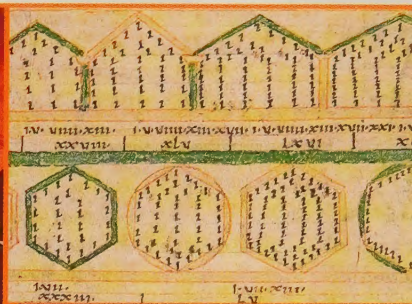


La petite encyclopédie **LYCÉE**

André Deledicq

maths



ÉDITIONS
DE LA CITÉ

MANUEL+



Digitized by the Internet Archive
in 2024

<https://archive.org/details/mathslyce0000andr>

André Deloche

Professeur agrégé de mathématiques

maths

LYCÉE

maths

1998

© Éditions de la Cité-Bordas/SEJER, 2004

© Éditions de la Cité, 1998

ISBN : 2-84410-061-9

André Deledicq

Professeur agrégé de mathématiques

maths

LYCÉE

ÉDITIONS
DE LA CITÉ

MANUEL+

COLLECTION CRÉÉE PAR
Bernard Lecherbonnier,
agrégé des lettres, docteur ès lettres

RÉDACTION

Joël Breunier (professeur certifié de mathématiques),
André Deledicq (professeur agrégé de mathématiques),
René Gauthier (professeur agrégé de mathématiques),
Ginette Mison (professeur agrégé de mathématiques).

ÉDITION

Première édition : André Deledicq, en collaboration avec Thomas Schmutz
Deuxième édition : Anne-Sophie Bourg

CORRECTION

Simon Kohn, Frédéric Perroud

CONCEPTION DE LA COUVERTURE

Yannick Lebourg

ICONOGRAPHIE

Emmanuelle de Villedary,
Colette Laporte, Céline Colinet

DESSINS ET SCHÉMAS

Jean-Philippe Deledicq

CONCEPTION GRAPHIQUE

ELSE

MAQUETTE

Anna Klykova,
assistée par Christian Fey, Séverine Poulain
SG Production (Christian Seintignan)

RÉALISATION ÉDITORIALE

ATE

Avant-propos

La seule discipline qui ait conservé la marque du pluriel dans sa dénomination, c'est, ou plutôt, ce sont les mathématiques.

Car elles sont tout à la fois...

- un remarquable ensemble de méthodes et de techniques de calcul assurant le fonctionnement de notre monde... et un fantastique jeu de l'esprit prenant plaisir à ses constructions intellectuelles ;
- un champ d'applications pour les problèmes quotidiens parfois très pratiques... et un foisonnement de questions titillantes ou essentielles que l'on aime chercher librement ;
- une discipline exigeante de rigueur intellectuelle et de soins calculatoires nécessaires... et un domaine de liberté époustouflant pour l'imagination et la recherche.

Nous espérons que vous trouverez tout cela dans cet ouvrage et nous souhaitons qu'il vous accompagne tout au long de votre scolarité, comme un ouvrage de référence et une source de culture.

Car les mathématiques sont surtout une culture, mijotée depuis vingt-cinq siècles, avec toutes les finesses, les sels et les merveilles qu'y ont apportés l'intelligence, la volonté d'échanges réfléchis et l'humour.

Depuis vingt-cinq siècles aussi, Platon nous convie à un certain *Banquet* pour y parler de l'Amour.

Il est possible que ce soit aussi celui des mathématiques : venez y goûter et repaissez-vous en paix.

André Deledicq

Manuel +, mode d'emploi

La perspective du bac donne un objectif précis aux lycéens qui, de la seconde à la terminale, doivent consolider et approfondir leurs connaissances dans de nombreuses disciplines.

Pour bien maîtriser chacune de ces disciplines, qu'elles soient scientifiques ou littéraires, il faut avant tout bien en saisir l'esprit et les spécificités, appréhender les tenants et les aboutissants de leurs programmes, maîtriser les méthodes permettant de réussir aux examens. La seule compilation des savoirs ne suffit pas. Le lycéen doit clairement comprendre ce qu'on lui demande et savoir s'organiser en conséquence. Là est la clé du succès.

C'est pourquoi Manuel + constitue l'outil le mieux adapté à ce but. Dans une première partie, les **Bases** font un résumé des connaissances acquises au collège. Tout le programme du lycée, pour chaque discipline, est ensuite développé dans le **Fil rouge**, écrit par un auteur éminent. Les **Points clés** traitent tous les sujets de cours et les **Fiches pratiques** orientent parmi les autres ressources documentaires : livres, encyclopédies, films, multimédia... Enfin, le **Dico** contient tous les termes et noms indispensables... avec un renvoi systématique aux Points clés.

Cet ouvrage est utilisable dès l'entrée en seconde. Pour préparer le bac, ainsi que les concours administratifs et les examens professionnels, il est l'outil idéal puisqu'il réunit en lui toutes les fonctions des aides généralement disséminées entre plusieurs livres : mementos, manuels classiques, grammaires, dictionnaires...

La caution d'une grande signature assure la garantie scientifique des contenus, la liaison avec l'enseignement supérieur. Avec Manuel +, vous aimerez les études secondaires parce que vous en comprendrez mieux la signification.

Bernard Lecherbonnier

Sommaire

■ Bases

Ce qu'il faut savoir à l'entrée en 2^e

Les nombres	14	Les angles	31
Les opérations	15	Les triangles	32
L'usage des lettres et des parenthèses	16	Les triangles (suite)	33
Des formules à ne pas ignorer !	17	Le théorème de Thalès et sa réciproque	34
La notation puissance	18	Triangle rectangle et trigonométrie	35
Les équations du premier degré	19	Le théorème de Pythagore et les racines carrées	36
Résoudre par l'algèbre	20	L'usage du théorème de Pythagore	37
Repérage et coordonnées	21	Le cercle	38
Fonction affine $f : x \mapsto ax + b$	22	Le cercle et quelques distances	39
Proportionnalité et fonction linéaire	23	Le parallélogramme	40
La règle de trois	24	D'autres quadrilatères	41
Les pourcentages	25	La symétrie centrale	42
Les systèmes de deux équations	26	Translations et vecteurs	43
L'ordre et l'inégalité des nombres	27	La symétrie orthogonale	44
Les inéquations	28	La rotation	45
Des données statistiques	29	Des objets de l'espace : les solides	46
Les droites dans un plan	30	Les calculs avec des solides	47

■ Fil rouge

Pour comprendre le programme dans son ensemble

Les mathématiques

Le plaisir de faire des mathématiques	50
À quoi servent les mathématiques ?	58
Que sont les mathématiques ?	64

Les trois faces des mathématiques 72

Le second degré

Le degré des problèmes	80
Les courbes du second degré	91
Les nombres et le calcul	
Les nombres réels	98

Sommaire

Trois astuces de calcul	106
La géométrie analytique	110
Thalès et Euclide	116
Le calcul généralisé	
Des calculs sans les nombres	122
Les nombres complexes	130
Les suites de nombres et de fonctions	136

Limites et infini : les débuts de l'analyse	
Les maximums et les minimums	142
Qu'est-ce qui ne va pas ?	146
Le concept de fonction	148
La courbe du chien	152
La dialectique des limites	156
Les deux grands problèmes du début de l'analyse	167
La mesure des objets	179

■ Points clés

Pour maîtriser les sujets de cours

La géométrie et les transformations

Les transformations	194
La symétrie centrale	196
L'homothétie	198
Les angles orientés	200
Réflexion ou symétrie orthogonale	202
La rotation	204
Transformation et géométrie	206
Les isométries : un bilan	208
La composée de deux réflexions	210
Les compositions d'isométries	212
Les similitudes	214
La géométrie de l'espace	216
Le parallélisme	218
La perpendicularité	220
Le plan médiateur d'un segment	222
Les corps ronds	224
Le repérage dans l'espace	226

L'algèbre et les équations

Le calcul littéral	228
Un complément sur les puissances et les radicaux	230
Les problèmes liés aux pourcentages	232
L'ordre des réels	234
La « droite réelle »	236
Les polynômes	238
La division par $(x-a)$	240
Les équations	242
Résoudre une équation à une inconnue	244
Les équations à produit nul	246
D'autres équations	248
Les inéquations	250
Les inéquations du type $A \times B > 0$ ou $\frac{A}{B} < 0$	252
L'équation du second degré	254
L'inéquation du second degré	256

Les équations en trigonométrie	258
Les transformations en trigonométrie	260
Les systèmes d'équations	262
Les équations à plus de deux inconnues	264
La méthode de Gauss pour les systèmes	266
Des problèmes particuliers portant sur des systèmes et des équations	268

L'analyse et les fonctions

Les fonctions (1)	270
Les fonctions (2)	272
Des fonctions de référence	274
Les fonctions trigonométriques (1)	276
Les fonctions trigonométriques (2)	278
Variations et représentations graphiques	280
La dérivabilité, la limite en $x=0$	282
Les applications de la dérivabilité	284
L'étude globale d'une fonction	286
Le second degré	288
D'autres fonctions polynômes	290
Les fonctions quotients de polynômes	292
Les limites en trigonométrie	294
L'interprétation des graphiques	296
La poursuite d'une racine	298
Les suites numériques (1)	300
Les suites numériques (2)	302
Des suites particulières	304
La récurrence pour les suites	306
Convergence et suites récurrentes	308
Suites et résolutions d'équations	310

Les fonctions composées et les fonctions primitives	312
Les fonctions logarithmes	314
Les fonctions exponentielles	316
Les dérivées logarithmiques	318
Des équations particulières	320
Les fonctions « racine n -ième »	322
Des fonctions à plusieurs variables	324
Le calcul intégral	326
D'autres propriétés des intégrales	328
Intégrales et calculs d'aires	330
L'approximation d'une intégrale	332
D'autres applications	334
Des équations différentielles	336
Les équations du second ordre	338

La géométrie analytique

Les vecteurs géométriques	340
La multiplication d'un vecteur par un réel	342
L'utilisation des vecteurs en géométrie	344
Les coordonnées d'un vecteur en géométrie	346
Les équations de droites	348
Des droites dans le triangle	350
Les inéquations à deux inconnues	352
Le barycentre de deux points	354
Les barycentres : généralisation	356
Le produit scalaire de deux vecteurs	358
Produit scalaire et géométrie plane	360
Les lignes de niveau	362
Le calcul vectoriel dans l'espace	364

Le calcul vectoriel analytique dans l'espace	366	Les formules de Moivre et d'Euler	400
Les produits dans l'espace	368	Les équations dans $\mathbb{C}$	402
Statistiques et probabilités		Nombres complexes et géométrie	404
Statistiques et probabilités	370	Nombres complexes et transformations du plan	406
Les paramètres d'une série statistique	372	Les courbes	
Deux variables statistiques	374	Une autre façon de représenter une courbe	408
Des problèmes de corrélation	376	Des généralités sur les courbes paramétrées	410
Fréquence et probabilité	378	Quelques exemples de courbes	412
L'équiprobabilité et le dénombrement	380	L'ellipse	414
Statistiques et probabilités : des formules pour dénombrer	382	Des courbes en électronique	416
Statistiques et probabilités : des probabilités conditionnelles	384	L'arithmétique	
Modélisation en probabilités	386	Les nombres entiers	418
Des aléas numériques	388	La division euclidienne	420
Espérance et écart-type	390	L'art d'utiliser les restes	422
La loi binomiale	392	Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple	424
Les nombres complexes		Les nombres premiers	426
Les nombres complexes (1)	394	La décomposition	428
Les nombres complexes (2)	396	Quelques grands théorèmes : Bezout, Gauss et Diophante	430
La forme trigonométrique d'un nombre complexe	398		

■ Fiches pratiques

Pour se documenter

Des méthodes

Raisonner et démontrer	435
Cadres et méthodes	439
Pièges à éviter	441
Programmer une calculatrice	443
Simuler pour savoir...	445

À côté des mathématiques

Des maths à la portée de tous	447
Des livres pour le lycée	449
Des références et des revues	451
La recherche en mathématiques	453
Le Kangourou des lycées	455
Les autres concours mathématiques	457

Des thèmes mathématiques

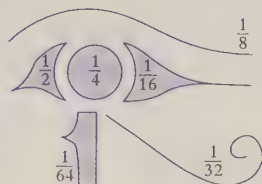
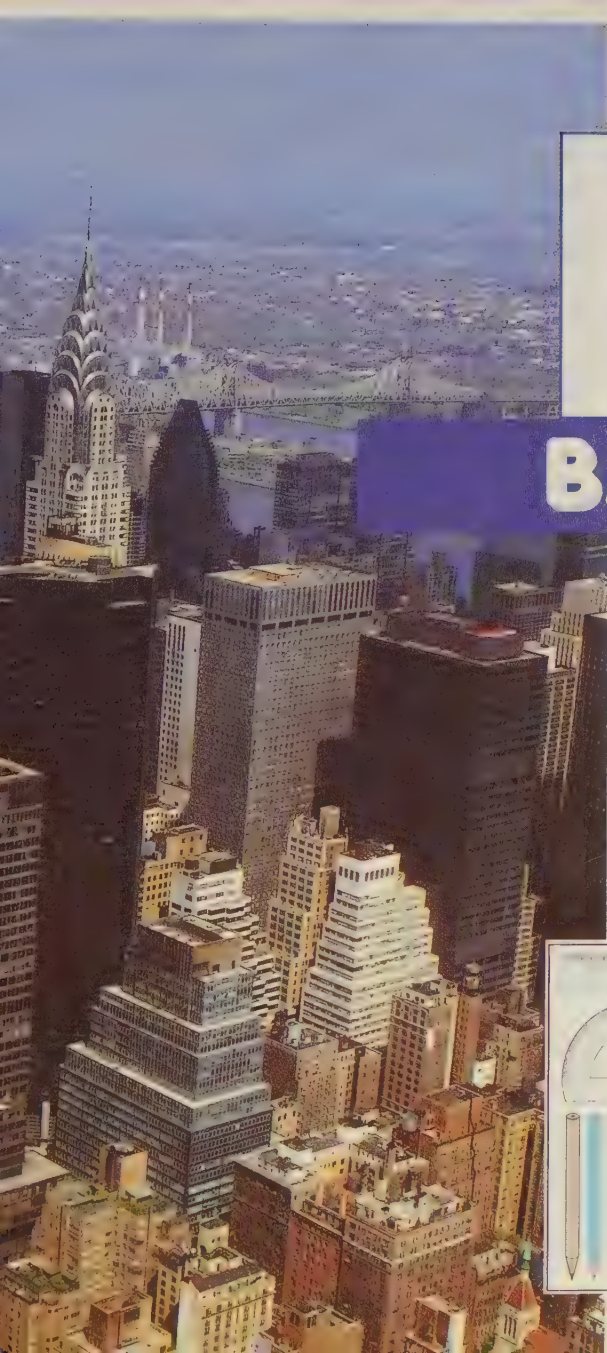
Résoudre les équations	459
Calculer une intégrale au lycée	461
Comment déterminer un signe... ?	463
Le nombre pi	465
Le nombre d'or	467
Le mètre et la méridienne	469
Des formats chez l'imprimeur	471
Polyèdres et solides de Platon	473
En spirales !...	475
Géométrie et cartographie	477
La théorie des graphes	479

■ Dico

Pour retrouver une définition, une notion

De la page 484 à la page 575

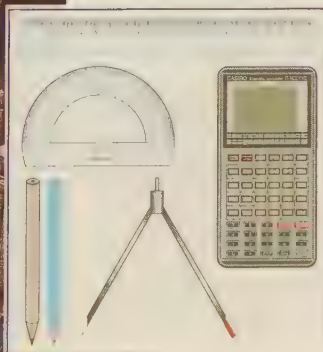




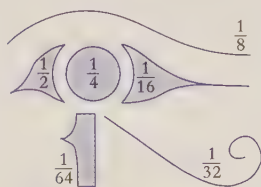
BASES

Ce qu'il faut savoir
à l'entrée en 2^{de}

*Les connaissances
acquises au collège
indispensables pour être
prêt à suivre les cours
de mathématiques au lycée.*



Dès qu'il nous faut compter, mesurer, on a besoin des nombres. Partant des nombres entiers, les ensembles de nombres ont été enrichis au cours des âges pour mesurer des longueurs, des aires, des volumes et résoudre des équations.



▲ Pour mesurer les fractions de capacités (céréales, liquides...), les Égyptiens utilisaient les différentes parties de l'œil du dieu Horus (le dieu à tête de faucon).

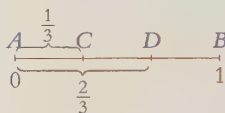
Les nombres entiers

Les entiers naturels tels que 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 1999 ; ... ont d'abord été inventés pour compter des animaux ou des objets. L'écriture d'un nombre naturel a beaucoup évolué depuis 3000 av. J.-C., jusqu'à notre notation actuelle en base dix.

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. Les entiers négatifs -2 ; -3 ; ... n'apparurent qu'aux XVI^e et XVII^e siècles. Avec les entiers naturels, ils forment l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$.

Les fractions

Le segment $[AB]$ de longueur 1 est partagé en trois segments de même longueur.



La mesure de $[AC]$ est $\frac{1}{3}$, celle de $[AD]$ est $\frac{2}{3}$.

Ces nombres sont des nombres dits « fractionnaires » ou « rationnels » (*ratio* veut dire « quotient » en latin). L'ensemble des rationnels se note $\mathbb{Q}$.

Attention ! $\frac{1}{3}$ n'est pas égal au décimal 0,3,

ni au décimal 0,33.

Ces décimaux ne sont que des valeurs approchées de $\frac{1}{3}$.

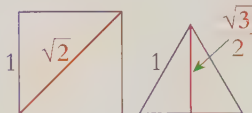
En revanche, 0,75 est un décimal égal au rationnel $\frac{3}{4}$.

Un rationnel a une infinité d'écritures.

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{7}{21} = \dots = \frac{1 \times k}{3 \times k}$$

Autres nombres

Dans un carré de côté 1, la mesure de la diagonale est $\sqrt{2}$. Dans un triangle équilatéral de côté 1, la hauteur mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



$\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels dont on sait trouver des valeurs approchées décimales.

$$\sqrt{2} \approx 1,414$$

$$\sqrt{3} \approx 1,732$$

$$\sqrt{5} \approx 2,236$$

Quant au nombre π , il mesure la longueur de la circonférence d'un cercle dont la longueur du diamètre est 1. On connaît actuellement plus de 6 milliards de décimales d'une approximation de π , ainsi : $\pi \approx 3,141592653\dots$

Tous ces nombres ont une propriété commune : ils peuvent être la longueur d'un segment ou d'un arc de courbe. Toutes les longueurs possibles forment, avec leurs opposés, l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.

Si l'on y réfléchit, il n'y a vraiment que deux opérations, l'addition et la multiplication. En effet, une soustraction de a n'est que l'addition du nombre opposé $-a$, et une division par b n'est que la multiplication par le nombre inverse $\frac{1}{b}$.

L'addition

Dans l'addition $5+3,6=8,6$, les **termes** sont 5 et 3,6 et la somme est 8,6.

Tout nombre a un opposé et la somme de deux opposés est 0.

$$\begin{aligned} 8+(-8) &= 0 \\ a+(-a) &= 0 \end{aligned}$$

0 est l'élément neutre de l'addition $a+0=a$ et $0+a=a$.

Ses propriétés :

- ➔ La commutativité
 $a+b=b+a$
- ➔ La différence
si $a=b+c$ alors $b=a-c$
- ➔ L'associativité
 $(a+b)+c=a+(b+c)$
- ➔ Addition répétée
 $5+5+5+5=5 \times 4$
(4 termes)

Les propriétés énoncées permettent de résoudre les équations les plus simples, comme ceci :

si $a+x=b$ alors $x=b-a$;

si $ax=b$ alors $x=\frac{b}{a}$
(avec $a \neq 0$).

La multiplication

Dans $5 \times 4,2=21$, 5 et 4,2 sont les facteurs et 21 en est le produit.

Tout nombre non nul a un inverse : le produit de deux inverses est 1.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} &= 1 & a \times \frac{1}{a} &= 1 \\ & & (a \neq 0) & \end{aligned}$$

1 est l'élément neutre de la multiplication :
 $a \times 1=a$ et $1 \times a=a$.

Ses propriétés :

- ➔ La commutativité
 $a \times b=b \times a$
- ➔ Le quotient
si $ab=c$ alors $b=\frac{c}{a}$
($a \neq 0$)
- ➔ L'associativité
 $(ab)c=a(bc)$
- ➔ Multiplication répétée
 $5 \times 5 \times 5 \times 5=5^4$
(4 facteurs)

Les opérations avec des fractions

Seules les fractions de même dénominateur peuvent être facilement ajoutées ou retranchées :

$$\frac{4}{5} + \frac{7}{5} = \frac{11}{5}$$

Si ce n'est pas le cas, on procède à une réduction des deux fractions au même dénominateur :

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{13}{12}$$

Pour la multiplication, c'est très simple :

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$$

Pour diviser deux fractions, on multiplie la première par l'inverse de la seconde :

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

Dans un calcul, un nombre décimal peut toujours être remplacé par une fraction, tout comme un entier, pour plus de commodité.

$$0,2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

$$0,5 + \frac{2}{3} = \frac{5}{10} + \frac{2}{3} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$$

Le calcul comportant des lettres, ou calcul littéral, est régi par un certain nombre de règles à bien maîtriser. Il est important, en particulier, de bien comprendre le rôle essentiel joué par les parenthèses dans la simplification des expressions mathématiques littérales.

Simplifier l'écriture

En calcul littéral, on supprime souvent le signe de multiplication entre les facteurs, que ceux-ci soient des lettres ou des nombres. Ainsi, $A \times B$ s'écrit AB , sans le signe « multiplier », $A \times A$ s'écrit A^2 , $2 \times A \times B$ s'écrit $2AB$. L'absence du signe de multiplication dans une expression mathématique facilite la lecture !

Le rôle des parenthèses

La présence de parenthèses indique toujours un calcul prioritaire. Ainsi, $(1+3) \times 5 = 4 \times 5 = 20$.

Faites attention lorsque dans une somme, les parenthèses sont précédées d'un signe MOINS !

$A + (B + C) - A + B + C$
Mais :

$A - (B + C) = A - B - C$
 $A - (B \cdot C) = A - B \cdot C$

Somme et produit littéraux

L'expression $4a^3b$ est un produit, tout comme $(3x+1)(x-2)$.

En revanche, $4x^2 - 5y$ est une somme, celle de $4x^2$ et de $-5y$. Selon la nature des questions que l'on se pose, il n'est pas indifférent qu'une quantité se présente sous la forme d'un produit ou d'une somme...

Développer

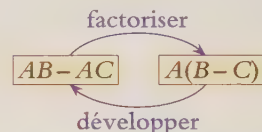
Lorsqu'une expression se présente sous la forme d'un produit, dire qu'on le développe, c'est dire qu'on le transforme en une somme :

$$(3a-2b)(a+b) \text{ s'écrit sous forme développée : } 3aa+3ab-2ba-2bb, \text{ soit } 3a^2+ab-2b^2.$$

Pour effectuer un développement, on utilisera certaines formules ou identités remarquables présentées ci-contre.

Factoriser

La factorisation est l'opération inverse du développement. Elle est indispensable dans certaines résolutions d'équations ou d'inéquations : il s'agit d'écrire une somme sous la forme d'un produit.



Des trucs pour bien factoriser

- Savoir lire les formules « à l'envers » : $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

- Savoir reconnaître des « formes particulières »

$4a^2 - 12ab + 9b^2$
c'est de la forme :

$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$
avec
 $A = 2a$ et $B = 3b$.

- Savoir regrouper des termes. Ainsi,

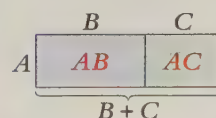
$4a - 4b - a^2 + ab$
s'écrit aussi
 $4a - a^2 - (4b - ab)$, soit
 $a(4-a) - b(4-a)$, soit
 $(4-a)(a-b)$
qui est une forme factorisée plus lisible.

La factorisation est une opération délicate : elle demande une longue pratique !

On retient mieux les propriétés de la multiplication en les représentant graphiquement : un produit mesure une surface.

La distributivité de la multiplication...

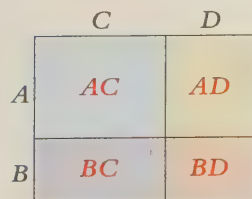
➤ sur l'addition :
 $A(B+C) = AB+AC$



➤ sur la soustraction :
 $A(B-C) = AB-AC$

Le produit...

➤ de deux sommes :
 $(A+B)(C+D) = AC+AD+BC+BD$

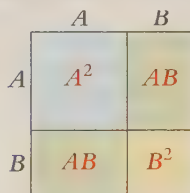


➤ d'une somme par une différence :
 $(A+B)(C-D) = AC-AD+BC-BD$

➤ de la somme de deux nombres par leur différence :
 $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$

Les carrés...

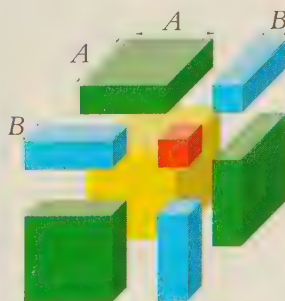
➤ d'une somme :
 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$



➤ d'une différence :
 $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

Les cubes...

➤ d'une somme :
 $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$



➤ d'une différence :
 $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

Les quotients

➤ Un quotient est égal au produit du numérateur par l'inverse du dénominateur :

$$\frac{A}{B} = A \times \frac{1}{B}$$

➤ Produits et divisions de quotients :

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

Astuce !

$$A \div \frac{B}{C} = \frac{A}{1} \div \frac{B}{C} = \frac{AC}{B}$$

Produits en croix

➤ Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$
 alors $AD=BC$

et réciproquement.

Cette propriété s'appelle «l'égalité des produits en croix».

L'inverse

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{B} \times \frac{1}{C}$$

On peut retenir cette propriété par une phrase :
 «**L'inverse d'un produit est égal au produit des inverses.**»

La «notation puissance» est une écriture dont l'objet est de résumer une multiplication de facteurs égaux (ex. : $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ ou $n \times n \times n = n^3$). Elle s'avère indispensable dans l'écriture des grands et des petits nombres.

«Condenser» une multiplication

Si b est un nombre non nul quelconque et n un entier naturel, l'écriture b^n désigne le produit

$$\underbrace{b \times b \times \dots \times b}_{n \text{ facteurs}}$$

Elle se lit « b puissance n » ou « b exposant n ».

➔ Pour $n \neq 0$ $0^n = 0$

$1^n = 1$

Pour $b \neq 0$ $b^0 = 1$

$b^1 = b$

➔ L'inverse de b , $\frac{1}{b}$, peut se noter b^{-1} et $\frac{1}{b^n}$ se note b^{-n} .

Les propriétés :

$$b^n \times b^m = b^{n+m}$$

$$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$$

$$(b^n)^m = b^{n \times m}$$

$$\frac{1}{b^n} = b^{-n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Des cas particuliers

➔ Carré :

 l'aire d'un carré de côté a se note a^2 .

➔ Cube :

 le volume du cube d'arête a se note a^3 .

➔ Puissance fractionnaire

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}.$$

L'utilisation de cette notation est utile lors de l'emploi de calculatrices scientifiques.

Les puissances de dix

Dans notre système de numération, elles sont particulièrement intéressantes pour simplifier l'écriture des grands ou des petits nombres.

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^n = \underbrace{1000 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$10^{-n} = \underbrace{0,0000 \dots 01}_{n \text{ zéros}}$$

Un exemple

En physique, le «nombre d'Avogadro» (nombre de molécules par mole) s'écrit :

$$N = 6,02213 \cdot 10^{23}$$

Le rayon d'une molécule d'eau vaut environ $30 \cdot 10^{-9}$ mètres.

Sur le clavier d'une calculatrice scientifique, on remarque la touche E, première lettre du mot «exposant», qui indique une multiplication par une puissance de 10. Ainsi, le nombre 1257830400000 s'écrit 1,2578304 E12.

Dans le langage scientifique, une puissance de 10 s'indique par des préfixes latins ou grecs :

$10^{-12} = 0,000\,000\,000\,000\,1$	pico
$10^{-9} = 0,000\,000\,000\,1$	nano
$10^{-6} = 0,000\,001$	micro
$10^{-3} = 0,001$	milli
$10^{-2} = 0,01$	centi
$10^{-1} = 0,1$	déci
$10^1 = 10$	déca
$10^2 = 100$	hecto
$10^3 = 1000$	kilo
$10^6 = 1\,000\,000$	méga
$10^9 = 1\,000\,000\,000$	giga
$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$	téra



La solution d'une équation

Résoudre une équation, c'est en trouver toutes les solutions. Pour cela, on la décompose en équations plus simples dont la solution est connue.

Le degré d'une équation est celui du plus grand exposant de l'inconnue de l'équation.

► $x^2 + 2x = 3$ est une équation de degré 2 d'inconnue x .

Si l'on remplace x par 2, on a $4 + 4 = 3$ qui est faux.

Si l'on remplace x par 1, on a $1 + 2 = 3$ qui est vrai.

On dit que 2 n'est pas solution de cette équation.

En revanche, le nombre 1 est une solution.

Le nombre (-3) est aussi une solution car $9 - 6 = 3$.

► L'équation $x^2 = 16$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$, 4 et (-4) .

► L'équation $x^2 = -2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Le mot «équation», devenu familier, n'a pourtant été accepté par l'Académie française qu'en 1740. Une équation, comme une égalité, s'écrit avec le signe $=$, mais comporte une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres (ex. : $3x + y = z$).

◀ Descartes (1596-1650).
Sa *Géométrie* (1637)
précise le langage
des équations et montre
comment les résoudre.

Premier degré

L'équation d'inconnue x , $x + a = b$ équivaut à $x = b - a$.

L'équation d'inconnue x , $mx = p$ équivaut, si $m \neq 0$ à $x = \frac{p}{m}$.

L'équation générale du premier degré $ax + b = c$ ($a \neq 0$) a pour unique solution le nombre $\frac{c-b}{a}$.

Pour résoudre une équation, on procède à des transformations succes-

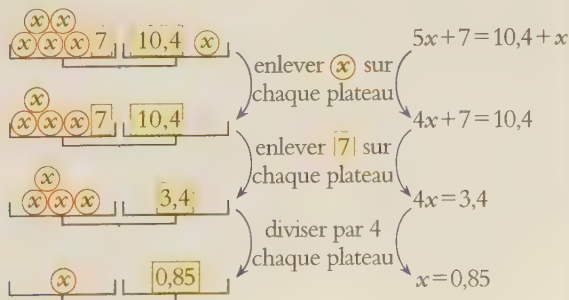
sives pour la décomposer en équations plus simples.

Exemple 1

$5x + 7 = 10,4 + x$
retrancher x , retrancher 7
 $5x - x = 10,4 - 7$
réduire : $4x = 3,4$
diviser par 4
 $x = 3,4 \div 4$
 $x = 0,85$
La solution est 0,85.

Exemple 2

$(2x - 5)(x + 3) = 0$
équivaut à
 $2x - 5 = 0$
ou $x + 3 = 0$
dont les solutions sont respectivement
 $\frac{5}{2}$ et (-3) .



La recherche d'un problème de mathématiques s'apparente souvent à la résolution d'une énigme policière. Et l'algèbre se porte au secours du chercheur en introduisant des lettres à la place de ce que l'on ne connaît pas.

Un problème ancien

Dans un vieux papyrus découvert en Égypte, on trouve le problème de partage suivant :

« Sur un tas de blé de 21 mesures, le paysan doit donner au pharaon une part égale au cinquième de la sienne. Quel partage faire ? »

Le scribe égyptien résolvait ce problème en faisant des « suppositions » :

« Si l'un en a 10, l'autre en a 2, donc si l'un en a 5, l'autre en a 1, etc. »

De nos jours, on peut désigner par x la part du paysan. Celle du pharaon est alors $\frac{x}{5}$ et le problème

peut se traduire par l'équation : $x + \frac{x}{5} = 21$

qu'il reste à résoudre pour trouver x .

On obtient $x = 17,5$ qui correspond à la part du paysan en mesures de blé.

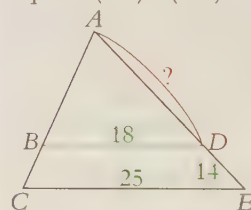
On aurait pu aussi choisir comme inconnue y la part du pharaon et le problème se traduirait alors par l'équation :

$$5y + y = 21$$

dont la solution est 3,5.

En géométrie

Voici une figure dans laquelle $(BD) \parallel (CE)$



On connaît les longueurs de certains segments : il s'agit de trouver la longueur AD .

On pourrait mesurer $[AD]$ sur le dessin. Trouvons-le par l'algèbre en posant : $AD = x$.

On a $AE = 14 + x$.

En utilisant la propriété de Thalès (voir p. 34), on obtient :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD} = \frac{25}{18}, \text{ d'où}$$

$$\frac{x+14}{x} = \frac{25}{18}, \text{ équation qui}$$

équivaut à :

$$18x + 14 \times 18 = 25x$$

d'où l'on déduit $x = 36$.

Si les longueurs données sont en cm, $AD = 36$ cm.

La résolution d'un problème par l'algèbre

Suivre le scénario suivant :

- **Choisir** l'inconnue (ou les inconnues) et les désigner par une lettre.
- **Transcrire** le problème sous forme d'équation.
- **Résoudre** l'équation.
- **Conclure** en examinant si la solution trouvée est faisable, c'est-à-dire vraisemblable.

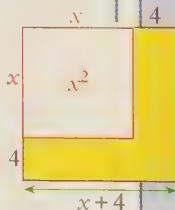
L'énigme du père Galion

Le père Galion a un jardin carré. Il en augmente tous les côtés de 4 mètres. La mesure de la surface augmente alors de 72 m². Trouver le côté du carré initial!

Posons $x =$ côté du carré.

Nouveau côté : $x + 4$
Nouvelle aire : $(x + 4)^2$
Équation $(x + 4)^2 - x^2 = 72$
qui s'écrit $8x = 72 - 16$,
d'où $x = 7$.

Un côté de jardin mesurait donc 7 m, ce qui est une longueur vraisemblable (un résultat de 197 m serait, dans ce cas, une valeur invraisemblable).

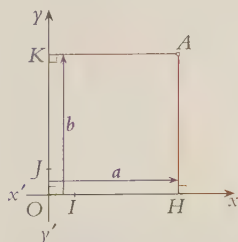


Repérage et coordonnées

Repérer un point sur un axe, c'est lui attribuer une abscisse, c'est-à-dire un nombre réel indiquant en particulier sa distance par rapport à l'origine du repère. Dans un plan muni d'un repère, il faut un couple de nombres pour situer un point.

Le repérage dans le plan

On choisit ici comme repère du plan deux axes perpendiculaires gradués avec la même unité sur ces deux axes.



L'abscisse du point A est $\overline{OH} = a$ sur l'axe (Ox) . Son ordonnée est $\overline{OK} = b$ sur l'axe (Oy) .

On note $A(a, b)$ pour indiquer que les coordonnées de A sont a et b.

Un point situé sur l'axe $(x'x)$ a une ordonnée nulle.

Exemple : $H(a; 0)$.

Un point situé sur l'axe $(y'y)$ a une abscisse nulle.

Exemple : $K(0; b)$.

Les régions du plan

Les deux axes partagent le plan en quatre régions ou quadrants. Selon le quadrant dans lequel se trouve le point, on voit immédiatement les signes de son abscisse et de son ordonnée :

II	y	I
$x < 0$		$x > 0$
$y > 0$		$y > 0$
	O	
$x < 0$		$x > 0$
$y < 0$		$y < 0$
III	x	IV

L'usage des coordonnées

Les coordonnées des points permettent de pratiquer la « géométrie analytique » à l'aide de simples calculs.

Exemples

► Le milieu d'un segment $[AB]$

Ses coordonnées sont les moyennes de celles de $A(a, b)$ et $B(a', b')$:

$$\left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2} \right).$$

► Vecteur $\overrightarrow{AB}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\begin{vmatrix} a'-a \\ b'-b \end{vmatrix} \text{ (extrémité - origine)}$$

avec $A(a, b)$ et $B(a', b')$.

► Distance AB

Dans un repère ortho-normé, elle est égale à

$$\sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2}$$

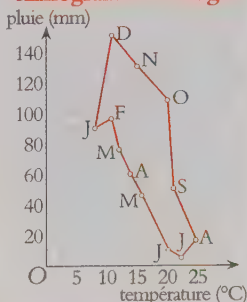
avec $A(a, b)$ et $B(a', b')$.

Le climogramme

En un lieu donné, on relève pour chaque mois de l'année : la température moyenne t en $^{\circ}\text{C}$, la hauteur des précipitations h en mm. Chaque mois est représenté par un point de coordonnées (t, h) .

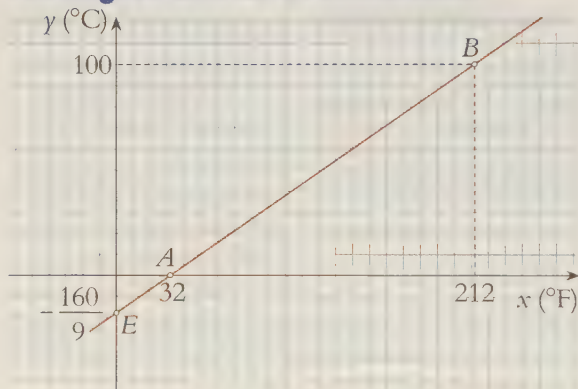
On obtient 12 points dans un repère, que l'on relie par des segments. Exemple : le climogramme d'Alger, où il fait 8°C en moyenne en janvier, avec 90 mm de précipitations.

climogramme d'Alger



On s'intéresse parfois à des phénomènes dans lesquels interviennent deux variables x et y , où y dépend de x : on exprime alors y en fonction de x . Et on place les points de coordonnées (x, y) dans un plan repéré.

Les degrés Celsius et Fahrenheit



Dans les pays anglo-saxons, la température s'exprime en degrés Fahrenheit (°F) alors que dans les autres pays on utilise les degrés Celsius (°C).

0 °C correspond à 32 °F.
100 °C correspond à 212 °F.
On montre que si x est une température en °F et y cette température en °C, on a la relation

$$y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9},$$

ce qui permet de calculer une température en fonction de l'autre.

Sur la représentation graphique ci-dessus, on reconnaît aisément les points suivants :

$$A(x=32 \text{ °F et } y=0 \text{ °C})$$

$$B(x=212 \text{ °F et } y=100 \text{ °C})$$

$$E(x=0 \text{ °F et } y = -\frac{160}{9} \text{ °C})$$

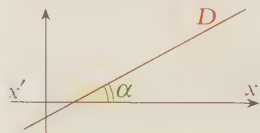
Les points de coordonnées (x, y) dans le repère sont des points alignés.

Une simple lecture sur le graphique permet de trouver approximativement l'une de ces températures si l'on connaît l'autre.

La relation générale $y = ax + b$

Si x et y sont liés par ce type de relation, on dit que y est une fonction affine de x .

Dans ces conditions, dans un repère du plan, les points de coordonnées (x, y) sont des points alignés sur une droite D . On dit que cette droite a pour équation $y = ax + b$. Le nombre a est le coefficient directeur de la droite D . Il est égal à la tangente de l'angle de D avec l'axe (x, x) : $a = \tan \alpha$.

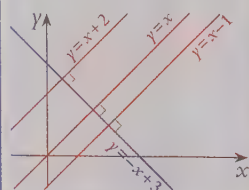


Deux droites

Soit deux droites D et D' d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

Si $a = a'$, D et D' sont parallèles.

Si $aa' = -1$, D et D' sont perpendiculaires dans un repère orthonormal.



Dans la fonction affine définie par $y=ax+b$, il arrive que le coefficient b soit nul. La relation $y=ax$ définit alors une fonction linéaire.

Distance et durée

Si la vitesse v d'un véhicule est constante, la distance d parcourue est proportionnelle au temps t de parcours. Cela se traduit par la relation : $d=vt$.

La quotient $\frac{d}{t}$ est constant : $\frac{d_1}{t_1} = \frac{d_2}{t_2} = \dots = v$.

Le nombre v est le coefficient de proportionnalité faisant passer du temps de parcours à la distance.

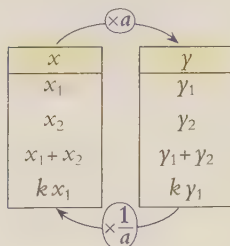
On a aussi $t = \frac{d}{v} = \frac{1}{v} \times d$.

Inversement, donc, le temps de parcours est proportionnel à la distance : le coefficient de proportionnalité faisant passer de la distance au temps est $\frac{1}{v}$.

On dit que d et t sont des variables proportionnelles : si la durée double, la distance parcourue double, ce que l'on peut généraliser en disant : « Si la durée de parcours est multipliée par k , la distance est elle aussi multipliée par k . »

Le coefficient de proportionnalité

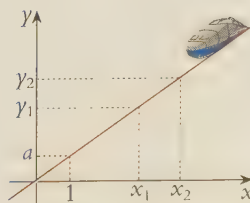
Si l'on a $y=ax$ avec a constant et non nul, on dit que y et x sont proportionnels. Le nombre a est le coefficient de proportionnalité, qui fait passer de x à y .



$$a(kx_1) = k(ax_1) = ky_1.$$

Si on représente sur un repère les points (x, y) , ces points sont alignés sur une droite d'équation $y=ax$.

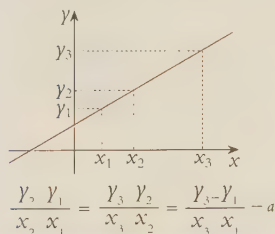
Cette droite passe par l'origine du repère.



Les curiosités des fonctions affines

Pour une fonction affine définie par $y=ax+b$, avec $b \neq 0$, les points (x, y) sont alignés sur une droite qui ne passe pas par l'origine. Donc leur ordonnée y n'est pas proportionnelle à leur abscisse x .

Cependant, la proportionnalité se cache quelque part : ce sont les accroissements de y qui sont proportionnels aux accroissements de x .



À noter

On rencontre la proportionnalité dans de nombreuses situations.

- Établir l'échelle d'une carte.
- Agrandir ou réduire un dessin.
- Calculer un débit.
- Calcul du rapport entre masse et volume.
- Changer de l'argent.
- Calcul du rapport entre prix au kilo et prix des articles achetés.

Dans de nombreuses situations, on est amené à utiliser ce que l'on appelle communément une «règle de trois». Cette expression signifie simplement que, connaissant trois nombres, on peut en calculer un quatrième.

La combinaison de données

On connaît les trois nombres a , b , c et l'on cherche le nombre u correspondant dans le tableau de proportionnalité.

$\times k$	...	a	c	...
	...	b	u	...

Par exemple, sachant qu'on a utilisé 13 litres de carburant sur une distance de 182 km, quelle distance peut-on parcourir avec un plein de 52 litres ?

On sous-entend bien sûr que la consommation est proportionnelle à la distance parcourue.

13	52	
182	?	

La technique de base pour trouver le nombre cherché consiste à repérer des combinaisons intéressantes (addition et multiplication) dans une ligne : les mêmes combinaisons se reproduisent dans l'autre colonne !

Ici on remarque que $52 = 13 \times 4$.

	$\times 4$	
13	52	
182	?	

Le nombre cherché est donc 4×182 , soit 728.

La règle de trois

Il s'agit d'une combinaison particulière «passant par» l'unité.

➤ 13 litres permettent de parcourir 182 km.

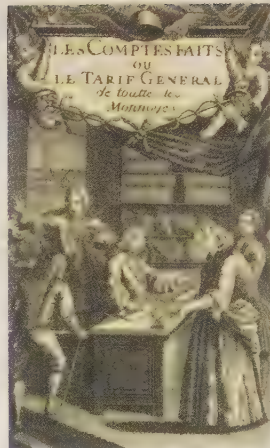
➤ 1 litre permet donc de parcourir $\frac{182}{13}$ km, soit 14 km.

➤ 52 litres permettent de parcourir 52×14 km, soit 728 km.

En pratique, on opère sur le tableau suivant :

$\div 13$	$\times 52$	
13	1	52
182	14	728

On retrouve évidemment le même résultat.



▲ La règle de trois dans une illustration du livre de monsieur Barrême.

Les produits en croix

En fait, puisque a correspond à b et c à u , on a :

$$b = ka$$

et $u = kc$.

$$\text{Et donc, } k = \frac{b}{a} = \frac{u}{c}.$$

Cette dernière proportion équivaut à $b \times c = a \times u$.

Cette égalité des «produits en croix» donne une équation en u .

Par exemple, ici on aurait pu écrire $13u = 182 \times 52$

$$u = \frac{182 \times 52}{13} = \frac{9464}{13} = 728.$$

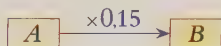
Finalement, une voiture consommant 13 litres par 182 km fait 728 km avec 52 litres.

Les pourcentages

On utilise souvent des pourcentages dans la vie courante. Les calculs avec des pourcentages sont tout simplement une application de la proportionnalité : on emploie souvent une multiplication.

Le pourcentage simple

Prendre 15 % d'un nombre A , c'est multiplier ce nombre A par $\frac{15}{100}$ ou encore par 0,15.



$$B = 0,15 A.$$

D'une manière générale, prendre $p\%$ de A , c'est multiplier A par $\frac{p}{100}$.

Si l'on pose $p' = \frac{p}{100}$,

on a $B = p'A$.

Si l'on connaît **deux** de ces **trois** nombres A , p' et B , on sait calculer le troisième !

Ne pas confondre !

Le pourcentage p ,
par exemple : 8 %,
et le coefficient

$$p' = \frac{p}{100},$$

par exemple : 0,08.

Exemples

➔ Sur 1510 élèves du collège, il y a 625 demi-pensionnaires. Calculons le pourcentage de demi-pensionnaires :

$$625 = p' \times 1510,$$
$$\text{d'où } p' = \frac{625}{1510} \approx 0,414.$$

Le pourcentage obtenu est 41,4 % environ.

➔ Le taux de TVA étant de 19,6 % et le prix HT étant de 1210 €, calculer le montant de la TVA : $1210 \times 0,196 = 237,16$ €.

➔ Dans les mêmes conditions, si on a payé 123 € de TVA, on peut calculer le prix hors taxe X :

$$0,196 \times X = 123,$$
$$\text{d'où } X = \frac{123}{0,196} = 627,55 \text{ €}.$$

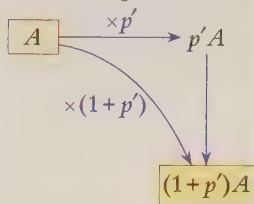
➔ Sachant que le minerai de fer contient 8 % de fer pur, quelle masse de minerai a-t-on traitée pour obtenir 2 tonnes de fer pur ?

$$M \times 0,08 = 2, \text{ d'où}$$

$$M = \frac{2}{0,08} = 25 \text{ (en tonnes).}$$

Le pourcentage d'augmentation

Une quantité A augmente de $p\%$.
Que devient-elle ?
L'augmentation est $\frac{p}{100} \times A$,
soit encore $p'A$.



La nouvelle valeur de A est alors $A + p'A$,
soit $(1+p')A$.

$$A' = (1+p')A.$$

➔ Si un article qui vaut 120 € augmente de 9 %, il vaudra : $120 \times (1 + 0,09) = 120 \times 1,09$, soit 130,80 €.

Le pourcentage de diminution

Si la quantité A diminue de $p\%$, on retranche de A le nombre $p'A$.
La nouvelle valeur est $A - p'A$, soit $A' = (1 - p')A$.

➔ Un article vaut 120 €. Il diminue de 9 %.
Le nouveau prix est : $A' = 120 \times (1 - 0,09)$, soit 109,20 € environ.

Quand on résout un problème comportant plusieurs inconnues par l'algèbre, on traduit celui-ci en une ou plusieurs équations. On résout alors un «système d'équations».

Une équation, deux inconnues

L'équation $x+2y=5$ comporte deux inconnues. Si $x=1$ et $y=2$, cette équation est vérifiée : on dit que le couple $(1; 2)$ est solution de cette équation.

La mule et l'ânesse

« On feint qu'une mule allant avec une ânesse se plaignait d'être trop chargée, et lui dit :
- Si je t'avais donné un de mes sacs, nous en aurions autant l'une que l'autre; et si tu m'en avais donné un des tiens, j'en aurais le double de toi. »

C'est un problème dont les deux inconnues sont, par exemple, x le nombre des sacs de la mule, y celui de l'ânesse. La première phrase se traduit par l'équation

$$x-1=y+1.$$

La seconde se traduit par

$$x+1=2(y-1).$$

Trouver x et y , nombres des sacs de la mule et de l'ânesse, c'est résoudre un système :

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x-2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=y \\ 2y=x+3 \end{cases}$$

$$\text{d'où } 2(x-2)=x+3$$

$$2x-4=x+3$$

$$2x=x+7.$$

$$\text{Finalement : } 2x-x=7$$

$x=7$; donc $y=5$. La mule avait 7 sacs et l'ânesse 5.

Mais attention à ne pas le confondre avec le couple $(2; 1)$, qui lui n'est pas solution : pour $x=2$ et $y=1$, l'équation n'est pas vérifiée.

Tous les couples solutions – ils sont une infinité – sont les couples de coordonnées des points de la droite D dont l'équation s'écrit :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

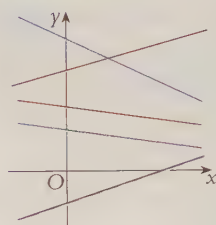
Deux équations, deux inconnues

Si l'on a deux équations à deux inconnues, on peut se demander si, parmi l'infinité des solutions de l'une et l'infinité des solutions de l'autre, il n'y aurait pas une ou plusieurs solutions communes aux deux.

Considérons le système linéaire du premier degré d'inconnues x et y .

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

À chaque équation est associée une droite du plan. Le nombre des points communs aux deux droites est le nombre des solutions du système.



- **Droites sécantes :**
une solution.
- **Droites parallèles distinctes :**
pas de solution.
- **Droites confondues :**
une infinité de solutions.

Pour résoudre le système du 1^{er} degré donné en exemple, on a le choix entre trois techniques :

► **La substitution**
On calcule y dans une équation et on porte y dans l'autre comme cela a été fait dans l'encadré.

► **Les combinaisons**
On cherche à éliminer une inconnue par des additions ou des multiplications bien choisies. On a (E1) $x-y=2$
(E2) $x-2y=-3$.

La combinaison (E1)-(E2) élimine x et conduit à $y=5$. La combinaison $2(E1)-(E2)$ élimine y et donne $x=7$. D'où le couple solution $(7; 5)$.

► **Solution graphique**
On cherche le point d'intersection des deux droites associées à ces équations.

L'ordre et l'inégalité des nombres

Bases

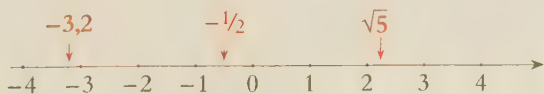
Comparer deux nombres, c'est se demander s'ils sont égaux et, sinon, quel est le plus grand des deux : c'est le problème de l'ordre entre les nombres réels.

Généralités

N'importe quel nombre négatif est inférieur à tout nombre positif : ainsi, $-158 < 12$. Deux négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs opposés : $12 < 28$ donc $(-12) > (-28)$. Il suffit donc de savoir comparer deux positifs, sachant que zéro est à la fois positif et négatif. Connaissant l'ordre naturel : $0 < 1 < 2 < \dots < 100 < \dots$, on sait comparer deux entiers relatifs. Il est bon de se représenter une droite graduée pour situer les nombres les uns par rapport aux autres.

Les décimaux

Si deux décimaux n'ont pas la même partie entière, le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière. Si les parties entières sont identiques, alors on compare les parties décimales ayant le même nombre de chiffres décimaux. Ainsi, $8,75 < 9,2$ ou $8,75 < 8,90$.



Les fractions

Pour comparer deux fractions, il faut les réduire au même dénominateur. La plus grande est celle qui a le plus grand numérateur. Ainsi, pour comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, on procède comme suit : $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ et $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ donc $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

On peut aussi comparer deux fractions à 1 :

pour comparer $\frac{12}{13}$ et $\frac{71}{70}$, on note que

$$\frac{12}{13} < 1 \text{ et } \frac{71}{70} > 1$$

$$\text{donc } \frac{12}{13} < \frac{71}{70}$$

D'autres cas

Pour comparer le décimal 2,3 et le nombre irrationnel $\sqrt{5}$, il suffit de remarquer que :

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24$$

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24 < 2,3$$

$$\text{donc } \sqrt{5} < 2,3.$$

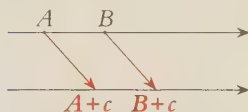
Avec des lettres

Dire que $a < b$, c'est dire que la différence $b - a$ est strictement positive.

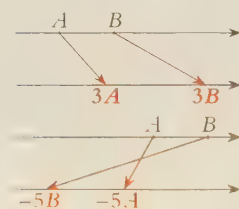
Dire que $a \leq b$, c'est dire que $a < b$ ou $a = b$. Dans ce cas, on peut aussi écrire $b - a \geq 0$.

L'ordre et les opérations

L'addition d'un même nombre positif ou négatif ne change pas l'ordre, autrement dit : si $A < B$ alors $A + c < B + c$.



La multiplication par un nombre strictement positif ne change pas l'ordre, alors que la multiplication par un nombre strictement négatif inverse l'ordre : si $A < B$ alors $3A < 3B$. si $A < B$ alors $-5A > -5B$.



Pour résoudre certains problèmes, on est amené à résoudre des inéquations. La démarche pour «mettre en inéquation» est la même que celle de la «mise en équation».

Les solutions d'une inéquation

L'expression $x^2 + 2x < 3$ est une inéquation d'inconnue x . Si l'on remplace x par 2, on obtient $4 + 4 < 3$, ce qui est faux : le nombre 4 n'est pas solution de cette inéquation. Si l'on remplace x par 0, on a $0 < 3$, ce qui est vrai.

Le nombre 0 est solution de l'inéquation. Il en est de même si l'on remplace x par 0,5 ; ou encore par -1,5. Les nombres 0 ; 0,5 ; -1,5 sont des solutions de cette inéquation. Résoudre cette inéquation, c'est en trouver toutes les solutions.

Deux inéquations du premier degré

On trouve le degré d'une inéquation comme celui d'une équation. Exemples d'inéquations du premier degré :

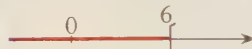
- (1) $2x - 8 < 4$
(2) $5x + 1 \leq 9(1 + x)$

D'une manière générale, une inéquation du premier degré d'inconnue x peut s'écrire $ax + b < c$ ou $ax + b \geq c$.

Exemple 1

Résoudre $2x - 8 < 4$
On ajoute 8 aux deux membres : $2x < 4 + 8$
soit $2x < 12$.
On divise les deux membres par 2, qui est positif : on obtient $x < 6$.
Tous les nombres réels inférieurs à 6 sont solutions de cette inéquation.

Il est pratique de représenter l'ensemble de ces nombres par les points d'une demi-droite sur un axe :



Exemple 2

Résoudre $5x + 1 \leq 9(1 + x)$.
On écrit des inéquations plus simples ayant les mêmes solutions :

$$\begin{aligned} 5x + 1 &\leq 9 + 9x \\ 5x - 9x &\leq 9 - 1 \\ -4x &\leq 8 \end{aligned}$$

On divise alors les deux membres par (-4) qui est négatif. D'où : $x \geq -2$.
Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à (-2) :



Un système

Résoudre le système

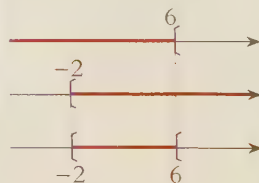
$$\begin{cases} 2x - 8 < 4 \\ 5x + 1 \leq 9(1 + x), \end{cases}$$

c'est déterminer tous les nombres qui sont à la fois solutions de la première et de la seconde de ces inéquations.

Après avoir résolu séparément chacune d'elles et représenté les solutions par les points d'un axe, il suffit d'examiner la «partie commune» aux deux demi-droites pour déterminer les solutions communes.

Ici, les solutions de ce système sont tous les nombres compris entre (-2) (au sens large) et 6 (au sens strict), qui vérifient à la fois $x < 6$ et $x \geq -2$, que l'on peut écrire aussi $-2 \leq x < 6$.

Les solutions du système sont ces nombres.



Le mot «statistique» vient du latin *status* (état). À Rome, déjà, l'empereur Auguste faisait procéder à des enquêtes sur les richesses de son Empire. De nos jours, les statistiques sont utilisées dans les sondages, en biologie...

Une statistique

Dans une classe, on note le nombre d'enfants pour chacune des 23 familles des élèves. Voici les résultats : 2 ; 1 ; 7 ; 3 ; 2 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 1 ; 3 ; 2 ; 2 ; 6 ; 4 ; 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 3 ; 3 ; 1. Le nombre d'enfants par famille est la variable. Les valeurs prises par cette variable sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7.

Il y a 7 familles de 1 enfant : 7 est l'effectif pour la valeur 1. La somme des effectifs est 23 : c'est l'effectif total. On dresse le tableau indiquant l'effectif de chaque valeur :

Nombre d'enfants	1	2	3	4	6	7
Effectif	7	8	4	2	1	1

La fréquence d'une valeur

La valeur 1 apparaît 7 fois sur un total de 23 : on dit que la fréquence de cette valeur est $\frac{7}{23}$ soit environ 0,304 ou encore 30,4 %. La fréquence d'une valeur est l'effectif de cette valeur divisé par l'effectif total. La somme de toutes les fréquences est 1.

Effectifs et fréquences cumulés

Il y a $7+8+4=19$ familles ayant au plus 3 enfants. Le nombre 19 est l'effectif cumulé jusqu'à la valeur 3, 3 compris.

Le quotient $\frac{19}{23}$ est la fréquence cumulée correspondante. L'effectif cumulé jusqu'à la valeur 7 est l'effectif total 23 : la fréquence cumulée correspondante est $\frac{23}{23}$ ou 1.

La moyenne

On obtient la valeur moyenne de la variable en ajoutant toutes ses valeurs et en divisant par l'effectif total. Il est plus simple d'utiliser les données

classées qui regroupent les mêmes valeurs :

$$m = \frac{(1 \times 7) + (2 \times 8) + (3 \times 4) + (4 \times 2) + (6 \times 1) + (7 \times 1)}{23} = \frac{56}{23}$$

Le nombre moyen des enfants par famille pour ces 23 familles est 2,43.

La médiane

On range les 23 données dans l'ordre croissant : 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 6 ; 7. La valeur médiane est 2 : il y a 11 familles avant et 11 familles après cette valeur.

Deux représentations

Diagramme en bâtons

Pour chaque valeur, on dessine un «bâton» dont la longueur est proportionnelle à l'effectif de cette valeur.

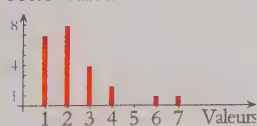
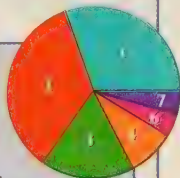


Diagramme en «camembert»

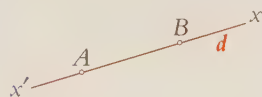
Pour chaque valeur, on dessine un secteur dont l'angle au centre est proportionnel à la fréquence de cette valeur ; pour 1 enfant $f \approx 0,304$; on prend un angle au centre de $360 \times 0,304$, soit 109° environ.



La droite est la seule figure géométrique que l'on peut tracer en n'en connaissant que deux points.

La notation

La droite d se note (AB) ou encore $(x'x)$.



Les deux points A et B déterminent le segment $[AB]$ dont la longueur se note AB .

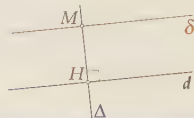
Le point A partage la droite $x'x$ en deux demi-droites $[Ax)$ et $[Ax')$.

Ne pas confondre !

Droite notée (AB)
Segment noté $[AB]$
Longueur notée AB

Les parallèles et les perpendiculaires

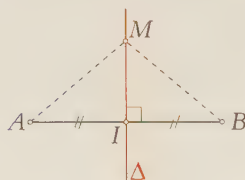
Par un point M , il passe une seule parallèle δ à la droite d et il passe une seule perpendiculaire Δ à d . Si Δ coupe d en H , MH est la distance de M à d .



Si $\delta // d$ et $\delta' // d$ alors $\delta // \delta'$
Si $\delta // d$ et $\Delta \perp d$ alors $\Delta \perp \delta$

La médiatrice d'un segment

La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par le milieu I de $[AB]$.



Si M est un point de Δ , alors $MA = MB$. On dit que M est équidistant de A et B . Réciproquement, si $NA = NB$, alors N est un point de Δ .

Le régionnement

La médiatrice partage le plan en deux demi-plans : celui qui contient A et celui qui contient B .



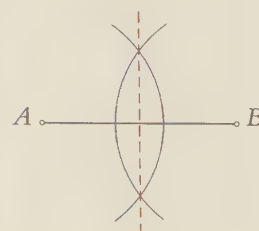
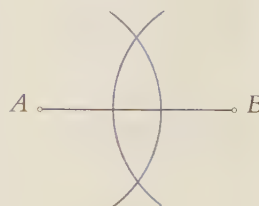
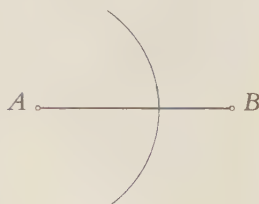
Pour le point Q du côté de A : $QA < QB$.
Pour le point P du côté de B : $PA > PB$.

Construire la médiatrice

Si l'on dispose d'une règle graduée et d'une équerre, on sait marquer le milieu I de $[AB]$ et tracer la perpendiculaire en I à (AB) .



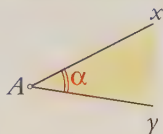
On sait aussi construire deux points de la médiatrice avec un compas et une règle.



Les angles

Navigateurs et astronomes ont toujours mesuré des angles. Le vocabulaire des angles est très riche et leurs propriétés très nombreuses.

Le vocabulaire



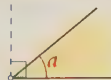
A : sommet de l'angle $\widehat{XAY}$, $[Ax)$ et $[Ay)$ sont les côtés. On mesure en général un angle en degrés.



angle plat
 $p = 180^\circ$



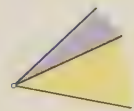
angle droit
 $d = 90^\circ$



angle aigu
 $a < 90^\circ$



angle obtus
 $90^\circ < b < 180^\circ$



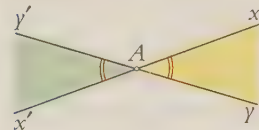
angles adjacents

Ils ont en commun le sommet et un côté ; les autres côtés sont de part et d'autre de ce côté commun.

➤ **Deux angles complémentaires**
sont deux angles dont la somme vaut 90° .

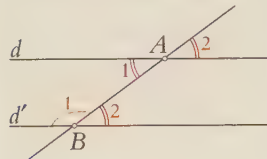
➤ **Deux angles supplémentaires**
sont deux angles dont la somme vaut 180° .

➤ **Angles opposés par le sommet**



Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

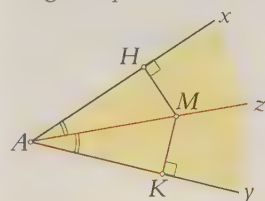
➤ **Angles et droites parallèles**



Les droites parallèles d et d' sont coupées par la sécante (AB) .
Les angles alternes-internes $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_2$ sont égaux, de même que les angles correspondants $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_1$.
Les angles $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_1$ sont supplémentaires.

Les bissectrices

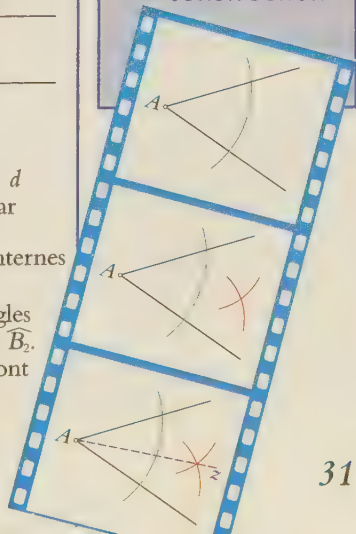
La demi-droite $[Az)$ telle que $\widehat{xAz} = \widehat{zAy}$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$.



Les bissectrices de deux angles adjacents et supplémentaires sont perpendiculaires.

Propriété d'un point d'une bissectrice
Si M est un point de $[Az)$, alors il est à égale distance des côtés de l'angle : $MH = MK$, et réciproquement.

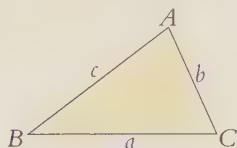
Film de la construction



Le triangle est l'une des figures géométriques les plus simples. Il a inspiré les géomètres depuis la plus haute Antiquité : Euclide, en particulier, a laissé de nombreuses « propositions » sur le triangle.

La notation

Dans le triangle ABC ,



les angles sont notés $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.
Les longueurs des côtés sont désignées par a , b , c .

Ainsi, $a = BC$

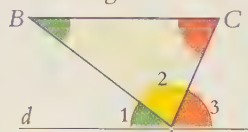
(côté opposé à $\widehat{A}$).

Le demi-périmètre, qui intervient souvent en géométrie, est noté p , et on a :

$$2p = a + b + c.$$

La somme des angles

La somme des angles d'un triangle est 180° .



Démonstration :

Si $d \parallel (BC)$, on a :

$$\widehat{A_1} = \widehat{B} \text{ et } \widehat{A_3} = \widehat{C}.$$

D'autre part,

$$\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 180^\circ.$$

L'inégalité triangulaire

Dans tout triangle, chacun des côtés est compris entre la somme et la différence des deux autres.

Si $a < b < c$, on a

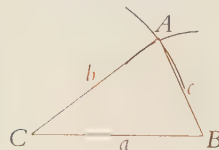
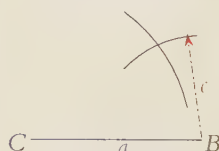
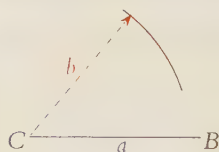
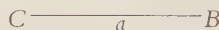
$$c - b < a < c + b;$$

$$c - a < b < c + a;$$

$$b - a < c < b + a.$$

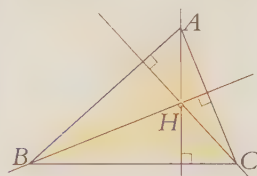
Construire un triangle

On peut le faire en connaissant les trois côtés a , b , c .



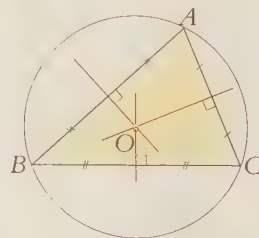
Hauteurs et orthocentre

La hauteur issue de A est la perpendiculaire à (BC) passant par A . Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre.



Médiatrices et cercle circonscrit

Les médiatrices des côtés sont concourantes en un point équidistant des trois sommets : le centre du cercle circonscrit au triangle.

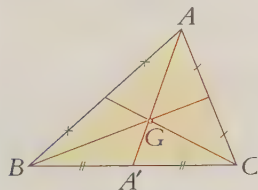


Si les trois angles sont aigus, le centre O est à l'intérieur du triangle.

Si l'un des angles est obtus, le centre O est à l'extérieur.

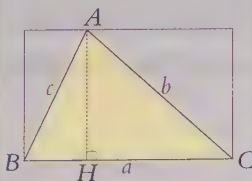
Les médianes et le centre de gravité

La médiane issue de A est le segment joignant A au milieu A' de $[BC]$. Les trois médianes sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle.



$$\text{On a } AG = \frac{2}{3} AA'.$$

L'aire d'un triangle



L'aire du triangle ABC est la moitié de l'aire du rectangle de côtés $[BC]$ et $[AH]$:

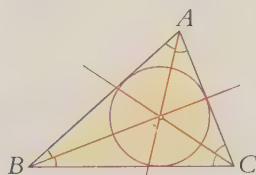
$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} BC \times AH$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a \times h_a = \frac{1}{2} b \times h_b = \frac{1}{2} c \times h_c$$

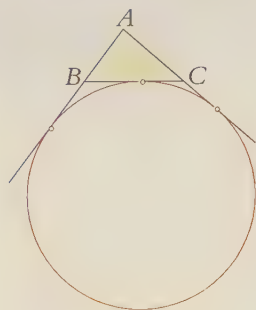
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} b \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} cb \sin \widehat{A}.$$

Bissectrices et cercle inscrit

Les bissectrices des angles sont concourantes en un point qui est équidistant des côtés du triangle. C'est le centre du cercle inscrit.



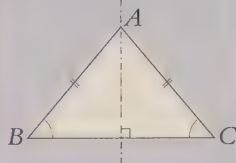
Cercles tangents aux trois côtés du triangle



La bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ et les bissectrices extérieures de $\widehat{B}$ et de $\widehat{C}$ concourent au centre du cercle exinscrit dans $\widehat{A}$. Ce cercle est extérieur au triangle, et tangent au côté $[BC]$ et aux prolongements des deux autres côtés.

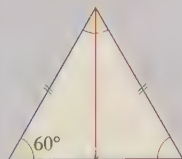
Les triangles particuliers

- Un triangle isocèle a deux côtés de même longueur. Les angles à la base sont égaux. La médiatrice de la base est axe de symétrie.

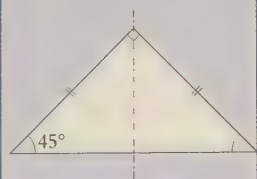


- Un triangle équilatéral a trois côtés de même longueur. Les trois angles sont égaux à 60° .

La hauteur, la médiane, la bissectrice et la médiatrice relatives à chaque sommet sont confondues et sont axes de symétrie.



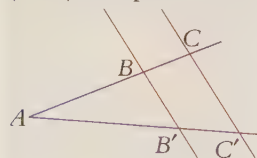
- Un triangle rectangle isocèle a un angle droit et deux angles égaux à 45° .



Le théorème de Thalès est, avec le théorème de Pythagore, un des grands théorèmes de la géométrie. Le théorème de Pythagore concerne des droites perpendiculaires, celui de Thalès concerne des droites parallèles.

L'énoncé du théorème

Les droites (BB') et (CC') sont parallèles.



$$\text{On a } \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}$$

$$\text{alors } \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$

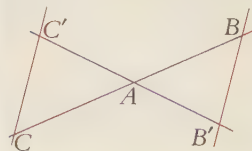
Sa réciproque

Si les points A, B et C sont alignés dans cet ordre, A', B' et C' aussi, et si on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}, \text{ alors les droites } (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont parallèles.}$$

Le « cas du papillon »

Les mêmes théorèmes s'appliquent quand on a la disposition ci-dessous.

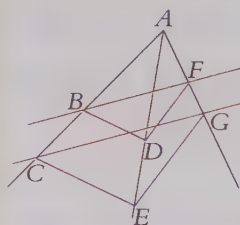


À quoi sert le théorème de Thalès ?

Grâce au théorème de Thalès, si on connaît trois des quatre longueurs AB, AB', AC et AC' , on peut calculer la quatrième.

La réciproque du théorème de Thalès permet notamment de démontrer que deux droites sont parallèles.

Un exemple de démonstration



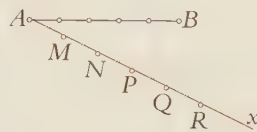
Si $(BD) \parallel (CE)$ et $(DF) \parallel (EG)$, on a les égalités suivantes :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG}$$

L'égalité $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AG}$ permet de dire que $(BF) \parallel (CG)$.

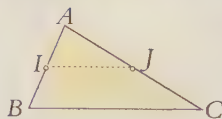
Une application

Pour partager un segment $[AB]$ en cinq segments de même longueur, sans règle graduée :



Sur une demi-droite $[Ax)$, porter cinq segments de même longueur (à l'aide du compas) et mener ensuite les quatre parallèles à (BR) .

La droite des milieux



I est le milieu de $[AB]$.

Si $(IJ) \parallel (BC)$, alors J est le milieu de $[AC]$ et $BC = 2IJ$.

Si J est le milieu de $[AC]$, alors $(IJ) \parallel (BC)$ et $BC = 2IJ$.

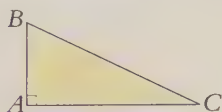
Dans un trapèze

La droite joignant les milieux des bases passe par le point d'intersection des deux côtés non parallèles.

Parmi tous les triangles, certains sont particulièrement utilisés : les triangles rectangles. Il existe des relations très simples et très utiles entre leurs côtés et leurs angles.

Le vocabulaire

Le côté $[BC]$ opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse.



Les rapports, ou lignes trigonométriques

Cosinus = $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

$$\cos \widehat{B} = \frac{BA}{BC} \quad \cos \widehat{C} = \frac{CA}{CB}$$

Sinus = $\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

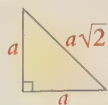
$$\sin \widehat{B} = \frac{CA}{CB} \quad \sin \widehat{C} = \frac{BA}{CB}$$

Tangente = $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} \quad \tan \widehat{C} = \frac{AB}{AC}$$

Angles particuliers

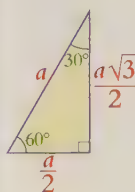
Dans un triangle rectangle isocèle, les rapports sont :



$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan 45^\circ = 1.$$

Dans un demi-triangle équilatéral :



$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

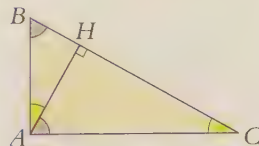
$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Les relations angulaires

Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, dont la somme vaut 90° sont des angles complémentaires.



$$\widehat{BAH} = \widehat{BCA} \quad \text{et} \quad \widehat{CAH} = \widehat{ABH}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}}$$

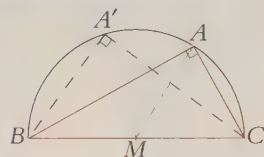
$$\tan \widehat{C} = \frac{\sin \widehat{C}}{\cos \widehat{C}}$$

$$(\cos \widehat{B})^2 + (\sin \widehat{B})^2 = 1$$

qui s'écrit aussi

$$\cos^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{B} = 1.$$

Les propriétés géométriques

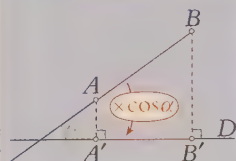


► Le sommet A de l'angle droit appartient au cercle de diamètre $[BC]$. Pour tracer un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse $[BC]$, il suffit de choisir un point du cercle de diamètre $[BC]$.

► La médiane $[AM]$ est égale à la moitié de l'hypoténuse.

Réciproquement, si dans un triangle une médiane est égale à la moitié du côté correspondant, le triangle est rectangle et ce côté est alors l'hypoténuse.

Le cosinus, opérateur de projection



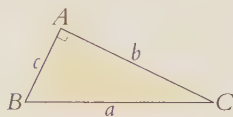
Les points A et B se projetant orthogonalement en A' et B' sur la droite D , on a : $A'B' = AB \times \cos \alpha$.

Le théorème de Pythagore et les racines carrées

Ce théorème est l'un des théorèmes les plus célèbres de la géométrie étudiée au collège : on en parle parfois en évoquant le « pont aux ânes de la géométrie »...

L'énoncé

Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.



Ici : $a^2 = b^2 + c^2$.

L'importance de ce théorème

Les deux propriétés énoncées ci-dessus permettent :

➔ soit de calculer la longueur du troisième côté d'un triangle rectangle

Sa réciproque

Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est le premier côté cité. On dispose donc d'une propriété qui permet de dire si l'on est en présence d'un triangle rectangle.

si l'on connaît les deux autres ;

➔ soit de prouver que deux droites sont perpendiculaires.

La racine carrée

Les calculs utilisant le théorème de Pythagore pour calculer un côté d'un triangle rectangle conduisent à l'utilisation du signe $\sqrt{\quad}$, « racine carrée ».

Par exemple, si dans le triangle rectangle on a $b=3$ et $c=5$, on obtient $a^2=34$.

On écrit $a=\sqrt{34}$.

Si m est un nombre positif, l'écriture $\sqrt{m}$ désigne le nombre positif dont le carré est m :

$$(\sqrt{m})^2 = m \text{ et } \sqrt{m^2} = m$$

$$\sqrt{1} = 1 ; \sqrt{0} = 0.$$

Deux règles d'utilisation

Si a et b sont positifs :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ce qui permet parfois de simplifier des écritures.

Par exemple,

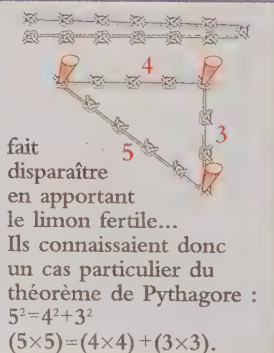
$$\sqrt{75} + \sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{3} =$$

$$5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

$$\text{Et } \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}.$$

Sur les rives du Nil

Deux millénaires avant J.-C., la légende raconte que les Égyptiens se servaient d'une corde à 13 nœuds (soit les 12 intervalles en rouge sur la figure) pour tracer des angles droits. Ainsi, munis d'une bonne équerre, ils pouvaient reconstituer tous les ans les limites des champs rectangulaires que les crues du Nil avaient



fait disparaître en apportant le limon fertile...

Ils connaissaient donc un cas particulier du théorème de Pythagore :

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$(5 \times 5) = (4 \times 4) + (3 \times 3).$$

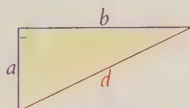
L'usage du théorème de Pythagore

Bases

Les longueurs remarquables

L'utilisation du théorème de Pythagore permet de déterminer des longueurs inconnues sur une configuration à l'aide de quelques autres longueurs connues.

Diagonale du rectangle de côtés a et b

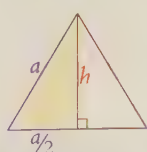


$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Diagonale du carré de côté a

$$d = a\sqrt{2}$$

Hauteur du triangle équilatéral de côté a



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Diagonale du parallélogramme rectangle de côtés a , b , c

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

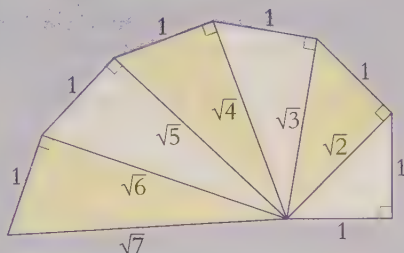
Diagonale du cube d'arête a

$$d = a\sqrt{3}$$

Distance de deux points en géométrie analytique

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

L'escargot de Pythagore

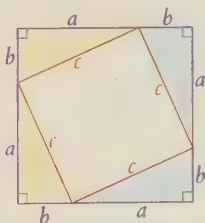


Au départ, on a affaire à un triangle rectangle isocèle dont les côtés ont pour mesures respectives

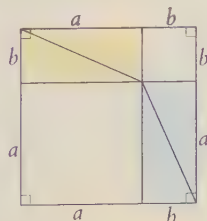
$(1; 1; \sqrt{2})$. De proche en proche, on construit des segments ayant pour mesure $\sqrt{3}; \sqrt{4}(=2); \sqrt{5}; \dots$

Deux puzzles pour Pythagore

Quatre triangles rectangles et un carré d'aire c^2 .

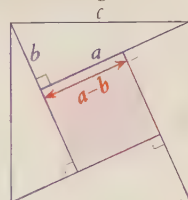


Les quatre mêmes triangles rectangles et deux carrés d'aire a^2 et b^2 :

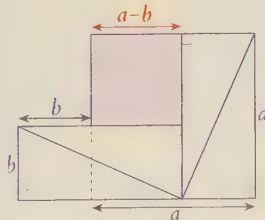


On a donc bien : $c^2 = a^2 + b^2$.

Autre configuration :



En disposant comme ci-dessous les quatre triangles rectangles et le carré rose, on fait apparaître un carré de côté a et un carré de côté b .



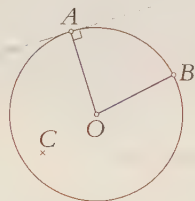
Le cercle, comme la droite, est une des figures premières de la géométrie. Pour les Grecs, une construction se faisait à la règle et au compas, c'est-à-dire n'utilisait que des droites et des cercles.

Le vocabulaire associé au cercle

Le cercle de centre O , de rayon R sera noté $\mathcal{C}(O, R)$ ou $\mathcal{C}$.

Si $A \in \mathcal{C}$ alors $OA = R$.

Si $OB = R$ alors $B \in \mathcal{C}$.



Le disque de frontière $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points C tels que $OC \leq R$.

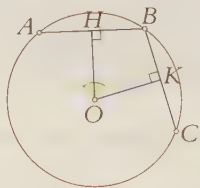
$[AB]$ est une corde.

L'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à cette corde. Le diamètre perpendiculaire à (AB) est la médiatrice de $[AB]$ et

la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

La corde $[AB]$ partage le cercle en deux arcs :

« le grand » et le « petit », on note $\widehat{AB}$ le plus petit des deux.



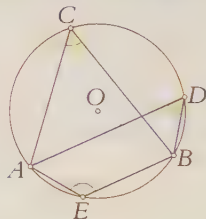
Si les deux cordes $[AB]$ et $[BC]$ ont même longueur, alors :

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$$

et $OH = OK$.

La tangente au cercle en A est la perpendiculaire à (OA) passant par A .

Les angles inscrits



$\widehat{ACB}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{AEB}$ s'appellent des angles inscrits dans le cercle.

$$\text{On a } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

Si C et D sont deux points du cercle de même côté de (AB) , alors $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Si C et E sont de part et d'autre de (AB) , alors : $\widehat{AEB} = 180^\circ - \widehat{ACB}$.

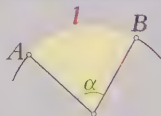
Quelques formules bien utiles à savoir par cœur

La longueur de la circonférence est

$$L = 2\pi R$$

L'aire du disque est

$$\mathcal{A} = \pi R^2$$



La longueur d'un arc est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre.

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{2\pi R}{l}$$

L'aire d'un secteur circulaire est aussi proportionnelle à l'angle au centre.

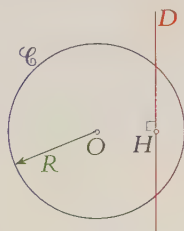
$$\frac{360}{\alpha} = \frac{\pi R^2}{\mathcal{A}}$$

Donc :

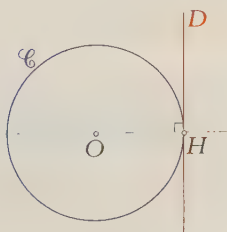
$$l = \frac{2\pi R \alpha}{360} \text{ et } \mathcal{A} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

Droite et cercle

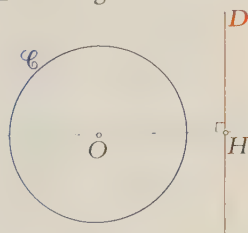
Si d est la distance du point O à la droite D , selon que l'on a $d < R$, $d = R$ ou $d > R$, la droite est sécante, tangente ou extérieure au cercle $\mathcal{C}$.



$d < R$.
 D est sécante à $\mathcal{C}$.



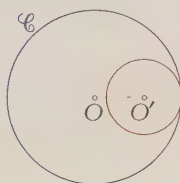
$d = R$.
 D est tangente à $\mathcal{C}$.



$d > R$.
 D est extérieure à $\mathcal{C}$.

Deux cercles entre eux

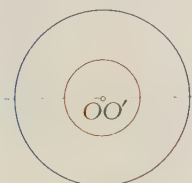
Deux cercles peuvent être sécants, tangents ou sans point commun.
 $\mathcal{C}(O; R); \mathcal{C}'(O'; R')$
 $OO' = \delta$



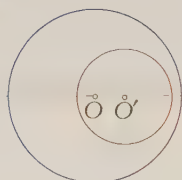
$\delta = R - R'$.
Cercles tangents intérieurement.



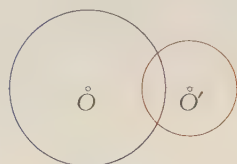
$\delta = R + R'$.
Cercles tangents extérieurement.



$\delta = 0$.
Cercles concentriques.



$\delta < R - R'$.
Un cercle est intérieur à l'autre.

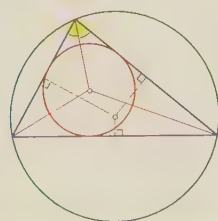


$R - R' < \delta < R + R'$.
Cercles sécants.



$\delta > R + R'$.
Cercles extérieurs.

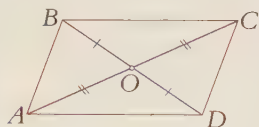
Cercles inscrits et circonscrits à un triangle.



Lorsqu'on coupe deux droites parallèles par deux autres droites parallèles, on obtient un parallélogramme, une figure aux propriétés géométriques multiples...

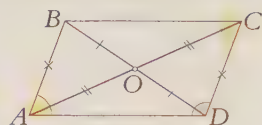
Sa construction

On choisit un point O et deux points A et B . Par la symétrie de centre O : le point A a pour image C , le point B a pour image D . Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme de centre O .



On peut dire aussi que, par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$, le point A a pour image le point D et le point B a pour image le point C .

Ses propriétés



Les diagonales se coupent en leur milieu : $OA = OC$ et $OB = OD$.

Les côtés opposés ont même longueur et ils sont parallèles : $AD = BC$ et $AB = DC$, $(AD) \parallel (BC)$ et $(AB) \parallel (DC)$.

Les angles opposés sont égaux et les angles adjacents sont supplémentaires :

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$$

$$\text{et } \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

$$\widehat{A} = \widehat{C} \text{ et } \widehat{B} = \widehat{D}.$$

Ses caractéristiques

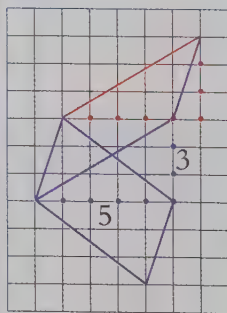
Un parallélogramme est caractérisé par les propriétés suivantes :

➔ c'est un quadrilatère qui a ses côtés parallèles deux à deux ;

➔ c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu ;

➔ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux : les segments $[AB]$ et $[DC]$ sont ainsi égaux, parallèles et de « même sens ».

Pour le tracer très vite !



Si l'on dispose d'une feuille quadrillée, il est facile de compter les carreaux...



D'autres quadrilatères

Le parallélogramme est un quadrilatère très particulier. Mais il en existe d'autres.

Le vocabulaire

Un quadrilatère possède quatre côtés et quatre angles. Un segment joignant deux sommets opposés est une diagonale. Un quadrilatère peut être :

convexe



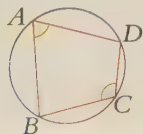
croisé



non convexe et non croisé.

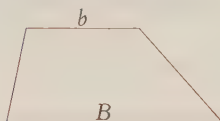


Dans tout quadrilatère convexe, la somme des angles est égale à 360° . Un quadrilatère inscriptible est un quadrilatère dont les quatre sommets sont sur un même cercle, donc cocycliques. Dans un quadrilatère convexe inscriptible, deux angles opposés sont supplémentaires.



Le trapèze

C'est un quadrilatère convexe dont deux côtés sont parallèles.



Il est isocèle s'il a un axe de symétrie.



Parallélogrammes particuliers

Le losange est un quadrilatère convexe ayant quatre côtés de même longueur.

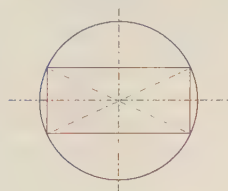


C'est donc un parallélogramme particulier. Ses diagonales qui ont le même milieu sont perpendiculaires et sont axes de symétrie du losange.

Le rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits. C'est un parallélogramme particulier dans lequel les diagonales ont la même longueur.



Le rectangle est inscriptible dans un cercle : les diagonales du rectangle sont des diamètres du cercle circonscrit. Il a deux axes de symétrie.



Le carré est à la fois un losange et un rectangle. Les quatre côtés ont la même longueur et les quatre angles sont des angles droits.



Losange, rectangle, carré sont des parallélogrammes particuliers ! Ils ont donc un centre de symétrie.

Certains objets et motifs décoratifs ou naturels ne changent pas d'aspect après un demi-tour autour d'un point. Ils sont invariants pour une certaine symétrie centrale : hélice, carte à jouer, hexagone ayant un centre de symétrie...

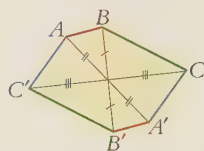
Centre de symétrie

On reconnaît qu'une figure présente un centre de symétrie O lorsque la propriété suivante est vérifiée : pour tout point M de la figure, le point M' tel que O soit milieu de $[MM']$ est aussi un point de la figure.

Hélice



Carte à jouer

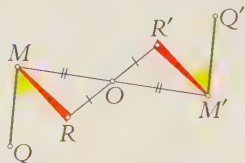


Le centre d'un cercle est centre de symétrie du cercle.

Certains dessins de lettres ont un centre de symétrie, comme N ou S.

Symétrie centrale

La symétrie centrale autour d'un point O est une transformation du plan (appelée aussi « demi-tour »). À chaque point M elle associe le point M' ainsi construit : M' est le point de la droite (MO) tel que O soit le milieu de $[MM']$.

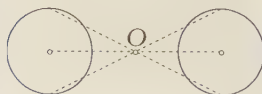


Cette transformation « conserve » les distances et les angles.

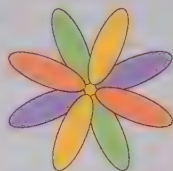
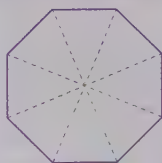
Ainsi, avec les notations de la figure ci-dessus, on a :

- $\overline{MR} = \overline{M'R'}$
- $\overline{MRQ} = \overline{M'R'Q'}$
- $\overline{MQR} = \overline{M'Q'R'}$

➡ Un cercle est transformé en un cercle de même rayon.

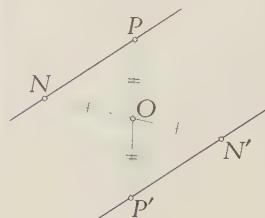


Une fleur



Les fleurs sont souvent construites sur le modèle d'un polygone régulier. Elles présentent donc un centre de symétrie.

➡ Une droite, par exemple (NP) , est transformée en une droite parallèle $(N'P')$.



➡ Si un cercle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre, le cercle transformé est parcouru dans le même sens.



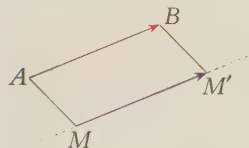
Translations et vecteurs

Si on se donne deux points A et B , on peut construire autant de parallélogrammes que l'on veut tels que $[AB]$ soit un côté. On retiendra cette idée pour comprendre ce qu'est une translation.

La description de la translation

Elle est définie au moyen de deux points distincts A et B . La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation qui, à un point M autre que A , associe le point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme.

On écrit $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ qui se lit « vecteur MM' égale vecteur AB ». M' est l'image de M , B est l'image de A .

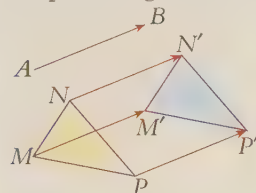


Construire M' , image de M , c'est tracer par A la droite parallèle à (BM) et, sur cette droite, porter à partir de A , dans le sens « A vers B », une longueur AM' égale à AB .

L'image d'un triangle

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on construit l'image de chacun des sommets du triangle MNP :

M a pour image M'
 N a pour image N'
 P a pour image P' .



Chaque côté de MNP a même longueur que le côté correspondant du triangle $M'N'P'$ et il en est de même pour les angles.

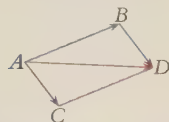
Par exemple, $MN = M'N'$, $PN = P'N'$, $\widehat{MNP} = \widehat{M'N'P'}$. En particulier, si MNP est rectangle en N , alors $M'N'P'$ est rectangle en N' .

Le vecteur

Un vecteur est associé à une translation; il est défini par sa direction, celle de la droite (AB) ; son sens, celui de « A vers B » et sa longueur AB .

Les vecteurs égaux

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $ABDC$ est un parallélogramme ou que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



L'addition de deux vecteurs

Effectuer la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, c'est appliquer d'abord à A la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis à B la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$. On écrit alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

Or, dans le parallélogramme $ABDC$, on a $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Pour « construire » le vecteur somme de deux autres, on peut soit construire « à la queue leu leu », $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, soit construire la diagonale du parallélogramme $ABDC$.



Un objet que l'on regarde dans une glace donne une idée de la symétrie orthogonale. Examinons de près cette «transformation» géométrique.

L'axe de symétrie

La droite Δ est axe de symétrie pour la figure F si, par pliage de la feuille autour de la droite Δ , la figure coïncide avec elle-même.



Autrement dit, pour tout point M de cette figure, par pliage, il se superpose à un autre point M' de cette même figure. Cela signifie, en langage géométrique, que la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$. Certains dessins de lettres majuscules ont un axe de symétrie,



ainsi que certaines figures géométriques bien connues.



La symétrie orthogonale

Elle est définie au moyen d'une droite Δ appelée axe de la symétrie. La symétrie orthogonale autour de la droite Δ (ou encore par rapport à Δ) est la transformation qui, à un point M non situé sur Δ , fait correspondre le point M' tel que Δ soit la médiatrice du segment $[MM']$.

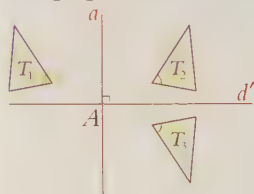


Remarque

Un point N de l'axe Δ a pour image lui-même. Il est invariant.

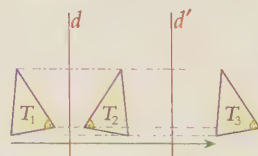
Deux symétries successives

Les deux droites d et d' sont perpendiculaires en A .



Le triangle T_1 a pour image le triangle T_3 par la symétrie centrale de centre A .

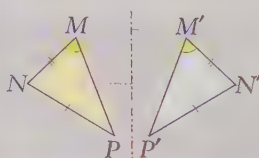
Les deux droites sont parallèles.



Le triangle T_1 a pour image le triangle T_3 par une translation.

L'image d'un triangle

On construit les images de chacun des sommets.



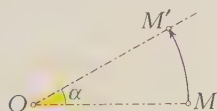
M a pour image M'
 N a pour image N'
 P a pour image P' .

Les côtés de MNP sont de même longueur que les côtés correspondants de $M'N'P'$ et les angles correspondants sont égaux.

Le fonctionnement d'une pendule à aiguilles, les roues de la bicyclette et bien d'autres mécanismes donnent une idée de la rotation. En géométrie, la rotation est une transformation précise très utile.

Sa définition

Elle est définie au moyen d'un point O (son centre) et d'un angle α (l'angle de la rotation). La rotation de centre O et d'angle α est la transformation qui, à un point M , autre que le centre, associe le point M' tel que : $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$, l'angle de (OM) vers (OM') étant compté, par exemple, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, appelé « sens direct ».



Dans la rotation de centre O , le point O est sa propre image (il est invariant).

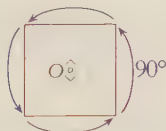
Le quart de tour

Si l'angle α est un angle droit, la rotation est un quart de tour ; il peut être dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire.



Carrés et quarts de tour

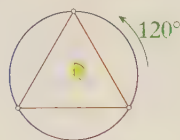
Le carré est un polygone régulier de quatre côtés. Soit O son centre.



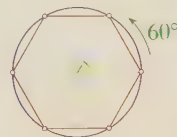
Si on applique un quart de tour de centre O , dans un sens ou dans l'autre, chaque sommet a pour image un autre sommet du même carré. On dit que le carré est invariant pour l'un ou l'autre de ces quarts de tours.

Avec d'autres polygones réguliers

Le triangle équilatéral de centre O est un polygone régulier de trois côtés. Il est invariant dans une rotation de centre O , dont l'angle peut être 120° ou 240° dans un sens ou dans l'autre.



L'hexagone régulier possède six côtés de même longueur a et six angles de même mesure. Il est inscrit dans un cercle de rayon a .



Il est invariant dans une rotation de centre O et d'angle 60° , 120° , 180° , 240° ou 300° , dans un sens ou dans l'autre.

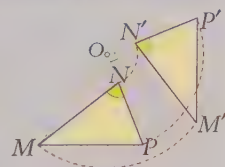
Par le quart de tour dans le sens direct

Le triangle MNP a pour image le triangle $M'N'P'$. Les côtés de l'un ont la même longueur que les côtés de l'autre.

De même, pour les angles : par exemple

$$\widehat{MNP} = \widehat{M'N'P'}$$

$$\widehat{MPN} = \widehat{M'P'N'}$$

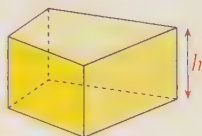


M a pour image M'
 N a pour image N'
 P a pour image P'

Pour les hommes qui vivent dans un espace à «trois dimensions», la géométrie plane n'est pas suffisante pour représenter le monde. Il faut aussi avoir quelques notions sur les «solides» et les objets «volumineux»...

Le prisme

Le prisme droit comporte deux bases : ce sont deux polygones de mêmes dimensions dans deux plans parallèles. Les arêtes latérales sont perpendiculaires à ces plans. Les faces latérales sont des rectangles.



La hauteur h du prisme est la distance des deux plans parallèles contenant les bases.

Le parallélépipède rectangle

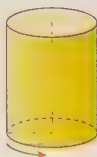
Prisme particulier : les bases sont deux rectangles et les faces quatre rectangles identiques deux à deux.



Le cube n'est qu'un parallélépipède particulier : les six faces sont des carrés identiques.

Le cylindre de révolution

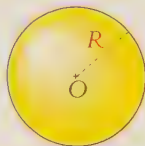
Il est obtenu en faisant tourner un rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit.



Il comporte deux bases circulaires de même rayon situées dans deux plans parallèles. La hauteur est la distance de ces deux plans parallèles.

La sphère

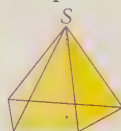
La sphère de centre O et de rayon R est la surface qui contient tous les points de l'espace situés à une distance R du centre. La boule est l'intérieur de la sphère.



Un diamètre est un segment $[AB]$ dont O est le milieu, A et B étant deux points de la sphère.

La pyramide

La base de la pyramide est un polygone dans un plan. Le sommet est un point S hors du plan de base. La hauteur est la distance du sommet au plan de la base.



Les faces latérales sont des triangles. La pyramide est régulière si la base est un polygone régulier, le sommet est sur la perpendiculaire au plan de base passant par le centre du polygone. Le **tétraèdre** est une pyramide dont les quatre faces sont des triangles. Il est régulier si les faces sont des triangles équilatéraux.

Le cône de révolution

On l'obtient en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. La base est un cercle de centre O . Le sommet S se trouve sur la perpendiculaire en O au plan contenant le cercle de base. La hauteur du cône est la longueur OS .

Les calculs avec des solides

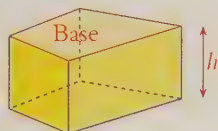
Bases

Il est important de bien connaître le calcul des volumes des différents solides dans l'espace.

Le calcul du volume d'un prisme ou d'un cylindre de révolution

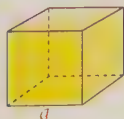
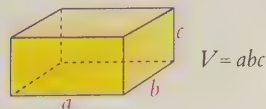
Il faut connaître l'aire de la base et la hauteur h :
 $V = (\text{aire d'une base}) \times h$.

Prisme droit



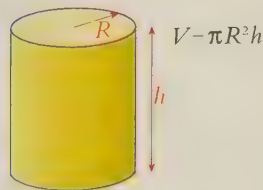
Parallélépipède rectangle

Son volume est le produit des trois dimensions :



Cube
 $V = a^3$

Cylindre droit

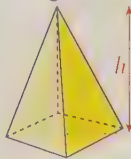


Pyramide et cône

Pour une pyramide ou pour un cône, le volume est le TERS du volume du prisme ou du cylindre qui aurait la même base et la même hauteur.

Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de base}) \times h$$



Cône

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$



La sphère

Pour une sphère de rayon R , la surface est égale à QUATRE fois l'aire d'un cercle de même rayon : $S = 4\pi R^2$.
Le volume de la boule est :

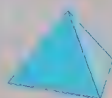
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$



Les solides de Platon

Cinq solides furent utilisés par le philosophe grec pour symboliser le Feu, la Terre, l'Air l'Eau et l'Univers.

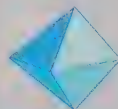
On a découvert que dix siècles avant notre ère les Étrusques jouaient aux dés avec des dodécaèdres réguliers. Six siècles av. J.-C., les pythagoriciens connaissaient le tétraèdre et le cube. C'est vers 400 av. J.-C. qu'un disciple de Platon découvrit l'octaèdre et l'icosaèdre.



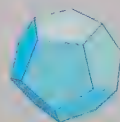
Tétraèdre



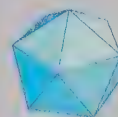
Hexaèdre
ou cube



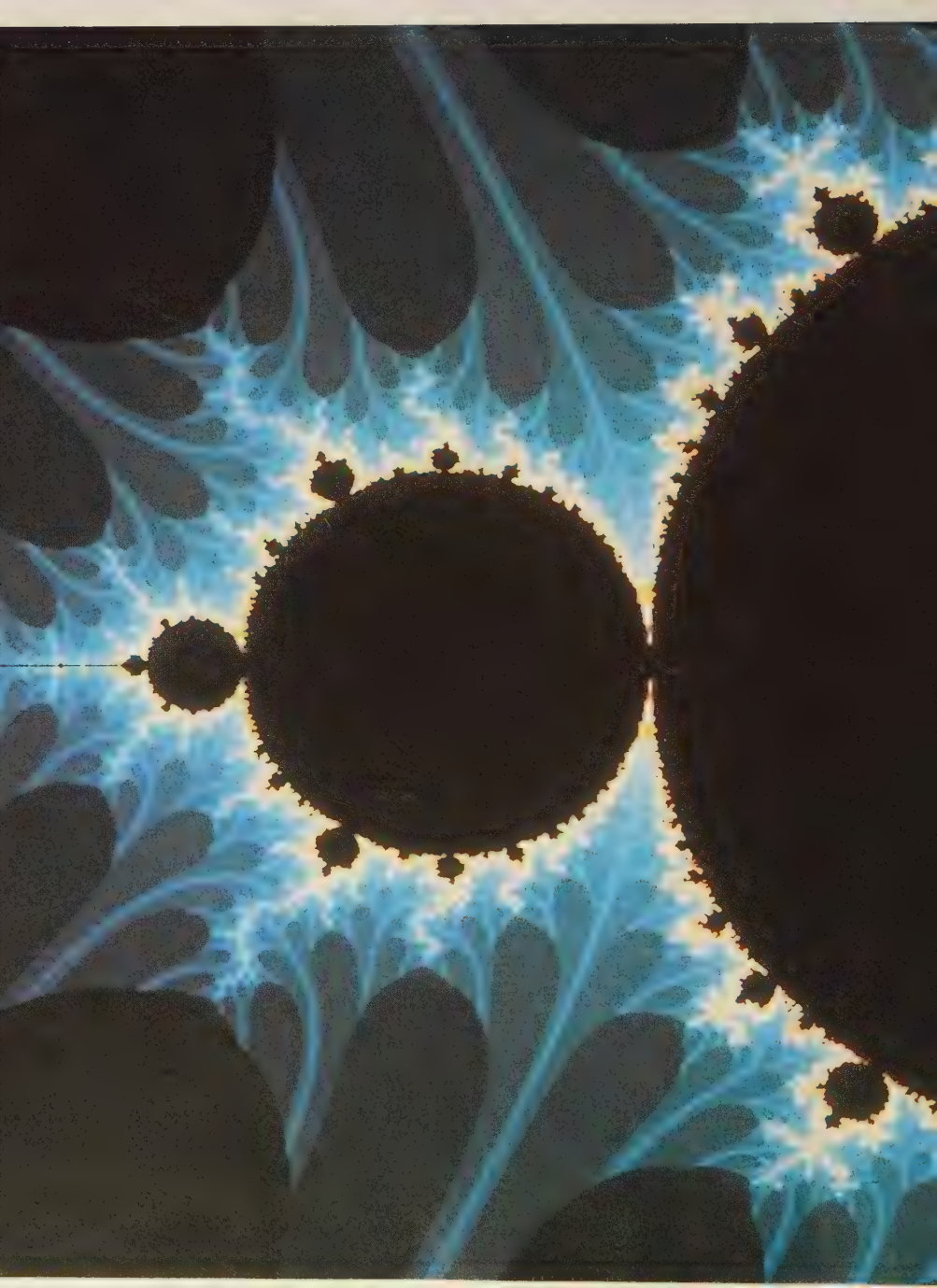
Octaèdre

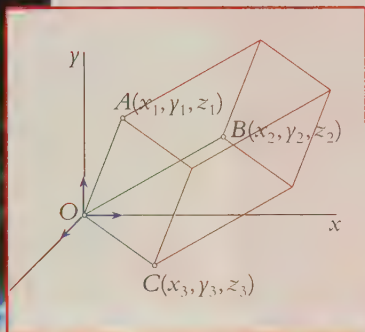


Dodécaèdre



Icosaèdre

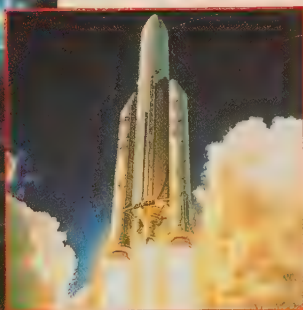




FIL ROUGE

Pour comprendre
le programme dans
son ensemble

*Le sens des
programmes du lycée,
leur objectif, leur intérêt,
à travers un récit
d'André Deledicq.*





Le plaisir de faire des mathématiques

« Que sont et à quoi servent les mathématiques ? »

Voilà deux questions que les lycéens, leurs parents mais aussi bien d'autres adultes (chauffeurs de cars, agriculteurs, journalistes, manuels ou intellectuels...) se sont au moins une fois posées. Avant de répondre à ces deux questions, je vous propose de faire un peu de mathématiques. Cela nous permettra de mieux savoir de quoi l'on parle tout en prenant quelque plaisir (ce qui est assez souvent le cas en mathématiques) et en apprenant quelques méthodes ou résultats intéressants. Nous traiterons ici trois exemples : un premier numérique, un deuxième géométrique, et un troisième relatif à ce que les matheux appellent « l'analyse », avec laquelle on fait généralement connaissance au lycée.

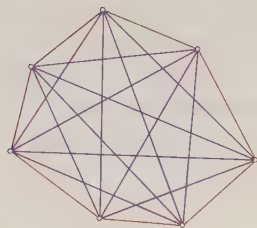
Les poignées de main diagonales

La figure publiée page 51 représente un polygone à 7 côtés (rouges) et toutes ses diagonales (bleues).

Combien y en a-t-il ?

Et combien un polygone de 20 côtés a-t-il de diagonales ?

Il y a des quantités de manières pour faire ce compte. L'une d'entre elles est amusante. Elle consiste à transformer le problème en le voyant « autrement » : les côtés et les diagonales d'un polygone représentent toutes les manières de relier (par



des segments) les sommets les uns aux autres. Imaginons que les sommets du polygone soient des personnes et que la question soit : chacune de ces personnes donnant une poignée de main à toutes les autres, combien de poignées de main sont données ?

Dans le cas d'un polygone à 20 côtés, vous voyez que les côtés et les diagonales sont exactement aussi nombreux que les nombres de poignées de main que peuvent se donner 20 personnes participant à une soirée. Pour les compter, supposons qu'elles arrivent l'une après l'autre :

La première personne arrivée n'en salue aucune.



La deuxième personne arrivée en salue une, arrivée avant elle.

La troisième personne arrivée en salue 2, arrivées avant elle.

La quatrième personne arrivée en salue 3, arrivées avant elle.

La cinquième personne arrivée en salue 4, arrivées avant elle.

Et ainsi de suite...

La dix-neuvième personne arrivée en salue 18, arrivées avant elle.

Et la vingtième personne arrivée en salue 19, arrivées avant elle.

Le nombre de poignées de main données est donc : $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 18 + 19$. Il y a un moyen très simple pour calculer cette somme, c'est de la doubler en écrivant les termes dans l'ordre inverse : $19 + 18 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1$.

Le même problème mathématique peut correspondre à des situations très différentes. Par exemple, la figure ci-contre illustre bien comment associer un segment et ses deux extrémités à deux personnes qui se donnent une poignée de main.

On s'aperçoit alors qu'en ajoutant les termes qui sont les uns en dessous des autres on obtient la même somme :

$$20 = 1 + 19 = 2 + 18 = 3 + 17 = \dots = 18 + 2 = 19 + 1.$$

Comme il y a 19 termes, la double somme vaut 19×20 .

Le nombre de poignées de main données à cette soirée est donc $\frac{19 \times 20}{2}$ soit 190 !

Les côtés et les diagonales d'un polygone à 20 côtés sont donc 190 au total ; il y a donc 170 diagonales !

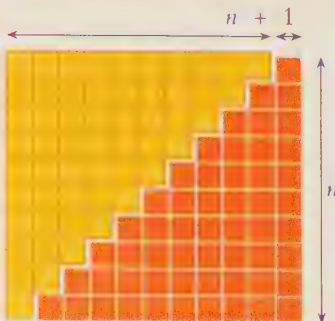
Plus généralement, le nombre de poignées de main dans une soirée à n personnes est $\frac{(n-1)n}{2}$.

On le voit bien en généralisant le moyen utilisé pour additionner tous les entiers de 1 à 19.



Cette astuce de calcul peut être magnifiquement illustrée par l'espèce de jeu de construction dessiné ci-contre.

Mettons côte à côte des piles de 1, 2, 3, 4, ..., n carrés rouges. Combien cela fait-il de carrés rouges au total ?



Prenons-en autant de jaunes et assemblons les deux morceaux. Cela fait un rectangle de hauteur n et de base $n+1$. Cela fait donc $n(n+1)$ carrés. d'où l'énoncé suivant :

la somme des n premiers nombres $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$, vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

Cet énoncé est aussi relié aux deux situations suivantes :

● Lorsque n personnes se disent bonjour les unes aux autres, le nombre de poignées de main échangées est la somme des $(n-1)$ premiers nombres,

$$\text{soit } \frac{n(n-1)}{2}.$$

● Ce nombre est aussi celui des côtés et des diagonales d'un polygone à n côtés. Un tel polygone a donc $\frac{n(n-1)}{2} - n$ diagonales, soit :

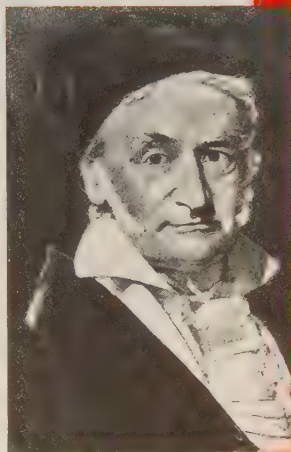
$$\frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Offrons-nous un dernier plaisir dans ce paragraphe en retrouvant ce nombre d'une autre manière, plus «synthétique».

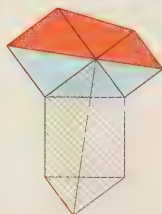
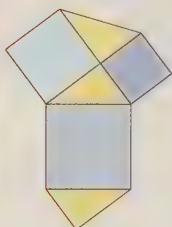
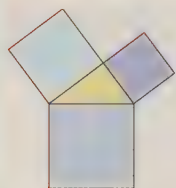
De chaque sommet d'un polygone à n côtés partent $n-3$ diagonales (puisqu'elles vont vers les autres sommets, lesquels sont n moins le sommet de départ et moins les deux qui sont adjacents). Comme il y a n sommets, cela semble faire $n(n-3)$ diagonales. Mais chaque diagonale joignant 2 sommets est ainsi comptée deux fois ! D'où le nombre $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Les dallages de Pythagore

Il existe un livre, écrit en 1940 par E.S. Loomis, qui reproduit 370 démonstrations du théorème de Pythagore. L'une d'entre elles, qui ne réclame aucun calcul, est due au génie de Léonard de Vinci. Il s'agit de montrer que, dans un triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse a même surface que la réunion des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit.



Ce qui est souvent excitant en mathématiques c'est de relier les uns aux autres des problèmes qui semblent de nature différente : empilage de cubes, poignées de main, côtés et diagonales d'un polygone... À l'âge de neuf ans, le (futur) mathématicien K.-F. Gauss (1777-1855) sidéra son instituteur : celui-ci avait demandé à ses élèves de calculer la somme des 100 premiers nombres entiers (il espérait sûrement que le calcul prendrait du temps pour être un peu tranquille!). Au bout de quelques secondes de réflexion, le jeune Gauss annonça triomphalement : 5050 ! Il avait évidemment trouvé la méthode expliquée ci-contre.



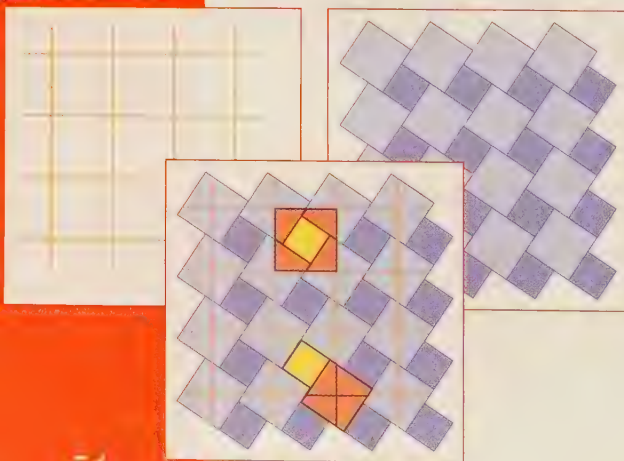
Avec les 4 pièces rouges et la pièce jaune ci-dessous, on peut former deux carrés, mais on peut aussi reconstituer un seul carré.

L'idée consiste à compléter la figure par deux autres triangles rectangles superposables au premier : l'un symétrique du premier, l'autre bien calé entre les deux autres carrés.

On voit alors apparaître quatre quadrilatères « identiques ».

Alors les deux quadrilatères rouge et bleu ont même surface que deux triangles et deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Et les deux quadrilatères hachurés vert et violet ont même surface que deux triangles et le carré construit sur l'hypoténuse.

Conclusion, en enlevant les deux triangles, le carré construit sur l'hypoténuse a même aire que l'union des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Étonnant, non ?

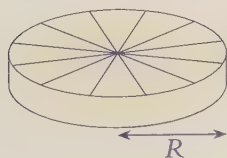


Le puzzle ci-contre, imaginé par H. Dudeney en 1917, à partir de la superposition de deux pavages du plan, illustre bien le théorème de Pythagore et en donne une autre idée de démonstration.

Le camembert d'Archimède

Sachant que le périmètre d'un cercle est proportionnel à son rayon (et que le coefficient de proportionnalité vaut 2π), comment trouver l'aire du disque intérieur à un cercle ?

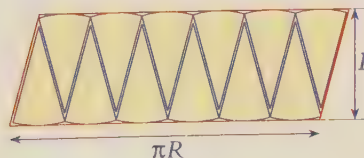
Supposons que nous soyons douze amis à nous partager un camembert, il n'y a aucune difficulté, pour un mathématicien, à découper un disque en douze secteurs égaux.



Si R est le rayon du camembert, alors son demi-périmètre vaut πR .

Prenons la moitié des parts formant une demi-circonférence et alignons leur « base » sur une ligne droite.

En plaçant l'autre moitié des parts entre les dents de scie camembertiformes, nous obtenons une espèce de parallélogramme.



Ce parallélogramme a pour base la demi-circonférence de camembert (πR) et pour hauteur le rayon (R) du camembert. Sa surface est donc $\pi R \times R$, soit πR^2 (CQFD!).



ATTENTION À L'ADJECTIF « ÉGAL »

Cet adjectif a un sens mathématique qui rend son emploi délicat car il ne s'emploie pas exactement comme dans la vie courante. Lorsqu'on parle par exemple de « douze secteurs égaux », l'emploi n'est pas vraiment correct. En effet, en mathématiques, lorsque $a = b$, c'est que a et b sont les mêmes objets ! En toute rigueur, on devrait dire « douze secteurs isométriques ».

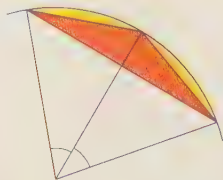
Cependant il y a un petit quelque chose d'ennuyeux qui n'avait pas échappé à Archimède. L'espèce de parallélogramme n'est pas vraiment un parallélogramme. Sa base n'est pas rectiligne, c'est un assemblage d'arcs de cercle.

Pour s'en sortir, Archimède – et les mathématiciens après lui – mit au point une argumentation très intéressante.



Il y a effectivement une petite différence entre la surface des 12 parts de camembert et la surface de 12 vrais triangles rectilignes (elle figure en rouge sur le dessin et elle vaut environ 0,14 lorsque $R = 1$).

Mais cette différence serait plus petite encore si le nombre de parts augmentait. Par exemple, s'il y en avait 96 (au lieu de 12), cette différence vaudrait moins de un centième. Archimède a vraiment fait le calcul ! et vous pouvez le refaire. Plus astucieusement, Archimède montra que chaque fois que le nombre de parts doublait, alors cette différence était au moins divisée par 2 (cela aussi vous pouvez le montrer si vous le voulez).



Or il connaissait le théorème qui ouvrait le dixième chapitre des *Éléments* d'Euclide (et qui est reproduit dans la marge ci-contre).

Il en déduisit donc que cette différence pouvait être rendue plus petite que n'importe quoi. Et donc que la surface du camembert valait **exactement** πR^2 . Ainsi naquit le premier raisonnement d'analyse mathématique de l'histoire. Et c'est cette « analyse » que vous commencez à apprendre en classe de première. Comme cet exemple le suggère, elle s'occupe de

PROPOSITION I

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées (Éléments d'Euclide, première proposition du chapitre X).

problèmes de limite et d'infini (de nombreux vrais triangles «tendent» vers des secteurs circulaires quand le nombre de parts tend vers l'infini).

Nous en reparlerons donc...

Heureux lycéens !

Les trois exemples que nous venons de développer sont déjà très beaux. Et pourtant ils n'utilisent que des outils élémentaires : comptages simples, conservation des surfaces après découpage, déplacement des morceaux et recomposition d'une autre figure.

Ainsi, d'une certaine façon, les mathématiques sont magiques. Elles parlent parfois de choses réelles (des poignées de main, des carrelages, des camemberts...), mais elles en parlent de manière un peu abstraite, presque idéale, et elles débouchent brusquement sur un résultat quasi miraculeux, inespéré ou surprenant.

Avec les nouveaux outils offerts par les programmes des lycées, les surprises vont se multiplier et vous n'avez pas fini d'être étonnés de leur puissance et de leur efficacité.

À quoi servent les mathématiques ?

Essayons maintenant de répondre d'abord à cette deuxième partie de la question posée en début de chapitre.

À faire marcher notre monde

Depuis le siècle des Encyclopédistes, les mathématiques semblent nécessaires à la marche de notre monde.



C'est une première réponse qui est très fréquemment donnée dans les livres, articles et conférences qui traitent du sujet.

Notre monde moderne, avec ses industries, son économie, ses techniques, n'aurait pas pu exister et ne pourrait pas fonctionner sans les mathématiques : témoin typique, la fusée Ariane est bourrée de mathématiques qui ont

défini sa structure, sa forme, ses fonctions, qui ont suivi sa fabrication, son lancement et déterminé son équilibre et sa trajectoire ; l'économie n'est qu'un vaste champ d'application du calcul différentiel ; dans le moindre des objets ou la moindre des activités, les mesures, les formes et les mouvements réclament l'intervention de modèles mathématiques qui optimisent les réalisations en les rendant plus efficaces, mieux adaptées à leurs objectifs. Même dans la vie courante, la manipulation des chiffres et des nombres, le sens de la logique et du raisonnement semblent très souvent des nécessités. Bref, pour comprendre notre monde, pour y vivre, il faudrait avoir assimilé et savoir appliquer une bonne dose de mathématiques.

