab)^x = a^x b^x.$$

$$6) \frac{a^x}{b} = \frac{a^x}{b^1}.$$

$$7) (a^x)^y = a^{xy}.$$

• Sens de variation

Soit a un réel strictement positif et la fonction $f : x \mapsto a^x$ (définie sur $\mathbb{R}$).

– Si $0 < a < 1$, alors f est strictement décroissante.

– Si $a > 1$, alors f est strictement croissante.

Les méthodes

1

Comment simplifier des écritures utilisant les exposants réels ?

Énoncé

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 3^{-\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}$$

$$B = 2^{0,5} \times \frac{1}{2^{-0,5}}$$

$$C = \frac{5^2}{5^{-\frac{3}{2}}}$$

$$D = 8^{0,25} \times 2^{0,25}$$

$$E = \frac{162^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}}$$

$$F = (2^{0,3})^{10}$$

Corrigé commenté

Il s'agit d'utiliser les six règles de calcul sur les exposants réels (déjà connues pour les exposants entiers) :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad (1)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (2)$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (3)$$

$$(ab)^x = a^x b^x \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (5)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (6)$$

Remarque : Plusieurs méthodes sont possibles selon la règle utilisée.

$$A = 3^{-\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

$$B = 2^{0,5} \times \frac{1}{2^{-0,5}} = 2^{0,5} \times 2^{0,5} = 2^1 = 2. \quad (2)$$

$$C = \frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{-\frac{3}{2}}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 5^2 = 25. \quad (3)$$

$$D = 8^{0,25} \times 2^{0,25} = (8 \times 2)^{0,25} = 16^{0,25} = (2^4)^{0,25} = 2. \quad (4)$$

$$E = \left(\frac{162}{2} \right)^{\frac{1}{4}} = 81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3^{4 \times \frac{1}{4}} = 3. \quad (5)$$

$$F = (2^{0,3})^{10} = 2^{0,3 \times 10} = 2^3 = 8. \quad (6)$$

2

Comment résoudre des équations et des inéquations ?

Énoncé

1) Résoudre les équations suivantes :

a) $1,1^x = 0,5$. b) $0,99^x = 0,5$.

2) Résoudre les inéquations suivantes :

a) $1,1^x > 0,5$. b) $0,99^x < 0,5$.

3) Résoudre, sur $]0; +\infty[$, les équations suivantes :

a) $x^3 = 2$. b) $x^{10} = 5$.

Corrigé commenté

Pour le 1) et le 2), il s'agit d'utiliser les propriétés :

Étant donnés deux réels x et y strictement positifs, on a :

$$x = y \Leftrightarrow \log x = \log y.$$

$$x < y \Leftrightarrow \log x < \log y.$$

$$x > y \Leftrightarrow \log x > \log y.$$

Puis d'appliquer les règles de calcul sur les logarithmes.

1) a) $1,1^x = 0,5 \Leftrightarrow \log(1,1^x) = \log(0,5)$

$$\Leftrightarrow x \log(1,1) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \log(1,1) = -\log(2)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\log(2)}{\log(1,1)}$$

$$\text{Alors } S = \left\{ -\frac{\log 2}{\log 1,1} \right\}$$

$$\text{b) } 0,99^x = 0,5 \Leftrightarrow \log(0,99^x) = \log(0,5)$$

$$\Leftrightarrow x \log(0,99) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \log(0,99) = -\log(2)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\log(2)}{\log(0,99)} \quad \text{Alors } S = \left\{ -\frac{\log 2}{\log 0,99} \right\}$$

$$\text{2) a) } 1,1^x > 0,5 \Leftrightarrow \log(1,1^x) > \log(0,5)$$

$$\Leftrightarrow x \log(1,1) > \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \log(1,1) > -\log(2)$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{\log(2)}{\log(1,1)}$$

En effet, $\log(1,1) > 0$.

$$\text{Alors } S = \left[-\frac{\log 2}{\log 1,1} ; +\infty \right[$$

$$\text{b) } 0,99^x < 0,5 \Leftrightarrow \log(0,99^x) < \log(0,5)$$

$$\Leftrightarrow x \log(0,99) < \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \log(0,99) < -\log(2)$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{\log(2)}{\log(0,99)}$$

En effet, $\log(0,99) < 0$.

$$\text{Alors } S = \left[-\frac{\log 2}{\log 0,99} ; +\infty \right[$$

Si $a < 1$ alors $\log a < 0$ et si $a > 1$ alors $\log a > 0$.

Alors, pour la résolution de l'inéquation, il faut être vigilant, lors d'une division par $\log a$, et conserver ou changer le sens de l'inégalité.

3) Pour ce type d'équation de la forme $x^a = b$, à résoudre sur $]0; +\infty[$.

On élève les deux membres de l'équation à l'exposant $\frac{1}{a}$.

$$\text{a) } x^3 = 2 \Leftrightarrow (x^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{3}} \text{ d'où } S = \left\{ 2^{\frac{1}{3}} \right\}$$

$$\text{b) } x^{10} = 5 \Leftrightarrow (x^{10})^{\frac{1}{10}} = 5^{\frac{1}{10}} \Leftrightarrow x = 5^{\frac{1}{10}}$$

$$\text{d'où } S = \left\{ 5^{\frac{1}{10}} \right\}$$

3

Comment utiliser les fonctions de la forme : $x \mapsto ka^x$?

Énoncé

On note $P(t)$ le nombre d'individus à l'instant t ($t > 0$) d'une population.

On suppose que $P(t) = ka^t$ avec $k > 0$, $a > 0$ et $a \neq 1$.

- 1) Expliquer pourquoi la fonction P est strictement croissante si $a > 1$, et strictement décroissante si $a < 1$.
- 2) En prenant l'heure comme unité de temps, calculer le temps de doublement de la population initiale si $a = 1,5$.
- 3) En prenant l'année comme unité de temps, calculer le temps de diminution de moitié de la population initiale si $a = \frac{9}{10}$.

Corrigé commenté

1) Si $a > 1$, la fonction $t \mapsto a^t$ est croissante.

Alors si $x < y$: $a^x < a^y$. Multiplier par un nombre positif conserve l'ordre donc $ka^x < ka^y$. La fonction : $t \mapsto ka^t$ est donc croissante.

De même, si $a < 1$, la fonction $t \mapsto a^t$ est décroissante.

Donc la fonction : $t \mapsto ka^t$ est aussi décroissante.

Si $k > 0$ la fonction : $t \mapsto ka^t$ a le même sens de variation que la fonction $t \mapsto a^t$. Si $k < 0$ la fonction : $t \mapsto ka^t$ a un sens de variation contraire à la fonction $t \mapsto a^t$.

2) $P(0) = ka^0 = k$. Alors la population initiale est de k individus.