Un modèle écologique

Voici un modèle mathématique (très simplifié) de description des évolutions d'une population de proies (x) aux prises avec des prédateurs (y). D'une part, chaque population a son propre taux de croissance naturel (supérieur à 1). D'autre part, chaque semaine :

- si les proies sont au moins deux fois plus nombreuses que les prédateurs ($y < 2x$), chaque prédateur mange une proie ;
- sinon, chaque prédateur qui le peut ne mange qu'une demi-proie et ceux qui ne trouvent rien à manger meurent.

Il n'est pas difficile de mettre au point un modèle mathématique de cette situation, dont la solution est donnée par une famille de courbes.

Une étude mathématique, même grossière, montre alors que l'évolution semaine après semaine est du type suivant : la courbe en rouge, par exemple, raconte l'histoire suivante : en

P , tant que les prédateurs ne sont pas trop nombreux, proies et prédateurs voient leur population augmenter régulièrement.

Mais en A , les prédateurs deviennent trop nombreux et le nombre de proies commence à diminuer.

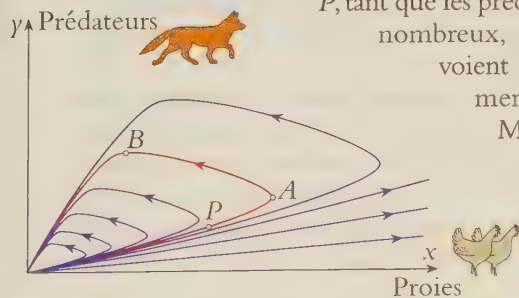
Cependant, les prédateurs continuent leur progression jusqu'en B , et là, il n'y a plus assez de proies pour les prédateurs qui diminuent inexorablement en faisant aussi disparaître les proies. Triste histoire...

Ainsi, comme dans le modèle précédent, les mathématiques sont d'efficaces et nécessaires outils de prévision, d'invention et de contrôle. Elles proposent aux ingénieurs, aux

Les modèles mathématiques traduisant les processus évolutifs s'expriment soit par des suites liées par des équations récurrentes, soit par des fonctions dont les variations (« dérivées ») vérifient des équations (dites « différentielles »). Ici, on peut résumer le processus par des relations assez simples :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (1+a)x_n - C_n y_n \\y_{n+1} &= (1+b)y_n - C'_n x_n\end{aligned}$$

où C et C' dépendent des valeurs relatives de x_n et y_n .



biologistes, aux économistes, comme à de nombreux autres acteurs de notre monde, des modèles permettant l'analyse, la mise au point et le suivi d'utiles ou de merveilleuses réalisations.

Ces mathématiques-là, les ingénieurs, les biologistes, les économistes, qui auront à les utiliser, doivent évidemment les connaître. Mais servent-elles ou serviront-elles vraiment à nous tous, hommes de la rue, femmes de culture ou citoyens responsables ?

Car enfin, il suffit de regarder les hommes et les femmes autour de soi pour constater que 99% d'entre eux ou elles ne font jamais le moindre appel à la plus petite connaissance mathématique !

Mieux même, on les voit souvent se vanter de ne rien connaître ou de ne rien comprendre aux mathématiques. Honte sur eux, bien sûr ! mais cela ne les empêche pas de vivre apparemment heureux, raisonnablement équilibrés, et de réussir leur vie aussi bien sur le plan matériel que spirituel.

Les mathématiques de l'ancien certificat d'études, celles que l'on apprend jusqu'à quatorze ans environ ne suffisent-elles pas pour nous débrouiller ? Les (prétendues) quatre opérations, la règle de trois et les pourcentages, le théorème de Thalès et quelques connaissances sur les parallèles et les perpendiculaires, qu'est-il besoin de plus ?

Pourquoi apprendre et enseigner les mathématiques ?

Et voilà que notre question initiale « à quoi servent les mathématiques ? » prend un nouveau sens. Un sens relatif, intéressant non les spécialistes, mais ceux qui sont censés les apprendre pour qu'elles leur servent à eux. Alors la question

MATHÉMATIQUES ET CULTURE RÉPUBLICAINE

Dès son introduction dans l'école de la République, l'enseignement des mathématiques a revendiqué sa dimension culturelle :

« L'enseignement des mathématiques a pour objet de former les facultés intellectuelles des élèves... Après en avoir démontré les besoins et les motifs, on donnera à l'élève l'idée de les chercher et presque le moyen de les trouver lui-même. » (Condorcet.)

n'est plus tout à fait la même et devient « à quoi sert d'apprendre les mathématiques ? » ou plus précisément encore « à quoi sert d'enseigner les mathématiques ? ».

C'est elle, la vraie question que se posent la plupart des lycéens et tous ceux qui croient avoir du mal avec les mathématiques. Et bien sûr, nous allons répondre à cette question, clairement et honnêtement.

Cependant, comme le faisait Socrate et comme le font toujours, depuis leurs ancêtres grecs, les éducateurs qui respectent leurs élèves, nous préférons répondre d'abord par d'autres questions. Ainsi peut-être chacun pourra-t-il approcher de lui-même la réponse en se posant la question : « à quoi sert la littérature ? » et « à quoi sert d'enseigner la littérature à tout le monde ? ».

Car enfin, ne suffit-il pas de savoir lire tout simplement et de savoir écrire, sans trop de fautes, pour se débrouiller dans notre vie ? Ce que l'on sait d'orthographe, de grammaire et ce que l'on a lu vers quatorze ans ne suffit-il pas ?

À quoi nous sert de lire Molière, Voltaire, Gide ou Balzac ? Et d'ailleurs, pour parler d'autres domaines : à quoi servent la musique, l'histoire ? À quoi sert d'enseigner la biologie ou la géologie à tout le monde ?

Il y a des docteurs, il y a des pharmaciens, il y a des historiens, des géologues, des violoncellistes et des compositeurs. Ne peut-on pas se contenter de consommer ? Ne peut-on pas se « laisser vivre » de la naissance à la mort ? Est-il utile de s'interroger sur la manière dont fonctionnent les choses, dont nous fonctionnons nous-mêmes ? Sur ce que nous avons dans notre tête ? Et ne peut-on alors joindre l'utile à l'agréable ? Et prendre plaisir au fonctionnement même de notre pensée ? Aux jeux de notre langage et de notre intelligence ? Existe-t-il, en dehors de l'amour et de l'ouverture aux autres, plaisir plus intense que celui de découvrir dans sa tête une liaison qui se cachait et de

Albert Camus
l'a merveilleusement
écrit dans *L'Envers et
l'Endroit* (rééd.
Gallimard, 1958) :
« L'écrivain a,
naturellement, des
joies pour lesquelles
il vit et qui suffisent
à le combler. Mais,
pour moi, je les
rencontre
au moment
de la conception,
à la seconde où
le sujet se révèle,
où l'articulation de
l'œuvre se dessine
devant la sensibilité
soudain clairvoyante,
à ces moments
délicieux où
l'imagination se
confond tout à fait
avec l'intelligence. »
Cette joie de l'écri-
vain est exactement
la même que celle
du mathématicien :
la résolution
de problème y
remplace l'écriture.

pouvoir la communiquer aux autres par un langage approprié ? Et, pour paraphraser la merveilleuse expression d'Albert Camus, « lorsque l'imagination se confond avec l'intelligence », ne s'agit-il pas de mathématiques ?

Les vraies réponses possibles

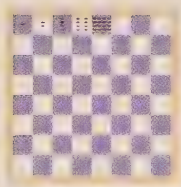
Finalement, à la question « à quoi servent les mathématiques ? », vous voyez déjà apparaître trois types de réponses possibles :

- À tous ceux qui ont à comprendre des phénomènes, à résoudre des problèmes ou à prendre des décisions, les mathématiques offrent des modèles cohérents et des boîtes à outils souvent efficaces.

Ainsi les mathématiques servent-elles aussi bien aux physiciens qu'aux biologistes, aux écologistes, aux généticiens, aux astronomes, aux musiciens, aux ingénieurs de tous poils et aux chercheurs de n'importe quoi. Il n'est donc pas inutile aux futurs professionnels de ces domaines d'apprendre des maths ou, en tout cas, certaines mathématiques dont ils risquent d'avoir besoin dans l'exercice de leur profession (et d'autant plus en ce début de XXI^e siècle, où chacun pourra disposer d'un ordinateur qui démultiplie la puissance de ses hypothèses et de ses calculs).

- À tous les citoyens responsables qui ne veulent pas vraiment « vivre idiot », les mathématiques de base (celles qu'on apprend dans les écoles et les collèges) semblent constituer un bagage minimal. Par exemple, il serait bon que chacun ait bien compris la nature multiplicative ou additive des problèmes de tous les jours.

Comme exemple, vous avez sûrement entendu parler de la mésaventure de l'empereur des Indes Chiram voulant récompenser l'inventeur du jeu d'échecs, histoire dont la version moderne est celle du chef indien qui a vendu Manhattan aux



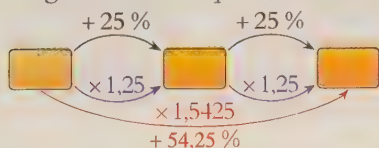
LA MÉSAVENTURE DU SOUVERAIN INDIEN CHIRAM

Un grain de riz sur la première case de l'échiquier, deux sur la deuxième, trois sur la troisième, cela fait 10^{64} grains sur la dernière, c'est-à-dire environ $8 \cdot 10^{30}$ grammes de riz, soit l'ordre de grandeur du poids de la Terre elle-même.

immigrés européens. On raconte à ce sujet qu'en 1626 les Hollandais achetèrent l'île aux Indiens pour quelques barils de whisky (évalués à 24 dollars). Placés à 3% l'an, leurs descendants disposeraient aujourd'hui de 1,5 million de dollars !

Plus quotidiennement, il vaut mieux savoir que, dans la plupart des calculs de pourcentages, ce ne sont pas des additions qu'il faut faire mais des multiplications.

Ainsi « prendre $x\%$ de A », c'est « multiplier A par $\frac{x}{100}$ », et « augmenter B de $y\%$ », c'est « multiplier B par $1 + \frac{y}{100}$ ».



Voilà pourquoi les gouvernements préfèrent augmenter certaines taxes en plusieurs fois car les gens se

trompent dans l'évaluation des pourcentages successifs. Par exemple, deux augmentations successives de 25% font plus qu'une seule augmentation de 50% (l'interprétation spontanée en termes d'addition est à la fois tentante et trompeuse). En effet, une « augmentation de 25% » équivaut à une « multiplication par 1,25 ». Donc deux augmentations successives équivalent à une multiplication par $1,25 \times 1,25$, c'est-à-dire par 1,5425.

Ce qui fait une augmentation globale supérieure à 54% !

• Mais c'est à tous les hommes et toutes les femmes que les mathématiques apportent ce qu'il y a de plus spécifiquement humain : une « culture », c'est-à-dire le plaisir de relier par son intelligence ce qui ne serait que faits ou pensées disparates et insignifiantes.

Les mathématiques ne sont évidemment pas (loin de là) la seule activité humaine qui apporte ce plaisir et cette raison de vivre ; mais c'est celle qui certainement (et paradoxalement pour certains) réclame le moins d'efforts car elle s'appuie sur très peu de connaissances préalables.

En bref, vous avez déjà ce qu'il faut dans la tête. Pensez-y et que la fête commence !

L'essence des mathématiques tient dans les liaisons qu'elles introduisent entre les énoncés qui la composent. Ces liaisons, comme les autres objets culturels, sont communicables et reproductibles chez d'autres hommes et femmes que ceux qui les ont d'abord pensées.



Que sont les mathématiques ?

Curieusement, il est possible de répondre à cette question par une simple phrase et nous le ferons très bientôt. Mais dire que la peinture est « l'art d'appliquer des couleurs sur une toile ou un autre support » ne renseigne pas beaucoup sur la véritable activité du peintre, ni sur ce que ressent celui qui regarde un tableau ou une fresque, ni sur la variété des approches possibles et la richesse de son histoire. C'est pourquoi, avant de dire ce qui caractérise les mathématiques, nous allons d'abord examiner quelques-unes de leurs facettes et voir comment elles se présentent à ceux qui en font ou qui s'en servent.

Les nombres et les formes

Jusqu'au XIX^e siècle environ, les mathématiques se caractérisent par les objets dont elles parlent. Les mathématiciens ont ainsi d'abord été ceux qui étudiaient et qui manipulaient les nombres et les formes.

Manipuler les nombres, c'est-à-dire les écrire, faire des calculs avec eux, les transformer, les trouver s'ils sont inconnus, les mettre en relation les uns avec les autres, se poser des questions à leur sujet, en reconnaître des propriétés...

L'univers des nombres devient vite fascinant pour celui qui commence à s'y intéresser et il n'est pas besoin de grandes connaissances pour découvrir de fantastiques propriétés.

Prenez, par exemple, le nombre 1998 qui est l'année de la première édition de cet ouvrage. Ce nombre est égal au produit $2 \times 27 \times 37$; et les nombres 27 et 37 entretiennent entre eux de très curieux rapports. Divisez 1 par 27 (avec une calculatrice si vous voulez, ou à la main : cela va très vite), vous trouverez :

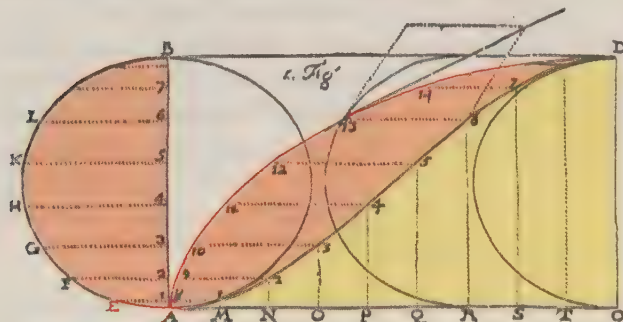
$$\frac{1}{27} = 0,037037037037.$$

L'histoire
des nombres et des
chiffres commence
avec celle de
l'écriture. Il y a
plusieurs milliers
d'années.



Divisez 1 par 37, vous trouverez : $\frac{1}{37} = 0,027027027027$.

Y a-t-il une explication à ce phénomène ? Bien sûr ! Cela vient du fait que $27 \times 37 = 999 = 1000 - 1$ et d'une certaine belle formule... que nous étudierons à la page 171.



Manipuler les formes, c'est-à-dire faire de la géométrie avec des figures tracées à la règle et au compas mais aussi étudier les courbes qui naissent des combinaisons de points liés entre eux par des contraintes mécaniques ou numériques.

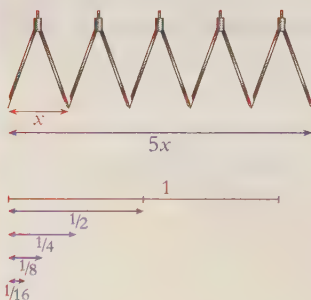
Depuis toujours, cependant, les mathématiciens ont su que nombres et formes n'étaient que des manifestations différentes d'une même entité. Plus précisément, pour Euclide, un nombre était la longueur d'un segment ou la mesure d'une surface...

Et c'est ainsi que fut découverte la première perle précieuse de la pensée mathématique. Elle mérite bien que nous y consacrons les deux paragraphes qui suivent.

Nombre et mesure

Lorsqu'on a choisi une unité de longueur dans un plan, on pense que l'on peut « mesurer » la longueur de n'importe quel segment. Et, en effet, « mesurer un segment », cela veut dire exactement, en mathématiques, lui associer un nombre positif.

« Tout est nombre »,
disaient déjà les
pythagoriciens,
qui en faisaient
découler
l'architecture,
la musique,
des phénomènes
naturels ou des
œuvres de l'homme.



En reportant l'unité un certain nombre de fois, on obtient des segments de longueur entière.

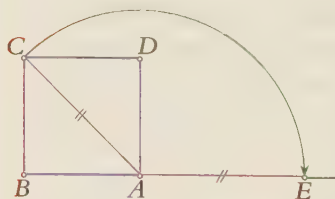
Inversement, lorsqu'on partage l'unité en segments de même longueur, on obtient des segments de longueur $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

et on peut ainsi arriver à des segments très courts, plus courts par exemple que n'importe quel

petit segment fixé à l'avance.

De sorte que tout segment peut être mesuré approximativement par une fraction (qui peut être une somme ou une différence d'entiers et de fractions du type $\frac{1}{n}$) avec une précision aussi grande que l'on veut.

Prenons un exemple. Soit un carré $ABCD$ de diagonale $[AC]$. Traçons le cercle de centre A passant par C , il coupe (AB) en E , de sorte que $AC = AE$. Il est facile de constater que, si AB est pris comme unité, alors AE n'est pas très loin de 1,5 (c'est-à-dire $\frac{3}{2}$). On peut montrer d'ailleurs facilement que 1,5 est une valeur approchée par excès de AE à 1/10 près.



Plus précisément, on peut montrer que 1,4 (c'est-à-dire $1 + \frac{4}{10}$) est une valeur approchée (par défaut) de AE à 1/50 près.

Grâce à l'utilisation de fractions décimales, on peut ainsi approcher d'aussi près que l'on veut la mesure de AE .

AE vaut 1,41 à 1/100 près ;

Ce sont les mathématiciens grecs (Eudoxe, Euclide...) qui se posèrent le problème de la mesure d'un segment. Non pas une valeur qui soit aussi proche que l'on veut et qui serait pratiquement suffisante, mais une valeur exacte (et qui serait de l'ordre de la satisfaction intellectuelle).

AE vaut 1,414 à $1/1000$ près ;

AE vaut 1,414214, à $1/1\,000\,000$ près, c'est-à-dire :

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10\,000} + \frac{1}{100\,000} + \frac{4}{1\,000\,000}.$$

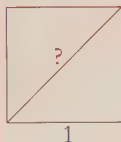
Depuis le xvi^e siècle (et légalement depuis la Révolution française), on préfère ainsi utiliser des mesures décimales que des mesures à dénominateur quelconque (comme 3, 4, 12 ou 20) parfois encore en usage : un « pouce » anglo-saxon, par exemple, vaut $1/12^e$ de « pied ».

La question des irrationnels

Il se pose alors à l'intelligence humaine une question purement théorique mais qui touche à l'essence même des mathématiques : existe-t-il une fraction qui soit exactement la mesure de AE , c'est-à-dire de la diagonale du carré de côté unité ?

Cette question n'est pas une question pratique puisqu'on ne pourra jamais en vérifier expérimentalement la réponse. En effet, tout instrument de mesure si perfectionné soit-il a toujours une précision limitée ; de plus, si le côté du carré effectivement mesuré vaut 1 mètre, une précision de $1/10^{20}$ nous amène au cœur des atomes, à une échelle où la notion d'extrémité du prétendu segment n'a plus aucun sens et se perd quelque part entre des électrons dont on ne sait même plus s'ils appartiennent au « segment » ou à l'atmosphère ambiante.

Il s'agit donc d'une question géométrique, purement intellectuelle et dont l'utilité pratique n'apparaît pas évidente. Quel être humain, cependant, confronté à cette question n'a pas envie d'en chercher ou d'en connaître la réponse ? Surtout s'il apprend que cette réponse est surprenante, mais aussi qu'elle est finalement plutôt facile à démontrer...



Il y a maintenant vingt-cinq siècles que l'on connaît la réponse : elle est négative !

Il n'y a pas de fraction mesurant exactement la diagonale d'un carré de côté unité.

La diagonale d'un carré de côté 1 a une longueur « irrationnelle ». Mais attention ! Cela ne signifie pas qu'elle n'a aucun sens, mais simplement qu'elle n'est pas un « ratio », c'est-à-dire un quotient de nombres entiers.

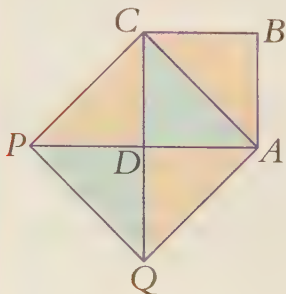
Imaginez un instant ce qu'était le monde il y a 2500 ans : la misère, la souffrance, les famines, les maladies, les catastrophes naturelles, tout était à vaincre ; l'homme essayait de survivre jusqu'à vingt à trente ans en moyenne. À ce moment-là, quelque part du côté d'Athènes ou d'Alexandrie, des hommes ont cherché des démonstrations de cette propriété.

Pourquoi le faisaient-ils ? « Pour l'honneur de l'esprit humain », répondait, il y a quelque temps, le mathématicien Jean Dieudonné ! Et parce que ça les intéressait de réfléchir d'une certaine manière et qu'ils prenaient du plaisir à trouver les réponses à leurs questions.

L'une de leurs démonstrations est très facile à comprendre. En voici le détail :

Supposons que la diagonale du carré $ABCD$ de côté unité mesure exactement $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers.

On peut aussi supposer que a (ou b) est un nombre impair (en effet si a et b étaient pairs tous les deux, on pourrait simplifier la fraction par 2 et cela jusqu'à obtenir une fraction irréductible, dont l'un des termes serait impair).



Remarquons que le carré construit sur la diagonale a une surface égale à 2.

En effet, le carré $ACPQ$ est exactement recouvert par 4 triangles superposables à ABC , alors que le carré

$ABCD$ est recouvert par 2 de ces triangles. Le carré $ACPQ$ a donc une surface double de celle du carré $ABCD$ (laquelle vaut $1 \times 1 = 1$).

On aurait donc $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = 2$, et donc $a \times a = 2 \times b \times b$.

Le carré du nombre a serait donc pair (puisque 2 en est un facteur).

Rappelons-nous alors la propriété suivante, très simple à démontrer : « un nombre et son carré ont la même parité ».

Le nombre a serait donc pair, et on pourrait écrire $a = 2p$.

Or, $a \times a = 2p \times 2p = 2 \times b \times b$ d'où $2p \times p = b \times b$.

Le carré de b serait donc pair, et b aussi. Or, d'après notre supposition initiale, le nombre b est impair.

Il y a donc contradiction : le nombre b ne peut pas être à la fois pair et impair.

Comme il n'y a pas d'erreur dans notre raisonnement (chacun peut le vérifier), nous sommes obligés de conclure que notre supposition initiale était fausse.

La conclusion est donc indiscutable : *dans le cadre théorique de l'arithmétique et de la géométrie euclidienne, la diagonale d'un carré de côté unité n'est pas mesurée par une fraction, c'est-à-dire par un quotient d'entier.*

Les conséquences de cette démonstration sont énormes. Tout d'abord elle éclaire, en l'élargissant, la notion de nombre : si l'on souhaite que tout segment du plan soit mesurable par un nombre, alors il faut accepter l'existence d'autres nombres que les quotients de nombres entiers. Il faudra alors, pour s'en servir, inventer une écriture pour ces nombres, ou au moins une écriture qui puisse en nommer certains.

Vous savez sûrement que le nombre qui mesure la diagonale du carré se note $\sqrt{2}$, avec nos conventions d'écriture.

Et vous savez sûrement que bien d'autres nombres peuvent exister : on les a appelés nombres réels et la plupart d'entre eux ne peuvent même pas être nommés...



C'est le mathématicien Richard Dedekind qui offre en 1872 une première véritable définition des nombres réels : il propose de voir l'ensemble des nombres exactement comme l'ensemble des points d'une droite. Et c'est une très bonne manière de voir.

Les règles du jeu mathématique

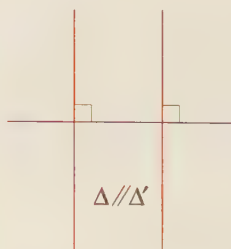
La démonstration précédente est exemplaire. Elle met en lumière l'essence même des mathématiques : le refus de la contradiction. Et voilà maintenant le moment d'énoncer ce que nous voulions dire, une réponse claire et courte à la question, posée plus haut : « Que sont les mathématiques ? »

Les mathématiques sont des discours (des ensembles d'énoncés) prononcés dans certains cadres (qu'il faut préciser) d'où sont exclues toutes contradictions.

Bien évidemment, cette réponse mérite des commentaires. Et le commentaire le plus important est le suivant : le discours mathématique n'est pas un discours absolu.

Et donc, en particulier, les mathématiques **ne visent pas la vérité**, elles visent la **cohérence**.

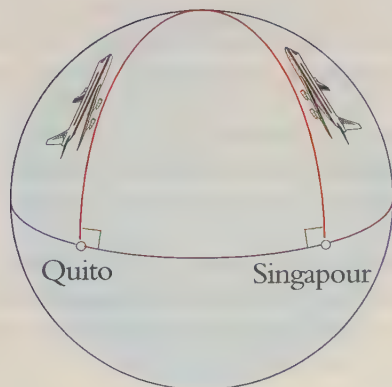
Les mathématiques disent « si ceci est vrai, alors cela l'est aussi », autrement dit « dans ce cadre précis, ceci est certainement vrai » (sous-entendu : sinon le cadre lui-même est contradictoire).



Par exemple, dans le contexte de la géométrie euclidienne, « deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles ».

Mais cela ne veut pas dire qu'il soit vrai qu'en partant de deux points donnés dans des directions perpendiculaires à une autre, on restera toujours à une certaine distance l'un de l'autre.

C'est même faux sur la Terre : deux avions partant perpendiculairement de l'équateur (de Quito et de Singapour par exemple) se rapprochent régulièrement jusqu'au pôle.



Selon le cadre, c'est-à-dire la théorie considérée, les mathématiques peuvent donc amener à des conclusions contraires l'une de l'autre (ce qui est vrai en géométrie non euclidienne peut être faux en géométrie euclidienne).

Mais ce que n'acceptent pas les mathématiques, c'est la contradiction dans un même cadre théorique. Voilà la règle du jeu essentielle ; et c'est cela qui caractérise les mathématiques.

Attention ! Cela ne veut pas dire, bien sûr, qu'un mathématicien soit quelqu'un qui n'accepte pas la contradiction et qui croit qu'une certaine chose ne puisse être que vraie ou fausse. Un joueur de basket sait bien que, dans la vie courante, on ne gagne pas toujours quelque chose lorsqu'on arrive à placer un objet sphérique dans un récipient troué.

Mais faire des mathématiques, c'est respecter un certain nombre de règles (dans un jeu, si on ne respecte pas la « règle du jeu », cela ne rime à rien et d'ailleurs « ce n'est pas drôle »).

Ces règles (qui sont dans notre tête) ne sont évidemment pas exactement celles du monde, où la contradiction est non seulement présente mais utile et fondamentale : voyez comment la synthèse naît de la thèse et de l'antithèse, comment la « troisième voie » est souvent la meilleure ou comment il faut savoir choisir un compromis entre deux attitudes ou entre des opinions inconciliables...

Quel que soit le plaisir que l'on peut éprouver à faire des mathématiques, il ne faudra jamais oublier qu'elles ne sont qu'une des facettes de l'esprit humain : elles ne sont pas LE monde, elles ne sont pas LA pensée, mais elles y participent, et souvent avec humour !

Bertrand Russell prétendait que « les mathématiques sont la seule science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle ni si ce que l'on dit est vrai ». Voilà une phrase qu'il vaut mieux ne pas prendre au premier degré !

Le plus extraordinaire est que, finalement, en mathématiques, les règles de non-contradiction sont souvent efficaces pour résoudre des problèmes pratiques rencontrés dans notre monde :

- Comment bien calculer les pourcentages ?
- Comment découper la surface d'un carré en deux carrés ?
- Quelle est exactement la surface d'un disque ?

Car en définitive, loin des grandes vérités, que fait exactement celui qui dit « faire des mathématiques » ? Il se pose des problèmes et les résout. Et que fait celui qui se pose et résout des problèmes ? Des mathématiques !



Les trois faces des mathématiques

Aux questions « que sont et à quoi servent les mathématiques ? » nous avons tenté d'apporter des réponses précises et honnêtes. Cependant, cela ne dit pas encore exactement ce que l'on fait lorsqu'on décide de faire des mathématiques ou de les utiliser. Alors, comme on va le voir plus loin sur un exemple, les mathématiques peuvent être regardées sous trois aspects différents mais complémentaires : un jeu de construction logique, une collection de modèles abstraits de situations concrètes, une boîte à outils permettant de résoudre certains problèmes (techniques ou intellectuels).

Selon les objectifs du moment (démontrer, comprendre, appliquer, résoudre...), tel ou tel de ces aspects se trouve mis en avant et impose sa forme de discours particulière et ses contraintes ou ses libertés d'expression. Regardons de plus près chacun de ces trois aspects.

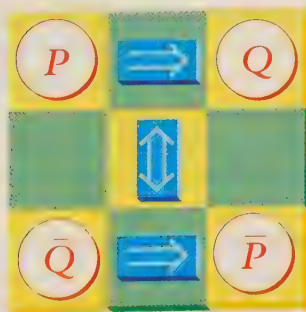
Un jeu logique

L'aspect logique est celui qui est le plus souvent mis en avant en mathématiques car il assure la solidité de l'édifice. Les mathématiques sont constituées d'un jeu de symboles de base, d'axiomes et de définitions et d'un système de règles logiques, avec lesquels on construit des raisonnements.

En faisant des mathématiques, on fait ainsi souvent semblant de jouer à un jeu intellectuel dont il faut respecter les règles sans s'occuper ni de l'intérêt ni de la signification de ces règles.

Il faut donc savoir «jouer le jeu» en oubliant momentanément les objectifs plus réalistes, exactement comme on se plie au respect du code de la route : on fait attention aux des-sins sur les panneaux routiers, à la priorité à droite (ce pourrait être la gauche, mais il fallait choisir), à la couleur des feux clignotants; et on est attentif à bien d'autres choses qui pourraient paraître très artificielles et arbitraires à un observateur, mais qui doivent être suivies «à la lettre» pour assurer une arrivée sans problème au terme du voyage.

Il faut comprendre que cette volonté de cohérence, de rigueur et de gratuité affirmée est une condition du plaisir de voyager et de l'efficacité des mathématiques.



Cet aspect formel des mathématiques se traduit par l'énoncé de propriétés, de notations et de définitions enchaînées dans un discours constituant une théorie et qui tient lieu de référence. C'est ce discours que l'on trouve en général dans les manuels scolaires.

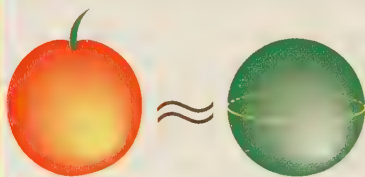
Comme le disait le mathématicien allemand David Hilbert au congrès des mathématiques de Paris en 1900, les mathématiques jouent sur les mots sans référence à la signification de ceux-ci : «Au lieu de points, de droites et de plans, on pourrait tout aussi bien employer les mots tables, chaises et vidrecoms (verres à bière).»

Un modèle de la réalité

Cependant, ce jeu logique n'est jamais gratuit ; on peut toujours lui donner un «sens», une signification concrète. De la même manière, les échecs ont leurs règles très précises, formelles et apparemment très éloignées de celles de la réalité de tous les jours ; pourtant, des stratégies mises en œuvre par les joueurs on peut extraire certains enseignements utiles dans certains domaines de la vie courante (la protection des pions avancés, l'intérêt possible de sacrifices momentanés, l'avantage éventuel d'une bonne position compensant une infériorité numérique...).

Et chaque jeu a ainsi son domaine de signification et modélise un aspect de la vie plus ou moins étendu : pensez au Monopoly, au rugby, à certains jeux de hasard...

De la même manière, les divers chapitres des mathématiques s'avèrent utiles dans leur domaine spécifique : la géométrie lorsqu'il est question d'espace, de mesures, de plans ; l'algèbre lorsqu'il est question de comptes, de nombres, d'opérations ; l'analyse lorsqu'il est question de trajectoires, de processus qui évoluent, d'optimums, d'approximations...



Réalité

Modèle

Cet aspect des mathématiques consiste à extraire de certaines situations concrètes des caractéristiques intéressantes pour les schématiser et les décrire par un modèle mathématique.

En les «mathématisant», on espère ainsi mieux comprendre ces situations et obtenir des résultats permettant de les connaître et de les contrôler.

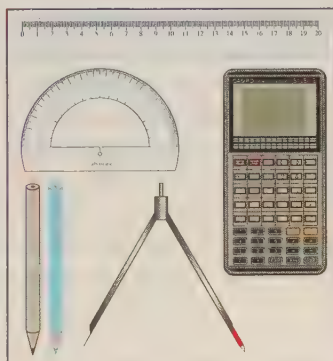
Ainsi, par exemple, en mathématisant l'organisation et la gestion d'un complexe pétrolier, on s'assure la possibilité de le contrôler par des moyens automatiques et d'en optimiser le

La Terre n'est pas exactement une sphère géométrique, mais cela n'empêche pas de pouvoir évaluer la surface de la Terre lorsqu'on a évalué son rayon. Grâce aux mathématiques, on sait ceci : si le rayon de la Terre fait 6 400 km, alors sa surface est d'environ 515 millions de kilomètres carrés.

fonctionnement de manière à obtenir un bon compromis entre les coûts, la pollution engendrée et la production de produits finis.

Une boîte à outils

Enfin, chaque fois que se pose un problème mathématique (soit qu'il traduise un problème concret, soit qu'il soit interne aux mathématiques), les propriétés théoriques, la réflexion ou le raisonnement ne semblent pas toujours suffire à sa résolution : en effet, le *savoir* n'est pas exactement le *savoir-faire*.



Pour appliquer un énoncé, pour aboutir à la solution d'un problème ou pour exhiber un résultat, les mathématiques proposent un certain nombre de techniques allant du simple « truc » à des « algorithmes » sophistiqués. Ce sont des constructions géométriques ou graphiques, des calculs ou des transformations plus ou moins mécaniques qui mènent des données d'un problème à sa résolution ; ces techniques sont souvent assorties de choix conditionnels, d'approximations bien dirigées, de vérifications qui assurent le contrôle de la résolution.

Cet aspect artisanal des mathématiques se traduit par l'étude de « problèmes types » et l'énumération exhaustive d'une liste d'actions à accomplir pour les résoudre.

C'est cette pratique, parfois il faut bien le dire un peu fastidieuse, qu'il vous faut pourtant apprendre (comme on « fait des gammes » en musique).

Ce sont les Encyclopédistes du XVIII^e siècle qui ont introduit les mots « analyse » et « analytique » pour parler d'une nouvelle méthode de pensée. À l'inverse de celle des philosophes grecs, ils ne cherchaient pas forcément à tout expliquer par des fondements abstraits, mais plutôt à comprendre les rouages du fonctionnement des détails ; ainsi privilégiaient-ils le « comment » aux dépens du « pourquoi ».

Un exemple

Voici donc un exemple montrant comment ces trois aspects des mathématiques s'agencent et se soutiennent les uns les autres dans la résolution d'un problème de type analytique.

Une partie du jeu logique

Soit une fonction définie par la relation $y=f(x)$, et soit G la représentation graphique de cette fonction.

Par définition, la pente de la tangente en un point d'abscisse x du graphe de la fonction f est égale à la « dérivée » de la fonction f au point x_0 . Le calcul de la dérivée d'une fonction commence à s'apprendre en première ; il est de nature « mécanique ».

Si la fonction f est maximum pour $x=x_0$ alors le graphe de f a une tangente horizontale au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Lorsque la fonction est maximum, sa dérivée prend donc la valeur 0.

Une situation et son modèle mathématique

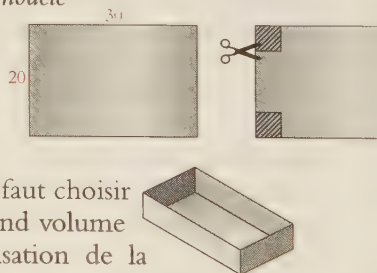
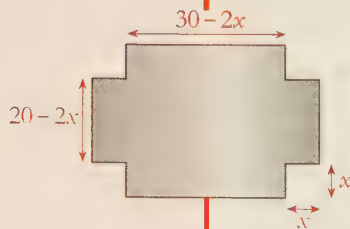
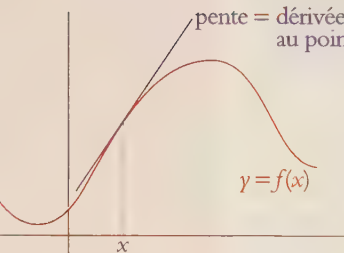
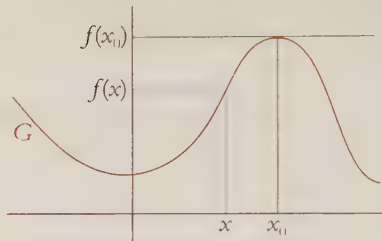
On dispose d'une plaque métallique de 20 cm sur 30 cm avec laquelle on veut réaliser un récipient parallélépipédique. Quelle est la hauteur qu'il faut choisir pour obtenir la boîte de plus grand volume possible ?

La modélisation de la situation consiste à exprimer le volume V de la boîte en fonction de sa hauteur x : $V(x) = (20 - 2x)(30 - 2x)x$.

Quel est donc le maximum de cette fonction V ?

Les outils nécessaires

Depuis la fin du XVII^e siècle (Leibniz, Newton...), les mathématiciens connaissent les techniques du calcul de la dérivée d'une fonction. Les voici résumées :



- la dérivée d'une somme de fonctions est la somme de leurs dérivées ;
- la dérivée de kf est égale à k fois la dérivée de f ;
- les dérivées des polynômes s'obtiennent grâce à la règle, énoncée par Hudde et résumée dans le tableau suivant :

Fonction	Fonction dérivée
constante	nulle
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$

D'après ces règles, la dérivée de ax^3+bx^2+cx est $3ax^2+2bx+c$.

Rappelons que le volume du récipient est :

$$V(x) = (20-2x)(30-2x)x.$$

Un premier outil, les règles du calcul algébrique, nous permet de développer $V(x)$ sous la forme d'un polynôme :

$$V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x.$$

Un deuxième outil, les règles rappelées ci-dessus, nous permet de calculer la dérivée de $V(x)$:

$$V'(x) = 12x^2 - 200x + 600$$

On cherche donc un x_0 tel que cette dernière expression s'annule, c'est-à-dire :

$$12x_0^2 - 200x_0 + 600 = 0, \text{ soit } 3x_0^2 - 50x_0 + 150 = 0.$$

Certains calculs ou certaines calculatrices (troisième outil ici nécessaire) donnent les deux nombres positifs solutions de cette équation : $x_0' = 12,74...$ et $x_0'' = 3,92...$

La solution $x_0' = 12,74$ n'a pas de sens dans la situation concrète modélisée ; en effet, on ne peut pas enlever plus de 10 cm à chaque coin de la plaque !

Conclusion pratique, la seule solution est donc $x_0'' = 3,92...$
La plus grande boîte possible a une hauteur de 3,92 cm.

Le concret et l'abstrait

Arrêtons-nous ici un instant pour méditer sur l'extraordinaire efficacité des mathématiques et sur leur nature.

Et reprenons nos yeux d'enfants ou plutôt ceux des géomètres du XVIII^e siècle qui initièrent ce qui allait devenir un formidable calcul.

On part d'une situation on ne peut plus pratique et on traduit le problème par une formule algébrique dont on voit bien le sens : $V(x) = (20 - 2x)(30 - 2x)x$.

Et là, tout à coup, on accepte de perdre le sens, la signification concrète des formules que l'on transforme ; on fait confiance aux mathématiques car leurs méthodes vont nous dire ce qu'il est cohérent de penser : si quelque chose vaut $(20 - 2x)(30 - 2x)x$ (où x est inférieur à 10), alors ce quelque chose est maximal pour $x = 3,92$.

Alors, revenant au concret, nous sommes sûrs qu'en découpant des carrés d'un peu moins de 4 cm de côté, la boîte construite sera la plus grande possible.

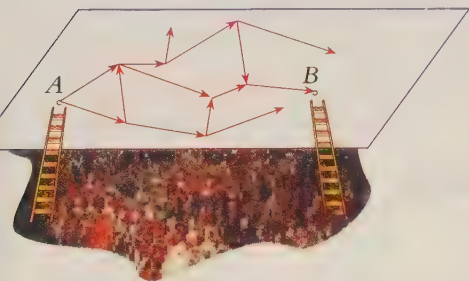
On voit bien ici à l'œuvre un mécanisme que les non-matheux ont parfois du mal à accepter : à un moment donné, il faut abandonner la « compréhension » au sens élémentairement physique du terme ; il faut lâcher le confort du sens et se lancer dans des calculs « insensés ».

Mais ce n'est pas alors le moment de lâcher la rigueur et la volonté de cohérence.

C'est alors le moment du plaisir intellectuel, d'autant plus profond qu'il n'est pas inutile !

Tout se passe comme si les mathématiques proposaient un autre monde, au-dessus du monde réel. À certains endroits, les

deux mondes se correspondent mais chacun a sa géographie et ses chemins : le monde réel est complexe, immensément complexe, et le monde mathématique semble mieux structuré et il semble plus aisé de s'y reconnaître.



En fait, c'est un miracle qu'il soit parfois possible de remplacer un morceau de réalité par un bout de chemin mathématique. Évidemment, cela nécessite de « jouer le jeu », c'est-à-dire d'abandonner les règles compliquées du monde réel

pour celles, cohérentes, du monde mathématique.

Peut-être est-ce dans ce phénomène qu'il faut chercher l'origine du blocage que certains font sur les mathématiques : ils ne veulent pas, ils ne peuvent pas accepter la perte de signification. On se trouve là exactement devant ce que le philosophe des sciences français Gaston Bachelard nomme un « obstacle » à la connaissance : ce que l'on sait déjà fait « obstacle » à une nouvelle connaissance.

Ici, par exemple, la connaissance qui fait obstacle est très utile et importante : dans toute situation, il est essentiel de préserver la signification de ce que l'on fait.

Et voilà que, tout à coup, il faudrait abandonner cette signification ! Pour franchir cet obstacle, il faut être totalement persuadé que l'on va y gagner et donc, dans notre cas, que les résultats fournis par les mathématiques valent cette relativité nouvelle qu'il faut attribuer au sens des choses.

En un certain sens, les mathématiques partagent ce trait de caractère avec l'humour.

Sur le mécanisme de l'obstacle créé par une ancienne connaissance à l'apparition d'une nouvelle, on lira avec intérêt : La formation de l'esprit scientifique (1938) de Gaston Bachelard.

Le second degré



Le degré des problèmes

D'une façon schématique, on pourrait prétendre que les mathématiques du collège vous ont appris à résoudre des problèmes du premier degré et que les mathématiques du lycée tournent autour du second degré. Qu'est-ce que cela signifie, et d'abord, qu'est-ce qu'un problème du premier degré ?

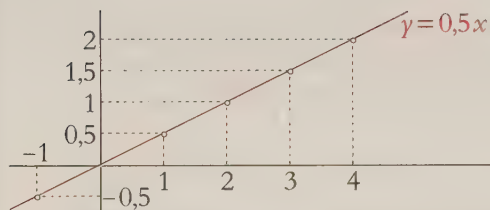
Le premier degré

C'est un problème qui peut se mettre en équation de telle manière que l'inconnue x vérifie une équation du type $ax + b = 0$; ou bien, s'il y a plusieurs inconnues $x, y, z, \dots$, qu'elles vérifient un système de telles équations.

Vous avez beaucoup étudié ce type de problèmes à l'école et au collège ; ils sont très liés aux propriétés de la fonction $x \mapsto ax$, propriétés connues sous le nom général de proportionnalité. Cette fonction admet une droite pour représentation graphique, d'où le qualificatif de « linéaire » associé aussi à ces problèmes et à ces fonctions.

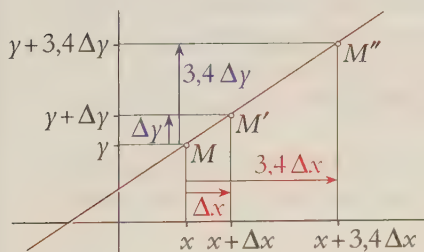
Et nous voilà touchant ici une liaison essentielle entre les nombres et la géométrie : la ligne droite et la proportionnalité.

Résumons ce que vous en savez :



Si x et y sont liés par une relation du type : $y = ax$, alors tous les points de coordonnées (x, y) sont alignés sur l'origine.

Si x et y sont liés par une relation du type : $ax + by + c = 0$, alors tous les points de coordonnées (x, y) sont alignés sur une certaine droite (et réciproquement).



Sur une telle droite, ce ne sont pas les coordonnées mais les accroissements des coordonnées qui sont proportionnels entre eux, c'est-à-dire : si, lorsque l'abscisse d'un point varie de Δx , son ordonnée varie de Δy , alors,

lorsque l'abscisse varie de $k\Delta x$, l'ordonnée varie de $k\Delta y$.

C'est cette linéarité qui rend finalement la résolution de problèmes du premier degré souvent assez simple ; elle se fait en utilisant les propriétés de la proportionnalité, dont l'un des aspects est la règle dite «de trois» (souvent utilisée en physique, en chimie, en biologie et dans la vie courante).

Il s'agit en fait d'un schéma de résolution par combinaison, justifié par les propriétés des fonctions $x \mapsto ax$.

Si $x_1 \mapsto ax_1$ alors $kx_1 \mapsto kax_1$.

En particulier,

$1 \mapsto a$ (en prenant $k = \frac{1}{x_1}$)

et $x_2 \mapsto ax_2$ (en prenant $k = x_2$).

Même dans les situations plus compliquées, ce sont de telles «combinaisons» (d'ailleurs dites «linéaires») qui permettent

La règle de trois tient son nom du fait qu'il s'agit de problèmes où l'on connaît trois nombres et qu'il faut en trouver un quatrième.

Exemple : 4 boîtes coûtent 12 €.

Combien coûtent 7 boîtes ?

Résolution.

Si 4 boîtes coûtent 12 €, alors 1 boîte coûte 4 fois moins, c'est-à-dire 3 €, et 7 boîtes 7 fois plus, c'est-à-dire 21 €.

de s'en sortir (voir par exemple, au chapitre suivant, les «comptes» de Lewis Carroll).

Exemple : pour résoudre le «système linéaire»

$$\begin{cases} 5x + 2y = 300 \\ x - 2y = -60, \end{cases}$$

on peut ajouter les premiers et seconds membres des deux équations : ce qui donne $6x = 240$, soit $x = 40$. Et, en multipliant la deuxième équation par 5 et en la soustrayant de la première, on a $12y = 600$, soit $y = 50$.

Dans les problèmes linéaires, il s'agit donc toujours d'additions et de simples multiplications par un nombre.

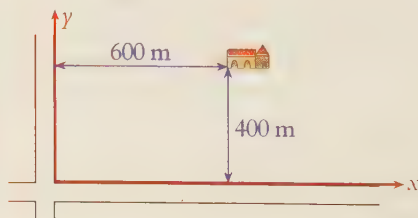
Les problèmes non linéaires

Au lycée, vous allez apprendre à résoudre des problèmes non linéaires et, en premier lieu, des problèmes du second degré.

Un problème du second degré est un problème qui peut se mettre en équation de telle manière que l'inconnue x vérifie une équation du type : $ax^2 + bx + c = 0$.

L'appellation **second degré** est donc due à ce que l'inconnue apparaît avec une puissance égale à **deux**.

Mais il peut aussi y avoir plusieurs inconnues. En voici un exemple :



Une ferme se trouve à 400 m d'une route et à 600 m d'une autre perpendiculaire à la première. En quels points de chaque route est-on exactement à un demi-kilomètre de la ferme ?

La mise en équation, en prenant l'hectomètre comme unité, mène à la résolution de $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$ soit $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$.

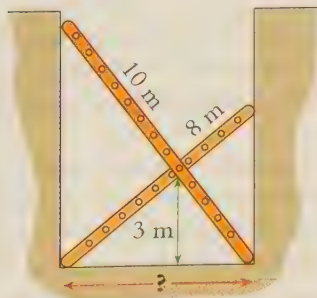
Pour les points cherchés sur une route on est amené à l'équation $x^2 - 12x + 27 = 0$, ou à l'équation $y^2 - 8y + 27 = 0$. Cette dernière n'a pas de solution ; quant à l'autre, les solutions (on apprend à les trouver en seconde : voir page 254) sont 3 et 9. Il y a donc deux points répondant à la question sur la route : à 300 m et à 900 m du carrefour.

Ce dernier exemple, moins innocent qu'il y paraît, met l'accent sur un point essentiel : les problèmes (simples) de distance sont en général des problèmes du second degré.

Nous verrons plus loin la raison profonde de ce phénomène. Cela dit, après le second degré, il y a le troisième, le quatrième et ainsi de suite. Par exemple, le problème suivant amène à une équation du *quatrième degré*.

Deux échelles de 8 et 10 m placées au fond d'une tranchée se croisent à 3 m du fond. Quelle est la largeur de la tranchée ?

La traduction des données de l'énoncé mène à l'équation $X^4 - 292X^3 + 30840X^2 - 1384672X + 22172176 = 0$, où X est le carré de la largeur à calculer.



La résolution de ce type d'équation n'est pas au programme du bac. Mais il y a des méthodes générales qui mènent à la solution exacte et que connaissaient d'Alembert, par exemple, ainsi que Lagrange et les mathématiciens du XVIII^e siècle. Ces méthodes utilisent le calcul des racines quatrièmes. De sorte que, plutôt que de chercher une solution exacte dont le calcul



Le mathématicien français Louis Lagrange (1736-1813) est l'auteur d'ouvrages majeurs tels que la *Mécanique analytique* (1788) et la *Théorie des fonctions analytiques* (1797). Plusieurs formules mathématiques portent son nom.

ne saurait être qu'approché, il vaut mieux dans la pratique, se tourner tout de suite vers le calcul d'une solution approchée (c'est le rôle des méthodes approchées de résolution qui seront étudiées, par exemple, en terminale).

Cependant, il ne faut pas croire que toutes les équations se présentent ainsi, avec des sommes de termes où l'inconnue apparaît à une certaine puissance. On peut ainsi chercher à résoudre des équations du type $2\cos x + 1 = x$ ou même $2^x + 3^x = 100$. Ces équations-là n'ont pas de « degré » et sont dites « transcendantes ». Mais c'est vraiment une autre histoire.

Le compas et les distances

Une bonne partie de l'apprentissage des mathématiques consiste à découvrir les liens cachés entre l'algèbre et la géométrie. Cette découverte est à la fois utile et magnifique ; en tout cas j'espère vous convaincre que ces liens ne sont finalement pas aussi cachés que cela.

Nous avons déjà insisté sur la liaison proportionnalité-ligne droite qui montre le type de calcul lié à l'usage de la règle. Quel est donc, maintenant, le type de calcul lié à l'usage du compas qui est le deuxième outil principal de la géométrie euclidienne plane ?

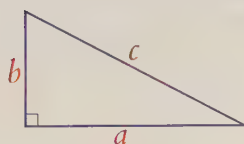
Pour le comprendre, il faut se rappeler que si le compas sert bien à tracer des cercles, il traduit surtout la constance de son « ouverture » : autrement dit, de la distance pointe-crayon.

Si la pointe d'un compas est à l'origine d'un repère et que le bout du crayon en est à la distance de 3 cm, alors ce bout de crayon peut parcourir l'ensemble des points (x, y) tel que $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$ soit $x^2 + y^2 = 9$. On obtient (évidemment) l'écriture de l'équation du cercle de rayon 3... et on voit comment le second degré pointe son nez.



La distance du point de coordonnées (x, y) à l'origine est $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Plus généralement, la mise en équation de problèmes géométriques de distance débouche très naturellement sur des équations du second degré (nous en avons eu un exemple). Cela vient essentiellement du théorème de Pythagore et des carrés qui y interviennent :



$$c^2 = a^2 + b^2, c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Précisément, à cause de l'expression de la distance entre deux points, l'équation d'un cercle de centre de coordonnées (a, b) et de rayon r est donnée par :

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

ou

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Et, ainsi, tous les problèmes relatifs à des intersections de cercles et de droites se traduisent par des expressions algébriques du second degré.

C'est ce que Descartes a le premier compris, expliqué (et exploité) dans l'ouvrage *La Géométrie* qu'il a écrit en 1637 en appendice de son *Discours de la méthode*, et dont un extrait est cité ci-contre. Depuis cette date, on sait donc que la géométrie de la règle et du compas est exactement l'étude des figures planes du «second degré». Nous parlerons de ces figures après le paragraphe suivant, dans lequel nous voulons plaider pour une virtuosité calculatoire minimale.

Les règles du calcul algébrique

Pour prendre plaisir aux mathématiques, il est certain qu'il faut comprendre ce que l'on fait et ce que cachent les calculs. Et c'est pourquoi il est bon d'avoir entrevu comment le premier degré traduit des questions de parallélisme et de proportionnalité et comment le second degré peut traduire des questions de longueurs et de distances.

« Si la question peut être résolue par la géométrie ordinaire, c'est-à-dire en ne se servant que de lignes droites et circulaires tracées sur une superficie plate, alors, lorsque la dernière équation aura été entièrement démêlée, il n'y restera tout au plus qu'un carré inconnu... Et lors cette racine, ou ligne inconnue se trouve aisément... Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterais le plaisir de l'apprendre de vous-même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous exerçant... »
René Descartes.

Mais il faut aussi que les calculs qui en découlent ne soient pas trop lourds à mener : si vous n'avez pas une certaine aisance, vous vous épuiserez vite et votre plaisir sera gâché.

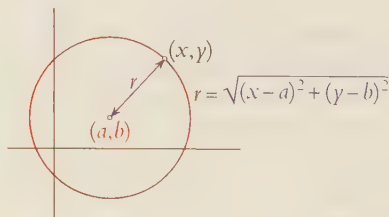
En fait, vous avez intérêt à bien vous entraîner au calcul algébrique ; vous constaterez vite qu'un peu d'habileté peut même engendrer une certaine jubilation.

Montrons-en quelques exemples.

L'équation d'un cercle

Comme on l'a rappelé au paragraphe précédent, il faut absolument bien savoir écrire l'équation d'un cercle de centre de coordonnées (a, b) et de rayon r .

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 &= 0.\end{aligned}$$



L'équation d'un cercle est une équation du second degré, dans laquelle les termes du second degré sont $x^2 + y^2$.

(Pas de termes en xy et mêmes coefficients pour $x^2 + y^2$.)

Dans l'autre sens, il faut savoir remonter de $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ vers la forme canonique $x^2 + y^2 = r^2$, par l'astuce du carré incomplet résumée par ce calcul que vous n'avez pas le droit d'ignorer au lycée :

$x^2 + \alpha x$ est le début du développement du carré de

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2, \text{ lequel vaut } x^2 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{4}$$

On reconnaît l'équation d'un cercle à ce que les termes du second degré sont exactement $x^2 + y^2$, à un facteur près.

et donc $x^2 + \alpha x = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}$.

Ici : $[x^2 + \alpha x] + [y^2 + \beta y] + \gamma = 0$

$$\left[\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right] + \left[\left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4}\right] + \gamma = 0$$

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} = 0.$$

Alors en comparant cette relation à l'équation, dite cano-
nique : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,

on voit que :

$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est l'équation d'un cercle de centre

$$\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) \text{ et de rayon } r \text{ tel que } r^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma.$$

Attention aux signes moins pour les coefficients de x et de y .

Et, attention aussi au fait suivant : si $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma$ est négatif,
ce ne peut être le carré d'un rayon et l'équation ne représen-
te rien (à titre de plaisanterie, vous pouvez cependant penser
que «rien» a une forme circulaire).

L'équation du second degré

Une autre performance due à l'astuce du carré incomplet
tient dans la résolution de l'équation du second degré :
 $ax^2 + bx + c = 0$, réécrite (si a n'est pas nul) :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

L'équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

représente le cercle
dit trigonométrique.

L'équation $x^2 + y^2 = 0$
représente l'origine.

L'équation

$$x^2 + y^2 = -1$$

ne représente aucun
point de $\mathbb{R}^2$.

Les paires de nombres dont la somme vaut S et le produit P vérifient l'équation :
 $x^2 - Sx + P = 0$.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} = 0$$

D'où le résultat :

Lorsque $\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$ est positif, l'expression compliquée $\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$

est un carré ; mettons que ce soit celui du nombre K ; et appelons X l'expression $x + \frac{b}{2a}$.

L'équation s'écrit $X^2 - K^2 = 0$ soit $(X - K)(X + K) = 0$ et ses solutions sont $X = K$ et $X = -K$.

À l'inverse, si on connaît les solutions α et β , le premier membre de l'équation doit s'annuler pour $x = \alpha$ et pour $x = \beta$, il s'écrit donc $a(x - \alpha)(x - \beta)$, le nombre a étant le coefficient de x^2 . On a donc $ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta = 0$, d'où $-a(\alpha + \beta) = b$ et $a\alpha\beta = c$.

D'où les relations à connaître :

- la somme des racines $\alpha + \beta$ vaut $-\frac{b}{a}$
- le produit des racines $\alpha\beta$ vaut $\frac{c}{a}$.

Les mêmes astuces seront en action dans bien d'autres occasions de calculs.

Signalons ici, pour le plaisir, l'origine géométrique de l'astuce du « carré incomplet ». Au IX^e siècle, du côté de Samarkand, existait une grande civilisation musulmane et les bibliothèques regorgeaient de vieux livres grecs mais aussi de magnifiques nouveautés. C'est là que le mathématicien Al-Kwarismi (dont le nom a donné « algorithme » en français) énonça les deux règles de transformation principales des équations :

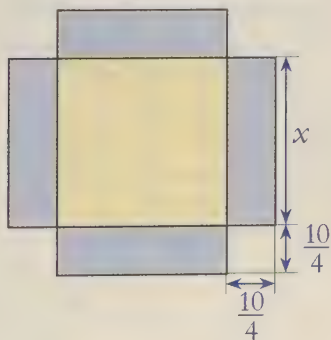
- faire passer d'un membre à l'autre en changeant le signe (règle qu'il appelait *al-gabr*) ;
- réduire les quantités égales de chaque côté du signe d'égalité (*al-muqabala*).

Les techniques d'Al-Kwarismi étaient très efficaces et permettaient de résoudre toutes les équations du second degré. Elles traduisaient des propriétés géométriques assez sophistiquées. Voici, par exemple, la remarquable manière utilisée pour résoudre une équation du type de $x^2 + 10x = 39$.

On y voit bien l'origine géométrique de l'astuce du carré incomplet :

- Flanquer un carré de côté x de 4 rectangles de longueur x et de largeur $\frac{10}{4}$ (chacun d'aire $\frac{10}{4}x$).

- L'aire de cette figure vaut exactement $x^2 + 10x$, c'est-à-dire 39, d'après l'équation à résoudre.



- Mais l'aire de cette figure, c'est aussi celle d'un carré de

côté $\left(x + 2 \times \frac{10}{4}\right)$

diminué des 4 petits

carrés de côté $\frac{10}{4}$.

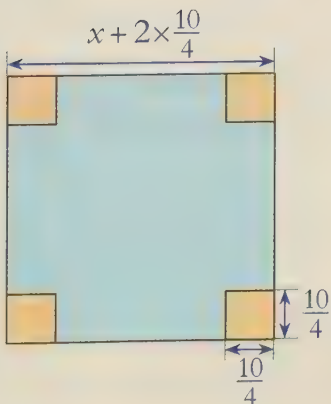
On a donc

$$(x + 5)^2 - 4 \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 39$$

$$\text{d'où } (x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$$

$$\text{d'où } x + 5 = 8$$

$$\text{d'où } x = 3.$$



Et le tour est joué! (Évidemment, à cette époque, seule la solution positive, c'est-à-dire correspondant à une mesure de longueur, est trouvée.)

Pour Al-Kwarismi (800-847), la règle dite *al-gabr* (que les Occidentaux ont utilisée pour donner le mot « algèbre ») justifiait le passage de $x - a = b$ à $x = b + a$.

Les situations du second degré

Dès que l'inconnue apparaît sur la ligne d'écriture et dans un dénominateur, il y a «risque» de second degré.

Comme vous le constatez souvent, le calcul algébrique est assez puissant pour recouvrir de multiples styles de situations. Et si la géométrie euclidienne fournit quantité de problèmes du second degré, ceux-ci peuvent aussi surgir, par la grâce du calcul, de bien d'autres circonstances.

Ainsi en est-il lorsque la combinaison des opérations algébriques «oblige les x à se multiplier». En voici un exemple assez typique.

On achète pour 50 € d'essence à une pompe. On s'aperçoit qu'à une autre pompe le prix du litre est inférieur de 0,10 €. On aurait pu ainsi avoir 5 litres de plus pour le même prix. Quel était le prix de l'essence à la première pompe et combien en avait-on pris ?

Mettons le problème en équation en appelant x le prix de l'essence payée et y la quantité prise. On traduit les données par :

$$xy = 50$$

$$(x - 0,1)(y + 5) = 50.$$

Puisque $y = \frac{50}{x}$, on a :

$$(x - 0,1)\left(\frac{50}{x} + 5\right) = 50$$

$$\text{soit } (x - 0,1)\left(\frac{10}{x} + 1\right) = 10$$

$$(x - 0,1)(10 + x) = 10x$$

$$10x - 1 + x^2 - 0,1x = 10x$$

$$x^2 - 0,1x - 1 = 0.$$

Encore une équation du second degré qu'il faut vraiment que vous sachiez résoudre ! Vous constaterez que la solution du problème posé est $x = 1,08$ € et $y = 46,3$ litres.

On peut aussi tomber sur des équations du second degré en faisant se succéder ou s'emboîter des situations se traduisant par des termes du premier degré.

Ainsi, vous aurez l'occasion de rencontrer des exemples du type suivant :

● $x(ax + b) = c$ qui mène à $ax^2 + bx - c = 0$;

● $ax + b = \left(\frac{k}{cx + d}\right)$ qui mène à $acx^2 + (bc + ad)x + bd - k = 0$;

● $\frac{a}{x} + \frac{b}{(x + k)} = c$ qui mène à $cx^2 + (ck - a - b)x - ak = 0$.

... et vous finirez ainsi par repérer ceux des nombreux problèmes pratiques qui mènent finalement à des «équations du second degré».

Voici un autre exemple pour vous entraîner.

J'ai gagné 100 € en travaillant quelques heures. Tu as travaillé 5 heures de moins en étant payé, par heure, 1 euro de moins ; et tu as gagné 50 €. Si ton salaire horaire est de x euros, alors en écrivant mon temps de travail de deux manières différentes, on a :

$$\frac{50}{x} + 5 = \frac{100}{x+1}.$$



Les courbes du second degré

Vous avez certainement entendu parler de la pomme de Newton qui, en tombant, lui fit (soi-disant) découvrir la loi de la gravitation universelle.

L'histoire se passe en 1666. Isaac Newton fuit alors la peste qui décime les Londoniens et se réfugie à la campagne dans sa pro-

Les courbes du second degré interviennent dans de nombreux problèmes. C'est parce que le mouvement est produit par des forces et que les forces s'expriment comme des dérivées secondes de la position. Et lorsque les dérivées secondes sont constantes, les équations donnant la position sont de degré deux.

priété familiale de Woolsthorpe. C'est là qu'il voit une pomme tomber sur le sol et qu'il réfléchit : « Pourquoi la pomme ne reste-t-elle pas en l'air ? » La réponse est que la Terre l'attire vers elle. Mais alors pourquoi la Lune ou le Soleil (qui est beaucoup plus gros que la Terre) ou la maison d'en face ne l'attirent-ils pas aussi ?

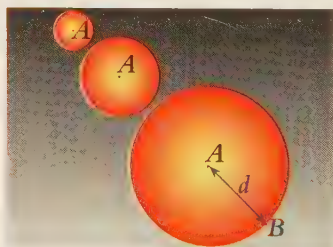
La gravitation universelle

La réponse est que toutes ces attirances existent mais que c'est la Terre qui gagne. Pourquoi ? D'abord parce qu'elle est très grosse et ensuite parce qu'elle est très proche !

Newton en déduit une loi universelle : **deux corps s'attirent, d'une part proportionnellement à leur masse, d'autre part en raison inverse du carré de leur distance.**

« Que le lecteur s'arrête ici un moment avec moi pour contempler la miraculeuse, ineffable et absolument inimaginable complexité de rapports impliquée dans ce fait, que *chaque atome attire chaque autre atome*... »

Mais quelle est cette vérité que nous sommes actuellement appelés à comprendre ? C'est que chaque atome attire chaque autre atome, sympathise avec ses plus délicats mouvements, avec chaque atome et avec tous, toujours, incessamment, suivant une loi déterminée dont la complexité, même considérée seulement en elle-même, dépasse absolument les forces de l'imagination humaine.



Si je me propose de mesurer l'influence d'un seul atome sur un atome voisin dans un rayon solaire, je ne puis pas accomplir mon dessein sans d'abord compter et peser tous les atomes de l'Univers et définir la position précise de chacun à un

C'est Edgar Poe, dans un petit ouvrage intitulé *Eurêka*, qui a le mieux décrit, comme l'extrait ci-contre en témoigne, le vertige qui l'empare de nous lorsque nous essayons de concevoir les conséquences de la loi de la gravitation « universelle ».

moment particulier de la durée. Si je m'avise de déplacer, ne fût-ce que de la trillionième partie d'un pouce, le grain microscopique de poussière posé maintenant sur le bout de mon doigt, quel est le caractère de l'action que j'ai eu la hardiesse de commettre ? J'ai accompli un acte qui ébranle la Lune dans sa marche, qui contraint le Soleil à n'être plus le Soleil, et qui altère pour toujours la destinée des innombrables myriades d'étoiles qui roulent et flamboient devant la majesté de leur Créateur.»

En raison inverse du carré de leur distance ?

Pourquoi ce $\frac{1}{r^2}$? Je vais vous le dire : c'est que chaque « corps » A envoie tout autour de lui une certaine quantité d'amour K comme une bulle chargée de sympathie, envoyée vers d'autres corps.

Cet amour, cette attirance pour et vers l'autre est répartie à la surface de la bulle. Et malheureusement, plus la bulle grandit, plus la densité d'amour, la force d'attraction diminue sur la bulle en B ! Cette attirance est donc d'autant plus faible que la surface de la sphère est grande. Or la surface de la sphère, à la distance d de A , est égale à $4\pi d^2$. Précisément, cette force d'attraction vérifie :

(force d'attraction sur l'unité de surface autour de B) $\times$
(surface totale de la sphère) = (quantité d'attraction émise par A).

On a donc bien, en B , une force d'attraction de A proportionnelle à l'inverse du carré de leur distance :

$$F = \frac{K}{4\pi d^2}.$$

Ainsi donc, si la force de gravitation (la pesanteur sur la Terre) est en $\frac{1}{r^2}$, c'est tout simplement parce que la surface d'une sphère est proportionnelle au carré de son rayon !

C'est en mettant cette loi en équation que Newton réussit à démontrer ce qu'avait découvert Johannes Kepler quelques

Edgar Allan Poe,
1809-1849
(traduction de
Charles Baudelaire).

dizaines d'années avant : **les trajectoires des planètes autour du Soleil sont des courbes du second degré !**

Cela signifie que, dans un repère orthonormé, les équations de ces courbes sont du second degré ; autrement dit, il y a des termes en x^2 , en y^2 et en xy (du second degré donc) en plus des termes du premier degré (en x et y) et du terme constant.



Les trajectoires des planètes sont donc des courbes dont les équations se présentent sous la forme :

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

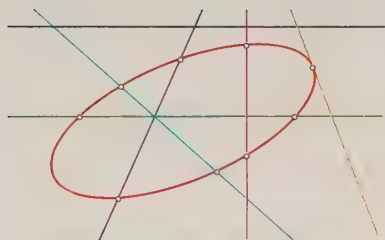
Au premier abord, il peut sembler difficile d'étudier ces courbes, mais des calculs algébriques bien menés rendent finalement leur étude assez simple.

Faisons d'abord, à leur sujet, quelques remarques qui ne sont pas sans susciter quelque étonnement.

En coupant ces courbes par une droite, on trouve au plus deux points d'intersection. En effet, en cherchant les points qui vérifient à la fois l'équation de la courbe et $y = ax + b$, on trouve une équation du second degré en x (qui a donc, selon les cas, 0, 1 ou 2 solutions).

Les courbes peuvent donc ressembler à des espèces d'ovales, lesquels ont effectivement la propriété d'être coupés en 0, 1, ou 2 points par une droite quelconque.

Une courbe du second degré est déterminée par 5 coefficients indépendants. Autrement dit, en général, la donnée de cinq points détermine une courbe du second degré.



Cela n'est pas très surprenant si l'on pense que le cercle est une telle courbe, correspondant aux cas particuliers $C=0$ et $A=B$. Il s'agirait donc d'une espèce de cercle $x^2 + y^2 = r^2$ pour lequel on aurait fait un changement de variable linéaire de la forme :

$$X = \alpha x + \beta y$$

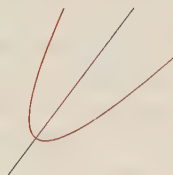
$$Y = \gamma x + \delta y$$

Mais c'est là que nous attendent deux surprises.

● La première surprise concerne la variété des courbes qui peut être obtenue à partir d'une équation du second degré :



Des ellipses avec leurs deux axes de symétrie
[cas particulier : $X^2 + Y^2 = R^2$].



Des paraboles avec leur axe de symétrie et leur direction « asymptotique »
[cas particulier : $aX^2 = Y$].



Des hyperboles avec leurs deux axes de symétrie et leurs deux asymptotes
[cas particuliers : $X^2 - Y^2 = 0$, bissectrices des axes].

● La seconde surprise est l'existence d'axes de symétries pour n'importe laquelle des courbes du deuxième degré... D'où viennent ces symétries dans une équation où on ne les voit pas, parmi les six coefficients A, B, C, D, E, F : $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$? Elles viennent d'une belle propriété qui généralise l'astuce du carré incomplet.

Les courbes du second degré se définissent aussi géométriquement par des relations de distances :

- pour l'ellipse : ensemble de points dont la somme des distances à deux points fixes est donnée ;
- pour la parabole : ensemble de points dont les distances à une droite donnée et à un point donné sont égales ;
- pour l'hyperbole : ensemble de points dont la différence des distances à deux points fixes est donnée.

Le calcul montre en effet qu'il existe un changement linéaire de coordonnées :

$$X = \alpha x + \beta y$$

$Y = \gamma x + \delta y$ qui (en faisant disparaître le terme xy) transforme l'équation initiale en l'une des trois formes :

- $(uX)^2 + (vY)^2 = 1$, cas « elliptique » où les termes en X^2 et Y^2 sont de même signes.
- $(uX)^2 - (vY)^2 = 1$, cas « hyperbolique », où les termes en X^2 et Y^2 sont de signes différents.
- $uX^2 = Y$, cas « parabolique », où la disparition du terme en XY a fait aussi disparaître un terme carré.

Exemple :

$$\text{L'équation } 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4 = 0$$

devient $\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{8} - 1 = 0$ après le changement de coordonnées

$$X = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$$

$$Y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}y.$$

Ceux qui auront la chance de continuer un peu de mathématiques après le bac apprendront la technique générale de découverte des axes d'une courbe du second degré (et donc les astuces algébriques qui permettent la transformation mécanique de leurs équations).

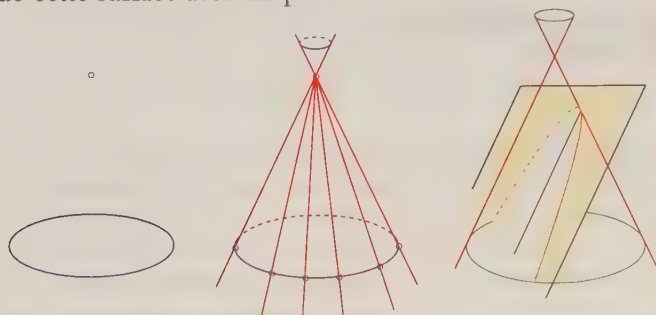
Les coniques

Cependant, les courbes du second degré portent un nom témoignant d'une fantastique propriété purement géométrique : on les appelle les « coniques ».

Depuis 2000 ans, en effet, on étudie ces courbes comme intersection d'un cône et d'un plan.

Et voilà que l'on retrouve ainsi curieusement une définition géométrique qui nous ramène à notre point de départ :

à partir d'un point dans l'espace et d'un cercle, on construit une surface appelée « cône ». Et on s'intéresse aux intersections de cette surface avec un plan.



Pour qui a compris que la traduction calculatoire de figures contruites à partir de cercles et de droites ne peut être qu'un calcul de distances, donc du second degré ; et aussi que leur intersection avec des objets linéaires (des plans) ne peut que conserver le degré des expressions algébriques manipulées ; pour ceux-là, il n'est pas vraiment étonnant de contempler l'identité des courbes générales du second degré et des « coniques ».

Mais pour celui qui connaîtra les suites de cette histoire, la joie des rencontres imprévisibles n'est pas prête de se ternir...

Le premier traité des « sections coniques » est celui d'Appolonius (262-190 av. J.-C.) qui est un contemporain d'Archimède.



Les nombres réels

Ce chapitre insiste, lui aussi, sur l'avantage que procure une bonne connaissance des réels algébriques. Il est souvent déprimant d'être « bloqué » dans l'étude d'une question nouvelle par un simple calcul que l'on ne sait pas bien conduire ! Mais on comprend mieux les calculs si l'on sait qu'ils traduisent des propriétés géométriques. Ce sera donc pour nous l'occasion de rappeler que les grands théorèmes de la géométrie ne sont en fait que des images de calculs.

La variété des nombres

Au collège, vous avez travaillé avec des nombres de toutes « sortes ».

Il y a, bien sûr, les nombres entiers. D'abord les positifs, appelés naturels : 3 ; 13 ; 1966 ; 0 qui servent souvent à compter des pommes, des pages ou des francs. Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$.

Et puis il y a les négatifs : - 3 ; - 13 ; ..., rencontrés en algèbre et dans les questions de repérage.

L'ensemble des entiers positifs (c'est-à-dire naturels) ou négatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Vous connaissez aussi les décimaux : 4,456 ; - 0,8 ; 0,0006. Lorsqu'ils sont positifs, ils expriment souvent une mesure de longueur (je mesure 1,78 mètre), de poids (82,3 kilos) ou d'autres grandeurs (ce gâteau coûte 12,00 euros). Vos calculatrices ne travaillent qu'avec des décimaux. Il faut se souvenir que les entiers peuvent être considérés comme des décimaux particuliers. Ce sont eux qui peuvent s'écrire avec ou sans virgule : $5 = 5,0 = 5,0000$. L'ensemble des décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Et puis, il y a aussi les fractions qui sont des écritures des nombres rationnels : $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{7}$; $-\frac{1}{2}$.

Une fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas autre chose que l'écriture d'un nombre : le quotient de a par b . Lorsque les nombres a et b sont entiers, leur quotient mérite le nom de nombre rationnel.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Certains de ces rationnels peuvent s'écrire sous forme décimale exacte : $\frac{4}{5} = 0,8$; $\frac{1}{2} = 0,5$; $1,35 = \frac{135}{100}$.

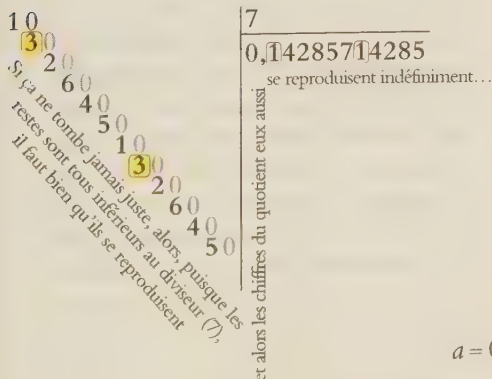
Des écritures infinies

Mais la plupart des rationnels ne s'écrivent pas sous forme de nombre décimal exact : $\frac{10}{3}$ ou $\frac{1}{7}$ par exemple.

L'écriture décimale de ce dernier est «illimitée».

En effet : $\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$, en précisant que les chiffres 1, 4, 2, 8, 5, 7 se répètent indéfiniment.

La plus petite des fractions peut donc être équivalente à une longue suite de décimales. Observez l'exemple du calcul du quotient $\frac{1}{7}$ calculé grâce à l'algorithme de la division.



À l'inverse, comment trouver le quotient d'entiers égal à une certaine écriture décimale dont une suite de chiffres se répètent indéfiniment ?

Autrement dit, quelles fractions valent...

$$a = 0,42424242424242\dots?$$

$$b = 0,27027027027027\dots?$$

C'est «l'algorithme de division» qui permet de passer de l'écriture fractionnaire d'un nombre à son écriture décimale. Il s'agit d'une généralisation de la division euclidienne, dans laquelle on arrête la division à la virgule et où l'on a alors $a = bq + r$ avec la disposition :

$$\begin{array}{r} a : b \\ \hline q \end{array}$$

Le nombre $\frac{1}{9}$ s'écrit
0,11111...
et le nombre $\frac{9}{9}$
s'écrit 0,999999...,
qui est donc
une autre écriture
(illimitée)
du nombre 1.

Faisons d'abord une manipulation un peu magique pour trouver une écriture indéfinie du nombre a .

Calculons $100 \times a$:

$$100 \times a = 42,424242424242424242\dots$$

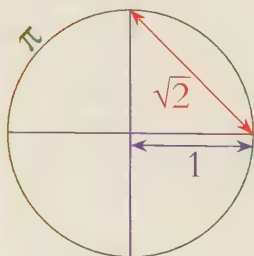
En effet pour multiplier par 100, on déplace la virgule de deux positions vers la droite.

On a donc : $100 \times a = 42 + a$, d'où $99a = 42$.

Finalement, le nombre a s'écrit $\frac{42}{99}$.

Ce truc assez étonnant marche tout le temps. En effet, supposons que n chiffres se répètent dans l'écriture décimale du nombre x , calculez alors $10^n \times x$ et vous vous apercevrez que ce nombre ne diffère de x que d'un nombre entier. Une petite équation du premier degré à résoudre et le tour est joué !

Cependant (nous l'avons vu page 68) il y a encore d'autres nombres qui ne sont ni des décimaux, ni des rationnels : par exemple $\sqrt{2}$ qui mesure la diagonale d'un carré de côté unité ou π qui mesure un demi-cercle de rayon unité.



Présentés ainsi séparément, tous ces nombres ont l'air bien différents les uns des autres. On peut même avoir l'impression que les règles de calcul qui les régissent ne sont pas les mêmes. Cependant, c'est une impression qui est due au fait que vous les avez rencontrés à des moments successifs de votre scolarité et, aussi, à leur écriture particulière.

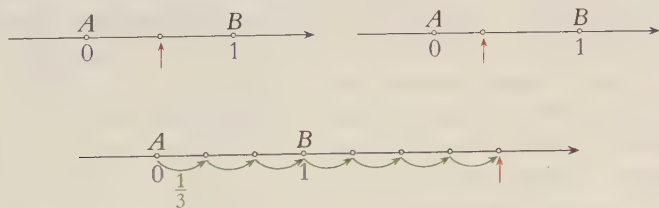
En fait, ils appartiennent à une même famille...

La famille très unie des nombres

Maintenant, il faut vous habituer à une image unifiée des nombres ; il vous faut penser à un ensemble où ils soient tous réunis et où ils jouent à peu près tous le même rôle. Et ce n'est pas difficile ! Il existe en effet une manière simple d'imaginer tous les nombres, et nous vous la dévoilons : il faut penser aux nombres exactement comme aux points d'une droite...

Cela suppose que l'on ait choisi un point A de cette droite associé au nombre 0, et séparant les positifs des négatifs... et aussi un point B associé au nombre 1.

Ayant ainsi défini sur la droite une **ORIGINE**, une **UNITÉ** et un **SENS**, chaque nombre est associé à un point de la droite. Et à chaque point de la droite est associé un nombre.



Ce peut être difficile de calculer exactement le nombre associé à un point donné sur la droite. Parfois, il est même impossible d'en trouver une écriture ; de même, il peut être impossible de marquer, exactement, par une construction géométrique à la règle et au compas, le point associé à un nombre, c'est le cas de π par exemple. Mais à chaque point de la droite est associé un nombre.

Richard Dedekind exprima le premier très clairement l'idée d'une correspondance «totale» entre les **points** d'une droite et les **nombres**. Cela se passe en 1872 et curieusement,

« Dieu a créé les nombres entiers, disait Leopold Kronecker (1823-1891), tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

L'association nombre-géométrie n'est évidemment pas nouvelle: déjà Euclide, dans ses *Éléments*, représente un nombre par un segment de droite. Mais il s'agit alors simplement de l'association « segment »-« mesure de ce segment », limitée évidemment aux nombres susceptibles de mesurer une longueur: les nombres positifs. Au contraire, Dedekind associe chaque point à un nombre, tout en mettant en correspondance l'ordre des nombres et la situation des points sur une droite.

il semble à la fois être sûr d'avoir compris quelque chose de fondamental et avoir un peu honte d'expliquer une chose aussi simple. Voici, en effet, ce qu'il écrit dans *Continuité et nombres irrationnels* :

« J'ai réfléchi longtemps en vain, mais finalement j'ai trouvé ce que je cherchais. Les avis sur cette découverte seront peut-être partagés, je crois cependant que la plupart des gens trouveront la chose très évidente. Cela consiste en ceci. »

Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point P de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité dans la réciproque c'est-à-dire dans le principe suivant : si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe est situé à gauche de tout point de la deuxième classe, il existe un et un seul point qui opère cette découpe de la droite en deux portions.

Ce que nous propose Dedekind, c'est de poser qu'il en est de même chez les nombres : « Si tous les nombres sont répartis en deux classes, telles que tout nombre de la première classe est plus petit que tout nombre de la deuxième classe, il existe un et un seul nombre qui opère cette découpe de tous les nombres en deux portions. »

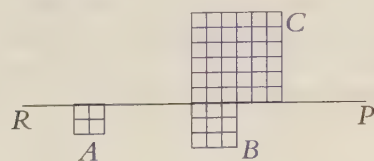
« Comme je l'ai déjà dit, je ne crois pas me tromper en supposant que chacun admettra immédiatement la vérité de cette affirmation, la plupart de mes lecteurs seront très déçus d'entendre que [c'est] par cette évidence [que] doit être dévoilé le mystère de la continuité. Je ferai sur ce point la remarque suivante. Il me sera très agréable que tout le monde juge le principe ci-dessus si évident et si conforme aux représentations qu'il a d'une ligne et des nombres, car il n'est ni en mon pouvoir ni au pouvoir de quiconque d'apporter aucune preuve de son exactitude. Accepter cette propriété n'est rien de plus qu'un axiome, par lequel nous reconnaissons seulement à la ligne (et aux nombres) commune continuité. »

Une même règle pour tous les nombres

Maintenant que vous pouvez vous faire une idée de tous les nombres, il faut bien comprendre qu'ils obéissent tous aux mêmes règles de calcul. Mais puisque les nombres négatifs ne représentent pas exactement des quantités, comme les nombres positifs, il y a des règles qui peuvent paraître bizarres.

Ainsi l'auteur de *La Chartreuse de Parme* et du *Rouge et le Noir*, Stendhal, aimait bien les mathématiques mais il restait bloqué sur une incompréhension dont il explique le détail dans la *Vie d'Henry Brulard* (1835-1836) :

« Suivant moi, l'hypocrisie était impossible en mathématiques et dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que moins par moins donne plus : $(-4) \times (-9) = (+36)$?



Mon grand malheur était cette figure : supposons que *RP* soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous ; comment en prenant le

carré *B* autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré *A*, puis-je parvenir à faire changer de côté le carré *C* ? »

Pourquoi donc $(-4) \times (-9) = (+36)$.

Et pourquoi $(-4) \times 9 = -36$?

Cette règle des signes est-elle arbitraire ?

Peut-elle se démontrer ? Est-elle explicable ?

Pour essayer de la faire comprendre à ceux d'entre vous qui ressembleraient à Stendhal, il nous faut penser à l'en-

La vocation de Stendhal (1783-1842) était d'abord mathématique, lorsqu'il partit avec Bonaparte en Égypte dans l'armée d'Italie. Il se passionna heureusement pour l'écriture.

semble de tous les nombres et aux calculs que l'on souhaite pouvoir mener avec eux.

Que ces nombres soient entiers, décimaux, fractionnaires ou irrationnels, positifs ou négatifs, tout le monde souhaite (et vous aussi certainement) qu'ils soient soumis aux mêmes règles de calcul ; et on ne veut pas se soucier de leur nature lorsqu'on les emploie dans des formules et des équations.

Or il y a une règle de calcul dont on ne peut pas se passer dès que se mélangent des additions et des multiplications ; cette règle très simple, imposée à tous les nombres a, b, c , s'écrit :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

ou

$$a(b + c) = ab + ac.$$

C'est la **distributivité de la multiplication sur l'addition**. Si cette règle n'était pas vraie pour tous les nombres, les calculs seraient très pénibles ; les mathématiciens en ont donc fait un véritable axiome pour l'addition et la multiplication des nombres. Eh bien, parmi les conséquences de cette distributivité, on trouve en particulier la **règle des signes**. Faisons-en la démonstration.

Prenons donc la distributivité comme hypothèse :

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Alors, en prenant pour c l'opposé de b , on a :

$$a \times 0 = a(b) + a(-b).$$

$$\text{Or, } a \times 0 = 0$$

$$\text{Donc } (a \times b) + a \times (-b) = 0$$

et, en soustrayant $a \times b$ à chaque membre :

$$a \times (-b) = -(a \times b).$$

Voilà la conclusion qui est bien l'une des affirmations de la «règle des signes» :

$$4 \times (-9) = -(4 \times 9).$$

C'est la distributivité qui fixe les liens entre les structures additives et multiplicatives de l'ensemble des réels. Par exemple, on a aussi besoin d'elle pour montrer l'action du zéro (neutre de l'addition) dans une multiplication. Ainsi :

$$a \times 0 = a(b - b)$$

$$a \times 0 = ab - ab$$

$$a \times 0 = 0.$$

Et en remplaçant a par $-d$, vous arriverez certainement à démontrer sans peine que :

$$(-d) \times (-c) = d \times c.$$

La réponse à faire à Stendhal est donc double : « Oui, la règle des signes se démontre et elle se démontre à partir de la règle de distributivité ; et cette règle est acceptée pour des raisons pratiques : la règle de distributivité est une règle fondamentale du calcul algébrique qui le rend simple et universel. »

Maintenant on peut se demander s'il est possible d'illustrer cette « règle des signes » par des images ou des situations qui la font paraître moins arbitraire. Et, heureusement, c'est possible.

Par exemple, on peut imaginer qu'un nombre réel représente deux choses à la fois : une mesure (positive) et un sens de parcours, pouvant prendre deux valeurs (vers l'avant ou vers l'arrière, négatif ou positif, dans un sens ou dans l'autre).

Ainsi, $-4,1$ peut représenter, à la fois, la mesure $4,1$ et le sens négatif.

Alors, le produit de deux nombres réels est en fait une espèce de double produit : le produit de deux « mesures » (et cela ne pose pas de problème pour vous depuis déjà quelques années) et le produit de deux « sens de parcours ».

Pour interpréter la règle des signes, il suffit de se dire que :

- « multiplier par -1 », c'est « changer de sens » ;
- et « multiplier par 1 », comme d'habitude, c'est « ne rien changer ».

Alors les formules

$$1 \times 1 = 1$$

$$(-1) \times 1 = -1$$

$$1 \times (-1) = -1$$

$$(-1) \times (-1) = 1$$

se lisent avec un meilleur sentiment de compréhension.

LA VÉRIFICATION D'HERVÉ BAZIN

« Plus par moins
donne moins : les
amis de nos ennemis
sont nos ennemis.
Moins par plus donne
moins : les ennemis
de nos amis sont nos
ennemis.
Moins par moins
donne plus : les enne-
mis de nos ennemis
sont nos amis.
Plus par plus donne
plus : les amis de nos
amis sont nos amis. »



Trois astuces de calculs

Il n'y a pas de mystère : pour bien calculer, il faut bien s'entraîner. Évidemment, il faut aussi connaître quelques astuces courantes ; nous en avons déjà rappelé une dans le chapitre sur le second degré (voir « l'astuce du carré incomplet », page 88). En voici trois autres qu'il serait bien ennuyeux de ne pas connaître.

Les proportions

Une proportion est une écriture exprimant l'égalité de deux quotients.

Mais une égalité telle que $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$ cache de nombreuses autres écritures.

En effet, puisqu'elle traduit l'égalité des produits $bx = ay$, on peut la réécrire d'au moins trois façons :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

$$\frac{b}{y} = \frac{a}{x},$$

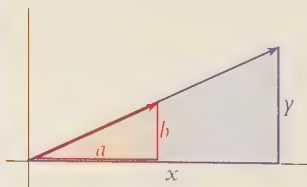
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

Et, grâce à la notation rappelée en marge, on peut aussi l'écrire d'une bien jolie manière :

$$\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0.$$

et l'interpréter géométriquement comme le parallélisme des vecteurs de coordonnées (a, b) et (x, y) .

Mais on peut aussi interpréter la proportion $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$ en termes de fonction linéaire :



lorsque $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$, c'est qu'il existe un certain nombre k égal aux deux quotients $\frac{b}{a}$ et $\frac{y}{x}$:

$$\frac{b}{a} = \frac{y}{x} = k.$$

La différence de produits $ps - qr$ s'écrit

$$\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}$$

et se lit « déterminant des couples » (p, q) et (r, s) .

Alors $b = ka$ et $y = kx$

et c'est donc qu'il existe une fonction linéaire f telle que $f(a) = b$ et $f(x) = y$ où $f(x) = kx$.

On a : $b + y = kx + ka = k(x + a)$.

Ces deux dernières égalités se traduisent par $\frac{b}{a} = k = \frac{2b}{2a}$ (égalité bien connue par les simplificateurs de fractions) et par $\frac{b}{a} = \frac{y}{x} = k = \frac{b+y}{a+x}$, pas toujours bien certaine dans la tête des calculateurs débutants. Finalement :

Si l'on a la proportion $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$, alors on a aussi les proportions $\frac{b}{a} = \frac{y}{x} = \frac{b+y}{a+x} = \frac{b-y}{a-x} = \frac{\alpha b + \beta y}{\alpha a + \beta x}$.

Autrement dit : s'il y a proportionnalité entre les couples (a, b) et (x, y) , il y a aussi proportionnalité entre les couples $(a+x, b+y)$ et $(a-x, b-y)$, de même qu'entre (a, b) et $(\alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y)$.

C'est élémentaire, mais cela va mieux en le disant.

Des radicaux

● Supposons que l'on ne dispose pas de calculatrice et que l'on sache que $\sqrt{2}$ vaut environ 1,414 ; pour trouver une valeur approchée de $\frac{4}{\sqrt{2}}$, on peut évidemment « poser » la division $\frac{4}{1,414}$.

Mais personne n'a envie de le faire sans calculatrice ! Il est plus simple de remplacer $\frac{4}{\sqrt{2}}$ par une fraction qui ne comporte pas de radical au dénominateur : $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Et il est immédiat de multiplier 1,414 par 2.

Cette pratique qui consiste à « chasser » un radical du dénominateur est souvent intéressante parce qu'il faut, pour chasser le radical, penser à multiplier numérateur et dénominateur par le radical figurant au dénominateur.

ATTENTION :
dans l'écriture

$$\frac{b}{a} = \frac{y}{x} = \frac{b+y}{a+x}$$

il y a deux égalités
(au moins) ;
il est sous-entendu
que l'une de
ces égalités
entraîne l'autre :

$$\text{Si } \frac{b}{a} = \frac{y}{x},$$

$$\text{alors } \frac{b}{a} = \frac{b+y}{a+x}$$

Pour quelques informations sur le nombre d'or, voir la Fiche Pratique pages 467-468.

- Ainsi, on transforme le nombre $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ en multipliant les

deux termes par $\sqrt{2}+1$, quantité dite « conjuguée » du dénominateur.

$$\text{On obtient } \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1.$$

C'est tout de même plus simple (en particulier pour obtenir la valeur approchée 2,414).

- Voici un autre exemple : déterminons l'inverse du nombre d'or noté ϕ et égal à $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

On a : $\frac{1}{\phi} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$, égalité qui se transforme en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{5}-1$, quantité « conjuguée » de $\sqrt{5}+1$.

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \phi-1$$

Pour ce nombre ϕ , donc, prendre son inverse équivaut à lui enlever 1. Curieux non ?

- Pour le calcul du nombre $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, la calculatrice affiche 2. Il y a certainement quelque chose à trouver.

Écrivons $3+2\sqrt{2}$ sous la forme $1+2\sqrt{2}+2$, et plus précisément (on a en tête de faire apparaître un carré) $1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$. On reconnaît là une identité remarquable :

$$3+2\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 = (1+\sqrt{2})^2.$$

$$\text{De même : } 3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 = (1-\sqrt{2})^2.$$

$$\text{On a } \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2},$$

$$\text{et } \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}-1.$$

Attention à la dernière égalité ! On a utilisé la règle $\sqrt{a^2} = |a|$, la racine carrée d'un nombre positif est un nombre positif !

Ici $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ n'est pas égal à $1-\sqrt{2}$, qui est négatif !

Finalement : $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = (1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1) = 2$.

Le dénominateur au numérateur !

Il faut aussi savoir transformer le quotient de deux expressions du premier degré comme on va le voir sur l'exemple :

$$y = \frac{2x+3}{x-1}.$$

L'idée consiste à faire apparaître au numérateur l'écriture du dénominateur, ici $x-1$.

On va donc écrire $2(x-1)$ au numérateur, c'est-à-dire $2x-2$. Mais on doit écrire des choses exactes !

Pour retrouver $2x+3$, on doit donc ajouter 5, et écrire $2x-2+5$.

D'où le calcul :

$$y = \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2x-2+5}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}.$$

On fait ainsi apparaître une forme « canonique » très intéressante et très utile. En effet, cette forme suggère les changements de variables :

$$Y = y - 2$$

$$X = x - 1$$

après lequel la relation (dite « homographique ») $y = \frac{2x+3}{x-1}$ devient $Y = \frac{5}{X}$ ou encore plus simplement $XY = 5$!

Tout le monde comprend qu'il est plus facile d'étudier les conséquences de la relation $XY = 5$ plutôt que celles de $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

L'astuce précédente est toujours bonne à utiliser.

Quelles que soient les transformations que vous faites subir à des expressions algébriques, pensez toujours à vérifier ceci : ce qui s'écrit au premier membre d'une égalité doit évidemment toujours être égal à ce qui est écrit au second membre.

Avec un peu d'habitude, on se met dans la tête le schéma de calcul suivant :

$$Y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \left| \frac{a}{c} \frac{b}{d} \right|$$

suggérant les changements de variables $Y = y - \frac{a}{c}$ et $X = x + \frac{d}{c}$,

et la relation $XY = -\frac{1}{c^2} \left| \frac{a}{b} \frac{c}{d} \right|$.

Étonnant non ?

La phrase de René Descartes dans laquelle on peut reconnaître le début de la géométrie analytique est la suivante :

«Après cela prenant un point à discrétion dans la courbe, comme C, sur lequel je suppose que l'instrument servant à le construire est appliqué, je tire de ce point C la ligne CB parallèle à CA et, pour ce que CB et BA sont deux quantités indéterminées et inconnues, je les nomme l'une y et l'autre x...»



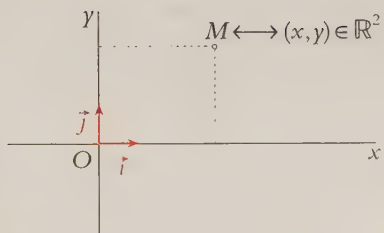
La géométrie analytique

On désigne aujourd'hui par géométrie «analytique» une géométrie qui n'en est pas une ! Puisque, en effet, c'est une géométrie dont les développements ont été remplacés par du calcul.

Les coordonnées

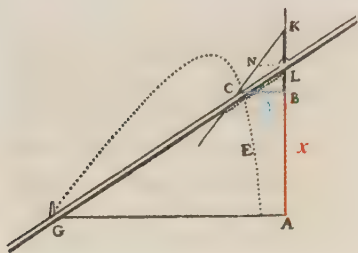
L'inventeur de cette substitution du calcul au raisonnement géométrique est René Descartes.

Dans sa *Géométrie*, écrite en 1637, Descartes explique comment un point d'une courbe peut être caractérisé par la donnée de deux nombres : sa distance y à un axe et la distance x de son projeté sur cet axe à un point fixe A de l'axe (voir l'extrait ci-contre).



C'est seulement pendant la Révolution française que l'on trouve, dans les cours de la toute nouvelle École polytechnique, l'analytique que nous connaissons aujourd'hui : deux axes orthonormés

permettant d'associer bijectivement un point M du plan à ses coordonnées (x, y) , lesquelles peuvent être aussi bien positives que négatives.



Ce fut une vraie révolution : cela ne semblait pas apporter grand-chose de nouveau à la géométrie car évidemment tout problème résoluble par l'analytique était susceptible d'être aussi résolu par un

raisonnement plus « synthétique » à la manière de la géométrie d'Euclide. Cependant, on dispose avec les coordonnées d'une méthode générale, d'une part, dont l'élégance force parfois l'admiration, d'autre part.

En plus, l'analytique ouvre la voie à une généralisation qui aurait certainement été impossible sans cette algébrisation de la géométrie : les espaces de dimension supérieure à trois.

Regardez, par exemple, comment la considération d'équations à plusieurs inconnues donne à d'Alembert une idée tellement fabuleuse qu'il hésite à s'en attribuer la paternité :

« Cette manière de considérer les quantités de plus de trois dimensions est aussi exacte que l'autre [...] Un homme d'esprit de ma connaissance croit qu'on pourrait regarder la durée comme une quatrième dimension, et que le produit du temps par la solidité serait en quelque manière un produit de quatre

Une dimension :

X

Deux dimensions :

 (x, y) .

Trois dimensions :

 $(x, y, z).$

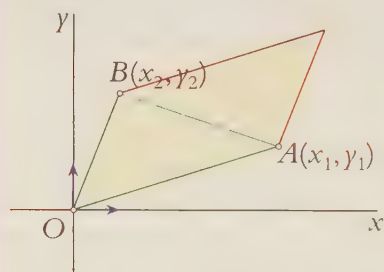
Quatre dimensions :

 $(x, y, z, t).$

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est un vecteur $\vec{w}$: celui dont la longueur a pour mesure l'aire du parallélogramme formé sur $(\vec{u}, \vec{v})$ et tel que le trièdre formé par $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit trirectangle direct.

dimensions ; cette idée peut être contestée, mais elle a, il me semble, quelque mérite, quand ce ne serait que celui de la nouveauté. » Extrait de la *Grande Encyclopédie* (article « dimension », 1784).

Voyons, sur un exemple, comment de telles idées ont pu germer grâce à de simples mais astucieuses manipulations de calcul.



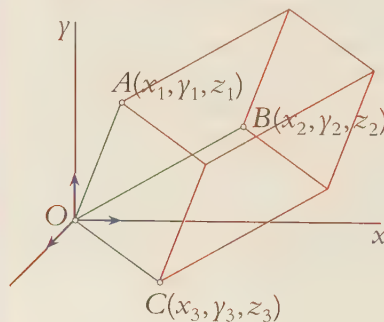
Dans un plan repéré d'origine O , considérons deux points A et B de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) .

Vous savez sûrement et, en tout cas, il n'est pas difficile de montrer que l'aire du parallélogramme

construit sur AOB vaut exactement $x_1 y_2 - x_2 y_1$, autrement écrit sous la forme d'un « déterminant » $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$

(et pour ceux qui savent ce qu'est le produit vectoriel de deux vecteurs, c'est élémentaire).

Dans l'espace à trois dimensions, Lagrange avait réussi à montrer que le volume du parallélépipède construit sur le tétraèdre $OABC$ pouvait lui aussi s'exprimer en fonction des coordonnées de A , B et C .



Voici l'expression qu'il avait trouvée de ce volume :

$$V = (x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1).$$

Plus tard, vers 1850, on décida de noter ce nombre comme ceci :

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

en observant que l'expression ci-dessus pouvait se calculer à partir de cette « écriture en tableau » de la manière suivante, dite « calcul du déterminant » :

« V est la somme algébrique de tous les produits obtenus en prenant une et une seule lettre dans chaque ligne et chaque colonne, le signe étant $+$ pour le produit en diagonale et changeant à partir de lui à chaque échange de deux indices. »

Constatant que ce même calcul est celui qui conduit à l'expression $x_1y_2 - x_2y_1$ pour le tableau $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$

les mathématiciens du XIX^e siècle n'hésitent pas à imaginer quatre points A, B, C, D de coordonnées (x_i, y_i, z_i, t_i) dans un espace de dimension 4 ; et à s'interroger sur l'objet à quatre dimensions construit sur $OABCD$ (un parallélochose ?).

Pourquoi son (hyper) volume ne serait-il pas égal à

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

l'écriture en tableau désignant le nombre évalué selon la technique ci-dessus, dite « calcul du déterminant » ?

Le plus extraordinaire est que ça marche ; et que ce début de définition d'une géométrie à quatre dimensions est non seulement très cohérent mais peut se généraliser à autant de dimensions que l'on souhaite !

C'est le mathématicien Arthur Cayley (1821-1895) qui généralisa et théorisa l'emploi de tableaux de nombres dans son *Mémoire sur la Théorie des matrices* (1858). Et c'est Lewis Carroll, l'auteur d'*Alice au pays des merveilles*, qui écrivit le premier ouvrage didactique sur les déterminants (1870).

Les merveilles du déterminant

Comme il n'est pas question, dans ce fil rouge, de vous décrire par le menu les techniques de la géométrie analytique (pour cela, voyez les Points clés des pages 348 à 366), nous nous contentons de vous indiquer trois autres applications étonnantes du calcul de déterminant dans des cas élémentaires, fréquents au lycée.

- Vous savez sûrement déjà que la solution du système

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

est, lorsqu'il n'y en a qu'une, donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

Voilà qui permet un calcul rapide des coordonnées du point d'intersection de deux droites.

- Mais dans l'espace, savez-vous trouver rapidement les coordonnées du point d'intersection de trois plans ?

Il s'agit de résoudre un système du type

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+3y+2z=2 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$$

On voit mieux les coefficients sous forme de tableau et il est pratique d'écrire

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nous espérons que vous ferez encore longtemps des mathématiques car cela vous permettra d'apprendre pourquoi le « truc » suivant marche tout le temps.

Le calcul des déterminants n'est pas au programme des lycées, sauf pour les petits tableaux de 2 fois 2 nombres. Mais vous sentez bien les avantages que laisse supposer la manipulation de tableaux de nombres plus grands. Si cela vous intéresse, il existe des livres très accessibles sur le sujet ; faites simplement attention à éviter les textes trop théoriques et consultez des livres pratiques (avec des calculs et des exemples).

Vous voulez connaître z par exemple : alors ne regardez que les colonnes des coefficients x et y ; et multipliez chaque équation par le déterminant formé par les deux autres lignes (en changeant le signe une fois sur deux).

Ainsi multipliez les deux membres de

$$2x+y-z=1 \text{ par } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10.$$

$$x+3y+2z=2 \text{ par } - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5.$$

$$3x-y+z=3 \text{ par } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

En fait au lieu de multiplier ces équations par -10 , 5 et 5 , vous pouvez les multiplier par -2 , 1 et 1 .

Deux miracles se produisent alors :

$-4+1+3=0$! les x disparaissent,

et $-2+3-1=0$! les y disparaissent.

Il ne reste que des z : $5z=3$, $z=\frac{3}{5}$. Magique, non ?

● Cherchons maintenant une solution du système :

$$\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+3y-z=0. \end{cases}$$

On tombe sur un tel système lorsque, par exemple, on cherche, dans l'espace, un vecteur perpendiculaire aux deux autres vecteurs $(2; -1; 1)$ et $(1; 3; -1)$.

Il y a, bien sûr, une infinité de solutions, mais elles sont toutes proportionnelles à l'une d'entre elles. Pour l'obtenir, il suffit de calculer les trois déterminants contenus dans le tableau des coefficients :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \text{ qui donne } x=-2,$$

Dans la manipulation des déterminants, on a souvent affaire à une alternance de signes : elle est essentielle et caractéristique de notre géométrie... Il ne faut pas l'oublier.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ qui, avec un changement de signe, donne $y=3$,

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ qui donne $z=7$.

Et $(-2, 3, 7)$ est bien une des solutions du système.



Thalès et Euclide

L'ensemble des réels peut donc être mis en correspondance avec une droite munie d'un repère, mais aussi avec une autre droite munie d'un repère à elle, mais aussi...

La première question qui vient à l'esprit est alors la suivante : comment se correspondent les graduations de ces différentes droites ? La réponse à cette question fait intervenir le nom d'un grand mathématicien du monde méditerranéen : Thalès.

Thalès et le parallélisme

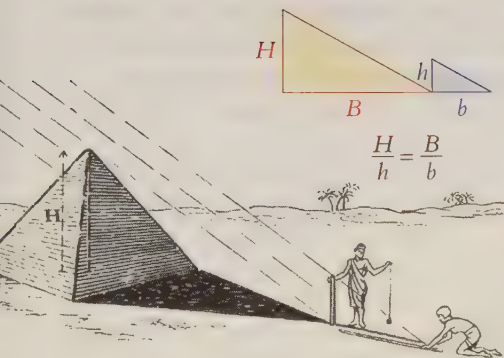
Thalès est le premier savant dont l'Histoire ait retenu le nom. Il vivait autour de 600 av. J.-C. Il essaya de trouver aux phénomènes naturels des explications qui satisfassent la raison.

Par exemple, il n'acceptait pas que l'eau tombe du ciel parce que « le dieu de la Pluie était irrité », mais il cherchait comment l'élément « air » pouvait ainsi se transformer en « eau ».

De retour d'Égypte, où il avait appris l'astronomie, il sut prédire avec une belle précision l'éclipse du Soleil du 28 mai de l'an 585.

LE MONDE GREC

Lorsqu'on parle du « monde grec », il ne faut pas oublier qu'il s'agit en fait d'une civilisation qui fleurissait de la Sicile à l'Égypte, en passant par la Turquie. Thalès, par exemple, vivait en Asie Mineure, Euclide à Alexandrie et Zénon à Élée, en Italie.



$$\frac{H}{h} = \frac{B}{b}$$

Mais, surtout, la tradition rapporte que Thalès, en visite à Alexandrie, réussit à mesurer la hauteur de la grande pyramide (qui avait déjà un millénaire et demi). Et c'est en hommage à l'astuce ayant permis cette mesure que le théorème correspon-

dant fut attribué à Thalès par les mathématiciens du XVIII^e siècle.

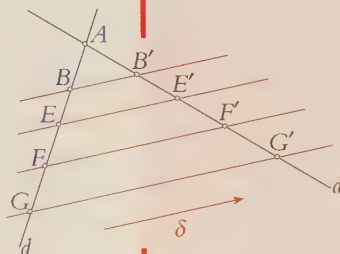
La version vue au collège porte sur des triangles à côtés parallèles.

En voici une version «projective» :

Soit deux droites d et d' et une direction de projection δ , alors les longueurs des segments projetés sur d' sont proportionnelles aux longueurs des segments correspondants portés par d .

Autrement dit :

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AE}{AE'} = \frac{AF}{AF'} = \frac{AG}{AG'} = \frac{BE}{B'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FG}{F'G'}.$$



Un truc : dans la configuration de Thalès (deux droites coupées par un faisceau de droites parallèles), vous avez intérêt à écrire l'une sous l'autre les listes des points se correspondant :

A	B	E	F	G
A	X	Y	Z	T

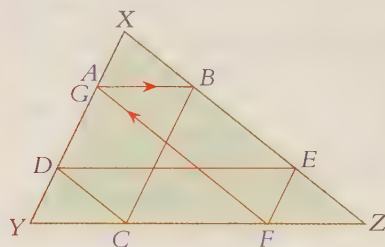
Il est alors facile d'écrire des suites de quotients égaux comme nous l'avons fait ci-dessus.

Ensuite, grâce aux propriétés des **proportions**, revues plus haut, il est possible d'obtenir d'autres égalités.

Ces propriétés entraînent une autre version du même théorème avec le vocabulaire des droites graduées.

Si le repère (O, I) d'une droite graduée est projeté sur le repère (O', I') d'une autre, alors les abscisses des points sont les mêmes que celles de leurs projetés.

• Voici une jolie application de cette version du théorème de Thalès.



Sur les côtés du triangle XYZ on effectue des projections successives de points d'un côté sur l'autre parallèlement au troisième. Montrons alors que partant de A sur $[XY]$, on y revient à la sixième projection !

Soit x l'abscisse de A dans le repère (X, Y) .

D'après la version « droites graduées » du théorème de Thalès, x est aussi :

l'abscisse de B dans le repère (X, Z)

l'abscisse de C dans le repère (Y, Z)

l'abscisse de D dans le repère (Y, X)

l'abscisse de E dans le repère (Z, X)

l'abscisse de F dans le repère (Z, Y)

l'abscisse de G dans le repère (X, Y) ;

et G est donc confondu avec A .

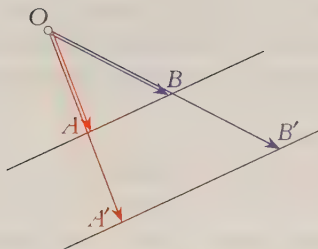
Thalès et les vecteurs

Mais la version la plus efficace du théorème de Thalès est sa version vectorielle.

Pour comprendre que son énoncé ne fait que traduire une simple propriété calculatoire, il faut bien avoir compris ceci :

Deux vecteurs sont colinéaires (et donc leurs représentants parallèles) si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

$\vec{AB} = k\vec{CD}$ ($k \neq 0$)
signifie que « les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires » et donc que « les droites (AB) et (CD) sont parallèles ».



Le réciproque du théorème de Thalès se démontre alors ainsi :

Si $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et si $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$,
 alors on a : $\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$
 ce qui donne $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Donc les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Et on obtient une information supplémentaire sur les longueurs, à savoir $A'B' = kAB$.

D'où les deux nouvelles versions du théorème de Thalès.

Une réciproque de Thalès version géométrique :

$$\text{Si } \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k,$$

alors (AB) est parallèle à $(A'B')$ et $\frac{AB}{A'B'}$ vaut aussi k .

Une réciproque de Thalès version vectorielle :

Si $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$,
 alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et (AB) est parallèle à $(A'B')$.

On retrouve ici la liaison parallélisme-proportionnalité déjà évoquée plusieurs fois dans cet ouvrage.

Le sens du calcul se situe dans l'égalité :

$$\frac{k\overrightarrow{OB}}{k\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}}.$$

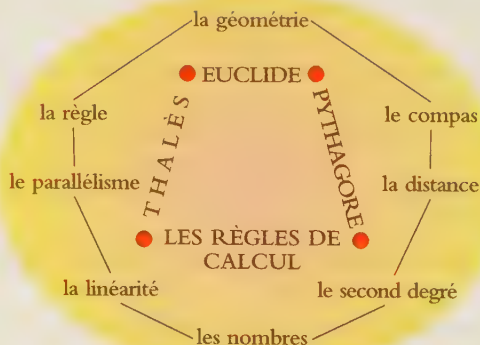
Et le petit calcul de la démonstration nous a fait comprendre que le théorème de Thalès était exactement la traduction géométrique (par le truchement des vecteurs) de la distributivité des nombres.

Euclide, la règle et le compas

Mais il y a une autre manière (plus forte que la projection) pour relier les repères sur les différentes droites du plan. C'est de s'imposer une distance unique dans tout le plan et donc sur toutes les droites. On parle alors de *géométrie euclidienne*.

Pratiquement, c'est le compas qui permet de vérifier la constance des distances. Et nous avons vu au chapitre précédent comment cette distance, grâce au théorème de Pythagore, se traduisait dans le plan repéré (par des expressions du type $\sqrt{x^2 + y^2}$).

Ainsi se trouve bouclée la boucle :



Cependant, la belle ordonnance de ce schéma ne doit pas laisser supposer que la géométrie et les nombres sont ainsi circonscrits dans un domaine aussi fermé. La géométrie ne se limite pas à la règle et au compas et le domaine des nombres est autrement plus vaste que celui des problèmes du second degré.

Ce qui est vrai, c'est que les constructions géométriques réalisables à la règle et au compas se traduisent nécessairement par des problèmes pouvant se ramener au second degré.

Évidemment, les choses peuvent paraître plus compliquées que le second degré. Regardons par exemple l'équation $x^4 + 4x^3 - 8x + 2 = 0$ et posons nous le problème suivant :

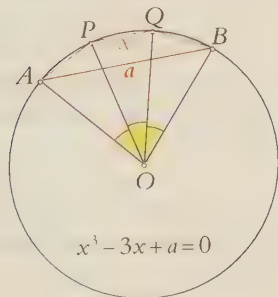
Est-il possible de construire un segment dont la longueur égale l'une des racines de cette équation ?

Il se trouve que oui !

D'abord, en posant $y = x + 1$, l'équation devient $y^4 - 6y^2 + 7 = 0$. Puis en posant $y^2 = Y$, on est ramené à une équation du second degré dont les solutions sont $3 + \sqrt{2}$ et $3 - \sqrt{2}$.

On peut donc résoudre l'équation par une cascade de calculs du second degré. On peut donc construire à la règle et au compas un segment de longueur égale à l'une des racines de l'équation donnée (le nombre positif $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$) !

En revanche, on montre qu'il n'est pas possible de construire à la règle et au compas un segment dont la longueur est une racine de l'équation $x^3 - 3x + a = 0$. Cette racine contient en effet des racines cubiques devant lesquelles le compas et la règle sont impuissants. Or il se trouve que cette équation traduit le problème géométrique de la trisection de l'angle (comme on peut le voir en montrant que, si a est la corde du cercle, alors le tiers de l'angle au centre, associé à cette corde, intercepte une corde de longueur x qui vérifie cette équation).



La trisection de l'angle est donc un problème géométrique qui n'est pas résoluble à la règle et au compas !

On ne peut construire à la règle et au compas que des segments dont la longueur est solution d'une équation (algébrique à coefficients « constructibles ») pouvant se résoudre par des successions de manipulations du « second degré ». À plus forte raison, on ne peut construire des segments de longueur non solution d'une équation à coefficients entiers. C'est pourquoi la **QUADRATURE DU CERCLE** est impossible : en effet, Ferdinand Lindemann (1852-1939) a montré en 1882 que π ne pouvait être solution d'aucune équation algébrique à coefficients entiers.

Le calcul généralisé



Des calculs sans les nombres

Vous l'avez expérimenté, le calcul avec les nombres réels est à la fois très simple (dès qu'on a un peu l'habitude) et fascinant. Quelle surprise de constater que :

$\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ vaut tout simplement 2 !

Ou que l'expression $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ se factorise en $(a-c)(b-a)(c-b)$!

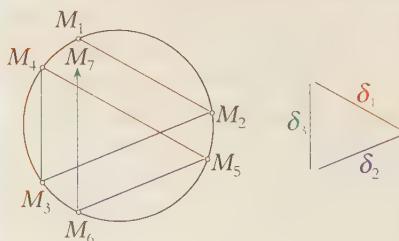
Ou que $1+x+x^2+x^3+x^4$ s'écrit $\frac{x^5-1}{x-1}$!

Cette « magie » du calcul, vous l'avez aussi rencontrée avec les vecteurs.

Pourquoi, en effet, le calcul se limiterait-il aux nombres susceptibles de mesurer des objets et à leurs opposés ? Pourquoi ne calculerait-on pas aussi avec des figures géométriques, ou avec des objets plus compliqués comme des transformations ou des fonctions ?

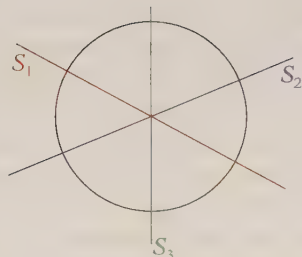
Un calcul avec les symétries

Regardons-en un exemple en action dans la situation illustrée dans la figure ci-dessous. Partant d'un point M_1 , sur un



cercle, on trace successivement les cordes parallèles aux trois directions $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.

Le point M_7 semble confondu avec le point M_1 !!!



La démonstration fait intervenir les trois symétries S_1, S_2, S_3 , d'axes perpendiculaires à $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ et passant par le centre du cercle. Dans le langage de ces transformations le point M_7 est le transformé de M_1 par le « produit » P des symétries :

$$P = S_3 S_2 S_1 S_3 S_2 S_1.$$

Cependant, le produit de deux symétries d'axes concourants est une rotation ayant pour centre leur point d'intersection...

Et deux rotations de même centre, elles, commutent comme les nombres. On peut donc calculer ainsi :

$$P = (S_3 S_2)(S_1 S_3)(S_2 S_1)$$

$$P = (S_3 S_2)(S_2 S_1)(S_1 S_3).$$

On a commuté les deux dernières parenthèses : on va maintenant associer différemment les symétries en utilisant le fait que $S_1 S_1, S_2 S_2, S_3 S_3$ ne réalisent que « l'identité ».

$$P = S_3(S_2 S_2)(S_1 S_1)S_3 = S_3(S_1 S_1)S_3 = S_3 S_3 = \text{Identité}.$$

La transformation P est l'identité : elle transforme donc M_7 en M_1 .

Un très simple calcul sur les transformations a pu ainsi démontrer un résultat géométrique particulièrement étonnant !

Cette idée de calcul généralisé commence à voir le jour au début du XIX^e siècle et se développera tout au long de ce siècle.

Et aujourd'hui, au lycée, vous rencontrez des objets de calcul assez divers :

- les points et les vecteurs,
- les nombres complexes et les transformations,
- les listes de nombres et les fonctions.

ATTENTION

L'ordre d'écriture des symétries est l'inverse de celui de la lecture, et les symétries ne commutent pas comme les nombres :

$$S_1 S_2 \neq S_2 S_1$$

Les points et les vecteurs

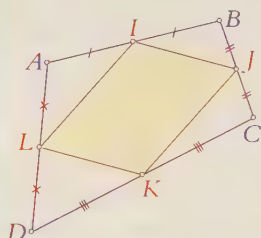
Observons la figure ci-dessous, dans laquelle le point I est le milieu de $[AB]$. Dans une telle situation, qui n'a jamais eu envie d'écrire : $I = \frac{(A+B)}{2}$?



Pourquoi cela ne serait-il pas possible et quelles règles de calcul devraient alors être respectées ?

Supposons un instant que l'égalité $I = \frac{(A+B)}{2}$ puisse traduire exactement le fait que I soit le milieu de $[AB]$.

Traduisons que I, J, K et L sont les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque.



$$I = \frac{(A+B)}{2}$$

$$J = \frac{(B+C)}{2}$$

$$K = \frac{(C+D)}{2}$$

$$L = \frac{(D+A)}{2}$$

Supposons que l'on puisse «faire des calculs comme d'habitude».

$$I + K = \frac{(A+B)}{2} + \frac{(C+D)}{2} \quad \text{et} \quad J + L = \frac{(B+C)}{2} + \frac{(D+A)}{2}$$

Les «sommées» $I + K$ et $J + L$ sont alors toutes les deux égales à $\frac{(A+B+C+D)}{2}$.

Les milieux $\frac{(I+K)}{2}$ et $\frac{(J+L)}{2}$ sont donc les mêmes. $[IK]$ et

$[JL]$ ayant même milieu, $IJKL$ est donc un parallélogramme !

C'est une propriété extraordinaire.

Quel que soit $ABCD$, le quadrilatère joignant les milieux de ces côtés est un parallélogramme.

Mais est-il vraiment possible que l'on puisse ainsi calculer avec des points ?

Attention : s'il est vrai que l'écriture :

$$\frac{A+B}{2}$$

ne renferme pas immédiatement de contradictions, c'est parce que le 2 n'est pas vraiment ici un nombre ; c'est $\frac{1}{2}$ qui veut dire «milieu».

Une écriture comme $\frac{A+B}{2}$

mènerait vite à n'importe quoi car de quel « tiers » voudrait nous parler celui de droite ? ou celui de gauche ?

Rappel 1. En mathématiques, la seule chose qui empêche vraiment de faire ce que l'on aurait envie de faire est l'apparition de contradictions. Or, justement, le travail des mathématiciens du XIX^e siècle fut de montrer qu'il était possible de «calculer» ainsi avec des points sans tomber sur des contradictions.

La première idée d'un tel calcul revient certainement à Jean-Robert Argand qui, en 1806, songea à additionner et même à multiplier des «lignes dirigées». Ensuite le mathématicien August Ferdinand Möbius montre comment on pourrait calculer avec des points comme on vient de le voir ; son livre paru en 1830 s'appelle *Der barycentrische Calculus*. À la même époque, l'Italien Giusto Bellavitis eut l'idée d'un «calcul vectoriel», mais celui qui inventa vraiment le calcul vectoriel fut l'Allemand Hermann Günther Grassmann ; dans son livre *Leçons sur le calcul linéaire*, paru en 1844, il explique comment donner un sens à l'addition des couples de points. Puis en 1848, dans ses *Leçons sur les quaternions*, l'Irlandais sir William Rowan Hamilton sortit ce calcul de son cadre spatial en inaugurant des vecteurs ayant plus de trois dimensions et avec lesquels on pouvait calculer comme on le faisait en algèbre. C'est donc un calcul vieux seulement de cent cinquante ans que vous apprenez aujourd'hui.

Rappel 2. Les mathématiques sont des manipulations logiques de symboles abstraits. Mais ces manipulations et ces symboles deviennent utiles lorsqu'ils prennent une signification. C'est pourquoi il faut aussi regarder s'il est possible de donner un sens à ce que l'on fait, de le «comprendre».

Par exemple, dans notre calcul, nous voyons écrit « $A + B$ ». Mais que peut bien être la somme de deux points A et B ?

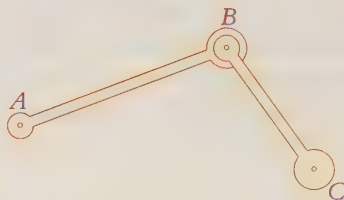
Les gens se sont creusé la tête... Et un jour quelqu'un a remarqué qu'il était plus facile de donner un sens à la somme de deux bipoints qu'à la somme de deux points...

LES BIPOINTS

N'ayez pas peur
des mots, un bipoint
est simplement
un couple de points.
C'est plus vite dit !

La relation

$AB + BC = AC$,
dite relation
de Chasles,
fut imaginée
par Argand alors
que Chasles n'avait
que treize ans...

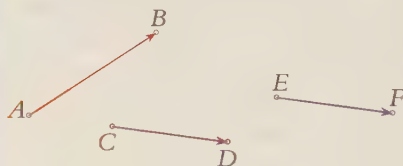


Par exemple, en «ajoutant» (A, B) et (B, C) , on dirait que le résultat serait (A, C) . Comme si on interprétait le bipoint (A, B) comme un déplacement de A vers B et la

somme comme la succession de deux déplacements.

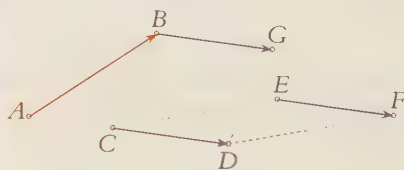
Avec cette idée, on sait donner un sens à la somme $(A, B) + (B, C)$ parce que B fait le lien entre (A, B) et (B, C) .

Comment donner un sens à la somme $(A, B) + (C, D)$?



Une réponse est la suivante: imaginez que (C, D) ne représente pas exactement le déplacement de C vers D mais plutôt la «manière» d'aller de C vers D . De sorte

que, si (E, F) est une autre manière de représenter le même déplacement, les points $CDFE$ forment un parallélogramme. Et on noterait alors $(C, D) = (E, F)$.



Il serait alors possible de donner un sens à la somme $(A, B) + (C, D)$: il suffirait de faire intervenir le bipoint (B, G) tel que $(B, G) = (C, D)$.

$(A, B) + (C, D)$ vaudrait $(A, B) + (B, G)$, c'est-à-dire (A, G) . Et on écrirait la somme $(A, B) + (C, D) = (A, B) + (B, G) = (A, G)$.

Il se trouve que, par bonheur, tous les conditionnels du texte précédent peuvent devenir «réalité». En effet, ce calcul avec les bipoints ne fait apparaître aucune contradiction, lorsqu'on le poursuit...

Et c'est pourquoi il vous est aujourd'hui possible de suivre un cours de mathématiques portant sur le calcul vectoriel. Mais avec les notations vectorielles d'aujourd'hui, dans lesquelles $\overrightarrow{AB}$ a remplacé (A, B) on écrit :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}.$$

Ce qu'il faut bien comprendre, en calcul vectoriel élémentaire, c'est que l'on peut appliquer les règles de ce calcul de manière mécanique sans référence à leur traduction géométrique. Et c'est ce qui est assez beau, finalement.

– On commence par traduire le fait que I est milieu de $[AB]$ par $AI = IB$, ou le fait que (AB) et (CD) sont parallèles par le fait qu'il existe un nombre $\alpha \neq 0$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{CD}$.

– Puis on fait un calcul mécanique.

– Et la traduction du résultat de ce calcul nous fait découvrir une nouvelle propriété géométrique.

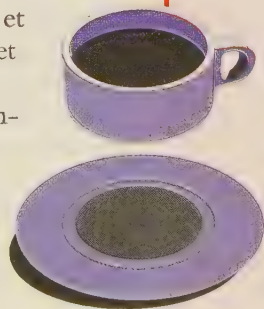
Voyons-en ici un très bel exemple.

Il s'agit d'un de ces problèmes qu'on peut poser en buvant le café avec des amis sur une table munie d'une nappe en papier.

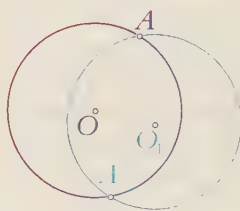
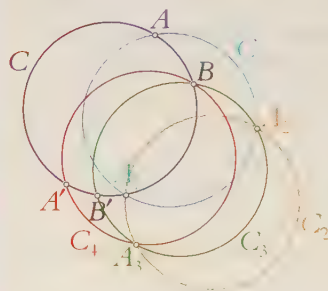
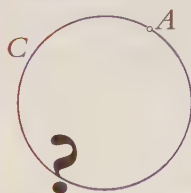
Un problème de soucoupe

On dispose d'une soucoupe, d'un crayon et d'un papier. On trace un cercle avec la soucoupe et on y marque un point A .

Avec la soucoupe pour tout instrument, comment marquer le point diamétralement opposé au point A ?



Solution :



La solution consiste à tracer successivement un certain nombre de cercles, comme le montre la figure ci-contre, où les cercles C_1, C_2, C_3, C_4 sont tracés successivement et définissent, successivement les points A_1, A_2, A_3, B et A' .

Pour convaincre quiconque du bien-fondé de la solution, il faut très clairement passer ici par les deux types de légitimation invoqués au paragraphe précédent.

Concernant la traduction de la situation par une relation formelle, il faut « comprendre » le sens du théorème suivant : lorsque deux cercles de centre O et O_1 de même rayon se coupent en A et A_1 , on écrit :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A_1O_1}.$$

Et cette écriture veut dire que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{A_1O_1}$ «sont» deux «segments dirigés» de même longueur, portés par des droites parallèles et «de même sens». Il n'est pas besoin ici de plus de «calcul vectoriel» pour comprendre ce qui va suivre de l'emploi de cette notation.

Ensuite, il faut se contenter de traduire mécaniquement ce qui se passe pour chaque paire de cercles et d'appliquer la transitivité de l'égalité.

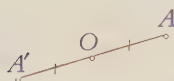
L'écriture des égalités vectorielles réclame une grande attention dans l'ordre des lettres. Ainsi, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ traduit le fait que $ABDC$ est un parallélogramme; on écrit les lettres de l'égalité dans l'ordre : première, deuxième, quatrième, troisième. De même, ici on pourrait écrire $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A_1O_1}$ ou $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O_1A_1}$ (de part et d'autre du signe égal, on écrit les noms des points de même catégorie).

Le mieux est de faire le tableau suivant :

Cercles	Centres et cercles	Points d'intersection	Égalité
C et C_1	O et O_1	A et A_1	$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O_1A_1}$
C_1 et C_2	O_1 et O_2	A_1 et A_2	$\overrightarrow{A_1O_1} = \overrightarrow{O_2A_2}$
C_2 et C_3	O_2 et O_3	A_2 et A_3	$\overrightarrow{O_2A_2} = \overrightarrow{A_3O_3}$
C_3 et C	O_3 et O	B et B'	
C_4 et C_3	O_4 et O_3	A_3 et B	$\overrightarrow{A_3O_3} = \overrightarrow{O_4B}$
C_4 et C	O_4 et O	B et A'	$\overrightarrow{O_4B} = \overrightarrow{A'O}$

En lisant les égalités successives, et sans comprendre surtout, car la situation dessinée est totalement inextricable, on conclut que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A'O}$.

Et donc, en redonnant du sens à cette relation : $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{A'O}$ sont deux « segments dirigés » de même longueur sur la même droite passant par O , et de même sens.



A' est donc bien le point diamétralement opposé à A sur le cercle C .

Il est particulièrement opportun ici de se souvenir de la remarque qui conclut notre premier chapitre (page 78).

D'une part, le fonctionnement des mathématiques semble dénué de sens. Mais c'est la raison même de sa puissance. Dégagé des contraintes de la manipulation matérielle, le calcul joue avec des règles bien claires dont la non-contradiction est assurée.

Cependant, d'autre part, les mathématiques rencontrent assez souvent la réalité; les hypothèses et les résultats de leurs calculs peuvent alors y être interprétés; et c'est à la fois beau et efficace!

Les mathématiques, disait Bertrand Russell, sont « la seule science où on ne sait jamais de quoi l'on parle ni si ce que l'on dit est vrai ».



Les nombres complexes

Les nombres complexes (étudiés en terminale) constituent un « sur-ensemble » des nombres réels auxquels, d'une part, on a rajouté un nombre : le nombre i dont le carré vaut -1 ($i \times i = -1$); et dans lequel, d'autre part, on a gardé les mêmes règles de calcul relatives à l'addition et la multiplication.

Le calcul vectoriel est un magnifique champ de rencontre du calcul et de la géométrie. Nous l'avons déjà remarqué en rappelant le théorème de Thalès page 119. Dans le plan, cette rencontre miraculeuse trouve sa raison profonde dans le fait qu'il est vraiment possible de traiter les vecteurs du plan, ou les points du plan, comme de véritables nombres pouvant non seulement s'additionner et se multiplier, mais aussi se soustraire, se diviser, se prendre en racines...

Ces « nombres », dont les règles de calculs sont entièrement analogues à celles des nombres réels, sont appelés « imaginaires » ou « complexes ». Voici comment les introduit Jean Robert Argand dans son remarquable *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*.

« On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer, au-delà de 0, la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif : mais, puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de grandeur absolue avec l'idée de direction, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives ?

En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative. »

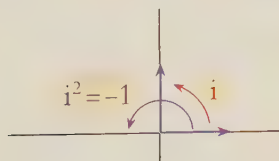
Le quart de tour

L'idée géniale d'Argand pour interpréter un nombre « i » dont le carré vaudrait « -1 » consiste à abandonner le domaine des nombres pour rentrer dans celui des transformations.

Il reprend l'idée que « prendre l'opposé » ou « multiplier par -1 », c'est réaliser, sur les points d'un axe, la symétrie centrale de centre l'origine ; c'est-à-dire un demi-tour. Il faut alors penser à quelque chose dont le « carré » serait un demi-tour, quelque chose qui, recommencé par multiplication, serait un demi-tour. Bon sang, mais c'est bien sûr ! C'est un quart de tour qui, répété, produit un demi-tour.

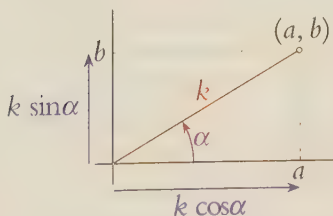
L'astuce consiste simplement à relativiser le sens des opérations : à penser à la succession de deux rotations comme à une opération qui s'interpréterait comme une multiplication.

Si le produit par i s'interprète comme la rotation de $\frac{\pi}{2}$, alors le produit par i^2 s'interprète comme le demi-tour autour de 0 ; c'est-à-dire comme une multiplication par -1 .



Ce qui est alors extraordinaire, c'est que tout alors s'agence avec bonheur.

Et voici ce bonheur résumé :



À chaque vecteur (a, b) de $\mathbb{R}^2$ on peut associer une transformation : celle qui est le produit (la succession) de rotation d'angle égal à l'angle du vecteur avec $[Ox]$ et de l'homothétie de rapport la longueur du vecteur.

Aussi, au vecteur $(0; 1)$ est associé la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et au vecteur $(-1; 0)$ la rotation d'angle π .

C'est Leonhard Euler qui, en 1774, dans son *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, explicita le lien magnifique existant entre la trigonométrie et les logarithmes (et donc les exponentielles) ; il a effectivement osé écrire :

$$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$$

$$\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$$

Pour des questions d'homogénéité, il est bon de constater que les angles viennent se placer dans les formules, au niveau des exposants. Ce sont en effet des grandeurs sans dimension comme doivent l'être des nombres apparaissant en exposant.

Alors en notant $(0; 1) = i$, ces « vecteurs » peuvent s'écrire sous la forme : $a + bi$.

On peut alors calculer exactement comme si c'était des nombres réels avec la règle supplémentaire $i^2 = -1$.

Ainsi $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ et la transformation correspondant au nombre produit est exactement la succession de transformations correspondant à chacun des facteurs. Cette correspondance a fait adopter une notation mieux adaptée au caractère plutôt multiplicatif du coefficient d'homothétie et au caractère plutôt additif de l'angle de rotation.

Ainsi, le nombre associé à la rotation d'angle α , suivi de l'homothétie de rapport k , est noté $ke^{i\alpha}$, ce qui permet de traduire la multiplication par les règles habituelles de calcul sur les puissances :

$$ke^{i\alpha} \times k'e^{i\alpha'} = kk'e^{i(\alpha + \alpha')}.$$

Alors, comme on peut le voir sur la figure précédente (voir page 131), si $a + bi = ke^{i\alpha}$, c'est que

$$a = k \cos \alpha \text{ et } b = k \sin \alpha.$$

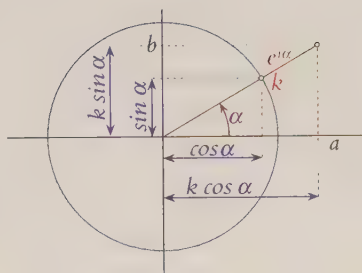
On peut donc écrire $ke^{i\alpha} = k \cos \alpha + i k \sin \alpha$.

En fait, l'extraordinaire conformité entre les règles de calcul et les propriétés des transformations sont à l'origine de sensationnelles découvertes qui n'ont pas fini de vous étonner, comme elles ont déjà étonné tous ceux qui ont eu le bonheur de mener des calculs avec ces objets. En voici trois exemples :

- les formules d'addition ;
- les jolygones ;
- les fractales.

Les formules d'addition

Un nombre complexe correspondant à un point M du cercle de centre O de rayon 1 s'écrit $e^{i\alpha}$, où α est l'angle que fait OM avec l'axe des abscisses. On a : $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$.



La relation $e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ ne fait alors que traduire que la succession des deux rotations d'angles α et β est la rotation d'angle $\alpha + \beta$.

Traduisons cette relation sous forme trigonométrique :
 $(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$.

Le premier membre devient, en développant :
 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$.

Et c'est ce nombre qui vaut aussi $\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$.

On a donc (car dans $a + ib$, les nombres a et b sont les coordonnées d'un point) :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Quand on se souvient de la pénibilité du calcul purement trigonométrique pour établir cette relation, on ne peut qu'être émerveillé de la méthode !

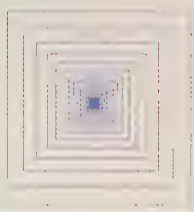
Les jolygones

Les trois dessins représentés page 134 sont obtenus par la même technique de construction :

- on trace un segment horizontal de longueur a ;
- on tourne de l'angle α et on trace dans le prolongement un segment horizontal de longueur ka ;
- et ainsi de suite à chaque extrémité, on tourne de α et on trace le segment suivant de longueur multipliée par k .

Il vaut mieux apprendre les formules trigonométriques, même si l'on est sûr de pouvoir les retrouver rapidement !

Le mot jolygone est une invention (de l'auteur) formée évidemment sur «poly» et «joli».



$$\alpha = 90^\circ \quad k = 0,95$$

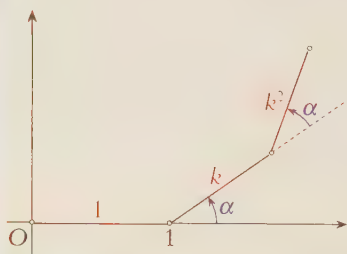


$$\alpha = 115^\circ \quad k = 0,9$$



$$\alpha = 120^\circ \quad k = 0,85$$

En prenant $k < 1$, on s'assure de rester dans les limites de la feuille ; et l'on voit que les segments forment une sorte de spirale semblant tendre vers un point. Peut-on préciser ce point ?



Avec les nombres complexes, ce n'est pas difficile : en effet, si un segment représente le nombre complexe a , alors le segment suivant, qui a tourné de α et a été multiplié par k , est le segment représentant $a \times k e^{i\alpha}$. En appelant z le nombre $k e^{i\alpha}$, l'extrémité du

«jolygone» de n segments est tout simplement associée au nombre $(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) \times a$.

C'est-à-dire au nombre $a \times \frac{1 - z^n}{1 - z}$!

Et lorsqu'on tend vers l'infini, z^n a un module k^n qui tend vers zéro et donc le point vers lequel tend la spirale est le point correspondant à $a \times \frac{1}{1 - z}$.

Dans le premier des cas précédents, si $a = 1$, on trouve :

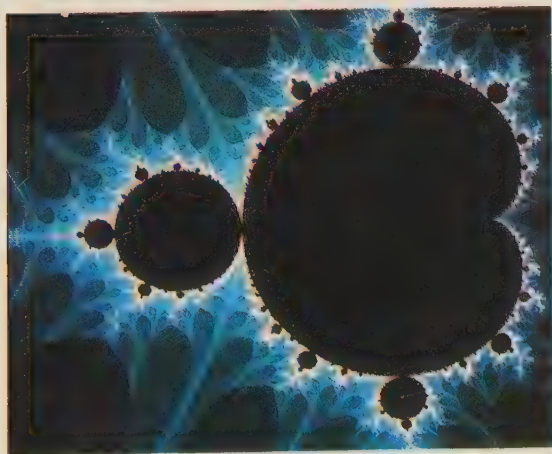
$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - 0,95i} = \frac{1 + 0,95i}{1,9025} \approx 0,53 + 0,5i.$$

Les fractales

Vous avez sûrement déjà vu ces magnifiques coloriations que les mathématiciens appellent « fractales » (parce que leurs frontières sont indéfiniment fractionnées de telle manière que tout agrandissement en montre toujours le même motif et aussi parce que leur extrême découpage amène l'évaluation de leur « dimension » à un nombre fractionnaire compris entre 1 et 2). Leur construction est finalement assez simple si on l'exprime avec le langage des nombres complexes.

Celle qui est dessinée ci-dessous, par exemple, s'obtient à partir de la suite de nombres complexes définie par $z_{n+1} = z_n^2 + K$ (on élève au carré et on ajoute une constante, on élève au carré et on ajoute une constante...); selon la valeur du premier terme z_0 de cette suite, les points représentatifs successifs s'éloignent indéfiniment ou non ; on colorie alors ceux des premiers termes selon qu'ils donnent ou non naissance à des suites qui restent à distance finie.

C'est à la fois beau et intéressant !



Les fractales, dont on trouve les premiers exemples chez Giuseppe Peano (1858-1932), furent systématiquement étudiées par Gaston Julia (1893-1978) et popularisées par Benoit Mandelbrot après 1960.



Les suites de nombres et de fonctions

Comme nous l'avons déjà dit, l'une des avancées principales du XIX^e siècle en mathématiques fut de généraliser les objets de calcul. À partir des nombres, non seulement on apprit à calculer sur les couples de nombres, mais aussi sur des listes (même longues) de nombres, puis même sur des ensembles de points (par exemple, les graphes représentant des fonctions), enfin sur les fonctions elles-mêmes.

Les opérations fondamentales qui apparaissent alors s'appellent des combinaisons linéaires, c'est-à-dire des combinaisons d'additions (les objets sur lesquels porte le calcul peuvent s'additionner) et les multiplications par un nombre (ces objets peuvent être agrandis ou diminués dans un certain rapport).

À titre d'illustration, la pâtisserie donne un exemple d'espace à 7 dimensions dans lequel un point représente un certain gâteau. Ainsi, pour faire une tarte pour huit personnes, que nous nommerons tarte T , il faut 200 g de farine, 100 g de matière grasse, 5 g de sel et 50 cm³ d'eau.

Pour faire un cake de 15 tranches que nous nommerons C , il faut 125 g de sucre, 125 g de matière grasse, 3 œufs, 250 g de farine et 6 g de levure.

À chaque gâteau nous faisons correspondre une colonne de 7 nombres dans un ordre donné : les quantités de farine, de matière grasse, de sucre, de sel et de levure sont exprimées en grammes ; les œufs en unités et l'eau en cm³.

Ingrédients	T	C
farine	200	250
matière grasse	100	125
œufs	0	3
sucré	0	125
sel	5	0
levure	0	6
eau	50	0

Les questions suivantes montrent bien les possibilités représentées par les combinaisons linéaires dans cet espace : que représente $2T$? Comment préparer un cake de 10 tranches ? Le gâteau $3/2 T + 2C$ est-il bon ?...

Les petits comptes de Lewis Carroll

C'est Lewis Carroll (l'auteur d'*Alice au pays des merveilles*) qui popularisa, à la fin du siècle dernier, le jeu, parfois étonnant, des combinaisons linéaires.

Pour une revue londonienne, il publiait régulièrement des «comptes» pour enfants, dans lesquels il posait de petits problèmes pas toujours très simples.

Voici un extrait de ces petits comptes :

«La voix de Clara avait pris le ton plaintif auquel sa tante n'avait jamais su résister, et avec un soupir la vieille dame sortit ses tablettes d'ivoire et se prépara à établir le total de ce que Clara venait de dépenser...

- Voici l'endroit, dit tante Mattie, où hier nous avons pris un bon déjeuner. Un verre de limonade (ne peux-tu boire de l'eau comme moi ?), trois sandwiches (ils ne mettent jamais assez de moutarde. Je l'ai dit carrément à la jeune femme ; et elle a hoché la tête avec une haute impudence !) et sept biscuits. **Total : un shilling et deux pence**. Bien,

Charles Dodgson, alias Lewis Carroll (1832-1898) était mathématicien et logicien. Il a écrit en particulier *Traité élémentaire des déterminants* et un livre de *Logique sans peine*.

Le calcul qui prend naissance chez les algébristes anglais du milieu du XIX^e siècle (et qui est ici exploité par Lewis Carroll) prend le nom de « calcul linéaire ». C'est en effet une généralisation des calculs de proportionnalité associés à la manipulation de fonctions linéaires de type $f(x) = ax$.

maintenant pour le repas aujourd'hui ?...

- **Un verre de limonade, un sandwich, un biscuit...**

Oh, mon Dieu ! s'écria la pauvre Clara ; son ton assuré se changeait brusquement en une plainte d'agonie.

- Mal aux dents ? dit sa tante calmement en écrivant les détails...

- Ce n'est pas cela ! dit la pauvre Clara. Merci beaucoup. C'est seulement que je ne peux pas me souvenir combien j'ai payé !

- Eh bien essaye de le déduire, dit sa tante. Tu as le déjeuner d'hier pour t'aider, vois-tu. Et voici le déjeuner que nous avons pris avant-hier, la première fois où nous sommes allées dans ce restaurant : **un verre de limonade, quatre sandwiches, dix biscuits. Total : un shilling et cinq pence.** Elle tendit les tablettes à Clara qui les considéra d'abord avec des yeux tellement embués de larmes qu'elle ne s'était même pas aperçue qu'elle les tenait à l'envers... »

La nourriture de Clara semble se limiter à trois ingrédients : « limonade, sandwiches, biscuits ».

En notant le triplet (x, y, z) , les quantités consommées de ces ingrédients, le déjeuner d'hier serait noté $(1; 3; 7)$ et vaut 14 pence ; et le déjeuner d'avant-hier serait noté $(1; 4; 10)$ et vaut 17 pence. Comment en déduire le prix du repas d'aujourd'hui soit $(1; 1; 1)$?

Il semble assez évident que la connaissance du prix de deux repas ne suffit pas à déterminer le prix unitaire de chacun des trois ingrédients. Cependant, cela ne signifie pas qu'il soit impossible de trouver le prix de quelques repas particuliers. Par exemple, on voit bien que le repas $(0; 1; 3)$, soit un sandwich et trois biscuits, est la « différence » des deux premiers repas ; son prix serait donc la différence des prix, $17 - 14$, soit 3 pence.

On pourrait encore trouver le prix du repas $(2; 6; 14)$ qui est le double du premier repas ; ce serait évidemment le double de 14, soit 28 pence.

Plus généralement, si on note R_1 et R_2 deux repas et $p(R)$ le prix du repas R , la fonction p a la propriété d'être «linéaire»; c'est-à-dire que : $p(\alpha R_1 + \beta R_2) = \alpha p(R_1) + \beta p(R_2)$.

Le prix d'une combinaison linéaire de repas est exactement la même combinaison linéaire des prix de chaque repas !

Le problème posé par Lewis Carroll consiste donc à trouver deux multiplicateurs α et β tels que :

$$\alpha(1; 3; 7) + \beta(1; 4; 10) = (1; 1; 1).$$

Vous pouvez vérifier que $\alpha=3$ et $\beta=-2$ conviennent.

Le prix du repas $(1; 1; 1)$ est donc de $3 \times 14 + (-2) \times 17$ soit 8 pence !

Les suites et les fonctions

Les possibilités de combinaisons linéaires s'étendent sans difficulté aux triplets de nombres et aux sextuplets, comme on l'a vu en pâtisserie. Mais elles s'étendent aussi aux suites infinies sans aucune difficulté.

Regardons d'un peu plus près les suites «arithmétiques», c'est-à-dire les suites de nombres constituées à partir d'un premier terme en ajoutant un nombre constant.

Par exemple, les suites

$$a = (3, 7, 11, 15, 19, \dots, 4n+3, \dots)$$

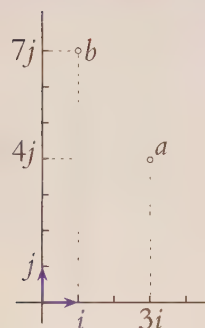
$$b = (1, 8, 15, 22, 29, \dots, 7n+1, \dots) \text{ sont arithmétiques.}$$

Que pouvez-vous dire de la suite $a+b$?

$$a+b = (4, 15, 26, 37, 48, \dots); \text{ et de la suite } -\frac{2}{17}a + \frac{6}{17}b ?$$

(Ici, s'il vous plaît, n'hésitez pas à faire le calcul, la surprise est de taille !)

En fait, en étudiant ces suites, on s'aperçoit rapidement d'un phénomène extraordinaire : toutes les suites arithmétiques sont les combinaisons linéaires de deux suites particulières.



En un certain sens, tous les espaces vectoriels de dimension 2 sont les mêmes et peuvent être représentés par des points de $\mathbb{R}^2$: les suites arithmétiques de $\mathbb{R}$, les translations du plan, les nombres complexes, les combinaisons linéaires de sinus et de cosinus... C'est une des découvertes du XX^e siècle que l'identité de structure rend l'étude des opérations plus importantes que celle des objets sur lesquelles elles opèrent.

Par exemple, des deux suites :

$$i = (1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1 + 0n, \dots) \text{ et } j = (0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 0 + 1n, \dots).$$

En mathématiques, on traduit ce phénomène en disant que ces deux suites forment une « base » de l'ensemble des suites et que cet ensemble est de dimension deux.

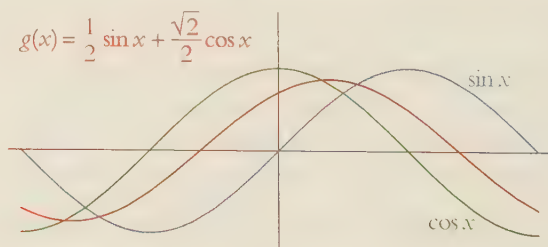
Par exemple, les suites a et b (qui aurait pu le prévoir *a priori*?) s'expriment en fonction des deux suites particulières i et j . Précisément :

$$a = 3i + 4j \text{ et } b = 1i + 7j.$$

De la même façon, on peut combiner linéairement des fonctions. La figure suivante montre, par exemple, la fonction $g : x \rightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$, définie comme combinaison linéaire des fonctions $x \rightarrow \sin x$ et $x \rightarrow \cos x$. On pourrait ainsi noter $g = \frac{1}{2} \sin + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos$, en faisant abstraction de la variable x .

Cette notation, pourtant très naturelle, est souvent mal comprise parce qu'elle est très puissante.

En effet, $g = \alpha f + \beta h$, signifie que, pour toutes les valeurs possibles de la variable x , le nombre $g(x)$ est égal au nombre $(\alpha f + \beta h)(x)$, c'est-à-dire au nombre $\alpha f(x) + \beta h(x)$.



Le nombre d'informations données par une telle formule est donc infini, puisqu'il donne la valeur de g pour toutes les valeurs possibles de x .

Dans ce calcul avec les fonctions, il est très important de se rendre compte que deux des opérations les plus fantastiques,

introduites au lycée chez les fonctions, sont des opérations à caractère linéaire :

– la dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions est en effet la combinaison linéaire des dérivées : $(\alpha f + \beta h)' = \alpha f' + \beta h'$.

– les primitives d'une combinaison linéaire de fonctions sont des combinaisons linéaires des primitives :

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta h(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b h(x) dx.$$

Et ce ne sera pas le moindre des étonnements que de voir les êtres les plus compliqués des mathématiques avancées se plier ainsi à la simplicité du calcul qui les régit.

Comme l'écrivait Évariste Galois à la veille du duel qui allait l'enlever prématurément à notre planète :

« Depuis Euler, les calculs sont devenus de plus en plus nécessaires, mais de plus en plus difficiles à mesure qu'ils s'appliquaient à des objets de science plus avancés.

Du fait bien constaté que les efforts des géomètres les plus avancés ont pour objet l'élégance au moyen de laquelle l'esprit saisit promptement d'un seul coup un grand nombre d'opérations, on peut conclure avec certitude qu'il devient de plus en plus nécessaire d'embrasser plusieurs opérations à la fois, parce que l'esprit n'a plus le temps de s'arrêter aux détails. [...] Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs ; telle est la voie où je suis entré. [...] Il ne faut pas confondre l'opinion que j'émetts ici avec l'affectation que certaines personnes ont d'éviter en apparence toute espèce de calcul, en traduisant par des phrases fort longues ce qui s'exprime très brièvement par l'algèbre, et ajoutant ainsi à la longueur des opérations, les longueurs d'un langage qui n'est pas fait pour les exprimer. Ces personnes-là sont en arrière de cent ans. »

La plus grande nouveauté des mathématiques du lycée, surtout en première et en terminale, s'appelle l'analyse. Ce mot désigne aujourd'hui, en maths, un ensemble de savoirs et de techniques relatif à tout ce qui est « courbe », « continu », « mesures » et qui s'est développé au XVII^e et au XVIII^e siècle comme une sorte de calcul merveilleux. Pour mieux en saisir l'objet, tentons un rapide panorama des problèmes que pose et que résout cette « analyse ».



Les maximums et les minimums

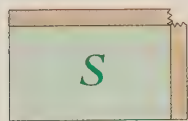
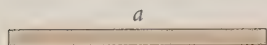
Le premier de ces problèmes est celui de l'optimisation : étant donné une situation définie par certains calculs et formules, comment trouver le maximum et le minimum de telles mesures ou fonctions ? C'est un problème de ce genre que nous vous avons montré dans le premier chapitre de ce « Fil rouge » :



Étant donné une feuille rectangulaire, comment s'en servir au mieux pour contruire une boîte de volume maximum (voir page 76) ? C'est en première que vous apprenez les

méthodes de résolution de ce type de problèmes. Voyons-en la genèse...

Le plus ancien de ces problèmes de maximum est le suivant.



Étant donné un bâton de longueur a , où le sectionner de manière que le rectangle construit sur ces deux morceaux ait l'aire la plus grande possible ?

Autrement dit : quelle est l'aire maximale d'un rectangle de périmètre donné ? (La longueur du bâton est en effet le demi-périmètre du rectangle.)

Penchons-nous un instant sur cette situation qui permit à Pierre de Fermat (vers 1640) d'énoncer le premier algorithme de calcul pour la détermination des maximums et des minimums.

Son argumentation ressemblait à ceci : soit x la longueur d'une des sections et $S(x)$ la surface du rectangle. On a :

$$S(x) = x(a - x) = ax - x^2.$$

Imaginons que cette longueur varie d'une certaine quantité h et devienne $x+h$ au lieu de x . L'aire du rectangle devient :

$$S(x+h) = (x+h)(a-x-h)$$

$$S(x+h) = ax + ah - x^2 - 2xh - h^2$$

$$S(x+h) = ax - x^2 + h(a - 2x - h).$$

La variation de la surface du rectangle est exactement égale à :

$$S(x+h) - S(x) = h(a - 2x - h).$$

Faisons une première remarque importante :

La variation de la surface contient l'accroissement h en facteur : cette surface a donc l'air de varier proportionnellement à l'accroissement h de la longueur x .

Version algébrique du problème traité : étant donné deux nombres de somme donnée, quel est le maximum de leur produit ?

Les mathématiciens du XVII^e et du XVIII^e siècle faisaient énormément de calcul numérique. De sorte qu'ils avaient une bonne intuition des phénomènes en jeu lors d'une approximation. En particulier, lorsqu'ils faisaient des calculs avec beaucoup de décimales, ils s'apercevaient que presque toutes les variations constatées devenaient « linéaires ». Il faudrait vous aussi, dans la mesure du possible, que vous fassiez beaucoup de calcul mental.

En fait, cela n'est pas tout à fait exact car la variation est de $h(a - 2x) - h^2$; cependant, si on se restreint à des nombres h petits, la proportionnalité est pratiquement effective (car h^2 est de l'ordre de $\frac{1}{100}$ quand h est de l'ordre de $\frac{1}{10}$).

Le calcul d'ailleurs montre ce phénomène. Voyez le tableau ci-dessous : il montre comment varie la surface du rectangle lorsqu'on prend un bâton de longueur $a = 20$ cm et qu'on le coupe au voisinage de $x = 5$ cm.

$h = 0$	$S(5) = 75 \text{ cm}^2$	
$h = 0,1$	$S(5,1) = 75,99 \text{ cm}^2$	différence : $0,99 \text{ cm}^2$ (presque 1 cm^2)
$h = 0,2$	$S(5,2) = 76,96 \text{ cm}^2$	différence : $1,96 \text{ cm}^2$ (presque 2 cm^2)
$h = 0,3$	$S(5,3) = 77,91 \text{ cm}^2$	différence : $2,91 \text{ cm}^2$ (presque 3 cm^2)
$h = 0,4$	$S(5,4) = 78,84 \text{ cm}^2$	différence : $3,84 \text{ cm}^2$ (presque 4 cm^2)
$h = 0,5$	$S(5,5) = 79,75 \text{ cm}^2$	différence : $4,75 \text{ cm}^2$ (presque 5 cm^2).

Chaque fois que l'accroissement h est multiplié par un certain nombre, la variation de la surface est aussi à peu près multipliée par ce nombre ; et cela est « d'autant plus vrai » que l'accroissement est petit.

Il est donc assez naturel de considérer l'accroissement relatif de la variation de la surface :

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = a - 2x - h.$$

Quand h est petit, on voit que cet accroissement vaut environ $a - 2x$.

Et on peut résumer ce qui se passe en disant :

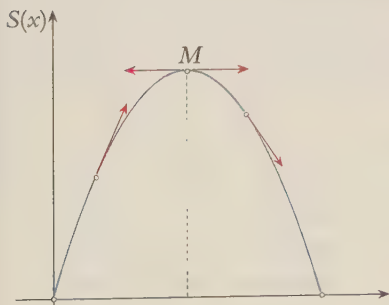
– quand h est petit, l'accroissement de la surface S est proportionnel à h ;

– et le coefficient de proportionnalité vaut $a-2x$.

Voyons donc maintenant la deuxième remarque importante de calcul. Elle est exprimée, le plus joliment, par le grand Newton dans sa *Méthode des fluxions* (écrite en 1666) :

«Une quantité qui est devenue la plus grande ou la moindre qu'il se peut n'augmente ni ne diminue, c'est-à-dire, ne flue ni en avant ni en arrière dans cet instant; car si elle augmente, c'est une marque qu'elle était plus petite et que tout à l'heure elle va être plus grande qu'elle n'était, ce qui est contre la supposition, et c'est le contraire si elle diminue.»

Autrement dit : au voisinage de son maximum, la variation d'une fonction est (quasiment) nulle.



Dans notre exemple, cela revient à dire ceci :

lorsque x réalise le maximum de S , alors la variation $a-2x-h$ est quasiment nulle pour h petit. C'est donc que $a-2x=0$; et donc le maximum de S a lieu pour $x=\frac{a}{2}$, c'est-à-dire lorsqu'on partage le bâton au milieu.

On a bien résolu le problème posé.

Le résultat n'est pas très spectaculaire et aurait certainement pu être trouvé autrement : le plus grand rectangle de périmètre donné est obtenu lorsque ses deux côtés sont égaux.

Mais ce qui est le plus extraordinaire, et qu'a bien obtenu Fermat dès le début, c'est que l'on dispose d'une méthode générale valable pour tous les problèmes d'*extremum*.

Résumons-la : il faut trouver le nombre x qui rend la fonction $S(x)$ extrême.

On a résolu le problème « parmi les rectangles de périmètre donné, quel est celui qui a la plus grande aire ? ». Que pensez-vous du problème « dual » : « parmi les rectangles d'aire donnée, quel est celui qui a le plus grand périmètre ? » ?

- Imaginer un accroissement h de x .
- Calculer alors l'accroissement relatif de S :

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h}.$$

- Rendre l'accroissement h , de x , nul.
- Écrire que l'accroissement relatif de S est alors nul.

Cela donne le nombre x cherché.

Voici donc une technique de calcul presque miraculeuse : elle donne le maximum (ou le minimum) d'une fonction par un calcul mécanique sans véritable difficulté. À l'époque, au XVIII^e siècle, cela avait effectivement émerveillé les mathématiciens qui rencontrèrent et développèrent ce calcul, et qu'ils appelèrent d'abord « calcul infinitésimal ».



Qu'est-ce qui ne va pas ?

Cependant, malgré les succès de cette technique de calcul, il y avait une sérieuse difficulté : si vous avez suivi les arguments du paragraphe précédent, vous avez sûrement été frappé par des expressions comme : « la surface est à peu près multipliée par ce nombre », « cela est d'autant plus vrai que h est petit », « la variation de S est quasiment nulle ».

Des mathématiques cela ? Où est la rigueur dans cette affaire ? Où est l'agencement impeccable des *Éléments* d'Euclide, tant admiré par les géomètres du XVIII^e siècle comme par ceux d'aujourd'hui ?

Que devient le raisonnement logique partant de fondements indéniables pour progresser de propriété en propriété ? Et il y a encore pis ! Bien pis !

Comment peut-on calculer la valeur de la fraction $\frac{F}{h}$ lorsque la valeur de h qui nous intéresse le plus est la valeur zéro ?

Reprenons en effet le calcul précédent.

Il se termine en écrivant $h=0$ dans l'expression $a-2x-h$, laquelle est égale au quotient :

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h}$$

Alors là, cela ne va plus du tout, car si h est un nombre nul, il n'est pas question de le voir apparaître au dénominateur d'une fraction. Ainsi donc, on effectue un calcul contenant un nombre d'abord non nul (puisqu'il est au dénominateur) puis s'annulant à la fin.

C'est par référence à cette situation qui semblait paradoxale que les mathématiciens parlèrent de nombre « infinitésimal » : nombre non nul mais plus petit (en valeur absolue) que n'importe quel nombre « assigné ». Pendant deux siècles, ils ne réussirent pas à rendre logiques les fondements de leur méthode ; au point qu'ils parlèrent (comme Carnot en 1797) de *Métaphysique du calcul infinitésimal*.

Aujourd'hui, on connaît deux moyens logiques de s'en sortir :

- l'un d'eux est fondé sur la notion de limite et a été mis au point par Karl Weierstrass vers 1885 ;
- l'autre est fondé sur la notion d'ordre de grandeur et n'a été découvert par Abraham Robinson que vers 1960.

Curieusement, c'est ce dernier qui est le plus proche des idées du premier calcul infinitésimal. Car il montre, en effet, que la notion de « nombres infinitésimaux » n'est pas une notion paradoxale, c'est-à-dire qu'il trouve le moyen de parler de tels nombres dans un cadre logique, dénué de contradiction.

Ce nouveau cadre théorique, connu sous le nom d'« analyse non standard », permet de parler de nombres petits (ou, si on veut les qualifier ainsi, « très petits » ou « infiniment petits »), de nombres grands et de nombres à notre échelle comme nous le suggère l'intuition que nous avons des ordres de grandeur.

LES TROIS ORDRES

DE GRANDEUR DE L'UNIVERS,

d'après Blaise Pascal (Pensées, 72) :

« Car enfin, qu'est-ce que l'homme dans la nature ? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout. Infiniment éloigné de comprendre les extrêmes, la fin des choses et leur principe sont pour lui invinciblement cachés dans un secret impénétrable, également incapable de voir le néant d'où il est tiré, et l'infini où il est englouti. »

Cette « analyse non standard », comme son nom l'indique, n'est pas celle qui a été enseignée dans les lycées et les universités depuis plus d'un siècle (elle est trop récente pour cela et, si l'on sait aujourd'hui en simplifier l'exposé, on n'est pas vraiment sûr que ses avantages l'emportent pédagogiquement sur ses inconvénients).

La fonction $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

fait correspondre un nombre réel positif à son inverse.

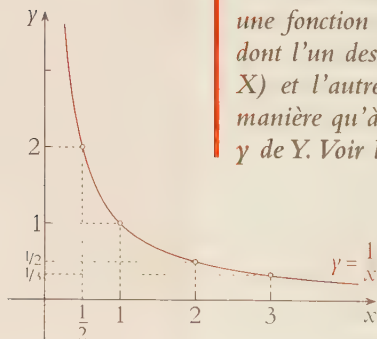
$$\frac{1}{2} \rightarrow 2$$

$$1 \rightarrow 1$$

$$2 \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$3 \rightarrow \frac{1}{3}$$

Son graphe est une hyperbole.



Dans le cadre classique de l'analyse qui vous est enseignée aujourd'hui, l'objet essentiel n'est plus le *nombre* mais la *fonction* : un nombre, en mathématiques, est un élément d'un ensemble : 7, $\frac{21}{4}$, π ou 365,2426... ; s'il « varie » (soi-disant), s'il devient « petit » ou « très grand », c'est qu'il n'est plus un nombre, mais une famille de nombres liés (puisqu'il s'agit non pas d'une valeur mais d'une famille de valeurs); et il ne faudrait plus alors, en toute logique, parler de « nombres » mais d'un concept un peu plus compliqué : le concept de « fonction ».



Le concept de fonction

C'est un concept trompeur car il paraît simple au premier abord : une fonction peut se voir comme un ensemble de couples (x, y) dont l'un des termes x est pris dans un ensemble (dit « source » : X) et l'autre y dans un (autre) ensemble (dit « but » : Y), de manière qu'à un terme x de X ne corresponde qu'un seul terme y de Y . Voir l'exemple en marge.

Mais comme s'en sont aperçus les mathématiciens du XVIII^e et du XIX^e siècle, ce concept de « fonction » cache de grandes (et surprenantes) difficultés...

Le minimum d'une fonction

Prenez par exemple la notion de minimum d'une fonction, qui n'a pourtant pas l'air d'être bien épouvantable : une fonction est minimale en un point lorsque sa valeur y est plus petite que partout ailleurs. Eh bien, on trouvait, dans les années 1970-1980, quelques manuels scolaires de lycées assortis du théorème suivant sur le sujet.

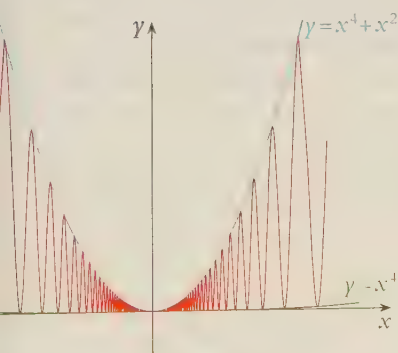
« Si une fonction est minimale en a , alors il existe un intervalle centré en a sur lequel, avant a , elle est décroissante et, après a , elle est croissante » ! ? !

Cet énoncé est tout ce qu'il y a de plus faux comme le montre l'exemple de la fonction, ainsi définie.

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$0 \mapsto 0$$

$$x \mapsto x^4 + x^2 \sin^2 \frac{1}{x} \text{ (pour } x \neq 0 \text{)}.$$

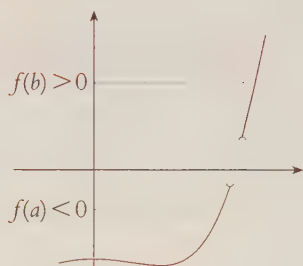
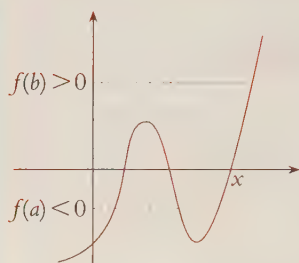


Cette fonction, toujours comprise entre x^4 et $x^4 + x^2$ (puisque le sinus est inférieur à 1 en module) présente un minimum en zéro ; mais, sur tout intervalle autour de 0, elle oscille entre x^4 et $x^4 + x^2$ à cause du comportement de $\frac{1}{x}$ qui (lorsque x s'approche de 0) traverse très rapidement des intervalles de longueur 2π .

La continuité

La notion de continuité, elle aussi, est moins facile à définir qu'il y paraît. Jusqu'au début du XIX^e siècle, cette notion se comprenait par référence à la courbe représentative d'une fonction : la continuité de la fonction restant confondue avec la continuité du trait de crayon supposé tracer la courbe.

La possibilité pour une courbe d'osciller un très grand nombre de fois sur un très petit intervalle ouvre la porte à de fantastiques paradoxes dont nous allons voir quelques exemples.

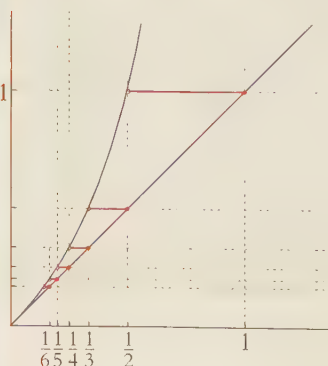


Par exemple, l'énoncé suivant (si utile pour la solution des équations) paraissait « évident » : si f est « continue » entre a et b , si $f(a) < 0$ et si $f(b) > 0$, alors il existe un nombre x tel que $f(x) = 0$.

C'est Bernhard Bolzano qui comprit le premier en 1817 qu'une telle affirmation devait être démontrée. Pour cela, il fallait une vraie définition de la continuité d'une fonction... Heureusement, Augustin Cauchy en ébaucha une dans son cours à l'École polytechnique en 1823. Il y expliquait, et c'est ce que vous devez aussi savoir, qu'une *fonction continue est une fonction qui varie peu lorsque sa variable varie peu*.

Ou, en termes plus choisis, une fonction que l'on pouvait encadrer entre deux valeurs dès lors que sa variable restait elle même entre deux valeurs.

Ainsi, la notion de continuité d'une fonction se trouve moins liée à la notion de « continuité de son tracé » qu'à celle de « variation contrôlée »...



C'est ce que montre l'exemple ci-contre où l'on voit une fonction qui peut être continue en un point (zéro) alors que ce point est un point d'accumulation de ses points de discontinuité !

($\text{int}(a)$ est la partie entière de a .)

La fonction :

$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$0 \mapsto 0$

$x \mapsto \frac{1}{\text{int}(\frac{1}{x})}$

(pour $x \neq 0$)

présente des paliers constants, égaux

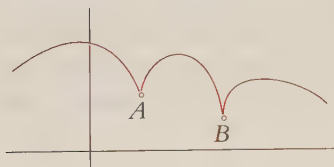
à $\frac{1}{n}$ sur chacun des intervalles

$[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

La dérivabilité

Après la notion de continuité, c'est la notion de dérivabilité qui tint la vedette avec la relation très ambiguë qu'elle entretient avec la longueur d'une courbe (nous en reparlerons plus loin).

Une fonction dérivable en un point est une fonction dont le graphe admet une tangente en ce point.



Bien sûr, une fonction continue en un point peut ne pas y être dérivable : son graphe y présente une espèce de « point anguleux » (comme sur la figure en A et B).

Mais si une fonction est continue tout au long d'un intervalle $[a, b]$ n'est-on pas en droit de penser qu'elle y sera « la plupart du temps » dérivable ?

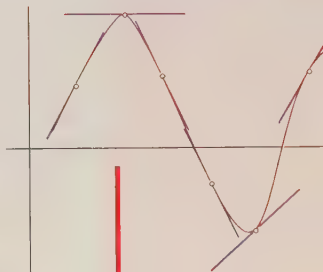
La réponse est désarçonnante : c'est non !

Il peut exister des fonctions continues sur tout un intervalle et qui pourtant ne sont dérivables en aucun point de cet intervalle !

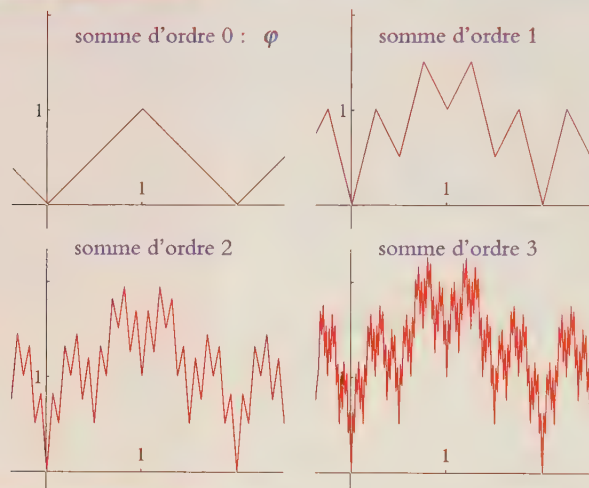
C'est Karl Weierstrass qui en donna un exemple célèbre dans les années 1870 ; il s'agit précisément du graphe de la fonction obtenue en ajoutant toutes les fonctions du type :

$$x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$$

(où $n \in \mathbb{N}$) sur l'intervalle $[0, 2]$, et où φ est la fonction égale à x sur $[0, 1]$ et à $2 - x$ sur $[1, 2]$, par ailleurs périodique et de période 2.



Lorsqu'une fonction est dérivable en un point, son graphe y présente une direction.



La figure ci-contre montre les quatre premières étapes de la construction du graphe de cette fonction. On y voit (assez bien) le phénomène qui est à l'origine du paradoxe : on fabrique une suite de fonctions dont le graphe oscille de plus en plus verticalement sur des longueurs de plus en plus petites ; de sorte que, «à la limite», la fonction obtenue semble en tout point se comporter comme une

verticale (mais pas complètement afin d'assurer la continuité horizontale des points adjacents les uns aux autres).

Il faut un peu de réflexion et d'habitude pour saisir la richesse de telles situations. Heureusement, aujourd'hui, les ordinateurs nous ont un peu familiarisés avec ces images déroutantes que les mathématiques offrent à nos yeux éblouis (voir page 135 par exemple).

On peut imaginer des courbes dont les variations autour d'un point sont peu importantes mais dont les directions sont très agitées autour de ce point. C'est l'étude de ces courbes qui permet de mettre au point une bonne définition des fonctions et de leurs « comportements » au voisinage d'un point.

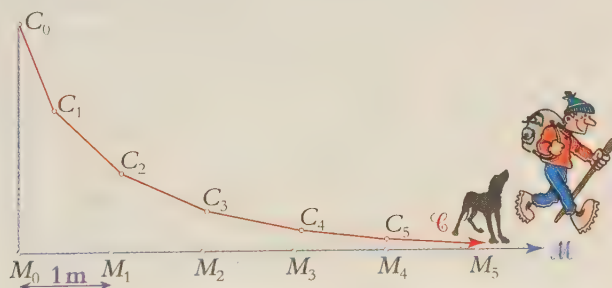
La courbe du chien

Mais avant même les notions de dérivabilité et de continuité, c'est celle de limite qui doit être précisée. Voyons-en les éléments caractéristiques sur l'exemple d'une courbe étudiée par les mathématiciens grâce et autour desquels est d'abord né le concept de fonction vers 1710.

À la fin de l'un des premiers printemps du début du XVIII^e siècle, le mathématicien suisse Jean Bernoulli contem-

plait, du sommet d'une petite dune, le spectacle des vagues venant mourir sur une longue plage de l'océan Atlantique. Il fut distrait par le jappement d'un chien courant après son maître. Ce dernier avançait d'une foulée régulière, toujours à la même vitesse et dans une direction constante. Le chien, un peu à gauche de son maître, infléchissait toujours sa trajectoire de manière que chacun de ses pas le dirige vers l'extrémité du dernier pas de son maître.

Bien évidemment, si le chien va plus vite que le maître, il va le rattraper quelque part. Mais la trajectoire du chien, lorsqu'il court à la même vitesse que son maître, est beaucoup plus intéressante. C'est cette trajectoire que Bernoulli étudia sous le nom de **courbe du chien**.

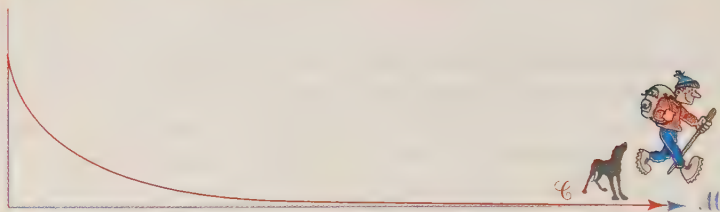


La définition mathématique de cette courbe utilise des fonctions inaccessibles aux calculatrices des lycéens. Mais cela n'empêche pas d'énoncer certaines propriétés pertinentes, en particulier sur le comportement de la courbe au bout d'un temps très grand.

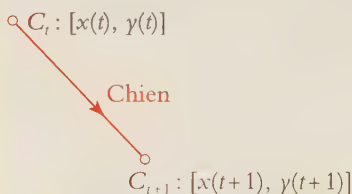
On constate que le chien se rapproche de plus en plus de la droite M suivie par le maître. On peut aussi constater que le chien se rapproche de plus en plus de son maître.

Mais attention, il y a une différence ! Le chien qui va à la même vitesse que le maître en restera toujours à une certaine distance, alors qu'il se rapprochera, à la longue, aussi près qu'on le voudrait de la droite M .

Les frères Bernoulli, Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748) participèrent très largement à la diffusion du « nouveau calcul » de Leibniz.



On peut étudier, pas à pas, la courbe du chien, en supposant que, sur l'axe des abscisses, le maître parcourt 1 mètre par seconde et part de M_0 , le chien partant de C_0 à la même vitesse. Au temps t , le maître est en M_t , de coordonnées $(t, 0)$ et le chien au point C_t de coordonnées $(x(t), y(t))$.



Entre t et $t+1$, le chien va de C_t à C_{t+1} , le maître de M_t à M_{t+1} ; et le chien, intelligent, se dirige vers M_{t+1} .

On a donc :

$$\overrightarrow{C_t C_{t+1}} = k \overrightarrow{C_t M_{t+1}}$$

Le facteur k est tel que la distance $C_t C_{t+1}$ est égale à 1.

$$\text{D'où : } \overrightarrow{C_t C_{t+1}} = \frac{1}{C_t M_{t+1}} \cdot \overrightarrow{C_t M_{t+1}}$$

$$C_t M_{t+1} = d(t) = \sqrt{[(t+1) - x(t)]^2 + y(t)^2}$$

$$x(t+1) = x(t) + \frac{t+1-x(t)}{d(t)}$$

$$y(t+1) = y(t) + \frac{y(t)}{d(t)}$$

Le tableau page 155 donne le résultat des calculs, lorsque le maître avance de 1 mètre à chaque pas et que le chien part 5 mètres à sa gauche.

L'équation «aux différences» ci-contre peut se résoudre numériquement pas à pas. En remplaçant $t+1$ par $t+dt$ (ou dt est infinitésimal) Jean Bernoulli en fit une équation «différentielle» qu'il s'efforça de résoudre analytiquement.

t	$d(t)$	$x(t)$	$y(t)$
0	5	0	5
1	5,099	0,196	4,019
2	4,405	0,605	3,107
3	3,923	1,216	2,315
4	3,620	1,985	1,675
5	3,449	2,859	1,190
6	3,359	3,794	0,836
7	3,313	4,761	0,583
8	3,210	5,746	0,406
9	3,279	6,738	0,282
10	3,274	7,734	0,196
11	3,271	8,733	0,136
12	3,270	9,732	0,094
13	3,269	10,731	0,066
14	3,269	11,731	0,046
15	3,269	12,731	0,032

L'ordonnée du chien

Que devient l'ordonnée $y(t)$ du chien lorsque le temps t augmente indéfiniment (les hypothèses mathématiques supposent qu'aucun des deux acteurs ne se fatigue) ? On le constate sur le tableau de calculs : elle devient de plus en plus petite.

Pour le dire autrement, l'ordonnée $y(t)$ tend vers 0 lorsque t augmente indéfiniment, c'est-à-dire qu'on est sûr qu'elle deviendra plus petite que n'importe quelle distance donnée *a priori* (à condition d'attendre assez longtemps).

Depuis 1785, avec Simon Lhuillier (1750-1840), on écrit cette information de manière un peu compliquée mais bien précise : $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$, et on lit « la limite, pour t infini, de $y(t)$ vaut zéro ». L'emploi du mot « infini » ne doit ici ni faire peur ni induire en erreur : le maître ne va pas à l'infini, le chien non plus. Graphiquement, cela signifie simplement que, à condition que votre feuille de papier soit assez grande et quelle que soit la finesse de votre crayon, le dessin de la courbe C finira par ne plus se distinguer du dessin de la courbe M .

La distance chien-maître

Comme le montre aussi le tableau de calcul, le chien se rapproche de plus en plus de la trajectoire du maître. Après un temps très long, il est pratiquement « sur » la trajectoire du maître, à une certaine distance derrière lui. On comprend que cette distance entre le chien et le maître diminue de moins en moins pour se stabiliser pratiquement à une certaine valeur. Dans le cas de la figure étudiée ici, il semblerait que cette valeur soit un nombre dont les premiers chiffres de l'écriture décimale soient 3,269.

« C'est une ligne qui, étant indéfiniment prolongée de manière que sa distance à cette ligne ne devient jamais zéro absolu, mais peut toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée. »
Article « Asymptote » de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert.

Autrement dit, «pour un temps très grand, la distance chien-maître est très proche d'une certaine longueur L (et très peu supérieure à L) ; on dit aussi, «la limite, pour t infini, de la distance chien-maître vaut une certaine distance L », et on écrit $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = L$.

Attention : la notation « $x \rightarrow +\infty$ » n'a pas de sens toute seule. Voir, page 165, pourquoi il faut nécessairement lui associer une autre occurrence du signe « $\rightarrow$ ». Ici on a : « $d(t) \rightarrow L$ quand $t \rightarrow +\infty$ ».

Sur l'exemple précédent de la «courbe du chien», on a bien vu comment interviennent les deux conceptions relatives à la notion de limite.

- L'une des conceptions, la plus spontanée, réfère à l'idée de *rapprochement indéfini mais jamais réalisé* ; c'est ce qu'évoque Victor Hugo dans une phrase très adaptée aussi à la situation du chien et du maître que l'on rencontre fréquemment en analyse : «La science est asymptote à la vérité, elle l'approche sans cesse et ne la touche jamais.»

- L'autre conception est plus pragmatique et l'intervention de «l'infini» y est cachée sous une dialectique, dont nous reparlerons un peu plus loin, et qui peut s'exprimer ainsi : «quelle que soit la précision de nos mesures, les choses finissent par se passer comme si la limite était pratiquement atteinte».

Nous allons voir comment ces conceptions se sont historiquement mises en place.

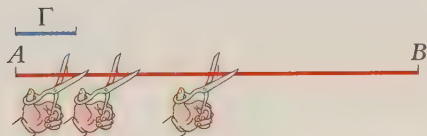


La dialectique des limites

Une proposition d'Euclide

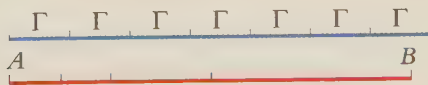
La première (et magistrale) démonstration relative à la notion de limite se trouve au début du dixième livre des *Éléments* d'Euclide :

Soit deux grandeurs inégales AB et Γ , la grandeur AB étant la plus grande. Si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié et qu'on fasse toujours la même chose, alors on arrivera à une grandeur plus petite que la grandeur Γ .



À force de découper la moitié (ou plus) d'un segment, on arriverait donc à une longueur plus petite que toute longueur donnée à l'avance.

Cette propriété semble être tout à fait intuitive et ne semble pas réclamer de démonstration. Mais, justement, ce qui est remarquable chez Euclide, c'est qu'il lie cette propriété à une autre, tout aussi intuitive, mais en quelque sorte duale : à force de reporter la longueur donnée Γ , on arrivera à dépasser n'importe quelle longueur donnée à l'avance.



Les mathématiciens modernes ont donné à cette propriété un statut d'axiome relatif aux nombres réels, qu'ils nomment « axiome d'Archimède ».

Voici l'argument résumé d'Euclide pour démontrer que la première propriété découle mathématiquement de la seconde : puisque la longueur Γ doit être au moins doublée pour dépasser AB , c'est que, en diminuant le segment AB d'une moitié, on perd plus en longueur qu'en le diminuant de Γ ; et cela peut être répété au moins jusqu'à ce qu'on arrive à la « dernière » étape.

C'est bien là, en effet, que commence le génie géométrique grec : expliciter la liaison logique entre deux intuitions qui paraissent d'abord indépendantes, parce qu'imposées par des faits.

En première lecture, on a l'impression que l'énoncé d'Archimède affirme une propriété arithmétique :

« Si a est plus petit que b , il y a un multiple de a plus grand que b . »
On voit bien ici pourquoi cet énoncé est, en fait, le premier et le plus simple des énoncés d'analyse : c'est l'affirmation d'une majoration pour b .



Donc, en divisant AB par deux, autant de fois qu'il faut reporter Γ pour dépasser AB , on obtient un segment plus petit que Γ .

Autrement dit, s'il faut reporter n fois Γ pour dépasser AB , on a $n\Gamma > AB$, et aussi $\frac{AB}{2^n} < \Gamma$.

En analysant aujourd'hui cette démonstration vieille de 2400 ans, on reconnaît dans la démarche d'Euclide deux intuitions épistémologiquement fondamentales.

Première intuition

Il y a une liaison entre la notion d'infini et la notion de limite finie, telle que la traduit Euclide en imaginant un processus de découpage potentiellement infini.

Précisément, la propriété d'Archimède :

« Pour tout Γ , il existe une valeur de n au-delà de laquelle $n\Gamma$ dépasse tout nombre (AB) donné à l'avance » traduit exactement la phrase « $n\Gamma$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini », en abrégé : $\lim n\Gamma = +\infty$.

C'est de cet énoncé qu'Euclide déduit donc ce que nous notons aujourd'hui : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, c'est-à-dire « il existe une valeur de n au-delà de laquelle $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ devient inférieur à tout nombre positif donné à l'avance ».

Deuxième intuition

La manière dont il exprime cet énoncé traduit la deuxième intuition : il est possible de définir la notion de **limite** sans référence **explicite** à l'infini lui-même.

Et c'est bien ainsi que fera Karl Weierstrass, en 1865, lorsqu'il donnera la définition tant recherchée depuis des siècles :

Dire que la suite de nombres U_n admet pour limite zéro, c'est dire que «pour tout ε positif, il existe un entier N , tel que, lorsque n dépasse N , les nombres U_n sont, en valeur absolue, inférieurs à ε ».

C'est cette définition qui est devenue aujourd'hui la définition classique d'une limite.

Curieusement pourrait-on croire, cette définition semble évacuer la notion d'infini ou d'indéfini. Mais c'est une illusion, un artifice. Il est bien vrai que la situation décrite semble statique : dire que U_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, c'est dire en effet ceci : pour un nombre ε donné, 1/1 000 par exemple, on peut trouver une valeur de n au-delà de laquelle U_n est inférieur à ce 1/1 000 (c'est-à-dire inférieur à ε).

Où se cache ici l'infini ?

Dans la dialectique entre ε et n : car on pourrait prendre un nombre ε plus petit, un milliardième par exemple, et ce serait alors une autre valeur de n (bien plus grande) qu'il faudrait prendre pour que U_n soit inférieur à ce milliardième. Et l'on pourrait encore prendre un ε plus petit. Et ainsi de suite...

Ce schéma, finalement assez astucieux, ne fut donc véritablement mis en œuvre dans les démonstrations d'analyse que deux siècles après son utilisation par des mathématiciens qui ne savaient pas poser les définitions précises justifiant leurs calculs pourtant très efficaces.

Mais cela ne les empêchait pas d'avoir des idées assez claires sur le sujet...

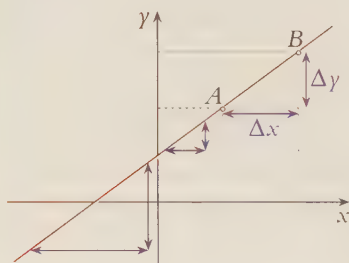
C'est dans ses cours de l'université de Berlin dans les années 1860-1870 que Karl Weierstrass (1815-1897) mit au point le discours didactique sur les limites que nous connaissons et enseignons aujourd'hui.

Comment peut-on s'intéresser à une droite soi-disant « finalement » définie par un seul de ces points ? Puisque c'est au moment où B arrive en A que la droite (AB) nous intéresse ! C'est toute la prouesse du langage des limites que de surmonter cet apparent paradoxe.

La pente de la tangente à une courbe

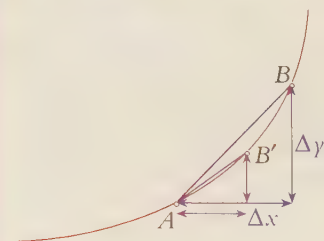
Lorsque Isaac Newton, par exemple, veut déterminer la « tangente » à une courbe, il se trouve confronté à un problème très désagréable. Examinons pourquoi :

- Déterminer la pente d'une droite ne pose pas de difficultés.



Sur la figure ci-contre, on mesure les déplacements horizontaux et verticaux (Δx et Δy) et on calcule le quotient $\Delta y / \Delta x$. C'est ce quotient qui est la « pente » de la droite ; la valeur de ce quotient reste la même quelle que soit l'amplitude des déplacements (petits ou grands) sur la droite.

- Dans le cas d'une courbe, il se passe quelque chose d'irritant, dont nous allons vite nous apercevoir... Soit à déterminer



la tangente au point A , à une courbe. On peut déterminer la pente de la sécante (AB) : c'est le quotient $\Delta y / \Delta x$. On imagine que le point B sur la courbe se rapproche du point A : au point B' , par exemple, la pente de la sécante devient un autre quotient.

Lorsque le point B tend vers A , la sécante (AB) tend vers une position limite qui est la tangente en A : la pente de cette tangente est la limite du quotient $\Delta y / \Delta x$ quand B tend vers A , c'est-à-dire quand Δx tend vers zéro. Le truc irritant, c'est que juste au moment précis où il faut le calculer, le quotient $\Delta y / \Delta x$ a un dénominateur qui s'annule (et alors le numérateur s'annule donc aussi).

Heureusement, dans la pratique, il se produit une heureuse simplification qui rend souvent le calcul de ce quotient possible, ou bien c'est justement la notion de limite qui permet de s'en sortir. Il n'empêche que, conceptuellement, il y a une espèce de paradoxe à surmonter.

Les conceptions de Newton et des autres

Voici, par exemple, ce qu'en écrivait Newton vers 1665 dans l'exposé de sa méthode des premières et dernières raisons (*), extrait des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (édités en 1687) :

« On peut objecter qu'il n'y a aucune proportion derrière des quantités évanouissantes : puisque, avant qu'elles s'évanouissent, leur proportion n'est pas la dernière et que, lorsqu'elles sont évanouies, leur proportion n'est plus. Mais on peut également soutenir par le même raisonnement qu'un corps qui parvient en un lieu déterminé n'a pas de dernière vitesse, quand son mouvement s'achève : en effet, avant qu'il atteigne le lieu, il n'a pas de dernière vitesse et quand il l'atteint, il n'en a plus aucune.

Mais la réponse est facile : par « dernière vitesse », il faut entendre la vitesse à laquelle le corps se meut, non pas avant qu'il atteigne son dernier lieu et que son mouvement cesse, ni après, ni avant, mais au moment même où il l'atteint : c'est-à-dire la vitesse même à laquelle le corps atteint le dernier lieu et cesse de se mouvoir. De même, par « dernier quotient » des quantités évanouissantes, il faut comprendre le quotient qu'ont ces quantités, non pas avant de s'évanouir ni après mais celui avec laquelle elles s'évanouissent [...] En fait, les derniers quotients avec lesquels ces quantités s'évanouissent ne sont pas les véritables quotients des dernières quantités mais les limites dont s'approchent toujours les quotients des quantités qui décroissent sans limite ; et, de ces limites, elles peuvent approcher à une distance moindre que n'importe quelle différence donnée. Par la suite donc, quand je parlerai de quantités aussi petites que pos-

(*) Quand Newton parle de « raison » (ratio, en latin), il faut comprendre « quotient ».

Pour les mathématiciens de la fin du XVIII^e siècle, une courbe est un assemblage de segments infiniment petits : la tangente à une courbe en un point A n'est que le prolongement du segment infiniment petit passant par A.

sible, évanouissantes ou dernières, parce que j'ai soin de rendre mon propos facile à concevoir, qu'on se garde bien de comprendre par là des quantités déterminées par leur grandeur, mais qu'on pense toujours qu'elles doivent diminuer sans limite. »

Newton, comme on le voit, faisait comme si tout se déroulait dans le temps et fondait son intuition sur le **mouvement** des choses.

Au contraire, Leibniz et Jean Bernoulli préféraient une vision plus statique et parlaient de choses **infiniment petites**, susceptibles de se substituer les unes aux autres ; ainsi, sous leur dictée, s'exprimait par exemple le marquis Guillaume de l'Hospital en 1696 :

« On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite. »

« On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entre eux la courbure de la ligne. »



En fait, au XVIII^e siècle, personne ne savait dire ce qu'était une « limite » sans l'utilisation ou bien de ces sacrés **infiniment petits**, ou bien du **temps** permettant aux choses de se **rapprocher**, ce qui n'est pas très mathématique.

Voyez, par exemple, ce que l'on trouve dans la *Grande Encyclopédie* de d'Alembert (1784) à l'article « Infini » :

« La quantité infinie est proprement celle qui est plus grande que

toute grandeur assignable ; et comme il n'existe pas de telle quantité dans la nature, il s'ensuit que la quantité infinie n'est proprement que dans notre esprit, et n'existe que par une sorte d'abstraction, dans laquelle nous écartons l'idée de bornes... Une grandeur qui n'est pas susceptible d'augmentation sans fin, non seulement demeure toujours finie, mais ne saurait jamais passer une certaine grandeur finie ; au lieu que la grandeur susceptible d'augmentation sans fin demeure toujours finie, mais peut être augmentée jusqu'à surpasser telle grandeur finie que l'on veut. »

Et à l'article « Limite » :

« On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près qu'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer sans pourtant que la grandeur, qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable.

Par exemple, supposons deux polygones, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un cercle. Il est évident que l'on peut en multiplier les côtés autant que l'on voudra ; et, dans ce cas, chaque polygone approchera toujours de plus en plus de la circonférence du cercle, le contour du polygone inscrit augmentera, et celui du circonscrit diminuera ; mais le périmètre ou le contour du premier ne surpassera jamais la longueur de la circonférence, et celui du second ne sera jamais plus petit que cette même circonférence ; la circonférence du cercle est donc la limite de l'augmentation du premier polygone et de la diminution du second. »

À la fin du siècle qui précède l'élucidation de cette affaire de limite, Lazare Carnot résumait très bien la situation dans sa *Métaphysique du calcul infinitésimal* (1796) :

« Il n'est aucune découverte qui ait produit dans les sciences mathématiques une révolution aussi heureuse et aussi prompte que celle de l'analyse infinitésimale ; aucune n'a fourni des

Lorsqu'on parle de limite, il n'y a plus, raisonnablement, d'« infiniment petits » : ce sont des minora-tions (« plus petit que... ») ou des majorations (« plus grand que... ») qui apparaissent dans l'argumenta-tion.

moyens plus simples ni plus efficaces pour pénétrer dans la connaissance des lois de la nature. En décomposant, pour ainsi dire, les corps jusque dans leurs éléments, elle semble en avoir indiqué la structure intérieure et l'organisation ; mais, comme tout ce qui est extrême échappe aux sens et à l'imagination, on n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de ces éléments, espèces d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités, tantôt doivent être traités comme absolument nuls, et semblent, par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant.

Heureusement, cette difficulté n'a pas nui au progrès de la découverte : il est certaines idées primitives qui laissent toujours quelque nuage dans l'esprit, mais dont les premières conséquences, une fois tirées, ouvrent un champ vaste et facile à parcourir.

Telle a paru celle de l'infini, et plusieurs géomètres en ont fait le plus heureux usage, qui n'en avaient peut-être point approfondi la notion ; cependant, les philosophes n'ont pu se contenter d'une idée si vague : ils ont voulu remonter aux principes, mais ils se sont trouvés eux-mêmes divisés dans leurs opinions, ou plutôt dans leur manière d'envisager les objets. »

Le langage des limites

Par commodité, nous allons parler, dans ce paragraphe, le langage de l'analyse non standard. C'est-à-dire que nous faisons comme s'il existait 3 classes de nombres : les très petits, ceux qui sont à notre échelle et les très grands. Vous verrez que cela permet une tournure d'expression plus naturelle que le langage des limites (que nous reprendrons pour exprimer les conclusions). Cependant, si vous souhaitez, vous aussi, pouvoir employer ces mots dans un cadre mathématique, il vaut mieux d'abord consulter les ouvrages qui vous en enseignent la théorie ; car les pièges sont aussi nombreux que les bonnes intentions...

Ainsi donc, ce n'est qu'au XIX^e siècle que l'on vit se préciser mathématiquement la définition de la limite d'une fonction.

« L'analyse non standard » est née en 1960. Son apparition montre que la recherche mathématique est extrêmement vivante et qu'il est encore possible aujourd'hui de révolutionner les conceptions et les méthodes d'un très large domaine mathématique.

Encore faut-il être clair sur ce qui est défini... On sait aujourd'hui donner un sens à des phrases comme :

- « pour n infini, la limite de U_n est zéro » ;
- « U_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini » ;
- « $f(x)$ tend vers 1, quand x tend vers 0 ».

Cette dernière phrase, par exemple, signifie exactement ceci : « Pour tout nombre positif ε donné, il existe une valeur de x (suffisamment petite) qui assure que, dès que $|x|$ lui est inférieure, $f(x)$ reste encadrée entre $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$. »

Cette définition opérationnelle donne des moyens de démonstration dont nous allons fournir un exemple. Mais, auparavant, nous attirons votre attention sur la phrase suivante : « $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0 ». Cette phrase est composée d'une proposition principale, d'une conjonction de subordination et d'une proposition coordonnée.

Contrairement à l'habitude grammaticale française, la proposition principale « $f(x)$ tend vers 1 » n'a pas de sens toute seule. C'est la phrase toute entière qui a un sens mathématique avec ses deux verbes « tendre ». La dialectique du discours des limites n'a aucun sens si on en isole un morceau.

Un exemple :

Examinons maintenant l'exemple d'une limite intéressante, non triviale, montrant comment mettre en œuvre la définition mathématique (cohérente et classique) des limites.

Il s'agit de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}$ sauf en zéro, où le dénominateur s'annule.

($x \mapsto \sin x$ est la fonction qui au nombre x fait correspondre le sinus de l'angle x en radians).

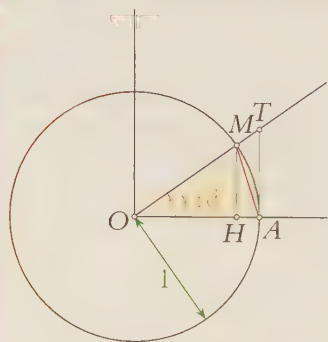
Quelle est la limite de cette fonction en zéro ? Le problème semble *a priori* insurmontable : pourra-t-on trouver un

La langue des limites est une « langue de bois » : le début d'une phrase implique une fin très standardisée. Ainsi, l'expression « x tend vers zéro » ne veut rien dire. Si poussé par une idée dangereuse, vous pensez que « x tend vers zéro » pourrait signifier « x est infiniment près de zéro » ou « x peut être plus petit que n'importe quel nombre donné », vous devez vous corriger ; en effet, cette dernière phrase ne signifie pas autre chose que « x est nul » tout simplement.

nombre L ayant la propriété suivante : quel que soit ε pour tout point x suffisamment petit, on peut rendre $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ coincé entre $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$?

En fait, il n'est pas vraiment compliqué de montrer que $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ reste bien coincé tout près du nombre 1 lorsque x reste suffisamment petit.

Regardons, en effet, la figure ci-dessous.



L'aire du secteur $\widehat{OAM}$ est mesurée par le nombre $\frac{1}{2}x$. Or cet alignement est compris entre l'aire du triangle OAM (qui vaut : $\frac{1}{2} MH \times OA = \frac{1}{2} \sin x$) et l'aire du triangle OAT (qui vaut $\frac{1}{2} OA \times AT = \frac{1}{2} \tan x$).

On a donc :

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$\text{Et, à l'inverse, pour } x \text{ positif : } \frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{soit } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

La valeur $\frac{\sin x}{x}$ est donc coincée entre $\cos x$ et 1.

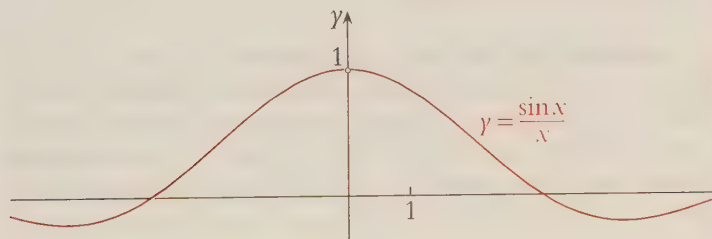
Or, on sait que lorsque x tend vers 0, $\cos x$ tend vers 1. On peut donc affirmer que quel que soit ε positif, pour x suffisamment petit, $\left| \cos x \right|$ est coincée entre $1 - \varepsilon$ et 1. C'est donc aussi le cas pour $\frac{\sin x}{x}$.

Voilà donc une fonction $\frac{\sin x}{x}$ bien définie autour de zéro et qui n'est pas définie pour x égale 0.

Exprimer les angles en radians a plus d'un avantage : les longueurs d'arcs et les aires de secteurs s'expriment alors facilement; elles sont proportionnelles au rayon du cercle et à l'angle, avec comme coefficients respectifs 1 et 1/2.

En ce point, elle s'écrirait $\frac{0}{0}$ (énormité sans signification !). Mais, dans ce cas particulier, on a montré que sa limite, quand x tend vers zéro, est le nombre 1.

On pourrait donc faire ce que l'on appelle « la prolonger par continuité » ; c'est une des applications des limites que de pouvoir réaliser un tel prolongement lorsque certaines fonctions s'y prêtent.



Le graphe de la fonction définie par $y = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ se prolonge par continuité au point $(0; 1)$.

Le fait que $\frac{\sin x}{x}$ soit très voisin de 1 lorsque x est petit entraîne que $\sin x$ est très voisin de x quand x est petit (attention la réciproque de cette implication n'est pas vraie dans le cas général). Cela évidemment lorsque x est exprimé en radians. Lorsque l'angle est exprimé en degrés, il est parfois utile de savoir que $\sin x$ est un nombre voisin de $\frac{x}{60}$.



Les deux grands problèmes du début de l'analyse

Avec les pentes des tangentes et avec l'exemple de la fonction que nous venons d'étudier, nous avons rencontré l'un des premiers et des plus importants problèmes qui marquent l'entrée du domaine de l'analyse mathématique : l'étude d'un quotient du type « $\frac{0}{0}$ » ou, moins abruptement, du type $\frac{u}{v}$ lorsque les nombres u et v tendent tous les deux vers zéro dans les mêmes conditions.

Pour Zénon d'Élée (500 av. J.-C.) le mouvement ne peut pas exister ! Il s'agit évidemment d'une position philosophique qui semble ne pas résister à l'école des faits : s'il avait raison, les trains arrivant en gare passeraient leur temps à ralentir en s'approchant de plus en plus de l'arrêt mais sans jamais s'arrêter vraiment ni arriver.

Un deuxième grand problème se rencontre lorsqu'on prétend additionner une immense quantité de très petits nombres ou, plus abruptement, une infinité de choses presque nulles. En très bref et de manière provocante : « $\infty \times 0$ ».

« L'infini fois zéro ! »

Toute une histoire, qui commence, elle aussi, il y a 2 500 ans en Méditerranée.

Achille et Zénon

Un demi-millénaire av. J.-C., à Athènes, le philosophe grec Parménide fonda une école où vinrent se rencontrer et réfléchir ses compatriotes. Il était né à Élée en Grande Grèce, au sud de l'Italie. Le plus brillant de ses élèves s'appelait Zénon. Il avait le don de mettre en scène de petites histoires qui parlaient de l'Être, du Temps, de l'Espace et du Mouvement.

Voici comme en parle l'écrivain argentin Jorge Luis Borges, dans *La Course perpétuelle d'Achille et de la Tortue*.

« Par tout ce qu'implique le mot "joyau", petitesse précieuse, délicatesse sans fragilité, très grande facilité de transport, limpidité qui n'exclut pas l'impénétrable, je ne connais pas de meilleure qualification pour le paradoxe d'Achille, si indifférent aux réfutations décisives qui l'anéantissent depuis vingt-quatre siècles que nous pouvons bien le saluer comme immortel. Les visites répétées du mystère qu'une telle perpétuité postule, les exquises ignorances auxquelles il invita l'humanité sont autant de générosités dont nous ne pouvons manquer de lui savoir gré. »

Ce joyau des paradoxes, en voilà l'énoncé, comme le décrit Aristote dans sa *Physique* (livre VI) : « Le plus lent à la course ne sera jamais rattrapé par le plus rapide : car celui qui poursuit doit toujours commencer par atteindre le point d'où est parti le fuyard, de sorte que le plus lent a toujours quelque avance. »

Racontons cette histoire avec plus de détails : Achille, symbole de rapidité, veut rattraper la tortue, symbole de lenteur.

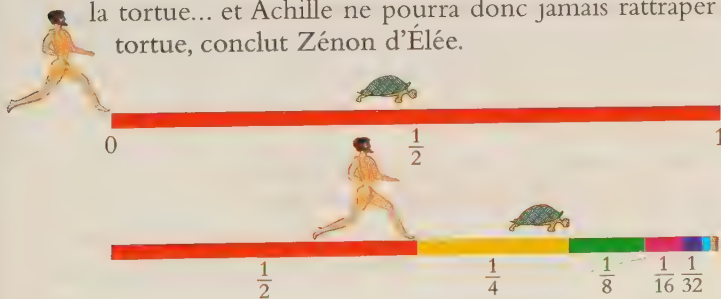
Supposons qu'il court deux fois plus vite qu'elle. Sur la piste $[0; 1]$, Achille part de 0 et la tortue de $\frac{1}{2}$.

Premier «temps» : Achille atteint le point d'où est parti la tortue $\frac{1}{2}$; mais la tortue est alors $\frac{1}{4}$ plus loin.

Deuxième «temps» : Achille atteint le point où était la tortue à la fin du premier temps $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; mais la tortue est alors $\frac{1}{8}$ plus loin.

Troisième et autres «temps» : à chaque instant où Achille atteint le point où était la tortue l'instant précédent, celle-ci est déjà un peu plus loin...

Il faudra **donc** à Achille une infinité d'instants pour rattraper la tortue... et Achille ne pourra donc jamais rattraper la tortue, conclut Zénon d'Élée.



Personne n'est dupe, bien sûr ; l'expérience, s'il en fallait une, montre qu'Achille rattrape bien la tortue. Mais il y a dans cette histoire une mise en scène générale et qui ressort du meilleur théâtre, de celui que l'on peut jouer encore deux millénaires et demi plus tard.

Car il est toujours possible d'agencer les mots d'une langue de manière à émouvoir, à faire rire ou à étonner ses interlocuteurs (et soi-même) ; les paradoxes qui peuvent en naître ne sont pas inquiétants : c'est la vocation de la langue que de montrer l'affrontement contradictoire des thèses, alors qu'une autre manière de parler peut en adoucir l'aspect jusqu'à contourner la contradiction.

Il faut se méfier des « donc » un peu hâtifs dans les inductions généralisantes fondées sur des « etc. » ou des « ... ».
La mésaventure racontée ci-contre en est le meilleur exemple.

Que disent alors, sur ce point, les mathématiques et quel sens propose leur discours pour que notre intuition soit satisfaite ?

Ceci : il s'agit en fait d'ajouter une infinité de durées. Dans l'exemple choisi, ces durées sont exactement $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ et l'histoire racontée veut faire croire que la somme d'une infinité de durées est une durée infinie.

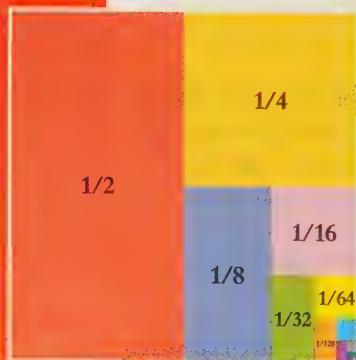
« Mathématiquement », l'erreur est la suivante : la somme d'un très grand nombre de nombres n'est pas forcément très grande ; en effet, si ces nombres sont très petits, leur somme totale peut très bien ne pas être très grande.

À la limite : la somme d'une infinité de nombres n'est pas forcément infinie ; en effet, si la suite de ces nombres tend vers zéro, leur somme peut très bien être finie, comme le montre facilement le calcul....

Une somme infinie de termes en progression géométrique

En effet, la somme des nombres égaux aux puissances successives de $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots \text{ vaut exactement } 1.$$



Le dessin ci-contre en est une « démonstration graphique », dès lors qu'il est associé au résultat connu d'Euclide (voir page 56), à savoir que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ devient « finalement » plus petit que n'importe quel nombre strictement positif fixé à l'avance.

Normalement, vous ne savez pas ce qu'est une « somme infinie » de termes. On ne vous en a pas donné la définition. Il y a là une anticipation de langage et il n'est pas vraiment étonnant que des ambiguïtés apparaissent.

Pour ceux qu'une démonstration en image ne convainc pas, en voici une plus arithmétique. Soit S cette somme supposée exister :

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

là, on reconnaît la somme S plus 1.

On a donc $2S = 1 + S$, d'où $S = 1$.

Cette manière de procéder se généralise sans difficulté avec une suite géométrique quelconque, c'est-à-dire une suite dont chaque terme est obtenu par multiplication du terme précédent par un nombre fixé.

$$\text{Si } S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\text{alors } xS = x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\text{Donc } S = 1 + xS, \text{ et } S = \frac{1}{1-x}.$$

Mais il faut faire très attention : ce calcul n'est en effet valable que si la somme S existe.

La démonstration complète réclame de s'assurer de l'existence de S ! Or il se trouve que cette somme n'existe pas lorsque x est supérieur ou égal à 1.

Écrire $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$, pour $x=2$, donne un résultat assez surréaliste !

En revanche, on a le théorème :

Lorsque x est positif et plus petit que 1, la somme infinie $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ existe et vaut $\frac{1}{1-x}$.

En fait, la somme infinie des termes $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ est la limite, si elle existe, de la suite dont les premiers termes sont :

$$x_1$$

$$x_1 + x_2$$

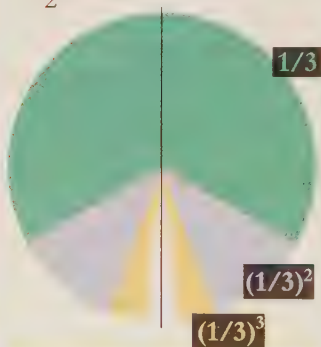
$$x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\dots$$

● Par exemple, si $x = \frac{1}{3}$, alors

$1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$ vaut $\frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2}$ et $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$ vaut $\frac{1}{2}$, comme le suggère le dessin ci-dessous.



● Et si $x = \frac{1}{4}$,

alors $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$

vaut $\frac{1}{1 - 1/4}$ soit $\frac{4}{3}$.

Donc $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$ vaut $\frac{1}{3}$.

Pour trouver ce résultat, Archimède se servait de la figure ci-contre, d'où il déduisait :

$$3 \times \frac{1}{4} + 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 +$$

$$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 1.$$

Il connaissait donc la formule (vraie pour tout x et n) :

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) - x^{n+1} = 1,$$

laquelle formule démontre le théorème ci-dessus lorsque x^{n+1} tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

● Et si $x = \frac{1}{10}$, alors $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$

$$\text{vaut } \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}.$$

Cela explique que le développement décimal de la fraction $\frac{1}{9}$ soit 0,11111111...

Plus généralement, si on prend pour x une puissance de $\frac{1}{10}$, on se trouve devant des résultats presque « mathématiques ».

Ainsi : 0,421421421421421421... n'est autre que l'écriture

C'est par l'emploi un peu « limite » de la formule

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^2 + x^4 - \dots$$

que Leibniz « démontra » que la « somme infinie » $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ devrait valoir,

si elle existe, $\frac{1}{2}$,

et non pas 0 ou 1 comme pourraient le faire croire des calculs naïfs du genre :

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

$$0 \text{ ou } 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$$

décimale de

$$421 \times \left[\frac{1}{1000} + \left(\frac{1}{1000} \right)^2 + \left(\frac{1}{1000} \right)^3 + \dots \right]$$

c'est-à-dire :

$$421 \times \frac{1}{1000} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{1000} \right] = \frac{421}{999}$$

Voilà qui explique les développements décimaux de $\frac{1}{37}$ et $\frac{1}{27}$ signalés à la page 65.

Combien font beaucoup de petites choses ?

Reprenons, dans un autre cadre, le problème du produit $N \times \varepsilon$ lorsque N est très grand ou lorsque ε est très petit. Autrement dit, lorsque N tend vers l'infini alors que ε tend vers zéro.

Il est très important de comprendre que l'on ne peut rien dire de ce produit tant que l'on n'en sait pas un peu plus sur N et ε .

À l'évidence, en effet, si $\varepsilon = \frac{1}{N}$, alors $N \times \varepsilon$ vaut 1. Mais si $\varepsilon = \frac{1}{N^2}$, alors $N \times \varepsilon$ est très petit. Et si N vaut $\frac{1}{\varepsilon^2}$, alors $N \times \varepsilon$ est très grand. Il n'y a donc pas de réponse générale, et la situation doit être examinée dans chaque cas particulier comme nous allons le faire dans les pages suivantes, sur de très curieux exemples.

La scie m'agrée

Construisons sur le segment $[0, 1]$ une scie de n dents constituées chacune de deux segments parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées (la figure illustre le cas $n=4$).



Les calculs nécessaires pour remplir le tableau publié page 174 ne sont pas bien terribles.

Que peut-on dire lorsque n est très grand ?

L'ordre de grandeur de $N \times \varepsilon$ n'est pas déterminé par les ordres de grandeur de N et de ε .

Cette circonstance ne doit pas vous étonner plus que la suivante :

le signe de $a + b$ n'est pas déterminé par les signes de a et de b .

Longueur d'une dent ($OA + AB$)	Longueur de la ligne brisée rouge
$\frac{\sqrt{2}}{n}$	$\sqrt{2}$
Aire d'une dent	Aire totale des dents (en jaune)
$\frac{1}{4n^2}$	$\frac{1}{4n}$

On a affaire à un très grand nombre de dents, chacune de longueur très petite. Il se trouve que, dans cette situation (de dents en angle droit), leur longueur totale ne dépend pas de n et reste égale à $\sqrt{2}$ (le produit $\frac{\sqrt{2}}{n} \times n$ vaut $\sqrt{2}$).

C'est donc un exemple dans lequel beaucoup de petites choses valent finalement quelque chose qui n'est ni très petit ni très grand (environ 1,414).

En revanche, la surface d'une dent est très petite et la surface totale des dents aussi (le produit $\frac{1}{4n^2} \times n$ vaut $\frac{1}{4n}$).

À la limite, on pourrait donc dire ceci : lorsque le nombre de dents tend vers l'infini, la longueur et la surface de chaque dent tendent vers 0 ; mais la longueur totale des dents tend vers $\sqrt{2}$ et la surface totale des dents tend vers 0.

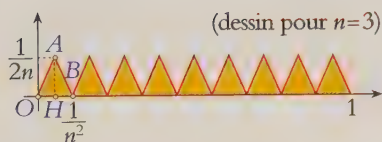
Les dents longues

La scie suivante est aussi construite sur le segment $[0, 1]$ mais les dents en sont plus acérées.

Précisément, la base de chaque dent mesure $\frac{1}{n^2}$ (au lieu de $\frac{1}{n}$) et la hauteur reste égale à $\frac{1}{2n}$.

On peut ainsi construire des séries à 4 dents, 9 dents (c'est la figure), 16 dents, ..., n^2 dents, ...

Il est vrai que l'on peut, dans les discours que l'on tient dans sa tête, traduire l'expression « très grand » par « tend vers l'infini » et « très petit » par « tend vers zéro ». Mais il faut alors prendre garde que les expressions « très grand » et « très petit » peuvent, dans un discours mathématique non standard, être employées seules ; ce qui n'est pas le cas des expressions avec le verbe « tendre », dans un discours mathématique classique (voir page 165).



Que peut-on dire de ce type de scie lorsque n est très grand (longueur totale des dents? surface totale des dents?)?

• Pour la surface, c'est toujours très simple : chaque dent a une aire égale à $\frac{1}{4n^3}$; elle est très petite. L'aire totale des n^2 dents vaut donc $\frac{1}{4n}$, ce qui est très petit.

Voilà donc encore un *exemple* dans lequel *beaucoup de petites choses ne valent toujours pas grand-chose*.

• Pour la longueur, procédons plutôt par encadrement :

$$\begin{aligned} AH &< OA < AH + HO \\ \frac{1}{2n} &< OA < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} \\ \frac{1}{n} &< \text{une dent} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

La longueur d'une dent est donc (évidemment) très petite. Mais il y a beaucoup de dents : exactement n^2 , donc :
 $n < \text{longueur totale des dents} < n+1$.

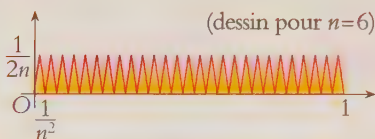
Lorsque n est très grand, la longueur totale des dents est donc, comme n , très grande.

C'est donc un *exemple* dans lequel *beaucoup de petites choses valent en définitive quelque chose d'immense, d'énorme*.

Quand on y réfléchit, la situation est même plus surprenante encore. On se trouve en effet devant une ligne de longueur très grande (et, à la limite, **infinie**), enfermée dans un rectangle d'aire très petite (et, à la limite, **nulle**).

Voilà encore un exemple de «*crépitements*» où l'excessive variation de direction produit des effets paradoxaux ; on peut être très long dans un très petit espace !

Comme ceci :



La ligne brisée, enfermée dans le rectangle $[0, 1] \times [0, \frac{1}{2n}]$

(qui finit par s'écraser

complètement sur le segment $[0, 1]$, «finir» par avoir une longueur infinie, pour peu que les dents soient bien acérées !

Le paradoxe apparent de cette situation («une ligne infiniment longue dans une surface nulle !») n'est **donc** qu'une production artificielle (un «artefact») du langage parlé (et de sa version pensée), **puisque** on peut le traduire dans un autre langage (mathématique) d'où la contradiction a disparu. Et ce modèle mathématique de la situation nous donne non seulement les **clés** de la compréhension, mais aussi les **outils** qui permettent d'y travailler.

Les dents rognées

Ce qui est surprenant dans les deux exemples précédents, c'est que la longueur totale des dents ne tend pas vers 1 alors que la scie s'écrase sur un segment de longueur 1. Cette espèce de «paradoxe» est évoquée aussi dans le paragraphe suivant.

Cependant, voici un dernier exemple où ce phénomène n'apparaît pas. Intéressons-nous à une scie dont les dents sont de moins en moins acérées lorsque n grandit.

Précisément, la base de chaque dent mesure $\frac{1}{n}$ et la hauteur est égale à $\frac{1}{2n^2}$.



Pour la surface, c'est toujours très simple : chaque dent a une aire égale à $\frac{1}{4n^3}$; elle est très petite lorsque n est très grand.

L'aire totale des n dents

vaut donc $\frac{1}{4n^2}$, ce qui est très petit.

Un «artefact» est, littéralement, un «produit de l'art» c'est-à-dire un produit de l'activité culturelle des hommes qui n'a pas d'homologue dans la nature.

Voilà donc encore un exemple dans lequel beaucoup de petites choses ne valent toujours pas grand-chose. Pour la longueur, procédons encore par encadrement :

$$HO < OA < AH + HO$$

$$\frac{1}{2n} < OA < \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n}$$

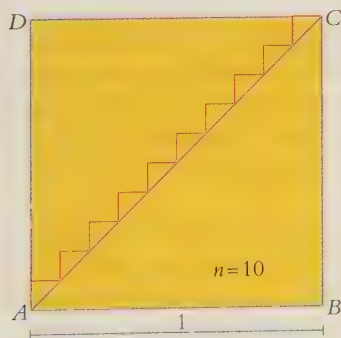
$$\frac{1}{n} < \text{une dent} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

La longueur d'une dent est donc (évidemment) très petite. Mais il y a n dents, donc :

$$1 < \text{longueur totale des dents} < \frac{1}{n} + 1.$$

Lorsque n est très grand, la longueur totale des dents est donc très proche de 1. C'est donc un exemple dans lequel beaucoup de petites choses valent en définitive quelque chose d'appréciable, égal à 1.

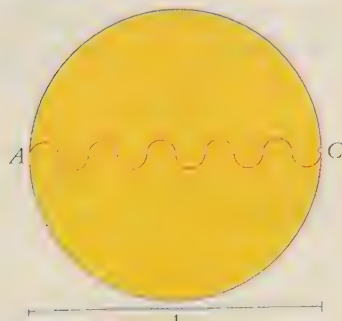
Le paradoxe de la longueur



Voici deux versions (plus populaires) des situations précédemment étudiées.

$ABCD$ est un carré et un escalier en suit la diagonale (ses n marches mesurent $\frac{1}{n}$ de haut et $\frac{1}{n}$ de large).

Que se passe-t-il lorsque n est très grand ?



Le diamètre $[AC]$ d'un cercle est divisé en n segments de longueur $\frac{1}{n}$: la serpentine dessinée est formée de demi-cercles de diamètre $\frac{1}{n}$.

Que se passe-t-il lorsque n est très grand ?

Il est beaucoup moins choquant d'écrire $N \times \varepsilon$, pour N très grand et ε très petit ; que d'écrire une forme (soi-disant) indéterminée sous la forme $\infty \times 0$. Mais c'est moins spectaculaire.

Il est clair que, dans les deux cas, la ligne rouge s'écrase sur le segment $[AC]$; on pourrait dire que « la limite de la ligne rouge quand n tend vers l'infini est le segment $[AC]$ ».

Dans chaque cas, le paradoxe (apparent) vient de la comparaison de la longueur de la ligne rouge et de la longueur de $[AC]$.

Pour l'escalier, chaque « marche » mesure $\frac{1}{n} + \frac{1}{n}$, soit $\frac{2}{n}$, et il y en a n . L'escalier mesure donc 2 alors que la diagonale $[AC]$ mesure $\sqrt{2}$ (environ 1,414).

Pour la serpentine, chaque demi-cercle mesure $\frac{1}{2}(2\pi \times \frac{1}{2n})$, soit $\frac{\pi}{2n}$, et il y en a n . La serpentine mesure $\frac{\pi}{2}$ (environ 1,57), alors que le diamètre $[AC]$ mesure 1.

Or, puisque la ligne rouge « tend » vers le segment $[AC]$, sa longueur ne devrait-elle pas « tendre vers » (ou « être » si elle est constante) celle du segment $[AC]$?

Le langage ici encore est trompeur car il fait croire à l'innocence de la permutation des mots : « limite de la longueur » et « longueur de la limite ». Le calcul montre que cette permutation est abusive et la fréquentation des mathématiques, ou celle d'un bon professeur, lève le paradoxe lorsqu'on se rend compte de ceci :

Pour que la « limite de la longueur d'une famille de courbes » soit la « longueur de la limite de cette famille », il ne suffit pas que les points de la famille tendent vers des points de la limite. Il faut aussi que, autour de chaque point de la limite, les directions des courbes de la famille, tendent vers la direction de la courbe limite.

Comme on l'a déjà vu pour d'autres exemples, la présence d'une infinité de zigzags trouble sérieusement l'intuition spontanée que nous avons des « lignes »...

Le problème principal dans le domaine ici étudié est un problème de définition : jusqu'au baccalauréat, vous n'êtes pas censé savoir ce qu'est la LONGUEUR d'une courbe ; et vous n'avez aucun moyen de la calculer... En revanche, vous savez calculer l'aire d'une surface délimitée par des courbes... Curieux, non ?

Avec la longueur des lignes et des courbes, on retrouve le problème de dérivabilité et de tangente entrevu auparavant. Car ce problème de calcul des longueurs est très lié à celui de la direction des courbes et, comme on l'a compris, c'est un problème difficile.



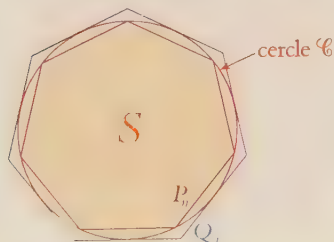
La mesure des objets

Pourquoi les problèmes de longueur de courbe sont-ils plus complexes que les problèmes d'aires planes (ou de volumes) ? Parce qu'une courbe ne contient pas et n'est pas contenue dans un ensemble de segments de droites : l'approximation d'une courbe par des morceaux de droites n'est donc pas le résultat d'une simple comparaison de grandeur.

En revanche, l'approximation d'une surface par des polygones est susceptible d'un véritable encadrement pouvant déboucher sur une valeur exacte.

Une mini-théorie

Regardons le cas du cercle, son disque intérieur et des polygones qui l'approchent.



La surface du disque est effectivement encadrée par celle des polygones P_n et Q_n et peut donc être calculée avec autant de précisions que l'on veut. En revanche, la cir-

conférence du cercle n'est pas *a priori* encadrée par celle des périmètres des polygones P_n et Q_n .

Peu après le bac, vous apprendrez, par exemple, comment calculer très vite la longueur d'un arc de parabole.

Mais vous verrez aussi que le problème de la longueur des courbes est beaucoup plus grave qu'il n'y paraît : même pour une courbe aussi simple qu'une ellipse, il n'existe pas de fonctions classiques permettant d'en écrire la longueur d'un arc quelconque !

Mesurer un objet, c'est lui associer un nombre positif. La fonction qui fait correspondre le nombre à un objet est appelée une « mesure », dès lors qu'elle vérifie les trois propriétés ci-contre. Contrairement à ce que les habitudes laissent croire, il existe beaucoup de mesures possibles.

Après les expériences que nous avons vécues, qu'est-ce qui prouve que d'infâmes zigzagones ne vont pas perturber la longueur de la courbe ? Bien sûr, cela n'a pas lieu pour le cercle (ça se saurait) mais en toute logique, il faudrait se méfier car nous ne sommes pas alors dans une « théorie de la mesure » qui, elle, fonctionne pour les surfaces planes et les volumes à partir des propriétés fondamentales suivantes :

Que l'on parle d'aire ou de volume, la mesure $\text{mes}(A)$ d'un objet A vérifie les propriétés suivantes :

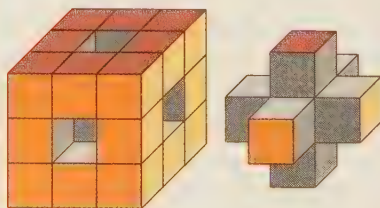
1. $\text{mes}(A) \geq 0$.
2. Pour toute translation, rotation, symétrie ou leurs composées f , on a : $\text{mes}(A) = \text{mes}(f(A))$.
3. Si $A = B \cup C$ et $B \cap C = \emptyset$, alors :
 $\text{mes}(A) = \text{mes}(B) + \text{mes}(C)$
et donc, $\text{mes}(B) = \text{mes}(A) - \text{mes}(C)$.
- 3bis. Si $B \subset A$ alors $\text{mes}(B) \leq \text{mes}(A)$.

À titre d'exemple d'application de ces propriétés, traitons le cas du cube « indéfiniment troué ».

Un gruyère mathématique

On prend un cube et on découpe chacun de ses côtés en trois, de sorte que chacune de ses faces soit découpée en neuf ; le cube lui-même se trouve découpé en 27 petits cubes.

Premier temps



On enlève alors au cube initial les trois « barres » de trois cubes joignant les centres des faces ; le petit cube central étant commun à ces trois barres, on a enlevé au cube initial une espèce de croix, composée de sept petits cubes.

Si le cube initial est l'unité de volume, quel est le volume du cube «troué»?

Puisque 7 cubes sont enlevés sur 27, l'opération de trouage laisse un volume égal à $\frac{20}{27}$, soit environ 0,741.

Deuxième temps et suivants

On fait alors subir à chacun des vingt petits cubes restants la même «opération» que celle subie par le grand cube.

Et, évidemment, on décide de continuer l'ablation de sept mini-cubes chaque fois que l'on aperçoit un cube intact!

La deuxième opération de trouage ne laisse alors de chaque petit cube que $\frac{20}{27}$ de leur volume : le volume restant est donc de $\frac{20}{27} \times \frac{20}{27}$, soit environ 0,549.

La troisième opération de trouage ne laisse alors de chaque petit cube que $\frac{20}{27}$ de leur volume : le volume restant est donc de $\left(\frac{20}{27}\right)^3$, soit environ 0,406.

Si on continue indéfiniment ce «trouage», l'objet limite obtenu dans l'espace est un «gruyère mathématique» dont l'illustration ci-dessous donne une petite idée.



Si l'on cherche à associer au gruyère limite un nombre mesurant son volume, on ne peut que trouver le nombre 0.

En effet, on peut enfermer ce gruyère dans un objet dont le volume peut être choisi aussi petit que l'on

veut : le nombre $\frac{20}{27}$ étant

plus petit que 1, ses puissances successives deviennent plus petites que n'importe quel nombre choisi à l'avance.

La limite générale d'une suite géométrique, de raison inférieure à 1 valeur absolue, est nulle.

$$\text{Si } |x| < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0.$$

Tout se passe donc comme si le gruyère limite n'était pas un « volume » mais une « surface ».

Cependant, si on cherche à lui associer un nombre mesurant son aire, on ne peut que conclure à une aire infinie. En effet, on peut le recouvrir d'une multitude de petites surfaces mais dont la somme des aires est aussi grande que l'on veut

(vérifier que la surface est multipliée par $\frac{4}{3}$ soit environ 1,333 à chaque trouage).

En fait, ce gruyère limite est, dans un certain sens, un objet dont la « dimension » est intermédiaire entre 2 et 3 : il remplit moins l'espace que n'importe quel « solide » mais plus que n'importe quelle « surface ». Sa dimension est tout simplement « fractionnaire »...

Il s'agit encore d'un **objet fractal**.

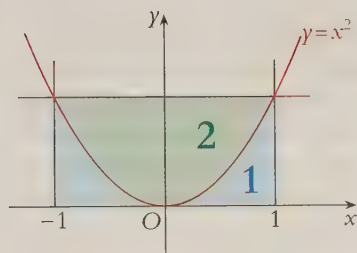
La quadrature de la parabole

Les méthodes de calcul d'aires ou de surfaces ont toujours été inspirées par la mini-théorie des mesures citée plus haut : on s'arrange pour trouver un découpage astucieux de l'objet à mesurer (éventuellement approximatif) et on réassemble les morceaux de façon à pouvoir conclure. Cependant, la diversité des découpages possibles a de quoi faire rêver ; regardons-les à l'œuvre sur une des courbes les plus simples : la parabole.

Le problème est le suivant :

Quelle est la surface du secteur de parabole compris entre la parabole d'équation $y = x^2$ et l'horizontale $y = 1$? Le résultat est aussi fantastique que la variété des méthodes par lesquelles on peut le trouver : cette surface vaut les $\frac{2}{3}$ du rectangle $[-1; 1] \times [0; 1]$.

Si $x > 1$,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.



La triangulation d'Archimède

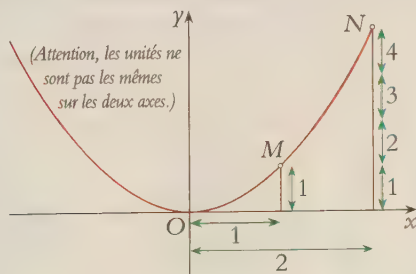
C'est Archimède qui, il y a 2 250 ans, réussit le premier à «quarrer» la parabole, c'est-à-dire à trouver un carré ayant même surface qu'un secteur de parabole.

Pour cela, il remplit le sec-

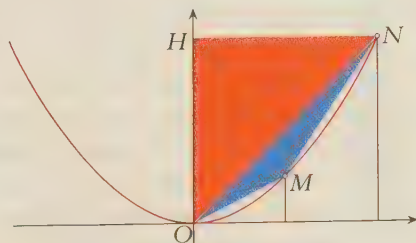
teur en question de triangles de plus en plus petits.

Il faut savoir que, pour Archimède, une parabole est une courbe qui a la propriété suivante :

Soit (Ox) tangente à la parabole. Si M est un point de la parabole, alors le point de la courbe situé deux fois plus loin que M de l'axe (Oy) est situé quatre fois plus loin que M de (Ox) .

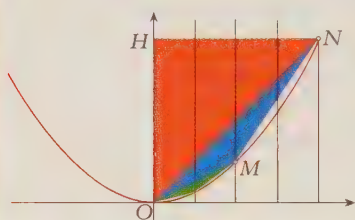


Il est alors facile de montrer que le triangle bleu OMN a une aire égale au quart de celle du triangle ONH .



Archimède est (aussi) connu pour avoir fait incendier la flotte romaine qui assiégeait Syracuse (en 212 av. J.-C.) grâce à une multitude de miroirs (peut-être placés comme sur une surface parabolique), tous orientés de manière à diriger les rayons du soleil sur la base des mâts des navires.

On décompose ainsi par des parallèles le segment $[HN]$, successivement en 2, 4, 8, 16... parties.



Par un raisonnement justifiant ce qui est, pour nous, un passage à la limite, Archimède montre alors que l'aire délimitée par le nez de la parabole est égal à la somme des aires bleu + rouge + vert...

Soit, en prenant $OH=HN=1$,

$$\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots \right] \text{ qui vaut } \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}.$$

Les petits cubes de Roberval

Voici maintenant une autre méthode fondée sur un découpage en petits carrés et montrant le lien remarquable existant

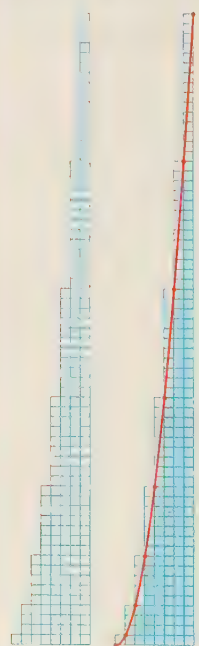
entre la quadrature de la parabole et le volume d'une pyramide. Imaginons la construction suivante (figure ci-contre) :

- on a d'abord posé un carré sur l'axe horizontal;
- puis on a posé une colonne de 4 carrés (2×2);
- puis une colonne de 9 carrés (3×3), ...;
- jusqu'à une colonne de n^2 carrés ($n \times n$).

On obtient un « escalier parabolique » sur lequel on repère facilement les points $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$, $(3; 9)$, ... $(n; n^2)$ du graphe de $x \rightarrow x^2$, en rouge sur la figure de droite.

Soit Σ le nombre total de petits carrés utilisés dans la construction; en prenant le petit carré comme unité de surface, on remarque que la surface S cherchée a une mesure un peu plus petite que ce nombre Σ .

Comme pour la parabole, on peut encadrer l'aire située entre la courbe, l'axe des abscisses et une verticale, par les aires de sommes des rectangles; la différence est au plus égale à l'aire d'un rectangle de hauteur égale à la plus grande hauteur de chacun des petits rectangles.



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

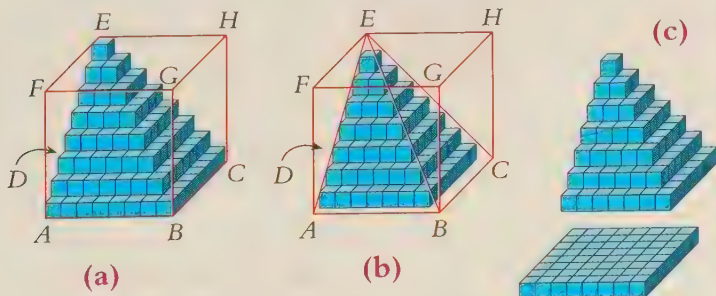
Plus précisément, l'ensemble des petits carrés au travers desquels passe la parabole forme exactement une « colonne » de n^2 petits carrés : lorsqu'on enlève cet ensemble à l'escalier de petits carrés, on obtient une surface (bleutée sur la figure) un peu plus petite que S ; on a donc l'encadrement :

$$\sum - n^2 < S < \sum$$

(unité de surface : le petit carré).

Imaginons maintenant des petits cubes à la place des petits carrés. Nous allons détruire la construction précédente et reconstruire, avec les mêmes petits cubes, la pyramide suivante :

- on place d'abord le premier petit cube ;
- puis, en dessous, on place une couche carrée avec les 4 cubes (2×2) de la deuxième colonne ;
- puis on place en-dessous une couche carrée avec les 9 cubes (3×3) de la troisième colonne ;
- jusqu'à une couche carrée avec les n^2 cubes ($n \times n$) de la dernière colonne.



La pyramide ainsi construite s'inscrit naturellement dans un cube dont le côté est constitué de n petits cubes (figure a).

En prenant le petit cube comme unité de volume, le volume de cette pyramide de petits cubes est mesuré exactement par le nombre $\sum$. On remarque que cette pyramide est un peu plus grande que la pyramide $EABCD$ à quatre faces triangulaires (en rouge sur la figure), dont nous appelons V le volume.

L'un des gros avantages de considérer une mesure d'un objet comme un nombre est ici en action :

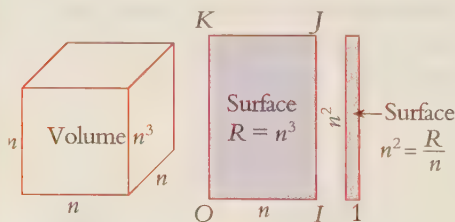
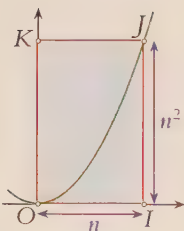
un même nombre peut « mesurer » une surface ou un volume. Et lorsqu'on calcule sur les nombres, on n'a pas besoin de faire référence aux unités !

Plus précisément, lorsqu'on enlève à la pyramide de cubes la « couche inférieure » (c) on obtient un volume un petit peu plus petit que V (figure b) qui vient exactement se placer à l'intérieur de la pyramide $EABCD$; on a donc l'encadrement :

$$\Sigma - n^2 < V < \Sigma \quad (\text{unité de volume : le petit cube}).$$

Les mesures S et V sont donc toutes les deux encadrées par les mêmes nombres, à n^2 près ; leur différence ne peut donc pas être elle-même supérieure à n^2 : $|S - V| \leq n^2$.

Mais on sait que le volume V de la pyramide $EABCD$ est exactement égal au tiers du volume du cube $ABCDEFGH$. Et le volume de ce cube est mesuré par le même nombre (n^3) que la surface, R , du rectangle $OIJK$.



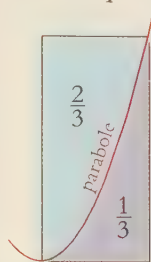
D'autre part, le rectangle étant mesuré par le nombre n^3 , on a $n^2 = \frac{R}{n}$.

Finalement

$$S - \frac{1}{3}R \leq \frac{R}{n}.$$

La différence entre S et $\frac{1}{3}R$ est inférieure à $\frac{R}{n}$, et cela quel que soit le nombre n .

Cette différence peut donc être rendue aussi petite que l'on veut, en découpant l'intervalle sur l'axe des x en un nombre de petits intervalles aussi grand que l'on veut ; on conclut que : $S = \frac{1}{3}R$.



On a réalisé notre projet : mesurer une surface limitée par une parabole en la comparant à une surface limitée par un rectangle.

Ainsi le « carré » de côté 1 est-il exactement partagé en 3 par l'arc de parabole.

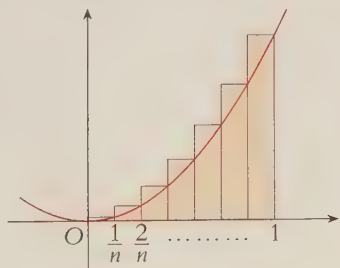
Les tranches de Tabit Ibn Qurra (908-946)

Les mathématiciens arabes (du x^e au xii^e siècle) connaissaient très bien les formules donnant la somme des entiers,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ et la somme des carrés des entiers,}$$

$$\text{des cubes : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ils eurent donc l'idée de découper en tranches verticales la partie tracée entre la parabole et la tangente au sommet.