La question posée revient donc à résoudre l'équation :

$$ka^t = 2k \Leftrightarrow a^t = 2 \Leftrightarrow \log(a^t) = \log 2 \Leftrightarrow t \log a = \log 2 \Leftrightarrow t = \frac{\log 2}{\log a}.$$

Donc pour $a = 1,5$; $t = \frac{\log(2)}{\log(1,5)}$, soit environ 1,7 heure.

3) $P(0) = ka^0 = k$. Alors la population initiale est de k individus.

La question posée revient donc à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} ka^t &= \frac{k}{2} \Leftrightarrow a^t = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \log(a^t) = -\log 2 \\ &\Leftrightarrow t \log a = -\log 2 \Leftrightarrow t = -\frac{\log 2}{\log a}. \end{aligned}$$

Donc pour $a = \frac{9}{10}$; $t = -\frac{\log 2}{\log\left(\frac{9}{10}\right)}$. Soit environ 6,6 années.

Les exercices

1 Écrire sous la forme d'une seule puissance de 2 :

$$a = \frac{2^{3,5} \times 2^4}{2^{5,5}} \quad b = \frac{2^4 + 2^4}{2^{3,2} \times 2^{-7,2}} \quad c = (0,5^3 \times 4^3)^2$$

$$d = (2\sqrt{2})^2 \quad e = \left(2^{\frac{1}{4}} \times 2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 \quad f = \frac{4^{\frac{1}{5}} \times 8^{\frac{2}{3}}}{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4} \quad g = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{2}} \times 16}$$

2 1) Résoudre sur $]0 ; +\infty[$ les équations :

a) $t^3 = 1\,728$

b) $x^2 \times x^3 = 16x$

c) $\frac{729}{x} = x^5$

d) $100^x = 10\,000\,000$

e) $4^x \times 9^x = 6$

f) $3^{2x} - 3^x = 0$

g) $(2^x - 8)(5^x + 5) = 0$

h) $4^x - 2^{x+1} = -1$ Indication : $(a - b)^2 = \dots$

2) Résoudre les inéquations suivantes : (a) sur $]0 ; +\infty[$, les autres sur $\mathbb{R}$.

a) $q^{12} > 531\,441$

b) $5^x > 1\,000$

c) $3^x > 0,3^x$

d) $0,2^t < 10^{-6}$

e) $(2^x - 8)(81^x - 3) > 0$

3 Déterminer le sens de variation des fonctions f, g, h définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = 1 - 2^x$

b) $g(t) = \frac{1}{2 + 3^t}$

c) $h(x) = x - 0,5^x$

4 En 1960, Willard Frank Libby a reçu le prix Nobel de chimie pour le développement d'une technique de datation basée sur le carbone 14, un isotope radioactif du carbone noté ^{14}C . Un organisme vivant contient la même proportion de ^{14}C que l'atmosphère, mais à sa mort, il cesse d'en absorber et la proportion de ^{14}C qu'il contient diminue avec le temps selon la loi :

$$P(t) = 0,988^t$$

où t est le nombre de siècles écoulés depuis la mort de l'organisme.

On peut mesurer cette proportion et estimer ainsi l'âge d'un organisme.

- 1) On dit que la demi-vie du ^{14}C est de 5 730 ans. Calculer la proportion de ^{14}C restante au bout de 5 730 ans. Donner le résultat en pourcentage arrondi à l'unité.
- 2) L'analyse d'un fossile trouvé dans une grotte montre qu'il a perdu 40% de sa teneur en ^{14}C . Déterminer son âge à 100 ans près.

5 La puissance fiscale d'une voiture est donnée en chevaux fiscaux par la formule :

$$P_f = \frac{R}{45} + \frac{P^{1,6}}{10}.$$

P_f désigne la puissance fiscale (que l'on arrondit à l'entier le plus proche), R la quantité de CO_2 rejeté dans l'atmosphère en cycle normalisé en g/km et P la puissance réelle du moteur en kW.

- 1) Le modèle 2006 de la Ferrari F430 a une puissance réelle de 360 kW et rejette 420 g/km de CO_2 . Calculer sa puissance fiscale.
- 2) Ferrari a annoncé en juillet 2007 qu'il avait pour objectif de diminuer de 40 % les émissions de CO_2 de ses voitures d'ici à 2012. Si cet objectif est atteint, quelle sera alors la puissance fiscale de la F430 ?
- 3) La Peugeot 307 1.6 HDi 16v a une puissance fiscale de 6 CV et rejette 134 g/km de CO_2 . Quelle est sa puissance réelle en kW? (arrondir à l'unité).

- 6** 1) On place 200 € sur un compte à intérêts composés de 4 % par an. De combien disposera-t-on sur ce compte au bout de 2 ans ? Au bout de 4 ans et demi ? Au bout de 3 mois ?
- 2) Dans un pays, le nombre de cas de SIDA augmente de 5 % par an. De combien aura-t-il augmenté en 2 ans et demi (à 1 % près) ?
- 3) Une population de bactéries double en 24h. Quel est le pourcentage d'augmentation par heure ? (à 0,1 % près.)

7 On considère un produit dont le prix unitaire est x (en centaines d'euros) et ne peut pas dépasser 400 €.

D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ (en milliers d'unités) de ce produit sont données par :

$$f(x) = 1,65^x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{8}{1,65^x + 1}.$$

Cela signifie que pour un prix x donné, les producteurs sont prêts à fabriquer $f(x)$ milliers d'unités et les consommateurs à en acheter $g(x)$.

1) a) Calculer $f(0)$.

b) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $I = [0 ; 4]$.

2) a) Calculer $g(0)$.

b) Étudier le sens de variation de g sur I .

3) On appelle « prix d'équilibre » le prix p pour lequel l'offre est égale à la demande (c'est la situation idéale où tout ce qui est produit est vendu).

La « quantité d'équilibre » est alors $q = f(p) = g(p)$.

On se propose de déterminer p et q graphiquement puis par le calcul.

a) Compléter avec des valeurs arrondies au centième le tableau suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$									
$g(x)$									

b) Tracer les courbes représentatives de f et g sur le même graphique.

c) En déduire les valeurs de p et q (arrondies à 10^{-1}).

4) a) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ (on pourra utiliser la fonction logarithme décimal).

b) En déduire les valeurs exactes de p et q puis donner une valeur approchée de p à un euro près.

5) Pour tester un produit P qui est supposé détruire la bactérie β on a réalisé une culture de 2 400 000 unités de β .

À l'instant $t = 0$ on injecte le produit P dans la culture et on constate une diminution du nombre de bactéries de 20 % par heure.

On note b_n le nombre de bactéries restantes exprimé en milliers au bout de n heures (on a donc $b_0 = 2\,400$).

1) Calculer b_1 et b_2 .

2) Quelle est la nature de la suite (b_n) ?

Donner l'expression de b_n en fonction de n .

3) Si l'on note x la durée en heures on peut donc écrire que le nombre de bactéries restantes au bout de x heures sera : $b(x) = 2\,400 \times 0,8^x$.

Calculer le nombre de bactéries restantes :

a) au bout de trois heures et quart.

b) au bout de dix heures et vingt minutes.

4) Compléter le tableau avec des valeurs arrondies à l'unité :

x	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16
$b(x)$										

5) Tracer la représentation graphique de b .

6) Au bout de combien de temps restera-t-il moins d'un dixième des bactéries ? On donnera une solution graphique et une par le calcul en utilisant la fonction logarithme décimal.

 Selon un modèle mathématique établi pour faire des prévisions, on admet que la ville de Lahbäh voit sa population doubler régulièrement *tous les 10 ans* depuis 1980 où elle comptait 5000 habitants.

On note p_n la population (prévisible) en milliers d'habitants dans n décennies, c'est-à-dire en $(1980 + 10n)$. On a ainsi $p_0 = 5$.

1) Calculer la population en 1990, 2000 et 2010, c'est-à-dire p_1 , p_2 et p_3 .

2) Quelle est la nature de la suite (p_n) ? En déduire l'expression de p_n en fonction de n .

3) On veut calculer la population en 2004 par exemple. Pour cela, il faut déterminer n tel que : $1980 + 10n = 2004$. Quelle valeur de n obtient-on ?

En admettant que l'expression de p_n obtenue à la question 2) s'applique à des valeurs de n non entières, calculer alors la population en 2004.

4) D'après la question précédente, on voit que si on note x le nombre d'années écoulées depuis 1980, on peut écrire que la population en $(1980 + x)$ est :

$$p(x) = 5 \times 2^{\frac{x}{10}}.$$

Compléter avec des valeurs arrondies au dixième le tableau suivant :

Année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2020
x	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$p(x)$									

5) Tracer la courbe représentative de la fonction p .

6) En quelle année peut-on prévoir que la population dépasse pour la première fois 50 000 habitants ? (Donner une solution graphique et une par le calcul.)

 Le directeur d'un hôpital a ouvert un nouveau service au sein de son établissement en janvier 2008. À la fin du mois de juillet, il reçoit de son service comptable le relevé suivant donnant mois par mois les montants des charges et des recettes enregistrées par ce nouveau service :

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Rang : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Charges : y_i	5000	5140	5320	5460	5580	5760	5890
Recettes : z_i	2240	2520	2810	3180	3520	3950	4420

Le directeur demande alors à son comptable à partir de quel mois il peut envisager un profit pour cette nouvelle activité.

Au vu des résultats, le comptable décide d'ajuster la série $(x_i; y_i)$ par une droite et la série $(x_i; z_i)$ par une courbe exponentielle.

1) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite D d'ajustement du nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ obtenue par la méthode des moindres carrés (a et b seront arrondis à la dizaine).

2) Pour ajuster le nuage de points $P_i(x_i; z_i)$ on cherche une fonction f telle que $z = f(x) = k \times r^x$.

Déterminer les réels k et r pour que la courbe représentative de f passe par les points $P_1(1; 2240)$ et $P_7(7; 4420)$ (r sera arrondi au centième).

3) Déterminer alors à l'aide du tableur d'une calculatrice le plus petit entier x tel que $f(x) > ax + b$ (on arrondira les valeurs de $f(x)$ à la dizaine).

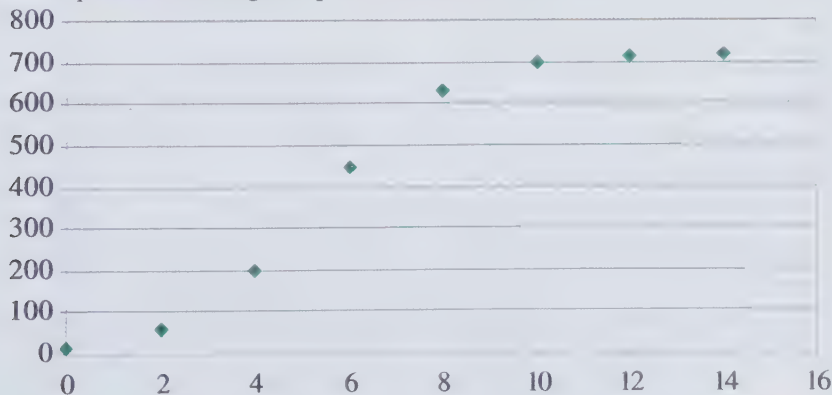
4) Conclure.

III On étudie la croissance d'une population de crustacés planctoniques dans un environnement limité.

On note x le nombre des individus de cette population à l'instant t exprimé en jours. Les résultats obtenus en deux semaines sont dans le tableau suivant :

t_i	0	2	4	6	8	10	12	14
x_i	15	59	199	448	626	697	714	719

On a représenté le nuage de points ci-dessous.



- 1) Un ajustement affine paraît-il justifié ?
- 2) On décide alors d'effectuer un changement de variable en posant :

$$y = \log\left(\frac{x}{720 - x}\right).$$

a) Compléter avec des valeurs arrondies au centième le tableau :

t_i	0	2	4	6	8	10	12	14
y_i	-1,67		-0,42			1,48		

b) Représenter le nuage de points de coordonnées $(t_i; y_i)$. Que remarque-t-on ?

c) Calculer les coordonnées du point moyen G .

d) On choisit comme droite d'ajustement la droite D passant par G et par le point $M_4(4; -0,42)$. Déterminer son équation puis la tracer

e) Dédire de l'ajustement précédent que x s'exprime en fonction de t sous

la forme :

$$x = f(t) = \frac{720}{1 + 10^{1,7-0,32t}}.$$

f) Calculer $f(20)$, $f(30)$, $f(40)$.

Que peut-on en déduire sur l'évolution à long terme de la population ?

12 Deux frères décident de placer leur argent à intérêts composés.

Antoine place un capital de 4 500 € au taux annuel de 4 %.

Benjamin place un capital de 4 000 € au taux annuel de 6 %.

Soit (a_n) le capital d'Antoine à la fin de la n -ième année.

Soit (b_n) le capital de Benjamin à la fin de la n -ième année.

1) Représenter les 10 premiers termes de ces deux suites sur un graphique.

On pourra prendre comme unité :

- 1 cm pour une unité en abscisse ;
- 1 cm pour 500 € en ordonnée (en commençant à 4 000).

2) Déterminer graphiquement la date à laquelle Benjamin aura, pour la première fois, un capital supérieur à celui d'Antoine.

3) a) Exprimer a_n et b_n en fonction de n .

b) Retrouver, par le calcul, le résultat de la question 2).