La somme des aires des n petites tranches d'épaisseur $\frac{1}{n}$ vaut exactement :

$$\frac{1}{n} \times \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right]$$

$$\text{soit } \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2].$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dots = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

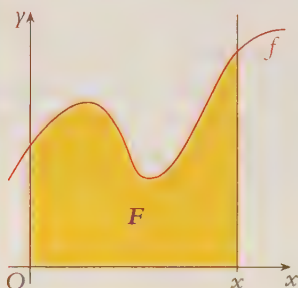
Lorsque n tend vers l'infini, ce nombre tend vers $\frac{2}{6}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$. Et c'est bien la valeur trouvée aussi avec les calculs précédents !

Le calcul intégral

Aujourd'hui, on pense aussi à un calcul avec des tranches verticales, mais on lui adjoint, ou même on lui substitue un calcul mécanique permettant l'obtention rapide du résultat.

Ainsi, un étudiant de terminale sait que l'aire comprise entre le graphe d'une fonction f , l'axe (Ox) et les verticales d'abscisses 0 et x vaut $F(x) - F(0)$, où F est une « primitive » de f (c'est-à-dire que la fonction « dérivée » de F est f).

À partir du ix^e siècle et jusqu'en 1400 environ, les mathématiciens ont vécu au sein de la civilisation arabe (de Samarkand à Grenade); à partir de textes grecs et alexandrins, les savants arabes élaborèrent « l'algèbre » et firent de grandes découvertes en arithmétique, trigonométrie, optique...



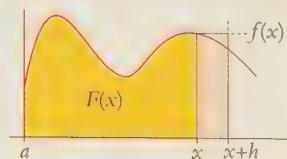
Et il doit connaître les primitives des fonctions dites élémentaires.

Ainsi, une primitive de la fonction définie par $x \rightarrow x^n$ est la fonction définie par $x \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Les résultats précédents sur la parabole sont donc contenus dans la propriété suivante : une primitive de la fonction définie par $x \rightarrow x^2$ est la fonction définie par $x \rightarrow \frac{x^3}{3}$.



Ce calcul mécanique tient sa justification dans le lien fantastique existant entre les dérivées et les quadratures. Explicitons-le : soit une fonction f et soit $F(x)$ l'aire comprise entre cette fonction, l'axe des abscisses, et deux ordonnées a et x . La variation de $F(x)$ est évidemment mesurée par $f(x)$; plus précisément $F(x+h) - F(x) \approx hf(x)$.



De sorte que lorsque h est très petit $F(x+h) - F(x)/h$ est très près de $f(x)$. Autrement dit la dérivée de $F(x)$ vaut $f(x)$. Ainsi donc le problème des aires est résolu par le problème inverse de celui qui

résout les tangentes ! Cela mérite un petit retour en arrière.

Retour sur les tangentes et les quadratures

La grande aventure mathématique du lycée, c'est l'introduction de l'analyse débouchant sur les calculs de dérivées et de primitives avec lesquelles l'étude des fonctions devient un

C'est Isaac Newton qui découvrit le premier et décrit clairement comment la variation d'une aire (sa « fluxion », disait-il) était liée à la mesure de sa frontière. C'était en 1666, à peu près en même temps que sa découverte de la gravitation universelle.

jeu magique : un petit calcul, et hop ! voilà la valeur maximale d'une fonction ; un autre petit calcul, et hop ! voilà la mesure de la surface qu'elle enserme dans son graphe.

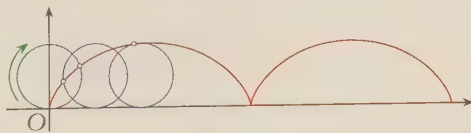
Reportons-nous trois siècles et demi en arrière : Louis XIV est un enfant, Descartes vient d'écrire le *Discours de la méthode* et Galilée vient de sauver sa tête en « mentant » à d'imbéciles conservateurs.

Que cherchent alors ceux qui font des mathématiques ? À peu près la même chose que leurs collègues d'Alexandrie deux mille ans plus tôt !

● Le plus fréquent de leurs problèmes est la mesure des choses. Quelle est la surface intérieure à telle courbe ? Quelle est la longueur de telle ou telle courbe ? Quel est le volume de tel solide de révolution ?

Cependant, ils ne disposaient, pour le faire, que d'un raisonnement, rigoureux mais difficile (dit « par exhaustion »), qui n'avait pas varié depuis Archimède. Cependant, ils commençaient à avoir de nouvelles idées qui avaient l'air très intéressantes.

Buenaventuro Cavalieri par exemple, à Florence, connaissait bien les propriétés géométriques de la courbe décrite par un caillou coincé sur le bord de la roue d'un char. Cette courbe, appelée cycloïde, dessine de belles arches et Cavalieri en détermine la surface par une méthode merveilleuse dite « géométrie des indivisibles ».



Pascal, dit-on, fit la même découverte une nuit d'insomnie due à une rage de dent.

Parallèlement, Pierre de Fermat (et d'autres mathématiciens aussi) réussissent à « quarrer » toutes les courbes d'équation $y \cdot x^n$ ou $y = \frac{1}{x^n}$. Toutes sauf une, et c'est justement la plus simple, celle dont l'équation s'écrit $xy = 1$ (le cas $n = 1$).

La géométrie des « indivisibles » (que l'auteur appelle « géométrie des mille-feuilles ») est fondée sur l'idée suivante : Si deux mille-feuilles sont constitués de feuilles une à une équivalentes en surface, alors ils ont même volume.

Ils s'aperçoivent que lorsque la courbe a pour équation $x \rightarrow x^n$, la surface qui lui est associée est donnée par une formule du genre : $\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$.

● Un autre problème initié par Descartes et Fermat est celui des tangentes. Là aussi ils cherchent pour des courbes diverses comment se positionne la tangente à un point.

À force de chercher, ils s'aperçoivent que lorsque la courbe a pour équation $x \rightarrow x^n$, la position de la tangente est donnée par un calcul où apparaît le nombre nx^{n-1} .

Ainsi, comme l'un d'entre eux, nommé Hudde, ils font des tableaux donnant la pente de la tangente en fonction de l'ordonnée :

Fonction	Pente de la tangente
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$

Et c'est alors que se fit jour l'une des plus extraordinaires surprises de l'histoire des sciences :

À un coefficient de proportionnalité près il suffisait de lire le tableau à l'envers pour y trouver la résolution du problème des quadratures !!!

Aire	Fonction
x	1
$x^2/2$	x
$x^3/3$	x^2
$x^4/4$	x^3
$x^5/5$	x^4

Le XVII^e siècle est une grande époque pour l'histoire des mathématiques : on y exploite l'algèbre que le siècle précédent a rendue efficace grâce à l'usage des lettres, on y étudie les problèmes géométriques par le calcul, grâce aux inventions de Descartes et on y découvre le calcul infinitésimal et toutes ses merveilles.

● Mais comment diable est-il possible que les problèmes des tangentes et les problèmes des quadratures soient exactement inverses les uns des autres ?

La réponse est déjà écrite plus haut : elle tient dans la notion de variation et fut magnifiquement expliquée pour la première fois par Newton dans sa *Méthode des fluxions*.

Aujourd'hui, on désigne le théorème qui l'exprime sous le nom de « théorème fondamental de l'analyse ».

Ne voudriez-vous pas en savoir un peu plus à ce sujet ?

NOTE ULTIME

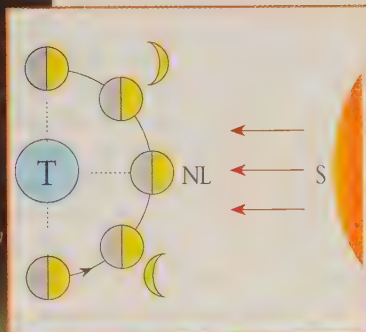
Nous avons tenté, dans ce Fil rouge, de faire mieux connaître et apprécier les mathématiques aux lycéennes et lycéens qui les apprennent, en les plaçant dans une perspective plutôt ouverte relativement aux programmes scolaires. Il ne s'agissait pas, bien sûr, en quelques dizaines de pages de parcourir l'ensemble des connaissances du programme, ce rôle est plutôt celui des Points clés que le lecteur trouvera pages 194 à 431.

Nous avons donc fait des choix, tant sur les sujets traités que sur la manière de les traiter : en particulier, nous avons regretté de ne pas plus développer la géométrie, un peu trop délaissée au lycée aujourd'hui.

En privilégiant les idées-forces et en multipliant les exemples, nous avons essayé de rester lisibles pour les lecteurs les plus jeunes et les moins matheux, tout en montrant aux futurs bacheliers scientifiques les fondements et les beautés parfois cachées de notre belle discipline.

Nous espérons que les lecteurs et lectrices y auront appris quelques connaissances et pris plaisir en y découvrant quelques-unes de ces perles qui rendent les mathématiques si passionnantes.

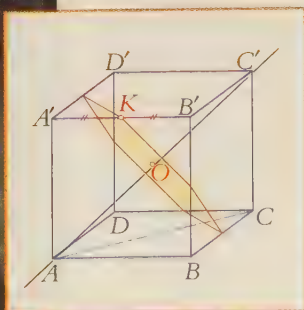




POINTS CLÉS

Pour maîtriser
les sujets de cours

*Le cours et ses difficultés
dans le détail, sujet
par sujet. Les mots difficiles
sont identifiés et expliqués
dans le Dico.*



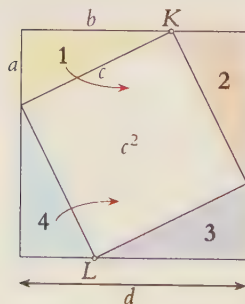
La géométrie étudie des figures du plan ou de l'espace. Les précurseurs comme Thalès, Platon, Euclide et bien d'autres ont découvert une foule de propriétés géométriques.

Mais ce n'est que depuis une époque récente que l'on parle de transformations en géométrie et que l'on a codifié ce concept, un peu comme les fonctions en algèbre.

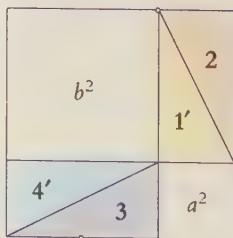
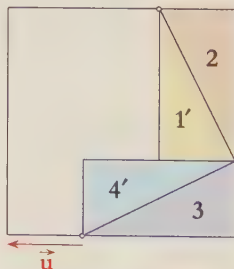
Une transformation dans un plan est un procédé qui à un point du plan associe un point de ce plan, exactement comme une fonction qui à un nombre x associe un nombre y .

Un puzzle

Dans un carré de côté d sont disposés quatre triangles rectangles de côtés a , b , c .



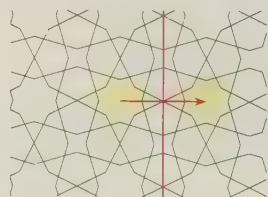
Un quart de tour de centre K « transforme » (1) en (1') et un quart de tour de centre L « transforme » (4) en (4'). (4' + 3) est « transformé » par la translation de vecteur $\vec{u}$.



Toutes ces transformations ne changent pas les aires des triangles transformés. La comparaison des aires sur la première et la dernière figure met en évidence la propriété de Pythagore. ■

Des pavages

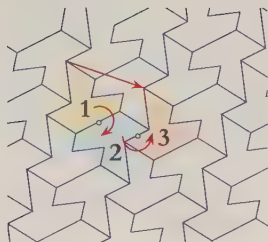
Les papiers peints, les frises, les pavages offrent des exemples de configuration sur lesquels l'ensemble du dessin est obtenu à partir d'un motif élémentaire que l'on reproduit par translation, symétrie, rotation...



Le motif ci-dessous passe de ① à ② par la translation de vecteur $\vec{AB}$ et de ① à ③ par une rotation d'un tiers de tour.



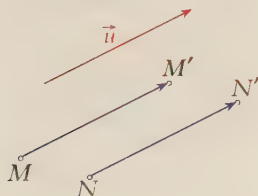
Sur le pavage suivant, ① se « transforme » en ② par une symétrie centrale de centre le milieu d'un côté; et ② se transforme en ③ par une autre symétrie centrale, et nous verrons que ① devient ③ par une translation.



Enfin, il est utile de signaler qu'il existe des transformations qui génèrent de belles fractales, dont certaines sont présentes dans la nature (flocon de neige). ■

La translation

La translation est définie au moyen d'un vecteur $\vec{u}$. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui, au point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



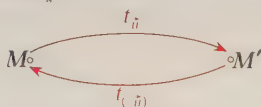
On la note $t_{\vec{u}}$.

Si $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, aucun point du plan n'est invariant.

Si $\vec{u} = \vec{0}$, tous les points du plan sont invariants : on dit que $t_{\vec{0}}$ est l'identité.

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ équivaut à $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$.

La translation $t_{-\vec{u}}$ est la translation réciproque de $t_{\vec{u}}$.

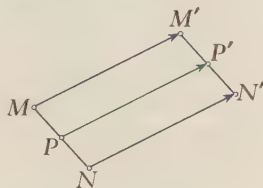


Si par $t_{\vec{u}}$ le couple (M, N) a pour image (M', N') , alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ et $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Ainsi, $MM'N'N$ est un parallélogramme et $(MN) \parallel (M'N')$ et $MN = M'N'$.

Si P est un point de $[MN]$, son image P' est un point de $[M'N']$.

En particulier, le milieu de $[MN]$ a pour image le milieu de $[M'N']$. ■

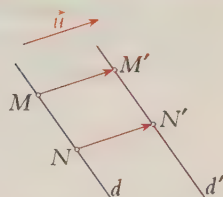


La translation en analytique

Dans un repère du plan, on a les coordonnées $\vec{u}(\alpha, \beta)$ $M(x, y)$ et $M'(x', y')$. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ se traduit par

$$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases} \quad \blacksquare$$

Translation et droites

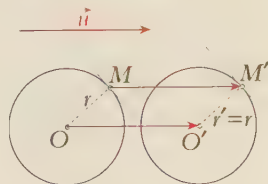


- L'image d'une droite d est une droite parallèle d' , qui est confondue avec d dans le cas où le vecteur de translation est un vecteur directeur de d .
- Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles. Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.

Avec un cercle

L'image par $t_{\vec{u}}$ du cercle (O, r) est le cercle de même rayon et de centre O' tel que $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$. Inversement, deux cercles de même rayon peuvent être considérés comme images l'un de l'autre par une translation.

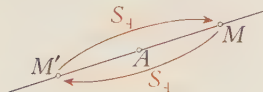
La tangente en M au premier a pour image la tangente au second en M' . ■



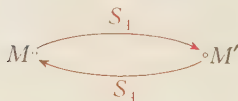
C'est une transformation déjà étudiée au collège. Elle apparaît souvent dans des frises, des carrelages et autres motifs décoratifs.

La définition

La symétrie centrale est définie au moyen d'un point. La symétrie de centre A est la transformation qui au point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$. A est le milieu de $[MM']$.



On la note souvent S_A . Le point A est invariant. On a aussi : $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AM'}$, ce qui signifie que M est l'image de M' par la même symétrie centrale : la symétrie S_A est sa propre transformation réciproque. On dit parfois qu'elle est « involutive ». ■

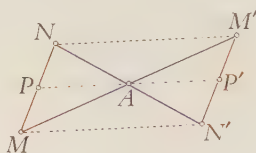


En géométrie analytique

Si le centre A a pour coordonnées (α, β) dans un repère du plan, avec $M(x, y)$ et $M'(x', y')$, l'égalité vectorielle

La propriété fondamentale

Si le couple (M, N) a pour image (M', N') alors $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$.



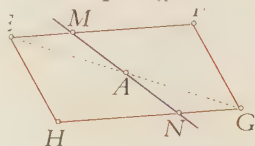
Les longueurs MN et $M'N'$ sont égales et les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles. Un point P du segment $[MN]$ a pour image un point P' de $[M'N']$ et, en particulier, le milieu de $[MN]$ a pour image le milieu de $[M'N']$. On reconnaît évidemment le parallélogramme $MNM'N'$, aplati si M et N sont alignés avec le centre A . ■

Droite et symétrie centrale

L'image d'une droite d est une droite d' qui lui est parallèle : d' est confondue avec d si d passe par le centre de symétrie. On dit alors que d est globalement invariante par S_A . Des droites parallèles ont pour images des droites parallèles et deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires. ■

Deux configurations importantes

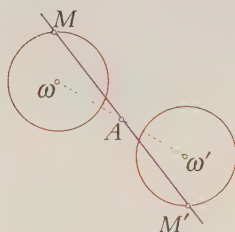
Dans le parallélogramme $EFGH$, le centre A du parallélogramme est un centre de symétrie. Ce parallélogramme est invariant par S_A .



Tout point M de l'un des côtés a pour image un point N du côté opposé et $EMGN$ est un autre parallélogramme de même centre.

Deux cercles de même rayon

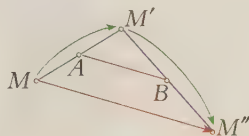
Par la symétrie centrale S_A , le cercle de centre ω et de rayon r a pour image le cercle de même rayon et de centre ω' tel que que :

$$\overrightarrow{A\omega'} = -\overrightarrow{A\omega}.$$


Réciproquement : deux cercles de même rayon sont images l'un de l'autre par la symétrie ayant pour centre le milieu de $[\omega\omega']$. ■

La composée de deux symétries centrales

Soit S_A et S_B deux symétries centrales :
 par $S_A : M \rightarrow M'$
 par $S_B : M' \rightarrow M''$
 $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$ et
 $\overrightarrow{BM''} = -\overrightarrow{BM'}$, d'où l'on tire $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{AB}$.



Ce qui signifie que M'' est l'image du point M par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

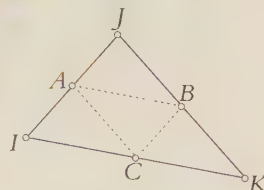
On dit que « S_A suivi de S_B » est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$. La transformation composée de deux symétries centrales est une translation. Mais attention ! « S_B suivie de S_A » est la translation $t_{2\overrightarrow{BA}}$. ■

Trois symétries centrales

Soit A, B, C les milieux des côtés du triangle IJK :

$$I \xrightarrow{S_A} J \xrightarrow{S_B} K \xrightarrow{S_C} I$$

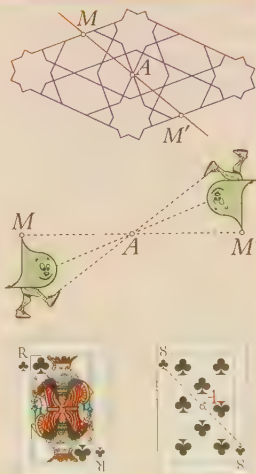
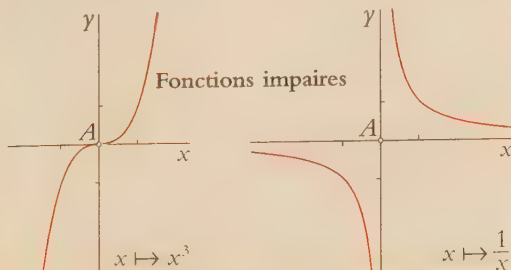
La composée de ces trois symétries est l'identité. ■



Le centre de symétrie

Le point A est centre de symétrie d'une figure F si cette figure est invariante par la symétrie centrale S_A .

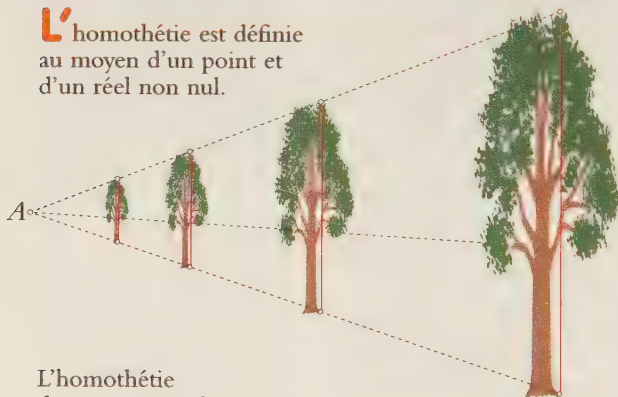
C'est le cas du parallélogramme avec son centre, du cercle avec son centre et de bien d'autres figures ou objets...



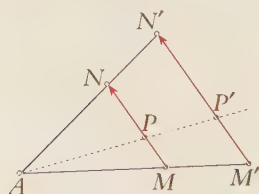
L'homothétie est une traduction géométrique de ce que l'on appelle souvent agrandissement et réduction dans la vie courante.

Généralités et présentation de l'homothétie

L'homothétie est définie au moyen d'un point et d'un réel non nul.



L'homothétie de centre A et de rapport k ($k \neq 0$) est la transformation qui au point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = k \overrightarrow{AM}$.



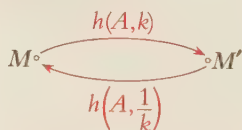
On la note $h(A, k)$.

Si $k = 1$, tous les points du plan sont invariants.

Si $k \neq 1$, seul le centre A est invariant.

Si $k = -1$, l'homothétie est la symétrie de centre A .

● L'homothétie réciproque de l'homothétie $h(A, k)$ est l'homothétie de même centre et de rapport inverse.



● Si le couple (M, N) a pour image (M', N') , alors on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}.$$

d'où $(M'N') \parallel (MN)$

et $M'N' = |k| MN$.

C'est la propriété fondamentale de l'homothétie. ■

Les droites et l'homothétie

● Si le point P est aligné avec M et N , alors P' , son image par h , est alignée avec M' et N' : on dit que l'homothétie conserve l'alignement.

En particulier, le milieu de $[MN]$ a pour image le milieu de $[M'N']$.

● Par une homothétie, l'image d'une droite est une droite parallèle. Si la droite passe par le centre A , elle est sa propre image.

● Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles. Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires. ■

En géométrie analytique

Dans un repère quelconque du plan, soit (a, b) les coordonnées de A , (x, y) celles de M et (x', y') celles de M' . L'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{AM'} = k \overrightarrow{AM}$$

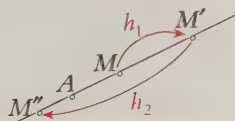
se traduit par :

$$\begin{cases} x' = a + k(x - a) \\ y' = b + k(y - b) \end{cases}$$

C'est la traduction analytique d'une homothétie. ■

Composée de deux homothéties de même centre

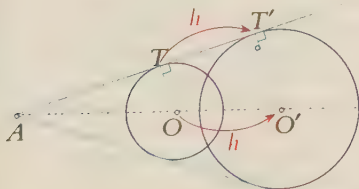
Par $h_1(A, k_1) : M \mapsto M'$
 Par $h_2(A, k_2) : M' \mapsto M''$
 $\frac{AM''}{AM'} = k_1 \frac{AM}{AM'}$ et
 $\frac{AM''}{AM} = k_2 \frac{AM'}{AM}$
 d'où $\overrightarrow{AM''} = (k_1 k_2) \overrightarrow{AM}$.



La transformation composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de même centre, dont le rapport est le produit des deux rapports. Cette composée est l'identité du plan si $k_2 = \frac{1}{k_1}$. ■

L'image d'un cercle

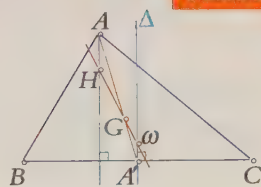
L'image d'un cercle de centre O et de rayon r est un cercle de centre O' , image du point O , et de rayon $|k|r$. Les tangentes communes aux deux cercles, si elles existent, passent par le centre de l'homothétie. ■



Dans un triangle

Soit ABC un triangle dont G est le centre de gravité. Par l'homothétie $h(G, -\frac{1}{2})$ le sommet A a pour image A' , milieu de $[BC]$.

Et c'est ainsi pour chacun des sommets. La hauteur (AH) , issue de A , a donc pour image la perpendiculaire Δ à $[BC]$ en A' , autrement dit la médiane de $[BC]$.



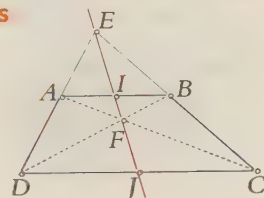
Ainsi, les hauteurs de ABC ont pour images les médianes des côtés, ce qui veut dire que H , orthocentre de ABC , a pour image ω , centre du cercle circonscrit, d'où :

$$\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GH}. \blacksquare$$

Trapeze et homothéties

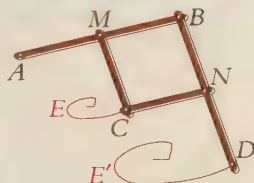
Dans le trapèze $ABCD$, les côtés non parallèles (AD) et (BC) se coupent en E et les diagonales en F . L'homothétie de centre E et de rapport

$k = \frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB}$ transforme le couple (A, B) en (D, C) : le milieu I de $[AB]$ a



pour image J , milieu de $[DC]$, ce qui prouve l'alignement des points E, I, J . ■

Le pantographe de Langlois



Les quatre tiges rectilignes articulées en B, C, M et N sont telles que $BMCN$ est toujours un parallélogramme et que les points A, C, D sont alignés.

A est fixé.

$$\text{On a : } \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AM} = k.$$

Si le point C décrit une figure (E) , le point D décrit une courbe agrandie (E') , image de E par l'homothétie (A, k) . On pouvait utiliser le pantographe de Langlois pour effectuer des agrandissements ou des réductions de dessins. ■

Au lycée, l'étude des angles orientés complète notre connaissance des angles. Elle sert pour comprendre des phénomènes physiques.

Des angles orientés partout

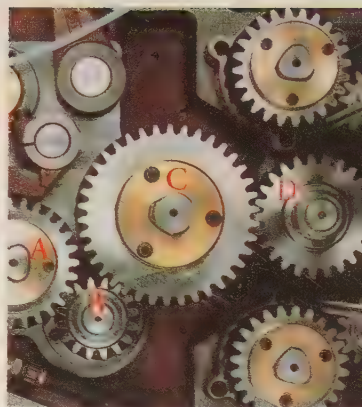
Dans un atelier, une roue dentée tourne à raison de 2 tours par seconde : dans quel sens tournent les roues qu'elle entraîne, et avec quelle « vitesse angulaire » ? Combien de tours par minute pour une hélice de bateau ?



La Terre tourne autour du Soleil, mais dans quel sens et à quelle vitesse ? Et la Lune autour de la Terre ?



Au carrefour, tourner « à droite » ou tourner « à gauche », ce n'est pas la même chose.



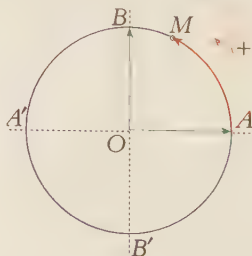
Ces quelques exemples montrent que les angles ne se limitent pas aux angles d'un triangle de 0° à 180° . Il faut aussi pouvoir parler d'orientation et d'angle de plus d'un tour, dans un sens ou dans l'autre. ■

Angles orientés et orientation du plan



Sur un cercle, il y a deux sens de parcours possibles : le sens inverse des aiguilles d'une montre et l'autre sens. Par convention, le premier est le sens positif, ou sens trigonométrique.

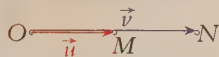
Lorsqu'on a fait le choix d'un sens positif sur un cercle, ce sens est le même pour tous les cercles du plan : on dit que le plan est orienté.



Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dont le rayon est pris pour unité.

On lui associe un repère orthonormal direct $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$. Sur ce cercle, si l'on place un point M , il est repéré par son « abscisse curviligne » : c'est la mesure algébrique de l'arc orienté noté $\widehat{AM}$. C'est un réel positif ou négatif qui s'exprime en radians. Par exemple, une mesure de l'abscisse curviligne de M étant α , on peut ajouter k ($k \in \mathbb{Z}$) tours dans le sens positif ou le sens négatif : on obtient encore le même point M . On écrit $\widehat{AM} = \alpha + k2\pi$, k est un entier relatif. ■

Angle « nul » de deux vecteurs colinéaires de même sens.



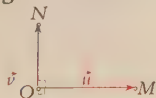
$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 0 + k2\pi$$

Angle de vecteurs colinéaires de sens contraire.



$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \pi + k2\pi$$

Angles droits.



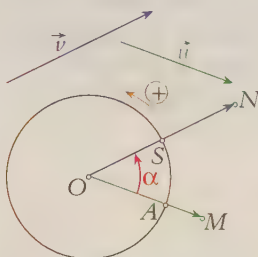
$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,$$

ou $\frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

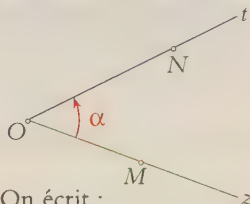
L'angle orienté de deux vecteurs non nuls

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On construit $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$.



Le cercle trigonométrique de centre O coupe en A la demi-droite $[OM)$ et $[ON)$ en S . L'angle orienté noté $(\vec{u}, \vec{v})$ ou $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est l'angle dont il faut faire tourner $\overrightarrow{OA}$ pour l'amenner sur $\overrightarrow{OS}$. Il est indépendant du point O et

des représentants $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les mesures de cet angle orienté sont celles de l'arc orienté $\widehat{AS}$ sur le cercle trigonométrique.



On écrit : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \alpha + k2\pi$ (k est un entier relatif) ou, parfois

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \alpha + k2\pi$. On parle aussi d'angle orienté des deux demi-droites $[OM)$, $[ON)$ soit $(Oz, Ot) = \alpha + k2\pi$.

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires et de même sens à condition qu'une mesure de leur angle orienté soit 0.
- Ils sont colinéaires et de sens contraire à condition qu'une mesure de leur angle orienté soit π radians. ■

La relation de Chasles

Pour tous points A, B, C , distincts de O :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$$

ce qu'il faut rapprocher de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Texte d'Émile Borel (1905)

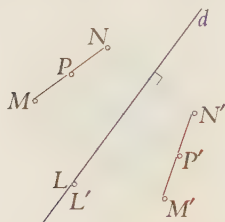
« Nous venons de dire que l'abscisse curviligne de M est 0,6 et que l'abscisse curviligne de N est -1,3; en effet, un mobile assujéti à suivre le cercle et voulant aller par le plus court chemin de A en M devra se diriger dans le sens positif et parcourir un chemin de longueur 0,6; de même, pour aller par le plus court chemin de A en N , il devra se diriger dans le sens négatif et parcourir un chemin

de longueur 1,3. Mais il est possible de se rendre de A en N en marchant dans le sens positif; seulement le chemin est plus long; de même que pour aller de Paris à Moscou, il est loisible, si l'on a le temps, de se diriger par New York, San Francisco, Yokohama et la Sibérie. Pour aller de A en M , on peut, par exemple, décrire 163 fois la circonférence entière dans le sens positif. »

La réflexion, que l'on connaît déjà sous l'appellation de symétrie axiale ou de symétrie orthogonale, évoque un « objet » et son « image » renvoyée par un miroir. La réflexion intervient dans de nombreuses configurations géométriques, et permet également de démontrer des égalités.

Qu'est-ce qu'une réflexion ?

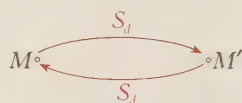
La réflexion est définie au moyen d'une droite d . La réflexion d'axe d , ou symétrie orthogonale par rapport à d , est la transformation qui laisse invariant tout point de d et qui à un point M non situé sur d associe le point M' tel que d soit la médiatrice de $[MM']$. On la note S_d .



S_d a donc une infinité de points invariants : tous les points de d .

- Si M a pour image M' , alors M' a pour image M . On dit que S_d est sa propre réciproque, ou

encore que cette transformation est involutive.



- Si le couple (M, N) a pour image (M', N') alors les deux longueurs MN et $M'N'$ sont égales : la réflexion conserve les distances.

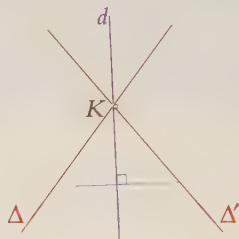
- Si P est un point de $[MN]$, alors son image P' est un point de $[M'N']$. En particulier, le milieu de $[MN]$ a pour image le milieu de $[M'N']$. ■



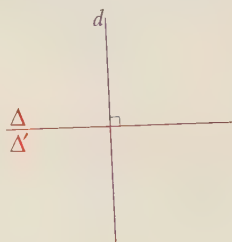
Droites et réflexion

L'image par S_d d'une droite Δ est une droite Δ' .

- Si Δ coupe d en K , alors Δ' passe par K .



- Si Δ est perpendiculaire à d , alors elle est sa propre image.



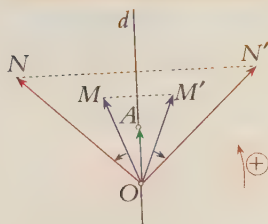
- Si Δ est parallèle à d , alors $\Delta' // d$. ■



La réflexion et les angles orientés

Supposons le plan orienté et soit $\vec{OA}$ un vecteur directeur de la droite d . Si par S_d M a pour image M' , alors $(\vec{OA}, \vec{OM}) = -(\vec{OA}, \vec{OM}')$. De même, si le point N a pour image N' : $(\vec{OA}, \vec{ON}) = -(\vec{OA}, \vec{ON}')$, d'où :

$$(\vec{OM}', \vec{ON}') = -(\vec{OM}, \vec{ON})$$



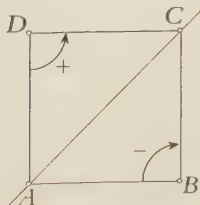
Par une réflexion, l'image d'un angle orienté est l'angle opposé.

Ainsi, dans le carré $ABCD$, si on a :

$$S_{(AC)} \begin{cases} A \rightarrow A \\ C \rightarrow C \\ D \rightarrow B \end{cases}$$

on en déduit :

$$(\vec{DA}, \vec{DC}) = -(\vec{BA}, \vec{BC}).$$



En analytique

Le repère est orthonormal. Soit δ la première bissectrice d'équation $y = x$. Soit $M(x, y)$.

Par la réflexion :

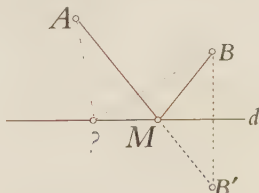
$$S_{xx'} : M \mapsto M_1(x, -y)$$

$$S_{yy'} : M \mapsto M_2(-x, y)$$

$$S_{\delta} : M \mapsto M_3(y, x). \blacksquare$$

Le plus court chemin

Si M doit se situer sur la droite d , où placer M pour que le trajet $AM + MB$ soit le plus court possible ?



En utilisant B' symétrique de B par S_d , on a : $AM + MB = AM + MB'$.

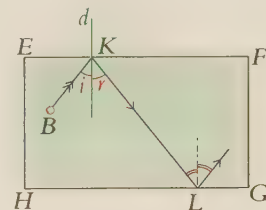
Le plus court chemin est (AB') qui coupe d en M .

C'est d'ailleurs le trajet suivi par le rayon lumineux incident qui se réfléchit de telle sorte que $i = r$. $\blacksquare$

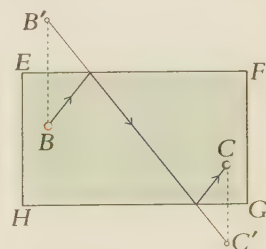


Le billard

La boule de billard B vient frapper la bande (EF) . Si elle n'a pas d'« effet », elle rebondit en respectant la loi des angles $i = r$, par réflexion sur la droite d perpendiculaire à (EF) en K . Puis elle rebondit de nouveau en L sur la bande (HG) .



C'est ainsi que, partant de B , pour venir frapper la boule C avec deux rebonds, l'itinéraire le plus sûr s'obtient à l'aide de B' et C' symétriques de B par rapport à (EF) et de C par rapport à (HG) .

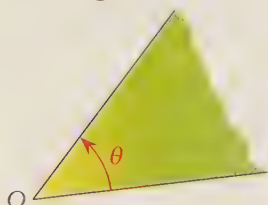


On peut aussi imaginer des billards de forme circulaire. $\blacksquare$

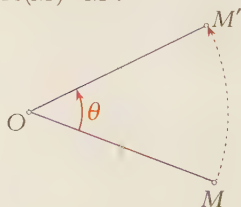
Il s'agit à présent d'une nouvelle manière de présenter la rotation qui a déjà été étudiée au collège, mais, ici, on utilise la notion d'angle orienté de deux vecteurs non nuls.

Présentation de la rotation et définitions

Une rotation est définie au moyen d'un point et d'un angle.



La rotation R de centre O et d'angle θ est la transformation qui laisse O invariant et qui à tout point M autre que O associe le point M' tel que : $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.
On peut écrire $R(M) = M'$.



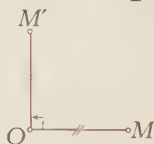
Pour construire le transformé d'un point M , on trace le cercle de centre O et passant par M , et on marque le point M' sur le cercle tel que $\widehat{MM'} = \theta$.

- Le demi-tour :
 $\theta = \pi$

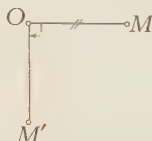


C'est la symétrie de centre le point O .

- Le quart de tour direct :
 $\theta = +\frac{\pi}{2}$



- Le quart de tour inverse :
 $\theta = -\frac{\pi}{2}$



L'image d'une figure par une rotation s'obtient en déterminant l'image des points de cette figure en tenant compte de certaines propriétés de cette transformation. ■

La configuration fondamentale

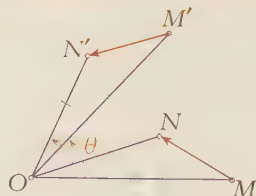
Le couple de points (M, N) a pour image le couple (M', N') par la rotation de centre O et d'angle θ . On a déjà : $OM = OM'$; $ON = ON'$.
D'autre part : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) + (\overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{ON}) = \theta + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) - \theta$.

- d'où :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'})$$

- on a aussi :

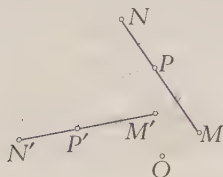
$$MN = M'N' \text{ et } (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta$$



Ce que l'on résume en disant que la rotation « conserve les distances » et « conserve les mesures des angles orientés ». ■

Rotation et alignement de points

Dire que le point P est un point du segment $[MN]$, c'est dire que $MN = MP + PN$.

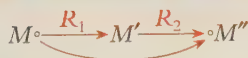


Si, par une rotation, les images de ces points sont respectivement M', P', N' , en raison de la conservation des distances, on a : $M'N' = M'P' + P'N'$, ce qui signifie que P' est un point de $[M'N']$.

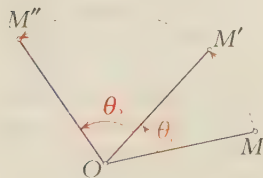
- Par une rotation, trois points alignés ont pour images trois points alignés dans le même ordre : on dit que la rotation « conserve l'alignement ». Le milieu de $[MN]$ a pour image le milieu de $[M'N']$.

- L'image d'une droite est une droite. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la première et $\vec{v}$ un vecteur directeur de la seconde, l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ a pour mesure θ ou $\pi + \theta$. Si d passe O , son image passe par O . ■

La composée de deux rotations

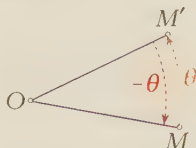


Soit M' l'image de M par la rotation R_1 de centre O , d'angle θ_1 . M'' est l'image de M' par la rotation R_2 de même centre O , d'angle θ_2 . Alors M'' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.



La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre dont l'angle est la somme des angles des deux premières.

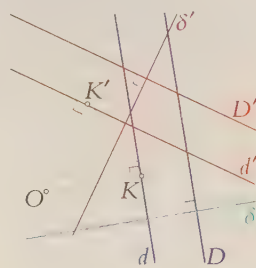
Si l'on fait suivre la rotation $R(O, \theta)$ de la rotation de même centre et d'angle opposé $(-\theta)$, on ramène le point M en M .



Cette transformation est l'identité et les deux rotations $R(O, \theta)$ et $R'(O, -\theta)$ sont dites *reciproques* l'une de l'autre. ■

Parallélisme et orthogonalité

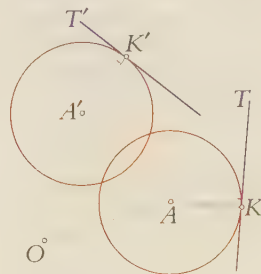
- Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.



- Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires. ■

Cercle et tangente

L'image par $R(O, \theta)$ d'un cercle (A, r) est un cercle (A', r) de même rayon.

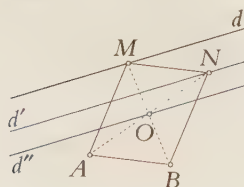


La tangente T au point K du premier a pour image T' , tangente au second en K' qui est l'image de K . ■

Les transformations constituent un bon outil pour résoudre des problèmes de géométrie, en particulier ceux de lieux géométriques et de construction.

Trouver des lieux géométriques

La droite d et les points A et B sont donnés. Ils ne sont pas situés sur d . Un point variable M décrit d . On construit le parallélogramme $AMNB$ de centre O .



Trouver le lieu géométrique du point N et celui du point O lorsque M décrit d .

Point N

On a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est indépendant de M . Le point N est l'image de M par $t_{\overrightarrow{AB}}$. Lorsque M décrit la droite d , le lieu géométrique du point N (ou « l'ensemble » des points N) est l'image de d par

cette translation. C'est une droite d' parallèle à d .

Point O

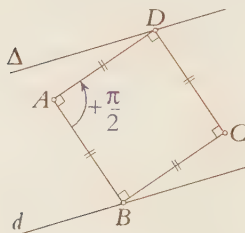
$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AN}$. Le point O est donc l'image du point variable N par l'homothétie de centre A , qui est fixe, et de rapport $\frac{1}{2}$.

L'ensemble des points O est l'image de d' par cette homothétie.

C'est une droite d'' parallèle à d' . ■

La construction d'un carré entre deux droites

On donne deux droites parallèles d et Δ , et un point A . Construire un carré $ABCD$, avec $B \in d$ et $D \in \Delta$.



L'analyse de la figure à construire fait apparaître que D est l'image de B par la rotation de centre A

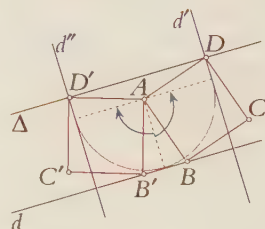
et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Or B est un

point de d , donc le point D est un point de l'image de cette droite par la rotation en question : aussi D est construit comme intersection de deux droites.

Pour construire le point D , on construit donc la droite image de la droite d par la rotation de centre A

et d'angle $\frac{\pi}{2}$: d' coupe Δ

en D . Il reste à construire le point B image de D par la rotation réciproque, puis le point C .



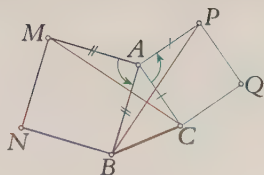
Attention ! Il se peut

que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}$!

Donc D se trouve aussi sur l'image de d par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$: on a donc un autre point D' sur la droite Δ , et un second carré $AD'C'B'$. ■

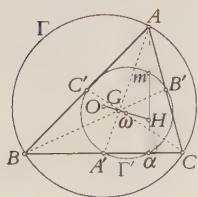
Une démonstration

Le triangle ABC étant quelconque, on a tracé les deux carrés $AMNB$ et $APQC$. Démontrer que les droites (MC) et (BP) sont perpendiculaires et que $MC = BP$. Par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ on a : $M \rightarrow B$ et $C \rightarrow P$ donc $MC = BP$



et l'angle orienté $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BP})$ est égal à $\frac{\pi}{2}$, l'angle de la rotation.² Donc les droites (MC) et (BP) sont perpendiculaires. ■

Une belle configuration



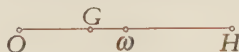
Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Par l'homothétie h de centre G , de rapport $-\frac{1}{2}$,

les points A, B, C ont pour images respectives les points A', B', C' milieux des côtés du triangle. L'image par h du cercle Γ circonscrit à ABC est le cercle Γ' passant par A', B', C' . Le centre O de Γ est le point commun aux médiatrices de ABC : son image ω , centre de A', B', C' est tel que : $\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GO}$.

Par ailleurs, une hauteur (AH) du premier triangle a pour image la médiatrice de $[BC]$. Donc l'image par h de l'orthocentre de ABC est le point O .

$$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GH}.$$

Les quatre points G, O, ω, H sont alignés sur la droite dite d'Euler du triangle.

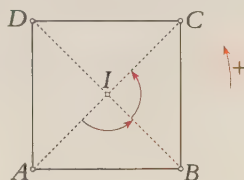


$$\text{Or } \overrightarrow{H\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HO}.$$

L'homothétie h' de centre H , de rapport $\frac{1}{2}$ est la seconde homothétie qui transforme Γ en Γ' . Les milieux m, n, p , respectifs de $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$ sont donc sur le cercle Γ' . Ce cercle Γ' passe aussi par α, β, γ , pieds des hauteurs du triangle ABC . On l'appelle «cercle d'Euler» du triangle ABC . ■

Des invariants à ne pas oublier

Le carré $ABCD$ de centre I est invariant par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ ou π .

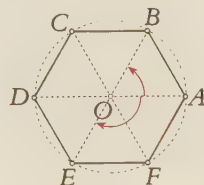


Le triangle équilatéral est invariant par la rotation de centre G

et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$.



L'hexagone régulier, inscrit dans un cercle de centre O ,



est invariant par les rotations de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

ou $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$,

ou π ... ■

Dans «isométrie» il y a *iso* («même») et *metrum* («mesure»).

Une isométrie est une transformation ponctuelle du plan qui conserve les distances. On a déjà étudié la translation, la rotation, la réflexion, sans oublier l'identité...

Mais on obtient encore une isométrie en composant deux de ces transformations.

Les propriétés communes aux isométries

- Trois points alignés ont pour images trois points alignés «dans le même ordre» : une isométrie conserve l'alignement.

- L'image d'une droite est une droite ; l'image d'un segment de droite est un segment de droite ; celle d'une demi-droite est une demi-droite. Une isométrie conserve aussi le parallélisme de deux droites, ainsi que l'orthogonalité des droites.

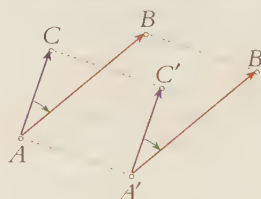
- L'image du barycentre des points $((A, a), (B, b))$ est le barycentre des images de ces points avec les mêmes coefficients. En particulier, l'image du milieu d'un segment $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.

- L'image du centre de gravité d'un triangle ABC est le centre de gravité du triangle image $A'B'C'$.

- L'image d'un cercle C est un cercle C' de même

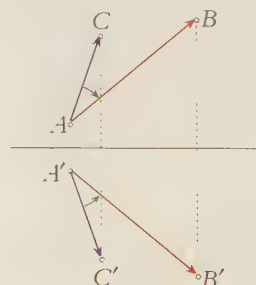
rayon. Si la droite D est tangente au cercle C , l'image de D est tangente à C' .

- Toute isométrie conserve l'aire d'un triangle et plus généralement l'aire d'une surface plane quelconque.



C'est la raison pour laquelle les translations, les rotations et l'identité sont appelées des «isomé-

tries positives», ou encore «déplacements» alors que les réflexions sont des «isométries négatives», également appelées des «antidéplacements».



On voit sur ce schéma ce qu'est un antidéplacement. ■

Pour les angles

Une isométrie transforme un angle «géométrique» en un angle égal.

En revanche, pour un angle orienté c'est plus compliqué : une translation ou une rotation conserve l'orientation.

L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ se transforme en un angle égal :

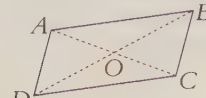
$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}),$$

mais une réflexion transforme un angle orienté en l'angle opposé

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

En présence de certaines configurations, on peut sans doute utiliser telle ou telle isométrie...

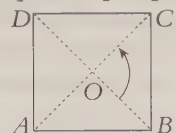
● En présence d'un *parallélogramme* on peut penser à :


 – une translation
 $t_{\overline{AB}}$ ou $t_{\overline{AD}}$;
 – une symétrie centrale S_O .

● En présence d'un *rectangle* on peut penser à :


 – des translations, une symétrie ;
 – des réflexions d'axes d ou d' .

● En présence d'un *carré*, on peut de plus penser à :


 – une rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$;
 – une rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$.

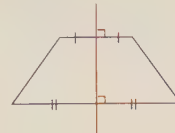
● En présence d'un *triangle équilatéral*, on peut penser à :


 – des réflexions dont les axes sont les axes de symétrie du triangle ;
 – des rotations de centre G ou A .

● En présence d'un *cercle*, on peut penser à :


 – des rotations de centre O ;
 – des réflexions par rapport à un diamètre.

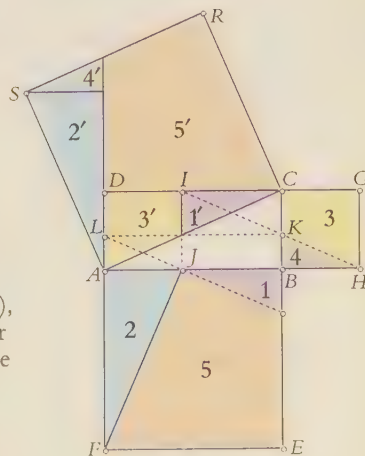
● En présence d'un *trapèze isocèle*, on peut penser à :


 – une réflexion par rapport à l'axe de symétrie du trapèze. ■

Analyse d'une figure et démonstration

Le triangle ABC est rectangle en B . On a construit les deux carrés $ABEF$ et $BCGH$. Le point J est pris sur $[AB]$ tel que $AJ = BC$. De même $DI = AD$. (IH) coupe (BC) en K . On trace par K la parallèle à (AB) , d'où le point L . Le reste de la construction parle d'elle-même. On obtient un découpage des deux carrés en 5 parties : (1)(2)(3)(4)(5).

Au moyen de ces cinq morceaux, on peut reconstituer le carré $ACRS$ construit sur l'hypoténuse $[AC]$ de $ABC...$ sans trous. Il reste à le démontrer. L'utilisation d'isométries qui transforment (1) en (1'), (2) en (2'), (3) en (3'), etc., permet de démontrer que l'on peut réaliser cette reconstitution du grand carré, autrement dit que $AB^2 + BC^2 = AC^2$. ■



La réflexion conserve les distances. Elle transforme un angle orienté de mesure α en un angle orienté de mesure $-\alpha$.

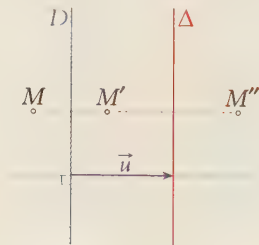
Donc la composée de deux réflexions est une transformation qui conserve les distances et qui conserve les angles orientés. D et Δ sont deux droites du plan, S_D et S_Δ sont les réflexions d'axes respectifs D et Δ . On pose $T = S_\Delta \circ S_D$ et on se demande ce qu'est la transformation T .

Les trois cas de composées de deux réflexions

Selon que D et Δ sont confondues, parallèles ou sécantes, la composée des deux réflexions n'est pas le même type de transformation.

Premier cas : D et Δ sont confondues ; on a donc $S_D = S_\Delta$ et l'on a vu que $S_\Delta \circ S_D$ est l'identité.

Deuxième cas : D et Δ sont distinctes et parallèles :



On obtient $S_\Delta \circ S_D = \tau_{\vec{u}}$; $\tau_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}$ étant le vecteur :

- de direction perpendiculaire à D ;

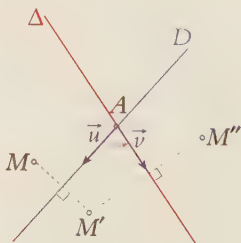
- de sens D vers Δ ;
- de norme égale à la distance entre les deux droites.

Attention !

$S_D \circ S_\Delta = \tau_{-\vec{u}}$, c'est la translation réciproque de $\tau_{\vec{u}}$.

Troisième cas :

D et Δ sont sécantes en un point A :



On obtient ici $S_\Delta \circ S_D = R(A, \theta)$ avec $\theta = 2(\vec{u}, \vec{v})$.

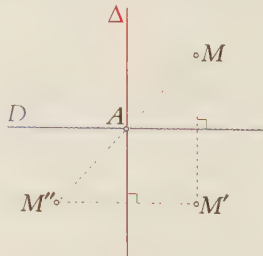
La composée est donc une rotation de centre A .

De même, $S_D \circ S_\Delta = R(A, -\theta)$. Ce sont deux rotations réciproques.

Cas particuliers

Si les droites D et Δ sont perpendiculaires, on obtient :

$S_\Delta \circ S_D = S_D \circ S_\Delta = R(A, \pi)$; leur composée est la symétrie de centre A .

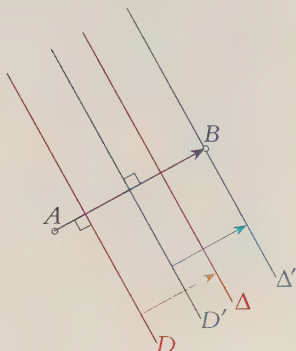


La composée de deux réflexions (on dit aussi le « produit ») peut être une translation ou une rotation.

Réciproquement, toute isométrie du plan peut se décomposer en produit de 1, 2 ou 3 symétries axiales. ■

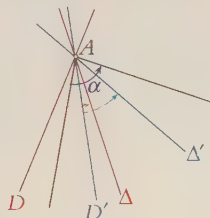
La décomposition d'une translation ou d'une rotation

● Soit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on peut la décomposer d'une infinité de façons en un produit de deux réflexions



d'axes parallèles. Ces axes sont perpendiculaires à (AB) et le 2^e axe est l'image du premier par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

● Soit la rotation de centre A et d'angle α . On peut la décomposer d'une infinité de façons



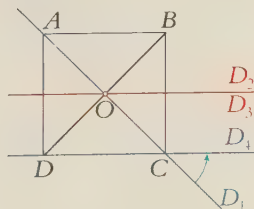
en un produit de deux réflexions d'axes sécants en A .

Le deuxième axe est l'image du premier par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\alpha}{2}$.

Parmi cette infinité de possibilités pour le choix des axes, il faut bien choisir les axes qui sont les mieux adaptés au problème traité. En particulier, on peut essayer de composer une réflexion avec elle-même. ■

L'utilisation d'une décomposition d'isométries

Quelle est l'idée directrice ?



On se propose d'étudier la composée de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, notée R , et de la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$, notée T . On cherche donc $T \circ R$. On décompose R et T chacune en produit de deux réflexions : $R = S_2 \circ S_1$

et $T = S_4 \circ S_3$. On choisit les axes D_3 de S_3 et D_2 de S_2 pour qu'ils soient confondus, il restera $T \circ R = S_4 \circ S_1$ et on connaît la nature de $S_4 \circ S_1$. On connaît donc $T \circ R$.

Les axes D_1 et D_2 passant par O , les axes D_3 et D_4 sont perpendiculaires à (AD) ; donc pour D_2 et D_3 on choisira la perpendiculaire à (AD) qui passe par O . Reste à trouver D_1 et D_4 ; D_2 est l'image de D_1 dans $R(O, \frac{\pi}{4})$ donc D_1 est l'image de D_2 dans $R(O, -\frac{\pi}{4})$.

D_1 est la droite (OC) . D_4 est l'image de D_3 dans la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

D_4 est la droite (DC) . On a donc $T \circ R = S_4 \circ S_1$. D_4 et D_1 sont des droites sécantes en C . $T \circ R$ est donc une rotation de centre C . L'angle de cette rotation est $2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

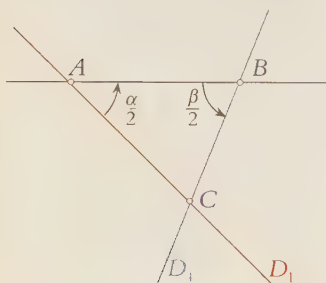
On a donc $T \circ R = R(C, \frac{\pi}{2})$.

On pouvait d'ailleurs remarquer a priori que C était un point invariant. $C \xrightarrow{R} B \xrightarrow{T} C$. ■

On sait composer deux translations, deux rotations de même centre et deux réflexions. Voyons d'autres compositions.

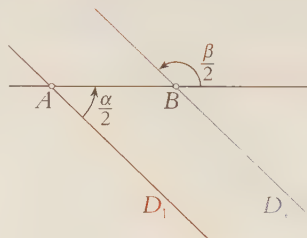
La composée de deux rotations

Après les composées de translations, voyons celle des rotations de centres quelconques. r est la rotation de centre A et d'angle α . r' est la rotation de centre B et d'angle β . Qu'est-ce que $r'or$?



Idée générale

Décomposer chacune de ces rotations en produit de réflexions : $r'or = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$. Pour S_2 et S_3 , on peut choisir le même axe (AB) .
 $r = S_{AB} \circ S_1$ et $r' = S_4 \circ S_{AB}$.
 L'axe D_1 de S_1 est alors l'image de (AB) par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\alpha}{2}$, et D_4 , axe de S_4 , est l'image de (AB) par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\beta}{2}$.



On a :
 $r'or = S_4 \circ (S_{AB} \circ S_{AB}) \circ S_1 = S_4 \circ S_1$.

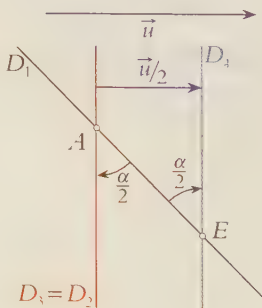
Deux cas se présentent alors :

- Si $\alpha + \beta = k2\pi$ alors $D_1 \parallel D_4$. $S_4 \circ S_1$ est alors une translation.
- Si $\alpha + \beta \neq k2\pi$ alors D_1 et D_4 sont sécantes en C . $S_4 \circ S_1$ est alors la rotation de centre C et d'angle $\alpha + \beta$. ■

La composée de deux rotations r et r' quelconques est soit une translation, soit une rotation selon que $\alpha + \beta$ est l'angle nul ou non. En général, ror' n'est pas égale à $r'or$!

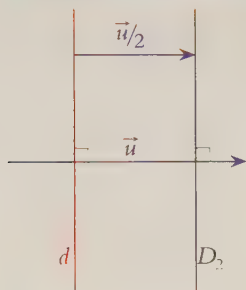
La composée d'une rotation et d'une translation

L'idée générale est la même : décomposer chacune de ces isométries en produit de réflexions :
 $tor = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
 Pour S_2 et S_3 , on peut choisir le même axe : la droite d passant par A , centre de la rotation, et perpendiculaire à la direction du vecteur $\vec{u}$ de la translation.

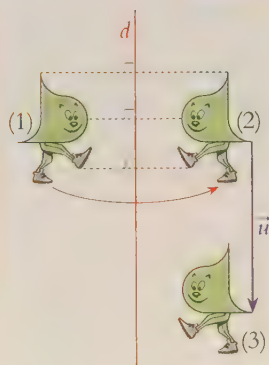


On sait alors déterminer les autres axes D_1 et D_4 pour S_1 et S_4 : ces droites D_1 et D_4 sont sécantes en E et on a :
 $tor = S_4 \circ (S_d \circ S_d) \circ S_1 = S_4 \circ S_1$.

Cette transformation est la rotation de centre E et de même angle α que r . ■



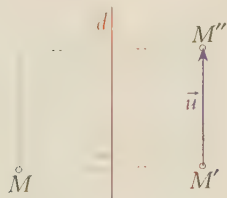
La composée d'une réflexion d'axe d et d'une translation dont le vecteur est de direction perpendiculaire à d est une réflexion d'axe parallèle à d .
En général $t \circ S_d$ n'est pas égale à $S_d \circ t$.



Soit à étudier $t \circ S_d$.
Dans le cas particulier où le vecteur $\vec{u}$ de translation est un vecteur de direction perpendiculaire à d , on décompose t :
 $t \circ S_d = S_2 \circ S_1 \circ S_d$,
et pour la réflexion S_1 , on peut prendre pour axe la droite d puisqu'elle est perpendiculaire à $\vec{u}$.
L'axe D_2 de S_2 se déduit alors de d par la translation de vecteur $\frac{\vec{u}}{2}$.
On a alors
 $t \circ S_d = S_2 \circ S_d \circ S_d = S_2$.

Glissement

Dans le cas où le vecteur de la translation t est

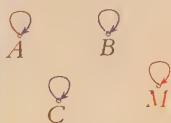


quelconque, la composée $t \circ S_d$ s'appelle glissement : cette isométrie n'a pas de point invariant.

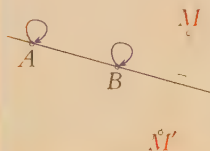
On peut toujours alors la décomposer en une réflexion suivie d'une translation parallèle à l'axe de réflexion. ■

Une classification des isométries

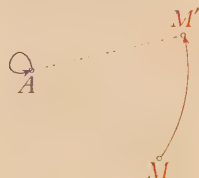
● Si une isométrie possède *trois points invariants non alignés*, alors cette isométrie est l'identité du plan.



● Si une isométrie possède *deux points invariants A et B*, alors c'est une réflexion d'axe (AB) .



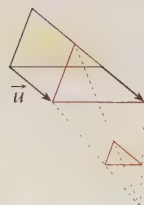
● Si une isométrie possède *un point unique invariant A*, alors c'est une rotation de centre A.



● Si une isométrie n'a *aucun point invariant*, alors c'est soit une translation, soit un glissement.



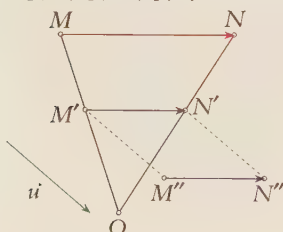
Dans les problèmes d'agrandissement ou de réduction d'une figure, il arrive souvent qu'il faille appliquer à cette figure d'abord une isométrie puis une homothétie, ou inversement : cette transformation composée est une similitude du plan.



Homothétie et translation

Soit h une homothétie de centre O , de rapport k et t une translation de vecteur $\vec{u}$ quelconque : pour deux points M et N on a :

$$M \xrightarrow{h} M' \xrightarrow{t} M'' \\ N \xrightarrow{h} N' \xrightarrow{t} N''$$



Ainsi, pour tout couple (M, N) : $\overrightarrow{M''N''} = k \overrightarrow{MN}$.

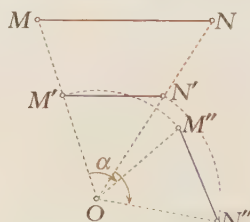
L'application composée $t \circ h$ est une homothétie de même rapport k .

De même, $h \circ t$ est aussi une homothétie de même rapport. Il reste à préciser le centre : c'est l'unique point invariant. ■

La transformation composée d'une homothétie de rapport k et d'une translation quelconque est une homothétie de rapport k .

Homothétie et rotation de même centre O

La composée d'une homothétie h de rapport k positif et de centre O et d'une rotation r de même centre O est une similitude.



Pour un couple de points (M, N) quelconques on a :

$$M \xrightarrow{h} M' \xrightarrow{r} M''$$

$$N \xrightarrow{h} N' \xrightarrow{r} N''$$

avec $\overrightarrow{M''N''} = k \overrightarrow{MN}$

et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''}) = \alpha$.

● Ce produit est commutatif :

$$r \circ h = h \circ r = S.$$

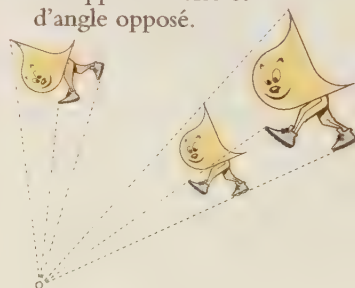
● Le point O est invariant par S : c'est le centre de la similitude.

● Dans une similitude, les distances sont multipliées par k et les angles orientés sont conservés.

● Les aires sont multipliées par k^2 .

La similitude S est caractérisée par : son centre O , son rapport k et par son angle α qui est l'angle de la rotation.

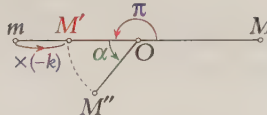
La similitude réciproque de $S(O, k, \alpha)$ est la similitude $S^{-1}(O, \frac{1}{k}, -\alpha)$, de rapport inverse et d'angle opposé.



Cas où k est négatif

L'homothétie $h(0, k)$ avec $k < 0$ peut être considérée comme l'application composée du demi-tour de centre O et de l'homothétie de centre O et de rapport positif $(-k)$: la composée $r \circ h$ est encore une similitude directe de centre O ,

de rapport $(-k)$ et d'angle $\pi + \alpha$.



D'une manière plus générale, on dit que la composée d'un déplacement du plan et d'une homothétie quelconque est une similitude directe. L'homothétie, la rotation, la translation sont des similitudes particulières. ■

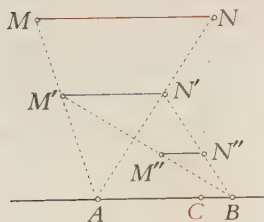
Fonction complexe et similitude

Soit Z l'abscisse du point M dans le plan complexe et Z' celle du point M' : si M' est l'image de M par une similitude, on a $Z' = aZ + b$ avec $a \neq 0$. Cette fonction affine $Z \rightarrow Z'$ dans l'ensemble des complexes est associée à la similitude considérée. Le module de a : c'est le rapport de similitude.

Si $|a| = 1$, la similitude est réduite à une translation ou une rotation. Si a est un réel autre que 1, il s'agit d'une homothétie. L'argument de a : c'est l'angle de la similitude ou de la rotation. Le centre: c'est le point invariant dont l'abscisse est solution de l'équation dans $\mathbb{C}$: $Z = aZ + b$.

La composée de deux homothéties

On a déjà examiné la composition de deux homothéties de même centre. Voyons maintenant la composée de deux homothéties quelconques.



Soit h l'homothétie de centre A et de rapport k (non nul) et h' l'homothétie de centre B et de rapport k' (non nul).

Pour tout couple de points (M, N) on a :
 $M \xrightarrow{h} M' \xrightarrow{h'} M''$
 $N \xrightarrow{h} N' \xrightarrow{h'} N''$

avec $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$ et
 $\overrightarrow{M''N''} = k' \overrightarrow{M'N'}$,
 donc $\overrightarrow{M''N''} = kk' \overrightarrow{MN}$.

Si $kk' = 1$ alors :

$$\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{MN}.$$

La transformation composée $h' \circ h$ est une translation réduite éventuellement à l'identité du plan.

Si $kk' \neq 1$ alors

$$\overrightarrow{M''N''} = kk' \overrightarrow{MN}.$$

La transformation composée $h' \circ h$ est une homothétie de rapport kk' . Il reste à déterminer son centre C .

Il est aligné avec les deux centres A et B des homothéties composantes.

La transformation composée de deux homothéties h et h' dépend des rapports k et k' de ces homothéties. Si $kk' = 1$, $h' \circ h$ est une translation.

Si $kk' \neq 1$, $h' \circ h$ est une homothétie dont le centre est aligné avec les centres de h et de h' .

Centre de $h' \circ h$ lorsque $kk' \neq 1$

Soit C le centre de l'homothétie $h' \circ h$.
 $\overrightarrow{C} \xrightarrow{h} L \xrightarrow{h'} C$ On a
 $\overrightarrow{AL} = k \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} = k' \overrightarrow{BL}$.

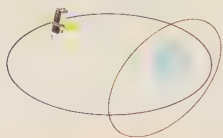
D'où
 $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = k'(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL}) = k' \overrightarrow{BA} + kk' \overrightarrow{AC}$;
 on a donc $\overrightarrow{AC}(kk' - 1) = (k' - 1) \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AC} = \frac{(1 - k')}{(1 - kk')} \overrightarrow{AB}$ avec
 $kk' \neq 1$ ce qui permet de placer le point C connaissant A et B . ■

Nous vivons dans un monde en «trois dimensions» et il est clair que la géométrie plane ne saurait être suffisante pour décrire ce monde.

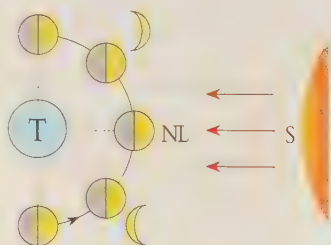
L'espace et nous

Le repérage d'un lieu sur la *sphère terrestre* nécessite un système particulier de coordonnées avec la définition de la latitude et de la longitude de ce lieu. Le suivi de la trajectoire d'un satellite autour



de notre planète ne peut pas se contenter de la géométrie plane. Seule une demi-Lune est éclairée par le Soleil et la compréhension des *phases de la Lune* vues à partir de la Terre – croissant de lune ou gibbosité ou pleine lune – nécessite une étude des positions des trois «objets» Terre, Lune et Soleil et de la vision, depuis la Terre, de la partie

éclairée de la Lune à ce moment-là. Là aussi, la géométrie plane ne suffit pas. ■

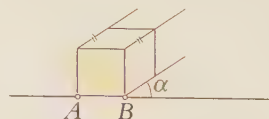


La perspective «cavalière» : une convention commode

Représenter sur une feuille «plane» un objet en trois dimensions est un problème qui se pose lorsque l'on étudie la «géométrie dans l'espace».

Il faut parfois un certain entraînement pour bien se représenter un volume lorsqu'il est dessiné sur cette feuille. Un système d'ombres, de couleurs, de pointillés pour les lignes cachées, peut y aider. On utilise souvent la *perspective cavalière*.

faisant un angle α , toujours le même, avec (AB) : cet angle de fuite peut être de 30° , 45° ou 60° ...

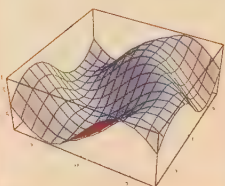


- Les figures situées dans un plan perpendiculaire aux rayons visuels sont représentées en *vraie grandeur*.

- Une direction perpendiculaire à la face frontale est représentée comme

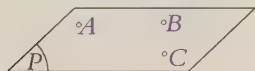
- Des droites parallèles sont représentées par des parallèles : des segments de même longueur sur ces droites sont représentés par des segments de même longueur. Mais la longueur réelle est multipliée par un coefficient de perspective k ($k < 1$). ■

Surface en 3D par ordinateur



Un objet géométrique : le plan

Le plan est une figure essentielle en géométrie de l'espace. On le représente souvent par une « plaque vue en perspective », c'est-à-dire comme un parallélogramme et on peut le désigner par P .



- Par trois points A , B et C non alignés il passe un plan P et un seul : on le désigne par (ABC) . On dit que trois points non alignés *déterminent* un plan.

- Si A et B sont deux points de P , alors tous les points de la droite (AB) sont des points de P : on écrit $(AB) \subset P$: « la droite (AB) est incluse dans le plan P ».

- Deux droites *sécantes* déterminent un plan. On dit qu'elles sont *coplanaires*.



- Une droite d et un point M non situé sur d déterminent un plan P .

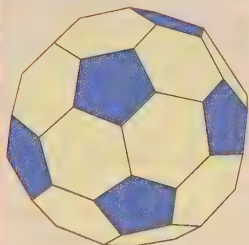
- Par deux droites parallèles non confondues il passe un plan P et un

seul : deux droites parallèles déterminent un plan. Elles sont coplanaires.

- Une droite qui n'a qu'un point commun avec le plan P est *sécante* à ce plan.

- Toute figure contenue dans P est une figure plane : c'est vrai pour le cercle par exemple ou encore le parallélogramme. Et s'applique à ces figures tout ce que l'on sait en géométrie plane. ■

Le ballon de football



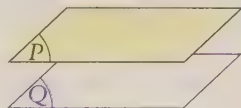
Voilà un polyèdre remarquable. Autour de chaque sommet s'assemblent deux hexagones réguliers et un pentagone régulier. Comme dans de nombreux polyèdres, si S est le nombre des sommets, F le nombre des faces et A le nombre des arêtes, on a la relation d'Euler-Poincaré :

$$S + F = A + 2.$$

Deux plans

Points clés

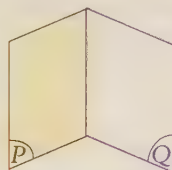
Deux plans parallèles P et Q sont deux plans sans point commun. On écrit $P \parallel Q$ ou $P \cap Q = \emptyset$.



Deux plans confondus sont parfois considérés comme parallèles.

Deux plans sécants sont deux plans qui ont une droite d en commun : on écrit $P \cap Q = d$.

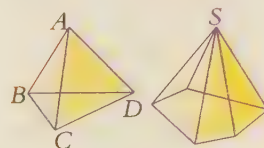
Si deux plans ont un point commun, alors ce sont des plans sécants selon une droite qui passe par ce point commun. ■



Un polyèdre

C'est un solide délimité par des faces planes qui sont des polygones plans.

- La *pyramide* a une base qui est un polygone d'un plan P et un sommet S non situé dans P . ■



Les propriétés des objets de la géométrie dans l'espace sont souvent des généralisations de propriétés de géométrie plane. Avec le parallélisme, il faut se méfier : cela ne se passe pas pareil pour les droites et pour les plans.

Droites et plans parallèles

Plusieurs cas de figure sont à étudier.

● Les droites parallèles

Deux droites parallèles sont deux droites d et d' d'un même plan et sans point commun : on écrit $d // d'$.

● Les plans parallèles

Deux plans parallèles sont deux plans sans point commun : on écrit $P // Q$. Pour que deux plans soient parallèles, il suffit

que deux droites sécantes de l'un soient parallèles à l'autre plan.

● Une droite et un plan

Une droite d parallèle à un plan P est une droite sans point commun avec ce plan : $d // P$.

● Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il suffit qu'elle soit parallèle à une droite de ce plan.

Attention !

Des droites non coplanaires, c'est-à-dire non situées dans un même plan, ne sont ni sécantes ni parallèles !

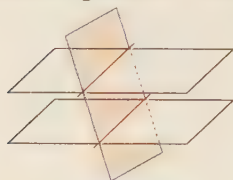
Dans certains cas, « parallèles » pour deux droites ou deux plans peut signifier « confondus ». Il est plus simple de penser « sans point commun ». ■

Des propriétés pour démontrer le parallélisme

Si deux plans sont parallèles alors :

① Toute droite de l'un est parallèle à l'autre.

② Tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

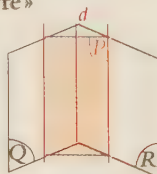


③ Tout plan sécant à l'un

est sécant à l'autre et les intersections sont des droites parallèles.

④ Toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.

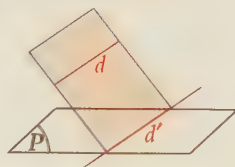
● Le « livre »



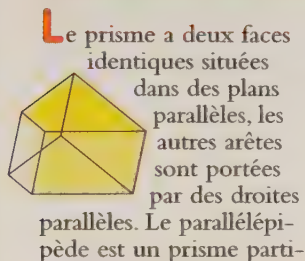
Trois plans P , Q et R sont sécants deux à deux.

Si P est parallèle à l'intersection de Q et R , alors il coupe Q et R suivant deux droites parallèles.

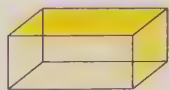
● Si la droite d est parallèle au plan P , tout plan contenant d et qui coupe P le coupe suivant une parallèle à la droite d . ■



Des solides avec des parallèles



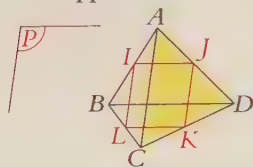
culier dont toutes les faces sont des parallélogrammes.



Le parallélépipède rectangle a six faces qui sont des rectangles. ■

La section d'un tétraèdre

Examinons maintenant le cas de la section d'un tétraèdre $ABCD$ par un plan parallèle à deux arêtes opposées.



Soit P un plan passant par I , point de $[AB]$, et parallèle à la fois à (AC) et à (BD) .

$P \cap (ABD)$: c'est une droi-

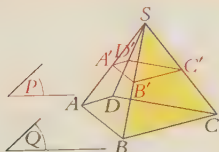
te (IJ) parallèle à (BD) .

$P \cap (ADC)$: c'est une droite (JK) parallèle à (AC) .

$P \cap (BCD)$: c'est une droite (KL) parallèle à (BD) .

$P \cap (ABC)$: c'est une droite (LI) parallèle à (AC) . Cette section $IJKL$ est un parallélogramme du plan P . Si I est le milieu de l'arête $[AB]$, alors J , K et L sont aussi les milieux d'arêtes du tétraèdre. Le centre du parallélogramme est le centre de gravité du tétraèdre. ■

Le tronc de pyramide

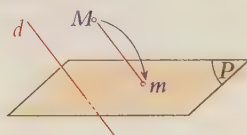


Coupons la pyramide $SABCD$ par un plan P parallèle au plan de base Q : $Q // P$. $P \cap (SAB)$ est une droite $(A'B')$ parallèle à

(AB) et il en est de même pour chacune des faces (SBC) , (SCD) et (SDA) . La section est, dans le plan P , un quadrilatère $A'B'C'D'$: en utilisant le théorème de Thalès dans chacun des plans tel que (SAB) , on montre que : $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \dots$ ■

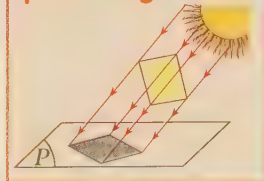
La projection sur un plan

Examinons le cas de la projection sur un plan parallèlement à une droite. Soit d une droite sécante au plan P . M étant un point quelconque, il passe par M une seule parallèle à d qui coupe P en m : ce point m est le projeté de M sur le plan P parallèlement à d .



- Des points alignés sur une parallèle à d ont tous le même projeté sur P .
- Des points alignés non pour projetés des points confondus ou alignés.
- La projection conserve le milieu d'un segment.
- Deux droites parallèles entre elles et non parallèles à d se projettent suivant deux droites parallèles.
- La projection d'un parallélogramme est un parallélogramme. ■

L'ombre d'un parallélogramme



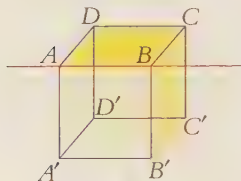
La perpendicularité est une propriété de l'espace plus surprenante qu'elle en a l'air : ainsi, il suffit qu'une droite soit perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan pour faire un angle droit avec toutes les autres.

Droites et plans perpendiculaires

Il existe plusieurs configurations où apparaît la perpendicularité.

Deux droites

Deux droites *perpendiculaires* sont deux droites sécantes formant quatre angles droits. Deux droites *orthogonales* sont deux droites non sécantes telles que les parallèles à ces droites passant par un même point soient perpendiculaires.



Par exemple, dans ce cube, les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires alors que (AB) et $(B'C')$ sont orthogonales.

Une droite, un plan

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire ou orthogonale à toutes les droites de ce plan. Pour qu'une droite soit

perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Deux plans

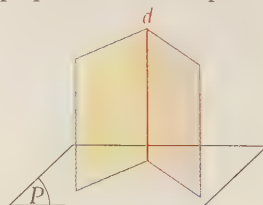
Deux plans perpendiculaires sont deux plans tels que l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

Pour démontrer

- Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux droites sont perpendiculaires au même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux droites sont perpendiculaires, tout plan perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.
- Pour que deux droites soient orthogonales ou perpendiculaires, il suffit que l'une soit perpendiculaire à un plan qui contient l'autre.

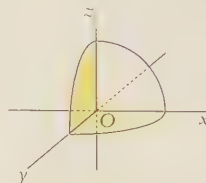
Plans perpendiculaires

Si deux plans sécants sont perpendiculaires au même plan, alors leur intersection est une droite perpendiculaire à ce plan.



Trièdre trirectangle

On considère trois plans perpendiculaires deux à deux :

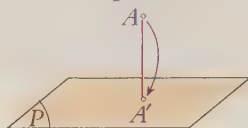


Les trois droites d'intersection sécantes en O sont perpendiculaires deux à deux : elles forment un trièdre trirectangle. C'est cette configuration que l'on utilise pour le repérage dans l'espace. ■

La projection orthogonale sur un plan

Par un point A quelconque il passe une et une seule perpendiculaire au plan P : elle coupe P en A' , appelé projeté orthogonal de A sur le plan P . Si A est dans P , il est confondu avec son

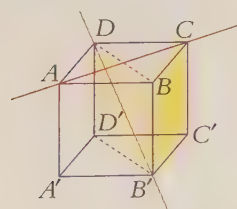
projeté sur P . La longueur AA' est la distance du point A au plan P . ■



L'utilisation de la perpendicularité

On utilise la perpendicularité dans différents cas :

Démonstration dans un cube

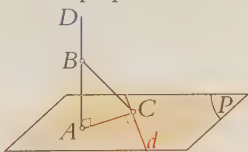


Pour démontrer par exemple que (AC) et (DB') sont orthogonales, il suffit de montrer que la droite (AC) est perpendiculaire au plan (DBB') , qui contient (DB') . Cette propriété est immédiate en raison du fait que, dans ce cube, (AC) est perpendiculaire à (DB) et (AC) est orthogonale à (BB') , donc (AC) est bien perpendiculaire au plan (DBB') .

Trois perpendiculaires... qui sont quatre!

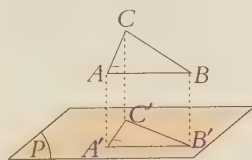
La droite D est perpendiculaire au plan P en A .

La droite d est dans P . (AC) est perpendiculaire à d dans le plan P ... ce qui fait trois perpendiculaires...



Quel que soit B , point de D , on démontre facilement que (BC) est perpendiculaire à d : il suffit de remarquer que la droite d est perpendiculaire au plan (ABC) .

Projection orthogonale d'un triangle rectangle

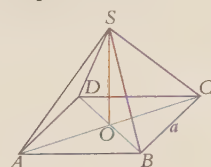


ABC étant un triangle rectangle en A , projetons orthogonalement ce triangle sur le plan P :

on obtient un triangle $A'B'C'$, sauf si le triangle ABC est dans un plan perpendiculaire à P . Si l'un des côtés de l'angle droit, (AB) par exemple, est parallèle à P , alors $A'B'C'$ est aussi rectangle en A' . Il suffit de montrer que la droite $(A'B')$ est perpendiculaire au plan $(AA'C'C)$.

Des calculs

Perpendiculaires et angles droits permettent d'utiliser la propriété de Pythagore dans un triangle rectangle, comme en géométrie plane, à condition d'extraire de la configuration de l'espace une figure plane adéquate.

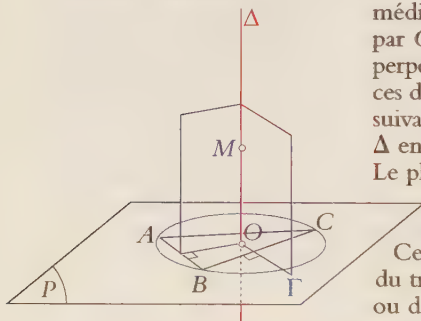


La base de cette pyramide régulière est un carré de côté a . Le sommet S est sur la perpendiculaire au plan de base, passant par le centre O du carré : la hauteur OS est égale à a . On peut montrer que SOA est un triangle rectangle en O . On sait calculer OA dans le carré $ABCD$, puis SA en fonction de a dans SAO , puis en déduire des mesures d'angles... ■

Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ de milieu I est le plan m passant par I et perpendiculaire à la droite (AB) . C'est «l'équivalent» en géométrie de l'espace de la médiatrice en géométrie plane.

L'axe d'un triangle ou d'un cercle

Considérons le triangle ABC dans le plan P ; Γ est son cercle circonscrit de centre O .



Le plan médiateur de $[AB]$ passe par O ; il est perpendiculaire à (AB) donc au plan P . Le plan médiateur de $[BC]$ passe par O et il est également perpendiculaire au plan P : ces deux plans sont sécants suivant la perpendiculaire Δ en O au plan P .

Le plan médiateur de $[CA]$ contient aussi cette droite Δ .

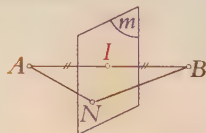
Cette droite Δ est l'axe du triangle ABC ou du cercle Γ .

Propriété caractéristique du plan médiateur

Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble de tous les points de l'espace équidistants des extrémités du segment.

Autrement dit :

$NA = NB$ équivaut à $N \in m$.



Pour tout point M de Δ on a $MA = MB = MC$ et cette longueur est aussi la distance de M à tout point du cercle. ■

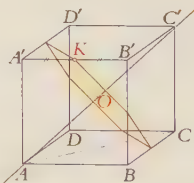
Le plan médiateur dans un cube

Le cube a une arête qui mesure a .

- Le plan médiateur de $[AC]$ est $(DBB'D')$: en effet, ce plan perpendiculaire à (AC) passe par le milieu de $[AC]$.
- Le plan médiateur de $[AB]$ est aussi celui de $[DC]$, de $[A'B']$ et de $[D'C']$.

- L'axe du cercle circonscrit à $ABCD$ est la perpendiculaire au plan de base, passant par le milieu de $[AC]$: c'est un axe de symétrie du cube

- Le plan médiateur de la diagonale $[AC']$ passe par le centre du cube; il passe par le milieu K de $[A'B']$ car $KA = KC' = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.



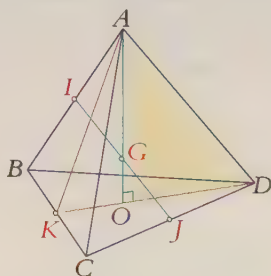
Il passe aussi par les milieux de $[DC]$, de $[BC]$... c'est-à-dire des six arêtes qui ne contiennent pas A et C' ! La section du cube par ce plan est un hexagone dont on peut montrer qu'il est régulier. ■

Le tétraèdre régulier

Un tétraèdre est régulier si les six arêtes ont même longueur : autrement dit, chaque sommet est à égale distance des trois autres. Les quatre faces sont des triangles équilatéraux de côté a . Les propriétés de cette configuration sont assez remarquables !

- Le sommet A appartient aux plans médiateurs de $[BC]$, de $[CD]$ et de $[DA]$: ces trois plans ont en commun la droite (AO) ,

perpendiculaire au plan (BCD) et O est le centre de gravité du triangle BCD .



Les plans médiateurs de deux arêtes opposées telles que $[AB]$ et $[CD]$ ont en commun le seg-

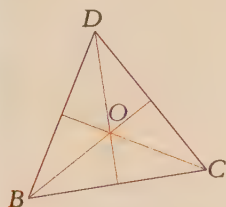
ment joignant les milieux I et J de ces deux arêtes. Les six plans médiateurs des arêtes ont en commun un point G , milieu de $[IJ]$, centre de gravité du tétraèdre.

Et on a $AG = \frac{3}{4}AO$ et $GD = AG$.

En géométrie de l'espace, il est intéressant d'extraire des figures planes pour effectuer des calculs d'angles et de longueurs (voir encadré ci-dessous). ■

Pour s'exercer à extraire des figures planes

- Étude du triangle BCD

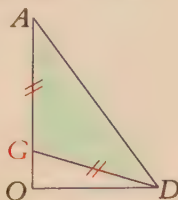


C'est un triangle équilatéral de côté a , de hauteur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ donc, O étant son centre, on a :
 $DO = CO = BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
 Il en est de même dans chaque face.

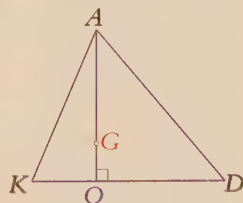
- Calculs dans le triangle ADO

C'est un triangle rectangle en O . On peut calculer AO car
 $AO^2 = AD^2 - OD^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}$
 $AO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C'est la hauteur du tétraèdre. Dans le triangle isocèle AGD on peut calculer l'angle $\widehat{AGD}$: on trouve $\widehat{AGD} \approx 109^\circ$.



- Calcul dans ADK , K étant le milieu de $[BC]$

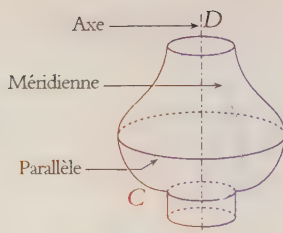


On sait calculer l'angle $\widehat{AKD}$ dans le triangle AKO :

$$\cos \widehat{AKO} = \frac{KO}{KA} = \frac{1}{3}.$$

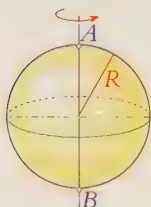
C'est l'angle des deux faces (ABC) et (BCD) du tétraèdre.

Une surface de révolution d'axe D est la surface engendrée par la rotation autour de D d'une courbe C située dans un plan qui contient l'axe D .



La sphère

Elle est engendrée par la rotation d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$, autour de la droite (AB) .



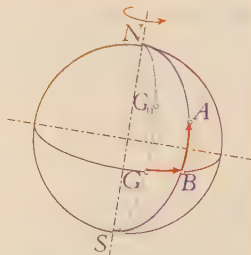
- La sphère de centre O et de rayon R est aussi l'ensemble de tous les points de l'espace situés à une distance R du centre O . La boule est l'intérieur de cette surface, ensemble des points N tels que : $ON < R$.

Son volume est $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Son aire : $S = 4 \pi R^2$. ■

La sphère terrestre

La sphère terrestre n'est pas tout à fait une sphère... L'axe des pôles (NS) est l'axe fictif autour duquel la Terre tourne sur elle-même en 24 heures. La section par le plan diamétral perpendiculaire à l'axe des pôles est l'équateur. Un demi-cercle de diamètre $[NS]$ est un méridien : en chaque point de la Terre il passe un méridien et un seul, c'est le méridien du lieu... Un point A est alors repéré par sa longitude et sa latitude après avoir fait choix d'un méridien « origine »,



celui de Greenwich. Le méridien de A coupant l'équateur en B , la longitude, n'est autre que la mesure de l'arc GB vers l'est ou vers l'ouest, tandis que la latitude est la mesure de l'arc BA , vers le nord ou vers le sud.

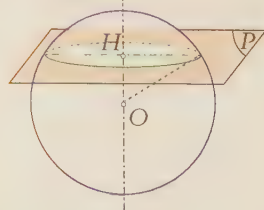
Sphère et plans

La position d'un plan P par rapport à la sphère de centre O et de rayon R dépend de la distance d du centre O à ce plan :

- Si $d > R$, le plan n'a pas de point commun avec la sphère.

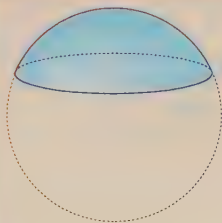
Si $d < R$, le plan coupe la sphère suivant un cercle de centre H , projeté de O sur P , et de rayon $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$.

C'est un **petit cercle** de la sphère.

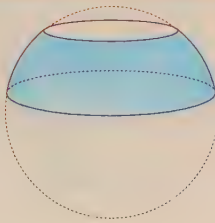


Si $d = 0$, le plan est un plan diamétral et le cercle A pour rayon R : c'est un **grand cercle** de la sphère ou cercle diamétral.

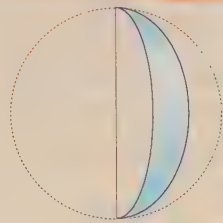
Si $d = R$, le plan est tangent en A à la sphère ; il est perpendiculaire à la droite (AO) . ■



Calotte sphérique



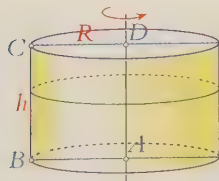
Zone sphérique



Fuseau sphérique

Le cylindre de révolution

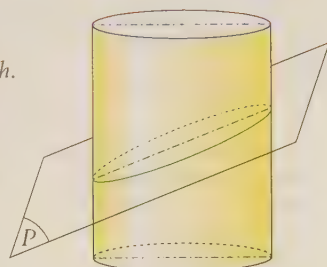
Étant donné un rectangle $ABCD$, le cylindre de révolution d'axe (AD) est la surface engendrée par la rotation de ce rectangle tournant autour de l'axe (AD) . Son rayon de base est $R=AB$ et sa hauteur est $h=AD$.



Volume : $V = \pi R^2 h$.
 Aire latérale : $Al = 2\pi R h$.
 Aire totale :
 $At = 2\pi R h + 2\pi R^2$.

- Un parallèle de cette surface est un cercle de rayon R dont l'axe est (AD) .

- Une méridienne est constituée par deux segments parallèles à (AD) situés dans un plan sécant contenant l'axe de rotation.

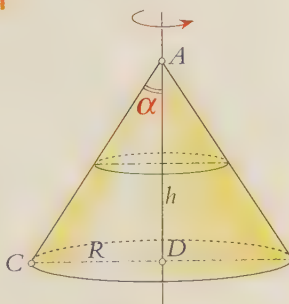


- La section d'un cylindre par un plan non parallèle et non perpendiculaire à l'axe de rotation est une ellipse. ■

Le cône de révolution

C' est la surface de révolution engendrée par la rotation autour de (AD) du côté (AC) d'un triangle ADC rectangle en D . Le rayon de base est $R=DC$; sa hauteur est $h=AD$.

Le demi-angle au sommet α est l'angle $\widehat{DAC}$.
 Volume : $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$.



- Sa section par un plan perpendiculaire à l'axe

(AD) est un cercle : c'est un parallèle de la surface.

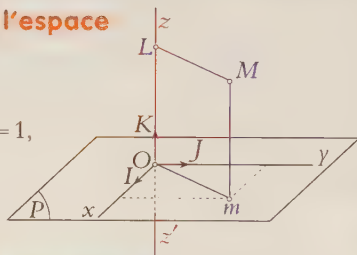
- Sa section par un plan contenant l'axe (AD) est constituée par deux segments : c'est une méridienne de la surface.

- La section du cône par un plan P qui fait avec l'axe un angle égal à α est une parabole. ■

Deux axes permettent de se repérer dans les deux dimensions du plan. Il faut trois axes dans les trois dimensions de l'espace.

Des repères dans l'espace

Dans un plan P , on considère le repère (O, I, J) avec $OI = OJ = 1$, les deux axes étant perpendiculaires. Soit zz' la perpendiculaire en O au



plan P : sur cet axe, on place K tel que $OK = 1$. Le repère (O, I, J, K) est un repère orthonormal de l'espace : les axes xx' , yy' et zz' sont perpendiculaires deux à deux. ■

Les coordonnées d'un point M

Un point M quelconque se projette orthogonalement en m sur le plan P : les coordonnées de m sont (x, y) dans (O, I, J) . Soit L le point de zz' tel que $MLOm$ soit un rectangle : l'abscisse z de L sur l'axe zz' est la cote du point M . Ainsi le point M est repéré par les trois coordonnées : (x, y, z) ; x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z la cote de M .

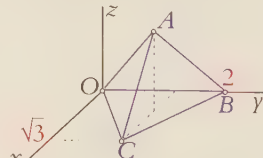
(zOx) sont les plans de coordonnées.

Un point de (xOy) est caractérisé par $z=0$.

Un point de (yOz) est caractérisé par $x=0$.

Un point de (xOz) est caractérisé par $y=0$.

Exemple



$ABCO$ est un tétraèdre régulier d'arête égale à 2 : O est à l'origine du repère, (OB) est portée par yy' .

Les coordonnées de

B sont $(0; 2; 0)$.

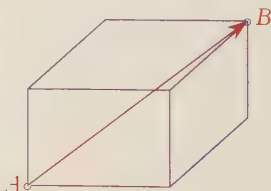
Les coordonnées de C sont $(\sqrt{3}; 1; 0)$. On sait que la hauteur du tétraèdre est

$\frac{a\sqrt{6}}{3}$, donc les coordonnées

de A sont $(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; \frac{2\sqrt{6}}{3})$. ■

L'utilisation des coordonnées

Soit deux points donnés avec leurs coordonnées $A(a, b, c)$ et $B(a', b', c')$.



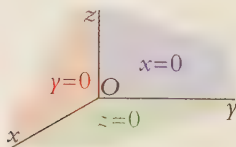
Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées les moyennes arithmétiques des deux coordonnées :

$$I\left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}, \frac{c+c'}{2}\right).$$

La longueur du segment $[AB]$ est donnée par :

$$AB = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2}.$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}(a'-a, b'-b, c'-c)$. ■



Un point de l'axe xx' est caractérisé par $(x, 0, 0)$.

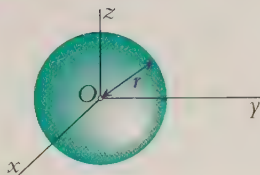
Un point de l'axe yy' est caractérisé par $(0, y, 0)$.

Un point de l'axe zz' est caractérisé par $(0, 0, z)$.

Les plans (xOy) , (yOz) ,

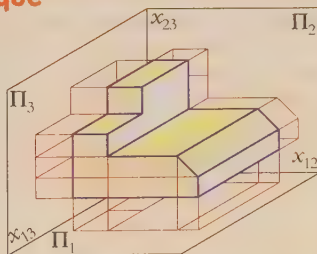
L'équation d'une sphère

La sphère de centre O , de rayon r a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. La sphère de centre A , et de rayon r a pour équation : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$. ■



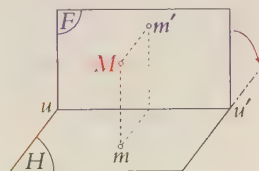
Le dessin technique

La représentation d'un solide au moyen des projections sur trois plans perpendiculaires deux à deux est le principe même du dessin technique.

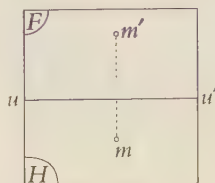


Le principe de la géométrie descriptive

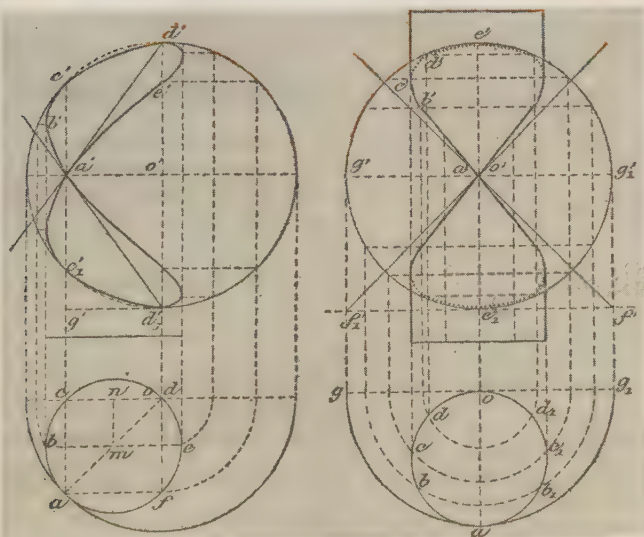
La géométrie descriptive est un procédé de représentation d'un objet de l'espace. Elle fut inventée par le mathématicien Gaspard Monge (1746 - 1818), l'un des fondateurs de l'Ecole polytechnique.



Un point M se projette en m et m' sur deux plans perpendiculaires sécants suivant la droite (uu') : le plan horizontal et le plan frontal. Ce dernier plan est alors « rabattu » dans un même plan que l'horizontal; M est alors repéré par le couple de points (m, m') situés sur une perpendiculaire à la « ligne de terre » (uu') .



Et l'on procède ainsi pour tous les points d'une même figure spatiale, ce qui donne des dessins sur lesquels on peut faire des mesures. ■



Représentation en géométrie descriptive de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère dite « fenêtre de Viviani ».

C'est le mathématicien français Viète qui eut l'idée de représenter des nombres par des lettres. Le livre où il explique ses idées, *Introduction en l'art analytique*, fut publié en 1591, alors que les guerres de religions apportaient la mort et la haine dans les villes et les campagnes françaises.

Quelques généralités concernant le calcul littéral

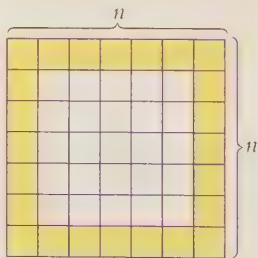
Voici un texte important de François Viète (1540-1603) :
« Les grandeurs données seront distinguées des inconnues en signifiant les grandeurs inconnues par l'élément alphabétique A ou quelques autres voyelles E, I, O, Y, et les données par les éléments B, C, D ou quelques autres des consonnes » (Cinquième loi de la « zététique »).
 Son « truc » n'avait l'air de rien mais apportait des simplifications considérables dans l'écriture des calculs.
 Ainsi, au lieu de la phrase :
« Le double du rectangle sous les costés, ajouté à l'aggrégé des carrés est égal au carré de la somme des costés », on écrit aujourd'hui :

$$2LI + L^2 + I^2 = (L+I)^2.$$

- Les règles du calcul algébrique traduisent certaines propriétés géométriques, ainsi on peut avoir plusieurs formules

pour traduire une même situation.

Par exemple, le nombre de carrés coloriés peut être donné par :



$N_1 = 4n - 4$ ou
 $N_2 = n^2 - (n-2)^2$ ou
 $N_3 = (n + (n-2)) \times 2$, etc.
 N_1 est la différence de deux nombres ;
 N_2 est la différence de deux carrés, N_3 est le double d'une somme de deux nombres.

- Voici une autre situation où l'usage des lettres est intéressant :
 Un cuisinier décide de donner tous ses œufs à six filles du village qui lui en demandaient.

À la première, il donne la moitié de ses œufs plus un demi, à la deuxième la moitié du reste plus un demi, à la troisième la moitié du reste plus un demi et ainsi de suite jusqu'à la sixième.



Combien la sixième a d'œufs s'il en a au départ 63 ? 351 ? On trouve que la sixième en a 0, 1 ou 10.
 Pour faire ce calcul, on pouvait recommencer à chaque fois, mais il est plus simple d'appeler A le nombre initial d'œufs :
 la première en a : $\frac{A+1}{2}$;
 la seconde : $\frac{A+1}{4}$;
 la troisième : $\frac{A+1}{8}$;
 la sixième : $\frac{A+1}{64}$;

• Pour effectuer correctement des calculs algébriques, il faut respecter des règles.

Première règle

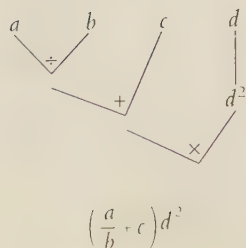
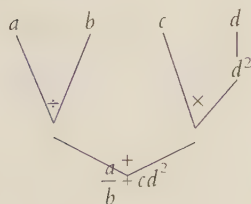
Effectuer les calculs entre parenthèses, s'il y en a.

Deuxième règle

Faire attention à l'ordre des calculs. En l'absence de parenthèses, il faut effectuer les opérations dans l'ordre suivant :

- d'abord effectuer les puissances ;
- puis les produits ou les quotients ;
- enfin les sommes ou les différences. ■

Exemple



Factorisation et développement

En mathématiques, il est très souvent intéressant de travailler sur des produits ; quelles sont les règles qui permettent de transformer une somme en un produit ?

Au collège vous en avez déjà appris trois :

- 1 $ab + ac = a(b + c)$
ou $ab - ac = a(b - c)$.
- 2 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
- 3 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
et $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Au lycée s'ajoutent les deux règles suivantes :

- 4 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
et $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$.
- 5 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
et $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Par exemple :

En appliquant 1.

$$3(2x-1) + x(1-2x) = (3-x)(2x-1).$$

En appliquant 4.

$$8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x+3)^3.$$

En appliquant 2.

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = (x - \sqrt{2})^2.$$

Pour vérifier si une factorisation est juste, il suffit de développer le produit écrit au deuxième membre et de voir si on retrouve le premier membre.

Pour $3(2x-1) + x(1-2x)$ on développe et on trouve : $-2x^2 + 7x - 3$.

Si on développe $(3-x)(2x-1)$, on trouve aussi $-2x^2 + 7x - 3$.

La factorisation est certainement juste, sauf si on a fait des erreurs qui se compensent... ■

Les propriétés des proportions

L'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$)

s'appelle une proportion.

Si cette proportion est vraie, alors on a aussi la proportion : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ si $c \neq 0$.

Dans une proportion, les « produits en croix »

sont égaux :

$$a \times d = b \times c.$$

On a aussi la propriété importante suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{ma+nc}{mb+nd}$$

pour tous les nombres m et n qui sont tels que $b+d \neq 0$ et $mb+nd \neq 0$. ■

Un complément sur les puissances et les radicaux

Les notations «puissance» et «radical» sont très pratiques mais il faut prendre garde aux signes des nombres qui y interviennent.

Les puissances

$$(n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} a^0 = 1 & a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n \times a. \end{cases}$$

$a \times a \times a \times \dots \times a$ (n fois) $= a^n$.
 a^{-n} est l'inverse de a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0). \quad \blacksquare$$

Le radical $\sqrt[n]{a}$

Si a est un réel positif, $\sqrt[n]{a}$ désigne le réel positif dont la $n^{\text{ième}}$ puissance est a .

Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} = b$ signifie $b \geq 0$ et $b^n = a$.

- $\sqrt[n]{a}$ se note aussi $a^{\frac{1}{n}}$.
- $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ se note $a^{-\frac{1}{n}}$.

Avec cette notation d'exposant fractionnaire, les formules connues sur les exposants entiers s'appliquent de la même façon avec ces exposants fractionnaires. α étant un entier quelconque ou encore $\frac{1}{n}$ ou $-\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$\text{On a } (ab)^{\alpha} = a^{\alpha} \times b^{\alpha},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}},$$

$$(a^{\alpha})^n = a^{\alpha n}$$

$$a^{\alpha} \times a^n = a^{\alpha+n}. \quad \blacksquare$$

Avec des radicaux

On a souvent à transformer l'écriture d'un nombre comportant des radicaux. Voici quelques «trucs» à savoir utiliser : ($a > 0$) ($c > 0$).

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

$$(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b) = a - b^2.$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{c}) = a - c.$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-b} = \frac{1 \times (\sqrt{a}+b)}{(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)} = \frac{\sqrt{a}+b}{a-b^2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{c}} = \frac{1 \times (\sqrt{a}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{c})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{a-c}.$$

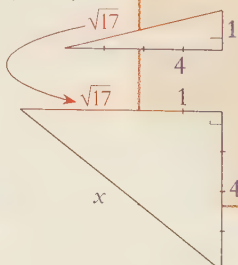
$$\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{(a-b)(a+b)} = \sqrt{a-b} \sqrt{a+b} \text{ si } a > b. \quad \blacksquare$$

Puissances, radicaux et géométrie

Pour les géomètres grecs, les nombres étaient des mesures de longueurs, d'aires, de volumes. Tous les objets géométriques qu'ils savaient construire à la règle et au compas étaient mesurés par un nombre,

par exemple la diagonale d'un carré dont la longueur est $\sqrt{2}$. Descartes reprit cette idée en cherchant à «construire» géométriquement les racines d'une équation, comme l'illustre l'exemple traité ci-dessous. $\blacksquare$

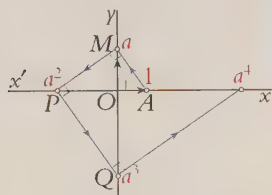
Pour construire $\sqrt{17}$, il suffit de construire un triangle rectangle de côtés de l'angle droit 4 et 1 et l'hypoténuse vaut $\sqrt{17}$. Supposons que l'on veuille «construire» un segment de longueur $\sqrt{34+2\sqrt{17}}$.



On a : $34 + 2\sqrt{17} = (\sqrt{17}+1)^2 + 4^2$. Après avoir construit $\sqrt{17}$, on trace un triangle rectangle de côtés de l'angle droit $(\sqrt{17}+1)$ et 4. L'hypoténuse a une longueur x égale à $\sqrt{34+2\sqrt{17}}$. Cette longueur intervient dans une méthode inventée par Gauss pour construire un polygone régulier de 17 côtés...

Puissances d'un nombre et leurs inverses

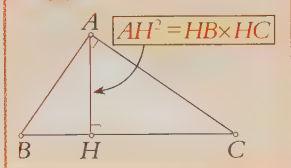
On utilise un repère orthonormal avec $OA=1$ sur $x'x$, $OM=a$ sur $y'y$.



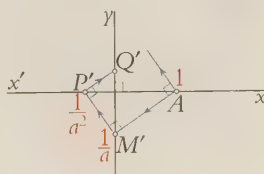
La perpendiculaire en M à (AM) coupe $x'x$ en P . $OP=a^2$.

La perpendiculaire en P à (MP) coupe $y'y$ en Q : $OQ=a^3$ et ainsi de suite. On obtient sur $x'x$ des points d'abscisse a^n avec n pair et sur $y'y$ les points d'ordonnées les puissances impaires de a . Pour les inverses des puissances, on « tourne en sens

Rappel



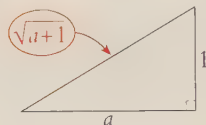
inverse», la perpendiculaire en A à (AM) coupe $y'y$ en M' : $OM'=\frac{1}{a}$.



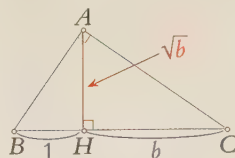
La perpendiculaire en M' à (AM') coupe $x'x$ en P' , $OP'=\frac{1}{a^2}$ et ainsi de suite pour obtenir $\frac{1}{a^n}$. ■

Construire un radical

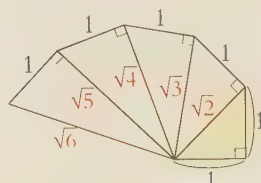
Le théorème de Pythagore fournit le moyen de construire $\sqrt{a^2+1}$ si les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent 1 et a .



On peut aussi utiliser la hauteur AH dans la configuration précédente : Si $HB=1$ et $HC=b$, on a $HA=\sqrt{b}$.



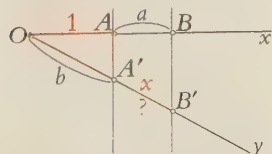
À partir du triangle rectangle isocèle de côté 1, on « construit » $\sqrt{2}$, puis, de proche en proche, cette spirale des radicaux permet de construire $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, etc.



Mais on peut évidemment aller plus vite... ■

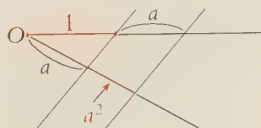
Construire un produit grâce à Thalès

Si l'on a $OA=1$, $AB=a$ sur Ox et si l'on porte $OA'=b$ sur Oy et puis $(BB') \parallel (AA')$ alors, d'après le théorème de Thalès, $\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$ d'où $x=ab$.

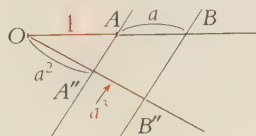


Si on pose $AB=a$ (sur Ox) et $OA'=a$ (sur Oy), le tracé de (BB') parallèle à (AA')

donne B' avec $A'B'=a^2$.



a^2 étant maintenant connu, il suffit de prendre $OA''=a^2$ et le point B'' de Oy est tel que $A''B''=a^3$. ■



Les problèmes liés aux pourcentages

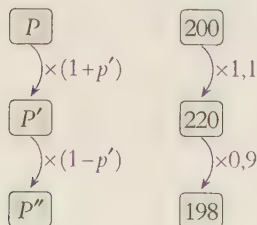
Prendre les 12 % d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par 0,12. D'une façon générale, prendre p % d'un nombre A , c'est multiplier ce nombre par $\frac{p}{100}$. Si on pose $p' = \frac{p}{100}$, on multiplie A par p' .

$$A \xrightarrow{\times 0,12} A' = \frac{12}{100} A$$

$$A \xrightarrow[\times \frac{p}{100}]{\times p'} \frac{pA}{100} = p'A$$

Augmentation et diminution

Le prix d'un article augmente de p %, puis diminue de p %. Quel est le prix final ?



On a :

$$P'' = (1+p')(1-p')P$$

$$P'' = (1-p'^2)P.$$

Par exemple :

si $p = 10\%$, $p' = 0,1$;

$p'^2 = 0,01$ soit une baisse de 1 %.

Si le prix diminue d'abord de 10 % puis augmente de 10 %, le résultat est aussi une baisse de 1 %.

L'utilisation des opérateurs multiplicatifs permet d'éviter des erreurs. ■

Les taux d'intérêt

Pendant cinq années, le taux de la caisse d'épargne d'un pays n'a pas changé. J'ai placé l'équivalent de 520 € le 1^{er} janvier 1999, et j'ai touché 580 € le 31 décembre 2003.

Quel était le taux annuel ?

Soit t % le taux annuel

$$\text{et } t' = \frac{t}{100}.$$

On obtient

$$580 = (1+t')^5 \times 520.$$

On a donc

$$(1+t')^5 = \frac{580}{520} \approx 1,115$$

soit 11,5 %.

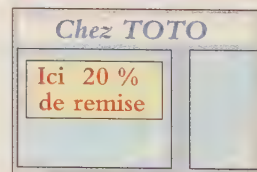
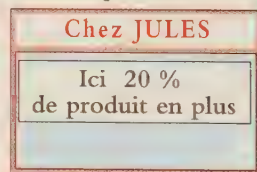
Pour trouver $1+t'$, soit on procède par tâtonnements à l'aide de la calculatrice,

soit on calcule $1,115^{\frac{1}{5}}$ directement (avec les puissances fractionnaires) : on obtient 1,022 environ. Le taux annuel est donc de 2,2 % qui est moins que le cinquième de 11,5...

La somme à laquelle s'applique le taux change chaque année. ■

Les promotions

Voici deux affichages, vus chez deux vendeurs, pour le même produit.



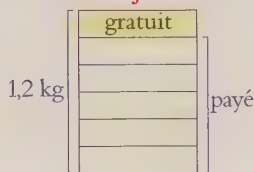
Laquelle de ces promotions est la plus avantageuse pour l'acheteur ?

Supposons qu'un kilogramme d'un certain produit vaille x euros chez ces deux commerçants proposant deux promotions différentes.

Chez le premier, on a pour x euros 1,2 kg de produit ; le prix du kg est donc $\frac{x}{1,2}$.

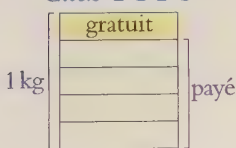
Chez le second, on a 1 kg de produit pour 0,8x euros.

Chez JULES



Il y a $\frac{1}{6}$ du produit gratuit

Chez TOTO



Il y a $\frac{1}{5}$ du produit gratuit

Il vaut donc mieux aller chez le second. ■

Lu dans la presse... où tout est relatif...

Référendum à Nice : le «oui» l'emporte, mais la participation des Niçois a été de 22,71 % seulement. Le référendum organisé hier pour demander aux Niçois leur avis sur la reconduction d'un arrêté anti-mendicité est un demi-échec pour le maire : faible participation, et donc victoire du «oui» (66,3 %) émanant de quelque 15 inscrits sur 100 seulement.

Le prix d'une chemise

Le prix d'une chemise. Celui-ci se décompose de la façon suivante : 60 % pour la main-d'œuvre et 40 % pour le tissu et les boutons. La main-d'œuvre augmente de 10 %. Le tissu et les boutons augmentent de 30 %. De combien augmente le prix de revient de la chemise ?

M et T désignant respectivement le prix de la main-d'œuvre et du tissu et des boutons, on a le prix initial :

$$P = M + T.$$

Après augmentation, on a $M' = 1,10 M$ et $T' = 1,30 T$, d'où le nouveau prix de revient :

$$P' = (1,10 M) + (1,30 T).$$

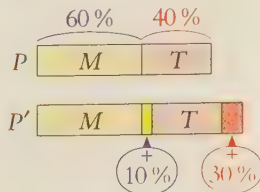
Or $M = 0,6 P$ et $T = 0,4 P$ donc :

$$P' = (1,10 \times 0,6 P) + (1,30 \times 0,4 P)$$

$$P' = P \times 1,18.$$

$$P' = P \times (1 + 0,18).$$

Le prix de revient augmente donc de 18 %. ■

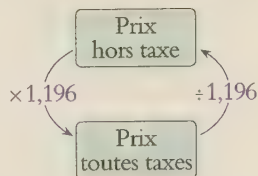


La TVA

Lors de presque toutes les transactions commerciales effectuées chaque jour, le prix payé par le consommateur est le prix «toutes taxes comprises» (ou «prix TTC»).

Ce prix s'obtient en augmentant le prix «hors taxes» («prix HT») du montant de la TVA, égale en France à 19,6 % pour beaucoup de produits et services.

Par exemple, un home-cinéma qui coûte 2000 € hors taxes est payée 2412 € par l'acheteur, dont 412 € de taxes sont reversés à l'État par le vendeur.



Inversement, si l'acheteur a payé 250 €, combien a-t-il payé de taxes ?

Le prix hors taxes s'obtient en divisant 250 € par 1,196, ce qui donne 2090 € (arrondis). Les taxes s'élèvent donc approximativement à 410 €. ■

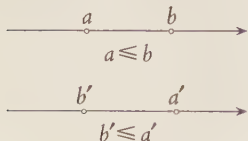
On connaît les réels positifs : leur ensemble est noté $\mathbb{R}^+$.

L'ensemble des réels négatifs est noté $\mathbb{R}^-$.

Le réel 0 est à la fois positif et négatif : $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$.

La relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$

Dire que $a \leq b$, c'est dire que la différence $b - a$ est un réel positif. $a \leq b$ équivaut à $b - a \in \mathbb{R}^+$.



• Dire que $a < b$, c'est dire que $b - a$ est un réel strictement positif ($a \neq b$).

• La relation d'ordre dans l'ensemble des nombres réels correspond à la relation « être à la gauche de » dans l'ensemble des points d'une droite.

C'est Richard Dedekind qui, en 1872, mit ainsi l'accent sur l'identité de structure existant entre les points d'une droite et les nombres réels. Sa découverte déboucha sur la première véritable définition de ce qu'est un nombre réel. ■

Les propriétés

Ces propriétés se retiennent facilement en repérant les nombres par des points d'une droite graduée.

$a \in \mathbb{R}^+$ équivaut à $0 \leq a$
 $b \in \mathbb{R}^-$ équivaut à $b \leq 0$.

• Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$.

• Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$.

• Si $a \leq b$ alors $-b \leq -a$.

• Si a et b sont de même signe ($b \neq 0$) alors $ab > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$.

• Si a et b sont de signes contraires ($b \neq 0$), alors $ab < 0$ et $\frac{a}{b} < 0$.

• Si $a \leq b$ et $a' \leq b'$ alors $a + a' \leq b + b'$. On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens.

Mais attention !

On ne peut pas les retrancher ou les multiplier. Par exemple : $6 < 7$ et $3 < 5$ mais $6 - 3$, qui vaut 3, n'est pas inférieur à $7 - 5$, qui vaut 2.

• Pour deux réels a et b strictement positifs, $a < b$ équivaut à $\frac{a}{b} < 1$. ■

L'étude d'un signe

Un carré est toujours positif, de même que la somme de deux carrés. Si $A = (2x - 1)^2$, alors on a $A = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$ et $A > 0$

pour toute autre valeur de x .

Si $B = (2x - 1)^2 + 16$: alors $B > 0$ pour toute valeur de x .

Pour un produit ou un quotient

Leur signe dépend des signes respectifs des facteurs ou des termes.

On utilise la « règle des signes ».

Soit $P = (2x - 1)(x + 3)$.

On étudie séparément le signe de chacun des facteurs $(2x - 1)$ et $(x + 3)$; un tableau de synthèse permet de déterminer le signe de P , ou encore de

$$\frac{2x-1}{x+3}.$$

x	$-\infty$	-3	$1/2$	$+\infty$
signe de $2x-1$	-	-	0	+
signe de $x+3$	-	0	+	+
signe de P	+	0	-	0

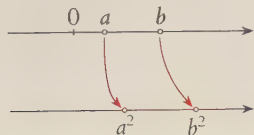
Ordre et opérations

● Si $a < b$, quel que soit c , alors $a + c < b + c$.
L'addition d'un réel ne change pas l'ordre.

● Si $a < b$ et c positif, alors $ac < bc$.
Si $a < b$ et c négatif, alors $ac > bc$.

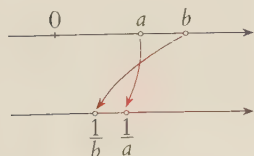
La multiplication par un réel positif conserve l'ordre et la multiplication par un réel négatif inverse l'ordre.

● Si a et b sont positifs et $a < b$ alors $a^2 < b^2$.



● Si a' et b' sont négatifs et $a' < b'$ alors $a'^2 > b'^2$.

● Si a et b sont de même signe et non nuls et si $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.