4) Le banquier explique à Antoine qu'en réalité l'évolution de son capital est calculée tous les mois et que le taux appliqué est alors de 0,35 %.

5) Calculer le capital acquis au bout d'un an par Antoine s'il avait placé son capital au taux mensuel de 0,35 %.

b) Expliquer pourquoi le banquier s'est trompé dans son calcul.

c) En appelant t le taux mensuel recherché, montrer que le calcul que le banquier aurait dû effectuer revient à résoudre l'équation :

$$(1 + t)^{12} = 1,04.$$

d) Résoudre cette équation. Conclure.

5) Effectuer le même raisonnement pour trouver le taux mensuel, équivalent au placement annuel de 6 % effectué par Benjamin.

6) Déterminer alors à partir de quel mois le capital de Benjamin dépasse pour la première fois celui d'Antoine *en appliquant ce mode de calcul*.

7) Benjamin se pose une autre question, il voudrait qu'au bout de 10 ans son capital dépasse 10 000 €. Il se demande alors quel taux annuel appliquer pour que son vœu soit satisfait.

a) Soit x ce taux. Vérifier que le problème revient à résoudre l'inéquation :

$$(1 + x)^{10} \geq 2,5$$

b) Résoudre cette inéquation et conclure.

1 $a = 2^{3,5+4-5,5} \cdot a = 2^2$.

Attention pour le calcul de b , il n'existe pas de formule du type $2^n + 2^p$, mais $2^4 + 2^4 = 2 \times 2^4 = 2^{4+1} = 2^5$.

Donc $b = \frac{2^5}{2^{3,2-7,2}} = \frac{2^5}{2^{-4}} = 2^9$.

$c = ((0,5 \times 4)^3)^2 = (2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$ $d = 2^2 \sqrt{2} = 2^2 \times 2 = 2^3$

$e = \left(2^{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}\right)^2 = \left(2^{\frac{3}{12} - \frac{4}{12}}\right)^2 = \left(2^{-\frac{1}{12}}\right)^2 = 2^{-\frac{1}{6}}$.

Pour le calcul de f , afin de n'avoir que des puissances de 2, nous allons d'abord remplacer 4 par 2^2 et 8 par 2^3 .

$f = \frac{(2^2)^{\frac{1}{5}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}}}{2^2} = \frac{2^{\frac{2}{5}} \times 2^2}{2^2} = 2^{\frac{2}{5}}$.

Pour g , on procède de même : on remplace 4 par 2^2 et 16 par 2^4 , donc $4^{\frac{1}{3}}$ par $2^{\frac{2}{3}}$ et 4^2 par 2^4 .

$g = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}}{2 \times 2^4} = \frac{2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}}{2^{1+4}} = \frac{2^1}{2^5} = 2^{1-5} = 2^{-4}$.

2 **1) a)** $t^3 = 1728 \Leftrightarrow t = 1728^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow t = 12 \quad S = \{12\}$.

b) $x^2 \times x^3 = 16x \Leftrightarrow x^5 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^4 - 16 = 0$.

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 16^{\frac{1}{4}} = 2 \quad S = \{0; 2\}$.

c) $\frac{729}{x} = x^5 \Leftrightarrow 729 = x^6 \Leftrightarrow x = 729^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x = 3 \quad S = \{3\}$.

d) $100^x = 10\,000\,000 \Leftrightarrow \log(100^x) = \log(10\,000\,000)$.

$\Leftrightarrow x \log(100) = \log(10\,000\,000) \Leftrightarrow x \times 2 = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

$4^x \times 9^x = 6 \Leftrightarrow (4 \times 9)^x = 6 \Leftrightarrow 36^x = 6 \Leftrightarrow \log(36^x) = \log(6)$.

$\Leftrightarrow x \log(36) = \log(6) \Leftrightarrow x = \frac{\log(6)}{\log(36)} = \frac{\log(6)}{\log(6^2)} = \frac{\log(6)}{2 \log(6)} = \frac{1}{2} \quad S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$f) 3^{2x} - 3^x = 0 \Leftrightarrow 3^x \times 3^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow 3^x(3^x - 1) = 0 \Leftrightarrow 3^x = 0 \text{ ou } 3^x - 1 = 0.$$

Or une fonction exponentielle est à valeurs strictement positives donc 3^x ne peut pas s'annuler. Il reste donc $3^x - 1 = 0$, qui revient à $3^x = 1$, et donc $x = 0$ (on peut éventuellement passer par l'étape $x \log(3) = \log(1) = 0$) $S = \{0\}$.

$$g) (2^x - 8)(5^x + 5) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 8 = 0 \text{ ou } 5^x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 8 \text{ ou } 5^x = -5.$$

Or une fonction exponentielle est à valeurs strictement positives donc 5^x ne peut pas prendre la valeur -5 .

Il reste donc $2^x = 8$, qui revient à $\log(2^x) = \log(8)$.

$$\text{et donc } x \log(2) = \log(2^3) \text{ puis } x = \frac{3 \log(2)}{\log(2)} \text{ donc } x = 3 \quad S = \{3\}.$$

h) Nous allons tenir compte de l'indication : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, et essayer de mettre l'équation sous cette forme en remplaçant 4 par 2^2 et 2^{x+1} par 2×2^x .

$$4^x - 2^{x+1} = -1 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \times 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \times 2^x \times 1 + 1^2 = 0.$$

Nous pouvons maintenant utiliser l'identité remarquable avec $a = 2^x$ et $b = 1$.

$$\text{On obtient : } (2^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0. \quad S = \{0\}.$$

$$i) \text{ Dans le a), on élève les deux membres à l'exposant } \frac{1}{12}.$$

On ne change pas le sens de l'inégalité car $x \mapsto x^{\frac{1}{12}}$ est une fonction croissante.

Dans les autres questions, on prend le logarithme des deux membres. On ne change pas le sens des inégalités car la fonction logarithme est elle aussi croissante.

$$j) q^{12} > 531\,441 \Leftrightarrow q > 531\,441^{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow q > 3. \quad S =]3 ; +\infty[.$$

$$k) 5^x > 1\,000 \Leftrightarrow \log(5^x) > \log(1000) \Leftrightarrow x \log(5) > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{\log(5)}.$$

On n'a pas changé le sens de l'inégalité car $\log(5) > 0$

$$S = \left] \frac{3}{\log(5)} ; +\infty \right[.$$

$$l) 3^x > 0,3^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{0,3^x} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{0,3} \right)^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 1 \Leftrightarrow x \log 10 > \log 1.$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{0}{\log 10} \text{ (on ne change pas le sens car } \log 10 > 0) \Leftrightarrow x > 0 \quad S =]0 ; +\infty[.$$

$$d) 0,2^t < 10^{-6} \Leftrightarrow \log(0,2^t) < \log(10^{-6}) \Leftrightarrow t \log 0,2 < -6 \Leftrightarrow t > \frac{-6}{\log 0,2}.$$

(on change le sens car $\log 0,2 < 0$)

$$S = \left] \frac{-6}{\log(0,2)} ; +\infty \right[.$$

e) $(2^x - 8)(81^x - 3)$ est un produit. On veut connaître les valeurs de x pour lesquelles il est strictement positif (> 0). Pour cela, nous allons faire un tableau de signe.

Il faut d'abord déterminer le signe de $2^x - 8$ et le signe de $81^x - 3$.

$x \mapsto 2^x - 8$ et $x \mapsto 81^x - 3$ sont des fonctions croissantes. Il suffit de chercher quand elles s'annulent. À gauche du zéro, elles seront négatives, à droite elles seront positives.

$$2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3.$$

(on peut faire comme dans le 102, ou bien savoir que $2^3 = 8$, et comme la fonction $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante, c'est la seule solution).

$$81^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 81^x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{\log(3)}{\log(81)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	3	$+\infty$	
$2^x - 8$	-	-	0	+	
$81^x - 3$	-	0	+	+	
$(2^x - 8)(81^x - 3)$	+	0	-	0	+

On voit dans le tableau que $(2^x - 8)(81^x - 3) > 0$ si $x < \frac{1}{4}$ ou $x > 3$.

$$S = \left] -\infty ; \frac{1}{4} \right[\cup]3 ; +\infty[.$$

3 a) Soient deux réels a et b avec $a \leq b$.

Alors $2^a \leq 2^b$ car $x \mapsto 2^x$ est une fonction croissante.

$$-2^a \geq -2^b.$$

$$\text{Et donc } 1 - 2^a \geq 1 - 2^b.$$

$$f(a) \geq f(b).$$

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) Soient deux réels a et b avec $a \leq b$.

Alors $3^a \leq 3^b$ car $x \mapsto 3^x$ est une fonction croissante

$$2 + 3^a \leq 2 + 3^b$$

$$\text{Et donc } \frac{1}{2 + 3^a} \geq \frac{1}{2 + 3^b}.$$

$$g(a) \geq g(b)$$

La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) Soient deux réels a et b avec $a \leq b$. (1)

Alors $0,5^a \geq 0,5^b$ car $x \mapsto 0,5^x$ est une fonction décroissante.

$$-0,5^a \leq -0,5^b. \quad (2)$$

En ajoutant membre à membre les inégalités (1) et (2), on obtient :

$$a - 0,5^a \leq b - 0,5^b.$$

D'où : $h(a) \leq h(b)$.

La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

 5730 ans correspond à 57,30 siècles.

$$P(57,30) = 0,988^{57,30} \approx 0,50.$$

La proportion de ^{14}C restante au bout de 5730 ans est de 50 %.

 Si le fossile a perdu 40 % de sa teneur en ^{14}C , alors la proportion de ^{14}C qu'il contient encore est de 60 %, donc $P(t) = 0,6$.

$$0,988^t = 0,6 \Leftrightarrow t \log 0,988 = \log 0,6 \Leftrightarrow t = \frac{\log(0,6)}{\log(0,988)} \approx 42,31.$$

Le fossile a environ 4 200 ans.

$$\text{5 1) } P_f = \frac{420}{45} + \frac{360^{1,6}}{40} \approx 43.$$

La Ferrari F430 a une puissance fiscale de 43 CV.

 Une diminution de 40 % correspond à une multiplication par 0,6.

$$420 \times 0,6 = 252.$$

Si Ferrari diminue de 40 % les émissions de CO_2 , alors la F430 rejettera 252 g/km de CO_2 . On aura alors :

$$P_f = \frac{252}{45} + \frac{360^{1,6}}{40} \approx 39.$$

La Ferrari F430 aura une puissance fiscale de 39 CV.

 Pour la Peugeot 307 1.6 HDi 16v, $P_f = 6$ CV et $R = 134$ g/km.

$$\text{donc } 6 = \frac{134}{45} + \frac{P^{1,6}}{40}, \text{ puis } \frac{P^{1,6}}{40} = 6 - \frac{134}{45}, \text{ ce qui donne } \frac{P}{40} = 6 - \frac{134^{1,6}}{45} \text{ et}$$

$$\text{enfin } P = 40 \times 6 - \frac{134^{\frac{1}{1.6}}}{45} \approx 80.$$

La puissance réelle de la Peugeot 307 1.6 HDi 16v est de 80 kW.

6 1) Des intérêts composés de 4 % par an signifient que chaque année la somme d'argent est augmentée de 4 %, soit multipliée par 1,04.

Donc, au bout de 2 ans, on disposera de $200 \times 1,04^2 \approx 216,32$ €.

Au bout de 4 ans et demi, on disposera de $200 \times 1,04^{4.5} \approx 238,61$ €.

Au bout de 3 mois, on disposera de $200 \times 1,04^{1/4} \approx 201,97$ €.

2) Une augmentation de 5 % représente une multiplication par 1,05.

En 2 ans et demi, le nombre de cas de SIDA sera multiplié par $1,05^{2.5} \approx 1,13$, ce qui correspond à une augmentation de 13 %.

3) Si on appelle t le pourcentage d'augmentation par heure, chaque heure, la quantité de bactéries est multipliée par $1 + t$.

En 24h, elle est multipliée par $(1 + t)^{24}$. Or l'énoncé dit que la population est multipliée par 2 en 24h.

D'où :

$$(1 + t)^{24} = 2, \text{ ce qui donne } 1 + t = 2^{1/24} \text{ et donc } t = 2^{1/24} - 1 \\ \approx 0,0293 \approx 2,9 \, \%$$

Le pourcentage d'augmentation par heure est de 2,9 %.

7 1) a) $f(0) = 1,65^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$

b) La fonction $x \mapsto 1,65^x$ est croissante car $1,65 > 1$ donc f est croissante.