En effet, diviser par a , c'est multiplier par $\frac{1}{a}$.
La division inverse donc l'ordre de deux nombres de même signe, qu'ils soient positifs ou négatifs. ■

Les intervalles

L'ensemble des réels x vérifiant $a \leq x \leq b$ est noté $[a, b]$.

● L'ensemble des réels x vérifiant $a < x < b$ est noté $]a, b[$.

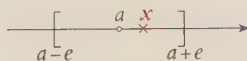
● L'ensemble des réels x vérifiant $a \leq x$ est noté $[a, +\infty[$.

● L'ensemble des réels x vérifiant $x < b$ est noté $] -\infty, b[$. ■

Les encadrements d'une valeur

Pour comparer deux réels entre eux ou en obtenir une valeur approchée, on a recours aux encadrements.

Ainsi $x \in [a - e, a + e]$ signifie $a - e \leq x \leq a + e$.



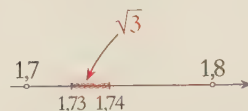
On a un encadrement de x d'amplitude $2e$.
Dans cette situation, on a intérêt à penser que le nombre x est à une «distance» du nombre a inférieure à e .

En effet, $a - e \leq x \leq a + e$ équivaut à : $-e \leq x - a \leq e$.
C'est-à-dire à : $|x - a| \leq e$.
Le nombre a est alors une approximation du nombre x à e près.

Par exemple, on sait que $\sqrt{3}$ n'est pas un décimal mais on sait l'encadrer par deux décimaux ayant le même nombre de décimales :

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

$1,73 < \sqrt{3} \leq 1,74$
 $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.
 $1,7$ est une approximation de $\sqrt{3}$ à 0,1 près par défaut.
 $1,73$ est une approximation de $\sqrt{3}$ à 0,01 près par défaut.
 $1,733$ est une approximation de $\sqrt{3}$ à 0,001 près par excès.



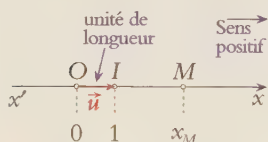
● Attention si l'on encadre une différence !
Par exemple, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.
 $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$
 $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.

On écrit :
 $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3} + (-\sqrt{2})$.
On a :
 $-1,42 < -\sqrt{2} < -1,41$.
d'où :
 $1,73 - 1,42 < \sqrt{3} + (-\sqrt{2}) < 1,74 - 1,41$.
 $0,31 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0,33$. ■

Puisqu'il y a « identité » entre les points d'une droite et les nombres réels, on doit pouvoir calculer à partir de ces points. C'est ce que permet la notation « mesure algébrique ».

La droite graduée

Une droite graduée est une droite sur laquelle on a choisi un repère (O, I) . Le point O est l'origine, $OI = 1$, c'est l'unité de longueur. Le sens « O vers I » est le sens positif, l'autre sens est le sens négatif.

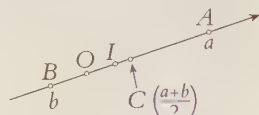


À tout point M de la droite est associé un nombre réel, souvent noté x_M , qui est son abscisse pour ce repère. Elle est positive si $\overrightarrow{OM}$ est de même sens que $\overrightarrow{OI}$ et négative dans le cas contraire. On a : $\overrightarrow{OM} = x_M \overrightarrow{OI}$. L'abscisse de O est 0, celle de I est 1.

À tout nombre réel est associé un point et un seul de cet axe. On dit qu'il y a bijection entre $\mathbb{R}$ et l'ensemble des points de l'axe : d'où l'expression « droite réelle » qui n'a de sens que si l'on imagine cette correspondance. ■

Quelques propriétés

Soit A et B deux points d'abscisses respectives a et b .



Le milieu C de $[AB]$ a pour abscisse $\frac{a+b}{2}$.

La différence $(b-a)$ est notée $\overline{AB}$ (que l'on lit « mesure algébrique de AB »).

$$\overline{AB} = (\text{abscisse de } B) - (\text{abscisse de } A) = b - a.$$

La connaissance de ce nombre est intéressante car elle donne des informations sur la position des points.

Si $\overline{AB} > 0$: B est à droite de A , pour le repère considéré et $\overline{AB}$ est la distance de A à B , soit $b - a$.

Si $\overline{AB} < 0$: B est à gauche de A et la distance de A à B est $(-\overline{AB})$ c'est-à-dire $a - b$. ■

Les règles de calcul

Les règles de calcul concernant les mesures algébriques sur une droite sont identiques aux règles de calcul concernant les vecteurs dans un plan.

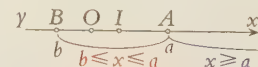
En particulier, on a : $\overline{AB} = -\overline{BA}$ et $\overline{AA} = 0$. Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overline{AI} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.

En particulier, on a la relation de Chasles. ■

La relation de Chasles

Pour trois points A , B et C quelconques : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, ou $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$.

La demi-droite $[Ax)$ est l'ensemble des points M d'abscisse x telle que $x \geq a$. La demi-droite $[B\gamma)$ est caractérisée par $x \leq b$.



Tout point du segment $[AB]$ a une abscisse x qui vérifie $b \leq x \leq a$ ou $x \in [b, a]$. ■

Le changement d'origine sur une droite

Dans certaines circonstances, il est intéressant de choisir pour origine un point autre que l'origine initiale O , sans changer l'unité de longueur.

Prenons A comme origine. Dans le repère d'origine A , l'abscisse X de M est $\overline{AM}$.

Dans le repère d'origine O , l'abscisse x de M est $\overline{OM}$.

On a : $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}$
d'où $X = x - x_A$.
Cette égalité permet de calculer la nouvelle abscisse d'un point M quelconque, connaissant son abscisse initiale. ■

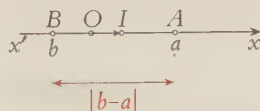
La notation de la valeur absolue

La distance des deux points A et B est la longueur du segment $[AB]$ mesurée avec l'unité de l'axe.

On la note $|b-a|$ qui se lit « valeur absolue de la différence $b-a$ ».

Donc $|b-a| = AB$.
Si $b=a$ on a $|b-a|=0$.

Si $b > a$, $|b-a| = b-a$.
Si $b < a$, $|b-a| = a-b$.



La distance de A à O est la distance OA :

$$OA = |a - 0| = |a|.$$

Si $a = 0$ $|a| = 0$.
Si $a > 0$ $|a| = a$.
Si $a < 0$ $|a| = -a$.

Ainsi, la valeur absolue d'un nombre est ce nombre s'il est positif ou son opposé s'il est négatif. ■

Quelques propriétés à connaître

● Pour un produit ou quotient $|ab| = |a||b|$.

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (\text{si } b \neq 0).$$

$$|a^n| = |a|^n.$$

Attention !

Si $a > 0$, $\sqrt{a^2} = a$,
mais si $a < 0$, $\sqrt{a^2} = -a$
donc $\sqrt{a^2} = |a|$.

● Pour une somme :
 $|a+b|$ n'est pas toujours égale à $|a|+|b|$!

Par exemple
 $|(-5) + (-7)|$
 $= |-5| + |-7|$ soit 12.

Mais $|(-5)+7|$ n'est pas égale à $|(-5)|+|7|$.

On a cependant l'inégalité suivante :

quels que soient a et b ,
 $|a+b| \leq |a| + |b|$.

La notion de valeur absolue est pratique pour exprimer une distance.

Par exemple, « x est à moins de ε du nombre a » s'écrit $|x-a| < \varepsilon$ et équivaut à la double inégalité.
 $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

En revanche, dans les calculs, il est très souvent impossible de s'embarasser de cette notation.

Il vaut mieux alors mener deux calculs séparés selon le signe de l'expression figurant entre les barres de la valeur absolue.

Par exemple, l'équation $|x-1| = 2$ est équivalente à l'écriture suivante :
soit $x-1 = 2$,
soit $x-1 = -2$.
L'équation a donc deux solutions, $x = 3$ et $x = -1$. ■

Les polynômes sont les plus simples des fonctions : leur calcul n'emploie que des additions et des multiplications.

Introduction

En algèbre, un monôme est une expression algébrique comportant un seul terme (du grec *monos*, «seul») : il ne comporte que des multiplications. C'est le produit par un coefficient réel d'une puissance de la variable.

Par exemple : $\frac{2}{3}x^4$ est un monôme en x , de degré 4.

● Un polynôme (*polus*, «plusieurs») est une somme algébrique de monômes.

Par exemple :

$\frac{2}{3}x^4 - 6x^3 + 8x - \frac{1}{2}$ est un polynôme en x .

Un polynôme en x s'écrit sous la forme :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ en sont les coefficients.

Si le coefficient a_n du monôme de plus fort degré n'est pas nul, le polynôme est de degré n .

On peut ordonner un polynôme suivant les puissances croissantes de x , ou suivant les puissances décroissantes.

Un binôme du premier degré : $ax + b$ ($a \neq 0$).

Un trinôme du second degré : $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). ■

La fonction polynôme

Un polynôme est tout simplement une écriture algébrique, mais on considère souvent la fonction polynôme associée, par exemple :

$$f : x \rightarrow f(x) = 4x^2 - 6x + 2$$

est une fonction polynôme du second degré.

Si l'on remplace la variable x par un réel α , le nombre $f(\alpha)$, image de α par f , est la valeur du polynôme f en α .

Ici, sur notre exemple :

$$f(1) = 0$$

$$f(\sqrt{2}) = 10 - 6\sqrt{2}.$$

Un trinôme du second degré est associé à une fonction T définie par :

$$T(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

Cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$T(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

c'est sa forme canonique et on la retrouvera à propos de la résolution des équations du second degré. ■

Les polynômes égaux

Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils prennent la même valeur pour tout réel, autrement dit si pour tout réel α on a : $P(\alpha) = Q(\alpha)$. Ils sont de même degré.

● Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils sont de même degré et si les coefficients de monômes de même degré sont tous égaux deux à deux. ■

Le polynôme nul

C'est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. Il prend la valeur 0 pour toute valeur de la variable.

● Écriture d'un nombre. Le nombre $A = 98046$ est égal à $9 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10 + 6$.

C'est une sorte d'écriture polynomiale dans laquelle la « variable » x a pris la valeur 10.

La base deux est utilisée en informatique : elle n'utilise que les chiffres 0 et 1.

Le nombre $B = 11011$ en base deux vaut $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$ soit 27 en base dix. ■

Polynômes et fonctions

Soit le polynôme
 $S(x) = x - 0,163x^3 + 0,0083x^5$.

Pour les valeurs de x voisines de 0, si l'on calcule $S(x)$, on obtient des valeurs proches de $\sin(x)$ (x en radians). C'est ainsi que, pour de très nombreuses fonctions, on sait en calculer des valeurs approchées très précises au moyen de polynômes, pour des valeurs de la variable voisine de 0. ■

Le calcul de Hörner (1805)

Soit $P(x) = 12x^4 - 56x^3 + 3x^2 - 40x + 19$.

Pour faire un calcul des valeurs de ce polynôme avec une calculatrice qui n'a que les quatre opérations, on place une valeur A de x en mémoire.

Si l'on utilise la forme donnée : le nombre des multiplications est $4 + 3 + 2 + 1$ soit 10 pour 10 « rappels » de la mémoire A ; le nombre des additions ou soustrac-

tion est 4, soit au total 12 opérations. Hörner a imaginé d'écrire

$$(((12x - 56)x + 3)x - 40)x + 19$$

ce qui nécessite 4 « rappels » de A et seulement 4 multiplications, ce qui fait seulement 8 opérations au lieu de 12. C'est une économie non négligeable aussi bien pour les calculs « à la main » qu'avec les calculatrices ou ordinateurs aujourd'hui.

Les opérations sur les polynômes

L'addition

$$P(x) = x^2 - 6x + 1$$

$$Q(x) = 2x^3 + 14x - 7$$

Pour calculer $P + Q$, on peut opérer comme les additions numériques en écrivant en colonne les monômes de même degré. La somme est un polynôme de degré 3.

$$\begin{array}{r} x^2 - 6x + 1 \\ \oplus 2x^3 \dots + 14x - 7 \\ \hline 2x^3 + x^2 + 8x - 6 \end{array}$$

Calcul de $3P - 5Q$

On peut remarquer que seuls les coefficients entrent en jeu si l'on tient compte de leur position.

	x^3	x^2	x^1	x^0
$3P \rightarrow$	3	-18	+3	
$-5Q \rightarrow$	-10	0	-70	35
	-10	3	-88	38

La multiplication $P(x) \times Q(x)$

On peut bien sûr conduire un calcul en ligne, mais la disposition ci-dessous, comme pour

multiplier deux entiers, est bien pratique (attention à la position des produits partiels !).

$$\begin{array}{r} x^2 - 6x + 1 \dots\dots\dots P(x) \\ \times 2x^3 + 14x - 7 \dots\dots\dots Q(x) \\ \hline - 7x^2 + 42x - 7 \dots\dots\dots -7P(x) \\ 14x^3 - 84x^2 + 14x \dots\dots\dots 14xP(x) \\ 2x^5 - 12x^4 + 2x^3 \dots\dots\dots 2x^3P(x) \\ \hline 2x^5 - 12x^4 + 16x^3 - 91x^2 + 56x - 7 \dots\dots\dots P(x) \times Q(x) \end{array}$$

Le degré du produit

Si le degré de P est n et le degré de Q est m alors le degré du produit $P \times Q$ est la somme $n + m$ des degrés des facteurs. ■

	x^2	x	x^0	
	1	-6	1	
	2	-12	2	$2x^3$
	0	0	0	$0x^2$
	14	-84	14	$14x$
	-7	42	-7	$-7x^0$

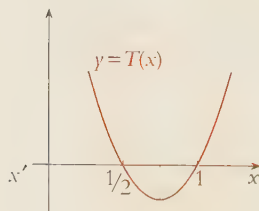
$P \times Q : 2x^5 - 12x^4 + 16x^3 - 91x^2 + 56x - 7$

La technique de division d'un nombre entier par un autre a probablement été mise au point par le mathématicien grec Euclide il y a 2400 ans. Pour diviser un polynôme par un autre, on peut utiliser la même technique avec la même disposition pratique : les puissances de l'inconnue dans un polynôme se comportent exactement comme les puissances de dix pour l'écriture d'un nombre.

Introduction

Soit le polynôme $T(x) = 4x^2 - 6x + 2$.
On a $T(1) = 0$ et $T(\frac{1}{2}) = 0$.
On dit que les nombres 1 et $\frac{1}{2}$ sont les zéros de ce polynôme.

Ces nombres correspondent d'ailleurs aux abscisses des points d'intersection avec $x'x$ de la représentation graphique de T .



De plus, on vérifie sans peine que

$$4(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right) = T(x). \blacksquare$$

Propriétés générales

- On dit que le réel α est un zéro du polynôme P si $P(\alpha) = 0$; autrement dit, ce nombre α est solution de l'équation $P(x) = 0$.

- Tout nombre réel est un zéro du polynôme nul.

- Un polynôme de degré n a, au plus, n zéros dans l'ensemble des réels. Par exemple, le polynôme T cité en exemple est du second degré : on a trouvé deux zéros. Il n'en a pas d'autre !

- Si α est un zéro du polynôme P , on peut mettre $(x - \alpha)$ en facteur dans $P(x)$ et on a : $P(x) = (x - \alpha) Q(x)$. Le degré du polynôme Q est inférieur de 1 à celui de P . On dit que $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$. Q est le quotient de P par $(x - \alpha)$. ■

La factorisation d'un polynôme

Factoriser un polynôme, c'est-à-dire l'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré inférieur, est une opération indispensable pour résoudre des équations, étudier le signe du polynôme, simplifier une fraction où il intervient. Pour cette factorisation, on peut utiliser des identités connues.

Par exemple :

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

Ou encore :

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

Comme on l'a vu plus haut, la « division » de P par $(x - \alpha)$, lorsque $P(\alpha) = 0$ est un nouveau procédé pour une factorisation. ■

Les méthodes pour factoriser $P(x)$

Soit

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 12.$$

On a $P(2) = 0$.

Il s'agit d'écrire

$$P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

car on sait que Q est de degré 3-1, soit 2.

La méthode par identification

$$P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c).$$

On développe le deuxième nombre.

On sait que cette égalité de polynômes est réalisée si et seulement si les monômes de même degré ont des coefficients égaux d'où :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -2 \\ c - 2b = -12 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases}$$

On trouve

$$Q(x) = x^2 + 4x + 6.$$

«Poser» la division par $(x-\alpha)$

C'est un peu comme la division des nombres (et ce n'est pas étonnant...).

C'est une méthode pratique et rapide à condition de faire preuve d'attention.

La transformation de

$P(x) - P(2)$, qui vaut $P(x)$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{l} P(x) \\ x^3 + 2x^2 - 2x - 12 \\ 0 + 4x^2 - 2x \\ - (4x^2 - 8x) \\ 0 + 6x - 12 \\ - (6x - 12) \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} (x-2) \\ x-2 \\ x^2 + 4x + 6 \\ \uparrow \\ Q(x) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x) - P(2) &= (x^3 + 2x^2 - 2x - 12) - (2^3 + 2 \times 2^2 - 2 \times 2 - 12) \\ &= (x^3 + 2x^2 - 2x - 12) - (8 + 8 - 4 - 12) \\ &= (x^3 + 2x^2 - 2x - 12) - 0 \\ &= P(x) \end{aligned}$$

On essaie de grouper les termes de même puissance et d'appliquer les identités du type $a^n - b^n = (a-b)(\dots)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^3 - 2^3) + 2(x^2 - 2^2) - 2(x - 2) - 12 \\ &= (x-2)[(x^2 + 2x + 4) + 2(x+2) - 2] - 12 \\ &= (x-2)(x^2 + 4x + 6). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Les fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est l'écriture d'un quotient de deux polynômes.

$\frac{4x^2}{x^3 - 2x^2}$ est une fraction rationnelle de dénominateur $x^2(x-2)$ qui s'annule pour $x=0$ ou $x=2$.

On dit que cette fraction n'est pas définie pour ces deux valeurs de x .

● Les calculs sur les fractions rationnelles sont tout à fait comparables aux calculs sur les fractions numériques.

$$\text{Simplifier } F = \frac{4x^2}{x^3 - 2x^2}.$$

Factoriser le dénominateur : $x^2(x-2)$

$$\text{d'où : } \frac{x^2 \times 4}{x^2(x-2)} = \frac{4}{x-2}.$$

Mais attention !

La fraction F n'est pas définie pour $x=0$ ou $x=2$, alors que la fraction $\frac{4}{x-2}$ est définie en $x=0$.

On ne peut pas écrire cette égalité sans précaution !

Ajouter-retrancher

Il convient de réduire au même dénominateur.

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+2} - \frac{6x}{x-1} &= \frac{4(x-1) - 6x(x+2)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{-6x^2 - 8x - 4}{x^2 + x - 2}. \end{aligned}$$

Multiplier-diviser

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+2} \div \frac{6x}{x-1} &= \frac{4}{x+2} \times \frac{x-1}{6x} \\ &= \frac{4x-4}{6x^2+12x}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Le mot «équation» n'est pas un inconnu. Il évoque l'idée de rechercher la valeur d'une ou plusieurs inconnues dans un problème d'arithmétique ou de géométrie ; on le rencontre aussi dans «équation d'une droite ou d'une courbe» et plus tard dans «équation différentielle».

La résolution d'un problème avec ou sans mise en équation

Depuis les textes rencontrés dans des tablettes babyloniennes vieilles de plus de quarante siècles jusqu'à nos jours, on trouve des problèmes à résoudre en utilisant l'algèbre ou tout autre procédé.

Dans certains problèmes, il n'est pas nécessaire de faire appel aux équations : «Pour 182 €, j'ai acheté 26 calculatrices, tous identiques. Combien coûteraient 18 calculatrices ?» Ce problème de proportionnalité est très simple et ne nécessite pas de «mise en équation» : il suffit de calculer le prix d'un porte-clés, puis celui de 18. Dans un ouvrage du XVI^e siècle, on peut lire : «Je dispose de 32 pièces,

les unes de 5 livres les autres de 2 livres, le tout formant la somme de 124 livres : combien de pièces de chaque sorte ?»

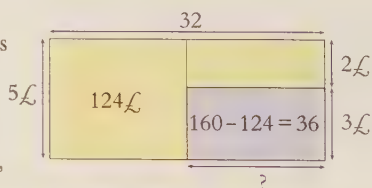
Ce problème était résolu par «fausse supposition» : en supposant que toutes les pièces soient de 5 $\mathcal{L}$, la somme totale serait de 5×32 , soit 160 $\mathcal{L}$. La différence est $160 - 124$ soit 36 $\mathcal{L}$; or chaque fois qu'une pièce de 5 $\mathcal{L}$ est remplacée par une de 2 $\mathcal{L}$, la somme diminue de 3 $\mathcal{L}$; comme $\frac{36}{3} = 12$,

il y a donc 12 pièces de 2 $\mathcal{L}$ et le reste, soit 20, pièces de 5 $\mathcal{L}$.

On peut aussi faire usage d'une méthode géométrique : un rectangle R_1

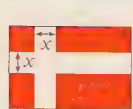
figure la somme totale pour les pièces de 5 $\mathcal{L}$ et le rectangle R_2 celle des pièces de 2 $\mathcal{L}$.

Si toutes étaient de 5 $\mathcal{L}$, on aurait une nouvelle somme représentée par un grand rectangle 5×32 : l'écart, soit 36, est représenté par le rectangle R_3 de côtés 3 et est donc de 12.



Algébriquement, si on désigne par x le nombre des pièces de 5 $\mathcal{L}$, on a l'équation : $5x + 2(32 - x) = 124$ dont la solution est $x = 20$. ■

Un exemple de mise en équation



Le drapeau danois est un rectangle de 1,50 m sur 1 m ; il comporte une croix blanche sur fond rouge. Quelle doit être la largeur des bandes pour que l'aire de la surface rouge soit

égale à celle de la surface blanche ?

Ici, on peut difficilement se passer de l'algèbre. Si x désigne la largeur des bandes, l'aire de la surface blanche est $x + 1,5x - x^2$ qui doit être égale à la

moitié de l'aire totale soit $\frac{3}{4}$ et on doit résoudre

$$\frac{5}{2}x - x^2 = \frac{3}{4}$$

La résolution d'une équation du second degré est indispensable. ■

L'écriture algébrique

L'écriture algébrique moderne qui permet la traduction optimale en langage mathématique d'un problème a été créée progressivement au cours des âges, par la synthèse de nombreux apports. Les Français Nicolas Chuquet (1445-1500) et François Viète (1540-1603) sont considérés comme les précurseurs de l'écriture algébrique que nous utilisons aujourd'hui. Avant eux, les « équations » étaient écrites en latin sans l'utilisation de symboles pratiques : l'addition et la soustraction s'écrivaient au moyen des lettres p et m , le signe « = » n'existait pas, ni bien sûr les signes « < » et « $\sqrt{x}$ ». À cela s'ajoutait l'absence d'homogénéisation de l'écriture mathématique. Le signe d'égalité n'est introduit que vers 1540 par Robert Recorde et le zéro apparaîtrait encore plus tard. ■

Quelques écritures anciennes de l'équation

$$x^2 + x = 3$$

Tartaglia (1540)

1qp 1R equale 3

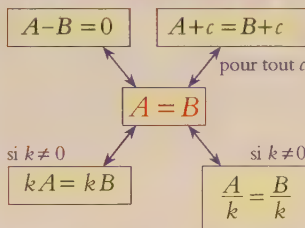
Viète (1590)

Aquad + A æquatur 3

Descartes (1637)

ZZ + Z ∞ 3

Les propriétés des égalités



Attention à l'« élévation au carré » !

Si $A = B$
alors $A^2 = B^2$.

Mais si $A^2 = B^2$,
on peut avoir
 $A = B$ ou $A = -B$.

Le signe d'égalité « = »

Ce signe sert à écrire une égalité telle que

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}.$$

Si on effectue le calcul du premier membre, on trouve effectivement le nombre qui figure au second membre. On a ce que l'on appelle « une phrase vraie ».

Mais ce même signe sert aussi dans l'écriture $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ce qui n'est pas tout à fait la même chose.

Dans cette écriture, si on remplace a et b par des réels quelconques, on obtient toujours une « phrase vraie ». C'est ce que l'on nomme une identité.

Le signe d'égalité sert aussi pour écrire des formules :

$$S = \frac{h(B+b)}{2} \text{ indique}$$

le procédé de calcul de l'aire d'un trapèze. $f(x) = x^2 - 4x - 15$ sert à définir une fonction de x .

Et puis ce signe figure dans une équation telle que $5x + 2(32 - x) = 124$ et l'on n'obtient une phrase vraie que pour $x = 20$, c'est-à-dire si l'on remplace x par 20, unique solution de cette équation.

Dans ces trois derniers cas (identité, formule, équation), l'égalité est toujours l'affirmation que le premier membre représente le même objet que le second. Mais cette affirmation est incluse dans une phrase plus longue dont il ne faut pas oublier les autres mots.

Pour l'identité, c'est « Quels que soient a et b ». Pour l'équation, c'est : « On cherche x tel que... ». ■

Résoudre une équation à une inconnue

«Être ou ne pas être solution.» Dire que le réel s est solution de l'équation d'inconnue $x : f(x) = g(x)$ ou encore racine de cette équation, c'est dire que si l'on remplace l'inconnue x par ce réel on obtient l'égalité $f(s) = g(s)$, autrement dit une «phrase vraie».

Quelques principes

La lettre qui désigne l'inconnue n'a pas d'importance : ce peut être y ou z ou n'importe quelle autre lettre.

● Résoudre une équation, c'est en trouver toutes les solutions.

● L'ensemble de ces solutions est «l'ensemble des solutions de l'équation».

● Considérons par exemple l'équation du second degré suivante $x^2 + 3 = 5$.

Si l'on remplace x par 1, 4, on n'obtient pas une égalité. En effet, $(1, 4)^2 + 3$ ne vaut pas exactement 5, mais 4, 96.

En revanche, cette équation est bien vérifiée en remplaçant x par $\sqrt{2}$ ou par $-\sqrt{2}$ et ce sont les seules solutions.

On appelle ces deux réels les racines de l'équation. On écrit parfois aussi l'ensemble des solutions sous cette forme : $\{\sqrt{2} ; -\sqrt{2}\}$. ■

Les équations équivalentes

Deux équations sont dites équivalentes si elles ont les mêmes solutions. Les techniques de résolution consistent à remplacer une équation par d'autres, équivalentes, afin d'obtenir une équation simple que l'on sait résoudre.

Une transformation est *régulière* si elle permet d'écrire une autre équation équivalente à une équation donnée.

● On dit qu'on obtient une équation équivalente à une équation donnée dans les cas suivants :

- lorsqu'on transforme les expressions algébriques qui y figurent ;
- lorsqu'on se sert des propriétés des égalités avec toutes les précautions qui s'imposent, en particulier dans le cas où l'on divise les deux membres de l'équation (attention dès lors à l'impossibilité de la « division par zéro ») ou lorsque l'on « élève au carré » (une transformation qui n'est pas régulière).

Exemple

Soit l'équation $(x-1)(x+6) = x^2 + 3x + 4$.
En développant le premier membre : $x^2 + 5x - 6 = x^2 + 3x + 4$.
En retranchant x^2 : $5x - 6 = 3x + 4$.
En ajoutant $6 - 3x$: $5x - 3x = 4 + 6$
d'où $2x = 10$, enfin $x = 5$.

Cette équation a pour unique solution le réel 5 car on est sûr que, à chaque étape, on a remplacé l'équation par une équation équivalente : on a effectué des transformations régulières.

● En revanche, si l'on envisage l'équation $(x+1)(x-3) = (x+1)(5x+8)$, elle n'est pas équivalente à l'équation obtenue en divisant les deux membres par $(x+1)$ soit $x-3 = 5x+8$.

En effet, $x+1$ n'est pas non nul pour tout x ! ■

L'équation la plus simple : $ax + b = 0$ (l'inconnue est x)

C'est une équation déjà rencontrée et que vous savez résoudre. Cette équation équivaut à : $ax = -b$ (on retranche b dans les deux membres) et, si $a \neq 0$, $x = -\frac{b}{a}$. L'unique solution est le réel $-\frac{b}{a}$.

En revanche, si $a = 0$, il n'est pas question de diviser par a ! Le premier membre est nul quel que soit x . De deux choses l'une :

- Si on a $b = 0$, alors l'égalité est réalisée quel que soit x . L'ensemble des solutions est l'ensemble $\mathbb{R}$.
- Si $b \neq 0$, l'équation n'a pas de solution.

En effet, l'équation $0x = 3$ n'a évidemment aucune solution tandis que l'équation $0x = 0$ est au contraire toujours vérifiée.

Si le coefficient a n'est pas nul, l'équation du premier degré d'inconnue $x : ax + b = 0$ a une unique solution $-\frac{b}{a}$.

Si a est nul, selon les valeurs de b , tout réel est solution ou bien elle n'a aucune solution.

Exemple 1

$4(6y - 8) = 12(y + 2) + 12y$.
Après développement et réduction, on obtient l'équation équivalente $24y - 24y = 24 + 32$, soit $0y = 56$ qui n'a pas de solution.

Exemple 2

$(2x - 1)(x + 6) = 2x^2 + 15x$.
Après développement et réduction, on a : $-4x = 6$ dont l'unique solution est $-\frac{3}{2}$ ou encore $-1,5$.

Exemple 3

$$\frac{x+1}{3} + \frac{x-4}{5} = 1.$$

Après réduction au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{5x+5}{15} + \frac{3x-12}{15} = \frac{15}{15}$$

soit $5x + 5 + 3x - 12 = 15$ (multiplication par 15) qui équivaut à $8x - 7 = 15$, puis à $8x = 22$, équation dont l'unique solution est $\frac{22}{8}$ soit $2,75$.

Exemple 4

$$\frac{x+1}{3} + \frac{x-4}{5} = \frac{8x}{15}.$$

Après réduction on obtient $0x = 7$ qui n'a pas de solution. ■

Un petit problème ancien

On raconte que sur la tombe du mathématicien Diophante était inscrit un problème résumant sa vie : « Sa douce enfance dura le sixième de sa vie. Puis après un douzième de sa vie, son menton s'est couvert de barbe. Après un septième encore, il se marie. Cinq années passent et la naissance d'un fils le comble de joie. Le sort voulut que la vie de ce fils soit finalement deux fois plus courte que celle de son père et après la mort de son enfant, Diophante vécut encore quatre années. »

À quel âge est donc mort Diophante ?

Le choix de l'inconnue : soit x la durée de la vie de Diophante en années. La traduction du problème est la suivante :

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

La résolution de l'équation se réduit ici à l'écriture de fractions au même dénominateur. Vérification de $x = 84$: $14 + 7 + 12 + 5 + 42 + 4 = 84$, ce qui, il y a 2000 ans, était un bel âge pour mourir à Alexandrie ! ■

Toute équation n'est pas aussi simple que l'équation du premier degré... On va tout de même disposer de méthodes pour la résoudre. On sait que si $A=0$ ou $B=0$, alors le produit AB est également nul. Réciproquement, si un produit est nul, alors l'un des facteurs est nul.

Présentation et quelques exemples d'équations à produit nul

L'équation $AB=0$ équivaut à :
 $(A=0 \text{ ou } B=0)$.
 L'ensemble des solutions de l'équation $AB=0$ est la réunion des ensembles solutions des équations $A=0$ et $B=0$.

La marche à suivre

- Se ramener à une équation dont le second membre est nul.
- Factoriser le premier membre.

Exemple 1

Résoudre

$$x^2 - 9 = (2x + 8)(x - 3).$$

Si on développe le second membre et si on regroupe les termes dans le premier membre, on obtient une équation du second degré que l'on ne sait pas résoudre en classe de seconde.

On peut remplacer $x^2 - 9$ par $(x - 3)(x + 3)$ et l'on obtient l'équation équivalente :
 $(x - 3)(x + 3) - (x - 3)(2x + 8) = 0$
 d'où, en factorisant le premier membre,
 $(x - 3)[(x + 3) - (2x + 8)] = 0$
 soit $(x - 3)(x + 5) = 0$,
 équation qui équivaut à $x - 3 = 0$ ou $x + 5 = 0$.
 Les solutions sont 3 et -5.

Exemple 2

Résoudre l'équation

$$(4x - 6)^2 = 16.$$

Cette équation équivaut à $(4x - 6)^2 - 4^2 = 0$.
 On factorise grâce à l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec ici $a = 4x - 6$ et $b = 2$:
 $(4x - 10)(4x - 2) = 0$ qui équivaut à $4x - 10 = 0$ ou $4x - 2 = 0$

$$\text{donc } x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

Les deux solutions sont

$$\frac{5}{2} \text{ et } \frac{1}{2}.$$

Exemple 3

Résoudre l'équation

$$(x^2 + 3x - 4)^2 = (x^2 + 8x + 4)^2.$$

Elle équivaut

$$\text{à } (x^2 + 3x - 4)^2 - (x^2 + 8x + 4)^2 = 0$$

et en factorisant le

premier membre :

$$x(2x + 11)(-5x - 8) = 0$$

$$\text{donc les solutions sont : } 0 ; -\frac{11}{2} ; -\frac{8}{5}.$$

Exemple 4

Quels sont les nombres réels dont le produit de la puissance quatrième par 25 est égal au quadruple du carré ?

Si x est un tel nombre, la traduction du problème est : $25x^4 = 4x^2$.

Cette équation équivaut à $25x^4 - 4x^2 = 0$, soit $x^2(5x - 2)(5x + 2) = 0$.

Les solutions sont :

$$0 ; \frac{2}{5} \text{ et } -\frac{2}{5}.$$

Il s'agit d'un type de problème posé dans les *Arithmétiques* de Diophante (IV^e siècle apr. J.-C.). ■

Le cas d'un quotient nul

Il s'agit de résoudre une équation du type $\frac{A}{B} = 0$.

Si le numérateur d'un quotient est nul et si le dénominateur ne l'est pas, alors le quotient est nul.

Réciproquement, si un quotient est nul, alors le numérateur est nul, le dénominateur ne l'étant pas. En résumé :

l'équation $\frac{A}{B} = 0$

équivaut à $A = 0$ et $B \neq 0$.

La marche à suivre

● Se ramener à une équation du type

$$\frac{A}{B} = 0.$$

● Résoudre $A = 0$ et $B \neq 0$.

Exemple 1

Résoudre l'équation

$$\frac{2x+5}{x-2} = 0.$$

Cette équation équivaut à $2x+5=0$ et $x \neq 2$.

La solution de $2x+5=0$ est $-\frac{5}{2}$, qui n'annule pas le dénominateur.

La solution de l'équation est $-\frac{5}{2}$.

Exemple 2

Résoudre l'équation

$$\frac{(x-2)(2x+5)}{x^3-8} = 0.$$

Elle équivaut à $(x-2)(2x+5)=0$ et $x^3-8 \neq 0$.

La première a pour solutions 2 et $-\frac{5}{2}$ mais le nombre 2 annule le dénominateur. Donc seule la solution $-\frac{5}{2}$ est acceptable.

Un cas particulier

Considérons une équation du type

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$.

Elle s'écrit $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = 0$

$$\text{soit } \frac{AD-BC}{BD} = 0.$$

Ce qui équivaut à $AD=BC$.

Une écriture du type $AD=BC$ est ce que l'on appelle parfois «l'égalité des produits en croix».

Attention! Dans tous les problèmes où interviennent des quotients, ne pas oublier de contrôler que les solutions trouvées n'annulent pas les dénominateurs ($B \neq 0$, $D \neq 0$).

Exemple 3

Résoudre l'équation

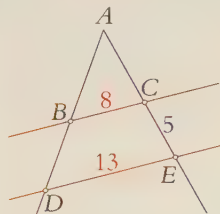
$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{2x+1}{x}.$$

Elle équivaut à $(2x-1)x = (2x+1)(x+2)$ et $x \neq -2$ et $x \neq 0$.

On trouve la seule solution $-\frac{1}{3}$ qui n'annule pas les dénominateurs.

Exemple 4

Les droites (BC) et (DE) sont parallèles. Calculer AC sachant que $CE=5$, $BC=8$ et $DE=13$.



Posons $AC = x$.

On a, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \text{ soit } \frac{x}{x+5} = \frac{8}{13}.$$

d'où $13x = 8(x+5)$ et $x = 8$.

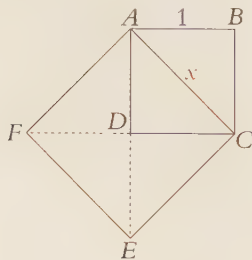
On a donc $AC = CB$ et $AE = ED$.

Les triangles ACB et ADE sont donc isocèles. ■

La variété des types d'équations est infinie et on ne saurait les épuiser tous. Cependant, certaines équations reviennent suffisamment souvent dans les exercices pour justifier qu'on leur consacre une étude particulière.

Un problème historique

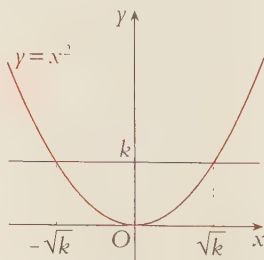
Le carré $ABCD$ de côté 1 a une aire égale à 1. On découpe selon la diagonale deux carrés tels que ci-dessous et on assemble les morceaux pour construire le carré $ACEF$: son aire est égale à 2. Si son côté est x , on a $x^2 = 2$. Les géomètres grecs ont montré que x ne peut pas être rationnel.



L'équation $x^2 = 2$ a une solution positive $\sqrt{2}$ (le côté du carré) mais aussi la solution opposée $-\sqrt{2}$, qui n'intéressait pas nos géomètres grecs pour qui les nombres mesuraient avant tout des longueurs. ■

L'équation $x^2 - k = 0$ ou $x^2 = k$

- Si $k < 0$, $x^2 - k$ est strictement positif donc l'équation n'a pas de solution.
- Si $k = 0$, la seule solution de l'équation est 0.
- Si $k > 0$, $x^2 - k$ peut s'écrire $x^2 - (\sqrt{k})^2$, soit $x^2 - (\sqrt{k})^2 = 0$, ou encore $(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0$, équation dont les solutions sont $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$.



Ce sont d'ailleurs les abscisses du point d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = k$. ■

L'équation du type $A^2 = B$

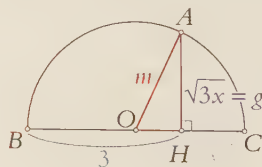
- Si $B < 0$, cette équation n'a pas de solution.
- Si $B = 0$, l'équation équivaut à $A^2 = 0$, soit $A = 0$.
- Si $B > 0$, elle équivaut à $(A - \sqrt{B})(A + \sqrt{B}) = 0$, soit $A = +\sqrt{B}$ ou $A = -\sqrt{B}$. Par exemple, l'équation $(2x - 1)^2 = -3$ n'a pas de solution. L'équation $(2x - 1)^2 = 0$ a pour unique solution $\frac{1}{2}$.

L'équation $(2x - 1)^2 = 7$ équivaut à $(2x - 1 - \sqrt{7})(2x - 1 + \sqrt{7}) = 0$ dont les solutions sont

$$\frac{1 + \sqrt{7}}{2} \text{ et } \frac{1 - \sqrt{7}}{2}.$$

Exemple

ABC est un triangle rectangle en A , de hauteur AH .



On a $OA = m = \frac{BC}{2} = \frac{3+x}{2}$
 $AH = g = \sqrt{3x}$.

- Trouver x pour que $m^2 = g^2$.
 $m^2 - g^2 = 0$ équivaut à

$$\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 3x = 0 \text{ soit}$$

$$\frac{1}{4}(x-3)^2 = 0 \text{ d'où } x = 3.$$

● Trouver x pour que $m^2 = g^2 + 1$.

Cette équation équivaut à $(x-3)^2 = 4$ ou

$$(x-5)(x-1) = 0 \text{ soit } x = 5 \text{ ou } x = 1.$$

● Trouver x pour que $m^2 = g^2 - 1$.

Cette équation équivaut à $(x-3)^2 = -4$ qui n'a pas de solution. ■

L'équation du type $|A| = B$

● Si $B < 0$, cette équation n'a pas de solution.

● Si $B = 0$, elle équivaut à $A = 0$.

● Si $B > 0$, elle équivaut à $(A = B \text{ ou } A = -B)$.

L'équation $|x^2 - x| = \frac{1}{5}$ équivaut à

$$\left(x^2 - x - \frac{1}{5} = 0\right) \text{ ou}$$

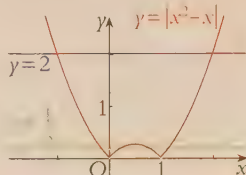
$$\left(x^2 - x + \frac{1}{5} = 0\right), \text{ et on trouve quatre solutions.}$$

L'équation $|x^2 - x| = 2$ équivaut à

$$(x^2 - x = 2) \text{ ou}$$

$$(x^2 - x = -2).$$

On trouve les solutions -1 et 2 .



L'équation avec « valeur absolue »

Sur un axe, le point A a pour abscisse 3. Quels sont les points M tels que la distance AM soit 5 ? On trouve sans peine les points M_1 et M_2 d'abscisses respectives 8 et (-2) .



Cette recherche revient à trouver x tel que $|x - 3| = 5$.

Ses solutions sont 8 et -2 .

L'équation d'inconnue

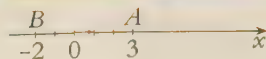
x :

$$|x - a| = k :$$

● n'a pas de solution si $k < 0$.

● a une solution a si $k = 0$.

● a deux solutions, $a + k$ et $a - k$ si $k > 0$.



Étant donné sur un axe les points A et B d'abscisses respectives 3 et -2 , trouver l'ensemble des points M tels que $MA - 2MB = 4$.

En désignant par x l'abscisse de M , on doit résoudre $|x - 3| - 2|x + 2| = 4$.

Il s'agit d'écrire le premier membre sans les « barres » de valeur absolue et pour cela il faut examiner comment s'écrivent $|x - 3|$ et $|x + 2|$ selon les valeurs de x .

À retenir

Si $A > 0$: $|A|$ s'écrit A ;
si $A < 0$: $|A|$ s'écrit $-A$.

● Pour $x < -2$, on a à résoudre : $x + 7 = 4$; on trouve $x = -3$, solution qui convient.

● Pour $-2 < x < 3$, on a $-3x - 1 = 4$, soit $x = -\frac{5}{3}$, solution qui convient.

● Pour $x > 3$, on a $-x - 7 = 4$ soit $x = -11$, solution à rejeter.

L'équation a deux solutions : -3 et $-\frac{5}{3}$. ■

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
Écriture de $ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$x + 2$
Écriture de $ x - 3 $	$-x + 3$	$-x + 3$	0	$x - 3$
Écriture du premier membre	$x + 7$	$3x - 1$	$-x - 7$	

Malgré leur ressemblance, la résolution des équations et celle des inéquations ne donnent pas lieu aux mêmes traitements. Le traitement des produits et des quotients est délicat.

L'inéquation $A \times B > 0$

Évariste effectue souvent le trajet entre deux villes A et B . Au tarif normal, il paie 110 € l'aller-retour. Il peut acheter une carte qui coûte 600 € pour 6 mois. Cette carte lui permet de voyager à demi-tarif.

Va-t-il acheter la carte de réduction ou non ? Si on appelle x le nombre de trajets aller-retour en six mois, le coût au tarif normal de ses voyages est $110x$; le coût avec la carte de réduction est $600 + 55x$. Il s'agit de choisir en fonction de x .

Si $110x > 600 + 55x$, il achètera la carte. L'inéquation $110x > 600 + 55x$ équivaut à $55x > 600$, c'est-à-dire $x > 10,9$. Mais le nombre de voyages est un nombre entier.

Dès qu'il fait 11 voyages aller et retour en 6 mois, il a intérêt à choisir la carte de réduction. ■

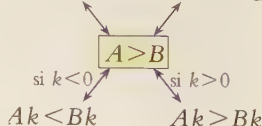
Généralités sur les inéquations

Soit l'inéquation $x^2 + 2x > 3x + 6$; on dit que c'est une inéquation du second degré. Si on remplace x par 0, on obtient $0 > 6$, ce qui est faux : 0 n'est pas solution de cette inéquation, -1 non plus. En revanche, si on remplace x par 10, on obtient $120 > 36$ ce qui est vrai. 10 est solution, de même que 100, -10 et bien d'autres nombres.

Résoudre une inéquation, c'est en trouver toutes les solutions. En général, l'ensemble des solutions est une réunion d'intervalles.

Comme pour une équation, on remplace l'inéquation par des inéquations équivalentes. Quelles sont les transformations régulières ? ■

$$A - B > 0 \quad A + C > B + C$$



Ce que l'on n'a pas le droit de faire

● Multiplier par une expression qui contient l'inconnue : l'inéquation

$$\frac{5x+1}{x-1} > 1 \text{ n'est pas}$$

équivalente à $5x+1 > x-1$ même si on pose $x \neq 1$. On a $5x+1 > x-1$ si $x > 1$ mais on a $5x+1 < x-1$ si $x < 1$ (le sens de l'inégalité dépend de la valeur de x que justement on ne connaît pas).

● Simplifier par une expression qui contient l'inconnue : l'inéquation $(x+1)(5x+1) \geq (x+1)(19x-5)$ n'est pas équivalente à $5x+1 \geq 19x-5$ même si $x \neq -1$.

● On ne peut pas non plus « se débarrasser » des carrés. Si l'on a $(x+1)^2 < (2x+5)^2$, il est faux d'écrire que cette inéquation est équivalente à $(x+1) < (2x+5)$. Ce qu'il faut faire dans chacun de ces trois cas sera étudié dans les pages suivantes. ■

Les inéquations du 1^{er} degré

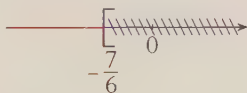
On doit résoudre $ax + b > 0$ ou $ax + b \leq 0$ ou $ax + b < 0$.

● Si $a = 0$: dans l'inéquation $0x > 5$, aucun réel ne convient puisque pour tout réel x , $0x = 0$, donc la phrase est fausse.

Dans le cas de l'inéquation $0x < 5$, tous les réels sont solutions. Dans le premier cas on écrit $S = \emptyset$, dans le second cas $S = \mathbb{R}$. Dans toute la suite, on suppose $a \neq 0$.

● Soit à résoudre l'inéquation $4x - 2 > 10x + 5$. Elle équivaut à $-6x > 7$, soit $x < -\frac{7}{6}$.

car le nombre -6 est négatif. L'ensemble des solutions est $]-\infty, -\frac{7}{6}[$.



● Soit l'inéquation $7x + (3 - 5x) > 2x + 17$.

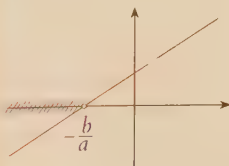
Après simplification, on trouve $0x > 14$, cette phrase n'est jamais vraie. L'inéquation n'a donc pas de solution.

● Quant à l'inéquation : $7x + (3 - 5x) < 2x + 17$, elle est vérifiée pour tout x : $S = \mathbb{R}$. ■

Interprétation graphique

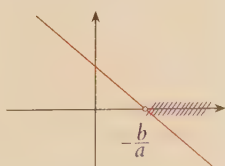
Dans le cas où : $a > 0$
 $ax + b > 0$ équivaut à

$$x > -\frac{b}{a}$$



Dans le cas où : $a < 0$
 $ax + b > 0$ équivaut à

$$x < -\frac{b}{a}$$



Les inéquations simultanées

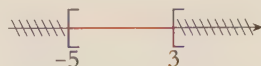
On veut savoir pour quelles valeurs de x on peut calculer à la fois

$$\sqrt{x+5} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$

On est donc amené à résoudre le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} x \geq -5 \\ x < 3 \end{cases}$.



On prend donc l'intersection des ensembles $[-5, +\infty[$ et $]-\infty, 3[$.

Pour tous les réels de l'intervalle $[-5, 3[$, on peut calculer les deux expressions.

En revanche, il n'existe pas de réels pour lesquels on peut calculer à la fois $\sqrt{x-5}$ et $\sqrt{3-x}$. En effet

le système

$$\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$$

n'a pas de solution. ■



Les inéquations du type

$$A \times B > 0 \text{ ou } \frac{A}{B} < 0$$

La résolution de ces inéquations revient à chercher dans quelles conditions un certain produit est positif, ou un certain quotient est négatif. Ce n'est qu'une question de signes.

Le signe d'une expression

● Le signe d'une expression peut être évident : par exemple, un carré est toujours positif ; $x^2 + 1$ est positif pour tout x ; si $x > 0$, $x + \frac{1}{x}$ est positif et si $x < 0$, $x + \frac{1}{x}$ est négatif.

● Pour trouver le signe d'un produit ou d'un quotient, il faut connaître le signe de chacun des facteurs et appliquer

la règle des signes : par exemple, si l'on sait que $A > 0$, $B < 0$, $C > 0$ sur un intervalle, alors le produit $A \times B \times C$ est négatif sur cet intervalle de même que le quotient $\frac{A}{BC}$ ou $\frac{AB}{C}$.

● Ce sont ces deux principes que l'on applique lorsqu'on veut résoudre des inéquations du type $A \times B > 0$ ou $\frac{A}{B} < 0$. ■

Le lien entre signe et inéquations

x	$-\infty$	-1	3	4	19	$+\infty$
signe de $A(x)$	+		-	0	+	0

Supposons que l'on ait trouvé le signe de $A(x)$ et qu'il soit donné dans le tableau ci-dessus.

La présence de la double barre signifie que $A(x)$ n'est pas défini pour $x = -1$.

À partir de ce tableau, on peut résoudre plusieurs équations et inéquations.

Par exemple :

● l'équation $A(x) = 0$ a trois solutions : 3 ; 4 ; 19 ;
 ● l'inéquation $A(x) \geq 0$ a pour ensemble solution $]-\infty, -1[\cup [3, 19]$;
 ● quant à l'inéquation $A(x) > 0$, elle a pour ensemble solutions $]-\infty, -1[\cup]-3, 4[\cup]4, 19[$.
 On peut trouver de la même manière l'ensemble des solutions de $A(x) < 0$ et $A(x) \leq 0$. ■

Le changement de signe

Les expressions $B(x)$ et $C(x)$ étudiées ici sont des polynômes. Et un polynôme ne change de signe que lorsqu'il s'annule. Par exemple, $x^3 + 1$ change de signe pour $x = -1$; pour x légèrement inférieur à -1 , $x^3 + 1$ est négatif. En fait, $x^3 + 1$ ne change pas de signe ailleurs qu'en $x = -1$. En effet, on a : $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ et $x^2 - x + 1$ ne s'annule pour aucun nombre, car cette expression vaut

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ qui est}$$

toujours positive.

Attention !

Pour changer de signe, il faut une racine, mais une racine ne fait pas toujours changer de signe. Par exemple, le polynôme $x^2 - 4x + 4$ s'annule pour $x = 2$ mais ne change pas de signe : il est en effet positif puisqu'il vaut $(x - 2)^2$, et qu'un carré est toujours positif... ■

Si l'inéquation ne se ramène pas après simplification à une inéquation du premier degré, on suit la démarche suivante :

① On regarde d'abord si ce n'est pas évident.

② Sinon on regroupe tous les termes dans le premier membre pour que le second soit égal à 0.

③ On factorise le premier membre en le mettant sous forme d'un produit ou d'un quotient.

④ On étudie le signe de chacun des facteurs et on fait un «tableau de signes».

⑤ On conclut.

Exemples

● Résoudre l'inéquation $x^2 + 2x + 3 < 2(x - 1)$.
Après simplification on trouve $x^2 + 5 < 0$; or quel que soit x , $x^2 + 5 \geq 5$, donc la phrase n'est pas vraie.

L'inéquation n'admet pas de solution.

● $(x + 1)(5x + 1) \geq (x + 1)(19x - 5)$.

Cette inéquation est équivalente à
 $(x + 1)(5x + 1) - (x + 1)(19x - 5) \geq 0$,
soit $(x + 1)(-14x + 6) \geq 0$.

On sait trouver le signe de $x + 1$, $x + 1 > 0$ pour $x > -1$.

Et celui de $-14x + 6$, $-14x + 6 > 0$ pour $x < \frac{3}{7}$.

On résume dans un tableau, et on lit l'ensemble des solutions sur la dernière ligne.

x	$-\infty$	-1	$3/7$	$+\infty$
signe de $x + 1$		0	+	+
signe de $-14x + 6$	+	+	0	-
signe des produits	-	0	+	-

L'inéquation a pour ensemble de solutions

$$\left[-1 ; \frac{3}{7} \right].$$

● Résoudre $(x + 1)^2 < (2x + 5)^2$.

On a encore $(x + 1)^2 - (2x + 5)^2 < 0$ soit $(-x - 4)(3x + 6) < 0$.

On établit un tableau de signes, dont on lit la dernière ligne.

x	$-\infty$	-4	-2	$+\infty$
signe de $(-x - 4)$		+	0	-
signe de $(3x + 6)$		-	0	+
signe des produits	-	0	+	-

L'ensemble des solutions est $] -\infty, -4[\cup] -2, +\infty[$.

● Pour l'inéquation $x^2 - 6x + 9 \leq 0$, on reconnaît $(x - 3)^2$ dans le premier membre. Cette équation n'a qu'une solution, c'est le réel 3.

● Pour résoudre $\frac{5x + 1}{x - 1} \geq 1$ (avec $x \neq 1$).

$$\text{On a } \frac{5x + 1}{x - 1} - 1 \geq 0$$

$$\frac{4x + 2}{x - 1} \geq 0.$$

En faisant le tableau :
L'ensemble des solutions

x	$-\infty$	$-1/2$	1	$+\infty$
signe de $(4x + 2)$		0	+	+
signe de $(x - 1)$	-	-	0	+
signe du quotient	+	0	-	+

est $] -\infty ; -\frac{1}{2}] \cup] 1 ; +\infty [$.

● Soit à résoudre l'inéquation

$$\frac{(2x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 5} < 0.$$

Puisque $2x^2 + 1$ et $x^2 + 5$ sont strictement positifs, il reste $x^2 - 1 < 0$.

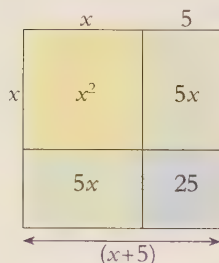
Soit $(x - 1)(x + 1) < 0$.

En étudiant le signe de $x - 1$ et de $x + 1$, on trouve que l'inéquation a pour ensemble de solutions $] -1, 1[$. ■

C'est la plus célèbre des équations : elle paraît insurmontable au premier abord ; mais il suffit d'une petite transformation algébrique pour rendre sa résolution facile.

Introduction

Les géomètres grecs, déjà, savaient résoudre certaines équations du second degré. Pour résoudre, par exemple : $x^2 + 10x = 56$.



ils remarquaient que le premier membre est l'aire d'un carré de côté x , augmenté des aires de deux rectangles de côtés x et 5 .

Si l'on complète cette surface avec le carré de côté 5 , on obtient le grand carré de côté $(x+5)$;
 $(x+5)^2 = 56 + 25$, soit
 $(x+5)^2 = 81$, donc
 $x+5 = 9$, soit $x = 4$.

On trouve de la sorte une racine de cette équation, mais nous verrons qu'elle a une seconde solution négative : -14 . ■

Résolution « moderne » de $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

On a vu que

$$ax^2 + bx + c =$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

On pose $b^2 - 4ac = \Delta$.

Δ s'appelle le discriminant

et l'équation s'écrit :

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0.$$

• Si $\Delta < 0$: le premier membre est strictement positif donc l'équation n'a pas de racine.

• Si $\Delta = 0$: l'équation équivaut à $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$

dont la seule racine est $-\frac{b}{2a}$ (on l'appelle parfois racine double).

• Si $\Delta > 0$: on peut factoriser le premier membre et l'équation a deux racines :

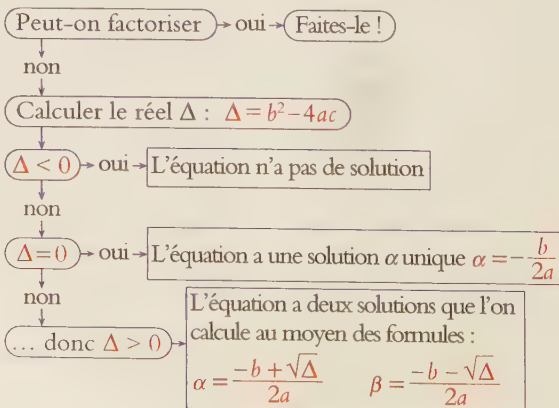
$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

La somme de ces racines est : $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$.

Le produit de ces racines est : $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$.

On peut résumer la résolution de l'équation du second degré par l'« organigramme » ci-dessous. ■



Cinq exemples

● Résoudre : $4x^2 - 3x = 0$.

En factorisant on a $x(4x - 3) = 0$ dont la résolution est immédiate.

Les racines sont 0 et $\frac{3}{4}$.

● Résoudre : $x^2 + x - 2 = 0$.

On ne peut factoriser, donc on calcule le discriminant Δ , $\Delta = 9$.

On applique les formules et on trouve les racines 1 et -2.

● Résoudre $x^2 + 6x + 9 = 0$.

On reconnaît au premier membre le développement de $(x + 3)^2$; l'équation a une solution : -3. On trouverait d'ailleurs $\Delta = 0$.

● Résoudre $x^2 + x + 2 = 0$.

$\Delta = -7$. L'équation n'a pas de solution.

● Résoudre

$$x^2 + 10x - 56 = 0.$$

C'est l'équation envisagée en introduction : on a $\Delta = 18^2$ et on trouve les racines 4 et -14. ■

Pour résoudre une équation, choisissez la méthode la plus courte entre :

– le calcul de Δ et l'application des formules donnant les solutions.

– le calcul direct donnant $a(x^2 - k) = 0$.

La factorisation

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines α et β , alors le trinôme du second degré s'écrit sous forme factorisée $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$. ■

Les racines simples

Si $a + b + c = 0$, alors 1 est une racine; l'autre racine est $-\frac{c}{a}$.

Si $a + c = b$ alors -1 est une racine l'autre racine est $-\frac{c}{a}$.

$12x^2 + 25x - 37 = 0$ a pour racines 1 et $-\frac{37}{12}$.

$12x^2 + 25x + 13 = 0$ a

pour racines -1 et $-\frac{13}{12}$.

Il est toujours utile de vérifier si des nombres simples comme 1, -1 ou 2 sont ou ne sont pas des solutions de l'équation proposée. Ensuite, pour trouver l'autre racine, on a le choix entre l'utilisation de l'une des relations

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ ou la}$$

factorisation du polynôme en $a(x - \alpha)(x - \beta)$.

Exemple : $2x^2 - 5x + 2 = 0$ admet $x = 2$ pour solution ($2 \times 4 - 5 \times 2 + 2 = 0$).

L'équation peut donc s'écrire : $2(x - 2)(x - \beta) = 0$. L'identification des termes constants (2 et 4 β) donne l'autre solution $\beta = \frac{1}{2}$. ■

Des applications

● Équation du 3^e degré

Soit l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Le polynôme est divisible par $(x - 1)$.

On obtient

$$(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Les racines sont 1 ; 2 et 3.

● Équation bicarrée

C'est une équation du type $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Résoudre

$$x^4 + 2x^2 - 35 = 0 :$$

On pose $X = x^2$, avec $X \geq 0$.

On doit résoudre

$$X^2 + 2X - 35 = 0 \text{ dont les}$$

solutions sont $X_1 = 5$ et

$X_2 = -7$. Seule X_1 est

positive.

On a donc $x^2 = 5$ qui a pour solutions $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

● Équation du type

$$\sqrt{A} = B$$

Elle équivaut à $A = B^2$

et $B \geq 0$. Par exemple :

$$\sqrt{x+1} = x-5 \text{ équivaut}$$

$$\text{à } (x+1) = (x-5)^2 \text{ et}$$

$$x-5 \geq 0,$$

$$\text{soit } x^2 - 11x + 24 = 0 \text{ et}$$

$$x \geq 5. \text{ Des deux racines}$$

3 et 8 de cette équation,

seule 8 est à retenir,

puisque 3 est inférieure

à 5. Dans une telle

équation, aucune condi-

tion ne porte sur A qui

est pourtant « sous »

la racine ($A = B^2$, donc

est positif). En revanche,

on ne peut pas oublier

la condition $B \geq 5$. ■

Résoudre une inéquation du second degré, c'est savoir trouver le signe d'un trinôme : c'est la « traversée » de l'une de ses racines qui le fait changer de signe !

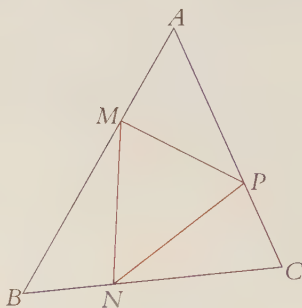
Introduction

ABC est un triangle et x un réel compris entre 0 et 1. On place les points M , N et P tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA}$. On démontre que l'aire du triangle MNP est égale à l'aire de ABC multipliée par

$$3x^2 - 3x + 1.$$

On se demande pour quelles valeurs de x l'aire de MNP est comprise entre le quart et la moitié de celle de ABC . On est donc amené à résoudre la double inéquation :

$$\frac{1}{4} \leq 3x^2 - 3x + 1 \leq \frac{1}{2}.$$



Les signes d'un trinôme du second degré

$T(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

On a vu que

$$T(x) - a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{\Delta}{4a^2} \right];$$

on peut donc trouver le signe de $T(x)$.

Le tableau ci-dessous résume tous les cas qui peuvent se présenter. ■

Si $\Delta < 0$: $T(x)$ est du signe de a pour tout réel x .

Si $\Delta = 0$: $T(x)$ est du signe de a pour tout

$$x \neq -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta > 0$: on peut écrire

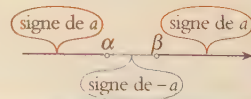
$$T(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

α et β étant les racines de $T(x) = 0$ ($\alpha < \beta$).

● $T(x)$ est du signe de a pour :
 $x \in]-\infty; \alpha[\cup]\beta; +\infty[$

● $T(x)$ est du signe de $-a$ pour $x \in [\alpha; \beta]$.

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
signe de $(x - \alpha)$		- 0 +	+ 0 +	
signe de $(x - \beta)$		- - 0 +	- 0 +	
signe du produit		+ 0 -	- 0 +	



Six exemples

Si $T_1(x) = x^2 + x - 2$.
 Les racines sont 1 et -2 .
 $T_1(x) > 0$ pour $x < -2$
 ou $x > 1$.
 $T_1(x) < 0$ pour $x \in]-2; 1[$.

● Si $T_2(x) = -2x^2 + 5x + 7$,
 les racines sont -1 et $\frac{7}{2}$.
 $T_2(x) > 0$ pour
 $x \in]-1; \frac{7}{2}[$
 et $T_2(x) < 0$ pour $x < -1$
 ou $x > \frac{7}{2}$.

● Pour résoudre l'inéquation $(-2x + 5)(x + 2) > 0$, il est totalement inutile dorénavant de dresser un tableau de signes ! En effet, si on dévelop-pait le premier membre,

on obtiendrait un trinôme du second degré pour lequel $a < 0$.

Les racines étant $\frac{5}{2}$ et -2 ,

on a immédiatement l'ensemble des solutions

$$\left] -2; \frac{5}{2} \right[.$$

● Résolution de la double inéquation :

$$\frac{1}{4} \leq 3x^2 - 3x + 1 \leq \frac{1}{2}.$$

On s'intéresse d'abord à

$$3x^2 - 3x + 1 \leq \frac{1}{2}.$$

Résoudre cette inéquation équivaut à résoudre :

$$6x^2 - 6x + 1 \leq 0.$$

Les racines du trinôme

$$\text{sont } \alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \text{ et }$$

$$\beta = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}.$$

L'ensemble des solutions est $S_1 = [\alpha, \beta]$.

On s'intéresse ensuite à

$$3x^2 - 3x + 1 \geq \frac{1}{4}.$$

Résoudre cette inéquation équivaut à résoudre :

$$4x^2 - 4x + 1 \geq 0. \text{ On reconnaît } (2x - 1)^2 \geq 0.$$

Cette inéquation est vérifiée pour tout x .

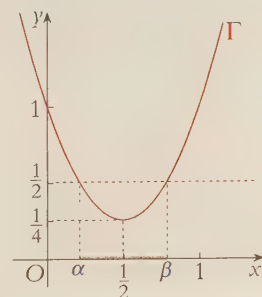
La double inéquation est donc vérifiée pour $x \in S_1$.

On conclut que l'aire du triangle MNP est supérieure ou égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire de ABC et

elle est inférieure à la moitié pour

$$x \in \left[\frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right].$$

Graphiquement, si l'on trace la parabole Γ d'équation $y = 3x^2 - 3x + 1$, résoudre l'équation revient à chercher les points de Γ dont l'ordonnée est comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.



● L'inéquation

$$x^3 + 11x \geq 6(x^2 + 1)$$

équivaut à

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$$

ou encore, en factorisant par $(x - 1)$:

$$(x - 1)(x^2 - 5x + 6) \geq 0.$$

On sait trouver le signe de ce produit d'un binôme par un trinôme du second degré grâce à un tableau de signes.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
signe de $(x-1)$		$-$	0	$+$	$+$
signe de (x^2-5x+6)		$+$	0	$-$	0
signe du produit		$-$	0	$+$	0

L'ensemble des solutions est $[1; 2] \cup [3; +\infty[$.

● Résoudre l'inéquation $x^4 - 10x^2 + 9 < 0$.

En posant $X = x^2$ on a

$$X^2 - 10X + 9 < 0.$$

Les racines en X sont 1 et 9 d'où la factorisation

$$(X - 1)(X - 9), \text{ soit}$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 9) < 0.$$

Après étude du signe de chacun des facteurs et un tableau approprié, on trouve l'ensemble des solutions :

$$]-3; -1[\cup]1; 3[.$$

● Pour résoudre l'inéquation :

$$\sqrt{x+1} > x-5,$$

on peut utiliser les deux représentations graphiques de

$$x \mapsto \sqrt{x+1} \text{ et}$$

$$x \mapsto x-5$$

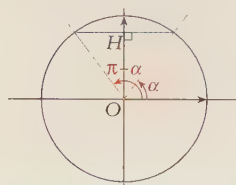
qui se coupent en $A(8; 3)$.

L'ensemble des solutions est $[-1; 8[$. ■

Au moyen des fonctions trigonométriques, on rencontre des équations d'inconnue x du type $\sin x = \sin a$; $\sin(ax + b) = \sin(cx + d)$; $\cos x = \cos a$, etc.

Les équations trigonométriques avec sinus

Si le réel β a le même sinus OH que le réel α , c'est que $\beta = \alpha + k2\pi$ ou $\beta = \pi - \alpha + k2\pi$.



① $\sin u = \sin v$ équivaut à :
 $u = v + k2\pi$ ou
 $u = \pi - v + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Exemples

Résoudre

$$\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$$

équivaut à résoudre :

$$5x + \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi \text{ ou}$$

$$5x + \frac{\pi}{3} - \pi = 2x + k2\pi$$

$$\text{soit } 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

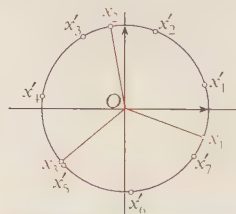
$$\text{ou } 7x = 2\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{et } x = -\frac{\pi}{9} + k2\frac{\pi}{3}$$

$$\text{ou } x' = \frac{2\pi}{21} + k\frac{2\pi}{7}.$$

On a donc 10 solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$: $\{x_1, x_2, x_3\}$ et

$\{x'_1, x'_2, \dots, x'_7\}$ et une infinité dans $\mathbb{R}$. On a l'habitude de marquer, sur un cercle trigonométrique, les extrémités des arcs solutions.



② L'équation $\sin x = a$

- n'a pas de solution si $|a| > 1$;
- a une infinité de solutions si $|a| \leq 1$.

Dans le cas où $|a| \leq 1$, on détermine un réel α tel que $a = \sin \alpha$.

L'équation $\sin x = \sin \alpha$ équivaut à $x = \alpha + k2\pi$ ou $x = \pi - \alpha + k2\pi$.

● Ainsi, l'équation

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ équivaut à}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{d'où } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ ou}$$

$$\text{ou } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$$

● L'équation $4 \sin^2 x = 2$ équivaut à :

$$(2 \sin x - \sqrt{2})(2 \sin x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\text{donc } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Or } \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{et } -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

D'où les solutions :

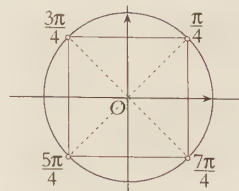
$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\text{ou } x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

$$\text{ou } x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\text{ou } x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi.$$

Il y a quatre solutions sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.



Les quatre points correspondants sont, sur le cercle, les sommets d'un carré.

● Résoudre l'équation $8 \sin^2 x - 6 \sin x + 1 = 0$.

Le changement de variable $X = \sin x$ conduit à l'équation du second degré en X :

$8X^2 - 6X + 1 = 0$ dont les solutions sont

$$X_1 = \frac{1}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1}{4}.$$

Il reste à résoudre

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ et } \sin x = \frac{1}{4}.$$

Les solutions de la première équation sont

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{ou } x_2 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\left(\frac{1}{4} \approx \sin 0,253 \text{ radians}\right).$$

Celles de la seconde sont

Attention !

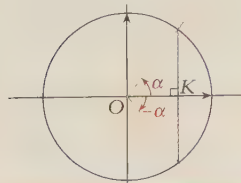
Ne pas oublier le $k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, sinon on perd bien des solutions !

$$x'_1 \approx 0,253 + k2\pi \text{ et}$$

$x'_2 \approx 2,889 + k2\pi$, ce qui fait quatre solutions sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$. ■

Les équations trigonométriques avec cosinus

Dire que le réel β a le même cosinus OK que le réel α , c'est dire que l'on a soit $\beta = \alpha + k2\pi$ soit $\beta = -\alpha + k2\pi$.



③ $\cos u = \cos v$ équivaut à $u = v + k2\pi$ ou $u = -v + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Exemples

● Résoudre l'équation $\cos 5x = \cos x$ équivaut à résoudre :

$$5x = x + k2\pi$$

$$\text{ou } 5x = -x + k2\pi, \text{ soit}$$

$$4x = k2\pi \text{ ou } 6x = k2\pi$$

soit encore

$$x_1 = k \frac{2\pi}{4} \text{ ou } x_2 = k \frac{2\pi}{6}.$$

On marque les points associés à ces racines sur un cercle trigonométrique. Pour le premier

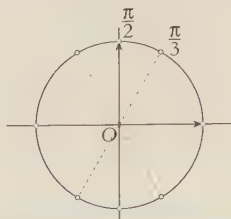
ensemble de solutions,

$$\text{on a : } \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$$

et pour le second :

$$\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; 2\pi.$$

Certains points sont confondus, ce qui fait 8 solutions sur $[0 ; 2\pi]$.



④ L'équation d'inconnue x : $\cos x = a$;

● n'a pas de solution si $|a| > 1$;

● a une infinité de solutions si $|a| \leq 1$.

Ainsi, $\sqrt{2} \cos 2x = 1$

équivaut à

$$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{4}, \text{ soit}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + k \frac{2\pi}{2} \text{ ou}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + k \frac{2\pi}{2},$$

ce qui correspond à quatre points sur le cercle.

● Pour résoudre l'équation $2 \cos^2 x = \cos x$, on procède au changement de variable $Y = \cos x$ d'où $2Y^2 - Y = 0$, soit $Y(2Y - 1) = 0$ qui équivaut à $Y = 0$ ou $Y = \frac{1}{2}$.

Il reste à déterminer les solutions de $\cos x = 0$ et $\cos x = \frac{1}{2}$.

● Pour résoudre l'équation $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ qui contient à la fois un cosinus et un sinus, on se souviendra que l'on peut remplacer $\cos \alpha$ par $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, ce qui donne une équation en sinus. On peut aussi remplacer $\sin \beta$ par $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. Ce qui donne une équation en cosinus. ■

Pour résoudre certaines équations ou inéquations où figurent des fonctions trigonométriques, il est parfois nécessaire de procéder à des transformations d'écritures qui reposent sur les identités suivantes dont les premières sont établies au moyen du produit scalaire.

Les développements pour tous réels a et b

$$\textcircled{1} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}. \text{ D'où l'on tire}$$

$$\textcircled{2} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \text{ et } \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}. \blacksquare$$

Le produit en somme

Par addition membre à membre des égalités de $\textcircled{1}$ prises deux à deux, on obtient

$$\textcircled{3} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]. \blacksquare$$

La somme en produit

On pose $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}$ d'où $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$ et $\textcircled{3}$ conduit aux formules de transformation $\textcircled{4}$:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

On établit aussi les relations suivantes bien utiles dans certains cas. Si $a \neq \pi + k\pi$, on pose $\tan \frac{a}{2} = t$, en fonction de quoi $\sin a$, $\cos a$ et $\tan a$ s'expriment rationnellement.

$$\textcircled{5} \sin a = \frac{2t}{1+t^2}; \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \tan a = \frac{2t}{1-t^2}. \blacksquare$$

Des applications

Soit l'équation $\cos 2x = 4 \sin x$.
En utilisant $\textcircled{2}$ il vient $1 - 2\sin^2 x = 4 \sin x$ qui équivaut à $2\sin^2 x + 4 \sin x - 1 = 0$, qu'il reste à résoudre en posant $X = \sin x$.

On résout l'équation $2X^2 + 4X - 1 = 0$ avec $-1 \leq X \leq 1$. On trouve

$$X_1 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \approx 0,225 \text{ et}$$

$$X_2 = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} \approx -2,215.$$

Seul X_1 convient.

On a $\sin x \approx 0,225$ d'où :
 $x \approx 13^\circ$ ou $x \approx 167^\circ$
à 360° près.

• Soit à résoudre l'équation :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \text{ sur } [0; \pi].$$

On factorise le premier membre en utilisant $\textcircled{4}$.

On a :

$$\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x.$$

D'où l'équation $\cos 2x(1 + 2\cos x) = 0$.

Elle équivaut à $\cos 2x = 0$
ou $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Sur $[0, \pi]$, on trouve les

solutions $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$.

● Pour résoudre dans $[0, \pi]$ l'inéquation :
 $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$,
 on résout
 $\cos 2x(1 + 2\cos x) > 0$
 en étudiant le signe de
 chacune des deux facteurs
 sur l'intervalle $[0, \pi]$.

On trouve :

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

● Pour résoudre l'inéquation :

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos 4x > 0;$$

on a intérêt à factoriser le premier membre en utilisant ④. Il vient l'inéquation équivalente

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

Il reste à étudier le signe de chacun des facteurs en se souvenant qu'un cosinus est positif

$$\text{sur } \left]-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right[$$

et négatif sur

$$\left]\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right[. \blacksquare$$

L'équation d'inconnue x : $a \cos x + b \sin x = c$

Soit a, b et c des constantes non nulles.

● Transformation du premier membre. Mettons en facteur le réel $\sqrt{a^2 + b^2}$.

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \times \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

ou

$$\text{il existe un réel } \alpha \text{ de}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1, \text{ donc}$$

$$[0; 2\pi[\text{ tel que } \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ d'où}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x),$$

$$a \cos x + b \sin x = \Gamma \sin(x + \alpha) \text{ avec } \Gamma = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

● Résolution de l'équation : elle équivaut alors à

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\Gamma}. \text{ Si } \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \geq 1 \text{ c'est-à-dire si } c^2 > a^2 + b^2,$$

cette équation n'a pas de solution. Si $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$ d'où
 $\text{si } c^2 \leq a^2 + b^2$, on pose $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \theta$.

L'équation :

$$\sin(x + \alpha) = \sin \theta \text{ a pour solutions } \begin{cases} x = -\alpha + \theta + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + (\pi - \theta) + k2\pi \end{cases}$$

Remarque :

L'équation initiale peut se résoudre en utilisant ⑤ : on obtient une équation d'inconnue t , avec $t = \tan \frac{x}{2}$:

$$a(1 - t^2) + 2bt = c(1 + t^2).$$

mais il ne faut pas oublier la condition $x \neq \pi + k\pi$.

● Cas particulier

Résoudre :

$$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Ici, on a } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}.$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}.$$

L'équation devient :

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ soit}$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}.$$

Les solutions

sont données par :

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \text{ ou}$$

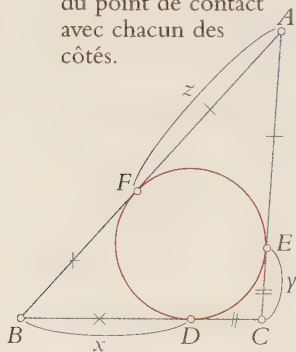
$$x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi. \blacksquare$$

Dans de nombreux problèmes, il faut connaître des solutions communes à plusieurs équations à la fois.

Introduction

Les côtés d'un triangle ABC sont $BC = 10$;
 $CA = 12$ et $AB = 16$.

On a construit le cercle inscrit dans ce triangle. Préciser la position du point de contact avec chacun des côtés.



On peut poser $BD = x$;
 $CE = y$ et $AF = z$.

On sait que les longueurs
des segments de tangente
à partir de chaque sommet
sont égales.

On a alors le système :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 12 \\ z + x = 16 \end{cases}$$

C'est un problème à trois inconnues. ■

Les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Soit le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Chacune de ces équations est l'équation cartésienne d'une droite dans un repère du plan. Résoudre le système, c'est déterminer les coordonnées (x, y) des points communs à ces deux droites, s'il y en a. Ce système peut avoir :

- un couple solution : les droites sont sécantes ;
- aucune solution : les droites sont parallèles disjointes ;
- une infinité de solutions : les droites sont confondues.

Le tableau des coefficients

a	b
a'	b'

désigne un nombre appelé le déterminant du système : il est égal à $ab' - ba'$ (c'est la différence des produits en croix).

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline a' & b' \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} - \\ - \\ - \end{array} \begin{array}{l} b a' \\ a b' \\ \end{array}$$

Si $ab' - ba' \neq 0$, les droites sont sécantes : le système a une solution.

Si $ab' - ba' = 0$, les droites ont même direction :

si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, les droites
sont confondues ;

si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, le système n'a pas de solution.

Lorsque $ab' - ba' \neq 0$, on dispose de divers procédés déjà rencontrés pour déterminer le couple solution : substitution ou combinaison linéaire.

Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 8x + 12y = 11 \end{cases}$$

Le déterminant est :

2	3
8	12

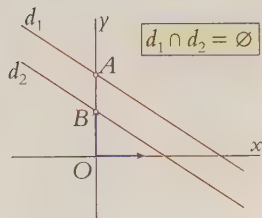
$$= 2 \times 12 - 8 \times 3 = 0.$$

Les deux droites ont donc la même direction et il s'agit de savoir si elles sont disjointes ou confondues.

On a $\frac{2}{8} - \frac{3}{12} \neq \frac{5}{11}$, donc

les droites sont parallèles et disjointes : le système n'a pas de solution. On peut d'ailleurs remarquer que la première droite coupe $\gamma\gamma'$

en $A\left(0; \frac{5}{3}\right)$ et la seconde coupe cet axe en $B\left(0; \frac{11}{12}\right)$.



Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 8x + 12y = 20. \end{cases}$$

On a affaire à deux droites de même direction,

mais on a $\frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{5}{20}$;

ce sont des droites confondues et le système a une infinité de solutions. Ce sont tous les couples de coordonnées des points de la droite d_1 .

Droites sécantes

Si les droites d'équations $A=0$ et $B=0$ ont un point commun, ce point appartient aussi à la droite d'équation $\alpha A + \beta B = 0$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0; 0)$. Prenons par exemple le système

$$\begin{cases} 2x + 5y - 7 = 0 \\ -7x + 3y + 19 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 41 \neq 0.$$

A	$2x + 5y - 7 = 0$
B	$-7x + 3y + 19 = 0$

$$(7A + 2B) \text{ donne}$$

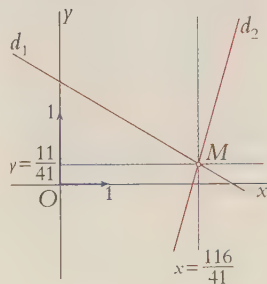
$$41y - 11 = 0.$$

$$(3A - 5B) \text{ donne}$$

$$41x - 116 = 0.$$

Le couple solution

unique est $\left(\frac{116}{41}; \frac{11}{41}\right)$.



Avec les coefficients seuls :

	x	y	
A	2	5	-7
B	-7	3	19

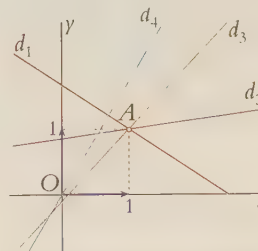
	x	y	
$7A + 2B$	0	4	-11
$3A - 5B$	41	0	-116

Deux inconnues et plus de deux équations

Examiner deux équations bien choisies et résoudre leur système.

Examiner ensuite si la solution est compatible avec les autres équations.

Soit
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 7y = -6 \\ 10x - 9y = 1 \\ 19x + 28y = 0 \end{cases}$$



Les deux premières droites ont en commun le point $A(1; 1)$.

La troisième passe aussi par A , mais ce point n'appartient pas à la quatrième.

Le système n'a donc pas de solution. ■

La méthode par combinaison appliquée à un système

écrit : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \text{ si } ab' - ba' \neq 0 \end{cases}$

conduit aux formules dites de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Aux dénominateurs, on a le déterminant du système et aux numérateurs on remplace la colonne des coefficients de l'inconnue cherchée par les constantes placées au second membre.

Les équations à plus de deux inconnues

Il est utile de savoir résoudre des équations à trois inconnues, notamment pour la géométrie analytique dans l'espace.

Deux équations et trois inconnues

L'idée générale de la méthode consiste à sélectionner deux inconnues et à résoudre le système par rapport à elles.

Exemple

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 7 \\ 3x - y + z = 19 \end{cases}$$

on privilégie x et y .

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 - 5z \\ 3x - y = 19 - z \end{cases}$$

et on résout ce système comme un système de 2 équations à 2 inconnues.

On trouve :

$$x = \frac{1}{11}(64 - 8z) ;$$

$$y = \frac{1}{11}(-17 - 13z).$$

On peut donner à z une valeur réelle quelconque : le système donné a une infinité de solutions qui sont des triplets.

En voici quelques-uns :

$$\left(\frac{64}{11}; -\frac{17}{11}; 0\right); (0; -11; 8),$$

$$\left(\frac{72}{11}; \frac{4}{11}; -1\right). \blacksquare$$

Trois équations et trois inconnues

L'idée générale de la méthode consiste à privilégier deux équations et deux inconnues, à les résoudre et à examiner la compatibilité avec la troisième équation.

Exemple 1

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 7 \\ 3x - y + z = 19 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

● Résoudre en (x, y) :

$$x = \frac{1}{11}(64 - 8z) ;$$

$$y = \frac{1}{11}(-17 - 13z).$$

● Substituer dans la troisième équation :

$$\frac{64}{11} - \frac{8}{11}z - \frac{17}{11} - \frac{13}{11}z + z = 1$$

$$\text{d'où } 10z = 36,$$

$$z = \frac{18}{5} = 3,6.$$

Par retour à x et y :

$$x = 3,2 \text{ et } y = -5,8.$$

Le triplet solution est donc : $(3,2 ; -5,8 ; 3,6)$.

Exemple 2

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 7 \\ 3x - y + z = 19 \\ 11x + 11y + 21z = 0. \end{cases}$$

● Les deux premières équations n'ont pas changé : par substitution dans la troisième équation, on obtient $0z = 47$ qui n'a pas de solution en z . Le système n'a pas de solution.

Exemple 3

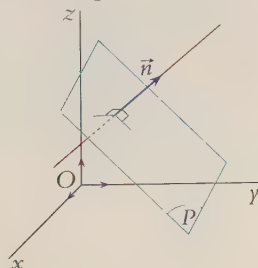
Reprenons l'exercice d'introduction de la page 262 ;

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 12 \\ z + x = 16. \end{cases}$$

● Première méthode
Comme ci-dessus, l'« isolement » des deux premières équations conduit à $x = 10 - y$ et $z = 12 - y$ et par substitution dans la troisième, on a $2y = 6$, d'où $y = 3$, d'où le triplet solution $(7 ; 3 ; 9)$.

● Seconde méthode
Par addition des trois équations, il vient $2(x + y + z) = 38$ avec $x + y + z = 19$ et grâce à chacune des équations, on trouve $z = 19 - 10 = 9$; $x = 19 - 12 = 7$; $y = 19 - 16 = 3$. ■

Une équation linéaire à trois variables, du type $ax + by + cz = d$, est l'équation d'un plan P dans un repère orthonormal de l'espace. Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à P , c'est-à-dire vecteur directeur des perpendiculaires au plan P .



● Résoudre un système $\begin{cases} ax + by + cz = d & (P) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (Q) \end{cases}$ c'est déterminer les coordonnées de leurs points communs.

➤ Si les coefficients (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels, les plans sont soit parallèles, soit confondus : le système n'a pas de solution ou une infinité de solutions.

Exemple 1

Le système

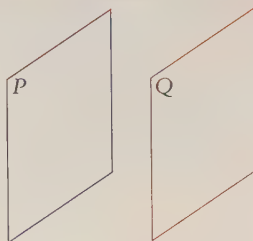
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ -10x + 15y - 5z = 0 \end{cases}$$

n'a pas de solution.

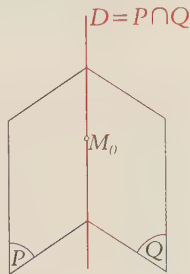
À l'inverse, le système

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ -10x + 15y - 5z = -25 \end{cases}$$

a une infinité de solutions.



● Dans le cas contraire, les plans sont sécants : le système a une infinité de solutions qui sont les coordonnées des points de la droite D , intersection des deux plans ; elles s'écrivent $(x_0 + k\alpha, y_0 + k\beta, z_0 + k\gamma)$ ($k \in \mathbb{R}$), (x_0, y_0, z_0) étant les coordonnées d'un point de $P \cap Q$, et (α, β, γ) celles du produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{n'}$ des deux vecteurs normaux aux deux plans.



Exemple 2

Soit le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

Le point $A(1; 1; 1)$ est commun à ces deux plans sécants.

Le vecteur $\vec{u}(2; 3; 5)$ est vecteur directeur de la droite d'intersection.

Les solutions sont : $(1 + 2k; 1 + 3k; 1 + 5k)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

● Résoudre un système de trois équations

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0, \end{cases}$$

c'est rechercher les points communs à ces trois plans.

On peut avoir :

● une solution : les trois plans ont un point commun ;

● une infinité de solutions : les trois plans ont une droite en commun ou les trois plans sont parallèles ;

● pas de solution : si deux des plans sont parallèles.

Exemple 3

Soit le système :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \\ 4x + 4y + 4z = 8 \end{cases}$$

Les trois plans sont sécants au point $A(3; 0; -1)$.

On peut utiliser une démarche déjà vue ou encore la démarche du « pivot » examinée plus loin. ■

La méthode de Gauss pour les systèmes

C'est une méthode générale utilisable essentiellement avec des systèmes importants, qui a le mérite d'utiliser un algorithme programmable répétitif. Il utilise le principe de combinaison linéaire des équations.

Introduction

Si l'on considère le système triangulaire

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 22 \\ 2y - 3z = -5 \\ 4z = 12 \end{cases}$$

sa résolution est particulièrement simple : en commençant par la fin, de proche en proche,

x	y	z	
1	3	5	22
0	2	3	-5
0	0	4	12

on trouve : $z = 3$; $y = 2$; $x = 1$. Et on a bien conscience du fait que seuls les coefficients interviennent dans cette résolution. D'où l'idée de faire l'économie d'écriture des inconnues $x, y, z, \dots$ à condition de bien écrire les coefficients dans le même ordre, avec un zéro pour indiquer que l'inconnue correspondante ne figure pas. On n'oubliera pas de faire apparaître le deuxième membre. ■

Un exemple

Résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = \frac{9}{2} & (L_1) \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + z = 3 & (L_2) \\ x + \frac{2}{5}y - \frac{3}{5}z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

Phase 1

Simplifier pour obtenir des coefficients entiers et faire l'économie des lettres : écrire un tableau des coefficients bien ordonnés.

L_1 multiplié par 2 $\rightarrow$	1	1	2	9
L_2 multiplié par 3 $\rightarrow$	2	-1	3	9
L_3 multiplié par 5 $\rightarrow$	5	2	-3	0

Phase 2

Équation pivot $\rightarrow L_1$	1	1	2	9
$(2L_1 - L_2) \rightarrow L_2$	0	3	1	9
$(5L_1 - L_3) \rightarrow L_3$	0	3	13	45

	L_1	1	1	2	9
Équation pivot :	L_2	0	3	1	9
$(L_3 - L_2) \rightarrow$	L_3	0	0	12	36

Le principe

- Choisir une inconnue pivot et une équation pivot dans laquelle le coefficient de cette inconnue n'est pas nul.
- Remplacer chaque équation par une combinaison d'elle-même avec l'équation pivot de manière que le coefficient de l'inconnue choisie devienne nul.
- On obtient un système ayant une inconnue de moins. Et on continue de proche en proche jusqu'à obtenir un système triangulaire équivalent.

Phase 3

Le système triangulaire peut être résolu en commençant par la fin : L_3 donne $12z = 36$ d'où $z = 3$.

Par substitution dans L_2 : $3y + 3 = 9$, d'où $y = 2$.

Par substitution dans L_1 : $x + 2 + 6 = 9$, d'où $x = 1$.

La solution unique est le triplet $(1; 2; 3)$.

- Ce que l'on peut faire :
 - on peut permuter deux lignes quelconques ;
 - on peut si deux lignes sont identiques supprimer l'une de ces lignes ;
 - on peut supprimer une

0	0	0	...	0
---	---	---	-----	---

ligne.

– s'il apparaît une ligne

0	0	0	...	K
---	---	---	-----	---

avec la constante K non nulle, le système n'a pas de solution. ■

Des exemples pour s'entraîner

$$\bullet \begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

on obtient les « tableaux » successifs suivants :

2	3	1	1	2	L_1
2	3	1	0	4	L_2
2	3	2	0	3	L_3
2	3	0	0	5	L_4

2	3	1	1	2
0	0	2	-1	2
0	0	3	-1	1
0	0	1	-1	3

2	3	-1	1	2
0	0	2	-1	2
0	0	0	1	-4
0	0	0	-1	4

L_2

Les deux dernières lignes seront identiques au signe près : on a $t = -4$.

Dans L_2 : $2z + 4 = 2$, d'où $z = -1$.

La première équation s'écrit

$$2x + 3y = 5.$$

Elle a une infinité de solutions.

Si on pose $x = m$,

$$\text{on a } y = \frac{1}{3}(5 - 2m) :$$

le système a une infinité de solutions :

$$\left(m ; \frac{1}{3}(5 - 2m) ; -1 ; -4 \right).$$

- Avec m réel quelconque :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

On a les tableaux successifs suivants :

1	3	-2	1	1	1	
$L_2 - L_1 \rightarrow$	1	3	-1	3	2	3
$L_3 - L_1 \rightarrow$	1	3	-3	-1	0	2

1	3	-2	1	1	1	
$L_2 - L_1 \rightarrow$	0	0	1	2	1	2
$L_3 - L_1 \rightarrow$	0	0	-1	-2	-1	1

1	3	-2	1	1	1	
0	0	1	2	1	2	
$L_3 + L_2 \rightarrow$	0	0	0	0	0	3

La dernière ligne figure l'équation : $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 3$ qui n'a pas de solution. Donc le système n'a pas de solution. ■

De l'évanouissement des inconnues

« Quand un problème renferme plusieurs inconnues dont les relations sont tellement compliquées qu'on se trouve obligé de former plusieurs équations, alors, pour découvrir les valeurs de ces inconnues, on les fait toutes évanouir, moins une qui, combinée seule avec les grandeurs connues, donne, si le

problème est déterminé, une équation finale, dont la résolution fait connaître d'abord cette inconnue, et ensuite, par son moyen, toutes les autres. L'algèbre fournit pour cela des règles, dont le succès est infaillible, pourvu qu'on ait la patience de les suivre. »

Gabriel Cramer (1750).

Des problèmes particuliers portant sur des systèmes et des équations

Voici quelques problèmes plus ou moins anciens pour s'entraîner à résoudre des systèmes et des équations.

Un problème de Diophante

Un nombre A étant donné, trouver trois nombres entiers tels que le premier avec la moitié de la somme des autres donne A , de même le second avec le tiers de la somme des autres donne aussi A , de même le troisième avec le quart de la somme des autres donne aussi A .

Désignation des inconnues : soit x, y et z , ces trois nombres entiers.
Traduction du problème :

$$\begin{cases} x + \frac{y+z}{2} = A \\ y + \frac{x+z}{3} = A \\ z + \frac{x+y}{4} = A \end{cases}$$

Résolution du système : il équivaut à

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2A \\ x + 3y + z = 3A \\ x + y + 4z = 4A \end{cases}$$

On trouve $x = \frac{5A}{17}$;

$$y = \frac{11A}{17} ; z = \frac{13A}{17}.$$

Ces nombres sont des entiers à condition que le nombre A donné soit un multiple de 17. Par exemple si $A = 68$ on obtient $(20 ; 44 ; 52)$. ■

Les oiseaux de Léonard de Pise

Un oiseleur achète 30 oiseaux pour 30 deniers : des moineaux, des tourterelles et des colombes. Pour 2 deniers, il peut acheter 3 moineaux, ou encore 2 tourterelles ou 1 colombe. Combien a-t-il acheté d'oiseaux de chaque espèce ?

Soit m, t et c les nombres respectifs de moineaux, tourterelles ou colombes. Les prix respectifs à l'unité sont respectivement $\frac{2}{3}$; 1 et 2 en deniers.

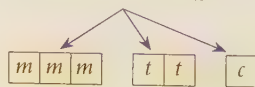
On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} m + t + c = 30 \\ \frac{2}{3}m + 1t + 2c = 30 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} m + t + c = 30 & L_1 \\ 2m + 3t + 6c = 90 & L_2 \end{cases}$$

Pour 2 deniers



Pour 6 deniers

6 oiseaux

C'est un système de 2 équations comportant trois inconnues.

On peut calculer m et t en fonction de c .

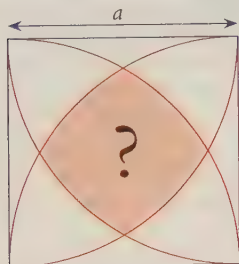
Par $(-3L_1 + L_2)$ on trouve : $m = 3c$, et $t = 30 - 4c$.

On se souviendra que m, t et c sont des entiers positifs : la plus petite valeur de c est $c = 1$ et sa plus grande valeur est 7. On a donc sept triplets solutions :

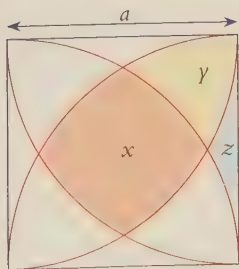
$(3 ; 26 ; 1)$; $(6 ; 22 ; 2)$;
 $(9 ; 18 ; 3)$; $(12 ; 14 ; 4)$;
 $(15 ; 10 ; 5)$; $(18 ; 6 ; 6)$;
 $(21 ; 2 ; 7)$. ■

Le calcul d'une aire

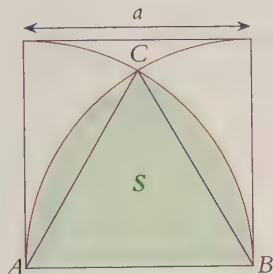
Un carré de côté a est découpé au moyen de quatre quarts de cercle de rayon a et de centres chacun des quatre sommets. Calculer l'aire de la surface coloriée en orange.



On désigne par x l'aire à calculer. Il faut ici introduire d'autres inconnues, par exemple y et z , les aires de surfaces indiquées sur le dessin. L'aire totale est a^2 :

$$x + 4y + 4z = a^2.$$


L'aire d'un quart de disque est $\frac{1}{4} \pi a^2$, soit

$$x + 3y + 2z = \frac{1}{4} \pi a^2.$$


L'aire coloriée en vert vaut $x + 2y + z$. Elle est égale à deux fois

l'aire du secteur de 60° diminuée de l'aire du triangle équilatéral ABC :

$$x + 2y + z = \frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

On a ainsi à résoudre un système de trois équations d'inconnues x , y et z : seul x nous intéresse.

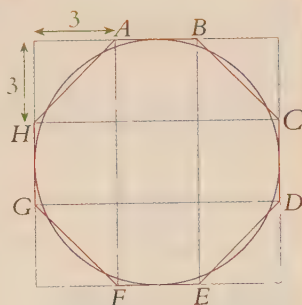
On trouve

$$x = a^2 \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right)$$

soit $x \approx 0,315 a^2$. ■

Des équations pour π

Le nombre π n'est pas solution d'une équation « algébrique » : on dit que ce nombre est « transcendant ». Au cours des âges, des mathématiciens ont découvert des approximations de π , qui sont solutions d'équations algébriques. En voici quelques-unes.



● La solution de l'équation $113x - 355 = 0$.

● La solution de $(3^4)x - 4^4 = 0$.

● La racine positive de l'équation $81x^2 - 800 = 0$.

● La plus grande des racines de l'équation $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ qui est $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

● La racine positive de $1250x^2 - 12337 = 0$.

● La plus grande des racines de l'équation : $57600x^2 - 240480x + 187001 = 0$ qui est égale à

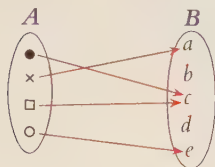
$$\frac{167}{80} + \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Les six premières décimales sont exactes.

On utilise quotidiennement souvent l'expression « en fonction de... ». Nous allons ici donner un sens mathématique à cette notion.

Qu'est-ce qu'une fonction ?

Soit deux ensembles : la source A et le but B . Une fonction de A vers B est un procédé pour faire correspondre à certains éléments de A un élément unique de B . Si la source est $\mathbb{N}$, la fonction est une suite.



Si la source et le but sont l'ensemble des points du plan, la fonction est une transformation du plan.



Jacques Bernoulli
(1654-1705).

Dans ce chapitre, source et but sont des ensembles de nombres, c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou bien une partie de $\mathbb{R}$. Il existe plusieurs façons de définir une fonction numérique :

- une situation : à l'âge d'un enfant on associe sa taille ;
- par un graphique ;
- au moyen d'une touche de calculatrice ;
- par une formule : par exemple, à un réel x quelconque on peut faire correspondre le nombre réel $(x+1)(x+2)$.



Le philosophe et mathématicien Gottfried Leibniz (1646-1716).

On écrit :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1)(x+2).$$

Le nombre obtenu s'appelle l'image de x par la fonction f .

On le note $f(x)$ et on écrit : $f(x) = (x+1)(x+2)$.

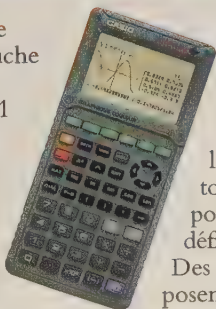
Par exemple, on a $f(-3) = 2$;
 $f(0, 1) = 2, 31$; $f(-1) = 0$
 et $f(-2) = 0$:
 on dit que -1 et -2 sont les antécédents de 0 par f . ■

Historiquement, l'idée de correspondance entre nombres est très ancienne, mais c'est seulement depuis le XVII^e siècle que l'on s'intéresse au concept de fonction. C'est sans doute Leibniz (1646) qui introduisit le mot « fonction » à partir de considérations sur les courbes en étudiant le problème d'une tangente

à une courbe plane. Bernoulli (1698) reprend le terme pour désigner « une quantité X composée d'une manière quelconque de la variable x et de quantités données ». La notation $f(x)$, pour $f(x)$, est introduite à cette époque. Des mathématiciens comme Euler puis Gauss et bien d'autres poursuivent l'étude des fonctions.

L'ensemble de définition d'une fonction

Votre calculatrice comporte une touche **ln**. Si vous tapez **ln - 1** (**ENTER**), la calculatrice affiche «ERREUR», ce qui veut dire que le nombre (-1) n'a pas d'image par cette fonction. Il en est de même pour tout nombre négatif ou nul. On dit que la fonction **ln** est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. L'ensemble de définition d'une fonction numérique est l'ensemble des éléments de la source qui ont une image par cette fonction.



Pour la fonction g définie par $g(x) = x^2 - x + 3$ on peut calculer $g(x)$ pour tout réel x : elle a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$.

Des problèmes se posent dans deux cas : lorsque l'on rencontre la variable au dénominateur ou encore sous un radical.

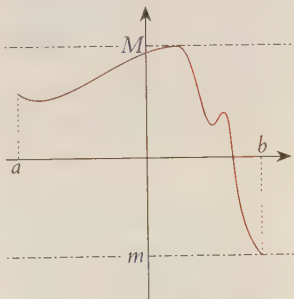
Exemples

La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x-2}$ est définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

La fonction $x \rightarrow \sqrt{2-x}$ est définie pour $x \leq 2$ donc sur $]-\infty; 2]$. ■

Maximum, minimum

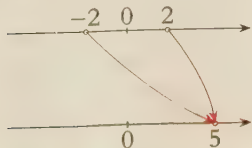
Sur l'intervalle $[a, b]$, le maximum M de la fonction f est la plus grande valeur prise par $f(x)$, le minimum m est la plus petite valeur prise par $f(x)$:



autrement dit, pour tout x de $[a, b]$, on a $f(x) \leq M$ et $f(x) \geq m$. ■

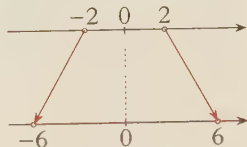
La parité d'une fonction

Considérons une fonction définie sur l'intervalle $[-b, b]$ ($b > 0$). Pour la fonction g telle que $g(x) = x^2 + 1$, on a $g(2) = g(-2) = 5$. Plus généralement, deux nombres opposés quelconques de I ont la même image par g : pour tout a de I , $g(-a) = g(a)$.



On dit que cette fonction est une fonction **paire**. Ce n'est pas le cas de $f : x \rightarrow 2x + 8$ car $f(-1) = 6$ et $f(1) = 10$.

On dit qu'une fonction g est une fonction **impaire** si deux réels opposés quelconques de l'intervalle I ont des images opposées par g , autrement dit si $g(-a) = -g(a)$ pour tout a de I . Par exemple la fonction $g : x \rightarrow x^3 - x$ est impaire.



Il n'en n'est pas de même de $f : x \rightarrow 2x + 8$.

Une fonction peut être paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

Mettre en évidence une parité est intéressant pour la représentation graphique de la fonction. ■

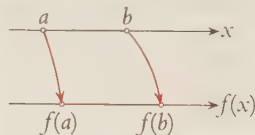
Une question importante à propos des fonctions est de connaître leurs variations : on pourra comparer les images de deux réels de l'ensemble de départ.

Les variations d'une fonction

La taille d'un enfant est une fonction de son âge : si l'âge augmente, la taille augmente. On dit que cette fonction est une fonction croissante.

Plus précisément, si la fonction f est définie sur l'intervalle I , on dit que f est croissante sur I si deux réels quelconques de I sont rangés dans le même ordre que leurs images.

Autrement dit, quels que soient les nombres a et b de I : si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$.



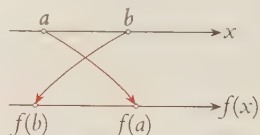
On dit encore que f est croissante sur cet intervalle si le quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ est positif sur}$$

l'intervalle quels que soient a et b ($a \neq b$).

Une fonction g est décroissante sur J si deux réels quelconques de J sont rangés dans l'ordre inverse de leurs images par g , autrement dit si $a < b$, alors $g(a) \geq g(b)$, ce qui veut dire que le quotient

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \text{ est négatif.}$$



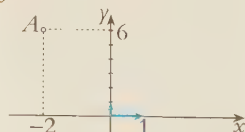
Une fonction est constante sur un intervalle si elle garde la même valeur sur cet intervalle. ■

La représentation graphique d'une fonction numérique

Prenons par exemple la fonction $f: x \rightarrow -x^3 + 3x + 4$ étudiée sur l'intervalle $[-2; 2,5]$ et calculons $f(x)$ pour x décrivant cet intervalle à partir de -2 , avec un pas de $0,5$.

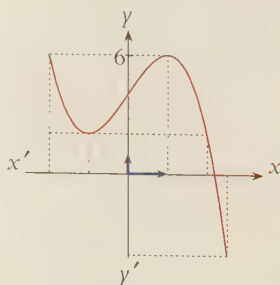
On obtient le tableau de valeurs ci-dessous. Après avoir tracé un repère du plan, marquons d'abord le point $A(-2; 6)$: son

ordonnée 6 est l'image par f de son abscisse 2 .



C'est ce que l'on appelle un **point représentatif** de f dans ce repère. Un tel point est un point d'abscisse x de l'intervalle

d'étude et dont l'ordonnée y est égale à $f(x)$.



En utilisant les calculs du tableau, on peut marquer neuf points représentatifs de cette fonction, mais

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	6	2,875	2	2,625	4	5,375	6	5,125	2	-4,125

on pourrait en marquer bien plus ; il suffit de choisir d'autres valeurs de la variable x , en prenant un pas plus petit, par exemple 0,2...

La courbe obtenue en joignant ces points par un tracé continu est la *représentation graphique* de la fonction f sur l'intervalle considéré.

Dire que le point $M(a, y)$ est un point représentatif de f , c'est dire que son ordonnée y est égale à $f(a)$.

Une parallèle à l'axe $y'y$ coupe la courbe en un seul point, ou pas de point du tout, alors que pour une parallèle à l'axe xx' , on peut obtenir, selon les cas, zéro, un ou plusieurs points d'intersection. ■

Courbe et variations

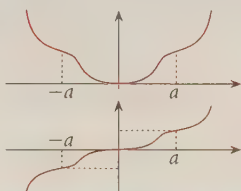
L'allure de la courbe illustre bien les variations de la fonction. C'est ainsi que, pour notre exemple, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	-2	-1	1	2,5
$f(x)$	6	↘ 2	↗ 6	↘ 4,125

On remarque un maximum égal à 6 atteint pour $x=-2$ ou $x=1$ et un minimum égal à -4,125 pour $x=2,5$. ■

Courbe et parité

Dans un repère orthonormal :



Si la fonction est paire, l'axe yy' est axe de symétrie de la représentation graphique de cette fonction.

Si la fonction est impaire, l'origine du repère est centre de symétrie de cette représentation. ■

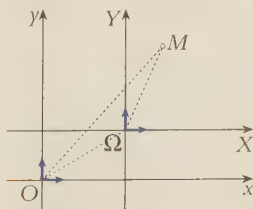
Changer l'origine du repère

Dans certains cas, il est intéressant pour découvrir des propriétés d'une fonction, de choisir un repère avec une nouvelle origine.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un point M a pour coordonnées (x, y) . Si l'on choisit une nouvelle origine $\Omega(a, b)$, alors dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ ce même point M a pour coordonnées $(X=x-a; Y=y-b)$.

Ces égalités proviennent de l'égalité vectorielle :

$\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire, avec les coordonnées : $a+X=x$ et $b+Y=y$.



Prenons par exemple la courbe C qui représente

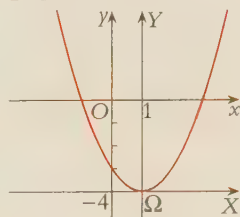
la fonction :

$$f: x \rightarrow (x+1)(x-3).$$

Elle a pour équation :

$$y = (x+1)(x-3) \text{ dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

Prenons comme nouvelle origine le point $\Omega(1; -4)$. Pour un point $M(x, y)$ quelconque, les nouvelles coordonnées sont (X, Y) avec $x=X+1$ et $y=Y-4$ et en substituant dans l'équation, on obtient $Y-4=(X+2)(X-2)$, soit $Y=X^2$.



La même courbe (elle n'a pas bougé !) est, dans ce nouveau repère, la représentation graphique de la nouvelle fonction : $X \rightarrow X^2$, qui est tout de même plus simple ! ■

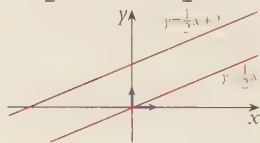
Connaître certaines fonctions particulières aide à en étudier bien d'autres qui leur « ressemblent ».

La fonction affine $f: x \rightarrow ax + b$ ($a \neq 0$)

Cette fonction affine est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$. Si $a > 0$, elle est croissante sur $\mathbb{R}$ et si $a < 0$, elle est décroissante. La représentation graphique est une droite d'équation $y = ax + b$.

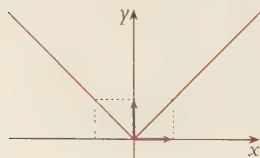
Le nombre a est le coefficient directeur. Si $b = 0$, la droite passe par l'origine : la fonction $x \rightarrow ax$ est alors une fonction linéaire.

Ci-dessous, les représentations graphiques de $x \rightarrow \frac{1}{2}x + 2$ et $x \rightarrow \frac{1}{2}x$. ■



La fonction « valeur absolue » $f: x \rightarrow |x|$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$, croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 0]$. ■



La fonction « carré » $f: x \rightarrow x^2$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$. Pour étudier ses variations, choisissons deux réels quelconques inégaux a et b : $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$.

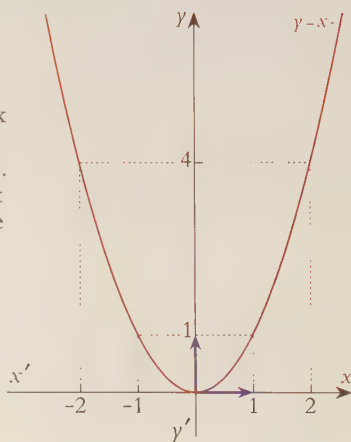
Si les nombres a et b sont tous deux positifs, alors le signe de $f(b) - f(a)$ est le même que celui de $b - a$, ce qui veut dire que f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors que si a et b sont deux réels négatifs, $f(b) - f(a)$ est de signe contraire de celui de $b - a$, ce qui signifie que f est décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 0]$.

Ce qui donne le tableau de variations suivant :

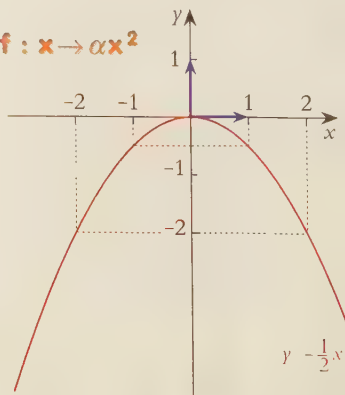
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\swarrow \quad \searrow$ 0		

La fonction « carré » $f: x \rightarrow \alpha x^2$

Cette fonction a le même ensemble de définition que la fonction carré. Ses variations dépendent du signe du coefficient α . La représentation graphique de cette fonction est encore une parabole. ■



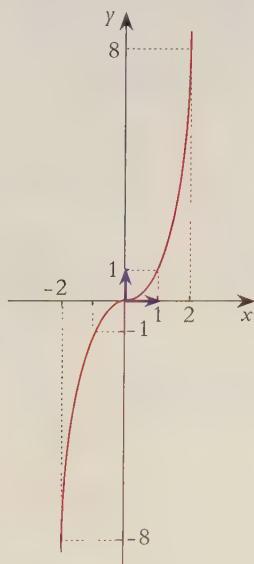
Cette fonction est paire. Sa représentation graphique est une parabole dont l'axe y' est axe de symétrie. L'origine du repère en est le sommet. ■



La fonction «cube»

$$f: x \rightarrow x^3$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour les variations, étudions le signe de $f(b) - f(a)$
on a : $f(b) - f(a) = b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$.



Si a et b sont de même signe, c'est-à-dire tous deux positifs, ou tous deux négatifs, le produit ab est positif donc $f(b) - f(a)$ est de même signe que $b - a$: cette fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

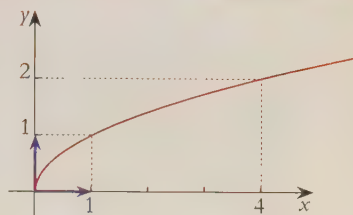
Cette fonction «cube» est une fonction impaire. L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe. ■

La fonction «radical» $f: x \rightarrow \sqrt{x}$

L'ensemble de définition est $[0; +\infty[$.
Pour deux réels positifs a et b , on a :
 $f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} =$

$$\frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}$$

Le signe de la différence $f(b) - f(a)$ est donc celui de la différence $b - a$,



donc cette fonction est croissante sur $[0; +\infty[$. ■

La fonction «inverse» $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

Cette fonction n'est évidemment pas définie pour $x=0$.
Son ensemble de définition est $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$, que l'on note encore $\mathbb{R}^*$.
Pour des réels a et b non nuls on a :

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = -\left(\frac{b-a}{ab}\right).$$

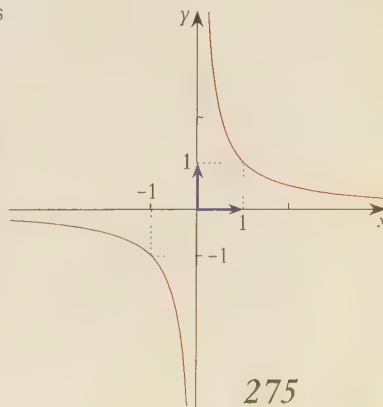
Ce qui entraîne que, pour deux réels a et b tous deux positifs ou tous deux négatifs, $f(b) - f(a)$ est du signe contraire de $(b-a)$.

Autrement dit, cette fonction est décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$. Mais on ne peut pas parler de «variations sur $\mathbb{R}$ » puisque la fonction n'est pas définie en $x=0$.

Ce qui donne le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

La représentation graphique s'appelle hyperbole équilatère. La fonction f étant impaire, l'origine est le centre de symétrie. Les deux axes de coordonnées sont les asymptotes de cette hyperbole. ■

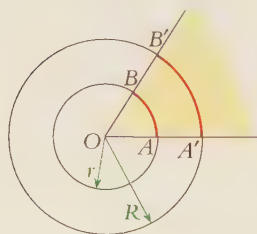


La trigonométrie dans le triangle rectangle est bien utile pour calculer des angles et des longueurs. Mais n'interviennent dans ses définitions que des angles aigus. Or la physique et surtout la mécanique – rotations, mouvement de planètes... – ont à prendre en compte des «angles» au sens plus général, dont la mesure peut être supérieure à 1 tour, 2 tours..., avec, en plus, une orientation.

Le radian et sa mesure

C' est une mesure d'arcs ou d'angles qui présente bien des avantages. Sur un cercle de centre O , l'angle au centre AOB a pour mesure 1 radian si la longueur de l'arc AB est égale au rayon du cercle.

Et sur un autre cercle concentrique de rayon R , si l'angle $A'O'B'$ mesure 1 radian, alors l'arc $A'B'$ a pour longueur R .



Il y a évidemment proportionnalité entre les mesures en radians et les mesures en degrés. Pour un angle, dont les mesures sont d et α , res-

pectivement en degrés et en radians, on a donc : $\frac{d}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$

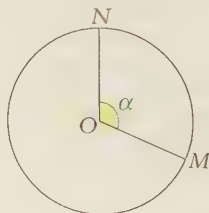
$$1 \text{ radian} \approx 57,3^\circ$$

$$1^\circ \approx 0,017 \text{ rad}$$

dégrés	360°	180°	90°	d
radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	α

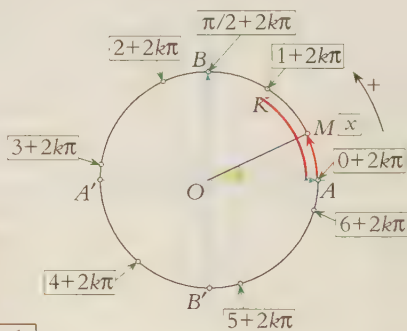
Si l'angle au centre MON a pour mesure α radians sur un cercle de rayon R , alors la longueur l de l'arc MN est $l = R\alpha$; l'aire du secteur (MON) est $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$;

(pensez que si $R = 2\pi$, la longueur est $2\pi R$ et l'aire du disque πR^2). ■

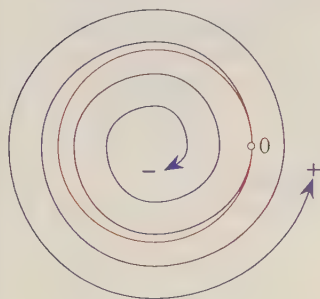


L'enroulement sur le cercle

Le repérage d'un point sur un axe (droite graduée) est bien connu : à tout point de la droite correspond un réel et à tout réel correspond un point.



« positif » de plus) ou $1 - 2\pi$ (un tour « négatif ») ou $1 + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On imagine tous ces nombres, qui diffèrent de $k2\pi$, en pensant à une corde s'« enroulant » autour du cercle trigonométrique.



À tout réel x est associé un seul point M sur le cercle trigonométrique. Ce réel est une mesure de l'angle orienté $(\vec{OA}, \vec{OM})$. À ce point sont aussi associés tous les réels qui s'écrivent $x + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Celle des mesures comprises entre $-\pi$ et $+\pi$ s'appelle « la mesure principale » de l'angle.

Par exemple,

si $x = \frac{17\pi}{2}$, on a :

$$\frac{17\pi}{2} = 8\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 4 \times 2\pi$$

(point B) ;

si $x = \frac{15\pi}{2}$, on a :

$$\frac{15\pi}{2} = 8\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 4 \times 2\pi$$

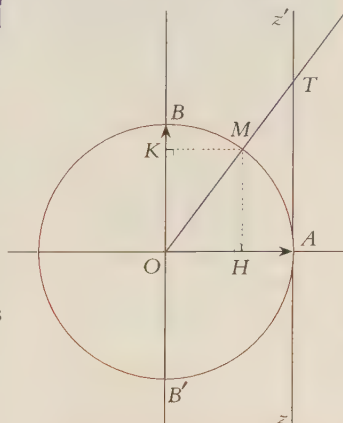
(point B'). ■

Les fonctions trigonométriques

Àu cercle trigonométrique est associé le repère orthonormal direct $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$. La tangente en A est zz' . L'axe $(A, \vec{OB})$ s'appelle axe de tangentes. x est un réel et M est le point associé sur le cercle.

$$\text{Si } x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi,$$

la demi-droite $[OM)$ coupe l'axe des tangentes en T .



- L'abscisse de M est le cosinus de x .
- L'ordonnée de M est le sinus de x .
- L'abscisse de T sur zz' est la tangente de x . On définit ainsi les trois fonctions cosinus, sinus et tangente.

$$\begin{aligned} x \rightarrow M \\ \begin{cases} \overline{OH} = \cos x \\ \overline{OK} = \sin x \\ \overline{AT} = \tan x \\ \text{si } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

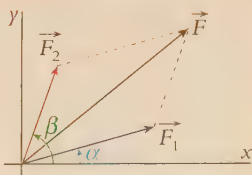
Il s'agit bien ici de fonctions, d'une variable réelle x et non plus de « lignes trigonométriques » définies en troisième pour des angles aigus d'un triangle rectangle.

- Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$.
- La fonction tangente n'est pas définie pour $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. ■

Les projections de forces

La force $\vec{F}$ est la résultante de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, d'où $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

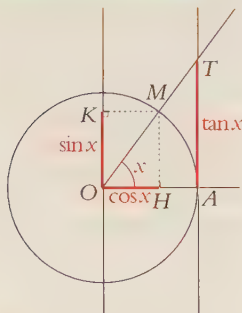
Si on connaît les angles α et β , on peut trouver les composantes de $\vec{F}$ sur un axe horizontal et un axe vertical.



$$\begin{aligned} X_F &= \|\vec{F}_1\| \cos \alpha + \|\vec{F}_2\| \cos \beta \\ Y_F &= \|\vec{F}_1\| \sin \alpha + \|\vec{F}_2\| \sin \beta \end{aligned}$$

Pour bien comprendre – ou retrouver – les nombreuses propriétés des fonctions trigonométriques, il est intéressant de garder en tête une «photographie» du cercle trigonométrique.

Quatre formules



Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

① $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OMH .
De plus, grâce au théorème de Thalès, on sait que :

$$\frac{AT}{HM} = \frac{OA}{OH}$$

d'où l'on déduit la formule

② $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ si

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

③ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Grâce aux formules ① et ②, on trouve aussi que :

④ $\frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

La périodicité des fonctions trigonométriques

C'est une propriété très particulière de ces fonctions. Elle est fondée sur le fait que les réels x et $x + 2\pi$ correspondent au même point sur le cercle.

• Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques, de période 2π :

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin x, \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x.\end{aligned}$$

• Par ailleurs, les réels x et $x + \pi$ sont associés à deux points diamétralement opposés sur le cercle, donc la fonction tangente est périodique de période π .

Si $x \neq \frac{\pi}{2}$, $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Cette propriété est intéressante car pour étudier les fonctions sinus et cosinus, il suffit que x décrive l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Pour la fonction tangente, il suffit que x décrive l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, ou encore $[0; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Valeurs

x étant un réel quelconque :

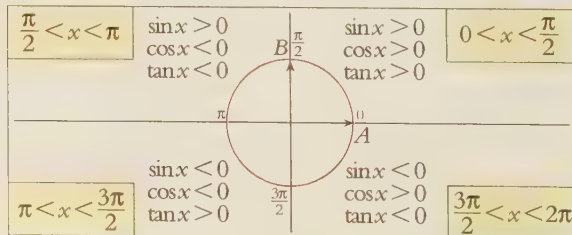
$$\begin{aligned}-1 &\leq \cos x \leq 1 & \text{ou } |\cos x| &\leq 1 \\ -1 &\leq \sin x \leq 1 & \text{ou } |\sin x| &\leq 1\end{aligned}$$

On a en effet $OH \leq 1$ et $OK \leq 1$.

Les points H et K sont à l'intérieur du cercle. On dit que les deux fonctions cosinus et sinus sont des fonctions bornées. Quant à la fonction tangente, elle peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}$.

Signes

Examinons les «photos», x décrivant $[0; 2\pi]$. ■



Parité

La fonction cosinus est une fonction **paire**.

La fonction sinus est une fonction **impaire**.

Autres formules

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

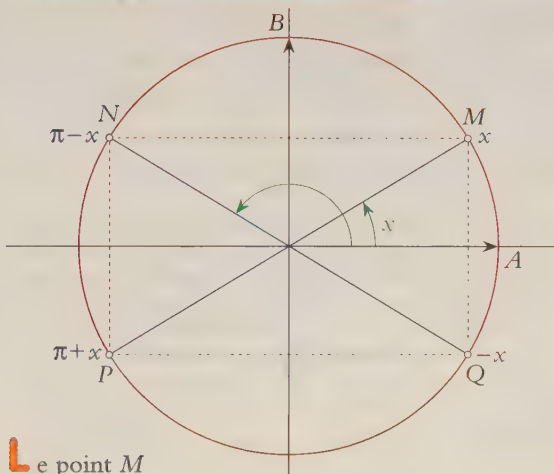
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

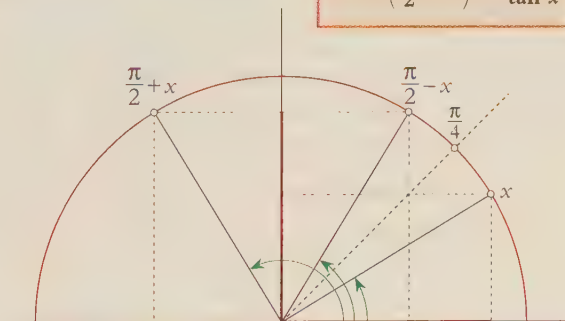
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$$



Le point M est associé au réel x . Par symétrie autour des axes, on a construit les trois autres sommets du rectangle $MNPQ$: N , P et Q correspondent respectivement aux réels $\pi - x$, $\pi + x$ et $-x$. L'observation des coordonnées de ces points conduit aux résultats présentés dans le tableau ci-dessous.



$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \tan(\pi - x) &= -\tan x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\pi + x) &= -\sin x \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \tan(\pi + x) &= \tan x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \\ \tan(-x) &= -\tan x\end{aligned}$$

Quelques valeurs particulières

Il est important, pour les applications, de connaître un certain nombre de résultats pour des valeurs

simples de x , sans recours à la calculatrice, qui ne donne d'ailleurs que des valeurs approchées.

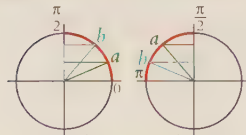
x_{rd}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Variations et représentations graphiques

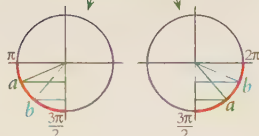
Compte tenu de la périodicité, il suffit d'examiner ce qui se passe sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ pour les fonctions sinus et cosinus.

La représentation graphique et les variations de $x \rightarrow \sin x$

$$\sin a < \sin b \quad \sin a > \sin b$$



$$a < b$$



$$\sin a > \sin b \quad \sin a < \sin b$$

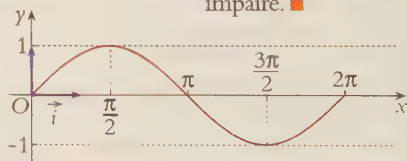
Lorsque x décrit $[0; 2\pi]$, l'observation des variations de l'ordonnée du point M conduit au tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

pas oublier que la courbe complète, une sinusoïde, s'obtient en faisant subir à cette courbe, une translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$.

L'origine du repère est centre de symétrie, puisque cette fonction est impaire. ■

On peut alors tracer la courbe représentative sur le même intervalle. Mais il ne faut

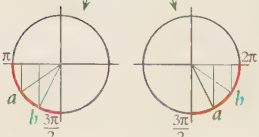


La représentation graphique et les variations de $x \rightarrow \cos x$

$$\cos a > \cos b \quad \cos a < \cos b$$



$$a < b$$



$$\cos a < \cos b \quad \cos a > \cos b$$

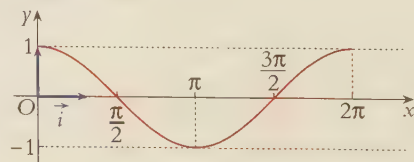
Pour étudier les variations de la fonction cosinus, il suffit d'observer les variations de l'abscisse du point M lorsqu'il décrit le cercle trigonométrique.

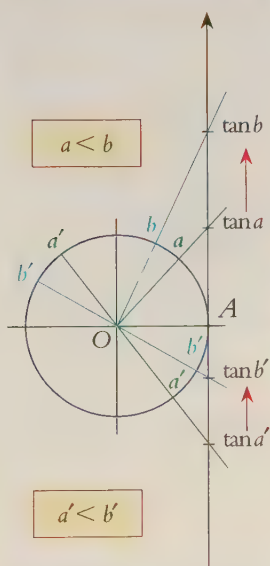
Cette courbe se déduit de celle de la fonction sinus par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$ car

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x. \quad \blacksquare$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

On obtient facilement la représentation graphique pour x décrivant $[0; 2\pi]$:



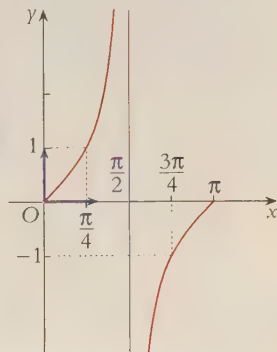


Compte tenu de la périodicité de cette fonction, il suffit d'examiner les variations sur l'intervalle $[0; \pi]$, en se souvenant que cette fonction n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\tan x$	0	$+\infty$	0

La fonction tangente est croissante sur chacun des intervalles $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

La représentation graphique comporte deux branches sans point commun, séparées par la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, asymptote à la courbe de la fonction tangente. ■

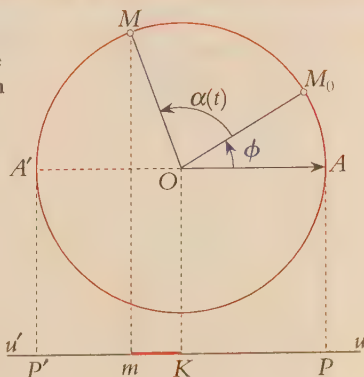


Une application en physique : mouvement circulaire et mouvement sinusoïdal

Un mouvement d'un point M est circulaire si la trajectoire est un cercle. Le point M est repéré sur le cercle par son abscisse curviligne AM notée $s(t)$, t étant la durée en seconde.

Ce mouvement est dit « uniforme » si la vitesse angulaire ν (en $\text{rad} \cdot \text{sec}^{-1}$) est constante. M_0

étant la position de M pour tout $t = 0$, on a alors : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_0}) = \phi + \omega t$.



En projection orthogonale sur un axe $u'u$ parallèle à (OA) , A , O et M se projetant respectivement en P , K et m , on a :

$$\overrightarrow{Km} = \overrightarrow{OM} \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \text{ d'où } x_m = R \cos(\omega t + \phi).$$

Le mouvement de M , projeté du point M , est un mouvement sinusoïdal : la fonction

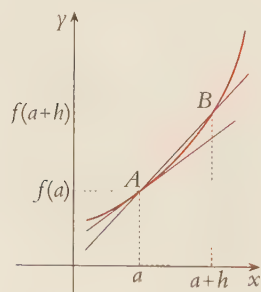
$$t \rightarrow R \cos(\omega t + \phi)$$

est une fonction trigonométrique.

Pour parler de la «dérivée» d'une fonction numérique en un point, il est nécessaire de parler de ce que l'on nomme la «limite en zéro» de certaines fonctions telles que : $h \rightarrow ah$; $h \rightarrow h^2$; $h \rightarrow h^3$; $h \rightarrow \sqrt{h}$. Lorsque la variable h prend des valeurs très proches de 0, intuitivement on sait que chacune de ces fonctions prend des valeurs proches de 0 : on dit qu'elles ont «pour limite 0 lorsque h tend vers 0». Quant à la fonction $h \rightarrow ah + b$, elle a pour limite b en 0.

La fonction dérivable en un point

Envisageons une fonction f définie sur un voisinage de a , c'est-à-dire sur un intervalle du type $]a-r, a+r[$ avec $r > 0$.



Sur la courbe, le point A a pour coordonnées $(a, f(a))$ et on choisit un point voisin $B(a+h, f(a+h))$. La droite (AB) , sécante à la courbe de f , a un coefficient directeur $p(h)$ qui dépend de h :

$$p(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si h tend vers zéro, la sécante varie et $p(h)$ varie.

Si la fonction $h \rightarrow p(h)$ admet une limite finie D lorsque h tend vers zéro, alors on dit que f est dérivable au point a : le nombre D est le nombre dérivé de f en ce point.

Si f est dérivable en $x=a$, le nombre dérivé D est le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe de f .

On peut dire aussi que si l'on a : $f(a+h) = f(a) + hD + h\varepsilon(h)$, la limite de la fonction ε étant 0 lorsque h tend vers 0, alors la fonction f est dérivable en a et D est le nombre dérivé en ce point. Pour démontrer la dérivabilité, on peut utiliser l'une ou l'autre de ces définitions.

Exemple

Soit $f : x \rightarrow x^2 - 4$.

Examinons la dérivabilité en $x=3$:

$$f(3) = 5; f(3+h) = (3+h)^2 - 4,$$

on a donc :

$$p(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{h^2 + 6h}{h}$$

$$p(h) = h + 6.$$

Or, $p(h)$ tend vers $+6$ si h tend vers zéro : on dira donc que la fonction f est dérivable en $x=3$ et que le nombre dérivé est 6.

On a aussi :

$$f(3+h) = f(3) + 6h + h \times h \text{ avec } \varepsilon(h) = h.$$

Si h est «petit», alors h^2 est négligeable et on a :

$$f(3+h) \approx f(3) + 6h. \blacksquare$$

La fonction dérivée sur un intervalle

Si la fonction f est dérivable en tout point a d'un intervalle I , on dit qu'elle est dérivable sur I .

À tout x de I on peut associer le nombre dérivé en ce point : on définit ainsi une nouvelle fonction qui s'appelle la fonction dérivée de f sur l'intervalle.

On la note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Ainsi pour notre exemple, on a $f'(3)=6$.

Plus généralement, on trouve pour tout x : $f'(x)=2x$. ■

D'autres théorèmes sur les dérivées

Considérons deux fonctions : $u : x \rightarrow u(x)$ et $v : x \rightarrow v(x)$ admettant des dérivées sur un intervalle I .

La somme de ces fonctions est dérivable et sa dérivée est la somme des dérivées de u et de v .

Ce que l'on écrit

$$(u+v)' = u' + v'$$

De même, k étant une constante, la fonction ku est dérivable et sa dérivée est ku' . Ce que l'on écrit :

$$(ku)' = ku'$$

C'est ce que l'on appelle la propriété de linéarité de la dérivation.

On a aussi les résultats suivants :

Dérivée du produit $u \cdot v$
 $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

Dérivée du carré de u
 $(u^2)' = 2uu'$

Dérivée du cube de u
 $(u^3)' = 3u^2u'$

Dérivée de l'inverse de v
 $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ avec $v \neq 0$

Dérivée d'un quotient
 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $v \neq 0$

Si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ alors

$$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \text{ avec } x \neq -\frac{d}{c}$$

Calculs de dérivées

Voici des formules à connaître :

Fonction	Dérivable sur	Dérivée
$f(x) = b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^p$ (p naturel non nul)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = px^{p-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a \cos(ax+b)$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -a \sin(ax+b)$
$f(x) = \sqrt{ax+b}$	si $ax+b > 0$	$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

Les dérivées successives

Si la dérivée de f est elle-même dérivable, sa dérivée est la dérivée seconde de f , notée f'' . De proche en proche, on définit la dérivée d'ordre $(n+1)$ comme la dérivée de la dérivée d'ordre n de f , si elle existe. La dérivée $n^{\text{ième}}$ se note $f^{(n)}$. ■

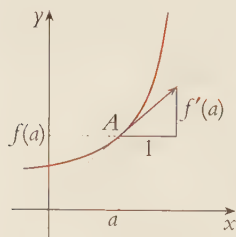
Dans l'histoire, le concept de dérivée est inventé à peu près à la même époque par deux mathématiciens à partir de considérations très éloignées. Newton (en 1686) s'intéresse aux notions de mécanique, vitesse et accélération, tandis que Leibniz (en 1700) étudie les problèmes de tangentes à une courbe plane. C'est ce dernier qui fait du calcul des dérivées un véritable outil mathématique dont on ne saurait plus se passer aujourd'hui.



Isaac Newton (1642-1727).

La tangente à une courbe

Si la fonction f est dérivable en $x=a$, le nombre dérivé de f en ce point est la limite du coefficient directeur d'une sécante : ce nombre dérivé est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f au point $A(a, f(a))$.



On sait alors écrire une équation de cette tangente, par exemple sous la forme :

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=f'(a) \text{ ou encore}$$

$$y=f(a)+(x-a)f'(a).$$

Si $f'(a)=0$, alors la tangente est parallèle à l'axe xx' .

Reprenons la fonction f telle que $f(x)=x^2-4$.

La vitesse d'un mouvement

En cinématique, on s'intéresse au mouvement d'un point sans se préoccuper de la cause de ce mouvement. Soit M un point « mobile » sur sa trajectoire C . Après que l'on a fait choix d'une

On a $f(3)=5$ et $f'(3)=6$. Au point $A(3; 5)$, la courbe admet une tangente d'équation $\frac{y-5}{x-3}=6$ soit $y=6x-13$. ■

origine et d'unités, l'abscisse curviligne de M est une fonction du temps t : $f : t \rightarrow f(t)$

Le quotient : $\frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du parcours}}$ est la



vitesse moyenne du mouvement de M entre deux instants.

Entre les instants t et $t+h$, on a l'expression de la vitesse moyenne :

$$V_m = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Si ce quotient a une limite lorsque h tend vers 0, cette limite est le nombre dérivé de la fonction f et c'est la vitesse instantanée à la date t : $v(t) = f'(t)$.



La dérivée seconde est l'accélération à l'instant t : $\gamma(t) = v'(t) = f''(t)$.

Newton a d'ailleurs proposé une notation particulière de la dérivée utilisée en mécanique : la dérivée de f est notée f' , la dérivée

seconde est notée f'' .

Ces notations sont encore utilisées par les physiciens pour noter une vitesse ou une accélération.

Si $f(t) = at + b$ (a et b sont des constantes), alors $a = f'(t) = v$ et $f''(t) = 0$.

La vitesse du mouvement est constante.

On dit alors que ce mouvement est un mouvement uniforme et on a : $f(t) = vt + f(0)$. ■

L'approximation de la valeur d'une fonction

Pour une fonction dérivable en a , $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$. On a donc : $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ en considérant que $h\varepsilon(h)$ est négligeable.

Ainsi, $f(a) + hf'(a)$ est une bonne approximation de $f(a+h)$ et $hf'(a)$ est une

bonne approximation de l'accroissement de f pour un accroissement de x égal à h , le mot accroissement étant pris bien sûr dans son sens algébrique.

Exemple

Soit $f(x) = x^2 - 4$.
 $f(2,999) \approx 5 + (-0,001 \times 6)$

soit $f(2,999) \approx 4,994$.

Applications

Pour $f(x) = x^n$, on a $f'(x) = nx^{n-1}$.
 $f(1) = 1$, $f'(1) = n$,
d'où $(1+h)^n \approx 1 + nh$.
On a ainsi $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$;
 $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$,
 $\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$. ■

Les variations d'une fonction

Lorsqu'une fonction est dérivable, le signe de la fonction dérivée indique le sens de variation de la fonction f . On dispose des théorèmes ci-contre. Grâce à ces derniers, étudier les variations d'une fonction revient à étudier le signe de sa dérivée si ce ne sont pas des valeurs de référence. ■

Si f est dérivable sur un intervalle I et si la dérivée $f'(x)$ est strictement positive sur I , alors la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

Si f est dérivable sur un intervalle J et si la dérivée $f'(x)$ est strictement négative sur J , alors la fonction

f est strictement décroissante sur cet intervalle. Enfin, si la dérivée est nulle en tout point d'un intervalle, alors la fonction f est constante sur cet intervalle. Sa représentation est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

L'étude d'une fonction doit conduire à une bonne représentation graphique pour permettre la résolution de quelques questions importantes comme la résolution d'équation, l'étude d'un signe, la comparaison, etc.

Un plan d'étude d'une fonction

L'étude complète d'une fonction obéit à la procédure suivante :

- préciser d'abord l'ensemble de définition ;
- examiner si la fonction est paire ou impaire et en

tirer les conséquences graphiques ;

- déterminer les limites nécessaires ;
- calculer la dérivée, étudier son signe, en déduire les variations de la fonction, dresser un tableau qui

résume tous ces résultats ;

- dessiner une représentation graphique aussi précise que possible, tenant compte de toutes les informations précédentes. ■

Les problèmes de limites

La recherche d'une limite se présente dans les deux cas suivants :

① La limite « à l'infini ».
C'est la limite quand x tend vers $(-\infty)$ ou $(+\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$$

Si n est **pair** :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n) = +\infty$$

Si n est **impair** :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n) = -\infty$$

Lorsque f est définie sur un intervalle du type $] -\infty, b[$ ou $[b, +\infty[$:

on étudie la limite de f
« lorsque x tend vers $(-\infty)$ ou vers $(+\infty)$ ».

② La limite lorsque « x tend vers 0 ».

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty \quad (x > 0)$$

Si n est **pair** :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty \quad (x < 0)$$

Si n est **impair** :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^n}\right) = -\infty \quad (x < 0)$$

Lorsque f est définie sur un intervalle ouvert, du type $]a, b[$ par exemple, on étudie la limite de f si « x tend vers a à gauche » et si « x tend vers b à droite ». ■

Les théorèmes sur les limites

Pour les théorèmes qui suivent, dans $\lim_{x \rightarrow a} u$, on peut remplacer le symbole « $\star$ » par « x tend vers a » ou « x tend vers $(+\infty)$ » ou « x tend vers $(-\infty)$ », à condition de le faire de la même manière dans les trois colonnes.

Le signe « $?$ » signifie que l'on ne peut pas conclure grâce au théorème. Il faudra faire autre chose. Ces formes sont parfois qualifiées de « formes indéterminées ».

Limite d'une somme de deux fonctions u et v

Si $\lim_{x \rightarrow a} u$	et si $\lim_{x \rightarrow a} v$	alors $\lim_{x \rightarrow a} (u+v)$
A	B	A+B
A	$+\infty$	$+\infty$
A	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un produit de deux fonctions

Si $\lim_{x \rightarrow a} u$	et si $\lim_{x \rightarrow a} v$	alors $\lim_{x \rightarrow a} (u \cdot v)$
A	B	AB
$A(A > 0)$	$+\infty$	$+\infty$
$A(A < 0)$	$+\infty$	$-\infty$
$A(A > 0)$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	0	?

● La limite d'un polynôme

La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite, dans les mêmes conditions, de sa fonction monôme de plus haut degré.

Exemple

Soit $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$.

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^4 = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^4 = +\infty.$$

$$\text{Si } g(x) = -3x^5 + 8,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

● La limite à l'infini d'un **quotient de deux polynômes** (fraction rationnelle) est égale à la limite, dans les mêmes conditions, du quotient des monômes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Exemples Si

La limite d'un quotient

Si $\lim_{x \rightarrow a} u$	et si $\lim_{x \rightarrow a} v$	alors $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{u}{v}\right)$
A	$B \neq 0$	$\frac{A}{B}$
A	$\pm\infty$	0
$A \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$B \neq 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	?
0	0	?

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x-4} :$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Si } g(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} :$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0.$$

$$\text{Si } h(x) = \frac{3x^3+4}{x^2+6} :$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty.$$

Comparaisons

● S'il existe un réel A

tel que pour tout x

de $[A, +\infty[$,

on a $g(x) \leq f(x)$

et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$,

alors on a aussi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

● Si au voisinage de a ,

on a $g(x) \leq f(x)$ et si

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty,$$

on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

La limite pour un radical

Si $\lim_{x \rightarrow a} u = A$ ($A > 0$)

alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{A}$

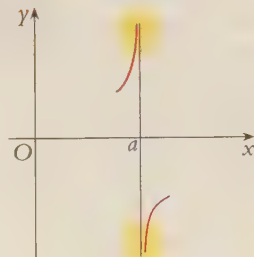
Si $\lim_{x \rightarrow a} u = +\infty$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{u} = +\infty$$

Asymptotes à une courbe

● Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$,

alors la droite d'équation $x=a$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f .



● Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, alors la

droite d'équation $y=b$ est une asymptote à la courbe de f . ■



Les problèmes qui conduisent à des fonctions du second degré se présentent dans de nombreuses situations.

Deux exemples de telles fonctions

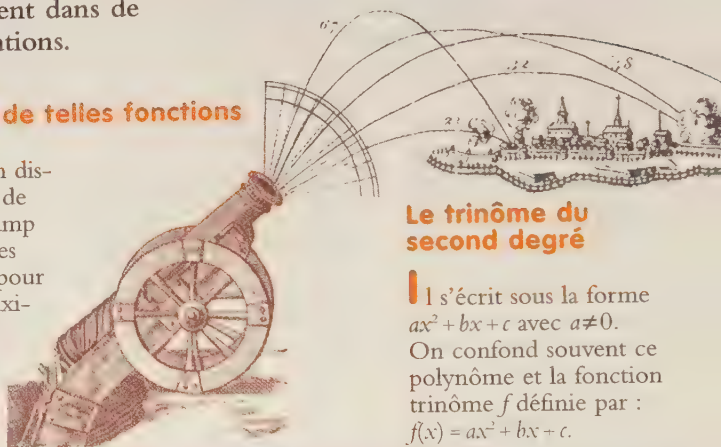
Imaginons que l'on dispose de 100 mètres de clôture pour un champ rectangulaire : quelles dimensions choisir pour obtenir une aire maximale ?

Si l'on désigne par x la mesure d'un côté en mètres, l'autre a pour mesure $50-x$: l'aire s'exprime par $x(50-x)$. Rechercher l'aire maximale revient à étudier les variations de la fonction $f : x \rightarrow 50x - x^2$ avec $x > 0$ et $x < 50$.

Un autre exemple

Un projectile est lancé vers le haut, depuis une fenêtre située à 4 mètres du sol. Sa hauteur au-dessus du sol, en mètres, est une fonction h du temps t en secondes donnée par la formule : $h(t) = -5t^2 + 20t + 4$.

Tous les problèmes de projectiles ou de mouvements des planètes aboutissent à des fonctions du second degré que nous allons étudier. ■



Le trinôme du second degré

Il s'écrit sous la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On confond souvent ce polynôme et la fonction trinôme f définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.
- Les limites à l'infini sont celles de $x \rightarrow ax^2$: on obtient $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ comme limite selon que le coefficient a est positif ou négatif.
- La forme canonique de la fonction f s'écrit :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$\text{avec } \Delta = b^2 - 4ac.$$

- Le changement de variables, associé à un changement d'origine du repère, défini par :

$$X = x + \frac{b}{2a} \text{ et } Y = y + \frac{\Delta}{4a},$$

conduit à l'équation très simple : $Y = aX^2$.

- La représentation graphique de cette fonction est une parabole de sommet

$$S \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

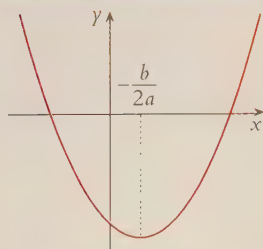
dans le repère initial.

- La dérivée de f est donnée par $f'(x) = 2ax + b$.

Elle s'annule en $x = -\frac{b}{2a}$.

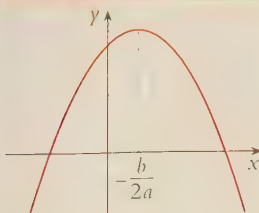
Les variations de cette fonction dépendent du signe du coefficient a . Si a est **positif**, on a :

x	$-\infty$	$\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$



Si a est **négatif**, on a :

x	$-\infty$	$\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

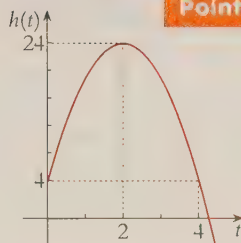


Ainsi, pour notre **premier exemple**, la fonction f telle que : $f(x) = 50x - x^2$ a pour dérivée $f'(x) = 50 - 2x$: elle s'annule en $x = 25$. Elle est croissante sur $[0; 25]$ et décroissante sur $[25; 50]$.

L'aire du champ rectangulaire est donc maximale si $x = 25$, ce qui signifie que le champ est un carré.

Pour notre **second exemple**, la fonction $h(t) = -5t^2 + 20t + 4$ a pour fonction dérivée $h'(t) = -10t + 20$ qui s'annule en $t = 2$.

t	0	2	4
$h'(t)$	$+$	0	$-$
$h(t)$	4	24	4

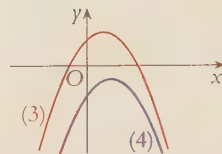
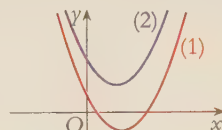


La fonction est croissante sur $[0; 2]$ puis décroissante sur $[2; 4]$, ce qui veut dire que le projectile monte durant les deux premières secondes, puis redescend et repasse devant la fenêtre à $t = 4$. ■

Les positions des paraboles représentatives

Il est intéressant de bien situer la représentation graphique de ces fonctions par rapport à l'axe xx' . Cette situation dépend de la position du sommet $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, surtout de son ordonnée. Elle nous donne facilement des informations sur l'intersection de la parabole avec l'axe xx' , donc sur les racines de l'équation $f(x) = 0$, et sur le signe de la fonction f .

Si $\Delta = 0$, le sommet est sur xx' : la parabole est tangente à cet axe. ■

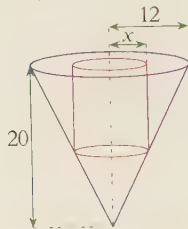


$a > 0$	$\Delta > 0 - \frac{\Delta}{4a} < 0$	S est au-dessous de xx' (fig. 1)
	$\Delta < 0, -\frac{\Delta}{4a} > 0$	S est au-dessus de xx' (fig. 2)
$a < 0$	$\Delta > 0, \frac{\Delta}{4a} > 0$	S est au-dessus de xx' (fig. 3)
	$\Delta < 0, \frac{\Delta}{4a} < 0$	S est au-dessous de xx' (fig. 4)

Une étude de variation d'aire conduit souvent à l'étude d'une fonction du second degré. L'étude de variation de volume peut conduire à l'étude d'un polynôme du troisième degré. D'autres problèmes plus complexes conduisent à l'étude de polynômes de degré supérieur.

Exemple 1

On dispose d'un cône de révolution en bois de 20 cm de haut et de 12 cm de rayon pour la base circulaire. On découpe un cylindre de révolution de même axe, de rayon x . Comment choisir x pour que le volume de ce cylindre soit le plus grand possible ?



Pour la traduction algébrique de ce problème, on montre facilement que la hauteur du

cylindre est $\frac{5}{3}(12-x)$ et que son volume est $V(x) = \frac{5\pi}{3}x^2(12-x)$.

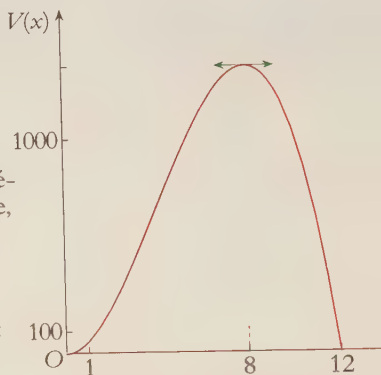
L'étude du volume revient donc à l'étude de la fonction $f: x \rightarrow 12x^2 - x^3$ pour $0 \leq x \leq 12$.

Il s'agit ici de l'étude d'une fonction polynôme du troisième degré.

Étude de la fonction

$f: x \rightarrow 12x^2 - x^3$ sur $[0; 12]$.

Sa fonction dérivée est $f'(x) = 24x - 3x^2 = 3x(8-x)$.



Elle est nulle pour $x=0$ et $x=8$.

Le signe de cette dérivée conduit aux variations suivantes :

x	0	8	12
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	0	↗ 256 ↘	0
$V(x)$	0	↗ $V(8)$ ↘	0

Et on a $V(8) = 1280 \frac{\pi}{3}$, soit environ 1340 cm^3 .

La représentation graphique de cette fonction est la courbe ci-dessus. C'est le volume du cylindre maximum que l'on peut obtenir par le découpage considéré. ■

Quelques idées générales à propos des polynômes

- Une fonction polynôme est définie pour tout x .
- L'étude de la dérivée est une étude de signe de polynôme.
- Les limites à l'infini s'obtiennent en exami-

nant les limites des termes de plus haut degré kx^n : on obtient $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ selon la parité de n et le signe du coefficient k .

- Penser à la parité.

Exemple 2

Étude de
 $g : x \rightarrow x^3 - 3x + 2$.

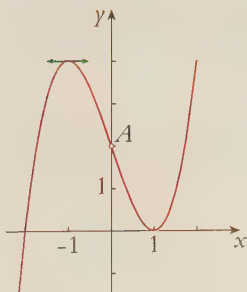
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Elle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$.

Sa dérivée est

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

On obtient le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

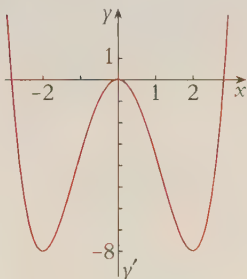


La représentation graphique est donnée ci-dessus. Si l'on choisit le point $A(0; 2)$ comme nouvelle origine, on effectue les changements de variables : $X = x$ et $Y = y + 2$ et l'on obtient la nouvelle équation $Y = X^3 + X$.

La courbe tracée est, dans le repère d'origine A , la représentation graphique de la fonction : $G : X \rightarrow X^3 + X$ est une fonction impaire, donc le point A est centre de symétrie de la courbe. ■

Exemple 3

Étude de $h : x \rightarrow \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$.



Cette fonction, définie sur $\mathbb{R}$, est une fonction paire. Elle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Sa dérivée est

$$h'(x) = 2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4) = 2x(x-2)(x+2).$$

On a le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$	-8	-8	-8	$+\infty$

Compte tenu de la parité, l'axe yy' est axe de symétrie de la courbe dessinée ci-contre. ■

Exemple 4, avec une valeur absolue

Étude de la fonction

$$k : x \rightarrow |h(x)|.$$

On sait que :

si $h(x) \geq 0$, alors

$$k(x) = h(x) \quad \text{et si } h(x) \leq 0, \text{ alors } k(x) = -h(x).$$

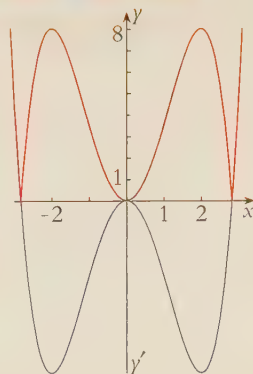
$$\text{On a } h(x) = \frac{1}{2}x^2(x^2 - 8).$$

Les racines de $h(x) = 0$ sont $0; -2\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ avec les signes suivants :

Sur les intervalles

$$]-\infty; -2\sqrt{2}] \text{ et } [2\sqrt{2}; +\infty[,$$

la courbe de k coïncide avec la courbe de h , et sur l'intervalle $[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$,



on obtient la courbe de k en dessinant la courbe symétrique de celle de h par rapport à l'axe xx' . ■

x	$-\infty$	$2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	0	$-$	$+$
$k(x)$	$h(x)$	0	$-h(x)$	0	$h(x)$

Les fonctions quotients de polynômes

Dans de nombreuses situations, on est conduit à l'étude de fonctions qui sont des quotients de polynômes ou des fonctions comportant des radicaux.

Le quotient de polynômes

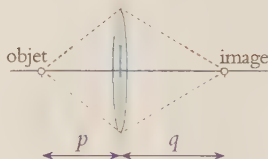
C' est une fonction f qui se présente sous la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

- Cette fonction n'est pas définie si $Q(x)=0$.
- Dans l'écriture de la dérivée, le dénominateur est Q^2 qui est positif, donc le signe de la dérivée est celui du numérateur.
- Les limites à l'infini s'obtiennent en examinant les limites du quotient des

termes de plus haut degré dans $P(x)$ et $Q(x)$.

Le résultat de cette étude peut suggérer l'existence d'une asymptote à la courbe.

- Examiner la limite lorsque x tend vers une racine de Q : en général, cette limite est infinie. En déduire l'existence d'une asymptote.
- Si l'on connaît la distance focale d'une lentille



convexe et si un objet est à la distance p du centre, alors l'image est à une distance $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$, soit $q = \frac{fp}{p-f}$.

Si p varie, q est une fonction de p . ■

La fonction homographique

C' est une fonction de la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Ce quotient peut aussi écrire sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{k}{cx+d}$$

Exemple

Étude de $f: x \rightarrow \frac{2x-1}{x+2}$.

Son ensemble de définition est $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$.

La limite à l'infini de f est celle du quotient $\frac{2x}{x}$, c'est-

à-dire 2 : donc la droite d'équation $y=2$ est une asymptote à la courbe de f .

Lorsque x tend vers -2 , le numérateur a pour limite -5 et le dénominateur a pour limite 0 : donc le quotient a une limite infinie.

Il convient de préciser le signe. Pour la limite « à droite de -2 », $x+2$ est positif, le quotient est donc négatif et la limite de f est $-\infty$.

Pour la limite à « gauche de -2 », $x+2$ est négatif et le quotient positif : la limite de f est $+\infty$. La droite d'équation $x=-2$ est une asymptote

à la courbe de f . La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$$

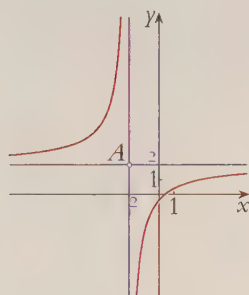
Elle est positive sur l'ensemble de définition. D'où le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \searrow 2$

En choisissant le point $A(-2; 2)$ comme nouvelle origine, on obtient la nouvelle équation de

cette même courbe :

$$Y = -\frac{5}{X}$$



La courbe représentative est une hyperbole d'asymptotes les droites d'équations $x = -2$ et $y = 2$. Le point A est centre de symétrie.

Autre exemple de quotient

Étude de la fonction :

$$g : x \rightarrow \frac{2x^2 + x}{x}$$

Elle est définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$.

$g(x)$ peut aussi s'écrire $2x + 1 - \frac{1}{x}$: cette forme d'écriture est particulièrement simple pour déterminer les limites, calculer la dérivée.

À l'infini, g a même limite que $2x$: g a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$. Remarquons que

$g(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x}$: la différence $g(x) - (2x + 1)$ est la fonction $\frac{1}{x}$ qui tend

vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

On dit que la droite D d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à la courbe de g . Pour $x > 0$, la courbe est en dessous de l'asymptote et pour $x < 0$ elle est au-dessus.

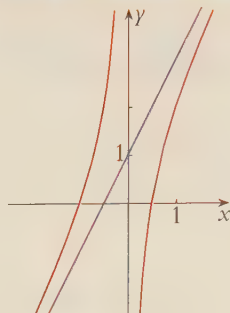
Lorsque x tend vers 0 à droite, $g(x)$ tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers 0 à gauche, $g(x)$ tend vers $+\infty$: la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe de g .

La dérivée s'écrit :

$$g'(x) = 2 + \frac{1}{x^2} ; \text{ elle est}$$

positive, d'où le tableau des variations de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$



La courbe présente deux asymptotes : les droites d'équations respectives $x = 0$ (c'est l'axe yy') et la droite D d'équation $y = 2x + 1$.

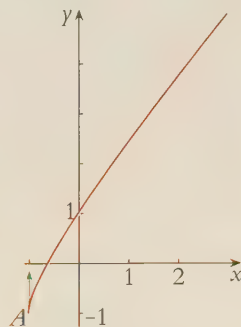
Une fonction avec un radical

Étudions par exemple la fonction $h : x \rightarrow x + \sqrt{x+1}$. Cette fonction est définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$. Elle a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Sa dérivée s'écrit :

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

avec $x > -1$.



Cette dérivée est strictement positive sur l'ensemble $] -1 ; +\infty [$. Remarquons que cette fonction n'est pas dérivable en $x = -1$.

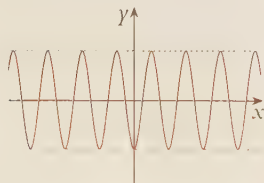
Au point A d'abscisse -1 , la tangente à la courbe est parallèle à l'axe yy' .

Cette courbe est en fait un axe de la courbe d'équation $(y - 2)^2 = x + 1$, qui est une hyperbole d'asymptotes parallèles aux bissectrices des axes.

Après les limites des fonctions polynômes et des quotients, voyons les problèmes de limites en trigonométrie, indispensables en physique.

Les limites à l'infini en trigonométrie

Les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions périodiques : les valeurs oscillent entre -1 et $+1$, pour tout x aussi « grand » soit-il...



Ces fonctions n'admettent pas de limite en $(+\infty)$ ou $(-\infty)$, et il en est de même pour la fonction tangente. Voyons quelques autres exemples simples.

Exemple 1

Soit $f(x) = x + \sin x$.

On a, pour tout x ,

$$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$$

et $x - 1 \leq f(x)$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De même $f(x) \leq x + 1$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemple 2

$$\text{Soit } g(x) = \frac{\cos x}{x}.$$

On a pour $x > 0$:

$$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0. \quad \blacksquare$$

Notons que pour déterminer une limite à l'infini d'une fonction comportant $\sin x$ ou $\cos x$, on peut utiliser le fait que ce sont des fonctions bornées.

Les limites en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0.$$

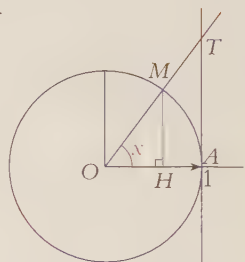
$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0.$$

Étude de la limite

en 0 de $\frac{\sin x}{x}$

Prenons $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

L'aire du secteur (OMA) est comprise entre l'aire du triangle OMA et celle du triangle OTA .



$$\frac{1}{2} OA \times HM \leq \frac{1}{2} R^2 x$$

$$\frac{1}{2} R^2 x \leq \frac{1}{2} OA \times AT$$

Sur le cercle trigonométrique $OA = R = 1$, d'où

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x,$$

$$\text{d'où } 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

ou encore

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Lorsque x tend vers 0, $\cos x$ tend vers 1. D'après les théorèmes sur les limites, on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

On a aussi :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Limite de $\tan x$ en $\frac{\pi}{2}$

Des applications

Pour x assez petit
(exprimé en radians):

$$\begin{aligned}\sin x &\approx x \\ \tan x &\approx x \\ 1 - \cos x &\approx \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \times \frac{3x}{3x} \right) = 3$$

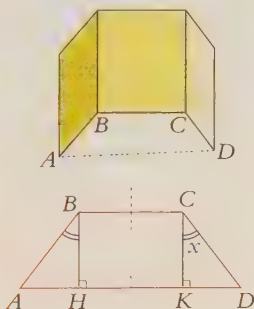
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{\tan 5x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{5x}{\tan 5x} \times \frac{3x}{5x} \right) = \frac{3}{5}$$

si $x < \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = +\infty$

si $x > \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = -\infty$ ■

Un exemple d'étude de fonction

Un paravent articulé est formé de trois panneaux rectangulaires de 1 m de large, articulés en B et C. La stabilité dépend de l'aire du trapèze isocèle ABCD (polygone de sustentation).



Cette stabilité est d'autant meilleure que cette aire est grande.

On pose $KCD = HBA = x$
avec $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

$$AH = DK = \sin x$$

$$BH = CK = \cos x$$

L'aire du trapèze est :

$$S(x) = (1 + \sin x) \cos x.$$

La dérivée est :

$$S'(x) = -2 \sin^2 x - \sin x + 1.$$

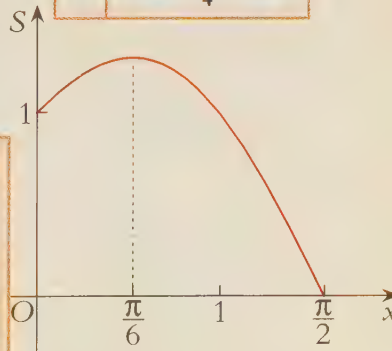
Elle s'annule pour

$$\sin x = -1 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$C'est\text{-à-dire } x = \frac{3\pi}{2}$$

(qui est exclu), ou $x = \frac{\pi}{6}$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
S'	1	0	-2
S	1	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0



L'étude des variations

de S sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ permet

de conclure que la stabilité du paravent est maximale

pour un angle x de $\frac{\pi}{6}$

radians, c'est-à-dire de 30° . ■

Les dérivées des fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

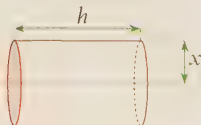
La fonction tangente est dérivable pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

FONCTION	DÉRIVÉE	CONDITION
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$\begin{cases} f'(x) = 1 + \tan^2 x \\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$f'(x) = a \cos(ax+b)$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a \sin(ax+b)$	$x \in \mathbb{R}$

Après avoir étudié les variations d'une fonction, on peut tracer une représentation graphique de manière précise et répondre à certaines questions.

L'usinage d'une pièce mécanique

Supposons qu'il soit question de fabriquer une cuve cylindrique en tôle. Sa hauteur est h , le rayon du disque de base est noté x et son volume en litres est V : x et h sont exprimés en décimètres.



On sait que $V = \pi x^2 h$
donc $h = \frac{V}{\pi x^2}$.

Quant à la surface de tôle, elle s'exprime par $S = 2\pi x^2 + 2\pi x h =$

$$2\pi x^2 + \frac{2V}{x}.$$

Ainsi, pour un volume donné V , la surface de tôle à utiliser est la fonction S .

$$S : x \rightarrow 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}.$$

On veut par exemple un volume V de 2000 litres. L'étude de la fonction S va nous permettre de répondre à un certain nombre de questions.

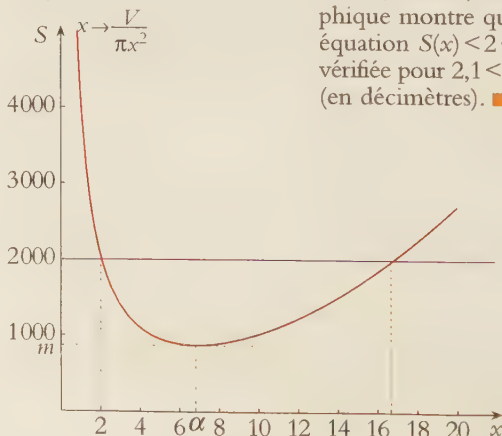
S devient $x \rightarrow 2\pi x^2 + \frac{4000}{x}$.
La dérivée de S est $S'(x) = 4\pi x - \frac{4000}{x^2}$.

Cette dérivée s'annule en α tel que $\alpha^3 = \frac{1000}{\pi}$.

On trouve environ 6,8 pour α (soit 68 cm). L'étude du signe de S' conduit aux variations suivantes :

x	0	α	$+\infty$
$S'(x)$		- 0 +	
$S(x)$	$+\infty$	m	$+\infty$

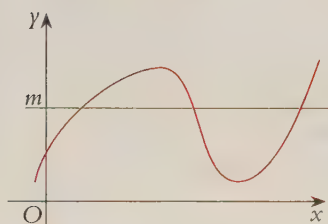
Il est intéressant de dessiner une bonne représentation graphique, après avoir calculé des valeurs de $S(x)$ (calculatrice). Quant à la hauteur, elle s'obtient au moyen de la fonction :



- Pour $V = 2000$, quelle valeur de x choisir pour une surface minimale, c'est-à-dire un poids minimal ?

Le minimum de S est obtenu avec un rayon de 68 cm environ. La hauteur vaut alors 1,30 m.

- On souhaite que le poids de la cuve ne dépasse pas une certaine valeur, c'est-à-dire par exemple que la surface de tôle n'excède pas 2000 dm^2 . On trace la droite $y = 2000$. Elle coupe la courbe en deux points pour $x \approx 2,1$ et $x \approx 16,7$. Ainsi, le graphique montre que l'inéquation $S(x) < 2000$ est vérifiée pour $2,1 < x < 16,7$ (en décimètres). ■



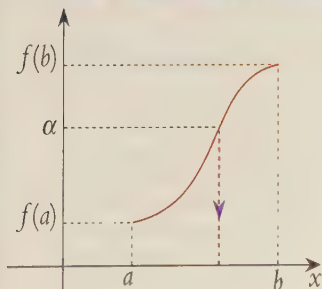
Si l'on a tracé la courbe C , représentation de la fonction f , en examinant l'intersection de C avec la droite d'équation $y=m$, on obtient graphique-

ment des indications sur les solutions de l'équation $f(x)=m$ ou de l'équation $f(x)-m=0$.

Pour résoudre certaines équations, on dispose dans certains cas de techniques algébriques pour calculer effectivement les racines.

Mais ce n'est pas le cas pour toutes les équations ! On utilise alors certaines propriétés des fonctions. ■

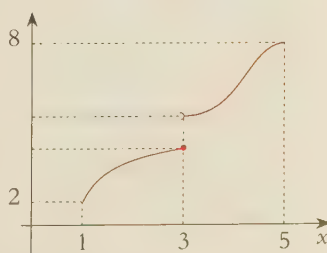
Une propriété fondamentale



• Si la fonction f est dérivable sur $[a, b]$ et strictement croissante sur cet intervalle, alors f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ une fois et une fois seulement. Autrement dit : pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=\alpha$ a exactement une solution comprise entre a et b .

• On a évidemment une propriété identique pour une fonction strictement décroissante sur l'intervalle, avec cette différence que l'intervalle d'arrivée devient $[f(b), f(a)]$.

• En particulier, dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x)=0$ a exactement une solution entre a et b . ■



Plus généralement, si f est dérivable et strictement monotone sur l'intervalle I , alors l'image de I par f est un intervalle J : f est une bijection de I sur J . Ce qui veut dire que tout réel de I a une image dans J et que, réciproquement, tout réel de J a exactement un antécédent dans I .

Ce théorème permet de définir la bijection réciproque de f , notée f^{-1} .

La détermination de J , intervalle image de I par f , nécessitera la recherche des limites de f aux bornes de I si I n'est pas fermé.

Exemple

Soit $f : x \rightarrow -x^2$ sur $[0; +\infty[$. f est une bijection de I sur $f(I)$. Or f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc $f(J) =]-\infty; 0]$. ■

La discontinuité

La fonction représentée ci-contre est strictement croissante sur $[1; 5]$. Pourtant, ce n'est pas une bijection car elle n'est pas dérivable en $x=3$: il y a un « saut » pour cette valeur. Toutes les valeurs de $[2; 8]$ ne sont pas atteintes. Il y a une « discontinuité » de f au point $x=3$. ■

Voici une équation : $x^3 - 3x^2 + 14 = 11$.

Cette équation équivaut à $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$.

Nous ne savons pas résoudre algébriquement cette équation, mais des considérations fonctionnelles vont permettre de savoir si elle a des racines et de les « situer », par exemple, entre deux entiers.

L'existence de racines

Gâce au théorème des « valeurs intermédiaires », l'étude de la fonction $f : x \rightarrow x^3 - 3x^2 + 3$ va nous permettre de répondre à cette première question.

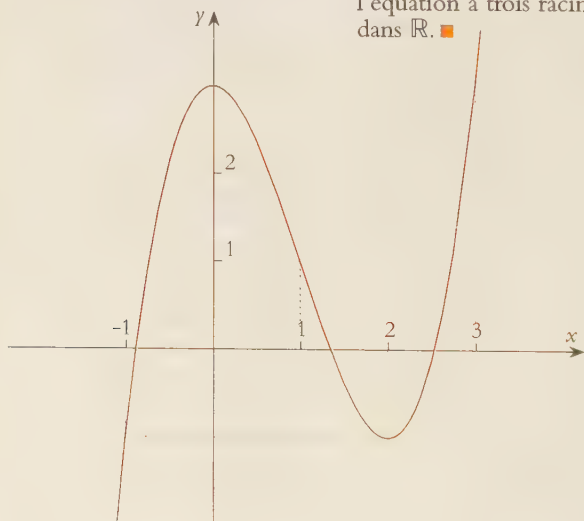
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

L'étude du signe de la dérivée conduit aux variations suivantes :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 3	↘ -1	↗ $+\infty$	

Le tracé de la courbe a l'allure ci-dessous. On constate qu'elle coupe l'axe xx' en trois points. On peut raisonnablement faire la conjecture que l'équation a trois racines dans $\mathbb{R}$. ■



Quelques précisions nécessaires !

Un certain nombre de calculs simples conduisent aux résultats suivants :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

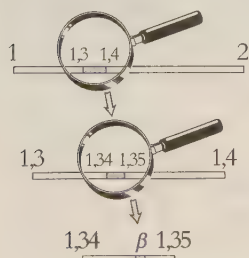
En raison de la dérivabilité de la fonction et de ses variations :

- puisque $f(-1)$ et $f(0)$ sont de signes contraires, l'équation a exactement une racine α entre -1 et 0 ;
- puisque $f(1)$ et $f(2)$ sont de signes contraires, l'équation a exactement une racine β entre 1 et 2 ;
- puisque $f(2)$ et $f(3)$ sont de signes contraires, l'équation a exactement une racine γ entre 2 et 3 .

On dit que l'on a « séparé les racines ». ■

Puisque l'on n'a pas la possibilité de les calculer explicitement, on aimerait bien avoir des valeurs approchées plus précises de ces racines : on dispose pour cela de divers procédés.

La méthode par « balayage »



Pour obtenir un bon encadrement pour la racine β , il suffit de faire décrire l'intervalle $[1; 2]$ à la variable x : en partant de la valeur initiale $x=1$, on calcule $f(1+kP)$ en prenant d'abord un pas $P=0,1$:

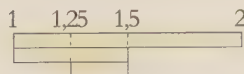
x	1	1,1	1,2	1,3	1,4
$f(x)$	1	0,7	0,4	0,12	-0,13

Puisque $f(1,3) \times f(1,4) < 0$, alors on a $1,3 < \beta < 1,4$. On reprend ensuite ce balayage sur $[1,3; 1,4]$ avec un pas dix fois plus petit soit $P=0,01$. On constate que $f(1,34) = 0,019 > 0$

et $f(1,35) = -0,007 < 0$, on a donc $1,34 < \beta < 1,35$. Et rien n'empêche de poursuivre en choisissant un pas de plus en plus petit ! On obtiendrait $1,347 < \beta < 1,348$, etc.

La méthode par « dichotomie » (couper en deux - méthode de Babylone)

Lorsque l'on a trouvé un encadrement de la racine : $1 < \beta < 2$, on choisit le milieu de l'intervalle, ici 1,5 : $f(1,5) = -0,375$ qui est de signe contraire de $f(1)$ donc on a $1 < \beta < 1,5$.



On choisit ensuite le milieu du nouvel intervalle $[1; 1,5]$, soit 1,25 : $f(1,25) = 0,265$ qui est du signe contraire de $f(1,5)$, donc $1,25 < \beta < 1,5$. Et on continue ainsi aussi loin qu'on le souhaite. Cette méthode a le mérite de pouvoir être facilement programmée.

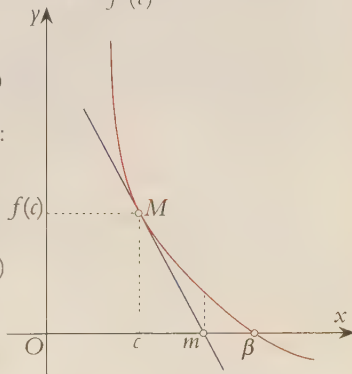
La méthode des tangentes (ou de Newton)

On sait que la courbe coupe l'axe xx' en β . Si l'on choisit un réel c proche de cette racine, la tangente à la courbe au

point $M(c, f(c))$ a pour équation : $y = f(c) - f'(c)(x - c)$.

Si $f'(c) \neq 0$, cette tangente coupe xx' en un point d'abscisse m donnée par

$$m = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$$



Si l'on se trouve dans de bonnes conditions, ce réel m que l'on sait ainsi calculer, donne une approximation de la racine β .

Et on recommence le calcul en remplaçant c par m , etc.

Cette méthode était bien utile avant l'ère des calculatrices.

La méthode du « point fixe »

Elle sera traitée avec les suites récurrentes définies par U_0 et $U_{n+1} = f(U_n)$ moyennant certaines conditions. ■

Une fonction n'a parfois de signification que pour les valeurs entières de la variable : par exemple le $n^{\text{ième}}$ jour de l'année, la température est $t(n)$.

Une suite est une fonction dont la variable ne peut prendre que des valeurs entières positives : l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$.

La figure ci-contre indique la formation des nombres dits « triangulaires » :

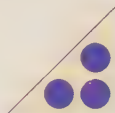
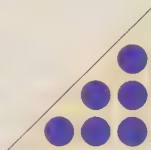
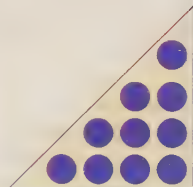
$$T_1 = 1;$$

$$T_2 = 3;$$

$$T_3 = 6;$$

$$T_4 = 10.$$

C'est un premier exemple de suite numérique.


 T_1

 T_2

 T_3

 T_4

Vocabulaire et notations

En général, on note la suite $t, u, v, w, \dots$

La variable est notée n . Pour noter l'image de n , au lieu d'écrire $u(n)$, on écrit u_n qui se lit « u indice n ».

$$u \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \rightarrow u_n \end{cases}$$

u_0 est le terme de rang 0 : c'est le premier terme.

u_n est le terme de rang n de cette suite.

C'est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme.

Le terme qui suit u_n se note u_{n+1} , celui qui le précède est u_{n-1} pour $n > 0$. ■

Comment définir une suite ?

Pour les nombres triangulaires, on constate que

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On peut aussi remarquer que l'on peut passer de T_n à T_{n+1} en ajoutant $(n+1)$ points : ainsi, $T_4 = T_3 + 4$.

On a $T_{n+1} = T_n + (n+1)$.

Il y deux façons de définir une suite réelle u .

Première façon

On définit u_n en fonction de n , comme pour une fonction $f, f(x)$ s'écrit en fonction de x .

Par exemple, d'éminents statisticiens ont établi que le coût de n objets fabriqués dans un atelier est donné par

$$C_n = 2n^3 - 10n^2 + 50n + 1500.$$

On sait ainsi calculer

$$C_0, C_1, C_2, \dots, C_{1000}.$$

Si on s'intéresse au coût

moyen d'un objet, on obtient la suite $U_n = \frac{C_n}{n}$ soit :

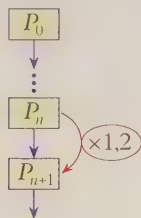
$$U_n = 2n^2 - 10n + 50 + \frac{1500}{n}.$$

On peut calculer les valeurs de U_n , par exemple $U_2 = 788$; $U_{100} = 19\,065$, etc.

Seconde façon

On peut aussi définir une suite en exprimant chaque terme en fonction de celui qui précède. Par exemple, une population d'otaries est multipliée par 1,2 d'une année à l'autre : si l'on désigne par P_n cette population l'année n , alors l'année suivante on a $P_{n+1} = 1,2 \times P_n$. Mais pour connaître une population une année quelconque, il est indispensable de la connaître une certaine année, par exemple si

$P_0=1500$, (en 1990),
on aura en 1991 :
 $P_1=1500 \times 1,2=1800$.



Et pour trouver la population en l'an 2000, il faut calculer tous les termes qui précèdent.

On pose $P_0=1500$ et $P_{n+1}=1,2 \times P_n$ pour $n > 0$. On dit que la suite est définie par récurrence. ■

Une représentation graphique

Il est intéressant de représenter les termes d'une suite par les points d'un axe :

le point M_n a pour abscisse u_n sur cet axe. Cette représentation permet de se faire une

idée de ce qui peut se passer pour cette suite.

Exemple 1

Soit $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. La représentation des premiers termes est dessinée ci-contre.

Exemple 2

Soit $V_n = (-1)^n$. On a $V_0 = V_2 = V_4 = V_{2k} = 1$
 $V_1 = V_3 = V_5 = V_{2k+1} = -1$.
On a une suite périodique de période 2.

Exemple 3

Soit la suite $W_n = \frac{\sin(\pi \frac{n}{2})}{n}$.

Le terme W_n n'existe pas !

On a $W_1=1$; $W_2=0$;

$W_3=-\frac{1}{3}$; $W_4=0$; $W_5=\frac{1}{5}$, etc. ■

Quelques propriétés

Suite bornée : une suite u est majorée par M si pour tout n on a $u_n \leq M$.

Une suite u est minorée par m si pour tout n on a $u_n \geq m$.

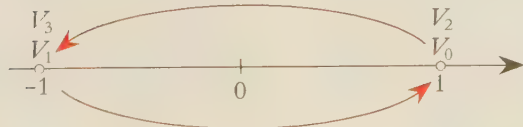
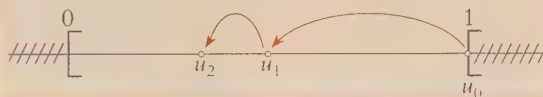
Une suite bornée est une suite à la fois majorée et minorée.

• Par exemple, la suite $u_n = \frac{1}{n+1}$ est majorée par 1 et minorée par 0 : c'est donc une suite bornée.

• La suite v telle que $v_n = 2n^2 + 1$ est minorée par 1 mais elle n'est pas majorée.

• La suite w telle que $w_n = -8n^3 - 1$ est majorée par -1 mais elle n'est pas minorée.

La suite $t_n = \sin(2n)$ est bornée : $-1 \leq t_n \leq 1$.



On est amené, lorsqu'on a affaire à une suite numérique U_n , à étudier plusieurs points particuliers, notamment les variations de cette suite et son comportement lorsque n tend vers l'infini.

Les variations d'une suite

Une suite U est dite croissante si pour tout n : $U_{n+1} \geq U_n$.

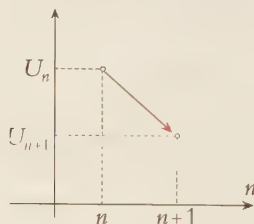
Une suite U est dite décroissante si pour tout n : $U_{n+1} \leq U_n$.

Une suite U est dite constante si pour tout n : $U_{n+1} = U_n$.

Une suite monotone est une suite qui est soit croissante, soit décroissante.

Exemple 1

Considérons la suite U définie par $U_n = \frac{1}{n+1}$.



• Méthode 1

$n+2 > n+1$ donc $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ car $n+2$ et $n+1$ sont positifs. Ainsi, $U_{n+1} < U_n$. Cette suite est décroissante.

• Méthode 2

$U_{n+1} - U_n = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$ qui est négatif. Cette suite est bien décroissante !

Exemple 2

Soit $V_n = 2 \cdot 1^n$. Tous les termes sont positifs. On peut faire le quotient $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ qui vaut 2,1 supérieur à 1, donc $V_{n+1} > V_n$. Cette suite est donc croissante.

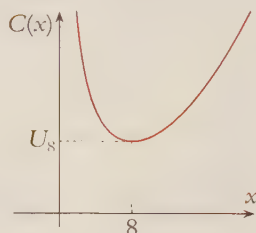
Exemple 3

Pour la suite $W_n = \frac{\sin(\frac{n}{2})}{n}$, on a vu à la page précédente que $W_1 > W_2$ et que $W_3 < W_4$. Cette suite n'est donc pas monotone.

Exemple 4

Pour le coût moyen de n articles défini par la suite $U_n = 2n^2 - 10n + 50 + \frac{1500}{n}$, on a une suite décroissante jusqu'à $n=8$, puis

croissante pour $n > 8$. Ce n'est donc pas une suite monotone :



La représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $C : x \mapsto C(x)$ permet de s'en convaincre, au moyen d'une calculatrice graphique. ■

Comportement à l'infini, convergence

Si la suite U est définie par $U_n = f(n)$, l'étude de la limite de la fonction f à $(+\infty)$ donne le comportement de la suite U lorsque n tend vers l'infini : les théorèmes sur les limites d'une fonction dans $\mathbb{R}$ s'appliquent pour les suites ainsi définies. On écrit simplement $\lim U_n$ et non pas $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n$.

Exemple 1

Soit la suite U définie par $U_n = 2n+1$. La fonction f définie par $f(x) = 2x+1$ tend vers $(+\infty)$ lorsque x tend vers $(+\infty)$, donc $\lim U_n = +\infty$.

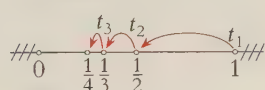
On dit que cette suite diverge vers plus l'infini.

Exemple 2

La suite définie par $V_n = (-1)^n$ est périodique : elle prend alternativement les valeurs 1 et -1. C'est une suite divergente. Elle n'a pas de limite.

Exemple 3

La suite des inverses des entiers $t_n = \frac{1}{n}$ a pour limite 0 à l'infini.



On dit que c'est une suite convergente de limite nulle.

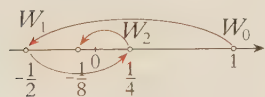
Il en est de même des

suites : $\frac{1}{n^k}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exemple 4

Soit la suite W définie

par $W_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

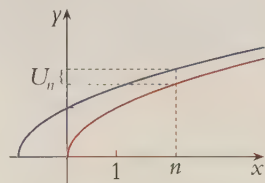


On a $\lim |W_n| = 0$, d'où $\lim W_n = 0$. La suite W est convergente vers 0.

Exemple 5

Considérons la suite U définie par $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Le terme U_n représente l'écart entre deux points de même abscisse n sur les courbes représentatives

des fonctions f et g telles que $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.



On a $U_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ qui tend vers 0

lorsque n tend vers l'infini. On a $\lim U_n = 0$ et cette suite est convergente. ■

Suite convergente vers le nombre L

On dit que la suite U_n converge vers le nombre L si la suite V_n définie par $V_n = U_n - L$ converge vers 0.

Soit $U_n = \frac{2n-5}{4n+3}$. On peut démontrer qu'elle converge vers $\frac{1}{2}$ en posant

$$V_n = \frac{2n-5}{4n+3} - \frac{1}{2},$$

soit $V_n = \frac{-13}{2(4n+3)}$.

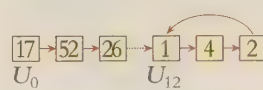
On a $\lim V_n = 0$ donc $\lim U_n = \frac{1}{2}$.

Mais on pourrait aussi étudier la limite à plus l'infini de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-5}{4x+3}$. ■

Une divergence étrange !

On choisit un nombre naturel A : s'il est pair, le suivant est $\frac{A}{2}$.

S'il est impair, le suivant est $3A+1$... et on continue avec la même règle. Prenons $U_0 = 17$; on a $U_1 = 52$, $U_2 = 26$; $U_3 = 13$; $U_4 = 40$; $U_5 = 20$; $U_6 = 10$; $U_7 = 5$; puis $U_{12} = 1$; $U_{13} = 4$; $U_{14} = 2$; $U_{15} = 1$...



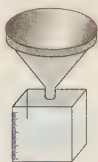
Quel que soit le premier terme choisi, on constate qu'à partir d'un certain rang, on trouve toujours la « séquence » : 1 ; 4 ; 2 ; 1 se répéter de manière périodique... C'est une curieuse suite divergente ! Et l'on n'a toujours pas démontré cette bizarrerie ! ■

Pour une suite donnée, on établit la convergence vers 0, ou la divergence, en étudiant éventuellement la fonction associée, ou encore par comparaison avec une autre suite convergente. Par exemple, si $0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = 0$.

Parmi les deux suites définies par récurrence, il y en a deux très importantes : les suites arithmétiques et les suites géométriques, ces dernières étant les plus utilisées.

Les suites arithmétiques

Il pleut tous les jours ! Le mardi (jour 0) le pluviomètre de la station météo contient 72 mm d'eau et chaque jour on a 4,5 mm de plus dans l'appareil !



Cette situation intéressante pour le jardinier mais pas pour le touriste

Les propriétés des suites arithmétiques

Une suite arithmétique possède les propriétés suivantes.

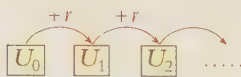
- Le terme de rang n est $U_n = a + nr$.

Dans notre exemple on a : $h_{19} = 72 + 19 \times 4,5 = 157,5$. Il n'est pas nécessaire de calculer tous les termes.

- Une suite arithmétique est croissante si $r > 0$ et décroissante si $r < 0$.
- Si l'on envisage la suite arithmétique $U_0; U_1; U_2; \dots; U_{n-1}$ de n termes, la suite inverse

peut se représenter par la suite $h_0 = 72$ et $h_{n+1} = h_n + 4,5$.

Cette suite est une suite arithmétique. Plus généralement, on appelle suite arithmétique de premier terme a et de raison r la suite définie par $U_0 = a$ et pour tout $n > 0$ $U_{n+1} = U_n + r$. ■



$U_{n-1}; \dots; U_2; U_1; U_0$ est aussi une suite arithmétique de raison opposée $(-r)$.

La somme de deux termes équidistants des termes extrêmes est constante et égale à la somme du premier et du dernier terme. Elle est égale à $2U_0 + (n-1)r$.

- La somme des n premiers termes $S_{n-1} =$

$$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$$

est égale à : $\frac{n(U_0 + U_{n-1})}{2}$

$$S_{n-1} = \frac{n(2U_0 + (n-1)r)}{2} \quad \blacksquare$$

En particulier

- La somme $1+2+3+\dots+n$ des n entiers naturels de 1 à n est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1 d'où :

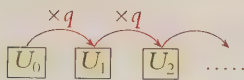
$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(2+(n-1))}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

une formule déjà connue du mathématicien Gauss...

- La somme $1+3+5+\dots+(2k+1)$ est la somme des k nombres impairs de 1 à $2k+1$: c'est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1 : elle est égale à $(k+1)^2$. ■

Les suites géométriques

Si on place une somme de 1 000 € à la caisse d'épargne (intérêts composés), le taux est constant : 3,5 %. D'une année à l'autre, le « capital » est multiplié par 1,035. La situation peut se représenter par la suite $C_0 = 1000$ et $C_{n+1} = 1,035 \times C_n$.



C'est ce que l'on appelle une suite géométrique. Une suite géométrique U de raison q est définie par récurrence : on donne le premier terme $U_0 = a$ et pour tout n ($n > 0$), on a $U_{n+1} = q U_n$.

● Le terme de rang n s'écrit $U_n = q^n U_0$. Dans notre exemple, on a : $C_{50} = 1000 \times 1,035^{50}$. Si $q = 1$, la suite est constante.

Si $q < 0$, la suite n'est pas monotone.

Si $q > 0$, les variations dépendent du premier

terme et changent selon que q est inférieur ou supérieur à 1.

● Si l'on envisage la suite géométrique $U_0; U_1; \dots; U_{n-1}$ de n termes de raison q , la suite inverse $U_{n-1}; \dots; U_1; U_0$ est aussi une suite géométrique de raison inverse $\frac{1}{q}$. Le produit de deux termes « équidistants » des extrêmes est égal au produit des extrêmes : il est égal à $U_0^2 \times q_{n-1}$.

● La somme des n premiers termes, de U_0 à U_{n-1} :

$$S_{n-1} = U_0 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ avec } q \neq 1.$$

Exemples

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 2(1 - \frac{1}{32}) - \frac{31}{32}$$

(5 termes ; $q = \frac{1}{2}$).

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \text{ (64 termes ; } q=2\text{)}.$$

On raconte que l'inventeur du jeu d'échecs demanda comme récompense à son souverain le cadeau suivant : placer un grain de blé sur la première case de l'échiquier, puis 2 sur la suivante et ainsi de suite en doublant jusqu'à la dernière case, ce qui fait au final une quantité de blé impressionnante !

Plus généralement :

si $x \neq 1$, on a

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \blacksquare$$

	$0 < q < 1$	$q > 1$
$U_0 > 0$	suite décroissante	suite croissante
$U_0 < 0$	suite croissante	suite décroissante

La convergence d'une suite géométrique

Si $-1 < q < 1$, c'est-à-dire si $|q| < 1$, alors $\lim (q^n) = 0$. Si $q \leq -1$ la suite géométrique est divergente. Si $q > 1$ la suite diverge vers l'infini.

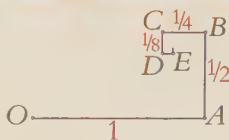
C'est évidemment un résultat très important pour l'étude des suites.

En particulier :

$$\lim \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \text{ avec } q \neq 1.$$

Exemples

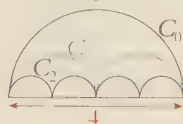
● $\lim (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}) = \lim (2(1 - 0,5^n)) = 2.$



Si l'on fabrique la spirale ci-dessus en divisant par deux la longueur du segment suivant, tracé sur la perpendiculaire, la « longueur » de la spirale $OABCD \dots$ reste inférieure à 2 mais tend vers 2.

● Le premier demi-cercle C_0 de rayon 2 a une longueur égale à 2π . C_1 est

la réunion de deux demi-cercles de rayon 1 ; C_2 est la réunion de quatre demi-cercles de rayon 0,5. La suite des périmètres de C_n est une suite constante égale à 2π . La suite S_n des aires de la réunion des demi-disques est une suite géométrique de premier terme 2π et de raison $\frac{1}{2}$: cette suite converge vers 0. ■



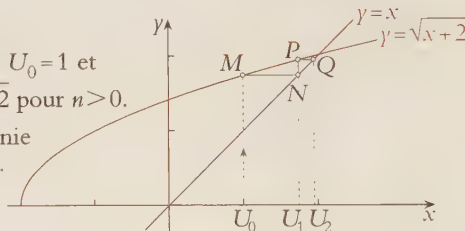
On s'intéresse ici aux suites définies par récurrence par $U_0 = a$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour $n \geq 0$. Les suites géométriques et arithmétiques en sont des exemples, mais dans de nombreux cas, on ne sait pas calculer U_n en fonction de n . L'étude de la convergence pose problème. Que faire... ?

Conjecturer grâce à l'illustration

Examinons plusieurs cas.

Exemple 1

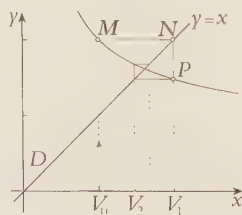
Soit la suite $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$ pour $n > 0$. Elle est définie pour tout n .



Traçons la courbe C qui représente la fonction $y = \sqrt{x+2}$ ainsi que la droite D d'équation $y = x$. Pour le point M de C d'abscisse U_0 , son ordonnée est U_1 . Le point N de D de même ordonnée, a pour abscisse U_1 . Le point P de C , de même abscisse, a pour ordonnée U_2 , et ainsi de proche en proche on peut construire les points $M, N, P, Q, \dots$ dont les abscisses sont les termes de la suite considérée. Un regard sur cette représentation nous autorise à conjecturer que cette suite est croissante et sans doute convergente. Mais il reste à le prouver...

Exemple 2

Soit la suite définie par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = 1 + \frac{1}{V_n}$.

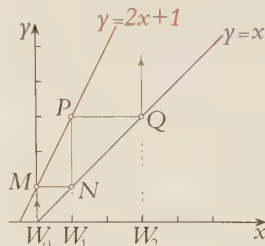


Le tracé des représentations de la droite D d'équation $y = x$ et de la courbe de la fonction $x \rightarrow 1 + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, avec la même technique que

ci-contre permettent de visualiser les premiers termes de cette suite sur l'axe xx' et de faire des conjectures sur la suite...

Exemple 3

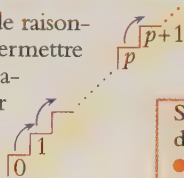
Soit la suite définie par $W_0 = 0$ et $W_{n+1} = 2W_n + 1$.



On trace les deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = 2x + 1$. La visualisation, sur l'axe xx' , des premiers termes de la suite permet de conjecturer des propriétés de cette suite : croissance et divergence... Mais ces observations ne sont pas des preuves ! Il faut autre chose. ■

Le raisonnement par récurrence

C'est ce type de raisonnement qui va permettre dans les cas envisagés de démontrer des majorations, minoration et d'étudier les variations. On veut prouver qu'une certaine propriété est vraie pour tous les entiers naturels n , non seulement pour 0, 1, 2...



On utilise un raisonnement spécifique à l'ensemble $\mathbb{N}$.

Soit une propriété qui dépend d'un naturel n .

- Si cette propriété est vraie pour $n=0$;
 - si étant vraie pour p , alors on la démontre vraie pour $p+1$.
- Elle est vraie pour tout naturel n .

Récurrence pour une majoration ou une minoration

Exemple 1

Soit la suite définie par $U_0=1$ et $U_{n+1}=\sqrt{U_n+2}$. Montrons par récurrence qu'elle est majorée par 2. On a $U_0=1$: la propriété est vraie pour $n=0$. Supposons que $U_p < 2$ (hypothèse de récurrence) alors $U_p+2 < 4$, donc $\sqrt{U_p+2} < 2$ soit $U_{p+1} < 2$. Cette propriété est donc vraie pour tout n .

Exemple 2

Prenons $V_0=3$ et $V_{n+1}=\sqrt{V_n+2}$. On a la même fonction associée, mais cette fois la propriété n'est plus vraie pour $n=0$ car $V_0 > 2$. La suite n'est pas majorée par 2. D'autre part, au départ, l'« escalier » descend. On peut, en revanche, démontrer que 2 est un minorant. En effet, la propriété est vraie pour $n=0$: $V_0 > 2$.

Si l'on émet l'hypothèse que $V_p > 2$, on a $V_p+2 > 4$, donc $\sqrt{V_p+2} > 2$, d'où $V_{p+1} > 2$. Il est donc prouvé que 2 est un minorant pour tout n . Il faut bien noter l'importance de la « première marche » ! ■

Récurrence pour les variations

Reprenons l'exemple 1. La représentation graphique suggère que cette suite est croissante. Il reste à démontrer que pour tout n , on a $U_n < U_{n+1}$. Première « marche » : $U_0=1$ et $U_1=\sqrt{3}$, donc $U_0 < U_1$. La propriété est vraie pour $n=0$. Si on fait l'hypothèse que $U_p < U_{p+1}$, alors la fonction $x \rightarrow \sqrt{x+2}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{U_p+2} < \sqrt{U_{p+1}+2}$, donc $U_{p+1} < U_{p+2}$. La propriété est donc vraie pour tout naturel n . Cette suite est croissante. Reprenant l'exemple 2, on montrerait que la suite est décroissante : l'inégalité de la « première marche » est inversée. ■

La science et l'hypothèse

« Le raisonnement par récurrence contient, condensés, une infinité de syllogismes... Pour y arriver, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste ne parviendra jamais à combler. Je demandais au début pourquoi on ne saurait concevoir un esprit assez puissant pour apercevoir d'un seul coup d'œil l'ensemble des mathématiques : un joueur d'échecs ne peut combiner qu'un nombre

fini de coups d'avance... Il ne pourra s'affranchir du raisonnement par récurrence parce que c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini. Cet instrument est toujours utile puisque, nous faisant franchir d'un bond autant d'étapes que nous le voulons, il nous dispense de vérifications longues et fastidieuses et monotones qui deviendraient rapidement impraticables. » (Poincaré.)

L'étude de la convergence pour une suite récurrente n'est pas toujours simple comme dans le cas des suites géométriques. Plusieurs situations peuvent se présenter.

Premier cas

Il consiste en l'étude d'une suite définie par U_0 et $U_{n+1} = aU_n + b$.

Exemple

$U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$.
Considérons la suite V définie par $V_n = U_n - 4$.
On montre facilement que $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ avec $V_0 = -4$.

V est donc une suite géométrique et on a

$$V_n = -4 \times \frac{1}{2^n} = \frac{-4}{2^n}.$$

C'est une suite croissante et convergente vers 0.

La suite U qui lui est associée est aussi croissante et elle converge vers 4.

D'autre part, l'expression de V_n permet d'exprimer U_n en fonction de n et ainsi de calculer un terme quelconque de U :

$$U_n = -4 \times \frac{1}{2^n} + 4.$$

● Méthode

Dans ce cas, trouver une suite géométrique V telle que pour tout n :

$V_n = U_n + k$ et étudier cette nouvelle suite V .

Ce type de suite se rencontre dans certaines situations économiques : par exemple, une voiture neuve est achetée

10 000 € le 1^{er} janvier 2004. Une étude statis-

tique a montré que si P_n et P_{n+1} sont les prix

l'année n et l'année $n+1$ (après la date d'achat),

on a : $P_{n+1} = 0,7P_n + 600$.

On montre que la suite Q définie

par $Q_n = P_n - 2000$

est une suite géométrique de raison 0,7 et de pre-

mier terme 7 000, d'où

$$P_n = Q_n + 2000 = 7000(0,7)^n + 2000.$$

On peut ainsi déterminer chaque année le prix

de la voiture d'occasion sans passer par les années intermédiaires. ■

Deuxième cas

Il consiste en l'étude d'une suite monotone définie par U_0 et $U_{n+1} = f(U_n)$.

On utilisera l'un des théorèmes suivants.

● Si cette suite est croissante et majorée, alors elle est convergente vers L .

● Si cette suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente et la limite est L .

Par ailleurs, si la fonction f est continue en L , alors cette limite L est solution de l'équation $f(x) = x$: L est un point fixe de f .

Exemple 1

Reprenons la suite U telle que $U_0 = 0$ et

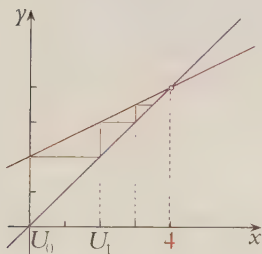
$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2.$$

On montre facilement qu'elle est croissante et majorée par 4. Elle est donc convergente et la limite L est solution de $\frac{1}{2}x + 2 = x$, soit $L = 4$.

Cette suite U admet 4 comme limite.



La convergence est facile à démontrer, mais on n'exprime pas U_n en fonction de n comme dans la méthode qui précède.



Exemple 2

Soit la suite W telle que $W_0 = 3$ et $W_{n+1} = \sqrt{W_n + 2}$.

On a vu qu'elle est décroissante et minorée par 2. Elle est donc convergente : sa limite est la solution positive de

l'équation $\sqrt{x+2} = x$.

On trouve $L = 2$. ■

Troisième cas

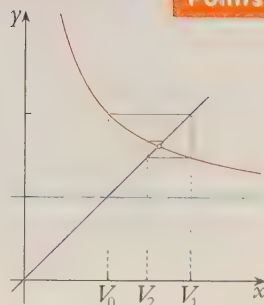
La suite définie par U_0 et $U_{n+1} = f(U_n)$ n'est pas monotone. On ne peut évidemment pas appliquer l'un des théorèmes cités... On peut cependant dans certains cas étudier la convergence, comme le laisse présager une représentation graphique.

Si la fonction f est dérivable sur un intervalle fermé I , si $f(I) \subset I$ et si la valeur absolue de la dérivée de f est majorée sur I par un réel k positif et inférieur à 1, alors la suite U converge : sa limite L est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Soit la suite V définie par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = 1 + \frac{1}{V_n}$.

La fonction associée f est définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.



Elle est dérivable sur l'intervalle $[1; 2]$; on a $f([1; 2]) = [1,5; 2]$ inclus dans $[1; 2]$. V_0 est dans cet intervalle, ainsi que tout V_n . D'autre part, $|f'(x)|$ est majorée par $\frac{1}{4}$ strictement inférieur à 1.

On peut donc dire que cette suite est convergente. Sa limite L est solution de

l'équation $1 + \frac{1}{x} = x$ qui a deux solutions :

L est la solution positive $L = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \approx 1,618$. ■

La suite de Fibonacci

Léonard de Pise, dit Fibonacci (1175-1250), a inventé une suite qui porte son nom. Elle est définie par les deux premiers termes positifs u_0 et u_1 , chacun des autres étant la somme des deux précédents : $u_2 = u_0 + u_1$; $u_3 = u_1 + u_2$; $u_4 = u_2 + u_3$; $u_5 = u_3 + u_4$; $u_6 = u_4 + u_5$; $u_7 = u_5 + u_6$; $u_8 = u_6 + u_7$; $u_9 = u_7 + u_8$; $u_{10} = u_8 + u_9$; $u_{11} = u_9 + u_{10}$; $u_{12} = u_{10} + u_{11}$; $u_{13} = u_{11} + u_{12}$; $u_{14} = u_{12} + u_{13}$; $u_{15} = u_{13} + u_{14}$; $u_{16} = u_{14} + u_{15}$; $u_{17} = u_{15} + u_{16}$; $u_{18} = u_{16} + u_{17}$; $u_{19} = u_{17} + u_{18}$; $u_{20} = u_{18} + u_{19}$; $u_{21} = u_{19} + u_{20}$; $u_{22} = u_{20} + u_{21}$; $u_{23} = u_{21} + u_{22}$; $u_{24} = u_{22} + u_{23}$; $u_{25} = u_{23} + u_{24}$; $u_{26} = u_{24} + u_{25}$; $u_{27} = u_{25} + u_{26}$; $u_{28} = u_{26} + u_{27}$; $u_{29} = u_{27} + u_{28}$; $u_{30} = u_{28} + u_{29}$; $u_{31} = u_{29} + u_{30}$; $u_{32} = u_{30} + u_{31}$; $u_{33} = u_{31} + u_{32}$; $u_{34} = u_{32} + u_{33}$; $u_{35} = u_{33} + u_{34}$; $u_{36} = u_{34} + u_{35}$; $u_{37} = u_{35} + u_{36}$; $u_{38} = u_{36} + u_{37}$; $u_{39} = u_{37} + u_{38}$; $u_{40} = u_{38} + u_{39}$; $u_{41} = u_{39} + u_{40}$; $u_{42} = u_{40} + u_{41}$; $u_{43} = u_{41} + u_{42}$; $u_{44} = u_{42} + u_{43}$; $u_{45} = u_{43} + u_{44}$; $u_{46} = u_{44} + u_{45}$; $u_{47} = u_{45} + u_{46}$; $u_{48} = u_{46} + u_{47}$; $u_{49} = u_{47} + u_{48}$; $u_{50} = u_{48} + u_{49}$; $u_{51} = u_{49} + u_{50}$; $u_{52} = u_{50} + u_{51}$; $u_{53} = u_{51} + u_{52}$; $u_{54} = u_{52} + u_{53}$; $u_{55} = u_{53} + u_{54}$; $u_{56} = u_{54} + u_{55}$; $u_{57} = u_{55} + u_{56}$; $u_{58} = u_{56} + u_{57}$; $u_{59} = u_{57} + u_{58}$; $u_{60} = u_{58} + u_{59}$; $u_{61} = u_{59} + u_{60}$; $u_{62} = u_{60} + u_{61}$; $u_{63} = u_{61} + u_{62}$; $u_{64} = u_{62} + u_{63}$; $u_{65} = u_{63} + u_{64}$; $u_{66} = u_{64} + u_{65}$; $u_{67} = u_{65} + u_{66}$; $u_{68} = u_{66} + u_{67}$; $u_{69} = u_{67} + u_{68}$; $u_{70} = u_{68} + u_{69}$; $u_{71} = u_{69} + u_{70}$; $u_{72} = u_{70} + u_{71}$; $u_{73} = u_{71} + u_{72}$; $u_{74} = u_{72} + u_{73}$; $u_{75} = u_{73} + u_{74}$; $u_{76} = u_{74} + u_{75}$; $u_{77} = u_{75} + u_{76}$; $u_{78} = u_{76} + u_{77}$; $u_{79} = u_{77} + u_{78}$; $u_{80} = u_{78} + u_{79}$; $u_{81} = u_{79} + u_{80}$; $u_{82} = u_{80} + u_{81}$; $u_{83} = u_{81} + u_{82}$; $u_{84} = u_{82} + u_{83}$; $u_{85} = u_{83} + u_{84}$; $u_{86} = u_{84} + u_{85}$; $u_{87} = u_{85} + u_{86}$; $u_{88} = u_{86} + u_{87}$; $u_{89} = u_{87} + u_{88}$; $u_{90} = u_{88} + u_{89}$; $u_{91} = u_{89} + u_{90}$; $u_{92} = u_{90} + u_{91}$; $u_{93} = u_{91} + u_{92}$; $u_{94} = u_{92} + u_{93}$; $u_{95} = u_{93} + u_{94}$; $u_{96} = u_{94} + u_{95}$; $u_{97} = u_{95} + u_{96}$; $u_{98} = u_{96} + u_{97}$; $u_{99} = u_{97} + u_{98}$; $u_{100} = u_{98} + u_{99}$; $u_{101} = u_{99} + u_{100}$; $u_{102} = u_{100} + u_{101}$; $u_{103} = u_{101} + u_{102}$; $u_{104} = u_{102} + u_{103}$; $u_{105} = u_{103} + u_{104}$; $u_{106} = u_{104} + u_{105}$; $u_{107} = u_{105} + u_{106}$; $u_{108} = u_{106} + u_{107}$; $u_{109} = u_{107} + u_{108}$; $u_{110} = u_{108} + u_{109}$; $u_{111} = u_{109} + u_{110}$; $u_{112} = u_{110} + u_{111}$; $u_{113} = u_{111} + u_{112}$; $u_{114} = u_{112} + u_{113}$; $u_{115} = u_{113} + u_{114}$; $u_{116} = u_{114} + u_{115}$; $u_{117} = u_{115} + u_{116}$; $u_{118} = u_{116} + u_{117}$; $u_{119} = u_{117} + u_{118}$; $u_{120} = u_{118} + u_{119}$; $u_{121} = u_{119} + u_{120}$; $u_{122} = u_{120} + u_{121}$; $u_{123} = u_{121} + u_{122}$; $u_{124} = u_{122} + u_{123}$; $u_{125} = u_{123} + u_{124}$; $u_{126} = u_{124} + u_{125}$; $u_{127} = u_{125} + u_{126}$; $u_{128} = u_{126} + u_{127}$; $u_{129} = u_{127} + u_{128}$; $u_{130} = u_{128} + u_{129}$; $u_{131} = u_{129} + u_{130}$; $u_{132} = u_{130} + u_{131}$; $u_{133} = u_{131} + u_{132}$; $u_{134} = u_{132} + u_{133}$; $u_{135} = u_{133} + u_{134}$; $u_{136} = u_{134} + u_{135}$; $u_{137} = u_{135} + u_{136}$; $u_{138} = u_{136} + u_{137}$; $u_{139} = u_{137} + u_{138}$; $u_{140} = u_{138} + u_{139}$; $u_{141} = u_{139} + u_{140}$; $u_{142} = u_{140} + u_{141}$; $u_{143} = u_{141} + u_{142}$; $u_{144} = u_{142} + u_{143}$; $u_{145} = u_{143} + u_{144}$; $u_{146} = u_{144} + u_{145}$; $u_{147} = u_{145} + u_{146}$; $u_{148} = u_{146} + u_{147}$; $u_{149} = u_{147} + u_{148}$; $u_{150} = u_{148} + u_{149}$; $u_{151} = u_{149} + u_{150}$; $u_{152} = u_{150} + u_{151}$; $u_{153} = u_{151} + u_{152}$; $u_{154} = u_{152} + u_{153}$; $u_{155} = u_{153} + u_{154}$; $u_{156} = u_{154} + u_{155}$; $u_{157} = u_{155} + u_{156}$; $u_{158} = u_{156} + u_{157}$; $u_{159} = u_{157} + u_{158}$; $u_{160} = u_{158} + u_{159}$; $u_{161} = u_{159} + u_{160}$; $u_{162} = u_{160} + u_{161}$; $u_{163} = u_{161} + u_{162}$; $u_{164} = u_{162} + u_{163}$; $u_{165} = u_{163} + u_{164}$; $u_{166} = u_{164} + u_{165}$; $u_{167} = u_{165} + u_{166}$; $u_{168} = u_{166} + u_{167}$; $u_{169} = u_{167} + u_{168}$; $u_{170} = u_{168} + u_{169}$; $u_{171} = u_{169} + u_{170}$; $u_{172} = u_{170} + u_{171}$; $u_{173} = u_{171} + u_{172}$; $u_{174} = u_{172} + u_{173}$; $u_{175} = u_{173} + u_{174}$; $u_{176} = u_{174} + u_{175}$; $u_{177} = u_{175} + u_{176}$; $u_{178} = u_{176} + u_{177}$; $u_{179} = u_{177} + u_{178}$; $u_{180} = u_{178} + u_{179}$; $u_{181} = u_{179} + u_{180}$; $u_{182} = u_{180} + u_{181}$; $u_{183} = u_{181} + u_{182}$; $u_{184} = u_{182} + u_{183}$; $u_{185} = u_{183} + u_{184}$; $u_{186} = u_{184} + u_{185}$; $u_{187} = u_{185} + u_{186}$; $u_{188} = u_{186} + u_{187}$; $u_{189} = u_{187} + u_{188}$; $u_{190} = u_{188} + u_{189}$; $u_{191} = u_{189} + u_{190}$; $u_{192} = u_{190} + u_{191}$; $u_{193} = u_{191} + u_{192}$; $u_{194} = u_{192} + u_{193}$; $u_{195} = u_{193} + u_{194}$; $u_{196} = u_{194} + u_{195}$; $u_{197} = u_{195} + u_{196}$; $u_{198} = u_{196} + u_{197}$; $u_{199} = u_{197} + u_{198}$; $u_{200} = u_{198} + u_{199}$; $u_{201} = u_{199} + u_{200}$; $u_{202} = u_{200} + u_{201}$; $u_{203} = u_{201} + u_{202}$; $u_{204} = u_{202} + u_{203}$; $u_{205} = u_{203} + u_{204}$; $u_{206} = u_{204} + u_{205}$; $u_{207} = u_{205} + u_{206}$; $u_{208} = u_{206} + u_{207}$; $u_{209} = u_{207} + u_{208}$; $u_{210} = u_{208} + u_{209}$; $u_{211} = u_{209} + u_{210}$; $u_{212} = u_{210} + u_{211}$; $u_{213} = u_{211} + u_{212}$; $u_{214} = u_{212} + u_{213}$; $u_{215} = u_{213} + u_{214}$; $u_{216} = u_{214} + u_{215}$; $u_{217} = u_{215} + u_{216}$; $u_{218} = u_{216} + u_{217}$; $u_{219} = u_{217} + u_{218}$; $u_{220} = u_{218} + u_{219}$; $u_{221} = u_{219} + u_{220}$; $u_{222} = u_{220} + u_{221}$; $u_{223} = u_{221} + u_{222}$; $u_{224} = u_{222} + u_{223}$; $u_{225} = u_{223} + u_{224}$; $u_{226} = u_{224} + u_{225}$; $u_{227} = u_{225} + u_{226}$; $u_{228} = u_{226} + u_{227}$; $u_{229} = u_{227} + u_{228}$; $u_{230} = u_{228} + u_{229}$; $u_{231} = u_{229} + u_{230}$; $u_{232} = u_{230} + u_{231}$; $u_{233} = u_{231} + u_{232}$; $u_{234} = u_{232} + u_{233}$; $u_{235} = u_{233} + u_{234}$; $u_{236} = u_{234} + u_{235}$; $u_{237} = u_{235} + u_{236}$; $u_{238} = u_{236} + u_{237}$; $u_{239} = u_{237} + u_{238}$; $u_{240} = u_{238} + u_{239}$; $u_{241} = u_{239} + u_{240}$; $u_{242} = u_{240} + u_{241}$; $u_{243} = u_{241} + u_{242}$; $u_{244} = u_{242} + u_{243}$; $u_{245} = u_{243} + u_{244}$; $u_{246} = u_{244} + u_{245}$; $u_{247} = u_{245} + u_{246}$; $u_{248} = u_{246} + u_{247}$; $u_{249} = u_{247} + u_{248}$; $u_{250} = u_{248} + u_{249}$; $u_{251} = u_{249} + u_{250}$; $u_{252} = u_{250} + u_{251}$; $u_{253} = u_{251} + u_{252}$; $u_{254} = u_{252} + u_{253}$; $u_{255} = u_{253} + u_{254}$; $u_{256} = u_{254} + u_{255}$; $u_{257} = u_{255} + u_{256}$; $u_{258} = u_{256} + u_{257}$; $u_{259} = u_{257} + u_{258}$; $u_{260} = u_{258} + u_{259}$; $u_{261} = u_{259} + u_{260}$; $u_{262} = u_{260} + u_{261}$; $u_{263} = u_{261} + u_{262}$; $u_{264} = u_{262} + u_{263}$; $u_{265} = u_{263} + u_{264}$; $u_{266} = u_{264} + u_{265}$; $u_{267} = u_{265} + u_{266}$; $u_{268} = u_{266} + u_{267}$; $u_{269} = u_{267} + u_{268}$; $u_{270} = u_{268} + u_{269}$; $u_{271} = u_{269} + u_{270}$; $u_{272} = u_{270} + u_{271}$; $u_{273} = u_{271} + u_{272}$; $u_{274} = u_{272} + u_{273}$; $u_{275} = u_{273} + u_{274}$; $u_{276} = u_{274} + u_{275}$; $u_{277} = u_{275} + u_{276}$; $u_{278} = u_{276} + u_{277}$; $u_{279} = u_{277} + u_{278}$; $u_{280} = u_{278} + u_{279}$; $u_{281} = u_{279} + u_{280}$; $u_{282} = u_{280} + u_{281}$; $u_{283} = u_{281} + u_{282}$; $u_{284} = u_{282} + u_{283}$; $u_{285} = u_{283} + u_{284}$; $u_{286} = u_{284} + u_{285}$; $u_{287} = u_{285} + u_{286}$; $u_{288} = u_{286} + u_{287}$; $u_{289} = u_{287} + u_{288}$; $u_{290} = u_{288} + u_{289}$; $u_{291} = u_{289} + u_{290}$; $u_{292} = u_{290} + u_{291}$; $u_{293} = u_{291} + u_{292}$; $u_{294} = u_{292} + u_{293}$; $u_{295} = u_{293} + u_{294}$; $u_{296} = u_{294} + u_{295}$; $u_{297} = u_{295} + u_{296}$; $u_{298} = u_{296} + u_{297}$; $u_{299} = u_{297} + u_{298}$; $u_{300} = u_{298} + u_{299}$; $u_{301} = u_{299} + u_{300}$; $u_{302} = u_{300} + u_{301}$; $u_{303} = u_{301} + u_{302}$; $u_{304} = u_{302} + u_{303}$; $u_{305} = u_{303} + u_{304}$; $u_{306} = u_{304} + u_{305}$; $u_{307} = u_{305} + u_{306}$; $u_{308} = u_{306} + u_{307}$; $u_{309} = u_{307} + u_{308}$; $u_{310} = u_{308} + u_{309}$; $u_{311} = u_{309} + u_{310}$; $u_{312} = u_{310} + u_{311}$; $u_{313} = u_{311} + u_{312}$; $u_{314} = u_{312} + u_{313}$; $u_{315} = u_{313} + u_{314}$; $u_{316} = u_{314} + u_{315}$; $u_{317} = u_{315} + u_{316}$; $u_{318} = u_{316} + u_{317}$; $u_{319} = u_{317} + u_{318}$; $u_{320} = u_{318} + u_{319}$; $u_{321} = u_{319} + u_{320}$; $u_{322} = u_{320} + u_{321}$; $u_{323} = u_{321} + u_{322}$; $u_{324} = u_{322} + u_{323}$; $u_{325} = u_{323} + u_{324}$; $u_{326} = u_{324} + u_{325}$; $u_{327} = u_{325} + u_{326}$; $u_{328} = u_{326} + u_{327}$; $u_{329} = u_{327} + u_{328}$; $u_{330} = u_{328} + u_{329}$; $u_{331} = u_{329} + u_{330}$; $u_{332} = u_{330} + u_{331}$; $u_{333} = u_{331} + u_{332}$; $u_{334} = u_{332} + u_{333}$; $u_{335} = u_{333} + u_{334}$; $u_{336} = u_{334} + u_{335}$; $u_{337} = u_{335} + u_{336}$; $u_{338} = u_{336} + u_{337}$; $u_{339} = u_{337} + u_{338}$; $u_{340} = u_{338} + u_{339}$; $u_{341} = u_{339} + u_{340}$; $u_{342} = u_{340} + u_{341}$; $u_{343} = u_{341} + u_{342}$; $u_{344} = u_{342} + u_{343}$; $u_{345} = u_{343} + u_{344}$; $u_{346} = u_{344} + u_{345}$; $u_{347} = u_{345} + u_{346}$; $u_{348} = u_{346} + u_{347}$; $u_{349} = u_{347} + u_{348}$; $u_{350} = u_{348} + u_{349}$; $u_{351} = u_{349} + u_{350}$; $u_{352} = u_{350} + u_{351}$; $u_{353} = u_{351} + u_{352}$; $u_{354} = u_{352} + u_{353}$; $u_{355} = u_{353} + u_{354}$; $u_{356} = u_{354} + u_{355}$; $u_{357} = u_{355} + u_{356}$; $u_{358} = u_{356} + u_{357}$; $u_{359} = u_{357} + u_{358}$; $u_{360} = u_{358} + u_{359}$; $u_{361} = u_{359} + u_{360}$; $u_{362} = u_{360} + u_{361}$; $u_{363} = u_{361} + u_{362}$; $u_{364} = u_{362} + u_{363}$; $u_{365} = u_{363} + u_{364}$; $u_{366} = u_{364} + u_{365}$; $u_{367} = u_{365} + u_{366}$; $u_{368} = u_{366} + u_{367}$; $u_{369} = u_{367} + u_{368}$; $u_{370} = u_{368} + u_{369}$; $u_{371} = u_{369} + u_{370}$; $u_{372} = u_{370} + u_{371}$; $u_{373} = u_{371} + u_{372}$; $u_{374} = u_{372} + u_{373}$; $u_{375} = u_{373} + u_{374}$; $u_{376} = u_{374} + u_{375}$; $u_{377} = u_{375} + u_{376}$; $u_{378} = u_{376} + u_{377}$; $u_{379} = u_{377} + u_{378}$; $u_{380} = u_{378} + u_{379}$; $u_{381} = u_{379} + u_{380}$; $u_{382} = u_{380} + u_{381}$; $u_{383} = u_{381} + u_{382}$; $u_{384} = u_{382} + u_{383}$; $u_{385} = u_{383} + u_{384}$; $u_{386} = u_{384} + u_{385}$; $u_{387} = u_{385} + u_{386}$; $u_{388} = u_{386} + u_{387}$; $u_{389} = u_{387} + u_{388}$; $u_{390} = u_{388} + u_{389}$; $u_{391} = u_{389} + u_{390}$; $u_{392} = u_{390} + u_{391}$; $u_{393} = u_{391} + u_{392}$; $u_{394} = u_{392} + u_{393}$; $u_{395} = u_{393} + u_{394}$; $u_{396} = u_{394} + u_{395}$; $u_{397} = u_{395} + u_{396}$; $u_{398} = u_{396} + u_{397}$; $u_{399} = u_{397} + u_{398}$; $u_{400} = u_{398} + u_{399}$; $u_{401} = u_{399} + u_{400}$; $u_{402} = u_{400} + u_{401}$; $u_{403} = u_{401} + u_{402}$; $u_{404} = u_{402} + u_{403}$; $u_{405} = u_{403} + u_{404}$; $u_{406} = u_{404} + u_{405}$; $u_{407} = u_{405} + u_{406}$; $u_{408} = u_{406} + u_{407}$; $u_{409} = u_{407} + u_{408}$; $u_{410} = u_{408} + u_{409}$; $u_{411} = u_{409} + u_{410}$; $u_{412} = u_{410} + u_{411}$; $u_{413} = u_{411} + u_{412}$; $u_{414} = u_{412} + u_{413}$; $u_{415} = u_{413} + u_{414}$; $u_{416} = u_{414} + u_{415}$; $u_{417} = u_{415} + u_{416}$; $u_{418} = u_{416} + u_{417}$; $u_{419} = u_{417} + u_{418}$; $u_{420} = u_{418} + u_{419}$; $u_{421} = u_{419} + u_{420}$; $u_{422} = u_{420} + u_{421}$; $u_{423} = u_{421} + u_{422}$; $u_{424} = u_{422} + u_{423}$; $u_{425} = u_{423} + u_{424}$; $u_{426} = u_{424} + u_{425}$; $u_{427} = u_{425} + u_{426}$; $u_{428} = u_{426} + u_{427}$; $u_{429} = u_{427} + u_{428}$; $u_{430} = u_{428} + u_{429}$; $u_{431} = u_{429} + u_{430}$; $u_{432} = u_{430} + u_{431}$; $u_{433} = u_{431} + u_{432}$; $u_{434} = u_{432} + u_{433}$; $u_{435} = u_{433} + u_{434}$; $u_{436} = u_{434} + u_{435}$; $u_{437} = u_{435} + u_{436}$; $u_{438} = u_{436} + u_{437}$; $u_{439} = u_{437} + u_{438}$; $u_{440} = u_{438} + u_{439}$; $u_{441} = u_{439} + u_{440}$; $u_{442} = u_{440} + u_{441}$; $u_{443} = u_{441} + u_{442}$; $u_{444} = u_{442} + u_{443}$; u_{445}

On sait que l'équation $f(x)=0$ a une solution dans un intervalle I mais on ne sait pas la calculer explicitement. Cette équation est équivalente à une équation du type $g(x)=x$. On essaie alors d'appliquer la méthode du point fixe pour g , en introduisant une suite U définie par $U_0=a$ et $U_{n+1}=g(U_n)$. Si cette suite converge, alors sa limite L est la solution de $f(x)=0$.

Inégalité des accroissements finis

Considérons une fonction f dérivable sur un intervalle I . On suppose que $f'(x)$ reste compris entre deux réels m et M pour tout x de I .

Par exemple $m \leq f'(x) \leq M$. Dans ces conditions, quels que soient les réels a et b de I avec $a < b$, on a :

$$(b-a)m \leq f(b) - f(a) \leq (b-a)M$$

$$\text{d'où } m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M.$$

En particulier, si l'on connaît un majorant de la

valeur absolue de $f'(x)$:

$|f'(x)| \leq k$, alors on a :

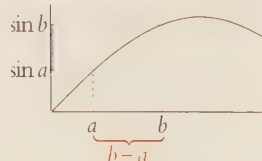
$$|f(b) - f(a)| \leq |b-a|k.$$

Prenons par exemple

$f(x) = \sin x$. Sa dérivée est :

$f'(x) = \cos x$ et pour tout x ,

$$|f'(x)| \leq 1.$$

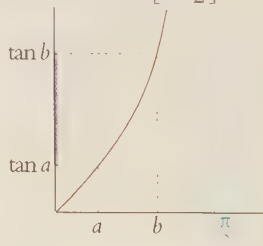


Donc, pour tous réels a et b , on a $|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$.

En revanche, avec $g(x) = \tan x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$g'(x) = 1 + \tan^2 x$, donc

$g'(x) > 1$, d'où $\tan b - \tan a > b - a$ quels que soient a et b de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. ■



Un exemple de calcul de racine

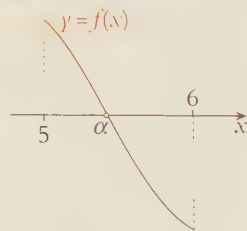
Soit à résoudre l'équation $2 \ln x + 2 - x = 0$.

$$f(x) = 2 \ln x + 2 - x.$$

$$f(5) > 0 \text{ et } f(6) < 0.$$

En raison de la dérivabilité de f et de ses variations, on peut affirmer que l'équation a une racine α et une seule sur $I =]5; 6[$.

Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) + x = 2 \ln x + 2$.



Le nombre α est la racine de $g(x) = x$ sur l'intervalle considéré. On se propose

de déterminer des approximations de α .

❶ Introduisons la suite U : $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = g(U_n)$.

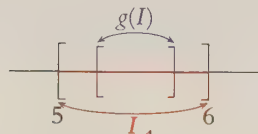
❷ Étude de g : $g'(x) = \frac{2}{x}$

positive sur I : g est croissante.

$$g(I) = [2 \ln 5 + 2; 2 \ln 6 + 2];$$

on a $g(I) \subset I$. Puisque

$U_0 \in I$, on montre par récurrence que tous les termes de U sont des éléments de l'intervalle I .



D'autre part $\frac{1}{3} < g'(x) < \frac{2}{5}$

pour tout x de I , donc

$$|g'(x)| < \frac{2}{5}.$$

Donc, d'après le théorème du point fixe, la suite U est convergente vers le réel α , solution de l'équation. Les termes U_n vont donner des approximations de cette racine.

③ En appliquant le théorème des accroissements finis sur I , on a :

$$|g(a) - g(b)| \leq \frac{2}{5} |a - b|$$

pour a et b éléments de I et en prenant $a = U_n$

et $b = \alpha$, on a $g(a) = U_{n+1}$ et $g(b) = \alpha$, d'où :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{5} |U_n - \alpha|.$$

L'écart entre le terme de la suite et la racine α est multiplié par 0,4 lorsque l'on passe au terme suivant de cette suite.

Démontrons par récurrence que pour tout n :

$$|U_n - \alpha| \leq (0,4)^n.$$

Par récurrence : pour

$$n = 0 : |U_0 - \alpha| \leq 1 :$$

la propriété est vraie.

Si l'on suppose que :

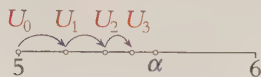
$$|U_p - \alpha| \leq (0,4)^p, \text{ on a, en}$$

utilisant la propriété des accroissements finis :

$$|g(U_p) - g(\alpha)| \leq (0,4)^p \times 0,4$$

donc :

$$|U_{p+1} - \alpha| \leq (0,4)^{p+1}.$$



La propriété est donc vraie pour tout n .

La suite W définie par $W_n = (0,4)^n$ est une suite géométrique convergente vers 0. On a $|U_n - \alpha| \leq W_n$, donc U_n est convergente vers le réel α , solution de l'équation.

Un autre exemple d'approximation

Pour résoudre l'équation $x = e^{-x^2}$, on introduit la fonction $f : f(x) = x - e^{-x^2}$.

On démontre sans peine qu'elle a une solution α avec $0,6 < \alpha < 0,7$. On introduit alors la fonction g telle que $g(x) = e^{-x^2}$.

Sur l'intervalle

$$I = [0,6 ; 0,7], g(I) \subset I.$$

D'autre part, $g'(x)$ est

④ Un autre

intérêt de cette démarche est de permettre de répondre à la question : « jusqu'à quel terme U_n doit-on aller pour obtenir, par exemple, une approximation de α à 0,001

près ? » $|U_n - \alpha| \leq 0,001$ est réalisé si $(0,4)^n \leq 0,001$ soit $n \ln 0,4 \leq \ln 0,001$ ou

$$n \geq -\frac{3 \ln 10}{\ln 0,4} \text{ soit } n \geq 8.$$

$U_8 = 5,356$: c'est une valeur approchée de α à 0,001 près. ■

négative et $|g'(x)| < 0,86$.

On introduit alors la suite

U_n telle que $U_0 = 0,7$ et

$$U_{n+1} = g(U_n).$$

L'inégalité des accroissements finis

appliquée à g sur I permet de montrer que

$$|U_n - \alpha| \leq (0,86)^n \times 0,1.$$

Les termes de U_n sont

des approximations de la

racine cherchée. ■

Résumons !

On est sûr que l'équation $f(x) = 0$ a une racine sur l'intervalle I . On remplace

alors cette équation par

$g(x) = x$; toute la difficulté

est de trouver une « bonne »

fonction g dont la dérivée

sera majorée sur I : à l'exa-

men, cette fonction est en

général donnée.

On applique, si possible,

la méthode du point fixe à

cette fonction g sur l'inter-

valle I : on introduit une

suite $U_0 = a$ et

$$U_{n+1} = g(U_n).$$

Si la valeur absolue de la

dérivée de g a la bonne

idée d'être majorée par k

($0 < k < 1$) sur I alors les

termes de U donnent

des approximations de

la racine cherchée :

la convergence est d'autant

meilleure que k est plus

proche de 0... ■

Les fonctions composées et les fonctions primitives

Envisageons les deux fonctions suivantes : $f : x \rightarrow 6x - 4$ et $g : x \rightarrow \sqrt{x}$. On peut les appliquer à la queue leu leu, par exemple : d'abord la fonction « f suivie de g ».

Prenons un exemple : $5 \xrightarrow{f} 26 \xrightarrow{g} \sqrt{26}$.

On écrit $g(f(5)) = \sqrt{26}$. Le réel $\sqrt{26}$ est l'image de 5 par la fonction composée notée $g \circ f$. De même avec la fonction « g suivie de f »

$$f(g(5)) = f(\sqrt{5}) = 6\sqrt{5} - 4.$$

Ce réel est l'image par $f \circ g$ du réel 5.

Le cas général

L'image par $g \circ f$ de x est l'image par g du réel $f(x)$, si elle existe : on écrit $g \circ f(x) = g(f(x))$.

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{g \circ f} \end{array}$$

$g \circ f$ est la fonction composée de « f suivie de g »
Attention à la notation $g \circ f$: f est la première fonction, et g est la seconde.
Dans le cas de nos exemples :

$$g \circ f(x) = \sqrt{6x - 4} \text{ et } f \circ g(x) = 6\sqrt{x} - 4. \blacksquare$$

La dérivée d'une fonction composée

Si la fonction f est dérivable en a , et si la fonction g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

Autrement dit :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

On retient cette formule en pensant que la dérivée de $g \circ f$ s'obtient ainsi : on calcule d'abord la dérivée de g , en faisant attention

que la variable s'y appelle $f(x)$ et on multiplie par la dérivée de f , où la variable s'y appelle x .

Exemple

$$f(x) = 6x - 4 \quad f'(x) = 6.$$

$$g(x) = \sqrt{x} \text{ et } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

si $x > 0$.

$$\text{D'où } (g \circ f)'(x) = 6 \frac{1}{2\sqrt{6x - 4}}$$

avec $x > \frac{2}{3}$ et

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 6$$

avec $x > 0$. ■

L'ensemble de définition de $g \circ f$

Pour le déterminer, il faut d'abord déterminer celui de définition de f , puis celui de g , selon les valeurs prises par $f(x)$. Ainsi, sur l'exemple donné, f est définie sur $\mathbb{R}$ et g est

définie à condition que $f(x) \geq 0$, c'est-à-dire $6x - 4 \geq 0$, d'où $x \geq \frac{2}{3}$:

$g \circ f$ est définie sur $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$. En revanche, $f \circ g$ est définie pour $[0; +\infty[$. ■

Cas particulier

Soit U une fonction dérivable. Si f s'écrit $f = U^p$ alors la dérivée de f est $f' = p U' \cdot U^{p-1}$ pour tout rationnel p . Attention aux conditions sur U si p n'est pas un naturel. ■

Les limites d'une fonction composée

Il convient de tenir compte à la fois de la limite éventuelle de f et de celle de g .

Par exemple :

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow L} g(x) = K,$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = K.$$

le signe (*) pouvant être remplacé par un réel a ou $(+\infty)$ ou encore par $(-\infty)$, de même pour L et pour K . ■

La fonction primitive

Si la fonction F admet la fonction f comme dérivée sur l'intervalle I , alors on dit que F est une primitive de f sur cet intervalle.

Il est important de se rappeler que l'expression :

« F est une primitive de f sur I » signifie que f est la dérivée de F sur I .

$F \xleftarrow{\text{primitive de}} f$
 $\xrightarrow{\text{dérivée de}}$

On peut aussi se représenter le lien existant entre la primitive et la dérivée par des flèches. ■

Des propriétés générales

Si F est une primitive de f sur I , alors $F + C$ en est une autre, C étant une constante quelconque et toute autre primitive de f s'écrit sous la forme $F + C$.

• Toute fonction dérivable sur I admet des primitives sur cet intervalle.

• Si F et G sont des primitives respectivement de f et de g , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$, et kF est une primitive de kf .

• Si f admet des primitives sur I , alors pour tout réel β et tout réel α de I , il existe une unique primitive H de f telle que $H(\alpha) = \beta$. ■

Pour déterminer une primitive

Il suffit de savoir « lire » à l'envers les formules de dérivées, avec quelques astuces.

Fonction f	Primitives F	
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	(sur $\mathbb{R}$)
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	($n \neq -1$)
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$	($x \neq 0$)
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	($x \neq 0$)
$f(x) = \cos(ax + b)$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$	(sur $\mathbb{R}$)
$f(x) = \sin(ax + b)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$	(sur $\mathbb{R}$)
$f(x) = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
Pour tout rationnel p autre que -1		
$f(x) = x^p$	$F(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$	

À retenir !

Soit U une fonction dérivable sur I .

Si f s'écrit sous la forme $f = U'U^p$ alors f admet des primitives F sur I :

• si $p \neq -1$,
on a $F = \frac{1}{p+1} U^{p+1} + C$;

• si $p = -1$: $f = \frac{U'}{U}$, alors $F = \ln |U| + C$.

En particulier :

si $f = \frac{U'}{U^2}$, alors $F = -\frac{1}{U} + C$. ■

On ne sait pas écrire au moyen de puissances les primitives de $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ par exemple. On sait pourtant qu'elles existent.

La fonction logarithme népérien

La fonction « logarithme népérien », notée $\ln$ (ou Log), est la primitive

de la fonction : $x \rightarrow \frac{1}{x}$

définie sur $]0; +\infty[$, qui prend la valeur 0 en $x = 1$. Donc $\ln 1 = 0$.

L'ensemble de définition est l'intervalle $]0; +\infty[$.

Sa dérivée sur cet intervalle

est $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Ses variations : la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Cette propriété a pour conséquence que pour deux réels

strictement positifs

quelconques a et b :

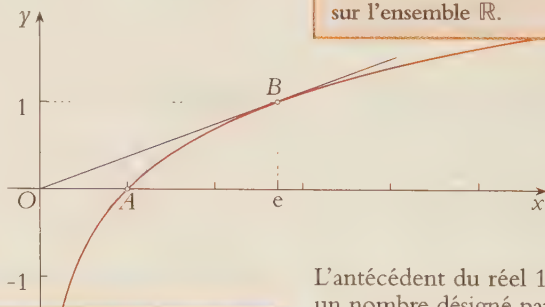
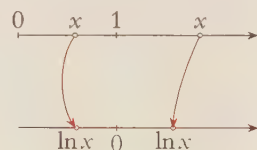
Si $a = b$, alors $\ln a = \ln b$ et

réciroquement.

Si $a < b$, alors $\ln a < \ln b$ et réciproquement.

Si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$.

Si $x > 1$, alors $\ln x > 0$. ■



Les limites de $\ln$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0.$$

Compte tenu des variations et des limites pour cette fonction, la fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de l'intervalle $]0; +\infty[$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

Un peu d'histoire

Le xvi^{e} siècle connaît un développement important du commerce, de l'astronomie appliquée à la navigation, toutes activités humaines qui posent des problèmes de calcul.

Vers 1588, le Suisse Bürgi a le premier l'idée des logarithmes. C'est

l'Écossais Napier – devenu Neper en français – qui publie à Edimbourg le premier traité sur les logarithmes et une table de calcul. L'Anglais Briggs publie ensuite une table de logarithmes décimaux. La première règle à calcul apparaît en Angleterre vers 1624.

L'antécédent du réel 1 est un nombre désigné par e : $\ln e = 1$; e est environ égal à 2,718. C'est ce que l'on nomme la base des logarithmes népériens. La courbe représentative de la fonction admet comme asymptote l'axe yy' . La tangente au point $A(1; 0)$ a pour équation $y = x - 1$.

La tangente au point $B(e; 1)$ est la droite d'équation $y = \frac{1}{e}x$. ■

Une propriété fondamentale

Pour tout nombre strictement positif k , la fonction $x \rightarrow \ln(kx)$ a aussi pour dérivée $x \rightarrow \frac{1}{x}$, ce qui veut dire que la différence $\ln(kx) - \ln x$ est une constante m :
 $\ln(kx) - \ln x = m$.
 En posant : $x = 1$,
 on a : $\ln(k) = m$,
 donc : $\ln(kx) = \ln x + \ln k$.
 Quels que soient les réels strictement positifs A et B :

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B$$

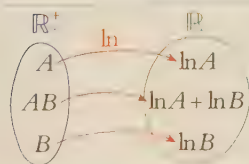
c'est la propriété fondamentale de cette fonction, qui en a fait un outil de calcul très précieux avant l'ère des calculatrices et des ordinateurs : le calcul d'un produit était remplacé par une addition de logarithmes. ■

Conséquences

$$\ln \frac{A}{B} = \ln A - \ln B$$

$$\ln \frac{1}{B} = -\ln B$$

$$\ln(A^n) = n \ln A$$



Les fonctions composées avec ln

La fonction composée f définie par $f(x) = \ln |u(x)|$ est définie si u est définie à la condition que $u(x) \neq 0$. Sa dérivée est $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. On étudie ses limites en examinant d'abord les limites de la fonction u .