2) a) $g(0) = \frac{8}{1,65^0 + 1} = \frac{8}{1 + 1} = 4.$

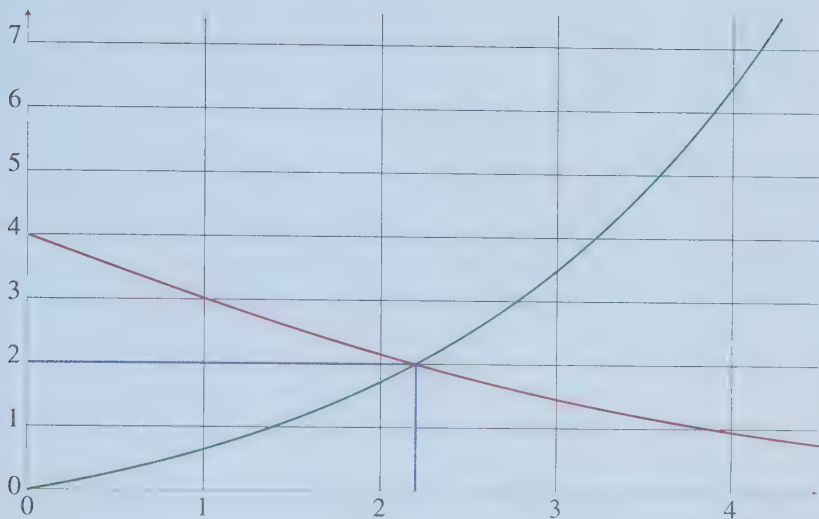
b) La fonction $x \mapsto 1,65^x + 1$ étant croissante, g est décroissante.

c) a) À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0	0,28	0,65	1,12	1,72	2,50	3,49	4,77	6,41
$g(x)$	4	3,50	3,02	2,56	2,15	1,78	1,46	1,18	0,95

b) D'où le graphique page suivante.

c) On déduit du graphique que $p \approx 2,2$ et $q \approx 2.$



Le prix d'équilibre est donc environ 220 € et la quantité d'équilibre est de 2 000 objets.

$$4) a) f(x) = g(x) \Leftrightarrow (1,65^x - 1)(1,65^x + 1) = 8.$$

$$\Leftrightarrow (1,65^x)^2 - 1^2 = 8 \text{ car } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

$$\Leftrightarrow 1,65^{2x} - 1 = 8.$$

$$\Leftrightarrow 1,65^{2x} = 9.$$

$$\Leftrightarrow \log(1,65^{2x}) = \log(9).$$

$$\Leftrightarrow 2x \times \log(1,65) = 2 \times \log(3) \text{ car } 9 = 3^2.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log(3)}{\log(1,65)}.$$

La valeur exacte du prix d'équilibre est donc $p = \frac{\log(3)}{\log(1,65)} = 2,1938\dots$

Soit 219 € à un euro près et la quantité d'équilibre est :

$$q = f(p) = 1,65^p - 1 = 2.$$

Soit 2 000 objets (exactement).



1) Diminuer un nombre de 20 % revient à le multiplier par :

$$1 - \frac{20}{100} = 0,8.$$

donc $b_1 = 2400 \times 0,8 = 1920$ et $b_2 = 1\,920 \times 0,8 = 1\,536$.

2) (b_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme :

$$b_0 = 2\,400.$$

Donc $b_n = 2\,400 \times 0,8^n$.

3) a) Trois heures et quart correspondent à $x = 3,25$

et $b(3,25) = 2\,400 \times 0,8^{3,25} = 1\,162,12\dots$ donc $b(3,25) \approx 1\,162$.

Il restera donc environ 1 162 000 bactéries au bout de trois heures et quart.

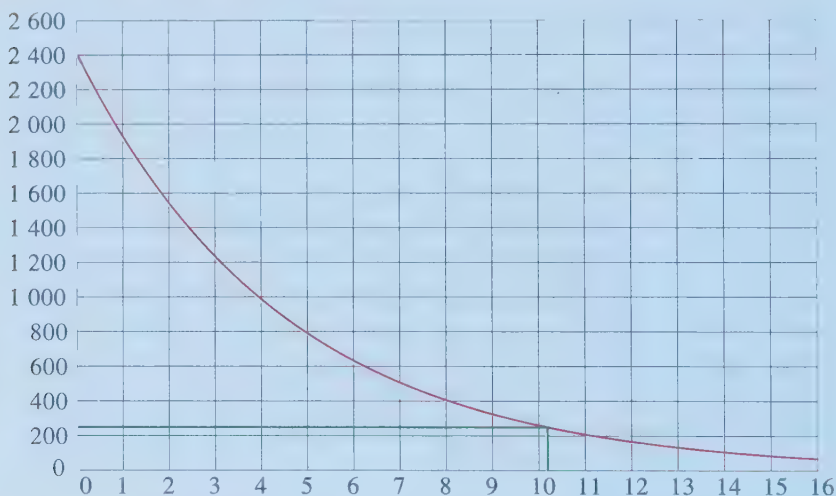
b) 10 heures et 20 minutes correspondent à $x \approx 10,33$ et $b(10,33) \approx 239$.

Il restera donc environ 239 000 bactéries au bout de 10 h et 20 min.

4) À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes (arrondies à l'unité) :

x	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16
$b(x)$	2 400	1 920	1 536	983	629	403	258	165	106	68

5) On en déduit la courbe suivante :



Un dixième de 2 400 est 240, on cherche donc x pour que $b(x) < 240$.

Graphiquement on lit qu'il faut (environ) $x > 10,3$.

Par le calcul, on utilise la fonction logarithme décimal :

$b(x) < 240 \Leftrightarrow 2400 \times 0,8^x < 240 \Leftrightarrow 0,8^x < 0,1 \Leftrightarrow \log(0,8^x) < \log(0,1)$ car la fonction $\log$ est strictement croissante, d'où :

$x \times \log(0,8) < \log(0,1)$ et finalement $x > \frac{\log(0,1)}{\log(0,8)}$ car, attention, $\log(0,8)$ est

un nombre négatif. On calcule alors $\frac{\log(0,1)}{\log(0,8)} = 10,318\dots$

Cela confirme donc la lecture graphique, il faut en effet $x > 10,318...$

On peut conclure qu'au bout de 10,32 heures (soit environ 10 h et 20 min), il restera moins d'un dixième des bactéries.

2) La population double tous les dix ans, donc $p_1 = 2 \times p_0 = 10$.

De même $p_2 = 20$ et $p_3 = 40$.

2) (p_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $p_0 = 5$ donc :

$$p_n = 5 \times 2^n.$$

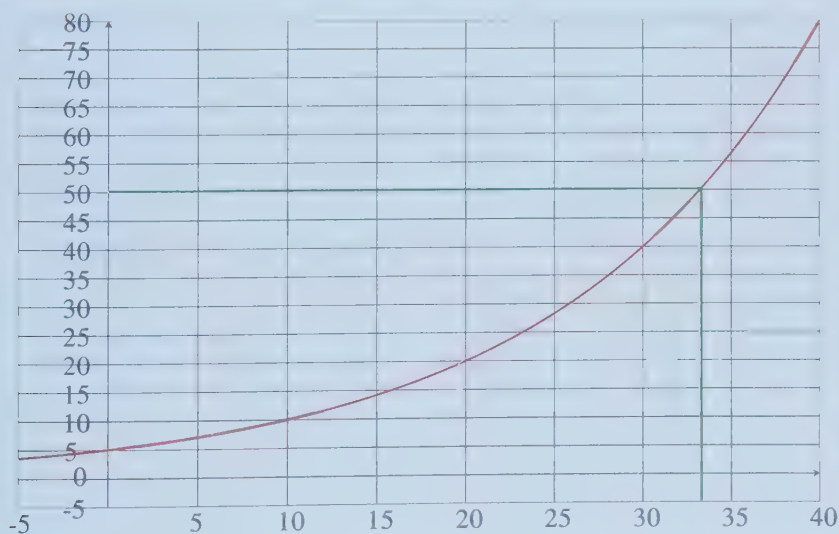
3) $1980 + 10n = 2004 \Leftrightarrow 10n = 24 \Leftrightarrow n = 2,4$.