Exemples

$$\text{Soit } g(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

$$\text{Posons } u(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

La fonction g est définie pour $u(x) \neq 0$ et $|x| \neq 1$, soit $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

$$\text{Sa dérivée est } g'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}.$$

La dérivée $g'(x)$ est positive sur $] -1 ; 1[$; elle est négative sur $] -\infty ; -1[$ et sur $] 1 ; +\infty[$.

La limite de u en $+\infty$ ou $-\infty$ est 1, donc la limite de g est $\ln 1$, soit 0.

Lorsque x tend vers 1, u tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ donc g tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers -1 , $u(x)$ tend vers 0, donc $\ln |u(x)|$ a pour limite $-\infty$. ■

Les fonctions logarithmes de « base a »

Soit un nombre réel a différent de 1 et strictement positif.
 La fonction logarithme de base a est notée $\log_a$. Elle est définie par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Elle est définie sur $]0 ; +\infty[$ comme la fonction $\ln$.

$\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$. Elle possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien, en particulier :
 $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$
 $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$.

● La fonction logarithme de base dix ($\log$ décimal) est notée $\log$ avec $\log 10 = 1$ et $\log 10^p = p$.
 Ainsi $\log 100 = 2$,
 $\log 0,1 = -1$;
 $\log 0,01 = -2$;
 $\log 0,004 = \log(4 \times 10^{-3}) = 2 \log 2 - 3$.

Elle est utilisée en chimie dans les problèmes de pH : le pH d'une solution est égal à l'opposé du logarithme décimal de la concentration en ions hydrogène. Elle est utilisée aussi dans certains problèmes de représentation utilisant un repère semi-logarithmique. ■

En économie, en démographie et dans les autres sciences, on parle souvent de croissance exponentielle pour évoquer une croissance rapide. C'est dire l'importance primordiale de ces fonctions dans les applications... et pour la culture générale!

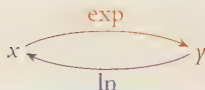
La fonction $x \mapsto e^x$

La fonction logarithme népérien est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet une bijection réciproque : c'est la fonction exponentielle naturelle ou encore exponentielle de base e , notée « exp ».

$$y = \exp x \text{ équivaut à } x = \ln y \text{ avec } y > 0.$$

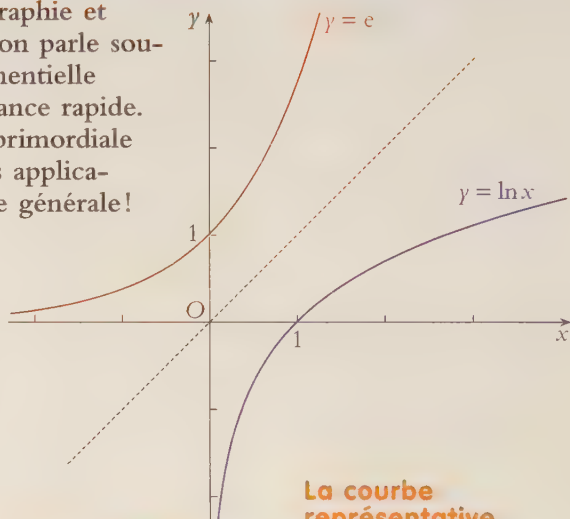
On a $\ln e = 1$, donc $\exp 1 = e$, et $\ln e^2 = 2$, donc $\exp 2 = e^2$. Pour tout réel x , on pose par commodité d'écriture :

$$\exp x = e^x$$



Conséquences

Quels que soient les réels a et b , on a :
 $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.
 $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.



Les propriétés générales

Elles se déduisent immédiatement de celles de la fonction logarithme népérien.

- La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout x , e^x est strictement positif.
- Sa dérivée est égale à e^x : $(e^x)' = e^x$.
- Cette fonction est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ■

La courbe représentative

Les fonctions $\ln$ et $\exp$ étant des bijections réciproques, les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal, ce qui se présente sous la configuration ci-dessus. ■

Les propriétés algébriques

Pour tous réels a et b , on a :

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^a)^p = e^{ap}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x) = 0.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = 1.$$

Pour h « voisin de 0 », une valeur approchée de e^h est $1 + h$. ■

$$e^h \approx 1 + h.$$

Fonction composée avec une fonction exponentielle

La fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est définie à condition que $u(x)$ soit elle-même définie. Sa dérivée est $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$. En ce qui concerne les limites, il convient tout d'abord de rechercher les limites de la fonction u et d'utiliser les théorèmes sur les limites. Soit $g(x) = e^{-2x+4}$.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 4) = -\infty,$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 4) = +\infty.$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

D'autre part :

$$g'(x) = -2e^{-2x+4}. \blacksquare$$

Pour $a > 0$ et a non égal à 1, la fonction $x \rightarrow a^x$ est la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a : $y = a^x$ équivaut à $x = \log_a y$. Or $e^{\ln a} = a$, donc on a $a^x = e^{x \ln a}$.

Cette nouvelle fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $\ln a \times e^{x \ln a}$. Ses variations et ses limites dépendent donc du nombre a . Selon que $a > 1$ ou $a < 1$, cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ou strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 1$				
x	$-\infty$	0	$+\infty$	
a^x	0	↗ 1	↗ $+\infty$	

Si $a < 1$				
x	$-\infty$	0	$+\infty$	
a^x	$+\infty$	↘ 1	↘ 0	

Les fonctions exponentielles ont une certaine importance dans diverses applications, en particulier en biologie, en économie, en probabilité...

Exemple 1

Phénomène radioactif.

Le radon est un gaz radioactif qui se désintègre avec le temps. Si m est une masse de radon un certain jour pris pour

origine, x jours plus tard sa masse $f(x)$ est donnée par $f(x) = m e^{-0,18x}$ (x en jours).

L'étude de cette fonction permet d'étudier l'évolution de cette masse au cours du temps.

En particulier, on s'intéresse au temps au bout duquel la masse a diminué de moitié (demi-vie) : il suffit de résoudre l'équation :

$$m e^{-0,18x} = \frac{1}{2} m$$

d'où l'on tire $-0,18x = -\ln 2$, donc

$$x = \frac{\ln 2}{0,18}, \text{ ce qui donne environ } x = 3,85 \text{ jours.}$$

Exemple 2

Destruction de bactéries.

Certaines bactéries sont détruites par un traitement au phénol.

Le nombre $N(x)$ de survivantes au bout de x heures est donné par une fonction du type $N(x) = K C^x$.

Si au départ on a dénombré 424 bactéries et s'il en reste 378 au bout d'une heure, on peut déterminer les constantes K et C .

On a donc $378 = 424 C$, d'où $C = 378 \div 424$, soit $C \approx 0,892$ et $N(x) = 424 \times 0,892^x$. ■

La dérivée logarithmique facilite certains calculs. Elle est surtout utilisée en économie, en particulier en relation avec la fonction exponentielle.

Les questions d'accroissements

Un économiste s'intéresse à l'évolution d'un prix p en fonction du temps, entre l'année a et l'année b . Pour ce prix p , entre les dates a et b : $p(b) - p(a)$ est l'accroissement absolu.

$$\frac{p(b) - p(a)}{b - a}$$

est l'accroissement moyen (vitesse moyenne d'augmentation).

$$\frac{p(b) - p(a)}{p(a)}$$

est l'accroissement relatif (pourcentage d'augmentation).

$$\frac{p(b) - p(a)}{p(a)(b - a)}$$

est l'accroissement moyen relatif.

Exemple

Prenons deux articles E et H : l'année a , E vaut 20 € et H vaut 80 € ; l'année b , E vaut 25 € et H vaut 85 €. L'accroissement absolu est le même : 5 €. Bien que les prix initiaux soient différents, les deux articles augmentent de 5 €.



L'accroissement moyen est également le même :

$$\frac{5}{b - a}$$

En revanche, les accroissements moyens relatifs sont différents :

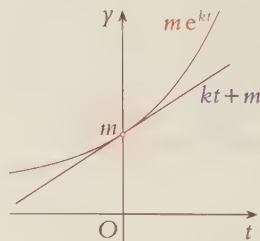
$$\frac{5}{(b - a)} \text{ et } \frac{5}{(b - a)}$$

Le premier est 4 fois plus grand que le second. Cette différence justifie l'introduction de cette dernière notion. ■

Des constantes

Si la croissance instantanée absolue est constante, alors la fonction p est une fonction affine :

$$p(t) = kt + m.$$



Si la croissance instantanée relative est constante, alors la fonction p est une fonction exponentielle :

$$p(t) = me^{kt}. \quad \blacksquare$$

Questions de croissance instantanée

Supposons la fonction p dérivable avec $p(a) \neq 0$. Posons $b = a + h$.

● La limite, lorsque h tend vers 0, de l'accroissement moyen est la croissance instantanée absolue en a de p : c'est le nombre dérivé $p'(a)$.

● La limite, lorsque h tend

vers 0, de l'accroissement moyen relatif s'appelle croissance instantanée relative en a de p : c'est le quotient $\frac{p'(a)}{p(a)}$.

On l'appelle dérivée logarithmique de p en a . Si p est positive, c'est la dérivée de $\ln p$ en a , d'où son nom.

Des propriétés de la dérivée logarithmique

Soit u et v deux fonctions dérivables et non nulles sur un intervalle I .

● La dérivée logarithmique du produit de ces fonctions est la somme de leurs dérivées logarithmiques :

$$\left(\frac{uv}{u}\right)' = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

● La dérivée logarithmique d'un quotient est la différence des dérivées logarithmiques :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

Exemple d'utilisation

Un prix P de Q objets vendus au prix unitaire U

est : $P = Q \times U$, U et Q étant des fonctions du temps. On a :

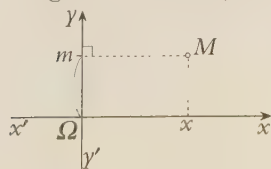
$$\frac{P'}{P} = \frac{Q'}{Q} + \frac{U'}{U}.$$

La croissance instantanée relative de P est la somme des deux croissances instantanées relatives et non leur produit. ■

Repère et papier semi-logarithmique

On veut représenter un point M de coordonnées x et y .

Sur l'axe des abscisses, la graduation reste une graduation régulière. Sur l'axe yy' , on fabrique une graduation de telle sorte que Ωm soit proportionnelle au logarithme de l'ordonnée y du point M (en économie on utilise les *logarithmes décimaux*).



Sur un papier « semi-log » la graduation est déjà préparée.

A l'origine Ω , on marque $1 : \log 1 = 0$.

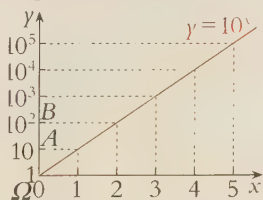
Le point K a une ordonnée $a : \Omega K = \log a$.

Le point L d'ordonnée a^2 est tel que :

$$\Omega L = 2 \Omega K$$

puisque $\log(a^2) = 2 \log a$.
Le point S d'ordonnées $\sqrt{a}$ est tel que : $\Omega S = \frac{1}{2} \Omega K$

Observons le papier semi-logarithmique (log décimaux) :



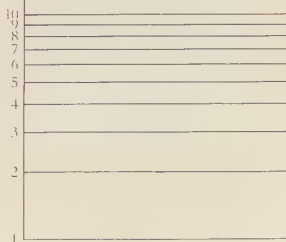
Sur l'axe yy' est marqué 1 à l'origine Ω . On marque 10 en face d'un point $A : \Omega A = \log 10 = 1$.

C'est l'unité de longueur sur cet axe. En doublant ΩA , on marque le point B d'ordonnée 10^2 :

$$\log 10^2 = 2.$$

De proche en proche, on rencontre les points d'ordonnées $10^3 ; 10^4 ;$

$10^5 ; \dots ; 10^n \dots$ régulièrement espacés sur yy' . Il reste à marquer les graduations intermédiaires. La représentation graphique de la fonction $x \rightarrow 10^x$ est ici une droite. Ce type de papier permet de représenter des fonctions qui prennent des valeurs très grandes. Il est aussi utilisé chaque fois que l'on veut étudier les variations d'une grandeur en pourcentage, les variations d'un taux, des rythmes annuels, une comparaison de ces grandeurs en valeur absolue n'ayant pas beaucoup d'intérêt. ■



Certaines équations ou inéquations peuvent comporter une fonction logarithme ou une exponentielle : la technique de résolution est alors particulière.

Avec la fonction logarithme

Exemple 1

Résoudre l'équation
(E1) : $\ln(x+1) + \ln(x+5) - \ln 96$,
puis l'équation

(E2) : $\ln(x+1)(x+5) - \ln 96$.

Pour (E1), il faut que

$x > -1$ et $x > -5$

soit $x \in]-1; +\infty[$.

Or $\ln(x+1) + \ln(x+5) =$
 $\ln(x+1)(x+5)$,

d'où $(x+1)(x+5) = 96$

équation du second degré

dont les solutions sont 7

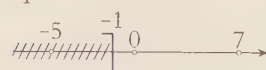
et -13. Or seul 7 appar-

tient à l'intervalle

$] -1; +\infty[$: c'est l'unique

solution de la première

équation.



Pour (E2), il faut

$(x+1)(x+5) > 0$, soit

$x \in]-\infty; -5[\cup]-1; +\infty[$.

Les deux réels 7 et -13

appartenant à cet

ensemble sont les deux

racines de cette seconde

équation.



Exemple 2

Résoudre l'équation

(E3) : $\ln(x-1) + \ln(x+1) = 3$.

Il faut que $x > 1$:

l'équation équivaut alors

à $\ln(x^2 - 1) = 3$, soit

$x^2 - 1 = e^3$, donc

les solutions sont

$\sqrt{e^3 + 1}$ et $-\sqrt{e^3 + 1}$

et seule la première

est compatible avec

la condition $x > 1$.

Exemple 3

Résoudre l'inéquation

$\ln(x+1) + \ln(x+5) \leq \ln 96$

puis $\ln(x+1)(x+5) \leq \ln 96$.

Pour la première, on doit

avoir $x > -1$.

$(x+1)(x+5) \leq 96$ admet

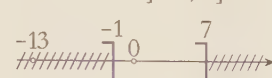
comme ensemble de

solutions $[-13; 7]$, ce qui,

avec la condition $x > -1$,

conduit à l'ensemble

des solutions $] -1; 7]$.



Pour la seconde

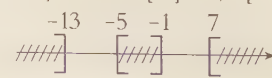
on a la condition :

$x \in]-\infty; -5[\cup]-1; +\infty[$

avec $x \in [-13; 7]$, d'où

l'ensemble des solutions

$x \in [-13; -5[\cup]-1; 7]$.



Avec la fonction $\ln$,
le principe de réso-
lution est le suivant :

$\ln a$ existe si et

seulement si $a > 0$.

$\ln a = \ln b$

équivaut à $a = b$.

$\ln a < \ln b$

équivaut à $a < b$.

Attention à ces inter-
sections d'intervalles !

Exemple 4

Résoudre l'équation

$4\ln^2 x - 5\ln x + 1 = 0$

puis l'inéquation

$4\ln^2 x - 5\ln x + 1 > 0$. On

a déjà la condition $x > 0$.

On utilise le changement

de variable $\ln x = U$.

L'équation équivaut

alors au système

$4U^2 - 5U + 1 = 0$ et

$U = \ln x$. On obtient :

$U = 1$ et $U = \frac{1}{4}$ d'où $x = e$

ou $x = e^{\frac{1}{4}}$. Pour l'iné-

quation, on doit résoudre :

$4U^2 - 5U + 1 > 0$ et

$U = \ln x$.

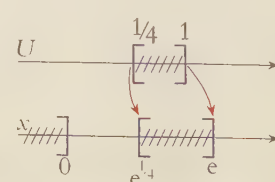
Le trinôme est positif

pour $U < \frac{1}{4}$ ou $U > 1$,

d'où, en raison de la

croissance de la fonction

$\ln : 0 < x < e^{\frac{1}{4}}$ ou $x > e$.



Exemple 5

Résoudre le système

$$\begin{cases} 5 \ln x + 2 \ln y = 8 \\ 4 \ln x - 3 \ln y = 11. \end{cases}$$

On a tout d'abord les conditions $x > 0$ et $y > 0$.

En posant $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, on doit résoudre,

$$\begin{cases} 5X + 2Y = 8 \\ 4X - 3Y = 11; \end{cases}$$

on obtient $X = 2$ et $Y = -1$,
d'où $x = e^2$ et $y = \frac{1}{e}$. ■

Penser « conditions » et « changement de variable ».

Résolution avec la fonction exponentielle

Il faut toujours avoir à l'esprit les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} e^a &= e^b \text{ équivaut à } a = b. \\ e^a < e^b &\text{ équivaut à } a < b. \end{aligned}$$

Exemple 1

Résoudre l'équation :

$$e^{4x} \times e^{2x+1} = 3.$$

puis l'inéquation :

$$e^{4x} \times e^{2x+1} > 3.$$

Le premier membre s'écrit plus simplement :

$$e^{4x+2x+1} \text{ soit } e^{6x+1}.$$

L'équation équivaut donc à $6x + 1 = \ln 3$ soit :

$$x = \frac{\ln 3 - 1}{6}.$$

L'inéquation équivaut à :

$$6x + 1 > \ln 3$$

$$\text{soit } x > \frac{\ln 3 - 1}{6}.$$

Exemple 2

Résoudre l'équation

$$9e^{-x} - 4e^x = 0$$

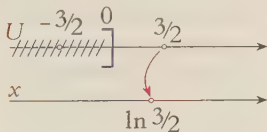
puis l'inéquation

$$9e^{-x} - 4e^x \leq 0.$$

On pose $U = e^x$: on doit avoir $U > 0$. L'équation devient $\frac{9}{U} - 4U = 0$, d'où

$9 - 4U^2 = 0$ dont les racines sont $\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2}$:

seule la première valeur de U convient car $U > 0$. La solution de l'équation en x est alors $\ln \frac{3}{2}$.



Pour l'inéquation, on doit avoir $9 - 4U^2 \geq 0$ avec $U > 0$, soit $0 < U \leq \frac{3}{2}$ donc $0 < e^x \leq \frac{3}{2}$ et enfin $x \leq \ln \frac{3}{2}$.

Exemple 3

Résoudre l'équation :

$$e^{3x} - 19e^x + 30 = 0$$

puis l'inéquation :

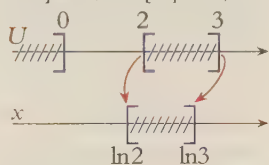
$$e^{3x} - 19e^x + 30 > 0.$$

On pose encore $e^x = U$.On doit résoudre d'une part $U^3 - 19U + 30 = 0$,

et d'autre part

$U^3 - 19U + 30 > 0$ avec $U > 0$. Le polynôme en U se factorise en $(U - 2)(U - 3)(U + 5)$. Pour l'équation, on a les seules solutions $U = 2$ et $U = 3$, d'où pour l'équation en x : $x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$.

Pour l'inéquation, on trouve $U \in]0; 2[\cup]3; +\infty[$ et pour l'inéquation en x : $x \in]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 3; +\infty[$.

**Exemple 4**

Résoudre :

$$e^{2x+2} - \frac{1}{2}e^{x+2} - \frac{3}{2}e^2 = 0.$$

On simplifie par e^2 . On pose $e^x = U$ avec $U > 0$. On est ramené à la résolution de $2U^2 - U - 3 = 0$ et $U > 0$. La solution unique de l'équation donnée est $\ln \frac{3}{2}$.

Exemple 5

Résoudre le système

$$\begin{cases} e^x e^{2y} - e^{\frac{5}{2}} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

On obtient $x + 2y = \frac{5}{2}$ et $2xy = 1$, d'où les solutions $(\frac{1}{2}; 1)$ et $(2; \frac{1}{4})$. ■

Penser en termes de « changement de variable ».

On connaît déjà les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n entier, on connaît aussi $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Voyons maintenant la fonction $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \neq 0$.

Introduction

La fonction $f : x \mapsto x^n$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ lorsque n est pair. En revanche, pour tout n , cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ puisque $f'(x) = nx^{n-1}$. D'autre part $f(0) = 0$ et f tend vers $(+\infty)$ lorsque x tend vers $(+\infty)$. Cette fonction « puissance n-ième » est donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$: la bijection réciproque s'appelle « racine n-ième » notée avec le symbole $\sqrt[n]{x}$. ■

a et b étant deux réels positifs quelconques
 $b = \sqrt[n]{a}$ équivaut à $a = b^n$.

La fonction $g : x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Elle est définie sur $\mathbb{R}^+$.

On note $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

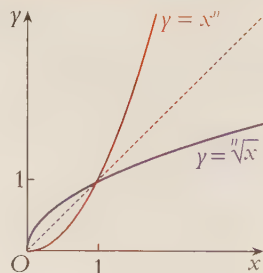
Cette fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Sa dérivée est

$$g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

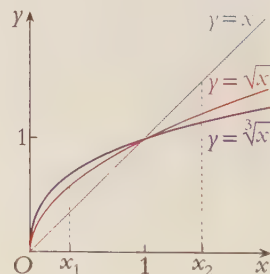
C'est-à-dire que pour calculer cette dérivée, on utilise la même démarche que pour la dérivée de $x \mapsto x^k$ avec k entier. ■

La représentation graphique



La courbe de $f : x \mapsto x^n$ et celle de $g : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes dans un repère orthonormal. L'observation des courbes de $y = \sqrt{x}$ et $y = \sqrt{x}$ permet

de retenir les inégalités suivantes : pour $n > 2$:
 si $0 < x < 1$: $\sqrt[n]{x} > \sqrt{x} > x$;
 si $x > 1$: $\sqrt[n]{x} < \sqrt{x} < x$.



Comparaison de $\sqrt{x}$ et $\sqrt[n]{x}$ pour $n \geq 2$. ■

Des propriétés algébriques

Pour $a > 0$: $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.

La notation $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

conduit maintenant

à la notation $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$.

D'autre part, l'inverse de

ce nombre s'écrit $a^{-\frac{p}{n}}$

si bien que l'on donne

un sens à l'écriture a^r ,
 r étant un rationnel quelconque. ■

Pour tous rationnels r et s , on a :

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

L'exposant réel

On peut alors donner un sens à x^α avec un « exposant » α réel non nul quelconque.

Si x est un réel strictement positif, on a : $x = e^{\ln x}$.

D'où pour tout réel α non nul, on a : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et cette écriture permet de déterminer toutes les propriétés de la fonction $x \rightarrow x^\alpha$. ■

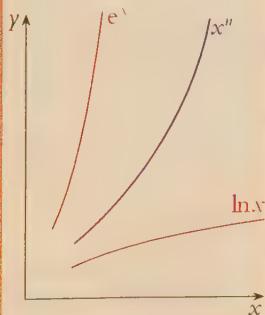
Croissances à $+\infty$

Supposons un rationnel positif quelconque p , lorsque x tend vers $+\infty$, les quotients :

$$\frac{e^x}{x^p}; \frac{e^x}{\ln x}; \frac{x^p}{\ln x}$$

tendent vers $+\infty$.

L'exponentielle « croît plus vite » qu'une puissance et une puissance « croît plus vite » que le logarithme.



Des conséquences pour d'autres limites

Lorsque x tend vers 0 (par valeurs positives) le produit $x^p \ln x$ ($p > 0$) a pour limite 0.

Lorsque x tend vers $-\infty$ le produit $x^p e^x$

tend vers 0.

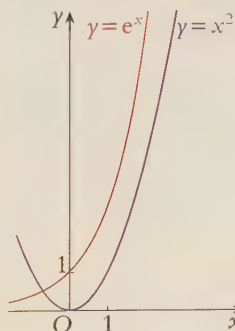
Ces résultats particuliers permettent de conclure quant aux limites pour certaines « formes indéterminées ».

La comparaison des croissances

Les trois fonctions $f: x \rightarrow x^n$, $g: x \rightarrow \ln x$ et $h: x \rightarrow e^x$ sont trois fonctions qui tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Il se pose alors des problèmes de limites à $+\infty$ lorsque l'on envisage un quotient de deux de ces fonctions.

Exemple

● Envisageons la courbe de $y = e^x$ et celle de $y = x^2$.

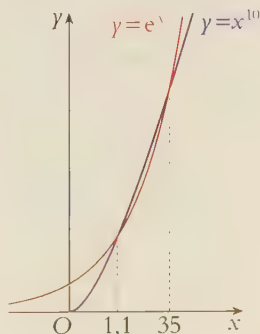


Elles ont en commun un seul point. Mais pour $x > 0$, la courbe de la première reste au-dessus de celle de la seconde et s'en éloigne de plus en plus

lorsque x augmente.

Le quotient $\frac{e^x}{x^2}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

● Si l'on considère maintenant la courbe $y = e^x$ et celle de $y = x^{10}$, on démontre que ces courbes ont trois points en commun : mais bien que $x \rightarrow x^{10}$ ait une croissance très rapide lorsque x augmente, pour $x > 36$ la courbe de la première passe au-dessus de celle de la seconde. Autrement dit le quotient $\frac{e^x}{x^{10}}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. ■

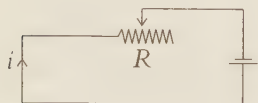


Il est rare qu'une grandeur ne dépende que d'une seule variable. Par exemple, si l'on chauffe une poutrelle métallique, son allongement dépend à la fois de sa longueur et de la température, donc de deux variables.

Des exemples

La physique ne manque pas de formules dans lesquelles une quantité dépend de plusieurs autres.

Un courant continu d'intensité i (en ampères) dans une résistance R (en ohms) pendant un temps t (en secondes) dégage une quantité de chaleur donnée par :

$$Q = Ri^2 t.$$


On a de la sorte une fonction de trois variables i , R et t .

$$F : (i, R, t) \rightarrow Q = F(i, R, t).$$

En économie, dans un certain contexte, la demande Z de viande de bœuf dépend à un moment donné, d'une part, du prix X du kilo de cette viande, d'autre part, du prix Y du kilo de viande de porc au même moment :

$$Z = 63,3 - 1,9X + 0,2Y.$$

On a, là encore, une fonction de deux variables p :

$$(X, Y) \rightarrow Z = p(X, Y).$$

En géométrie dans l'espace, considérons, dans un repère orthonormal de l'espace, la sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

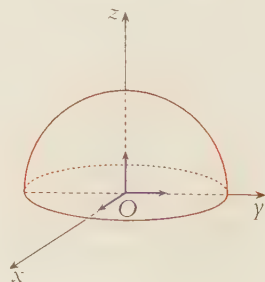
$$\text{On a } z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$\text{ou } z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

La fonction $G : (x, y) \rightarrow z$

$$G(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

a pour représentation graphique la demi-sphère ($R=3$) de l'espace, de centre O et de rayon 3 correspondant à $z \geq 0$.



Une fonction g de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction de deux variables réelles x et y ; on écrit g :

$$(x; y) \rightarrow z = g(x; y).$$

Même démarche pour une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec trois variables...

Dans l'espace, l'équation $z = g(x, y)$ est en général l'équation d'une surface dans un repère donné.

La fonction H définie par

$$H(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

a pour représentation graphique la demi-sphère symétrique par rapport au plan xOy .

En géométrie dans l'espace, l'équation $6x - 2y - z = 0$ est l'équation d'un plan.

Une équation équivalente est $z = 6x - 2y$.

La fonction :

$$(x, y) \rightarrow 6x - 2y$$

permet de calculer la cote z d'un point de ce plan connaissant x et y . ■

Pour une fonction de deux variables $g(x, y)$, on peut lui associer deux fonctions à une variable.

Si y est fixé $y = k$, seul x varie. On a la fonction :
 $f_1 : x \rightarrow g(x, k)$.

Si x est fixé $x = m$, seul y varie. On a la fonction :
 $f_2 : y \rightarrow g(m, y) = g(m, y)$.

Si la fonction f_1 (fonction de x) est dérivable sur I , sa dérivée $f'_1(x)$ est la dérivée partielle de g par rapport à la variable x .

On écrit : $\frac{\partial g}{\partial x} = f'_1(x)$.

Si la fonction f_2 (fonction de y) est dérivable sur J , sa dérivée $f'_2(y)$ est la dérivée partielle de g par rapport à la variable y .

On écrit : $\frac{\partial g}{\partial y} = f'_2(y)$.

Pour le calcul d'une dérivée partielle par rapport à l'une des variables, il suffit de ne pas tenir compte des autres variables et de les considérer comme des constantes !

Et s'il y a trois variables, on en fixe deux.

Exemples

• Avec la fonction Q définie par :

$$Q = Ri^2 t = F(i, R, t)$$

on a $\frac{\partial F}{\partial R} = i^2 t$;

$$\frac{\partial F}{\partial i} = 2Rit ; \frac{\partial F}{\partial t} = Ri^2.$$

• Avec la fonction

$$z = g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$\text{on a } \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

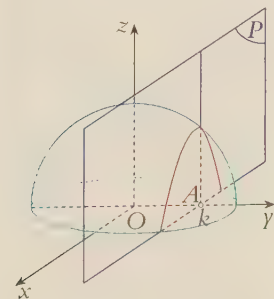
$$\text{et } \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}. \blacksquare$$

L'application à la géométrie

Reprenons la fonction g définie par :

$$z = g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

La surface d'équation $z = g(x, y)$ est la demi-sphère de centre O et de rayon 3 avec $z \geq 0$.



Si on fixe $y : y = k$ ($k \leq 3$) les équations $y = k$ et

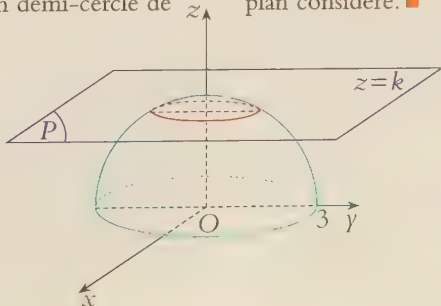
$$z = g(x, k) = \sqrt{9 - x^2 - k^2}$$

sont représentées, dans le plan d'équation $y = k$, par un demi-cercle de centre le point $A(0, k, 0)$, intersection de la demi-sphère et du plan.

Si on fixe $x : x = m$ ($m \leq 3$), les équations $x = m$ et $z = g(m, y) = \sqrt{9 - m^2 - y^2}$ sont représentées, dans le plan d'équation $x = m$, par un demi-cercle de

centre le point $B(m; 0; 0)$, intersection de la sphère et du plan.

L'équation $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k$ est celle de la courbe intersection de la demi-sphère avec le plan d'équation $z = k$: si $k < 3$, cette courbe, que l'on appelle ligne de niveau k , est un cercle situé dans le plan considéré. ■



L'invention de la dérivée est liée aux problèmes de tangente à une courbe. L'invention du calcul intégral est liée aux calculs d'aires.

Un exemple en guise de présentation

Soit D la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$, tracée dans un repère orthonormal. $A(2; 3)$ et $M(x, y)$ sont deux points de cette droite ; ils se projettent respectivement en A' et M' sur l'axe xx' . L'aire du trapèze $AA'M'M$ est donnée par :

$$S(x) = \frac{(x-2)(x+10)}{4}.$$

Soit $S(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$ et

on a $S'(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et $S(2) = 0$.

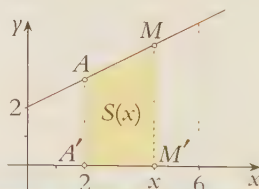
Ainsi, cette fonction $S(x)$ est la primitive

de la fonction f définie

par $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ qui s'annule pour $x = 2$.

On a $S(6) = 16$, ce que l'on écrit $\int_2^6 f(x) dx = 16$,

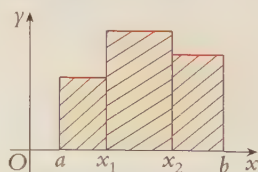
ce qui se lit « intégrale de 2 à 6 de $f(x) dx$ égale 16 ». De même que la valeur d'une dérivée donne la pente d'une tangente, la valeur d'une intégrale donne une aire. ■



Avec des fonctions en escaliers positives

Une fonction « en escaliers » est une fonction constante par intervalles entre a et b .

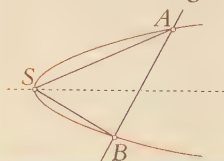
L'intégrale de cette fonction est définie comme la somme des aires des rectangles hachurés.



Dans le cas d'une autre fonction positive, on

Historique : d'Archimède à Riemann

Déjà, Archimède (287–212 av. J.-C.) savait calculer des aires de surfaces délimitées par une parabole en se ramenant à des aires de rectangles.



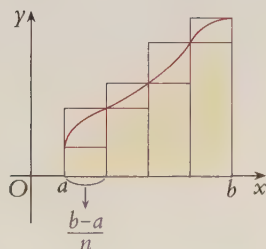
Il a ainsi montré que l'aire du « segment » de parabole est égal à $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle SAB .

D'autres mathématiciens, dont Fermat (1601–1655) obtinrent des résultats avec la parabole ou l'hyperbole à l'aide de suites géométriques représentant

des aires de rectangles. C'est en 1823 que Cauchy donne une définition précise d'une intégrale.

Cette notion a fait l'objet des recherches de très nombreux mathématiciens : avant Cauchy, (Leibniz), puis après (Riemann, Lagrange, etc).

l'encadre par deux fonctions en escaliers : l'une minorante, l'autre majorante comme l'indique le dessin.



La définition d'une intégrale sur un intervalle E

● Si f est dérivable sur E , si a et b sont deux éléments de E , on appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur E . On la note :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ce qui se lit : « intégrale de a à b de $f(x) dx$ ».

Ce nombre ne dépend pas de x . La même intégrale peut donc se noter

$$\text{aussi : } \int_a^b f(t) dt$$

$$\text{ou encore } \int_a^b f(u) du.$$

● On écrit aussi

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

On partage $[a, b]$ en n intervalles de même

amplitude $\frac{b-a}{n}$.

L'intégrale de f sur cet intervalle est définie comme la limite commune, si elle existe, des intégrales de ces deux fonctions en escaliers lorsque n tend vers l'infini. Ce n'est pas ce point de vue qui est actuellement enseigné au lycée : on utilise la notion de primitive. ■

Pour tout réel x de E , posons :

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Cette fonction G , définie sur E , est la primitive de f qui s'annule en $x = a$: $G'(x) = f(x)$ et $G(a) = 0$.

Exemple

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$f(x) = \sin x.$$

Cette fonction est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Une de ses primitives est $F(x) = -\cos x$, donc

$$I = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}, \text{ soit}$$

$$I = 0 - (-1) = 1.$$

On a aussi :

$$G(x) = \int_0^x \sin t dt = -\cos x + 1. \blacksquare$$

Les propriétés

Soit f une fonction dérivable sur E et a , b et c des éléments de E .

On a :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

On a la « relation de Chasles » pour les intégrales :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

f et g sont deux fonctions dérivables sur E et a et b sont deux réels de E . α et β sont deux réels quelconques.

La somme :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Le produit par k :

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

En conséquence

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

C'est ce que l'on nomme la propriété de linéarité de l'intégration. ■

Au lycée, on ne dispose que de deux méthodes générales pour calculer une intégrale.

L'utilisation d'une primitive de f sur $[a, b]$

Il s'agit de savoir « lire à l'envers » le tableau donnant les dérivées, après avoir écrit $f(x)$ sous une forme adéquate avec deux grandes idées.

- On sait trouver une primitive d'une somme

plus facilement que celle d'un quotient ou un produit.

- Si f s'écrit sous la forme $U' \cdot U^p$, on sait déterminer une primitive selon la valeur du rationnel p . ■

Intégration et inégalités entre fonctions

Si $f \geq 0$ sur E et $a < b$
alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Attention !

La réciproque est fausse.
On a par exemple :

$$\int_0^3 (x-1) dx = 1,5 \text{ et}$$

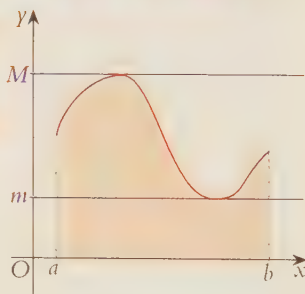
pourtant $x-1$ n'est pas positive sur $[0; 3]$.

Si on a $m \leq f \leq M$ sur E , et $a \leq b$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

d'où :

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq M$$



Le réel $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$

est appelé valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

- Si $|f| \leq M$ sur $[a, b]$, alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M |b-a|. \blacksquare$$

Quelques exemples de propriétés

Exemple 1

$$I = \int_1^2 \frac{t^2 + 5t + 1}{t} dt$$

$$I = \int_1^2 \left(t + 5 + \frac{1}{t} \right) dt$$

$$I = \left[\frac{t^2}{2} + 5t + \ln t \right]_1^2 = 6,5 + \ln 2.$$

Exemple 2

$$I = \int_0^\pi \sin 2t dt$$

$$I = \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^\pi = 0.$$

Exemple 3

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt$$

$$I = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Exemple 4

$$I = \int_0^3 \frac{t+1}{t-5} dt = \int_0^3 \left(1 + \frac{6}{t-5} \right) dt$$

$$I = \left[t + 6 \ln |t-5| \right]_0^3$$

$$I = 3 + 6 \ln 0,4.$$

Exemple 5

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t \cos t + \sin t) dt.$$

La fonction à « intégrer » est la dérivée de $t \sin t$,

d'où $I = \left[t \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$

Exemple 6

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx.$$

Si l'on pose $u(x) = \cos x$,
on a $u'(x) = -\sin x$ et
 $\sin x \cos^2 x = -u'(x) \cdot u^2(x)$
dont une primitive est
 $-\frac{1}{3}u^3(x)$, donc

$$I = -\frac{1}{3} \left[\cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Exemple 7

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \, dx ;$$

$$\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}.$$

C'est la forme $\frac{u'}{u}$ avec

$$u(x) = e^x + 1, \text{ d'où :}$$

$$I = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

Exemple 8

$$I = \int_1^e \frac{\ln t}{t} \, dt.$$

On reconnaît la forme $u' u$
avec $u(t) = \ln t$, d'où :

$$I = \left[\frac{1}{2} \ln^2 t \right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

Exemple 9

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx.$$

$$\sin^5 x =$$

$$\sin x (1 - \cos^2 x)^2 =$$

$$\sin x - 2 \sin x \cos^2 x +$$

$$\sin x \cos^4 x.$$

Avec $u(x) = \cos x$,
 $\sin^5 x = -u'(x) + 2u'(x)u^2(x) -$
 $u'(x)u^4(x)$, soit :

$$I = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \left[\cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$\frac{1}{5} \left[\cos^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}.$$

On peut aussi essayer
de « linéariser » $\sin^5 x$
en utilisant les nombres
complexes et les formules
d'Euler. ■

L'intégration par parties : si on ne sait pas faire autrement

Si u et v sont deux
fonctions dérivables
sur $[a, b]$:

$$\int_a^b u(t) v'(t) \, dt =$$

$$\left[u(t) v(t) \right]_a^b -$$

$$\int_a^b u'(t) v(t) \, dt.$$

C'est ce que l'on utilise
pour intégrer un produit
si l'on ne sait pas faire
autrement, en particulier
pour les produits de la
forme $x \sin x$; $x \cos x$;
 $(ax+b)e^x \dots$

Exemple 1

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx. \text{ On pose :}$$

$$u(x) = x \text{ et } v'(x) = \sin x,$$

d'où $u'(x) = 1$ et
 $v(x) = -\cos(x)$. On a donc

$$I = \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \, dx = 1.$$

Exemple 2

$$I = \int_1^e \ln x \, dx. \text{ L'astuce}$$

consiste à écrire :

$$\ln x = 1 \times \ln x. \text{ On pose}$$

$$\text{alors : } u(x) = \ln x \text{ et}$$

$$v'(x) = 1, \text{ d'où } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ et}$$

$$v(x) = x \text{ donc :}$$

$$I = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx = 1.$$

Exemple 3

Dans cet exemple, on
utilisera deux intégrations
par parties...

$$I = \int_0^1 x^2 e^x \, dx.$$

Étape 1 : $u(x) = x^2$ et
 $v'(x) = e^{-x}$, d'où $u'(x) = 2x$
et $v(x) = -e^{-x}$.

$$I = [-x^2 e^{-x}]_0^1 -$$

$$\int_0^1 2x e^{-x} \, dx = -\frac{1}{e} + 2J,$$

$$\text{avec } J = \int_0^1 x e^{-x} \, dx.$$

Étape 2 : on calcule J au
moyen d'une seconde
intégration par parties :

$$J = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \, dx$$

$$J = 1 - \frac{2}{e}.$$

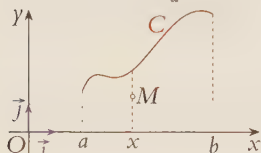
En définitive,

$$I = -\frac{1}{e} + 2 - \frac{1}{e} = 2 - \frac{2}{e}. \quad \blacksquare$$

Comme on l'a déjà vu, la notion d'aire d'une surface est intimement liée à la notion d'intégrale.

La propriété fondamentale

Le repère est orthogonal. f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ et positive. L'aire de la surface comprise entre la courbe C de f , l'axe $x'x$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x) dx$.



La surface en question est définie analytiquement par $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

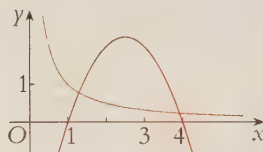
L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

Il s'agit de cm^2 lorsque, sur le graphique, les vecteurs unitaires, mesurent 1 cm de longueur.

Exemples

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est positive sur $]0; +\infty[$.

L'aire du domaine défini par $1 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ est $S = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln 3$.



La parabole d'équation $y = -x^2 + 5x - 4$ coupe $x'x$ en $x = 1$ et $x = 4$.

L'aire de la surface comprise entre $x'x$ et cette parabole est :

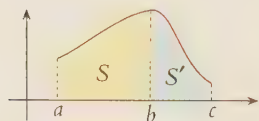
$$S = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx$$

$$S = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4$$

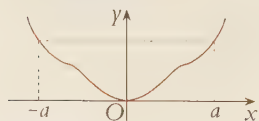
$$S = 4,5. \blacksquare$$

Des propriétés très importantes

L'aire de la réunion $S \cup S'$ est la somme des aires de S et S' .

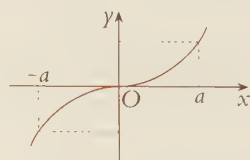


Fonction paire



$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Fonction impaire



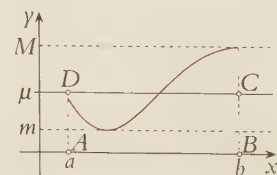
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$

On a $m \leq f(x) \leq M$.

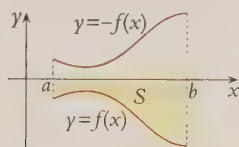
La valeur moyenne

$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est la longueur du rectangle $ABCD$, de largeur $b-a$, qui a la même aire que le domaine délimité par la courbe de f .



Cas où f est négative sur $[a, b]$

L'intégrale de f sur $[a, b]$ est un réel négatif. On considère la représentation de la fonction $(-f)$.



Elle est symétrique de celle de f par rapport à $x'x$ et les deux domaines ont la même aire par symétrie :

$$\mathcal{A}(S) = -\int_a^b f(x) dx$$

$$\mathcal{A}(S) = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

Ainsi, le domaine S défini par $0 \leq x \leq 2$ et

$-x^2 \leq y \leq 0$ a pour aire

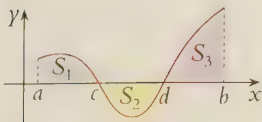
$$-\int_0^2 (-x^2) dx = \frac{8}{3}.$$

Cas où f change de signe sur $[a, b]$

Si f est positive sur $[a, c]$ et $[d, b]$ et négative sur $[c, d]$, on a :

$$\text{Aire } (S_1 \cup S_2 \cup S_3) =$$

$$\int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx.$$

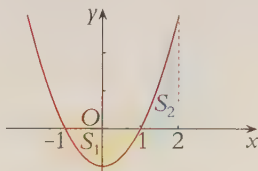


L'aire totale est la somme des valeurs absolues des trois intégrales.

Remarquons qu'il est indispensable de connaître les racines de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$.

Exemple

$f(x) = x^2 - 1$ sur $[-1; 2]$.



Une primitive est

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x.$$

$$\text{Aire } (S_1 \cup S_2) =$$

$$\left| [F(x)]_{-1}^1 \right| + [F(x)]_1^2.$$

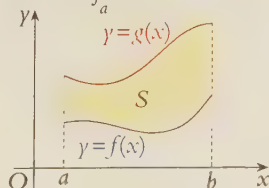
$$\text{Aire } (S) = \frac{8}{3}.$$

Aire d'une surface entre deux courbes

Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes et défini par :

$a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$; elle est donnée par :

$$\text{aire } (S) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

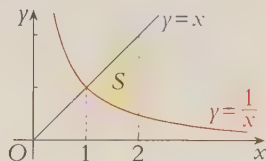


Remarquons que, dans ce cas, le signe de $f(x)$ ou de $g(x)$ n'intervient pas.

Seule la condition $f \leq g$ est capitale.

Exemple 1 Considérons la surface définie par $1 \leq x \leq 2$ et

$$\frac{1}{x} \leq y \leq x.$$



$$\text{Aire } (S) = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx =$$

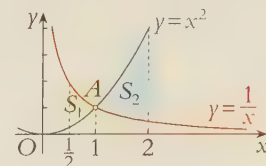
$$\left[\frac{1}{2}x^2 - \ln x \right]_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

Exemple 2

La parabole $P: y = x^2$ et l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$

se coupent en $A(1; 1)$

On veut calculer $S_1 \cup S_2$.



Sur $\left[\frac{1}{2}; 2 \right]$, on a $\frac{1}{x} \geq x^2$.

Sur $x \in [1; 2]$, on a $x^2 \geq \frac{1}{x}$.

$$\text{Aire } (S_1 \cup S_2) =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - x^2 \right) dx + \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) dx.$$

On trouve :

$$\text{aire } (S_1 \cup S_2) = \frac{49}{24}. \blacksquare$$

Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et si on ne sait pas trouver une primitive de f , on ne sait pas calculer l'intégrale de f sur $[a, b]$ et cependant elle existe. Nous allons en trouver une valeur approchée.

La méthode des rectangles

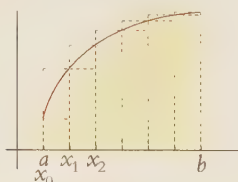
Le principe consiste à partager l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueur égale à $\frac{b-a}{n}$.

Les points ont pour abscisses successives

$$x_0 = a; x_1 = a + \frac{b-a}{n};$$

$$x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}; x_n = b;$$

on sait calculer l'aire de chacun des rectangles « intérieurs » et chacun des rectangles « extérieurs ».

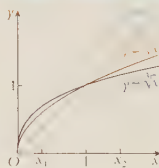


Si f est croissante, soit S' la somme des aires des rectangles « intérieurs » ; on a $S' = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}))$.

On sait calculer S'' , somme des aires des rectangles extérieurs. Donc :

$$S' \leq \int_a^b f(x) dx \leq S''.$$

La méthode des Arabes pour la parabole



Pour calculer l'aire de la parabole (indiquée en vert) les Arabes calculaient des aires des rectangles intérieurs. Soit $f(x) = x^2$ avec $a = 0$ et $b = 1$.

Donc

$$S' = \frac{1}{n} \left[0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right],$$

$$S' = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2].$$

$$\text{Or } 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 =$$

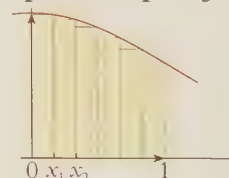
$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \text{ donc}$$

$$S' = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}.$$

Plus n (le nombre de petits intervalles) est grand, plus S' est voisin de l'intégrale recherchée. On trouve bien que la limite de S' en $+\infty$ est égale à

$\frac{1}{3}$, résultat que nous connaissons.

Si on ne connaît pas de primitive pour f :



Soit à calculer

$$I = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

On a : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $f'(x) < 0$; donc f est décroissante sur $[0; 1]$.

On a donc :

$$S' = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1) \right] \text{ et}$$

$$S'' = \frac{1}{n} \left[f(0) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right].$$

En posant $n = 5$, on trouve à l'aide d'une calculatrice :

$$S' = \frac{1}{5} (f(0,2) + f(0,4) + \dots + f(1)) \approx 0,814.$$

$$S'' \approx 0,893.$$

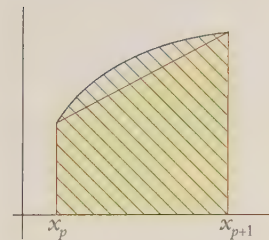
$$\text{D'où } 0,814 < I < 0,893. \blacksquare$$

La méthode des trapèzes

Par cette méthode sur chacun des intervalles $[x_p, x_{p+1}]$, on remplace l'aire hachurée par l'aire du trapèze rouge.

Cette aire est égale à :

$$\frac{f(x_{p+1}) + f(x_p)}{2} \times (x_{p+1} - x_p).$$



Soit la somme des aires des trapèzes :

$$S = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right).$$

Pour calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

par cette méthode avec $n=5$, on trouve pour une valeur approchée de I . $I \approx 0,85$.

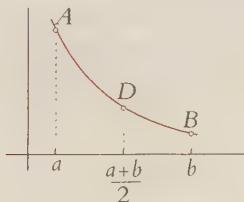
La méthode des trapèzes donne plus rapidement de meilleurs résultats que celle des rectangles vue précédemment. ■

La méthode de Simpson

Elle est de nature totalement différente.

Principe

On remplace la courbe C représentative de f par une unique parabole passant par le point A de C , d'abscisse a , le point B d'abscisse b , et par le point D d'abscisse $\frac{a+b}{2}$.



On démontre que pour une parabole d'équation $y = g(x)$, on a :

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(g(a) + g(b) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right).$$

et puisque $f(x) = g(x)$ pour les trois valeurs a, b ,

$$\frac{b-a}{2}, \text{ on a : } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right).$$

Pour I , en appliquant cette méthode, on trouve $I \approx 0,830$.

Remarquons que l'équation de $g(x)$ n'intervient pas dans les calculs. ■

Intégrales et limites de suite

Soit la suite :

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

On peut aussi écrire

$$U_n = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \dots + \frac{n}{2n} \right).$$

Considérons la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle

$[1; 2]$ et partageons $[1; 2]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$.

On pose $x_0 = 1$; $x_1 = \frac{n+1}{n}$; $x_2 = \frac{n+2}{n}$, ..., $x_n = 2$.

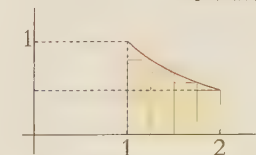


On a $f(x_0) = 1$;

$$f(x_1) = \frac{n}{n+1}; f(x_2) = \frac{n}{n+2}.$$

On peut donc écrire :

$$U_n = \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)).$$



Puisque f est une fonction décroissante, le terme U_n est la somme des aires des rectangles « intérieurs ». On a donc :

• U_n est une valeur approchée de $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, soit $\ln 2$.

• $U_n < \ln 2$.

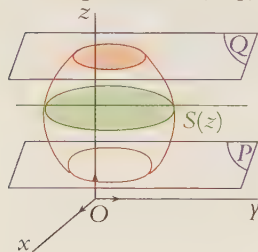
• $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln 2$. ■

D'autres applications du calcul intégral

Le calcul intégral est un outil mathématique qui ne sert pas qu'à calculer des aires. Il permet également de calculer des longueurs, des volumes, etc. Il est particulièrement utile à l'ingénieur...

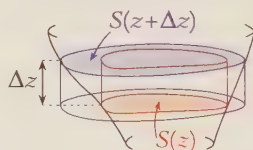
Le calcul du volume d'un solide

Dans un repère de l'espace, un solide Σ est compris entre deux plans P et Q parallèles à (xOy) .



Sa section par un plan parallèle à (xOy) est une surface d'aire $S(z)$. Lorsque z passe d'une valeur z à $z + \Delta z$, l'augmentation de volume est comprise entre les

volumes de deux cylindres de même hauteur Δz .



$$\Delta z S(z) \leq \Delta V \text{ et } \Delta z S(z + \Delta z) \geq \Delta V$$

$$S(z) \leq \frac{\Delta V}{\Delta z} \leq S(z + \Delta z)$$

Lorsque Δz tend vers 0, $\frac{\Delta V}{\Delta z}$ a pour limite la dérivée $V'(z)$ si elle existe : cette limite est $S(z)$. D'où le volume V du solide Σ .

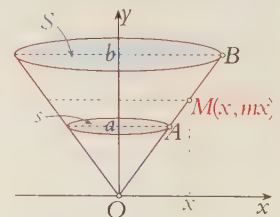
$$V(\Sigma) = \int_a^b S(z) dz. \blacksquare$$

Le tronc du cône de révolution

Il est engendré par la rotation du segment $[AB]$ autour de (Oy) . Si on se place dans un repère tel que (AB) a pour équation $y = mx$, on a $S(y) = \pi(mx)^2$, d'où $V = \int_a^b m^2 \pi x^2 dx =$

$$\pi m^2 \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right).$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (b-a)(m^2 b^2 + m^2 ba + m^2 a^2) = \frac{1}{3} h (S + \sqrt{Ss} + s).$$

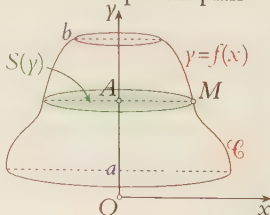


avec la hauteur $h = b - a$; $S = \pi m^2 b^2$ (aire de la grande base) et $s = \pi m^2 a^2$ (aire de la petite base). $\blacksquare$

Le volume d'un solide de révolution dans le cas général

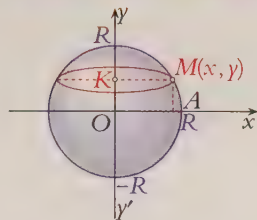
Un solide de révolution est engendré par la rotation d'une courbe $\mathcal{C}$ autour d'un axe. Désignons par $y'y$ l'axe vertical. La courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(x)$ dans le plan (xOy) . Elle « tourne » autour de $y'y$.

La section du solide de révolution par un plan



perpendiculaire en A à $y'y$ est un disque d'aire $S(y) = \pi AM^2 = \pi [f(x)]^2$, d'où le volume du solide de révolution

$$V = \int_a^b S(y) dy = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx. \blacksquare$$



Le cercle de centre O, de rayon R a pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

La boule est engendrée par la rotation de ce cercle autour d'un diamètre porté par $y'y$.

Le segment $[KM]$ engendre un disque d'aire

$$S = \pi KM^2 = \pi (R^2 - x^2)$$

car $KM^2 = R^2 - x^2$,

$$d'où V = \int_{-R}^R \pi (R^2 - x^2) dx =$$

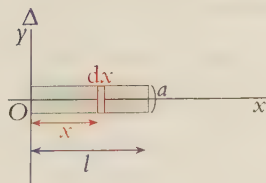
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \blacksquare$$

Le moment d'inertie axial

Le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ , d'une masse ponctuelle m à une distance d de l'axe est $I_{\Delta} = md^2$.

Prenons une barre de longueur l , de largeur a , homogène, dont μ est la masse volumique.

Un « élément » de largeur dx , à la distance x de l'axe Δ pris pour axe $y'y$, a pour masse μadx .



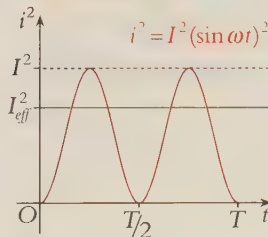
Le moment d'inertie de la barre par rapport à Δ est :

$$I_{\Delta} = \int_0^l \mu ax^2 dx = \mu a \frac{l^3}{3}$$

$\mu al = M$ (masse totale de la barre), d'où

$$I_{\Delta} = \frac{1}{3} Ml^2. \blacksquare$$

Courant « efficace » en électricité



Un courant alternatif i est donné par $i(t) = I \sin \omega t$. Sa période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

On appelle intensité efficace I_{eff} l'intensité d'un courant continu qui, dans une résistance R , produit la même énergie W , durant une période T . L'énergie en une période

$$\text{est } W = \int_0^T Ri^2(t) dt.$$

On a donc :

$$RI_{eff}^2 T = \int_0^T Ri^2(t) dt,$$

$$d'où I_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt.$$

I_{eff}^2 est la valeur moyenne sur $[0 ; T]$ de $[I \sin \omega t]^2$.

$$\text{On trouve } I_{eff} = \frac{I}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$

Autres applications

Les applications du calcul intégral sont multiples, dans de nombreux domaines.

● Longueur d'un arc de courbe d'équation $y = f(x)$:

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Par exemple, pour la « chaînette » d'équation $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, on a $1 + y'^2 =$

La longueur $\widehat{AB}$ de $x=0$ à $x=1$ est :

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e}).$$

● Centre de gravité d'un solide.

● Calcul d'une probabilité pour un aléa réel de densité f .

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt.$$

● Pour un « flux d'investissement » donné par $g(t)$ en fonction du temps, l'accroissement du capital

$$\text{est : } \int_a^b g(t) dt, \text{ etc. } \blacksquare$$

On a vu jusqu'à présent des équations dans lesquelles l'inconnue ou les inconnues étaient des nombres réels ou imaginaires. Dans le cas des équations différentielles, l'inconnue est une fonction.

Des exemples d'utilisation

Un objet de masse M est soumis à la pesanteur et à elle seule : il est animé d'un mouvement d'accélération $\gamma(t)$ de telle sorte que : $M\gamma(t) = Mg$, c'est-à-dire $\gamma(t) = g$.

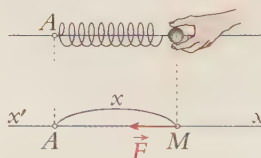


$$\vec{F} = M\vec{g}$$

L'accélération étant la dérivée de la fonction « distance parcourue » $s(t)$, on a : $s''(t) = g$.

● Un ressort attaché en A est étiré le long de l'axe $x'x$. L'extrémité M est soumise à une force de rappel $\vec{f}$ proportionnelle à la distance $\overline{AM}$ et de sens contraire à $\overline{AM}$. Si on pose $\overline{AM} = x(t)$ (t : temps en secondes), on a : $m\ddot{x}(t) = -kx(t)$ ($k > 0$)

que le physicien écrit $m\ddot{x} + kx = 0$.



$s''(t) = g$, $m\ddot{x} + kx = 0$ sont des équations différentielles.

Ce concept est indispensable pour traduire divers phénomènes, dans lesquels une grandeur qui, en général dépend du temps, est liée à sa dérivée première, voire d'autres dérivées de cette grandeur par rapport au temps.

La plupart des problèmes de mouvements (étudiés en cinématique) dans lesquels interviennent une abscisse curviligne ou non, une vitesse, une accélération, conduisent à des équations différentielles étudiées par les physiciens. ■

Définition

Une équation différentielle est une relation faisant intervenir une fonction f d'une variable x , cette variable et certaines dérivées de cette fonction.

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les solutions qui vérifient cette relation.

On détermine souvent une solution particulière, c'est-à-dire une fonction telle que $f(0) = a$ et par exemple $f'(0) = b$.

L'équation différentielle est du *premier ordre* si la seule dérivée qui intervient est la dérivée première, par exemple $f'(x) - (x^2 + 3)f(x) = 4$ que l'on écrit $y' - (x^2 + 3)y = 4$.

L'équation est du *second ordre* si la dérivée seconde intervient.

Par exemple, $4y'' + 3y = 0$ qui est une écriture abrégée de $4f''(x) + 3f(x) = 0$. ■

Une équation du premier ordre linéaire

C' est une équation qui s'écrit $y' - ay = 0$ où a désigne une constante. y et y' (c'est-à-dire f et f') figurent au premier degré.

C'est évidemment une équation extrêmement simple que l'on rencontre dans de nombreux phénomènes.

La « fonction nulle » $y = 0$ est une solution.

Si l'on a $y \neq 0$, l'équation

$$\text{devient } \frac{y'}{y} = a,$$

soit $\ln |y| = ax + \lambda$,
d'où $y = ce^{ax}$.

Si on tient compte de la condition initiale

$f(0) = y_0$, on a la solution particulière $y = y_0 e^{ax}$.

Considérons l'ensemble des fonctions :

$$f_c : x \mapsto ce^{ax}.$$

Cet ensemble constitue l'intégrale générale de l'équation donnée. Chaque courbe est une courbe intégrale.

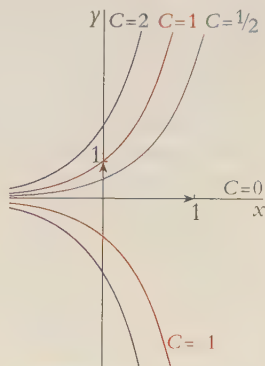
Par un point $A(x_1, y_1)$ passe une et une seule de ces courbes : en effet $ce^{ax_1} = y_1$ donne $c = y_1 e^{-ax_1}$, valeur unique.

Par exemple, pour l'équation $y' - 2y = 0$, les courbes intégrales ont pour équations : $y = ce^{2x}$.

Selon que $c > 0$ ou $c < 0$, on a $y > 0$ ou $y < 0$.

Pour $c = 0$, la fonction nulle $y = 0$ est une solution « triviale » sans grand intérêt.

Pour deux valeurs opposées de c , les courbes sont symétriques par rapport à l'axe $x'x$. ■



Des applications en physique

Considérons un exemple. Ce type d'équation intervient dans de nombreux phénomènes dans lesquels une grandeur variable en fonction du temps t est donnée par $g(t)$, et la vitesse de variation est proportionnelle à $g(t)$: $g'(t) = Kg(t)$.

Par exemple, la masse y d'une substance radioactive varie en fonction du temps t de telle sorte que

$$\frac{dy}{dt} = -k^2 y.$$

La masse diminue en fonction de t .

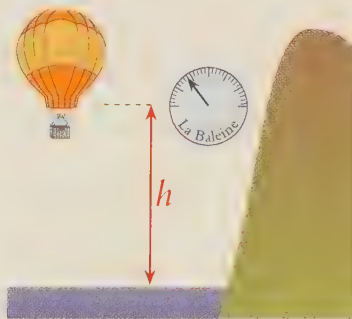
On a les solutions sous la forme $y = y_0 e^{-k^2 t}$.

On s'intéresse souvent à la demi-vie, c'est-à-dire le temps au bout duquel la masse a diminué de moitié.

Cette durée T vérifie :

$$y_0 e^{-k^2 T} = \frac{1}{2} y_0, \text{ soit } k^2 T = \ln 2, \text{ soit } T = \frac{\ln 2}{k^2}.$$

Un autre exemple : la pression atmosphérique p est une fonction de l'altitude h : $p = p(h)$.



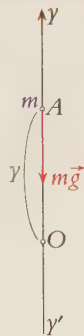
La vitesse de variation de p est proportionnelle à p avec $\frac{dp}{dh} = -kp$.

C'est encore une équation linéaire du premier ordre dont les solutions sont $p(h) = p_0 e^{-kh}$. ■

Les équations du second ordre permettent de traiter divers problèmes de physique, par exemple les oscillations d'un ressort avec ou sans force d'amortissement.

Une introduction à la pesanteur

Un objet A de masse m , soumis à la seule pesanteur, a une trajectoire verticale. Son ordonnée est $\overline{OA} = \gamma(t)$. L'accélération de son mouvement étant $\gamma''(t)$ en fonction du temps,



on a, d'après l'équilibre des forces, $m\gamma''(t) = mg$, d'où $\gamma''(t) = g$ (constante), d'où $\gamma'' = g$. C'est une équation du second ordre très simple et fondamentale. Par deux intégrations, on obtient $\gamma' - gt + \gamma'_0$ (vitesse à l'instant t) $\gamma = \frac{1}{2}gt^2 + \gamma'_0 t + \gamma_0$ (abscisse). ■

Les équations du second ordre linéaire à coefficient constant

Elles s'écrivent $\gamma'' + b\gamma' + c\gamma = 0$. La recherche de solutions sous la forme e^{rx} conduit à écrire l'équation caractéristique associée qui s'écrit $r^2 + br + c = 0$ dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4c$.

● Si $\Delta > 0$: l'équation caractéristique a deux racines réelles r_1 et r_2 . Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent $\gamma = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$.

● Exemple : pour l'équation différentielle $\gamma'' + 4\gamma' - 5\gamma = 0$, l'équation caractéristique a pour racines 1 et -5. Les solutions sont $\gamma = Ae^x + Be^{-5x}$.

● Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique a une racine double. Les solutions de l'équation différentielle sont $\gamma = (Ax + B)e^{rx}$. Par exemple pour $\gamma'' - 4\gamma' + 4\gamma = 0$, la racine double de l'équation

$r^2 - 4r + 4 = 0$ étant 2, les solutions s'écrivent $\gamma = (Ax + B)e^{2x}$.

● Si $\Delta < 0$: l'équation caractéristique a deux racines imaginaires conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.

Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent $\gamma = e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$.

● Solution particulière : Dans tous les cas, les conditions initiales γ_0 et γ'_0 étant données, il existe une et une seule solution vérifiant ces conditions.

Cas particulier :
équation $\gamma'' + \omega^2 \gamma = 0$
($\omega \neq 0$)

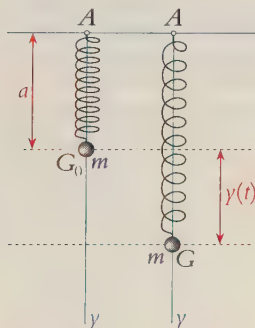
C'est une équation que l'on rencontre très souvent en physique.

L'équation caractéristique associée a pour solutions les imaginaires $i\omega$ et $-i\omega$. Les solutions de l'équation différentielle sont $\gamma = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. Ou encore : $\gamma = C \cos(\omega t + \varphi)$.

C'est une équation différentielle qui caractérise tous les mouvements vibratoires sans amortissement.

La période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$. ■

Une masse m est suspendue verticalement à l'extrémité G_0 du ressort. On abandonne la masse après l'avoir déplacée verticalement en G : l'écart $\overline{G_0G} = \gamma(t)$ est une fonction qui vérifie l'équation différentielle $m\ddot{\gamma} + k\gamma = 0$. k est la constante de raideur ($k > 0$).



Si l'on pose $\frac{k}{m} = \alpha$, les solutions sont $\gamma(t) = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t$. On a : $\gamma'(t) = -A\alpha \sin \alpha t + \alpha B \cos \alpha t$.

Avec les conditions initiales $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = 0$, on obtient le système

$$\begin{cases} A = a \\ B\alpha = 0 \end{cases}$$

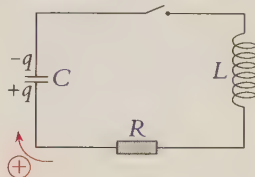
d'où

$$\begin{cases} A = a \\ B = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$\gamma(t) = a \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right). \blacksquare$$

Un condensateur de capacité C est chargé. Lorsque l'on ferme le circuit, muni d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L , la charge du condensateur varie.



C'est une fonction $q(t)$ du temps. Cette fonction est solution de l'équation différentielle

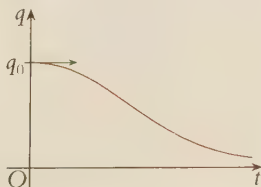
$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = 0.$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est $R^2 - 4 \frac{L}{C}$.

Selon les valeurs de R , L et C , la courbe représentative de la fonction $q(t)$ prendra des allures très différentes.

● Si $R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$, on a des fonctions q du type

$$q = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$



On peut déterminer A et B avec les conditions initiales q_0 et $q'_0 = 0$.

● Si $R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\alpha = \frac{-R}{2L} \text{ et }$$

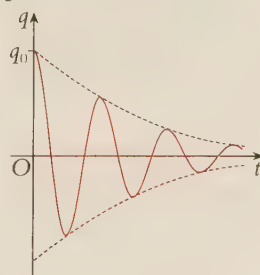
$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

On a les solutions

$$q = -Ae^{\left(\frac{-R}{2L}\right)t} \cos(\omega t - \varphi).$$

On a une fonction sinusoïdale amortie.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la pseudo-période.



● Si $R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$.

C'est la résistance critique. On obtient une racine double $r = \frac{-R}{2L}$.

Les fonctions q s'écrivent

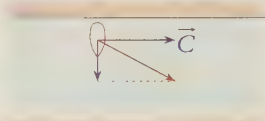
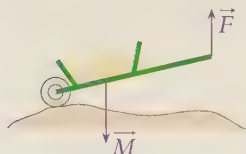
$$q = q_0 \left(1 + \frac{R}{2L} t \right) e^{\left(\frac{-R}{2L}\right)t}.$$

C'est un régime critique pour lequel la décharge est apériodique. ■

Un nombre est suffisant pour rendre compte de certaines «grandeurs» comme une longueur, une aire, un volume. Mais pour d'autres, un simple nombre est insuffisant : une force, l'attraction d'un aimant, la force du vent, etc., sont liées aussi au sens et à la direction.

Deux exemples

Sur la brouette s'exercent deux forces : la masse portée et la force exercée par celui qui soulève le fardeau.



Sur le bateau qui part d'une rive du fleuve s'exercent la force du courant et la force du moteur, si bien que s'il part perpendiculairement à la rive, le bateau n'arrivera pas exactement

sur l'autre rive, en face du point de départ. Un vecteur est précisément un «objet mathématique» qui veut rendre compte à la fois d'une direction, d'un sens et aussi d'une intensité, ce que l'on a déjà rencontré à propos des translations. Le mot tire son origine du latin *vector* («conducteur») et son usage est relativement récent. ■

Un peu d'histoire

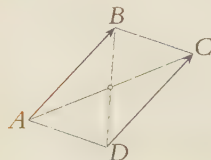
L'Irlandais sir William Hamilton (1805-1865) fut l'un des premiers à utiliser les vecteurs et il est probablement l'inventeur du mot. L'Allemand Hermann Grassman (1809-1877) introduisit la notation vectorielle à l'occasion de problèmes de physique. L'Américain Gibbs (1839-1903) et l'Anglais Heaviside (1850-1925), disciples de Hamilton, donnent au calcul vectoriel sa forme quasi définitive. Mais ce type de

«calcul» met assez longtemps à s'introduire en France. Michel Chasles (1793-1880), élève puis professeur à l'École polytechnique, avait déjà pressenti l'importance du sens sur un axe, sans aller jusqu'à la notion de vecteur. Le mathématicien Georges Bouligand publia en 1926 une *Initiation aux méthodes vectorielles*. Il fallut encore bien des années pour que l'emploi de ces méthodes devienne courant au lycée.

L'égalité vectorielle

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie trois choses :

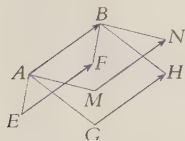
- ① Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.
- ② Le sens « A vers B » est le même que celui de « D vers C ».
- ③ Les longueurs AB et DC sont égales.



Donc $ABCD$ est un parallélogramme, c'est-à-dire que $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. On dit aussi que les couples de points (A, B) et (D, C) sont *équipollents*. Si ce sont des points d'une même droite, on dit que ce parallélogramme est aplati. Les deux points A et B étant donnés, il existe une infinité de points M et N tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$. ■

Une notation nouvelle

Avant construit autant de parallélogrammes que l'on veut dont $[AB]$ est un côté, on a :



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \dots$$

Ces écritures désignent un seul et même vecteur qui se note $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{MN}$ ou $\overrightarrow{EF}$... ou encore au moyen d'une seule lettre surmontée d'une flèche $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} = \dots$ (A, B), (M, N) sont des représentants de ce vecteur $\vec{u}$.

Un vecteur est caractérisé par :

- sa direction : celle de la droite (AB) ;
- son sens : le sens de « A vers B »;
- sa norme : la longueur AB que l'on note $\|\vec{u}\|$. ■

Le vecteur « nul »

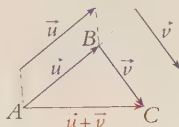
$\overrightarrow{AA}$ ou $\overrightarrow{BB}$ désigne le vecteur nul qui se note aussi $\vec{0}$. Il n'a ni direction ni sens. C'est un être un peu particulier indispensable dans le calcul vectoriel.

Propriétés

- $\overrightarrow{AK} = \vec{0}$ signifie que A et K sont confondus.

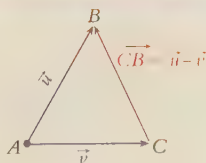
L'addition vectorielle

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Leur somme notée $\vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur obtenu de la manière suivante : $\overrightarrow{AB}$ étant un représentant de $\vec{u}$; $\overrightarrow{BC}$ étant un représentant de $\vec{v}$, alors $\overrightarrow{AC}$ est un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$. On écrit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: c'est la relation de Chasles pour les vecteurs.



C'est la construction de la somme « à la queue leu leu », mais on peut aussi tracer deux représentants de même origine pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AB'} = \vec{v}$.

La différence de deux vecteurs

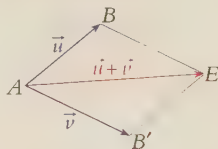


- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AL}$ signifie que B et L sont confondus.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A , il y a un seul point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont *opposés*. On écrit : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. ■

Si E est le quatrième sommet du parallélogramme $ABEB'$, alors $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}$.



Les propriétés de l'addition vectorielle pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0}$ et $\vec{u} = \vec{u}$.
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
- La somme de deux vecteurs opposés est le vecteur nul : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ou $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. ■

Retrancher un vecteur, c'est ajouter son opposé :

- $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$,
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. ■

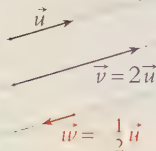
La multiplication d'un vecteur par un réel

Dans de nombreuses situations, un nombre réel est un coefficient multiplicateur. Il peut aussi jouer ce rôle vis-à-vis des vecteurs.

Introduction

Définissons le produit d'un nombre réel par un vecteur :

$\vec{u}$ est un vecteur non nul et a est un réel non nul.



Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre a est lui-même un vecteur, qu'on appellera $\vec{v}$, et possédant les caractéristiques suivantes :

- $\vec{v}$ a la même direction que $\vec{u}$;
- $\vec{v}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $a > 0$;
- $\vec{v}$ a le sens contraire si $a < 0$;
- $\|\vec{v}\| = |a| \times \|\vec{u}\|$.

On écrit $\vec{v} = a\vec{u}$ ou $\vec{u} = \frac{1}{a}\vec{v}$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ $0\vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tout réel a : $a\vec{0} = \vec{0}$. ■

Le calcul vectoriel : propriétés et exemples

Le calcul vectoriel met en jeu l'addition vectorielle et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Voici des propriétés importantes pour conduire un calcul vectoriel. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs et a et b deux nombres réels quelconques, on a :

$$\begin{aligned} 1\vec{u} &= \vec{u} & -1\vec{u} &= -\vec{u}; \\ a(\vec{u} + \vec{v}) &= a\vec{u} + a\vec{v}. \\ (a+b)\vec{u} &= a\vec{u} + b\vec{u}. \\ a(b\vec{u}) &= (a \times b)\vec{u}. \end{aligned}$$

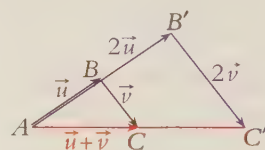
$$\begin{aligned} \text{Si } a \neq 0 \text{ et } \vec{v} &= a\vec{u}, \\ \text{alors } \vec{u} &= \frac{1}{a}\vec{v}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Soit } \vec{w} &= 3\vec{u} - 2\vec{v} \text{ et } \vec{t} = 5\vec{u} + 3\vec{v}, \text{ on a} \\ \vec{w} + \vec{t} &= (3\vec{u} - 2\vec{v}) + (5\vec{u} + 3\vec{v}) \\ 3\vec{u} + 5\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{v} &= \\ (3+5)\vec{u} + (-2+3)\vec{v} &= \\ \vec{w} + \vec{t} &= 8\vec{u} + \vec{v}. \end{aligned}$$

Ce type de calcul ressemble presque exactement au calcul avec des polynômes.

$$\begin{aligned} \bullet 2(\vec{u} + \vec{v}) &= 2\vec{u} + 2\vec{v}. \\ \text{Si on a } \vec{AB} &= \vec{u} \text{ et } \vec{BC} = \vec{v}, \\ \text{alors } \vec{AC} &= \vec{u} + \vec{v}. \end{aligned}$$

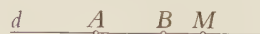
$$\vec{AB'} = 2\vec{u} \text{ et } \vec{B'C'} = 2\vec{v}, \text{ alors } \vec{AC'} = 2\vec{u} + 2\vec{v}.$$



Donc $\vec{AC'} = 2\vec{AC}$: les points A , C et C' sont alignés. On retrouve une « configuration de Thalès » : on pourrait dire que le théorème de Thalès traduit la « distributivité » de la multiplication d'un vecteur par un réel. ■

Le vecteur directeur d'une droite

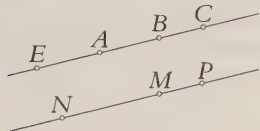
Si deux points A et B sont des points de la droite d , le vecteur $\vec{AB}$ est vecteur directeur de d . Pour tout point M de d on a : $\vec{AM} = x\vec{AB}$.



Deux autres points quelconques de d peuvent définir un autre vecteur directeur. ■

La colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs colinéaires non nuls sont deux vecteurs de même direction, c'est-à-dire dont les supports sont parallèles.

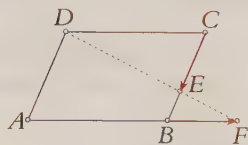


● Si l'on a $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignés. Réciproquement, si E, A et B sont alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et on peut trouver un réel x tel que $\overrightarrow{AE} = x \overrightarrow{AB}$.

● Si l'on a $\overrightarrow{MN} = y \overrightarrow{AB}$, alors la droite (MN) est parallèle à la droite (AB) , et réciproquement, si P est un autre point de la droite (MN) , les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Autrement dit, la colinéarité de deux vecteurs traduit l'alignement de points ou le parallélisme de droites.

On considère parfois que le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire à tout autre vecteur. ■

Applications



● $ABCD$ étant un parallélogramme, on envisage les points E et F tels que

$$\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CB}$$

$$\text{et } \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BA}.$$

Démontrer l'alignement des points D, E et F .

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} \\ \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{CB}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} \\ \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DA} &= \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DF} &= \frac{3}{2} \left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DA} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}, \\ \text{donc } \overrightarrow{DF} &= \frac{3}{2} \overrightarrow{DE}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre l'alignement des points D, E, F .

● Les cinq points A, B, C, D, E sont définis par

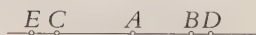
$$\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\text{et } \overrightarrow{CE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$$

Démontrer le parallélisme des droites (BC) et (DE) . Évidemment, si les points A, B et C sont alignés,

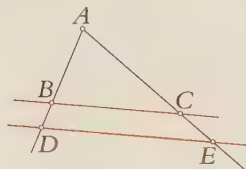
Points clés

alors D et E sont aussi sur cette droite : (BC) et (DE) sont confondues.



Dans le cas où A, B, C sont les sommets d'un triangle, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}) - \frac{4}{3} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DE} &= \frac{4}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{4}{3} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DE} &= \frac{4}{3} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{DE} &= \frac{4}{3} \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$



Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc $(DE) \parallel (BC)$

$$\text{et } DE = \frac{4}{3} BC. \blacksquare$$

À retenir

$(MN) \parallel (PQ)$ se traduit vectoriellement par :

Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MN} = k \overrightarrow{PQ}$.

L'utilisation des vecteurs en géométrie

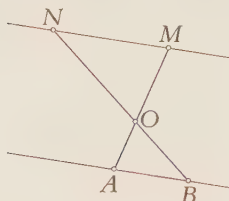
La traduction vectorielle de propriétés géométriques permet de nouvelles méthodes de démonstration, parfois très élégantes.

La colinéarité

La colinéarité de vecteurs non nuls, c'est-à-dire en fait le produit d'un vecteur par un réel, permet déjà :

- de traduire un alignement de points ;
- de traduire le parallélisme de droites.

Ainsi $\vec{OA} = k \vec{OM}$ et $\vec{OB} = k \vec{ON}$ entraîne : $\vec{OB} - \vec{OA} = k \vec{ON} - k \vec{OM}$ et donc : $\vec{AB} = k \vec{MN}$.



Finalement $(AB) \parallel (MN)$. Ce calcul ne présente de l'intérêt que si les points O, A et B ne sont pas alignés, bien sûr !

Ce calcul vectoriel est effectué pour démontrer que le parallélisme de deux droites est plus efficace que la « réciproque » du théorème de Thalès, pour laquelle il faut prendre garde aux problèmes de position des points. ■

Le milieu d'un segment

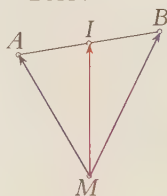
Dire que le point I est le milieu du segment [AB] se traduit vectoriellement par :

- $\vec{IA}$ et $\vec{IB}$ sont des vecteurs opposés.

$$\bullet \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}.$$

$$\bullet \vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB} \text{ ou }$$

$$\vec{AB} = 2 \vec{AI}.$$



- Si le point M est un point quelconque, on a

$$\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$$

$$\text{ou } \vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB}$$

d'où, par addition,

$$\vec{MA} + \vec{MB} =$$

$$\vec{MI} + \vec{IA} + \vec{MI} + \vec{IB}$$

$$\text{et comme } \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$$

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2 \vec{MI}.$$

Le vecteur $\vec{MI}$ est la « demi-somme vectorielle »

$$\frac{1}{2} (\vec{MA} + \vec{MB}), \text{ ce qui}$$

évoque l'idée de

« moyenne » de vecteurs. ■

Les milieux des côtés d'un triangle

Si I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC], on a :

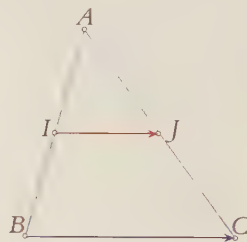
$$\vec{BA} = 2 \vec{BI} \text{ et } \vec{CA} = 2 \vec{CJ},$$

et par différence :

$$\vec{CA} - \vec{BA} = 2 (\vec{CJ} - \vec{CI})$$

$$\text{d'où } \vec{CB} = 2 \vec{IJ}$$

$$\text{ou } \vec{BC} = 2 \vec{IJ}.$$



Ce qui démontre, du même coup, les deux propriétés : $(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \frac{1}{2} BC$.

On retrouve le « théorème des milieux » dans un triangle : « le segment joignant deux milieux des côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et a une longueur moitié ». Ce théorème n'est en fait qu'un cas particulier du théorème de Thalès. ■

Le centre de gravité d'un triangle

Prenons la médiane $[AA']$ du triangle ABC et le point G de ce segment

situé aux $\frac{2}{3}$ de AA' à

partir de A :

on a $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

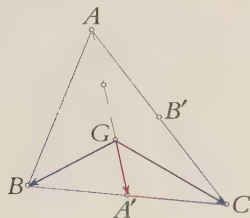
Or on vient de voir que, A' étant le milieu de $[BC]$, on a :

$$\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}), \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

donc :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \textcircled{1}.$$



On peut recommencer avec la médiane $[BB']$:

le point G' situé aux

deux tiers de cette médiane à partir de B vérifie :

$$\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \vec{0} \quad \textcircled{2}.$$

Par différence des égalités

$\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$, on obtient

$$(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{G'A}) + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{G'B}) + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{G'C}) = \vec{0}.$$

D'où $3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$, ce qui montre que les points G et G' sont confondus.

Et on procéderait de même avec la médiane $[CC']$.

On a ainsi démontré vectoriellement plusieurs choses :

- les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G : le centre de gravité de ce triangle.

- Sur chaque médiane,

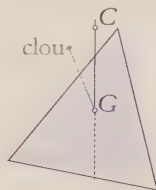
$$\text{on a } \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'};$$

$$\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'};$$

$$\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}.$$

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Le point G est le seul point vérifiant cette propriété.



Ce point G est important dans les problèmes d'équilibre. Si vous suspendez un triangle assez lourd à un clou, il se met en équilibre lorsque le point G se trouve à la verticale du clou...



Et si vous posez le triangle horizontalement sur une pointe, exactement au point G , le triangle doit rester en équilibre... ■

Un quadrilatère quelconque

Soit I et J les milieux respectifs de deux côtés opposés d'un quadrilatère $ABCD$. Soit ω le milieu de $[IJ]$. On a :

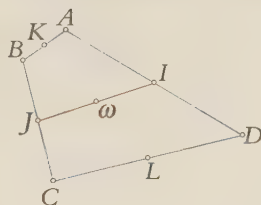
$$2\overrightarrow{\omega I} = \overrightarrow{\omega A} + \overrightarrow{\omega D};$$

$$2\overrightarrow{\omega J} = \overrightarrow{\omega B} + \overrightarrow{\omega C}.$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{\omega I} + \overrightarrow{\omega J} = \vec{0}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{\omega A} + \overrightarrow{\omega D} + \overrightarrow{\omega B} + \overrightarrow{\omega C} = \vec{0}.$$



Le point ω est le centre de gravité du quadrilatère. On a aussi :

$$\overrightarrow{\omega A} + \overrightarrow{\omega B} = -(\overrightarrow{\omega D} + \overrightarrow{\omega C}).$$

Et si l'on désigne par K et L les milieux des deux autres côtés, cela entraîne :

$$2\overrightarrow{\omega K} = -2\overrightarrow{\omega L}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{\omega K} + \overrightarrow{\omega L} = \vec{0}.$$

Ce qui veut dire que ω est aussi le milieu de $[KL]$. $KILJ$ est donc un parallélogramme.

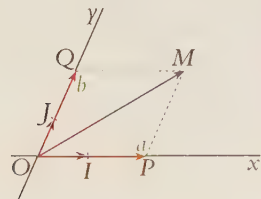
Cette propriété a été découverte par le mathématicien français Pierre Varignon au début du XVIII^e siècle. ■

Les coordonnées d'un vecteur en géométrie

Avec les vecteurs, la géométrie devient un peu du calcul. Avec les coordonnées des vecteurs, on ne manipule plus que des nombres.

Introduction

Trois points non alignés du plan constituent un repère du plan. On pose $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$. On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan.



Pour tout point M du plan, on peut écrire $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ}$; $\vec{OP}$ est colinéaire à $\vec{i}$, on a $\vec{OP} = a\vec{i}$ si $\vec{OP} = a$ et on a $\vec{OQ} = b\vec{j}$ si $\vec{OQ} = b$, soit $\vec{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Le vecteur $\vec{OM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Le couple (a, b) est le couple de coordonnées du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Dire que le vecteur $\vec{OM}$ a pour coordonnées (a, b) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, c'est dire que le point M a pour coordonnées (a, b) dans le repère (O, I, J) ou $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ■

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{AB}$

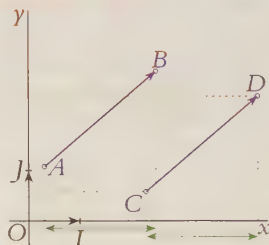
Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit deux points A et B dont on connaît les coordonnées $A(a, b)$ et $B(a', b')$. Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ s'obtiennent par différence.

Si $A(a, b)$ et $B(a', b')$, alors $\vec{AB}(a' - a, b' - b)$.

● Si les points A et B sont confondus, alors $\vec{AB}$ est le vecteur nul et ses coordonnées sont $(0; 0)$.

Un vecteur est nul si et seulement si ses deux coordonnées sont nulles.

● Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs premières coordonnées sont égales et leurs secondes aussi. Connaissant les coordonnées de A, B et C , on sait



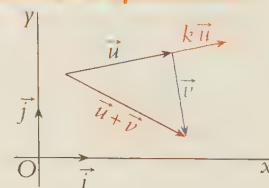
trouver les coordonnées de D lorsque $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Exemple

Si $A(0,3; 1,1)$; $B(2,5; 3)$; $C(2,3; 0,6)$, alors $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(2,2; 1,9)$. Si on appelle d et d' les coordonnées de D , on a le système $\begin{cases} d - 2,3 = 2,2 \\ d' - 0,6 = 1,9 \end{cases}$. On trouve $d = 4,5$ et $d' = 2,5$. Le point D a pour coordonnées $(4,5; 2,5)$. ■

Les coordonnées de vecteurs et opérations

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées a et b ; le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées a' et b' . Alors le vecteur $-\vec{v}$ a pour coordonnées $(-a', -b')$. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(a+a', b+b')$, le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ a pour



coordonnées $(a-a', b-b')$. et enfin $k\vec{u}$ a pour coordonnées (ka, kb) . ■

Applications

Soit trois points A , B et C de coordonnées respectives dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $A(\alpha, \beta)$;

$B(\alpha', \beta')$;

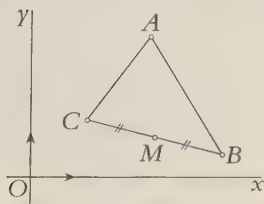
$C(\alpha'', \beta'')$.

● On sait par ailleurs que si M est le milieu de $[AB]$, alors

$2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$, ce qui nous donne donc :

$$x_M = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

$$\text{et } y_M = \frac{\beta + \beta'}{2}.$$



● On sait aussi par l'étude des barycentres que si G est le centre de gravité du triangle ABC , on a la relation :

$$3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

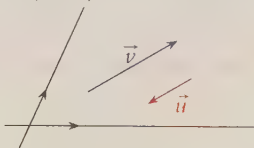
ce qui, traduit en « analytique », s'écrit :

$$x_M = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{3};$$

$$y_M = \frac{\beta + \beta' + \beta''}{3}. \blacksquare$$

La condition de colinéarité de deux vecteurs

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ quelconque, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées (a, b) et (a', b') .



Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et

seulement si $ab' - ba' = 0$. C'est le critère de colinéarité de deux vecteurs.

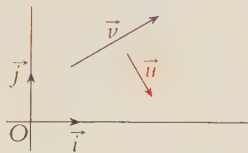
On écrit aussi $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$$\text{ou } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons que si aucune des coordonnées n'est nulle, on peut aussi écrire le critère : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. ■

La condition d'orthogonalité de deux vecteurs

On dit que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires. On appelle base orthonormale une base pour laquelle les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et ont même norme. Dans une base orthonormale, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées (a, b) et (a', b') .



Dans une base orthonormale, les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $aa' + bb' = 0$. C'est le critère d'orthogonalité de deux vecteurs. ■

Le calcul de distance entre deux points

Dans un repère orthonormal, si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (a, b) , on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si $\vec{u} = \vec{AB}$ avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, alors :

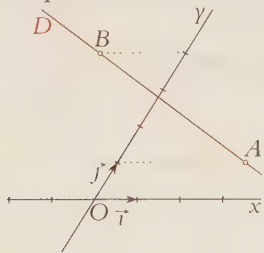
$$AB = \|\vec{u}\| =$$

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \blacksquare$$

Dans le plan, une droite D peut être définie par deux points ou par un point et un vecteur directeur ou un vecteur normal. On cherche une relation qui lie les coordonnées des points de la droite D ; la relation obtenue est ce que l'on appelle une équation de la droite D .

Le cas d'une droite définie par deux points

Soit les points $A(3; 1)$ et $B(-2; 4)$. Par ces deux points, il passe une unique droite D .



Désignons par M un point qui décrit D , c'est ce qu'on appelle un point « courant » de D . Soit (x, y) son couple de coordonnées.

Dire que $M \in D$, c'est dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

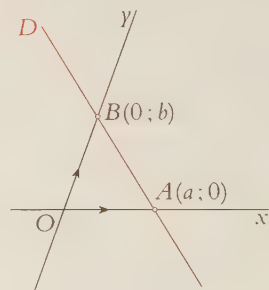
C'est-à-dire que

$$\begin{vmatrix} x-3 & -5 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

puisque $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-3, y-1)$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-5; 3)$. On obtient donc $3(x-3) + 5(y-1) = 0$, c'est-à-dire $3x + 5y - 14 = 0$.

Cette dernière écriture est ce qu'on appelle une équation cartésienne de la droite (AB) (le mot « cartésienne » vient du nom du mathématicien René Descartes).

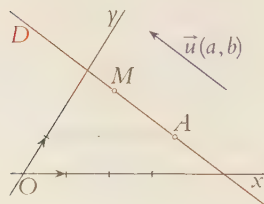
Cas particulier



Si les deux points A et B sont les points d'intersection de D avec chacun des axes, $A(a; 0)$ et $B(0; b)$, on a l'équation de D : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. ■

La droite définie par un point et un vecteur directeur

Considérons la droite passant par $A(3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b)$.



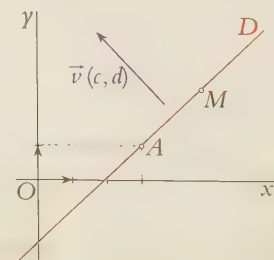
Pour un point courant M de D , on a $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x-3 & a \\ y-1 & b \end{vmatrix} = 0$$

d'où $bx - ay - 3b + a = 0$.

● Dans un repère orthonormal, une droite D est définie par un point et un vecteur **normal**,

c'est-à-dire un vecteur dont la direction est perpendiculaire à celle de D .



Dans ce cas, le vecteur $\vec{AM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}(c, d)$. On utilise donc la condition d'orthogonalité.

Si $M \in D$, alors $c(x-3) + d(y-1) = 0$, soit $cx + dy - 3c - d = 0$.

Dans un plan muni d'un repère, toute droite a une équation du type $ux + vy + w = 0$.

Réciproque

Si les coordonnées (x, y) d'un point du plan sont liées par une relation du type $ux + vy + w = 0$, alors l'ensemble des points $M(x, y)$ est une droite D , à condition que u et v ne soient pas nuls à la fois.

● Cette droite D a pour vecteur directeur, le vecteur $\vec{e}(-v, u)$ et si le repère est orthonormal, elle a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}(u, v)$.

Cas particuliers

● Si $u = 0$: l'équation se présente sous la forme $vy + w = 0$, soit $y = -\frac{w}{v}$. Le vecteur $\vec{e}$ est colinéaire à $\vec{j}$, $(D) // y'y$.

● Si $v = 0$, l'équation se présente sous la forme $ux + w = 0$, soit $x = -\frac{w}{u}$. Le vecteur $\vec{e}$ est colinéaire à $\vec{i}$, $(D) // x'x$.

● Si $w = 0$, la droite passe par l'origine. ■

Les liens avec les équations réduites vues au collège

Si $v \neq 0$, on peut écrire $y = -\frac{u}{v}x - \frac{w}{v}$, qu'on écrit aussi $y = mx + p$. m s'appelle le coefficient

directeur de la droite. Si une droite a une équation réduite de la forme $y = mx + p$, elle n'est pas parallèle à $(y'y)$. ■

Équation cartésienne	Équation réduite
$ux + vy + w = 0$	$y = mx + p$
vecteur directeur $(-v, u)$	vecteur directeur $(1, m)$
coefficient directeur $-\frac{u}{v}$	coefficient directeur m
vecteur normal (u, v)	vecteur normal $(-m, 1)$

Le cas avec deux droites D et D'

Équations cartésiennes	Équations réduites
$D: ux + vy + w = 0$	$y = mx + p$
$D': u'x + v'y + w' = 0$	$y = m'x + p'$
$D // D' \quad uv' - u'v = 0$	$m = m'$
$D \perp D' \quad uu' + vv' = 0$	$mm' = -1$

Chaque fois qu'on parle de droites perpendiculaires ou de vecteur normal, il est sous-entendu que le repère dans lequel on étudie ces droites est orthonormal.

Exemples

$2x + 5y - 3 = 0$; c'est l'équation d'une droite D_1 , de vecteur directeur

$(-5, 2)$ et de vecteur normal $(2, 5)$.

● L'équation $-4x - 10y + 19 = 0$ est celle d'une droite D_2 parallèle à D_1 .

● L'équation $5x - 2y + 17 = 0$ est celle d'une droite D_3 perpendiculaire à D_1 . ■

On considère un repère orthonormal et trois points A , B et C de coordonnées respectives $A(-1; 3)$; $B(3; -1)$ et $C(-5; -3)$. On se propose d'étudier analytiquement les droites remarquables du triangle ABC : médianes, hauteurs et médiatrices.

Les médianes

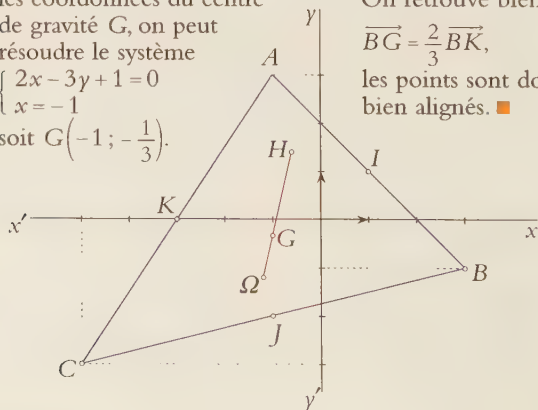
Soit I le milieu de $[AB]$; ses coordonnées sont $(1; 1)$. Le point $M(x, y)$ est un point C de la médiane (CI) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si le déterminant de $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CI}$ est nul.

$$\begin{vmatrix} x+5 & 6 \\ y+3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Après simplification, on trouve $2x - 3y + 1 = 0$ pour équation de (CI) . J est le milieu de $[BC]$; on a $J(-1; -2)$. La médiane (AJ) est parallèle à $y'y$, elle a pour équation $x = -1$. Pour trouver les coordonnées du centre de gravité G , on peut résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

soit $G(-1; -\frac{1}{3})$.



On aurait pu trouver directement les coordonnées de G , isobarycentre ou centre de gravité du triangle ABC :

$$x_G = \frac{-1+3-5}{3} = -1$$

$$y_G = \frac{3-1-3}{3} = -\frac{1}{3}.$$

On peut vérifier que B , G , K sont alignés, K étant le milieu de $[AC]$; en effet $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées

$$\left(-4; \frac{2}{3}\right) \text{ et } \overrightarrow{BK} \text{ a pour coordonnées } (-6; 1).$$

On retrouve bien

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BK},$$

les points sont donc bien alignés. ■

Les hauteurs

Appelons Δ_A la hauteur issue de A . Le point $M(x, y)$ est un point de la droite Δ_A si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CB}$; or les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x+1, y-3)$, celles de $\overrightarrow{CB}$ $(8, 2)$. En appliquant le critère d'orthogonalité $8(x+1) + 2(y-3) = 0$, soit en simplifiant : $4x + y + 1 = 0$, c'est une équation de Δ_A . Soit Δ_C la hauteur issue de C . M appartient à Δ_C si et seulement si $\overrightarrow{CM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, soit $4(x+5) - 4(y+3) = 0$, c'est-à-dire $x - y + 2 = 0$.

L'orthocentre H du triangle est le point d'intersection de Δ_A et Δ_C . On doit résoudre le système

$$\begin{cases} 4x + y + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

soit $H(-\frac{3}{5}; \frac{7}{5})$.

On peut vérifier que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires en vérifiant que les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. On trouve bien $-4 \times \left(\frac{18}{5}\right) + \left(-6 \times \frac{12}{5}\right) = 0$. ■

Les médiatrices

La médiatrice de $[BC]$ est parallèle à Δ_A ; elle a donc pour équation $4x + y + \omega = 0$; elle passe par J , milieu de $[BC]$. On a vu que J avait pour coordonnées $(-1; -2)$, donc $\omega = 6$. Cette médiatrice a pour équation $4x + y + 6 = 0$. De même pour la médiatrice de $[AB]$, on a $x - y + \omega = 0$; elle passe par $I(1; 1)$; l'équation est donc $x - y = 0$.

Pour trouver les coordonnées du point Ω , centre du cercle circonscrit au triangle ABC , il faut résoudre le système

$$\begin{cases} 4x + y = -6 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

soit $\Omega\left(-\frac{6}{5}; -\frac{6}{5}\right)$.

Le rayon est $\Omega A = \frac{\sqrt{442}}{5}$.

On peut démontrer, grâce aux coordonnées des points Ω , G et H que ces trois points sont alignés. $\overrightarrow{GH}$ a pour

coordonnées $\left(\frac{2}{5}, \frac{26}{15}\right)$;

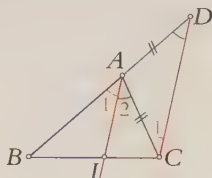
$\overrightarrow{G\Omega}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{5}; -\frac{13}{15}\right)$, on a donc $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{G\Omega}$.



La droite Ω, G, H s'appelle la droite d'Euler du triangle ABC . ■

La bissectrice d'un angle

Soit (AI) la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ du triangle (ABC) . La parallèle à (AI) passant par C coupe (BA) en D .



On a : $\hat{A}_1 = \hat{D}$ et $\hat{A}_2 = \hat{C}_1$, donc $\hat{D} = \hat{C}_1$, ce qui prouve que le triangle ADC est isocèle et $AD = AC$.

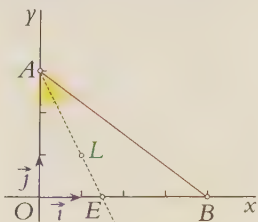
Or $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$ (th. de Thalès),

$$\text{donc } \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}.$$

La bissectrice de $\hat{A}$ partage le côté $[BC]$ dans un rapport égal au rapport des deux autres côtés. ■

Le centre du cercle inscrit

Dans un repère orthonormal, considérons les points $A(0; 3)$ et $B(4; 0)$.



Dans ce triangle rectangle, on a $AB = 5$.

La bissectrice de l'angle $\angle AOB$ a pour équation $y = x$.

La bissectrice de l'angle $\angle OAB$ coupe $[OB]$ en E tel que $\frac{EO}{EB} = \frac{AO}{AB} = \frac{3}{5}$,

$$\text{donc } OE = \frac{3}{2}.$$

E a pour coordonnées

$$\left(\frac{3}{2}; 0\right).$$

On trouve une équation

de (AE) en exprimant que les vecteurs

$$\overrightarrow{AE}\left(\frac{3}{2}; -3\right) \text{ et }$$

$\overrightarrow{AM}(x, y-3)$ sont colinéaires, c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} x & \frac{3}{2} \\ y-3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{soit } 6x + 3y = 9 \text{ et } 2x + y = 3.$$

Pour trouver les coordonnées du point L , centre du cercle inscrit dans ce triangle, on résout le système :

$$\begin{cases} x = y \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

On trouve $L(1; 1)$.

La droite BL est troisième bissectrice.

Le rayon du cercle inscrit dans ce triangle est $r = 1$. ■

Il est naturel d'associer un point du plan à deux nombres. Lorsque ces nombres sont inconnus, l'ensemble des solutions d'une inéquation est représenté par une partie du plan.

Une présentation par l'exemple

On veut dépenser 60 € au maximum pour un achat de cassettes à 8 € l'une et de CD à 12 € l'unité.

Quels sont les achats possibles ?

Si x et y sont respectivement les nombres de CD et de cassettes, il faut résoudre les inéquations :
 $x \geq 0$; $y \geq 0$ et
 $12x + 8y \leq 60$
 avec x et y entiers.

L'inéquation en (x, y)

je simplifie en :

$$3x + 2y \leq 15.$$

Si on pose

$$f(x, y) = 3x + 2y,$$

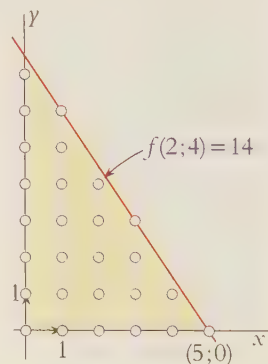
on peut calculer les valeurs de f pour x et y entiers, et comparer à 15.

$$f(1; 1) = 5$$

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5
0	0	3	6	9	12	15
1	2	5	8	11	14	
2	4	7	10	13		
3	6	9	12	15		
4	8	11	14			
5	10	13				
6	12	15				
7	14					

Le tableau de valeurs fait apparaître 27 possibilités pour l'achat.

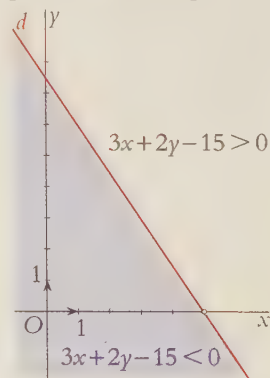
Si on représente tous ces couples par les points dans un repère du plan, ces points sont tous situés au-dessous de la droite d d'équation $3x + 2y - 15 = 0$, ou sur cette droite, avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.



Plus généralement, la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ partage le plan en deux demi-plans.

Pour tous les points de l'un de ces demi-plans, on a $ux + vy + w > 0$ et pour les points de l'autre : $ux + vy + w < 0$.

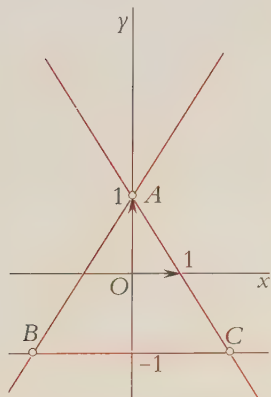
Si l'on veut résoudre une inéquation du premier degré à deux inconnues, on doit s'attacher à trouver un ensemble de points du plan muni d'un repère.



Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, si x et y sont des réels quelconques, l'inéquation $3x + 2y - 15 < 0$ est vérifiée dans l'un des demi-plans ayant pour frontière la droite d . Pour le point $O(0; 0)$, l'inéquation est vérifiée : tous les points du demi-plan qui contient O ont leurs coordonnées qui vérifient l'inéquation étudiée. ■

Les points situés à l'intérieur du triangle ABC ont des coordonnées qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ x - y + 1 > 0 \\ y + 1 > 0. \end{cases}$$



Pour trouver le demi-plan correspondant aux solutions de l'inéquation $ux + vy + z > 0$, le plus simple est de tester le signe de $ux + vy + z$ sur un point aux coordonnées simples. Si ce point est solution, c'est le demi-plan qui le contient qui est solution de l'inéquation, sinon c'est l'autre. Dans le cas du système étudié ici, $-1 < 0$ est vrai, donc $(0; 0)$ vérifie la première inéquation, $1 > 0$ aussi, donc $(0; 0)$ vérifie la seconde et la troisième inéquation. $(0; 0)$ est solution du système. ■

On désigne par x , y et z les trois angles d'un triangle, en degrés.

Puisque $x + y + z = 180$, la connaissance de x et y permet de calculer z : on s'intéresse aux couples (x, y) . On suppose $x \leq y \leq z$.

Première condition : $x \leq y$.

Seconde condition :

$$x + y < 180.$$

Troisième condition :

$$x + x + x \leq x + y + z, \text{ donc}$$

$$3x \leq 180, \text{ d'où } x \leq 60.$$

Quatrième condition :

$$y \leq z, y \leq 180 - x - y,$$

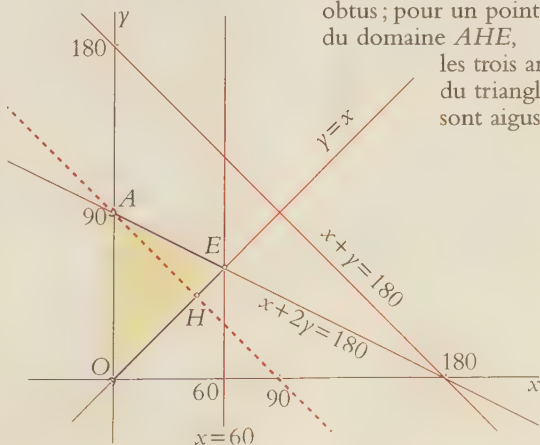
$$\text{d'où } 2y + x \leq 180.$$

Les couples (x, y) sont solutions du système d'inéquations :

$$\begin{cases} x > 0; y > 0 \\ x - y < 0 \\ x + y < 180 \\ x \leq 60 \\ x + 2y - 180 \leq 0. \end{cases}$$

On est amené à tracer quatre droites. L'étude des différents signes conduit à l'ensemble des solutions : ce sont les coordonnées des points intérieurs au triangle OAE , les segments $[OE]$ et $[AE]$ compris, le segment $[OA]$ étant exclu. Pour un point de $[OE]$ (sauf O) : $y = x$, le triangle est isocèle. Pour un point de $[AE]$ (sauf A) : $y = z$, le triangle est isocèle. Pour le point E : $x = y = z = 60$, le triangle est équilatéral. On trouve les triangles rectangles si on prend un point de $[AH]$, intersection de la droite d'équation $x + y = 90$ et du triangle. En H , le triangle est rectangle et isocèle. Pour un point du domaine AHO , le triangle a un angle obtus ; pour un point du domaine AHE ,

les trois angles du triangle sont aigus. ■

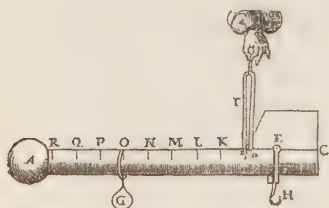


Les problèmes d'équilibre ont déjà été étudiés par l'ingénieur hollandais Simon Stevin (1548-1620).

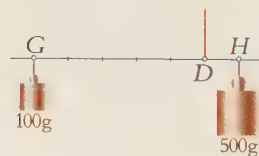
Si des masses différentes sont placées aux extrémités d'un levier, le « point d'équilibre » est le « centre des masses » (bary vient du grec *barus*, « masse pesante »).

Introduction

La balance romaine est une bonne illustration de la notion de barycentre.



Si l'on accroche en H une masse 5 fois plus grande qu'en G, le point



d'équilibre est 5 fois plus près de H que de G :
 $5DH = 1DG$ ou
 $5DH - 1DG = 0$.

Cette notion de « point d'équilibre » de la physique trouve sa généralisation en mathématiques avec la notion de barycentre. ■

Le barycentre de deux points

Soit deux points A et B et deux réels a et b. L'égalité $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ équivaut à $(a+b)\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB}$.

Si $a+b \neq 0$, on a $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Ce qui définit un point G, et un seul, aligné avec A et B.



On l'appelle barycentre des points A et B, affectés respectivement des coefficients a et b (ou des « masses » a et b) ; on l'appelle aussi barycentre de $((A, a), (B, b))$.

Si $a+b=0$ et si $A \neq B$, ce point G n'existe pas. G est donc défini, sous la condition $a+b \neq 0$, par l'une des égalités :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\text{ou } \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \text{ ou}$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}.$$

Dans le cas où $a=0$ (et $b \neq 0$), G est en B, et si $b=0$ (et $a \neq 0$), G est en A.

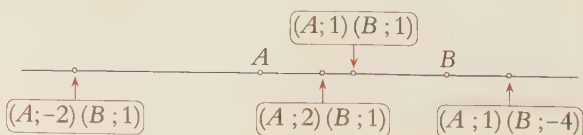
$$\text{Si } a=b, \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Le barycentre est alors le milieu de $[AB]$: on l'appelle isobarycentre de A et B.

$$\text{On a } \frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GB}} = -\frac{b}{a} \text{ (si } a \neq 0\text{).}$$

Si a et b sont de même signe : G est entre A et B et plus près du point qui a le « plus gros » coefficient.

Si a et b sont de signes contraires : G est en dehors du segment $[AB]$, du côté de A si $|a| > |b|$, du côté de B si $|a| < |b|$. ■



Les propriétés du barycentre

● Le barycentre est inchangé si les coefficients sont multipliés ou divisés par un même nombre non nul. On a le même barycentre pour $((A, 10^5); (B, 10^6))$ que pour $((A, 1); (B, 10))$ ou $((A, 0,1); (B, 1))$.

● Pour tout point M , on a $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b} (a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB})$.

● Si les points sont donnés par leurs coordonnées dans un repère :

$$A(x_A, y_A) \quad B(x_B, y_B).$$

Celles du barycentre sont :

$$G\left(\frac{ax_A + bx_B}{a+b}, \frac{ay_A + by_B}{a+b}\right).$$

Deux cas particuliers importants

● Si (MG) est la bissectrice de $\widehat{AMB}$:

$$S_A = \frac{1}{2} MA \times MG \times \sin \widehat{M}$$

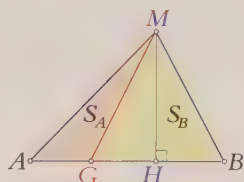
$$S_B = \frac{1}{2} MB \times MG \times \sin \widehat{M}$$

$$\text{d'où } \frac{S_A}{S_B} = \frac{MA}{MB} \text{ et}$$

$$\text{d'où } MB \cdot \overrightarrow{GA} + MA \cdot \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Si l'on désigne par a et b respectivement les côtés opposés à A et B , on a $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Barycentres et aires



G étant un point de $[AB]$ et M un point quelconque non situé sur (AB) , on a :

$$S_A = \text{aire}(AMG) =$$

$$\frac{1}{2} MH \times AG.$$

$$S_B = \text{aire}(BMG) =$$

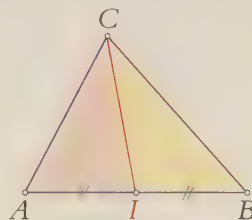
$$\frac{1}{2} MH \times BG.$$

$$\text{Donc } \frac{S_A}{S_B} = \frac{AG}{BG}, \text{ d'où}$$

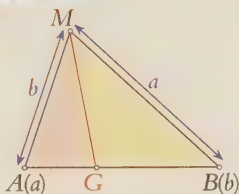
$$S_A \times BG = S_B \times AG.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens contraire, et on a $S_B \overrightarrow{GA} + S_A \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Ainsi, pour tout point M , le point G est barycentre de A et B avec, pour coefficient, les aires des triangles (MGB) et (MGA) .



La médiane MI partage le triangle en deux triangles d'aires égales. ■



Ce pied de la bissectrice issue de M est barycentre de A et B avec des coefficients égaux aux côtés opposés.

Cette propriété est à rapprocher de la propriété des bissectrices démontrée page 351.

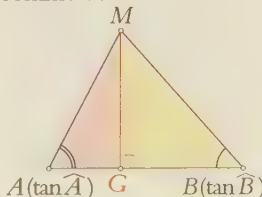
● Si (MG) est la hauteur relative à $[AB]$

$$\tan \widehat{A} = \frac{GM}{GA} \quad \tan \widehat{B} = \frac{GM}{GB}$$

$$\text{donc } \frac{GA}{GB} = \frac{\tan \widehat{A}}{\tan \widehat{B}}, \text{ d'où}$$

$$(\tan \widehat{A}) \overrightarrow{GA} + (\tan \widehat{B}) \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

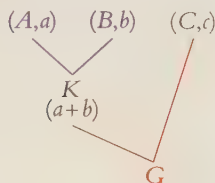
Le pied de la hauteur sur $[AB]$ est barycentre de A et B avec $\tan \widehat{A}$ et $\tan \widehat{B}$ comme coefficients. ■



La notion de barycentre est née de l'idée d'une répartition de poids. Elle permet aussi de belles démonstrations géométriques.

Le barycentre de trois points

Prenons trois points A, B et C



avec leurs coefficients a, b, c . Si $a + b \neq 0$, soit K le barycentre de $((A, a), (B, b))$. Si $a + b + c \neq 0$, soit G le barycentre de $((K, a + b), (C, c))$, on a : $(a + b)\overrightarrow{GK} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$; or $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{a + b}(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB})$,

d'où on tire :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

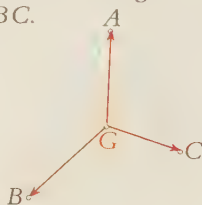
Si, de même, on utilise L , barycentre de $((B, b), (C, c))$ à condition que $b + c \neq 0$ et G' , barycentre de $((L, b + c), (A, a))$, on a :

$$a\overrightarrow{G'A} + b\overrightarrow{G'B} + c\overrightarrow{G'C} = \vec{0}$$

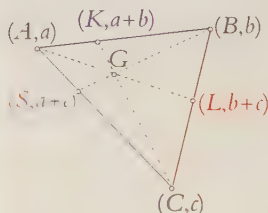
et par différence avec l'égalité vérifiée pour G , on est conduit à : $(a + b + c)\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$, ce qui prouve que G et G' sont confondus.

Pour trois points quelconques A, B et C et trois coefficients a, b, c de somme non nulle, il existe un seul point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ c'est le barycentre du système $((A, a), (B, b), (C, c))$.

Si $a = b = c$, c'est l'isobarycentre des trois points. Ainsi, dans un triangle, l'isobarycentre, qui vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, est le centre de gravité de ABC .



● Le barycentre de trois points est aussi le barycentre de l'un de ces points et du barycentre « partiel » des deux autres (s'il existe) affecté d'un coefficient égal à la somme des coefficients des deux points qu'il remplace. C'est ce qu'on appelle parfois « l'associativité » du barycentre.



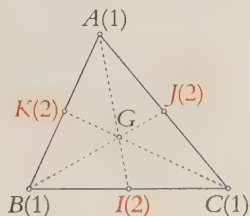
Soit K le barycentre de $((A, a), (B, b))$, L le barycentre de $((B, b), (C, c))$, S le barycentre de $((C, c), (A, a))$, alors G est barycentre de $((K, a + b), (C, c))$ ou de $((L, b + c), (A, a))$ ou de $((S, a + c), (B, b))$. On démontre de la sorte que :

- les trois droites (CK) , (AL) et (BS) sont concourantes en G ;
- les points G, K, C sont alignés, ainsi que G, L, A et G, S, B .

L'outil barycentrique est donc intéressant pour ce type de démonstration. On dispose là d'une véritable démonstration de la concourance des droites joignant chaque point au barycentre des deux autres, et d'autre part de l'alignement du barycentre général avec ces points. ■

Exemples

● Soit trois points A, B, C affectés de coefficients égaux (1, 1, 1). Les milieux I, J, K des côtés sont les barycentres des extrémités de ces côtés. On retrouve alors que les médianes (AI) , (BJ) et (CK) sont concourantes et que le centre de gravité, point de leur intersection, est au tiers à partir de la base; il s'agit en effet du barycentre du pied de la médiane (coefficient 2) et du sommet (coefficient 1);



● ABC étant un triangle,

on pose $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}$,

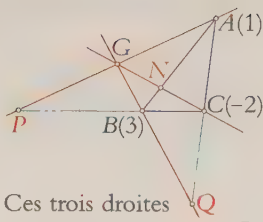
$\overrightarrow{BP} = -2 \overrightarrow{BC}$
et $\overrightarrow{AQ} = 2 \overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les droites (AP) , (BQ) et (CN) sont concourantes.

N est le barycentre de $((A, 1); (B, 3))$.

P est le barycentre de $((B, 3); (C, -2))$.

Q est le barycentre de $((A, 1); (C, -2))$.



Ces trois droites sont concourantes en G , barycentre de $((A, 1); (B, 3); (C, -2))$. ■

Quatre points et plus...

Si l'on envisage n points ($n \geq 2$) notés $A_1, A_2, \dots, A_n$ affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors il existe

un point G unique qui vérifie :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

appelé barycentre du système $\{(A_i, \alpha_i)\} (1 \leq i \leq n)$. On a exactement les mêmes propriétés que pour deux points.

● On l'appelle isobarycentre si tous les coefficients sont égaux.

● Il est inchangé si tous les coefficients sont multipliés par un même réel non nul.

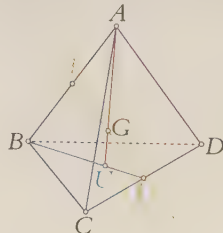
● Pour tout point M :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum \alpha_i} (\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}).$$

Le centre de gravité d'un tétraèdre

Le centre de gravité du tétraèdre $ABCD$ est G tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$



La propriété d'associativité permet de le situer de façon remarquable.

Si I est l'isobarycentre de A et B , c'est-à-dire le milieu de $[AB]$, et J celui de $[CD]$, G est alors le barycentre de $((I, 2); (J, 2))$, c'est-à-dire le milieu de $[IJ]$. Ainsi, ce point G est le milieu commun des trois segments joignant les milieux de deux arêtes opposées.