La population prévisible en 2004 est donc $5 \times 2^{2,4} = 26,39...$ soit environ 26 400 habitants.

4)

Année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2020
x	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$p(x)$	5	7,1	10	14,1	20	28,3	40	56,6	80

5)



6) Le graphique montre que $p(x) > 50$ pour $x \geq 34$.

On peut donc prévoir que la population dépassera pour la première fois 50 000 habitants en 2014.

Remarque : On peut vérifier que $p(34) = 52,7\dots$ et $p(33) = 49,2\dots$

Par le calcul, on a : $p(x) > 50 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{10}} > 10 \Leftrightarrow \log\left(2^{\frac{x}{10}}\right) > \log(10)$.

D'où $\frac{x}{10} \log(2) > 1$ (car $\log(10) = 1$) et finalement $x > \frac{10}{\log(2)}$.

Or $\frac{10}{\log(2)} = 33,219\dots$ Il faut donc en effet $x \geq 34$.

10 1) La calculatrice donne : $a = 148,928\dots$ et $b = 4\,854,285\dots$

Donc, arrondis à la dizaine, $a \approx 150$ et $b \approx 4\,850$ et l'équation de D est :

$$y = 150x + 4\,850.$$

2) $P_1 \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow kr = 2\,240$ et $P_7 \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow kr^7 = 4\,420$.

On a donc : $\frac{kr^7}{kr} = \frac{4\,420}{2\,240} \Leftrightarrow r^6 = \frac{221}{112}$.

Pour en déduire r , élevons les deux membres de cette égalité à la puissance $\frac{1}{6}$.

On obtient : $\left(r^6\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{221}{112}\right)^{\frac{1}{6}}$ donc $r = \left(\frac{221}{112}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,12$.

Et puisque $kr = 2\,240$, on en déduit que $k = \frac{2\,240}{1,12} = 2\,000$.

Finalement, $f(x) = 2\,000 \times 1,12^x$.

3) À l'aide d'une calculatrice, on peut établir le tableau suivant :

x	$y = 150x + 4\,850$	$z = 2\,000 \times 1,12^x$
1	5 000	2 240
2	5 150	2 510
3	5 300	2 810
4	5 450	3 150
5	5 600	3 520
6	5 750	3 950
7	5 900	4 420
8	6 050	4 950
9	6 200	5 550
10	6 350	6 210
11	6 500	6 960

4) On constate que z dépasse y pour la première fois lorsque $x = 11$.

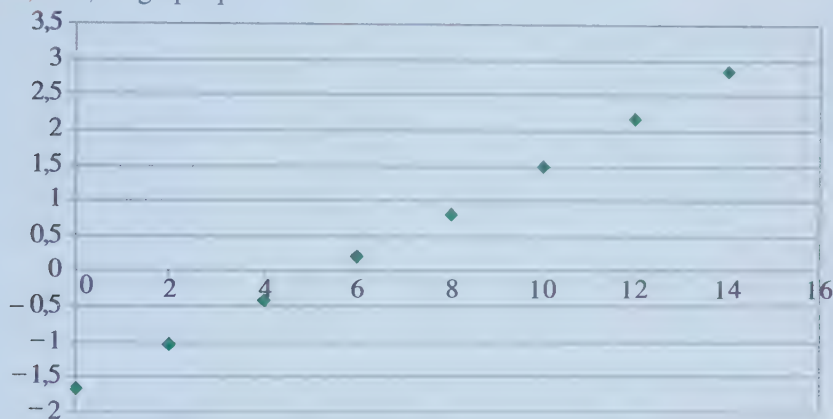
On peut donc prévoir que c'est en novembre que la nouvelle activité dégagera pour la première fois du profit.

118 La forme du nuage n'est pas rectiligne donc un ajustement affine de ce nuage ne semble pas approprié.

2) a) Le tableau complété est :

t_i	0	2	4	6	8	10	12	14
y_i	-1,67	-1,05	-0,42	0,22	0,82	1,48	2,08	2,86

b) D'où le graphique :



On peut noter l'effet du changement de variable qui a transformé le nuage en une série de points presque alignés.

c) On obtient : $\bar{t} = 7$ et $\bar{y} = 0,54$ donc $G(7 ; 0,54)$.

d) Le coefficient directeur de D est :

$$a = \frac{y_G - y_{M_1}}{x_G - x_{M_1}} = \frac{0,54 - (-0,42)}{7 - 4} = \frac{0,96}{3} = 0,32.$$

Donc son équation est de la forme : $y = 0,32t + b$ et en traduisant qu'elle passe par G , on obtient : $0,54 = 0,32 \times 7 + b$ d'où $b = -1,7$

Finalement, D a pour équation : $y = 0,32t - 1,7$.

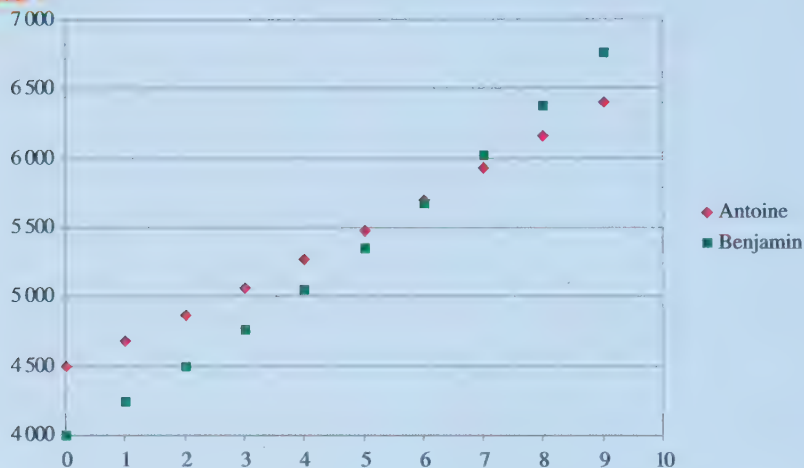
e) On a $y = \log\left(\frac{x}{720 - x}\right) \Leftrightarrow 10^y = \frac{x}{720 - x} \Leftrightarrow 10^y(720 - x) = x.$

D'où $720 \times 10^y = x(1 + 10^y) \Leftrightarrow x = \frac{720 \times 10^y}{1 + 10^y}$ et en multipliant le numérateur et le dénominateur par 10^{-y} on obtient $x = \frac{720}{1 + 10^{-y}}.$

En remplaçant y par son expression en fonction de t obtenue à la question précédente, on a pour finir : $x = \frac{720}{1 + 10^{1,7-0,32t}}$.

f) La calculatrice donne pour $f(20)$, $f(30)$ et $f(40)$ des valeurs arrondies à 720, on peut donc en déduire que le nombre de crustacés va se stabiliser à 720.

12



17 On constate sur le graphique que $a_6 > b_6$ et $a_7 < b_7$, c'est à la fin de la 7^e année que pour la première fois le capital de Benjamin dépassera celui d'Antoine.

31 a) Le capital d'Antoine augmente de 4 % par an, il est donc multiplié chaque année par 1,04.

(a_n) est donc une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme $u_0 = 4500$, d'où : $a_n = 4500 \times 1,04^n$.

On obtient de même : $b_n = 4000 \times 1,06^n$.

b) On veut résoudre l'inéquation : $b_n > a_n$, c'est-à-dire :

$$4000 \times 1,06^n > 4500 \times 1,04^n \Leftrightarrow \frac{1,06^n}{1,04^n} > \frac{4500}{4000} \Leftrightarrow \left(\frac{1,06}{1,04} \right)^n > 1,125$$

Utilisons alors la fonction logarithme :

$$\log \left[\left(\frac{1,06}{1,04} \right)^n \right] > \log 1,125 \Leftrightarrow n \log \left(\frac{1,06}{1,04} \right) > \log 1,125 \Leftrightarrow n > \frac{\log 1,125}{\log \left(\frac{1,06}{1,04} \right)}$$

c'est-à-dire $n > 6,18...$

C'est donc bien pour $n = 7$ que, pour la première fois, $b_n > a_n$.

4) a) Cette fois le capital d'Antoine est multiplié chaque mois par 1,0035 et donc au bout d'un an il disposera de : $4\,500 \times 1,0035^{12} \approx \mathbf{4\,692,68\,€}$.

b) Avec le taux annuel de 4 % on obtient : $4\,500 \times 1,04 = 4\,680$.

Le banquier s'est donc trompé. Un taux mensuel de 0,35 % n'est pas équivalent à un taux annuel de 4 %.

c) Le taux mensuel x équivalent au taux annuel de 4 % doit vérifier :

$$4\,500 \times (1 + t)^{12} = 4\,500 \times 1,04 \text{ donc } (1 + t)^{12} = 1,04.$$

d) En élevant les deux membres de l'équation à la puissance $\frac{1}{12}$ on obtient :

$$1 + t = 1,04^{\frac{1}{12}} \text{ d'où } t = 1,04^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,003273... \text{ soit environ } \mathbf{0,327\, \%}.$$

5) De même le taux mensuel u équivalent à un taux annuel de 6 % doit vérifier :

$$(1 + u)^{12} = 1,06 \text{ d'où } u = 1,06^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,004867... \text{ soit } \mathbf{0,487\, \%}.$$

6) Si l'on note a_p et b_p les capitaux respectifs d'Antoine et de Benjamin au bout de p mois, on cherche le plus petit p tel que $b_p > a_p$ c'est-à-dire :

$$4\,000 \times 1,00487^p > 4\,500 \times 1,00327^p \Leftrightarrow \left(\frac{1,00487}{1,00327} \right)^p > \frac{4\,500}{4\,000}.$$

$$\text{Donc, comme en 3) b), } p > \frac{\log 1,125}{\log \left(\frac{1,00487}{1,00327} \right)} \Leftrightarrow p > 73,91...$$

C'est donc au bout de 74 mois qu'on aura pour la première fois $b_p > a_p$.

Remarque : 74 mois correspondent à **6 ans et 2 mois**.

Testez-vous

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, 3 affirmations sont proposées dont une seule est exacte.

1 Pour tout réel $x > 0$, on a :

- a) $2^x < 0$
- b) $2^x > 1$
- c) $2^x > 2$

2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = 0,8^x$ est...

- a) croissante sur $\mathbb{R}$
- b) décroissante sur $\mathbb{R}$
- c) ni l'un ni l'autre

3 Pour tout réel $x < 100$, on a :

- a) $\log x > 10$
- b) $\log x < 0$
- c) $\log x < 2$

4 Quels que soient les réels a et b :

- a) $10^a + 10^b = 10^{ab}$
- b) $10^{a-b} = \frac{10^a}{10^b}$
- c) $10^{-a} = -10^a$

5 L'équation $\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 1,4$ a pour solution...

- a) $x \approx 2,84$
- b) $x \approx 3,48$
- c) $x \approx -6,15$

6 L'équation $10^{2x-4} = 4$ a pour solution...

- a) $x = 4$
- b) $x = 2 + \log 2$
- c) $x = 4 \log 4$

7 L'équation $x^{2,5} = 32$ a pour solution...

- a) $x = -4$
- b) $x = 2$
- c) $x = 4$

8 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \log(3 \times 10^x)$ a pour représentation graphique...

- a) une parabole
- b) une hyperbole
- c) une droite

Réponses : **1** b) ; **2** b) ; **3** c) ; **4** b) ; **5** a) ; **6** b) ; **7** c) ; **8** c)

Objectif BAC

Entraînement T_{le} ST2S

Mathématiques

**Tout pour maîtriser le programme
et réussir l'épreuve du bac !**

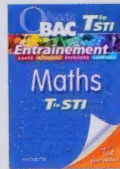
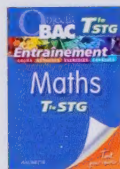
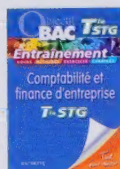
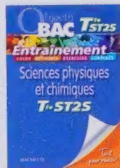
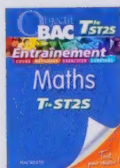
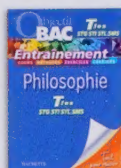
Objectif BAC



Annales

L'outil indispensable de la réussite :
une sélection de sujets corrigés
pour préparer l'épreuve

Toutes les matières en un seul volume pour réussir le BAC



Entraînement Le cours, la méthode et les exercices corrigés : tout un programme !

www.hachette-education.com

18/0712/2

ISBN : 978-2-01-180712-0



9 782011 807120

COLLECTIFS / ENTRAÎNEMENT MATH

Prix Editeur EUR 10.50

Prix Magasin EUR 9.98

120

2/09



9 782011 807120

KI-312-509



10,50

TTC

France métropolitaine

VAMB