Si U est l'isobarycentre de B, C, D , alors G est le barycentre de $((A, 1); (U, 3))$

et on a $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AU}$.

Et G se trouve aussi sur trois autres segments joignant l'un des autres sommets au centre de gravité de la face opposée. Il y a ainsi sept droites remarquables passant par ce point G . ■

On sait ajouter deux vecteurs et multiplier un vecteur par un nombre. Pour le moment, rien n'est dit sur un « produit » pour deux vecteurs.

Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?

Dans un repère, si l'on a les vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, le nombre $xx' + yy'$, déterminant des vecteurs, sert à exprimer leur colinéarité et l'égalité $xx' + yy' = 0$

sert à exprimer qu'ils sont orthogonaux dans un repère orthonormal. Ce dernier nombre $xx' + yy'$ a reçu de très nombreuses applications géométriques, autres que

l'orthogonalité.

Il se trouve que ce nombre est aussi un outil très utile en physique pour exprimer le travail d'une force, en économie, en statistiques, etc. ■

Les expressions d'un produit scalaire

Pour deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormal, on appelle produit scalaire de ces deux vecteurs le nombre $xx' + yy'$.

On écrit : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$,

qui se lit « vecteur $\vec{u}$ scalaire vecteur $\vec{v}$ ».

On a aussi :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

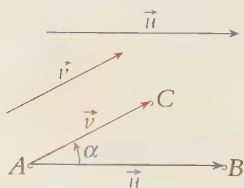
Un calcul au moyen des coordonnées permet de s'en convaincre. ■

Attention !

La somme de deux vecteurs est un vecteur, mais ce produit scalaire est un nombre réel. Cette définition suppose que les coordonnées sont données dans un repère orthonormal du plan.

Des expressions géométriques

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des représentants respectifs de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$.



$$\text{On a : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \alpha.$$

Si C' est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , et si B' est le projeté orthogonal de B sur (AC) , alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}' = \overrightarrow{AB}' \times \overrightarrow{AC}.$$

En particulier, le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires est égal au produit des normes s'ils sont de même sens, à l'opposé de ce produit s'ils sont de sens contraire. Le carré scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est égal au carré de la norme :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = \|\vec{u}\|^2. \quad \blacksquare$$

Des propriétés pour les calculs

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le réel x , on a : $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

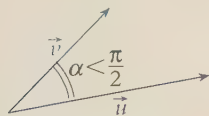
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(x \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u} = x(\vec{v} \cdot \vec{u})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

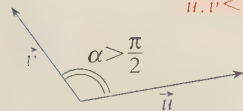
Des propriétés pour la géométrie

Si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Inversement, si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, les points A, B, C étant distincts deux à deux, alors les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. On dit alors que les vecteurs sont orthogonaux. Le produit scalaire est donc un outil pratique pour traduire la *perpendicularité de deux droites*.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$$

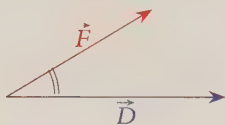
$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$



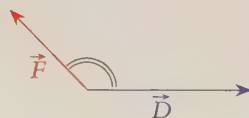
Si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$, alors l'angle des vecteurs est aigu et si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$ alors cet angle est obtus. ■

En physique

Le travail d'une force $\vec{F}$ constante sur un « trajet » représenté par le vecteur $\vec{D}$, est le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{D}$.



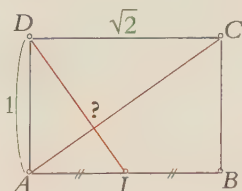
C'est un travail moteur si ce produit scalaire est positif et un travail résistant s'il est négatif. ■



Des exemples d'utilisation du produit scalaire

Dans le rectangle $ABCD$, on a $AB = \sqrt{2}$ et $AD = 1$.

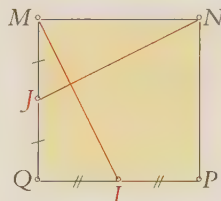
Soit I le milieu de $[AB]$: démontrer que la droite (DI) est perpendiculaire à la droite (AC) .



$$\begin{aligned} \text{On peut calculer } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \\ &\quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI}. \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI} = 0 + 1 + (-1) + 0$ donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$, ce qui montre que les deux droites (AC) et (DI) sont perpendiculaires.

● Dans un carré $MNPQ$, soit I et J les milieux respectifs des côtés $[PQ]$ et $[MQ]$.



Démontrons que (MI) est perpendiculaire à (NJ) . Dans le repère QPM , on a :

$$N(1; 1); I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

$$J\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{JN}\left(1; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{et } \overrightarrow{IM}\left(-\frac{1}{2}; 1\right).$$

On a bien :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JN} \cdot \overrightarrow{IM} &= \\ 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times 1 &= 0. \end{aligned}$$

Le produit scalaire est un outil parfaitement adapté aux calculs de longueurs, d'angles et de distances.

Pour les calculs de longueurs

Le carré scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ est le carré de la longueur AB . Considérons un triangle ABC dans lequel les longueurs des côtés sont désignées par a, b et c . On a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, d'où l'égalité des produits scalaires :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2,$$

ce qui équivaut à :

$$a^2 = AC^2 + AB^2 - 2ACAB$$

ou encore

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A},$$

et deux autres égalités par permutation circulaire :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B}$$

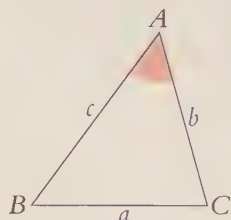
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

Ces égalités, appelées parfois égalités d'Al Kashi, sont intéressantes car elles permettent de calculer les angles connaissant les côtés, ou encore le côté a , connaissant les deux

autres et l'angle $\hat{A}$.

On peut leur adjoindre les égalités :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$



Exemple

Les trois côtés d'un triangle mesurent 8 ; 5 et 10. Pour l'angle $\hat{A}$ opposé au grand côté, on a :

$$\cos \hat{A} = \frac{8^2 + 5^2 - 10^2}{80} \approx$$

$$-0,1375,$$

$$\text{d'où } \hat{A} \approx 97,9^\circ. \blacksquare$$

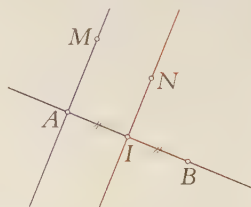
Utilisation en géométrie analytique (repère orthonormal !)

Perpendiculaire :

Si on connaît les coordonnées des points A et B :

l'équation de la perpendiculaire en A à (AB) s'obtient en traduisant au moyen des coordonnées que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

(avec $M(x, y)$). L'équation de la médiatrice de $[AB]$, de milieu I , s'obtient en traduisant que $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. ■



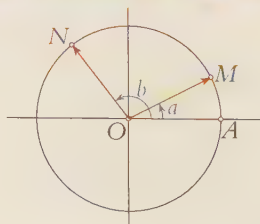
La démonstration d'une formule de trigonométrie

Soit deux points M et N du cercle trigonométrique tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = b$.

$\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $(\cos a, \sin a)$ et

$\overrightarrow{ON}(\cos b, \sin b)$;

$OM = ON = 1$,



$$\text{d'où : } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} =$$

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b ;$$

$$\text{d'autre part } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = OM \times ON \times \cos(\widehat{MON}) = \cos(a - b).$$

On en déduit la formule

$$\cos(a - b) =$$

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b. \blacksquare$$

Équation d'un cercle

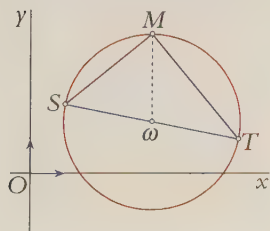
Le point M appartient au cercle de centre ω et de rayon Γ si et seulement si $\|\omega\vec{M}\|^2 = \Gamma^2$, d'où, si les coordonnées de ω sont (a, b) :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \Gamma^2$$

qui s'écrit encore :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

avec $c = a^2 + b^2 - \Gamma^2$.



En revanche, si l'on connaît deux points S et T diamétralement opposés sur le cercle, M appartient au cercle si et seulement si $(MS) \perp (MT)$ ou M en S ou M en T , ce qui se traduit par $\vec{MS} \cdot \vec{MT} = 0$.

Ainsi, avec $S(1; 2)$ et $T(6; 1)$, on a :

$$\vec{MS}(1-x, 2-y)$$

$$\vec{MT}(6-x, 1-y).$$

On a :

$$(1-x)(6-x) + (2-y)(1-y) = 0,$$

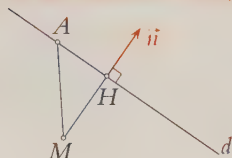
soit :

$$x^2 + y^2 - 7x - 3y + 8 = 0;$$

le centre est :

$$\omega\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

La distance d'un point à une droite



M est un point quelconque, qui se projette en H sur la droite d , et A un point de d dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.

On a $|\vec{MA} \cdot \vec{n}| = MH \times \|\vec{n}\|$,

d'où la distance MH est donnée par : $MH = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.
Soit $ax + by + c = 0$
l'équation de d , $M(x, y)$ et $A(x_0, y_0)$. On a :

$$MH = \frac{|a(x-x_0) + b(y-y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Or $ax_0 + by_0 = -c$ donc

$$MH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \blacksquare$$

Les angles orientés de deux vecteurs non nuls

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$,
donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

Pour le sinus, on a

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

Par exemple, considérons les points $A(\sqrt{3}; 1)$ et $B(-2; -2\sqrt{3})$.

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -4\sqrt{3};$$

$$OA^2 = 4; OB^2 = 16, \text{ d'où}$$

$$\cos(\vec{OA}, \vec{OB}) = -\frac{4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

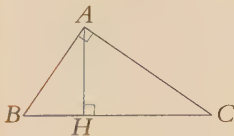
$$\det(\vec{OA}, \vec{OB}) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 1 & -2\sqrt{3} \end{vmatrix} = -4.$$

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2}, \text{ donc}$$

$$\text{donc } (\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi. \blacksquare$$

Démontrer des relations dans le triangle rectangle

Le produit scalaire est pratique pour retrouver des relations entre longueurs dans le triangle ABC rectangle en A .



$\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ se calcule de deux façons :

$$\textcircled{1} \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot \vec{BA}$$

$$\textcircled{2} \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{BC}$$

d'où $BA^2 = BH \times BC$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ se calcule de deux façons :

$$\textcircled{1} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\textcircled{2} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{AH} + \vec{HB}) \cdot (\vec{AH} + \vec{HC})$$

d'où en développant :

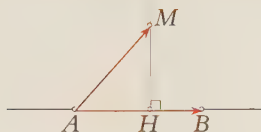
$$AH^2 + \vec{AH} \cdot \vec{HC} + \vec{HB} \cdot \vec{AH} + \vec{HB} \cdot \vec{HC} = 0$$

$$\text{donc } AH^2 = -\vec{HB} \cdot \vec{HC}$$

$$\text{et } AH^2 = HB \times HC.$$

Si on considère une fonction $F : M \mapsto F(M)$ qui à tout point M du plan associe le réel $F(M)$, la ligne de niveau k est l'ensemble des points M pour lesquels on a : $F(M) = k$.

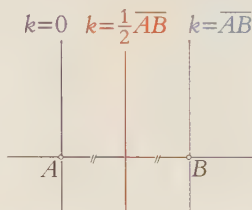
La fonction $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$



A et B sont deux points du plan. À tout point M on fait correspondre le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$. Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB) , qui coïncide avec M s'il est sur (AB) :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB} \text{ sur l'axe } (AB).$$

La ligne de niveau k de cette fonction est l'ensemble des points M caractérisés par $\overrightarrow{AH} = \frac{k}{\overrightarrow{AB}}$.



ce qui détermine un seul point H .

Cet ensemble est la perpendiculaire en H à la droite (AB) .

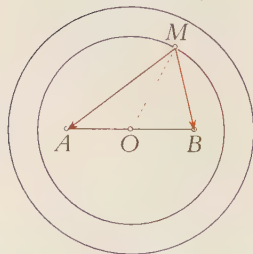
Si $k = 0$: H est en A ; c'est la perpendiculaire à (AB) en A .

Si $k = \overrightarrow{AB}$: H est en B ; c'est la perpendiculaire à (AB) en B .

Si $k = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$: c'est la médiatrice de $[AB]$. ■

La fonction $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Soit O le milieu de $[AB]$.
 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) =$
 $\overrightarrow{OM}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2.$



Si on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, alors $OM^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2 = k$.

La ligne de niveau k est l'ensemble des points M qui vérifient

$$OM^2 = k + \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2.$$

Si $k < -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2$: aucun

point M ne vérifie cette relation.

Si $k = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2$: la ligne de niveau se réduit à O .

Si $k > -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2$: la ligne de niveau est le cercle de centre O et de rayon

$\sqrt{k + \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2}$. Ces lignes de niveau sont des cercles concentriques. ■

Exemple

Supposons $AB = 4$.

On a $OM^2 = k + 4$.

● Si $k = 0$: $OM^2 = 4$.

Le cercle a pour centre O et pour rayon r .

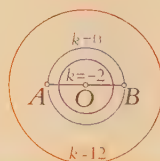
● Si $k = 12$: $OM^2 = 16$.

Le cercle a pour centre O et pour rayon 4 .

● Si $k = -2$: $OM^2 = 2$.

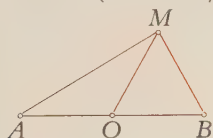
Le cercle a pour rayon $\sqrt{2}$.

● Si $k = -8$, l'ensemble est vide.



A et B sont deux points, a et b deux réels non nuls. Ces fonctions sont parfois appelées fonctions de Leibniz, car celui-ci les utilisait il y a maintenant trois siècles. Elles interviennent dans l'étude des moments d'inertie d'un ensemble de points « massifs ».

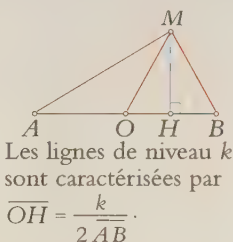
● Cas particulier $a=b=1$. Soit O le milieu de [AB], isobarycentre de A et B. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, d'où $MA^2 = OM^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA}$ $MB^2 = OM^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB}$, d'où $L(M) = MA^2 + MB^2 = 2OM^2 + \frac{1}{2}AB^2$ car $OA = OB = \frac{1}{2}AB$ et $2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 0$.



Les lignes de niveau k, caractérisées par $MA^2 + MB^2 = k$ sont des cercles de centre O pour $k > \frac{1}{2}AB^2$. Pour $k < \frac{1}{2}AB^2$, les lignes de niveau k n'existent pas.

● Cas particulier $a=1; b=-1$. Dans ce cas, le barycentre

n'existe pas car $a+b=0$. On a $L(M) = MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} \cdot (2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}) = 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB}$ et si H est le projeté orthogonal de M sur (AB), $MA^2 - MB^2 = 2OH \times AB$.



Ce sont des perpendiculaires à la droite (AB).

● Cas général avec $a+b \neq 0$, soit G le barycentre de $((A, a); (B, b))$: On a $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$, donc $MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA}$, d'où : $MA^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA}$;

de même : $MB^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB}$, donc $L(M) = (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB})$.

Si G est le barycentre de $((A, a); (B, b))$: $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. D'où : $L(M) = L(G) + (a+b)MG^2$.

Si $a+b > 0$, cette fonction a un minimum lorsque M

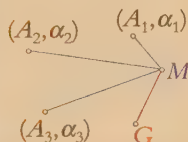
Cas général

Pour n points A_i , de coefficients α_i avec $\sum \alpha_i \neq 0$

$$L(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$$

Si G est le barycentre des $\{(A_i, \alpha_i)\}$, on a :

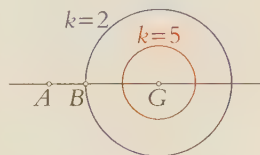
$$L(M) = L(G) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2$$



est en G, et si $a+b < 0$, elle a un maximum lorsque M est en G.

Exemple

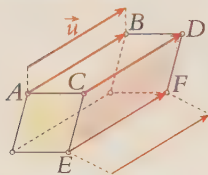
Soit $2AM^2 - 3BM^2$ et $AB=1$. G étant barycentre de $((A, 2); (B, -3))$, on a : $L(M) = 6 - MG^2$.



La ligne de niveau 2 est définie par $MG^2 = 4$. C'est un cercle de centre G, de rayon 2. Si $k < 6$, la ligne de niveau n'existe pas. ■

Les définitions et la pratique du calcul vectoriel en géométrie de l'espace sont tout à fait identiques à ce qui se passe en géométrie plane.

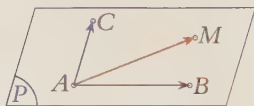
Introduction



Un vecteur $\vec{u}$ a une infinité de représentants : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, ce que l'on peut visualiser avec les sommets d'un parallélépipède. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. La norme de $\vec{u}$, notée encore $\|\vec{u}\|$, est la longueur AB . L'addition et la multiplication par un nombre réel se définissent comme en géométrie plane, avec les mêmes propriétés. Le barycentre du système $((A, a); (B, b); (C, c))$, si $a + b + c \neq 0$, est l'unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Et le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur. Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions sont des droites orthogonales. ■

Une nouveauté : les vecteurs coplanaires

Trois vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires

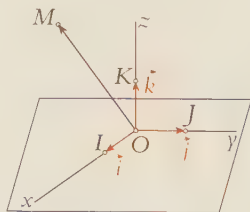


si l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres, par exemple $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, ou si l'on

peut trouver trois réels non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Si $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, les 3 points A, B, C non alignés déterminent un plan P . Dire que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, c'est dire que M est dans ce plan P . ■

Avec des coordonnées

On a vu que tout point M est repéré par trois coordonnées (x, y, z) dans un repère de l'espace : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j}, \overrightarrow{OK} = \vec{k}$.



On a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ne sont pas coplanaires. On dit que (x, y, z) sont les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ pour la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour deux points $A(a, b, c)$ et $B(a', b', c')$:

- Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(a+a'); \frac{1}{2}(b+b'); \frac{1}{2}(c+c'))$.
- Les coordonnées du barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$ se calculent comme en géométrie plane.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(a' - a; b' - b; c' - c)$.

• La norme du vecteur $\overrightarrow{AB} : \|\overrightarrow{AB}\| =$

$\sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}$ dans un repère orthonormal. ■

La traduction de la colinéarité pour deux vecteurs

Les vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ sont colinéaires si $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire si $x = kx'$; $y = ky'$; $z = kz'$ qui s'écrit, si

aucune coordonnée n'est nulle : $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$
ou $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}$.

La traduction de l'orthogonalité

Dans une base orthonormale, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si on a : $xx' + yy' + zz' = 0$.

Exemple

Soit $\vec{u}(1; 2; 3)$; $\vec{v}(3; 4; \gamma)$,

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne peuvent pas être colinéaires car $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{4}$.

Ils sont orthogonaux à condition que

$$(1 \times 3) + (2 \times 4) + 3\gamma = 0$$

c'est-à-dire si $\gamma = -\frac{11}{3}$. ■

La traduction de la coplanarité de trois vecteurs

Les trois vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ sont coplanaires si l'on peut trouver trois réels non tous nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$.

Il s'agit de résoudre le système d'inconnues

α, β, γ :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta x' + \gamma x'' = 0 \\ \alpha y + \beta y' + \gamma y'' = 0 \\ \alpha z + \beta z' + \gamma z'' = 0 \end{cases}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0; 0; 0)$.

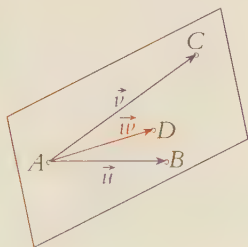
Exemple

$\vec{u}(2; -1; 0)$,
 $\vec{v}(-3; 1; -1)$,
 $\vec{w}(12; -5; 2)$.

En résolvant le système précédent, on trouve une infinité de solutions non nulles : on peut choisir $\alpha = -3$; $\beta = 2$ et $\gamma = 1$, d'où $-3\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

Ces trois vecteurs sont bien coplanaires.

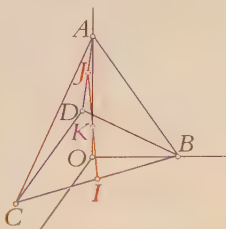
$\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$. Si on pose $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$, $\vec{w} = \vec{AD}$, D est un point du plan (ABC). ■



Un tétraèdre régulier

Soit les points

$A(0; 0; \sqrt{2})$, $B(0; 1; 0)$,
 $C(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0)$, $D(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0)$
et I le milieu de [BC].



En calculant analytiquement $\|\vec{AB}\|$, $\|\vec{BC}\|$, $\|\vec{CD}\|$ et $\|\vec{DA}\|$, on montre que la tétraèdre est régulier. En calculant les produits scalaires $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ et $\vec{AC} \cdot \vec{DB}$, on montre que les côtés opposés

sont orthogonaux.

Montrons que les points O, A, I et D sont coplanaires. $\vec{OI}(\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4}; 0)$ donc

$2\vec{OI} + \vec{OD} = \vec{0}$: O, I, D sont alignés. Les points O, A, I et D sont donc dans le plan défini par le point A et la droite (DI). Si J est le milieu de [AD], la droite (IJ) coupe (OA) en un point $K(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{4})$, d'où le

résultat : dans un tétraèdre régulier, les trois segments joignant le milieu des côtés opposés concourent au centre de gravité du tétraèdre.

Le calcul vectoriel analytique dans l'espace

Les équations paramétriques de plans ou de droites de l'espace ressemblent aux équations paramétriques d'une droite d'un plan. Pour les équations cartésiennes, celles d'une droite de l'espace réservent une surprise...

Les équations paramétriques d'une droite

Une droite d peut être définie, comme dans le plan, soit par deux points, soit par un point A et un vecteur directeur *non nul* $\vec{u}$. Un point M est un point de d si et seulement si $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ et avec les coordonnées $A(a, b, c)$, $M(x, y, z)$ et $\vec{u}(m, n, p)$, on a :

$$\begin{cases} x = a + km \\ y = b + kn \\ z = c + kp \end{cases}$$

avec k réel quelconque. Ces équations constituent une représentation paramétrique de la droite d . À chaque valeur de k correspond un point M et un seul, et inversement.



Exemple

Les équations : $x = 1 + 2k$, $y = 8k$, $z = -4 - 6k$ sont les équations paramétriques de la droite passant par le point $A(1; 0; -4)$ et de vecteur directeur $(2; 8; -6)$. ■

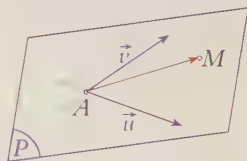
Les équations paramétriques d'un plan

Un plan P peut être défini par trois points non alignés ou encore par un point A et deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Un point M est un point de ce plan P si et seulement si on a deux réels quelconques k et k' tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$, ce qui traduit le fait que les trois vecteurs sont coplanaires et, avec les coordonnées $\vec{u}(m, n, p)$ et $\vec{v}(q, r, s)$, on obtient :

$$\begin{cases} x = a + km + k'q \\ y = b + kn + k'r \\ z = c + kp + k's \end{cases}$$

Ces équations paramétriques contiennent deux paramètres réels k et k' quelconques : à chaque

couple (k, k') correspond un point M du plan P , et inversement.



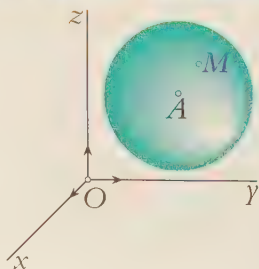
Exemple

Le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 5 + k - 4k' \\ y = -2 + 3k \\ z = -k + 6k' \end{cases}$$

représente le plan passant par le point $A(5; -2; 0)$, dont des vecteurs directeurs sont $(1; 3; -1)$ et $(-4; 0; 6)$ qui ne sont visiblement pas colinéaires. ■

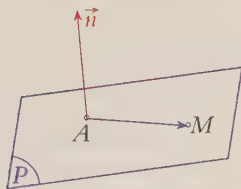
L'équation cartésienne d'une sphère



Soit S la sphère de centre $A(a, b, c)$ et de rayon R . Le point $M(x, y, z)$ est un point de S si et seulement si $AM = R$ autrement dit $AM^2 = R^2$, ce qui se traduit par $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. ■

L'équation cartésienne d'un plan

Si l'on connaît les coordonnées d'un vecteur normal au plan P , c'est-à-dire d'un vecteur non nul de direction perpendiculaire à P , alors la condition d'orthogonalité des vecteurs permet de déterminer une autre équation de P sous une forme plus opérationnelle.



Si P passe par le point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et si $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à P , alors $M(x, y, z)$ est dans P si et seulement si $\vec{AM}$ est

orthogonal à $\vec{n}$, ce qui se traduit par
 $(x - \alpha)a + (\gamma - \beta)b + (\gamma - \gamma)c = 0$;

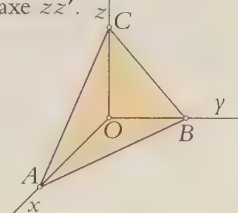
autrement dit
 $ax + by + cz = d$ avec
 $(a, b, c) \neq (0; 0; 0)$. Cette équation est une équation cartésienne du plan P .
 On pourrait d'ailleurs la retrouver à partir des équations paramétriques en éliminant k et k' . On retrouve facilement à partir de l'équation cartésienne les coordonnées d'un vecteur normal : c'est le triplet des coefficients (a, b, c) .

Exemple

Équation d'un plan
 $2x + 5y - 3z = 8$:
 un vecteur normal est
 $(2; 5; -3)$.

L'équation $2x + 5y - 3z = 0$ est celle du plan parallèle au précédent passant par l'origine du repère.

L'équation $2x + 5y = 12$ est celle d'un plan perpendiculaire au vecteur $(2; 5; 0)$, c'est-à-dire perpendiculaire au plan (xOy) . $5z = 8$ est celle d'un plan perpendiculaire à l'axe zz' .

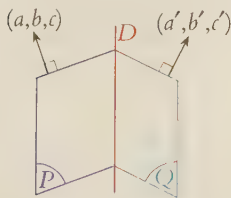


Le plan qui coupe les axes en $A(\alpha; 0; 0)$, $B(0; \beta; 0)$ et $C(0; 0; \gamma)$ a pour équation : $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$. ■

Deux plans et une droite

Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$



Chacune de ces équations est celle d'un plan. Si ces deux plans P et Q se coupent le long d'une droite D ,

alors les points de coordonnées (x, y, z) vérifiant les deux équations à la fois appartiennent à la droite D et inversement. Ces deux équations méritent donc le nom d'équations cartésiennes d'une droite.

Pour le plan P , un vecteur normal est (a, b, c) , et pour Q , un vecteur normal est (a', b', c') . P et Q sont parallèles si et seulement si les vecteurs normaux sont colinéaires, c'est-à-dire si

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ dans le cas de coefficients non nuls. Les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs normaux sont orthogonaux c'est-à-dire si $aa' + bb' + cc' = 0$.

Exemple

Prenons les trois plans :

$$(P) \quad 2x + 8y - 6z = 0;$$

$$(Q) \quad -x - 4y + 3z = 25;$$

$$(R) \quad 7x - y + z = 5.$$

Les plans P et Q sont parallèles, le plan R est perpendiculaire à P et à Q . ■

Le produit de deux nombres est un nombre.

En ce qui concerne les vecteurs, il y a au moins deux sortes de produits, selon que le résultat est un nombre ou un vecteur.

Le produit scalaire de deux vecteurs

Si le repère est orthonormal, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ est le nombre $xx' + yy' + zz'$.
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Toutes les écritures et propriétés vues en géométrie plane sont encore valables en géométrie dans l'espace. Si l'on désigne par C' le projeté

orthogonal de C sur (AB) , on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}' \text{ et}$$

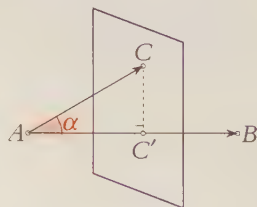
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \cos \alpha$$

avec $\widehat{BAC} = \alpha$.

Les lignes de niveau

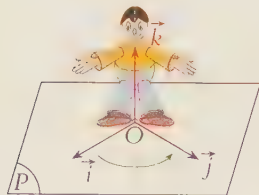
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ sont des plans perpendiculaires à (AB) .

Les lignes de niveau $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, si elles existent, sont des sphères centrées au milieu de $[AB]$.



En particulier, l'ensemble de points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$. ■

Le produit vectoriel de deux vecteurs



$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant un repère orthonormal, on dit que ce repère est direct lorsqu'un observateur placé sur la demi-droite $(O, \vec{k})$, les pieds à l'origine, voit le vecteur $\vec{i}$ à sa droite et $\vec{j}$ à sa gauche. Lorsque l'on a fait choix de cette

orientation pour tous les repères de l'espace, on dit que l'espace est orienté.

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, ou $\vec{u} \times \vec{v}$, défini de la façon suivante :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, en particulier si l'un des deux est nul : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

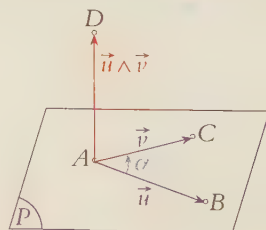
- Sinon, en posant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, le représentant $\overrightarrow{AD}$ de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est tel que :

- La droite (AD) est

perpendiculaire au plan (ABC) .

- Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est direct.

- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times |\sin(\widehat{AB, AC})|$. ■



● $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Plus généralement :
le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.

● $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

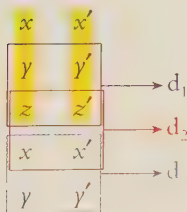
● Dans la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :
 $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

● $\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \beta (\vec{u} \wedge \vec{w})$.

On dit que le produit vectoriel dépend linéairement de chacun de ses termes.

● Avec les coordonnées $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$, les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont d_1, d_2, d_3 avec :

$$\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \\ d_1 \quad d_2 \quad d_3$$



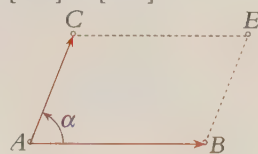
Par exemple, avec $\vec{u}(1; 1; 1)$ et $\vec{v}(0; -1; 2)$, on a :
 $\vec{u} \wedge \vec{v}(3; -2; -1)$. ■

● Le produit vectoriel permet de déterminer rapidement un vecteur normal à un plan défini par trois points A, B et C . Le vecteur tel que $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un tel vecteur, ce qui permet d'écrire une équation cartésienne du plan (ABC) .

● $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ équivaut à : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, et cette propriété permet donc de traduire un alignement de points ou un parallélisme de droites.

● On sait que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \times \sin \hat{A}$.
Donc la norme $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ est égale au

double de l'aire de ABC , c'est-à-dire à l'aire du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$.



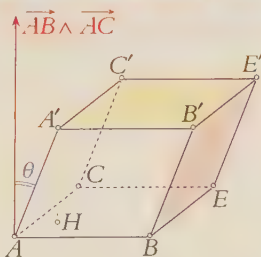
Exemple

Soit les points $A(2; 3; -1)$; $B(3; 4; 0)$; $C(2; 2; 1)$, on a $\overrightarrow{AB}(1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AC}(0; -1; 2)$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(3; -2; -1)$. Une équation du plan (ABC) s'écrit $3x - 2y - z = d$.

Ce plan passe par A , d'où $d = -1$.

L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} \sqrt{9 + 4 + 1}$, soit $\frac{\sqrt{14}}{2}$. ■

Le volume d'un parallélépipède



$ABECA'B'E'C'$ étant un parallélépipède, son volume est la valeur absolue du produit scalaire : $\overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$.
Ce produit s'appelle

le produit mixte des trois vecteurs.

Sur l'exemple précédent, en prenant $A'(5; -8; 1)$, on a $\overrightarrow{AA'}(3; -11; 2)$, d'où $\overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 9 - 22 - 2 = 29$.

On peut enfin en déduire la hauteur $A'H$ du parallélépipède : c'est le quotient du volume par l'aire de la base :

$$AH' = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} \\ AH' = \frac{29}{\sqrt{14}}. \blacksquare$$

Les statistiques sont utilisées depuis très longtemps. Le mot « statistique » vient du latin *status*, « état ».

Une brève introduction historique

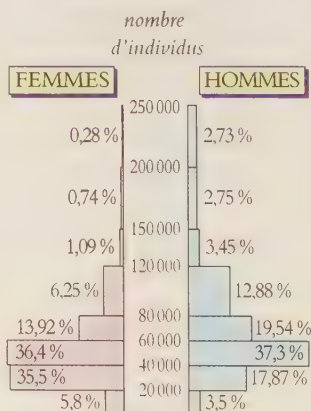
Les premières statistiques sont probablement les recensements effectués à propos des individus et de leurs biens, il y a 4 500 ans en Mésopotamie et en Égypte.

Les empereurs romains tenaient des comptes sur le nombre des soldats et leurs armements.

On utilisa ensuite des statistiques sur la durée de vie des individus d'un pays à l'aide de tables de mortalité, pour les problèmes d'assurances.

Les statistiques sont peu à peu devenues une véritable science dans les problèmes économiques : à partir d'un ensemble

de données sur un échantillon (statistique descriptive) on fait des hypothèses sur une évolution ; les sondages d'opinion sont de nos jours couramment utilisés. ■



Les données statistiques

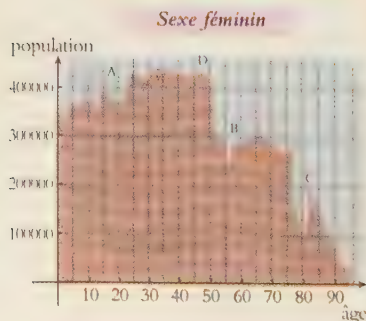
Pour un ensemble donné (la population étudiée), on commence par relever des données : les résultats constituent une série statistique. On peut s'intéresser à une variable statistique ou à plusieurs variables sur la même population : la taille des individus, ou leur poids et leur envergure, etc.

On procède ensuite au classement de ces données. On peut s'intéresser à des caractères qualitatifs (couleur des yeux) ou quantitatifs : dans ce cas, la variable statistique peut prendre des valeurs discrètes (nombre d'enfants) ou des valeurs continues (durée d'un trajet).

Ces données une fois classées donnent lieu à des représentations graphiques et à divers calculs.

Le vocabulaire statistique utilisé à cette occasion est à la fois précis et abondant. ■

La pyramide des âges



Elle indique, à un moment donné, les effectifs des classes d'âge pour les hommes et les femmes dans un pays ou une région donnée. Les comparaisons des pyramides permettent de tirer des conclusions et éventuellement de faire des prévisions sur une évolution. ■

Afin de bien centrer les verres des lunettes, un opticien doit connaître l'écartement interpupillaire mesuré en millimètres. La variable est l'écartement x entre les pupilles des yeux. Voici les relevés de mesures effectuées par notre opticien sur 50 de ses patientes. Ces mesures sont réparties en classes. Ainsi, un écartement x compris entre 55 mm et 56,5 mm est compté dans l'intervalle $[55 ; 56,5[$: c'est une classe de centre 55,75 mm : il y a deux mesures dans cette classe. Le nombre 2 est l'effectif de la classe en question.

Effectif e_i d'une classe
C'est le nombre d'individus pour lesquels la variable a une valeur située dans cet intervalle.

L'effectif total N est la somme des effectifs partiels : ici $N = 50$.



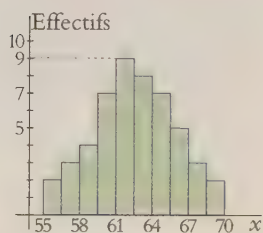
Fréquence pour une classe C'est le quotient de l'effectif de la classe par l'effectif total.

$f_i = \frac{e_i}{N}$. La somme des fréquences est égale à 1.

L'effectif cumulé jusqu'à la valeur x_p est la somme des effectifs correspondant aux valeurs inférieures à x_p .

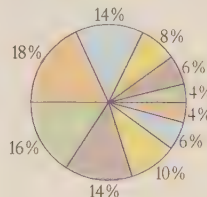
La fréquence cumulée jusqu'à la valeur x_p est la somme des fréquences jusqu'à cette valeur.

Représentations



Les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs.

On utilise un histogramme ou bien une représentation par des secteurs circulaires. ■



Les angles au centre sont proportionnels aux effectifs ou aux fréquences.

Tableau regroupant les données recueillies par l'opticien

Écartement x en mm	Effectif	Effectif cumulé	Fréquence	Fréquence cumulée
$55 \leq x < 56,5$	2	2	0,04 ou 4 %	0,04
$56,5 \leq x < 58$	3	5	0,06	0,10
$58 \leq x < 59,5$	4	9	0,08	0,18
$59,5 \leq x < 61$	7	16	0,14	0,32
$61 \leq x < 62,5$	9	25	0,18	0,50
$62,5 \leq x < 64$	8	33	0,16	0,66
$64 \leq x < 65,5$	7	40	0,14	0,80
$65,5 \leq x < 67$	5	45	0,10	0,90
$67 \leq x < 68,5$	3	48	0,06	0,96
$68,5 \leq x < 70$	2	50	0,04	1

$N = 50$

$\Sigma = 1$

Les paramètres d'une série statistique

Les statistiques sont utilisées depuis très longtemps. Pour rendre compte d'une série statistique, on la caractérise par des nombres significatifs. On définit un certain nombre de paramètres qui sont de deux sortes : les paramètres de position (mode, moyenne, médiane) et les paramètres de dispersion (étendue, écart moyen, variance, écart-type).

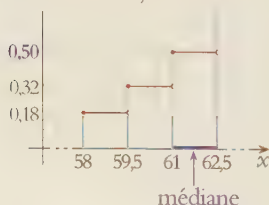
Les paramètres de position

Le *mode*, ou *valeur dominante*, est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif maximum.

Pour une répartition en classes, on parle de classe modale ou dominante : c'est [61 ; 62,5] (exemple page 371).

La *médiane* est la valeur telle que l'effectif des valeurs supérieures est égal à l'effectif des valeurs inférieures. On peut déterminer la médiane à l'aide des fréquences cumulées :

la médiane correspond à la valeur de x pour laquelle la fréquence cumulée atteint 0,50 ou 50 % ; sur l'exemple, c'est une valeur située entre 61 mm et 62,5 mm.



La *moyenne* est notée $\bar{X}$: elle est égale à la somme des valeurs prises par X , divisée par l'effectif total, ce que l'on peut aussi calculer avec les fréquences :

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n e_i x_i = \sum_{i=1}^n f_i x_i.$$

Dans le cas d'une variable avec répartition en

classes, on remplace les valeurs de la classe $[a_i, b_i]$ par le centre de la classe $\frac{a_i + b_i}{2}$ affecté d'un

coefficient égal à l'effectif e_i de cette classe. Ainsi, sur notre exemple, on a les centres 55,75 ; 57,25 ; 58,75 ; ... ; 69,25 avec les effectifs 2 ; 3 ; 4 ; ... ; 2 et on a :

$$\bar{X} = \frac{2 \times 55,75 + 3 \times 57,25 + 4 \times 58,75 + 7 \times 60,25 + 2 \times 69,25}{50}$$

$$\bar{X} = 62,56$$

Exemple

Il est clair que si les données sont réparties en classes, la moyenne dépend de cette répartition, c'est-à-dire de l'amplitude des classes.

Si l'on effectue, sur X , un changement de variable affine, par exemple si l'on pose $Y = aX + b$, la moyenne subit le même changement de variable et on a : $\bar{Y} = a\bar{X} + b$.

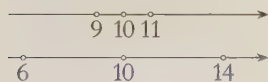
X	0,190	0,209	0,254	0,290	0,302	0,346	0,404
Effectifs	2	4	6	8	7	5	1
$Y = 1000X - 280$	90	71	26	10	22	66	124

Ici on a $\bar{Y} = 5,647$, d'où $\bar{X} = \frac{(\bar{Y} + 280)}{1000} = 0,2856$. ■

Les paramètres de dispersion

Ce sont des paramètres qui rendent compte des écarts à la moyenne de toutes les valeurs de la variable : on peut avoir des séries de même moyenne, avec des dispersions très différentes autour de cette moyenne.

Exemple



Trois exemples pour lesquelles la moyenne est 10.

La variance et l'écart-type

La variance V est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne de chaque valeur de la série, ou des écarts à la moyenne des centres de classe, et l'écart-type σ est la racine carrée de la variance

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} e_i (x_i - m)^2$$

ou encore :

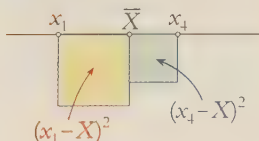
$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} e_i x_i^2 - (\bar{X})^2.$$

La variance est la moyenne des aires de carrés dont les côtés sont $|x_i - \bar{X}|$. Elle s'interprète comme une surface. Plus elle est grande, plus il y a dispersion loin de la moyenne.

L'étendue d'une série est la différence entre la plus grande valeur de la variable et sa plus petite valeur ; sur l'exemple ci-dessus, c'est $11 - 9$ soit 2 et sur le second $14 - 6 = 8$.

L'écart moyen est la moyenne des distances à la moyenne m de toutes les valeurs ; sur notre exemple, on utilise les centres des classes :

$$e_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} e_i |x_i - m|. \blacksquare$$



Dans un changement de variable affine $Y = aX + b$, l'addition de la constante b ne change rien à la variance et dans la multiplication par a , on a :

$$V(Y) = a^2 V(X).$$

Tout se passe comme dans le cas d'une surface pour une similitude. Une translation ne change rien mais une multiplication est amplifiée au carré.

Programmer avec sa calculatrice

Pour effectuer ces calculs (souvent fastidieux) au moyen de votre calculatrice, consulter la notice d'utilisation. Il y a quelques principes généraux à respecter.

- Se placer d'abord dans le « menu » STAT.
- Dans la zone DATA, commencer par effacer des données existantes avec (CLR STAT).
- Dans EDIT, rentrer les données x_i avec les effectifs e_i .
- Procéder aux calculs au moyen de (CALC-1 VAR) qui donne N la moyenne, $\bar{X}$ et l'écart-type.

L'écart-type s'exprime dans la même unité que la variable X elle-même : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

Il s'interprète comme une espèce de moyenne des « distances » à la moyenne, ces distances étant mesurées « à la Pythagore » : une racine carrée de différences au carré.

Dans un changement de variable affine, on a : $\sigma(y) = a \sigma(x)$. ■

La description d'une population statistique est plus précise avec deux variables. Toutefois, la situation se complique...

L'intérêt de l'étude de deux variables

Sur une population donnée, il est souvent intéressant d'étudier de manière simultanée deux (ou plus de deux) variables caractérisant cette population : taille et envergure des individus, puissance des voitures et

consommation, dose d'un médicament et durée de son effet, etc. On recherche ensuite s'il y a une corrélation entre ces variables et on touche alors à d'innombrables applications dans des domaines très variés

comme la recherche en biologie, les études économiques dans un pays, les problèmes de santé... Les statistiques prennent tout leur intérêt dans l'interprétation de cette corrélation, pour les prévisions qu'elle autorise. ■

Température et consommation de fuel

Durant une période d'hiver, Philippe effectue des observations quotidiennes : il relève la température moyenne extérieure (x en

degrés C) et la consommation en fuel (y en litres) de sa chaudière à mazout le même jour. Voici cinq relevés pour ces deux variables :

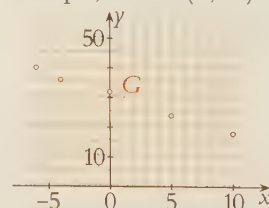
x (en degrés C)	-6	-4	0	5	10
y (en litres)	40	36	32	24	18

Chacune de ces deux variables peut donner lieu à des calculs. On peut calculer, pour ces cinq jours, la moyenne, la variance et l'écart-type de la variable x ; de même pour la variable y . On a $\bar{X} = 1$ °C, $\sigma(x) = 5,86$; $\bar{Y} = 30$; $\sigma(y) = 8$.

Donner une représentation pour x et pour y séparément ne présente qu'un intérêt limité.

Une représentation simultanée des deux variables est par contre intéressante. Au moyen d'un repère du plan, on représente chacun des couples (x, y) par un point dans ce repère, après avoir fait le choix d'unités bien adaptées sur les axes. En particulier, l'origine n'est pas forcément la même sur xx' et sur yy' et les unités ne sont pas égales sur ces deux axes.

On obtient ce que l'on appelle un *nuage de points* représentatif de cette série double. Sur ce nuage, le point moyen est le point G de coordonnées $(\bar{X}, \bar{Y})$: c'est une sorte d'isobarycentre du nuage ! Sur notre exemple, on a $G(1; 30)$.

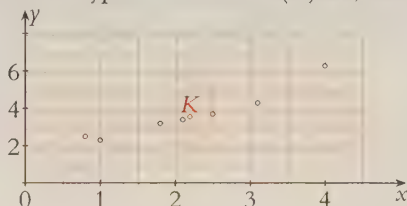


Ces points ne sont pas « tout à fait » alignés, mais on pourra rechercher la « droite » la plus proche, que l'on appelle la droite de régression. ■

Une chaîne de magasins a noté, pour sept de ses filiales, le taux X des frais consacrés à la publicité par rapport aux frais de fonctionnement et le taux Y du bénéfice d'exploitation par rapport au montant des ventes sur une même période, ce qui donne les résultats suivants :

On a comme moyennes $\bar{X} = 2,186$ et $\bar{Y} = 3,671$ et les écarts-types :

$$\sigma(X) = 1,049 \text{ et } \sigma(Y) = 1,245.$$



Sur le nuage de points, le point moyen K a pour coordonnées $(2,186 ; 3,671)$. ■

X (% frais de pub.)	0,8	2,1	2,5	1,8	3,1	4,0	1,0
Y (% de bénéfice)	2,5	3,4	3,7	3,2	4,3	6,3	2,3

L'étude simultanée de trois paramètres

Les substances nutritives contenues dans les aliments se répartissent en trois groupes : les glucides (G), les protéides (P) et les lipides (L). À chaque aliment correspond une répartition en pourcentage (G, P, L) c'est-à-dire que pour une série d'aliments, on a trois paramètres, ce qui donne un tableau du genre du tableau statistique ci-contre :

	$G \%$	$P \%$	$L \%$
Chocolat	70	5	25
Œuf	0	40	60
Sucre	100	0	0
Chou-fleur	70	25	5
Haricots verts	75	25	0
Viande	0	50	50
Beurre, Huile	0	0	100
Épinards	55	40	5
Lentilles	75	25	0

égale à 100 pour tous les aliments. On obtient ainsi une sorte de « carte » pour ces aliments.

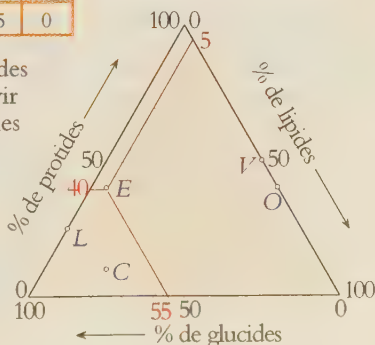
Ainsi, les épinards sont représentés par le point $E(55 ; 40 ; 5)$.

La position de E met en évidence la faiblesse du pourcentage de lipides. ■

La représentation n'est pas aussi simple que dans le cas de deux paramètres : deux axes de coordonnées n'y suffisent plus !

Dans le cas de ces trois paramètres, on a imaginé d'utiliser un triangle

équilateral, chacun des trois côtés peut servir d'axe pour repérer les trois pourcentages G, P, L , en utilisant le fait que la somme des trois variables $G + P + L$ est



Dans le cas de deux variables x et y , lorsqu'il semble y avoir un lien entre x et y , on essaie de préciser cette corrélation au moyen d'une fonction numérique.

La présentation d'un problème de corrélation

Dans l'étude d'une série statistique à deux variables quantitatives (X, Y) , l'observation du nuage de points conduit à des remarques diverses.



En (1) les points sont très dispersés.

En (2) les points sont « presque » alignés.



En (3) ils semblent être sur une courbe particulière.



Rechercher un ajustement pour ces deux variables, c'est déterminer la « meilleure » courbe d'équation $y=f(x)$ qui se rapproche le plus des points du nuage.

Si cet ajustement est de bonne qualité, on dispose avec la fonction f d'un bon « modèle » pour rendre compte de la corrélation entre X et Y .

La recherche d'une corrélation linéaire consiste à trouver la meilleure fonction affine $y = ax + b$. ■

Le coefficient de corrélation linéaire

Le point M_i étant le représentant du couple (x_i, y_i) et $G(\bar{X}, \bar{Y})$ étant le point moyen du nuage, la covariance de X et Y , notée $\text{cov}(X, Y)$, est la moyenne des aires des rectangles de diagonale $[M_i G]$. On a :

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$$

ou encore obtenue par le calcul :

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - (N \bar{X} \bar{Y})$$

Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y noté r , est donné par

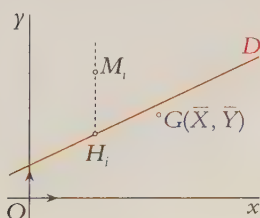
$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Ce nombre r est compris entre (-1) et $(+1)$ (comme un cosinus !).

● Si $|r| = 1$: tous les points du nuage sont alignés.

● Si $|r|$ est voisin de 1 : il y a une bonne corrélation linéaire entre ces points. ■

Soit D la droite d'équation $y = ax + b$. Chaque point M_i du nuage se projette en H_i sur D , parallèlement à l'axe yy' .



Le carré de la distance $M_i H_i$ se calcule en fonction des coordonnées (x_i, y_i) de M_i et des coefficients a et b .

On pose :

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (M_i H_i)^2$$

et on cherche à minimiser cette somme de carrés de longueurs (d'où le nom de la méthode).

La somme S est minimum à condition que :

- la droite D passe par le point moyen G du nuage ;
- le coefficient de x

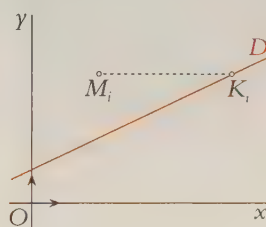
soit pris égal à $\frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$.

On obtient ainsi l'équation réduite de la droite de régression de X en Y qui s'écrit :

$$y - \bar{Y} = a(x - \bar{X})$$

avec $a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$.

On peut aussi considérer les projetés K_i de M_i sur D parallèlement à l'axe xx' :



En minimisant la somme des carrés des longueurs

$M_i K_i$, on trouve une seconde équation : celle de la droite de régression de x en y qui s'écrit :

$$x - \bar{X} = a'(\bar{Y} - y)$$

avec $a' = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)}$.

On a : $aa' = r^2$.

● Si $r^2 = 1$: ces deux droites sont confondues et les points sont alignés. ■

Les statistiques et la calculatrice

Une calculatrice scientifique vous permet d'effectuer facilement tous ces calculs, avec les précautions d'usage.

Il faut savoir que la plupart des calculatrices ne donnent que les coefficients de la première

droite de régression de y en x avec la particularité suivante : le coefficient de x , noté ici a , est désigné par b dans ces calculatrices alors que le terme constant est noté a : l'équation est donc $y = a + bx$.

Quelques exemples concrets

● Pour la température X et la consommation de fuel, on trouve $r = -0,997$ et la droite de régression de y en x s'écrit $y = -1,36x + 31,36$. Cette équation est évidemment intéressante pour prévoir la consommation pour une température qui deviendrait subitement plus basse.

● Pour l'étude du pourcentage X des frais en publicité et Y , pourcentage de bénéfice, on trouve un coefficient $r = 0,963$ et l'équation de la droite de régression de y en x est $y = 1,1425x + 1,174$, ce qui permet sans doute de prévoir un bénéfice si l'on augmente les dépenses publicitaires. ■

De tout temps, les hommes se sont intéressés aux jeux de hasard. Ce mot proviendrait du mot arabe « *al zhar* » désignant un dé à jouer. L'astragale, qui désigne un os du pied, aurait été utilisé par les Grecs et les Romains dans divers jeux de hasard.



Le mathématicien et philosophe français Blaise Pascal.

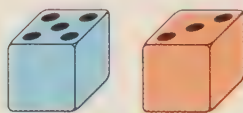
Un historique

Pascal et Fermat furent des précurseurs en calcul des probabilités à propos des jeux de dés et des lancers de pièces. Au XVIII^e siècle, Buffon puis Legendre s'intéressent à ces questions : il semble que Legendre fut l'un des premiers à se rendre compte de l'importance de cette discipline. Avec Huygens, Jacques Bernoulli et Moivre, cette science devient très importante par ses applications. Peu à peu, les probabilités sont utilisées en physique, en biologie, etc. On doit à Kolmogorov, en 1933, une formalisation de la théorie des probabilités. ■

La fréquence d'un « événement »

On lance deux dés bien équilibrés : un bleu et un orange et on s'intéresse au total des points obtenus sur les deux faces apparentes. Ce total est un nombre entier compris entre 2 et 12.

Avant de lancer les dés, on ne peut prévoir quel sera ce total : on a à faire à une expérience aléatoire.



Total 8

On peut s'intéresser à la réalisation de certains événements tels que : « obtenir un total de 8 » ou bien « obtenir 8 ou 5 » ou « obtenir un total pair », etc. On a lancé 500 fois ces deux dés et noté chaque fois le total obtenu :

L'événement « le total est 8 » est réalisé 66 fois sur 500 lancers soit une fréquence de 0,132 ou 13,2 %.

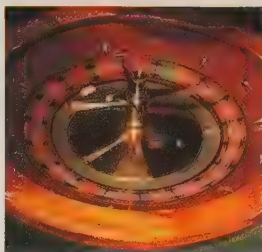
L'événement « le total est 3 » a une fréquence de 0,056 soit 5,6 %.

La fréquence de l'événement « le total est pair » s'obtient en ajoutant les fréquences de tous les totaux pairs : on trouve 0,496 et la fréquence de l'événement contraire « le total est impair » est la différence $1 - 0,496$, soit 0,504.

Si ces deux dés sont utilisés à l'occasion d'un jeu de hasard, le joueur qui parie sur un total 8 semble avoir plus de chances de gagner que celui qui parie sur un total 3, si l'on estime que cette simulation de 500 lancers est digne de confiance... ■

Total	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'apparitions	13	28	43	58	72	85	66	55	40	26	14

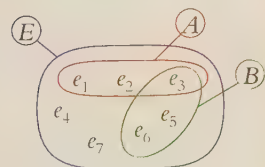
Une probabilité est un modèle théorique pour rendre compte des « chances » de réalisation d'un événement, conforme aux fréquences. On s'intéresse à une expérience aléatoire dont l'ensemble des issues possibles est un ensemble fini E . Un événement élémentaire est un événement réalisé pour une seule issue.



Une probabilité sur E est une fonction qui, à tout événement A , associe sa probabilité notée $p(A)$, avec les propriétés énumérées dans l'encadré ci-dessous. ■

À retenir

- $0 \leq p(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités de deux événements contraires est égale à 1 : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.
- La probabilité d'un événement quelconque est la somme des probabilités des événements élémentaires qui réalisent A .
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Si les événements F, G, H sont deux à deux incompatibles alors : $p(F \cup G \cup H) = p(F) + p(G) + p(H)$.



L'événement « A et B » est réalisé si A et B sont réalisés en même temps : on le note $A \cap B$. Les deux événements C et D sont incompatibles s'ils ne peuvent se réaliser en même temps.

Le modèle pour les lancers des deux dés

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Total 8 !

Un lancer de deux dés conduit à 6×6 , soit 36 événements élémentaires, soit 36 couples (a, b) où a et b prennent les valeurs de 1 à 6. Si les dés sont bien équilibrés, la probabilité est la même pour

tous ces couples, soit $\frac{1}{36}$

pour chacun d'eux, c'est-à-dire pour chacun des événements élémentaires. L'événement A : « Le total est 8 » est réalisé pour cinq couples comme on le voit sur le tableau.

La probabilité de A est la somme de 5 probabilités égales à $\frac{1}{36}$, soit

$$p(A) = 5 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \approx 0,139$$

(proche de la fréquence observée).

C'est une modélisation pour l'expérience aléatoire envisagée. ■

L'équiprobabilité et le dénombrement

La probabilité d'arrivée d'un événement est toujours de $1/2$ disent les béotiens : en effet, soit il se produit, soit il ne se produit pas. Cette vision est un peu trop simple...

La situation d'équiprobabilité

Dans l'exemple du jeu de dés, tous les événements élémentaires sont supposés avoir la même probabilité : c'est ce que l'on appelle une situation d'équiprobabilité.

Dans cette hypothèse, s'il y a n issues possibles, chaque événement élémentaire a une probabilité

égale à $\frac{1}{n}$.

Si l'événement A est réalisé pour k issues qui lui sont favorables, alors sa probabilité est :

$k \times \frac{1}{n}$, soit

$p(A) = \frac{k}{n}$, ou encore :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre de toutes les issues possibles}}$$

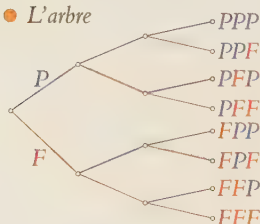
Pour calculer une probabilité dans le cas d'équiprobabilité, on est confronté à des questions de dénombrements : calculer le nombre des issues possibles ainsi que le nombre des issues favorables à un événement. ■

Les premières techniques de dénombrement

● Le tableau

Pour l'exemple du lancer de deux dés, on a dénombré des couples, c'est-à-dire le nombre des cases d'un tableau à double entrée.

● L'arbre



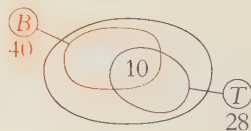
On jette successivement trois pièces de monnaie bien équilibrées. On peut utiliser un arbre : à la première branche, deux possi-

bilités, P ou F , puis deux possibilités au second lancer, etc., soit au total $2 \times 2 \times 2$ soit 8 cas possibles. Il y a donc 8 branches au bout de l'arbre.

L'événement « obtenir 3 PILE » est réalisé une seule fois, « 2 PILE » l'est 3 fois, ainsi que « 1 PILE » et l'événement « 0 PILE » est réalisé une seule fois.

● Le diagramme

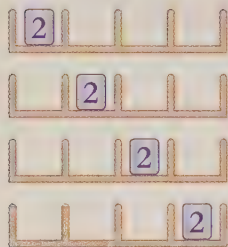
Dans un club de 60 joueurs de cartes, 40 jouent au bridge, 28 au tarot et 10 jouent à ces deux jeux : on peut visualiser cette situation au moyen d'un diagramme de Carroll ou un diagramme de Venn.



Le cardinal d'un ensemble fini étant le nombre de ses éléments, on a $\text{card}(B) = 40$, $\text{card}(T) = 28$ et $\text{card}(B \cap T) = 10$.

L'observation du diagramme permet de dire que : $\text{card}(B \cup T) = 40 + 28 - 10$ $\text{card}(B \cup T) = 58$.

Il y a deux adhérents qui jouent à autre chose.



On dispose de quatre jetons portant les nombres

1, 1, 2 et 4.

On tire ces jetons les uns après les autres et on les place dans les quatre cases d'un casier : on obtient un nombre de 4 chiffres. Combien peut-on former de tels nombres ?

Pour le jeton 2 on a quatre positions possibles. Pour le jeton 4 il reste trois places possibles et les deux cases restantes sont obligatoirement occupées par les deux jetons marqués 1, ce qui fait au total 4×3 , soit 12 possibilités. ■

Des applications aux probabilités

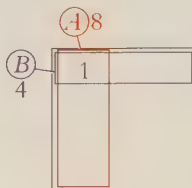
Dans tous ces exercices, on se place en situation d'équiprobabilité.

Exemples

● Dans un jeu normal de 32 cartes, on tire au hasard une carte.

Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur ou un roi ?

Quelle est la probabilité d'obtenir soit un cœur soit un roi ?



Soit A l'événement « Tirer un cœur » :

on a $p(A) = \frac{8}{32}$.

Soit B l'événement « Tirer un roi » :

on a $p(B) = \frac{4}{32}$.

On cherche $p(A \cup B)$:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32}$$

$$\text{soit } p(A \cup B) = \frac{11}{32}$$

Pour la seconde question, d'après le diagramme, on peut dire que le nombre des cas favorables à cet événement F est $7 + 3$,

$$\text{d'où } p(F) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

● On considère l'équation d'inconnue x : $x^2 + px + q = 0$.

Le coefficient p est obtenu en jetant un dé rouge et q en jetant un dé vert. Quelle est la probabilité pour que cette équation ait deux racines réelles distinctes ?

$q \backslash p$	1	2	3	4	5	6
1	-	-	-	-	-	-
2	0	-	-	-	-	-
3	+	+	-	-	-	-
4	+	+	+	0	-	-
5	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+

Signe de $\Delta = p^2 - 4q$.

Dans le tableau ci-dessus donnant tous les couples (p, q) , on fait apparaître le signe du discriminant de cette équation : il y a 17 cas favorables à l'événement A : « il y a deux racines réelles »,

$$\text{d'où } p(A) = \frac{17}{36} \quad \blacksquare$$

Le prince de Toscane

Le prince de Toscane demanda à Galilée pourquoi lorsque l'on lance trois dés, on obtient plus souvent la somme DIX que la somme NEUF, bien que ces deux sommes soient obtenues chacune de SIX façons différentes ? Mais ces 12 événements ne sont pas des événements

équiprobables. En considérant tous les triplets possibles, on montre que la somme DIX a une probabilité de $\frac{25}{216}$ et

la somme NEUF une

probabilité de $\frac{27}{216}$.

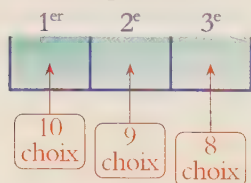
Il fallait beaucoup jouer pour découvrir une telle différence...

Statistiques et probabilités : des formules pour dénombrer

Dans les situations d'équiprobabilité, il est très souvent nécessaire de dénombrer. Il faut savoir reconnaître les vrais « arrangements » et les vraies « combinaisons ».

Les arrangements : lister sans répétition

Dix chevaux sont au départ d'une course et on s'intéresse aux trois premiers : il n'y a pas d'ex æquo ! Combien d'arrivées différentes sont-elles possibles ?



Le premier arrivé est choisi parmi 10, le deuxième parmi les 9 qui

restent et le troisième parmi les 8 restants, ce qui fait au total $10 \times 9 \times 8$ soit 720 arrivées possibles. On établit des listes ordonnées de trois chevaux choisis parmi 10, sans répétition : c'est ce que l'on appelle des arrangements de 10 éléments pris 3 à 3. Le nombre de ces arrangements est :

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8.$$

Plus généralement, on appelle arrangement de n objets pris p à p ($n \geq p$)

toute liste ordonnée, sans répétition, de p objets choisis parmi n .

Le nombre de ces arrangements est $A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$

(p facteurs).

C'est le produit de p facteurs entiers allant en décroissant à partir de n . En particulier, si $n = p$ on a $A_n^n = (n-1)(n-2) \dots \times$

$$2 \times 1 = n!$$

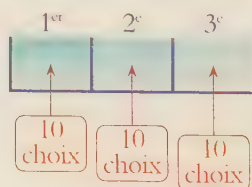
ce qui se lit « n factorielle ». Ces arrangements de tous les n objets sont appelés des permutations. ■

Les listes avec répétition

Dans chacune des cases d'un casier à trois places, on écrit une lettre choisie parmi les dix lettres de A à J , avec répétition possible. Combien de « mots » peut-on ainsi écrire ?

Le nombre de ces mots est : $10 \times 10 \times 10$ soit 10^3 . On a établi des listes ordonnées de trois éléments choisis parmi dix, mais cette fois avec répétition. Plus générale-

ment, le nombre des listes ordonnées avec répétition de p éléments choisis parmi n est égal à n^p . ■



Les combinaisons

Dans un sac, il y a dix jetons différents.

On en prend simultanément trois au hasard. De combien de

façons peut-on choisir ces trois jetons ? Dans ce choix, on ne s'occupe pas de l'ordre : on veut une partie à trois éléments d'un ensemble de dix éléments : c'est ce que l'on appelle une combinaison de 3 éléments choisis parmi 10.

Leur nombre est

$$\frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120.$$

On le note C_{10}^3 ou $\binom{10}{3}$.

On écrit $C_{10}^3 = 120$.

Plus généralement, une partie de p éléments d'un ensemble de n éléments s'appelle une combinaison. Le nombre de telles combinaisons est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p}$$

$$\text{ou encore } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Par convention : $0! = 1$,

donc $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$. ■

Les propriétés de ces coefficients

$$C_n^1 = n \text{ et } C_n^{n-1} = n;$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$C_n^p = C_n^{n-p},$$

par exemple : $C_{15}^{12} = C_{15}^3$.

Formule de Pascal :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

Pour les petites valeurs de n et de p , on obtient les coefficients C_n^p au moyen du triangle de Pascal,

1	1	déjà connu			
1	2	1	de mathéma-		
1	3	3	1	ticiens	
1	4	6	4	1	chinois.
1	5	10	10	5	1

Des applications

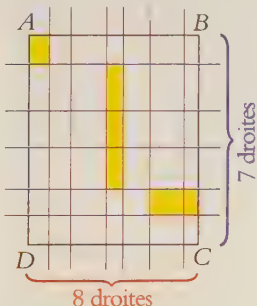
● Somme des coefficients du binôme :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

C'est le nombre de toutes les parties d'un ensemble fini de n éléments.

● $ABCD$ est un rectangle.

On trace six parallèles à (AD) et cinq parallèles à (AB) : combien y a-t-il de rectangles au total sur cette configuration ?



Choisir un rectangle, c'est choisir deux verticales parmi 8 et deux horizontales parmi 7.

Il y a donc C_8^2 façons de choisir deux verticales, soit 28. À chacune de

ces 28 façons, on peut

associer C_7^2 façons de choisir deux horizontales, soit 21.

Il y a donc 28×21 , soit 588 rectangles dans cette figure.

● Savoir simplifier.

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1);$$

de même :

$$\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

● Résoudre des équations.

Dans un ensemble fini, il y a 13 fois plus de parties à 4 éléments que de paires (parties à deux éléments) : quel est le cardinal de l'ensemble ?

On doit résoudre l'équation d'inconnue n :

$$C_n^4 = 13 C_n^2.$$

On trouve

$$n^2 - 5n - 150 = 0$$

dont les solutions sont 15 et -10 et, bien sûr, seule la première est à retenir. ■

La formule du « binôme de Newton »

n est un entier naturel non nul quelconque. Cette formule est vraie pour tous réels a et b et pour tous complexes a et b .

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$+ C_n^k a^k b^{n-k} + \dots + C_n^0 b^n.$$

Statistiques et probabilités : des probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements. On peut se demander dans quel cas la réalisation de l'un dépend de celle de l'autre.

Des probabilités conditionnelles

On s'intéresse à 200 voitures de cylindrée X (2 cv; 3 cv; 4 cv) pour lesquelles on a déterminé la durée moyenne Y (en milliers de km) d'un train de pneumatiques. Sur le tableau statistique (tableau de contingence), les sommes en colonne donnent des effectifs pour X , appelés *effectifs marginaux*: sur 200 voitures par exemple, on a dénombré 60 de 2 cv, soit 30 %.

200 voitures				
$Y \backslash X$	2	3	4	
20	2	16	58	38 %
25	10	40	14	32 %
30	48	6	4	30 %
	30 %	32 %	38 %	

La fréquence 0,30 est une *fréquence marginale* en X ; de même pour $X=3$ et pour $X=4$. Les sommes en ligne donnent les effectifs et les fréquences marginales pour les valeurs de Y : pour $Y=25$, on a 64 voitures soit une fréquence marginale de 0,32. Il y a 10 voitures correspondant à la fois à $X=2$ et $Y=25$, soit une *fréquence relative* $\frac{10}{60}$ de l'événement

$(Y=25)$ par rapport aux voitures pour lesquelles on a $(X=2)$; si l'on sait que $(X=2)$, il y a 10 chances sur 60 pour que $(Y=25)$ soit réalisé. C'est cette «relativité» qui est à la base des probabilités conditionnelles. ■

L'indépendance pour une probabilité

On dit que les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p (appelée aussi *indépendance stochastique*) si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, ce qui équivaut à dire, pour des événements de

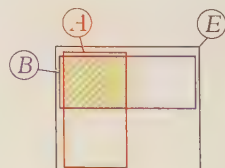
probabilité non nulle $p(B) = p_A(B)$. Il faut prendre garde au fait que l'*indépendance* qui est ici définie de manière algébrique dépend de la probabilité p . Il ne faut pas la confondre avec l'*incompatibilité des événements*. ■

La probabilité conditionnelle

Dans l'ensemble E des issues associées à une expérience aléatoire, on envisage deux événements A et B de probabilité non nulle.

On appelle *probabilité de «A sachant B»*, ou encore probabilité «si B de A », le quotient noté $p_B(A)$ ou $p(A/B)$ et défini par :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$



C'est une nouvelle probabilité, liée à la probabilité p définie au préalable sur E : cette probabilité a toutes les propriétés d'une probabilité.

Ainsi $p_B(A) + p_B(\bar{A}) = 1$.

- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $p_B(A) = 0$ et $p_A(B) = 0$.
- Si $A \cap C = \emptyset$, alors $p_B(A \cup C) = p_B(A) + p_B(C)$. Pour une *intersection* de deux événements, on a $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$. ■

Des exercices d'application

Points clés

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire deux jetons et on envisage les deux événements :
 A : « le premier jeton tiré est pair »,
 B : « le second jeton tiré est pair »,
 La probabilité de $A \cap B$ dépend du type de tirage envisagé.

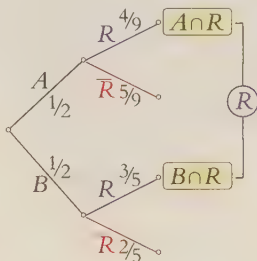
S'il y a remise du premier jeton après le premier tirage, $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$;
 les événements sont indépendants.
 En revanche, s'il n'y a pas remise, on a $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p_A(B) = \frac{4}{9}$,
 d'où $p(A \cap B) = \frac{2}{9}$.
 Les deux événements ne sont pas indépendants.

● Un sac S contient 9 boules dont 5 rouges et un sac T contient 5 boules dont 3 rouges.



On choisit l'un des sacs au hasard et une boule dans ce sac : on constate qu'elle est rouge : quelle est la probabilité pour qu'elle provienne du sac T ?

Si A est l'événement « choisir le sac S », B l'événement « choisir le sac T » et R l'événement « la boule est rouge », il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $p_R(A)$, puisque l'événement R est « réalisé ». Un arbre « séquentiel » peut aider à comprendre !



On a : $p(A \cap R) = p(A)p_A(R) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$.
 Il faut alors calculer $p(R)$ que l'on ne connaît pas.
 Or :

$$R = (R \cap A) \cup (R \cap B) \quad (\text{probabilités totales}),$$

$$d'où : p(R) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{26}{45}.$$

d'où $p_R(A) = \frac{5}{18} \div \frac{26}{45} = \frac{25}{52}$.
 Ce type de problème a été étudié par Bayes comme probabilité d'une « cause » : quel est le sac tiré (quelle est la cause) sachant réalisé un événement (la boule est rouge) ?

● On lance deux dés :
 A est l'événement « la somme obtenue est 8 » et B est l'événement « le produit est 12 ».
 Ces événements sont-ils indépendants ? On se reportera au tableau p. 379 des 36 couples possibles avec deux dés.

(6; 2)	(3; 5)	(4; 4)
(2; 6)	(5; 3)	
(3; 4)		
(4; 3)		

$S=8$
 B
 $P=12$

A est réalisé 5 fois :

$$p(A) = \frac{5}{36}$$

et B est réalisé 4 fois :

$$p(B) = \frac{4}{36}.$$

D'autre part « A et B » est réalisé 2 fois : ces événements ne sont pas incompatibles et on a

$$p(A \cap B) = \frac{2}{36},$$

qui n'est pas égal à $p(A) \times p(B)$, donc ces événements ne sont pas indépendants.

On a par ailleurs

$$p_A(B) = \frac{2}{5} \text{ et } p_B(A) = \frac{1}{2},$$

ce que l'on peut déterminer facilement en examinant les couples favorables à A ou à B , ce qui confirme la non-interdépendance. ■

Devant un exercice de probabilités, il est important de reconnaître le bon « modèle » à utiliser.

Une histoire d'ascenseur...

Cinq personnes attendent au rez-de-chaussée l'ascenseur qui dessert six étages. Quelle est la probabilité pour que toutes descendent au 4^e ? Et pour que toutes descendent au même étage ?

Comme souvent, l'équiprobabilité du choix de l'étage pour chaque personne est sous-entendue : sans cette hypothèse, on ne peut rien faire ! Une « issue » de l'expérience « les cinq personnes descendent à l'un des six



étages » est une liste ordonnée de CINQ numéros choisis parmi SIX, avec répétition possible : le nombre de ces possibilités est donc 6^5 , soit 7 776. Pour l'événement

A : « toutes descendent au 4^e », la liste des descentes est unique : 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 donc

$$p(A) = \frac{1}{7776}.$$

Pour l'événement B : « Toutes descendent au même étage », il y a 6 listes favorables donc

$$p(B) = 6 p(A) = \frac{1}{1296}. \blacksquare$$

Avec des haricots de couleurs...

Un sac contient deux fois plus de haricots blancs que de haricots rouges : $2n$ blancs et n rouges. On tire trois haricots au hasard. Quelle est la probabilité de choisir deux blancs et un rouge ? Que devient cette probabilité si n est « très grand » ?



La probabilité de cet événement est

$$p_n = \frac{C_{2n}^1 \times C_n^2}{C_{3n}^3}$$

soit

$$p_n = \frac{2n(2n-1)}{(3n-1)(3n-2)}$$

On a bien sûr $p_1 = 1$.

La suite p_n est une suite décroissante ; c'est une suite convergente de

limite $\frac{4}{9}$. $\blacksquare$

Le tirage de cartes

D'un jeu de 32 cartes normales, on tire simultanément deux cartes avec équiprobabilité.



Quelle est la probabilité de l'événement E « obtenir un seul roi et un seul cœur » ?

Le nombre de toutes les issues possibles est un nombre de combinaisons de deux éléments choisis parmi 32 soit

$$C_{32}^2 = \frac{32 \times 31}{2} = 496.$$

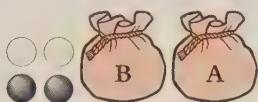
Le jeu comporte 1 roi de cœur, 3 autres rois, 7 autres cœurs et 21 autres cartes : l'événement E peut être considéré comme la réunion de deux événements incompatibles : F : « tirer le roi de cœur et une autre carte » ou G : « tirer un autre roi et un autre cœur ».

$$p(F) = \frac{21}{496} \text{ et } p(G) = \frac{3 \times 7}{496}$$

soit $p(E) = p(F) + p(G)$

$$p(E) = \frac{42}{496} = \frac{21}{248}. \blacksquare$$

Un émîr, lassé de son astrologue et de ses prévisions approximatives, décide de le condamner.



Cependant, bon prince, il lui laisse une chance de s'en tirer. Le condamné dispose de quatre boules, deux blanches et deux noires, qu'il doit répartir entre deux sacs.

Le prince choisit un sac au hasard et une boule dans ce sac : si la boule est noire, la sentence sera exécutée, si elle est blanche l'astrologue

a la vie sauve. Comment notre astrologue va-t-il répartir les boules pour s'assurer un maximum de chances ?

Il est bien entendu qu'il y a équiprobabilité dans le choix des sacs A et B, et dans le choix des boules dans le sac choisi. On peut envisager une répartition :

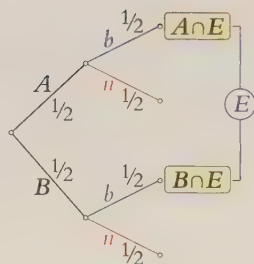
par exemple une blanche et une noire dans chacun des sacs A ou B.

Si E désigne l'événement « tirer une boule blanche », il s'agit de calculer $p(E)$.

Ici, E peut se réaliser de deux manières :

$$E = (A \cap E) \cup (B \cap E)$$

$$p(E) = p(A) \times p_A(E) + p(B) \times p_B(E) = \frac{1}{2}$$



Il convient ensuite d'envisager toutes les autres répartition possibles en calculant chaque fois $p(E)$.

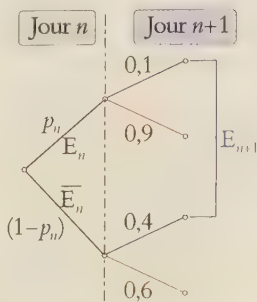
On trouve que la meilleure répartition est réalisée avec (1b) et (1b et 2n).

On a alors $p(E) = \frac{2}{3}$. ■

Le professeur aléatoirement distrait

Le professeur de mathématiques oublie ses clés dans sa salle de manière aléatoire : s'il les oublie un jour, il les oublie le lendemain une fois sur 10 et s'il ne les oublie pas un jour, il les oublie le lendemain avec une probabilité de 0,4. Il les oublie le lundi : quelle est la probabilité d'un oubli le jeudi de la même semaine ?

Si p_n désigne la probabilité d'un oubli le jour n , il ne les oublie pas ce jour-là avec une probabilité $1 - p_n$.



C'est typiquement une question de probabilité conditionnelle.

Si E_n est l'événement « il oublie ses clés le jour n » on a :

$$E_{n-1} = (E_n \cap E_{n+1}) \cup (\bar{E}_n \cap E_{n+1})$$

donc $p_{n+1} =$

$$p_n \times 0,10 + (1 - p_n) \times 0,40$$

soit $p_{n+1} = 0,40 - 0,30 p_n$

Si le premier jour on a :

$$p_1 = 1, \\ \text{on a le mardi : } p_2 = 0,10, \\ \text{le mercredi : } p_3 = 0,37 \\ \text{et le jeudi : } p_4 = 0,289.$$

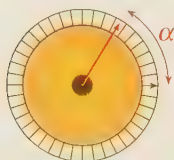
Et ainsi de suite... ■

Dans la pratique et les applications des probabilités, en particulier à propos des jeux de hasard étudiés par Pascal, Fermat et quelques autres, on s'intéresse à des variables – comme le gain, la perte, etc. – dont les valeurs sont déterminées par le hasard.

Aléa et jeu de hasard

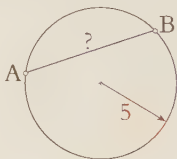
Lorsqu'un joueur pratique un jeu de hasard, que ce soit à la roulette, au Loto, au tiercé... son gain ou sa perte sont liés au hasard.

Lorsqu'on lance deux dés, la somme qui apparaît est un nombre dont on ne peut prévoir la valeur avant le jet : c'est ce que l'on nomme un « aléa numérique » ou encore « variable aléatoire ». La flèche qui tourne sur la roue de la fortune fera, à l'arrêt, un certain angle avec un repère de la roue : cet angle est une variable aléatoire.



Si l'on choisit au hasard deux points sur un cercle de rayon 5 cm, la

longueur de la corde $[AB]$ est aléatoirement comprise entre 0 et 10 cm.



À l'occasion d'une expérience aléatoire, un *aléa numérique*, ou encore *variable aléatoire*, prend des valeurs déterminées par le hasard à l'occasion de cette expérience.

Il y a plusieurs types d'aléas selon les valeurs qu'il peut prendre :

- L'aléa qui prend des *valeurs isolées*, en nombre fini ou non, par exemple le gain ou la perte à l'occasion d'un jeu, la somme des nombres sur les faces de deux dés, etc.

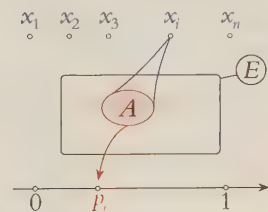
- L'aléa qui peut prendre une valeur quelconque dans $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$: c'est le cas de la longueur de la corde $[AB]$. Ce type d'aléa est appelé *aléa continu*. Au lycée, on ne considère que les variables aléatoires prenant des valeurs isolées (souvent des entiers) et en nombre fini notées par exemple

$$x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$$

Un événement A , lié à l'expérience envisagée, est alors déterminé par une ou plusieurs valeurs prises par cette variable X et qui réalisent A .

Ainsi, pour X prenant toutes les valeurs entières de 2 à 12, on peut avoir A : « X égale 8 » ce que l'on note : $A = \{X = 8\}$ ou encore $A = (X = 8)$. B : « X prend des valeurs paires » est noté $B = (X \in \{2; 4; 6; 8; 10; 12\})$. ■

Si l'on note p_i la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, la loi de probabilité de l'aléa X est l'ensemble des couples (x_i, p_i) . L'expérience étant précisée, ainsi que les valeurs prises par X à l'occasion de cette expérience, à chacune de ces valeurs x_i est associé un événement A_i , qui contient les issues qui réalisent $X = x_i$.

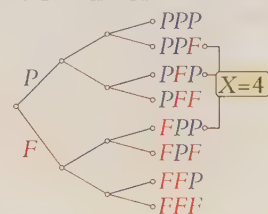


La probabilité de l'événement noté $(X = x_i)$ est celle de l'événement A_i . Déterminer la loi de probabilité de l'aléa X , c'est calculer toutes les probabilités p_i et en donner la liste, par exemple sous la forme d'un tableau de valeurs.

Exemple

On joue à pile ou face trois fois de suite : chaque pile obtenu fait gagner 3 points et chaque face fait perdre 2 points. X est la variable aléatoire qui prend la valeur du gain ou de la perte après ces trois lancers (on suppose la pièce bien équilibrée).

L'événement $(X = 9)$ est réalisé si le joueur obtient 3 fois pile. Pour « 2P et 1F » le gain est $X = 4$. Pour « 1P et 2F », il s'agit alors d'une perte et on écrit $X = -1$. Et pour « 3 F » on a $X = -6$.



L'aléa X prend donc les valeurs : -6 ; -1 ; 4 ; 9 . Une seule issue, sur 8, conduit à $X = 9$: on a

$$p(X = 9) = \frac{1}{8}.$$

Trois issues conduisent à un gain de 1 : PPF , PFP , FPP , d'où $p(X = 4) = \frac{3}{8}$.

De même $p(X = -1) = \frac{3}{8}$

et $p(X = -6) = \frac{1}{8}$.

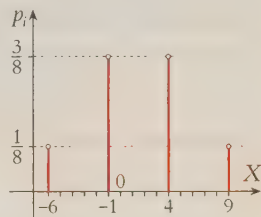
Il faut prendre garde au fait que les « événements » $(X = x_i)$ ne sont pas équiprobables !

La loi de probabilité de cet aléa est donnée par ce tableau de valeurs.

x_i	-6	-1	4	9
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

On peut en donner une représentation graphique sous forme de diagramme en bâtons comme en sta-

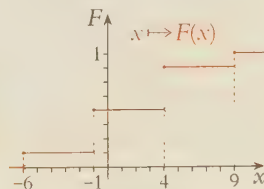
tistique lorsque la variable étudiée prend des valeurs isolées.



La fonction de répartition associée à cette loi est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = p(X \leq x)$. Ne pas confondre x , variable pour F et X qui désigne l'aléa. Ici pour

$$\begin{aligned} x < -6 & F(x) = 0 \\ x = -6 & F(x) = \frac{1}{8} \\ -6 \leq x < -1 & F(x) = \frac{1}{8} \\ -1 \leq x < 4 & F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \\ 4 \leq x < 9 & F(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} \\ 9 \leq x & F(x) = 1. \end{aligned}$$

Cette fonction F est une fonction en escaliers croissante (au sens large) de minimum 0 et de maximum 1.



Elle présente surtout un intérêt pour les variables « continues ». ■

Comme en statistique, si l'on a déterminé la loi de probabilité d'un aléa, on lui associe des paramètres significatifs très utiles dans l'utilisation des probabilités à l'occasion d'applications non abordées au lycée.

L'espérance mathématique

C' est une appellation curieuse qui trouve encore son origine dans les jeux de hasard. Un joueur achète un billet de loterie qu'il paie 10 €.

X_1	18	-10
p	0,4	0,6

À une première loterie, il peut gagner 18 € et gagner 4 fois sur 10.

X_2	10^6	-10
p	10^{-7}	$1-10^{-7}$

À une seconde loterie, il peut gagner beaucoup plus : 1 000 000 €, avec une probabilité de 0,000 000 1.

Que va-t-il choisir ?

Le choix est lié à l'« espoir de gain » qui dépend à la fois de la somme qu'il peut gagner et de la probabilité de ce gain.

Soit X la variable aléatoire égale au gain G , avec une probabilité p , ou la perte (-10) avec

la probabilité $(1-p)$, on a facilement la loi de probabilité de X .

L'espérance de gain est $E = Gp + (1-p)(-10)$ soit $p(G+10) - 10$.

Dans le premier jeu, on a, $E_1 = 0,4 \times 28 - 10 = 1,2$ et dans le second cas

$E_2 = 0,1 - 10 \approx -9,9$.

Dans le premier cas, l'espoir de gain est positif, mais, dans le second cas, il est négatif bien que la somme à gagner soit bien plus élevée.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire sert précisément à « mesurer » cet « espoir de gain ». Elle est notée $E(X)$ et elle est calculée de la façon suivante :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

C'est la définition même de la moyenne en statistique, les probabilités jouant le rôle de fréquences. L'espérance sera d'ailleurs souvent appelée la valeur moyenne de l'aléa.

À l'occasion d'un jeu de hasard, on dit que le jeu est équitable si $E(X)$ est nulle.

Reprenons l'exemple des trois lancers de pièce.

x_i	-6	-1	4	9
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Pile rapportant 3 points et face faisant perdre 2 points, l'espérance du gain X est :

$$E(X) = \frac{9}{8} + \frac{12}{8} - \frac{3}{8} - \frac{6}{8}$$

$$\text{soit } E(X) = \frac{3}{2}.$$

En revanche, si l'on décide que pile fait gagner 2 points et face fait perdre 3 points, pour la nouvelle variable Y du gain, on a

$$E(Y) = -\frac{3}{2}.$$

Et cette espérance est nulle pour un jeu dans lequel pile ferait gagner 2 points et face perdre 2 points : dans ce cas seulement, le jeu est équitable. ■

Mon ami Jules me propose le jeu suivant. On lance deux dés bien équilibrés : si le total est inférieur à 6 il me donne 4 haricots ; si le total est supérieur à 6, je dois lui donner un nombre de haricots égal à la différence entre 12 et ce total.

Si le total est 6, le jeu est nul.
Est-il intéressant de jouer avec lui ?
Soit X la variable aléatoire qui prend les valeurs de mon gain ou de ma perte. Les valeurs de X sont 4 ; 0 ; -1 ; -2 ; -3 ; -4 ; -5 et -6 et on a la loi de

x_i	4	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
p_i	$\frac{15}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

probabilité suivante :
L'espérance est

$$E(X) = \frac{60}{36} - \frac{56}{36} = \frac{1}{9}.$$

Elle est positive : le jeu n'est pas équitable et j'ai intérêt à jouer avec lui car l'espoir que j'ai de gagner est positif. Certes, je ne gagnerai pas à tous les coups, mais si on joue très longtemps, j'ai mes chances ! J'aurai intérêt à bien dominer les probabilités ! ■

Variance et écart-type d'une variable aléatoire

La variance est définie tout à fait comme en statistique : chaque probabilité p_i « pondérant » la valeur x_i de la variable X , la variance est la « moyenne pondérée » des carrés des différences $(x_i - E(X))$.

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

ou encore :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - [E(X)]^2$$

L'écart-type noté $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance $V(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

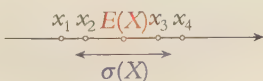
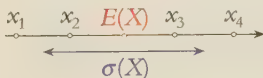
comme en statistique.

$$V(X) = \frac{(-6)^2}{8} + 3 \times \frac{(-1)^2}{8} + 3 \times \frac{4^2}{8} + 1 \times \frac{9^2}{8} - \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

$$\text{Soit } V(X) \approx 20,44$$

$$\text{et } \sigma(X) = \sqrt{20,44} \approx 4,52.$$

Pour deux variables aléatoires de même espérance E , la variance est d'autant plus grande que les valeurs des variables sont plus éloignées de la « valeur moyenne » E : c'est bien une caractéristique de dispersion, comme en statistique.



● Au Loto, en engageant un billet de 6 €, la probabilité de gagner le gros lot de 100 000 € est environ

$$\frac{1}{13\,000\,000} : \text{l'espérance}$$

est tout juste supérieure à -6 € et l'écart-type est environ 28,4 €.

● Au tiercé, avec un billet de 5 €, avec 25 chevaux en course, le gain de 10 000 à une probabilité de $\frac{1}{53\,130}$: l'espérance est -4,80 € et l'écart-type est environ de 6,1 €.

Ne désespérons pas : dans tous les cas de figure, le plaisir du jeu reste intact malgré le fait que l'espérance soit clairement négative... ■

Sur l'exemple des lancers de pièce ou face, on a

C'est l'une des lois de probabilité les plus anciennes : elle a été découverte par Jacques Bernoulli en 1713. Elle figure dans son ouvrage *Ars Conjectandi* consacré aux travaux de Huygens, aux dénombrements et aux jeux de hasard.

Introduction : la variable de Bernoulli

Bernoulli imagina un aléa qui porte son nom : une épreuve conduit soit à un succès (S) avec une probabilité p , soit à un

échec (non S) avec une probabilité $q = 1 - p$. En cas de succès, la variable B prend la valeur 1 et en cas d'échec, on a $B = 0$.

B	1	0
p	p	$1 - p$

L'espérance de cet aléa B vaut $E(B) = p$ et la variance est $V(B) = pq$. ■

Le cas de tirages avec remise

Une urne contient 20 boules dont 5 rouges les autres étant noires. On choisit une boule au hasard, avec équiprobabilité, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne. On répète six fois ce tirage avec remise : c'est ce que l'on appelle parfois schéma de Bernoulli.

X est la variable aléatoire égale au nombre des ROUGES obtenues au cours de ces six tirages avec remise.

X prend toutes les valeurs entières de 0 à 6. À chaque tirage, la probabilité d'obtenir une

ROUGE est $\frac{5}{20}$ ou $\frac{1}{4}$ et c'est la même au tirage suivant puisqu'il y a

remise. Calculons la probabilité de l'événement $A = (X=2)$.

Pour le tirage RNNNRN, la probabilité est :

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \\ \text{soit } \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

Mais il y a d'autres tirages conduisant à la même valeur de X : leur nombre est C_6^2 soit 15 façons d'où

$$p(X=2) = C_6^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

La loi de la variable X est la loi binomiale caractérisée par les paramètres $n = 6$ (nombre de tirages) et $p = 0,25$ (probabilité d'un succès).

On a ainsi :

$$p(X=k) = C_6^k (0,25)^k \times 0,75^{6-k}$$

La loi binomiale

Plus généralement, la loi binomiale de paramètres n et p , notée parfois $B(n, p)$, est la loi de probabilité de la variable X égale au nombre des « succès » (S) lors de la répétition de n épreuves indépendantes et identiques.

Chaque épreuve peut donner lieu à un succès (S) avec la probabilité p ou un « échec » (non S) avec la probabilité :

$$q = 1 - p.$$

La variable X prend toutes les valeurs entières de 0 à n . On a :

$$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Cet aléa X peut être considéré comme la somme de n variables de Bernoulli.



L'espérance : $E(X) = np$

La variance :

$$V(X) = np(1-p).$$

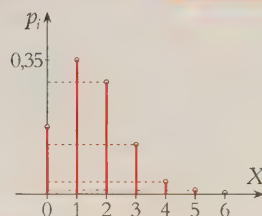
L'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Pour les six tirages avec

remise d'une boule, on a la loi $B(6; 0,25)$ avec la loi de probabilité suivante, donnant lieu à la représentation en bâtons ci-contre.

La valeur la plus probable pour X est $X = 1$. ■



k	0	1	2	3	4	5	6
$p(X=k)$	0,178	0,356	0,297	0,132	0,033	0,004	0,0002

Les domaines d'application de la loi binomiale

Cette loi s'applique dans de nombreux domaines, le tirage avec remise dans une urne n'étant qu'un modèle. Ce modèle se retrouve dans toute répétition d'épreuves identiques et indépendantes, avec la même probabilité de « succès », et le « succès » peut être n'importe quoi !

● Un tireur à l'arc atteint une cible avec une probabilité de $\frac{1}{3}$.

Il tire 10 flèches : on peut s'intéresser au nombre X des flèches au but au cours de ces 10 lancers, la probabilité de succès étant $p = \frac{1}{3}$.

● Dans une population, 2 % des individus sont atteints d'une certaine affection : dans un échantillon de 15 personnes, on peut s'intéresser au nombre X des personnes

atteintes : pour chaque personne interrogée, la probabilité de « succès » (être atteint) est la même $p = 0,02$. On rentre alors dans le domaine des sondages.

● Un poids lourd comporte 8 roues. La probabilité de crevaisson d'une roue, donnée par des statistiques, est $p = 0,09$. On peut trouver la probabilité de deux crevaissons, de 3, etc. ■

Un exemple : répondre à un QCM

Un étudiant doit répondre à un QCM : il y a dix questions et 4 choix par question, une seule réponse étant exacte par question. Il répond aux 10 questions en cochant au hasard l'une des 4 cases.

Quelle est la probabilité d'avoir plus de la moitié de réponses justes ?

Les épreuves sont identiques et indépendantes : le nombre X des réponses exactes est un aléa binomial $B(n = 10; p = 0,25)$.

Les probabilités sont données par le tableau : en ajoutant les probabilités de $p(X = 6)$ à $p(X = 10)$, on trouve facilement la probabilité de $p(X \geq 6)$. C'est 0,020 environ. Elle est donc faible ! ■

X	0	1	2	3	4	5	6	7
p	0,056	0,188	0,282	0,250	0,146	0,058	0,016	0,003

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, l'équation $ax+b=0$ a une solution et une seule si $a \neq 0$; en revanche, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a des solutions que si $\Delta \geq 0$, par exemple l'équation $x^2=-7$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Généralités sur les nombres complexes

Si l'on peut imaginer un ensemble de nombres contenant $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication, qui a les mêmes propriétés que $(\mathbb{R}, +, \times)$ et qui en plus contient un nombre dont le carré est égal à -1 , alors toute équation $ax^2+bx+c=0$ avec a, b, c réels aura deux solutions.

En effet, si on appelle i un nombre tel que $i^2=-1$, (i n'est pas réel puisque son carré est négatif), l'équation $x^2=-1$ peut s'écrire $x^2=i^2$ soit $x^2-i^2=0$ ou $(x+i)(x-i)$ qui est nul pour $x=i$ ou $x=-i$.

Dans ce nouvel ensemble, l'équation $x^2=-1$ a donc deux solutions. De même, l'équation $x^2=-7$ a deux solutions $i\sqrt{7}$ et $-i\sqrt{7}$. Quant à l'équation $x^2+x+1=0$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$, on peut écrire :

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

$$\text{soit } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3i^2}{4}=0.$$

$$\text{on a donc : } \left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

ce qui donne deux

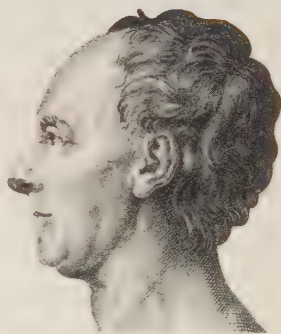
$$\text{solutions : } x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et } x=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

C'est Bombelli qui le premier en 1572 parla de ce nombre « $\sqrt{-1}$ ».

Dans l'encart ci-contre, il donne des règles de multiplication, più signifie +1, meno -1, più di meno est égal à i et meno di meno est égal à $-i$. Pour la 1^{re} ligne $1 \times i=i$, la 2^{de} $-1 \times i=-i$ ce que l'on peut résumer dans le tableau.

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

C'est Euler qui en 1777 introduisit la notation i et c'est Gauss qui, en 1811, donna un statut géométrique à ce nombre i et le fit ainsi admettre par les mathématiciens. ■



Raffaele Bombelli (1526-1572), mathématicien italien de la fin de la Renaissance.

Ce que disait Bombelli...

- Più via più di meno fa più di meno.
- Meno via più di meno fa meno di meno.
- Più via meno di meno fa meno di meno.
- Meno via meno di meno fa più di meno.
- Più di meno via più di meno fa meno.
- Più di meno via meno di meno fa più.
- Meno di meno via più di meno fa più.
- Meno di meno via meno di meno fa meno.

Le corps des complexes

Il est noté $\mathbb{C}$.
L'ensemble $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ est muni de l'addition et de la multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec a et b réels.

Vocabulaire

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

a est la partie réelle de z , on écrit $\text{Re}(z) = a$.

b est la partie imaginaire de z , on écrit $\text{Im}(z) = b$.
Si $a = 0$, z est un imaginaire pur.

Si $b = 0$, z est réel (on retrouve le fait que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

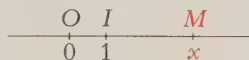
Si $a = 0$ et $b = 0$, on a $z = 0$.

Dire que z s'écrit de façon unique $a + ib$ signifie que si on a à la fois $z = a + ib$ et $z = a' + ib'$ alors $a = a'$ et $b = b'$.

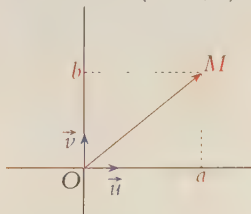
En particulier si $z = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$. On a donc $(a + ib = 0)$ équivaut à $(a = 0 \text{ et } b = 0)$. ■

La représentation ponctuelle ou vectorielle

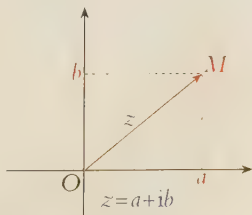
Il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels et l'ensemble des points d'un axe.



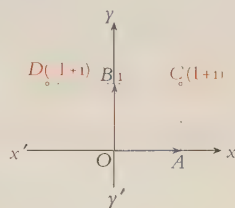
De même, on peut établir une bijection entre l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes et l'ensemble des points du plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



Au nombre complexe $z = a + ib$ on peut faire correspondre le point M de coordonnées (a, b) . On dit que le point M est l'image de z et que z est l'affixe de M ; le vecteur $\vec{OM}$ est l'image vectorielle de z .



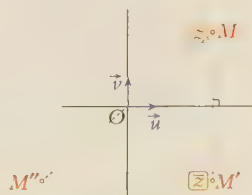
Sur le dessin ci-dessous, A a pour affixe 1, B a pour affixe i , C a pour affixe $1 + i$ et D a pour affixe $-1 + i$.



Si $z \in \mathbb{R}$, le point M appartient à $x'x$.

Si z est imaginaire pur, M appartient à $y'y$.

Si M' est le symétrique de M par rapport à $x'x$, son affixe z' est telle que $z' = a - ib$, on dit que z' est le conjugué de z . On écrit $z' = \bar{z}$.



On a aussi $z = \bar{z'}$.

Si M' est le symétrique de M par rapport à l'origine O du repère, son affixe est $(-z)$, qui est l'opposé de z . ■

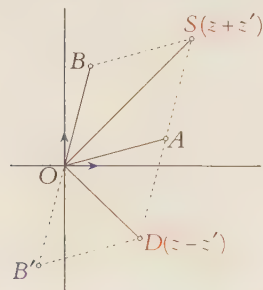
Considérons les deux nombres complexes z et z' avec $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on peut effectuer des opérations en suivant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.

La multiplication et l'addition sont à la fois commutatives et associatives ; la multiplication est distributive sur l'addition.

L'addition des nombres complexes

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') \\ z + z' = a + a' + i(b + b')$$



La partie réelle d'une somme de deux complexes est la somme des parties réelles et la partie imaginaire est la somme des parties imaginaires. Si A est l'image de z , B celle de z' , S celle de $z + z'$ alors $OASB$ est un parallélogramme.

Si B' est le symétrique de B par rapport à O , B' est l'image de $(-z)$.

Soit D l'image de $z + (-z)$, c'est-à-dire l'image de $z - z'$.

Cas particulier

$$z + \bar{z} = 2a \text{ et } z - \bar{z} = 2ib.$$

Affixe d'un vecteur

On peut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; donc en utilisant les affixes, $Z_{\overrightarrow{AB}} = z' - z =$ affixe de $B -$ affixe de A . $Z_{\overrightarrow{AB}}$ se lit « affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ». ■

La multiplication des nombres complexes

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = \\ aa' - i^2 bb' + i(ab' + a'b).$$

$$\text{Soit } z \times z' = \\ aa' - bb' + i(ab' + a'b).$$

Cas particulier

$$z \times \bar{z} = (a + ib) \times (a - ib) = \\ a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2.$$

Si $z \neq 0$, z possède un

$$\text{inverse } \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}.$$

Pour écrire $\frac{1}{z}$ sous forme algébrique on doit « enlever les i » au dénominateur. Pour cela on multiplie numérateur et dénominateur par $a - ib$, conjugué de z ; on obtient :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \\ \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

$$\text{Par exemple : } \frac{1}{i} = \frac{-i}{i \cdot (-i)} = -i ;$$

$$\frac{1}{3 + 4i} = \frac{3 - 4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{-4i}{25}.$$

On peut effectuer le quotient $\frac{z}{z'}$, dès que $z' \neq 0$.

$$\text{En effet, } \frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}.$$

$$\text{Par exemple, } \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i. \blacksquare$$

z^n se définit comme x^n :

$$z^0 = 1, z^1 = z,$$

$$z^n = z^{n-1} \times z.$$

● Puissance de i :

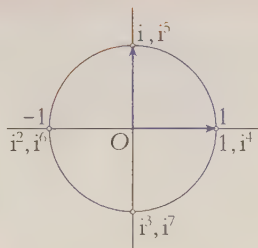
Pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$i^{4k} = 1;$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$



Pour calculer $(1+i)^3$, on utilise $(a+b)^3$ comme dans $\mathbb{R}$

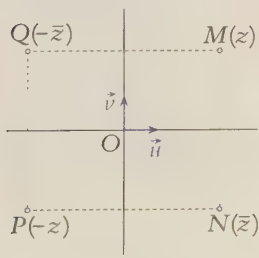
$$(1+i)^3 =$$

$$1^3 + (3 \times 1^2 \times i) + (3 \times 1 \times i^2) + i^3 =$$

$$1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i. \blacksquare$$

Les conjugués

Il est utile de bien connaître la configuration ci-dessous.



Le conjugué d'une somme et d'un produit

Si z est un réel, alors on a :

$z = \bar{z}$ (M et N sont confondus), d'où $z - \bar{z} = 0$.

Si z est un imaginaire pur, alors on a : $z = -\bar{z}$

(M et Q sont confondus), d'où $z + \bar{z} = 0$.

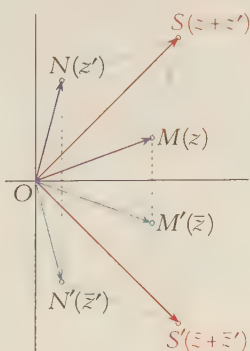
En utilisant les propriétés de calcul

$$\text{on a } z + z' = \bar{z} + \bar{z}'.$$

Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués.

La réflexion d'axe Ox transforme le parallé-

gramme OMSN en le parallélogramme isométrique $OM'S'N'$. Ce qui se traduit par le dessin ci-dessous :



Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués : $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.

Le conjugué de l'inverse est l'inverse du conjugué. Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués. Pour tout z on a : $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$, et $z - \bar{z} \in i\mathbb{R}$.

Utilisation

Si on pose : $z = \frac{3-i}{5-4i}$

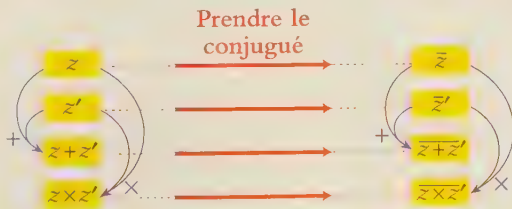
on a $\bar{z} = \frac{3+i}{5+4i}$, alors sans effectuer de calculs, on peut dire que :

$$\frac{3-i}{5-4i} + \frac{3+i}{5+4i}$$

est un réel et que :

$$\frac{3-i}{5-4i} - \frac{3+i}{5+4i}$$

est un imaginaire pur. $\blacksquare$

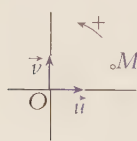


La forme trigonométrique d'un nombre complexe

Désormais, on considérera le plan orienté; on suppose aussi que $z \neq 0$, c'est-à-dire que le point M , image de z , n'est pas en O .

Introduction

Le point M a pour coordonnées a et b , mais on peut aussi déterminer le point M par la donnée de la longueur OM et de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$: ce sont les « coordonnées polaires » du point M . La longueur OM s'appelle le module de z , toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ s'appelle argument de z .



On choisit souvent pour l'argument la mesure principale de cet angle orienté, c'est-à-dire la mesure comprise entre $-\pi$ et π .

Notation

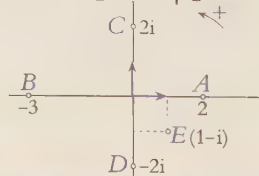
On pose $OM = |z| = r$
 $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg z = \theta + k2\pi$.
 On peut écrire $z = [r, \theta]$.
 Si z est réel, par exemple $z = 2$, on a $z = [2; 0]$
 mais si $z = -3$,
 on a $z = [3; \pi]$.

Si z est imaginaire pur :
 si $z = 2i$ on a $z = \left[2; \frac{\pi}{2}\right]$
 mais si $z = -2i$

on a $z = \left[2; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Si $z = -1 - i$

on a $z = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$ ■



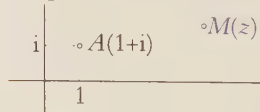
Les propriétés du module

Par définition, si $z = 0$ alors $|z| = 0$ et réciproquement.

Les images de tous les nombres complexes de même module r se trouvent sur le cercle de centre O , de rayon r .



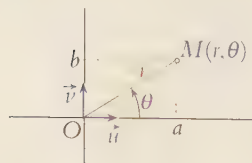
Si A a pour affixe $1 + i$,
 M a pour affixe z



alors $Z_{\overrightarrow{AM}} = z - 1 - i$
 $AM = |z - 1 - i|$ ■

La forme trigonométrique d'un nombre complexe

Si r est le module et θ l'argument de $z = a + ib$,



on a les relations suivantes : $a = r \cos \theta$
 $b = r \sin \theta$,

donc

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

C'est ce qu'on appelle la forme trigonométrique d'un nombre complexe,

alors que $z = a + ib$ s'appelle la forme algébrique ou cartésienne.

$$\boxed{z = a + ib}$$

$$\boxed{z = r(\cos \theta + i \sin \theta)}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \theta = \frac{a}{r} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{r}. \end{cases} \blacksquare$$

Les propriétés des arguments

Si $z \in \mathbb{R}^*$, $\arg z = k\pi$

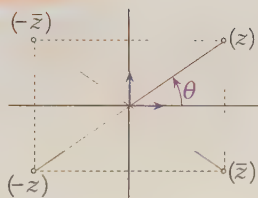
si k est pair $z > 0$

si k est impair $z < 0$.

● Si z est imaginaire pur,

alors $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

● Les images des nombres complexes de même argument se trouvent sur une demi-droite d'origine O .



● $\arg(\bar{z}) = -\arg z$;

$\arg(-z) = \arg z + \pi$;

$\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg z$. ■

La forme trigonométrique et opérations

Si $z = [r, \theta]$ et

$z' = [r', \theta']$ on a :

$$(z = z') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \text{et} \\ \theta = \theta' + k2\pi \end{cases}$$

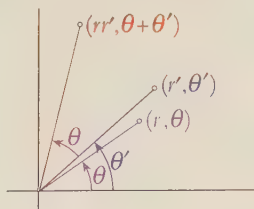
● $z + z'$ n'a pas une forme intéressante avec la forme trigonométrique, on a seulement

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

● $zz' = [rr', \theta + \theta']$

le module d'un produit est égal au produit des modules, l'argument est

$\theta + \theta'$, la somme des arguments.



● $z^2 = [r^2, 2\theta]$ et

$z^n = [r^n, n\theta]$, si $n \in \mathbb{Z}^*$.

$$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right] \quad \text{et}$$

$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]. \quad \blacksquare$$

Des applications

Soit $z = 1 + i$ et $z' = 1 - i\sqrt{3}$.

On peut écrire

$$z = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{et} \quad z' = \left[2; -\frac{\pi}{3} \right],$$

on a donc

$$zz' = (1 + i) \cdot (1 - i\sqrt{3}) = \left[2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{12} \right]$$

soit $(1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3}) =$

$$2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\text{soit } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\bullet \quad z^2 = \left[2; \frac{\pi}{2} \right] = 2i ;$$

$$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{\pi}{4} \right] = \frac{1 - i}{2}.$$

$$\bullet \quad \frac{z}{z'} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{7\pi}{12} \right] ;$$

$$z^5 = \left[2^5; -\frac{5\pi}{3} \right] = \left[2^5; \frac{\pi}{3} \right] = 16 + 16i\sqrt{3}.$$

$$\bullet \quad \frac{1}{z^3} = z^{-3} = \left[(\sqrt{2})^{-3}; -\frac{3\pi}{4} \right] = \frac{-1}{4} - \frac{i}{4}. \quad \blacksquare$$

La notation exponentielle d'un nombre complexe

Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. $e^{i\theta}$ est donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

Si z a pour module r , on écrit :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad \bar{z} = re^{-i\theta}.$$

Cas particuliers

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 ; \quad \text{ce}$$

qu'Euler appelait la plus belle formule des mathématiques car elle réunit les cinq nombres les plus

importants en mathématiques : 0, 1, π , e , i .

On retrouve bien

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')} ;$$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ comme pour les fonctions exponentielles. ■

On a vu que si $x = r (\cos \theta + i \sin \theta)$, alors $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$, c'est à dire si $r = 1$, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$. C'est ce qu'on appelle la formule de Moivre.

Les formules d'Euler

On a $(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))^n = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)$, c'est-à-dire $(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$.

on a aussi :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta ; e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

c'est-à-dire :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

et évidemment :

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \text{ et } \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \quad \blacksquare$$

Des applications

Avec ces notations, on a

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2$$

soit en développant

$$\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2e^0 - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} + 2e^0}{4} \text{ soit } 1.$$

● Si l'on pose $n=2$ dans la formule de Moivre, on obtient : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$, c'est-à-dire :

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta.$$

On retrouve les formules :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \text{ et } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

● Si l'on pose $n=3$ on a :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta.$$

En utilisant la formule donnant $(a+b)^3$ on obtient :

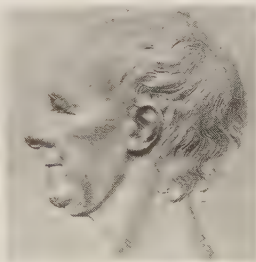
$$\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

soit, comme $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, c'est-à-dire $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ et $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$,

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\text{et } \sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta.$$

En utilisant le développement de $(a+b)^n$, on peut calculer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction des puissances de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$ (ce serait les formules de Tchebycheff). ■



Euler.

Moivre a découvert sa formule en 1717 en résolvant des équations algébriques issues de la trigonométrie. Euler découvrit ensuite l'extraordinaire parenté entre les exponentielles (et donc les logarithmes) et la trigonométrie vers 1740. Il écrit alors dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale* la fameuse formule $e^{i\pi} + 1 = 0$, qui réunit les cinq nombres les plus importants des mathématiques dans l'espace minimum.

Problème inverse

On a souvent intérêt à écrire des puissances de $\cos x$ ou de $\sin x$ en fonction de $\cos ax$ ou $\sin bx$: c'est le problème de la linéarisation.

● Par exemple : linéariser $f(x) = \cos^4 x$.

Quel est le principe ? Il faut utiliser d'une part la formule du binôme, d'autre part les formules d'Euler en regroupant les termes en e^{inx} et en e^{-inx} , ce qui nous donne $\cos nx$ et $\sin nx$.

$$f(x) = \cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 =$$

$$\frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$f(x) = \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6),$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = \frac{1}{16} (2 \cos 4x + 8 \cos 2x + 6) = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

On sait trouver des primitives de f , écrites sous cette forme. Il est aussi plus facile d'étudier des fonctions ou de résoudre des équations trigonométriques sous forme linéarisée.

● Autre exemple de linéarisation :

$$g(x) = \cos^2 x \sin^4 x$$

On a donc :

$$g(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \times \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4, \text{ mais comme } i^4 = 1, \text{ on a :}$$

$$g(x) = \frac{1}{64} (e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}) \times (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}).$$

Ici, il ne faut pas appliquer les formules d'Euler à l'intérieur de chaque parenthèse, il faut d'abord développer et regrouper, ensuite seulement, les termes semblables pour appliquer les formules d'Euler. On trouve après développement :

$$g(x) = \frac{1}{64} (e^{6ix} + e^{-6ix} - 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) + 4)$$

$$\text{soit } g(x) = \frac{1}{64} (2 \cos 6x - 4 \cos 4x - 2 \cos 2x + 4)$$

$$\text{donc } g(x) = \frac{1}{32} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{32} \cos 2x + \frac{1}{16}. \blacksquare$$

D'autres applications

Transformer le produit $P = \cos a \cos b$ en une somme.

On remplacera respectivement par :

$$\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \text{ et } \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}.$$

On obtient après simplification :

$$P = \frac{1}{4} [e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}].$$

Soit :

$$P = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

On suivrait la même démarche pour montrer que $\sin a \sin b =$

$$\frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

et $\sin a \cos b =$

$$\frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

On peut alors utiliser ces résultats pour factoriser

$$\cos p + \cos q$$

$$\text{et } \cos p - \cos q \dots$$

Il suffit de poser

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}$$

$$\text{d'où : } a = \frac{p+q}{2} \text{ et } b = \frac{p-q}{2}.$$

Il vient alors :

$$\cos p + \cos q =$$

$$2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q =$$

$$2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

Pour résoudre le plus efficacement possible une équation dans $\mathbb{C}$, il faut reconnaître quel type d'outils on va utiliser.

- soit utiliser le fait que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps ;
- soit utiliser la forme algébrique ;
- soit utiliser la forme trigonométrique.

Premier cas : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps

L'équation $az + b = 0$

avec $a \neq 0$ a une solution et une seule :

$$\bullet 3iz - 1 - i = 0$$

$$z = \frac{1+i}{3i} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$$

$$\bullet 3i\bar{z} - 1 - i = 0$$

$$\bar{z} = \frac{1-i}{3} \quad \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i.$$

$$\bullet (iz+1)(2\bar{z}+1-i) = 0$$

on obtient $z = i$

$$\text{ou } z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$ a deux solutions.

Si $b^2 - 4ac \geq 0$, les racines sont réelles.

Si $b^2 - 4ac < 0$ les racines sont complexes conjuguées.

On applique les mêmes formules que dans $\mathbb{R}$, on appelle δ le nombre tel que $\delta^2 = \Delta$

$$\bullet 2z^2 + z + 1 = 0$$

$$\Delta = -7 \text{ donc } \delta = i\sqrt{7}$$

$$z' = \frac{-1+i\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{où } z'' = \frac{4-1-i\sqrt{7}}{4}.$$

4

$$\bullet z^4 + 3z^2 + 2 = 0 \text{ est une équation bicarrée.}$$

En posant $Z = z^2$ on a

$$Z^2 + 3Z + 2 = 0 \text{ soit } Z' = -2 \text{ ou } Z' = -1.$$

Il faut résoudre $z^2 = -2$

$$\text{soit } z = i\sqrt{2} \text{ ou } -i\sqrt{2}$$

$$\text{et } z^2 = -1 \text{ soit } z = i \text{ ou } z = -i.$$

L'équation a

quatre solutions.

Si l'on doit résoudre une équation du troisième degré dont on connaît une racine, on procède comme dans $\mathbb{R}$. Soit à résoudre :

$$z^3 - 5z^2 + 11z - 15 = 0,$$

on remarque que 3 est

racine évidente.

En factorisant le premier membre par $(z-3)$, on obtient :

$$(z-3)(z^2 - 2z + 5) = 0.$$

$$\text{Pour } z^2 - 2z + 5 = 0,$$

on trouve $\Delta = -16$

soit $(4i)^2$, on a alors

$$z = 1 - 2i \text{ ou } 1 + 2i.$$

L'équation a trois solu-

tions : 3; $1 + 2i$ et $1 - 2i$. ■

Deuxième cas : l'utilisation de la forme algébrique

On pose $z = x + iy$ et on remplace une équation d'inconnue z par un système de deux équations à deux inconnues réelles x et y . Résoudre

$$2iz + \bar{z}(1+i) + 1 - i = 0$$

avec $z = x + iy$, il vient $x - 2y + 1 + i(3x - y - 1) = 0$.

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

dont les solutions sont

$$x = 1 \text{ et } y = 2.$$

Dans $\mathbb{C}$, la solution est

$$z = 1 + 2i.$$

Pour résoudre l'équation

$$|z - 1 - i| = |z + 3 + i|,$$

on peut utiliser la même méthode et il vient

$$|x - 1 + i(y - 1)| = |x + 3 + i(y - 1)|.$$

Écrivons l'égalité des carrés des modules :

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 =$$

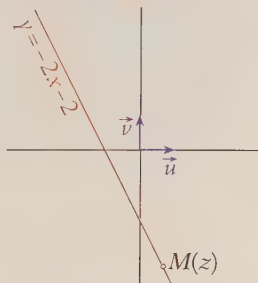
$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2.$$

ce qui conduit, après

simplification

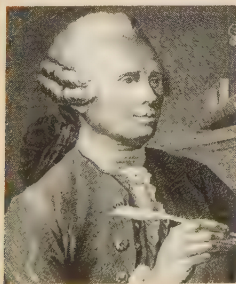
$$\text{à } 2x + \gamma + 2 = 0.$$

Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres qui s'écrivent $x + i(-2x - 2)$ avec $x \in \mathbb{R}$: leurs images sont tous les points de la droite d'équation $\gamma - 2x - 2$. ■



Le théorème de d'Alembert

Si $P(z)$ est un polynôme de degré n , l'équation $P(z) = 0$ a exactement n solutions dans $\mathbb{C}$. Ce théorème, conjecturé par d'Alembert, fut démontré par Gauss.



Troisième cas : l'utilisation de la forme trigonométrique

L'utilisation de cette forme est intéressante lorsqu'interviennent des puissances.

● Résoudre : $z^3 = i$.

On pourrait poser $z = x + i\gamma$, mais il est plus facile de choisir la forme trigonométrique : $z = [r, \theta]$.

On a $z^3 = [r^3, 3\theta]$ et

$$i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right].$$

L'équation équivaut à

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{soit } r = 1 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3}.$$

Si $k = 0$

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

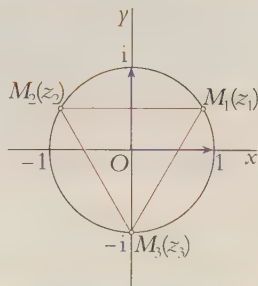
Si $k = 1$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Si $k = 2$

$$z_3 = \cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6} = -i.$$

L'équation a donc trois solutions $-i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.



Les racines de $z^3 = 1$ sont les nombres complexes 1,

$$j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et }$$

$$\bar{j} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les points images A , B , C sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Remarquons que $j^2 = \bar{j}$.

De plus, $1 + j + \bar{j} = 0$.

Si $z = [r, \theta]$, les n racines de l'équation

$$z^n = 1$$

sont les nombres complexes :

$$\alpha_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n} \right].$$

avec :

$$k \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\}.$$

Les applications géométriques proviennent essentiellement de la notion de module (longueur) et d'argument (angle) ainsi que de leurs propriétés. Il faut se souvenir que l'on travaille dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Quelques exemples d'applications

Voici quelques cas de figure permettant de visualiser le lien entre les nombres complexes et la géométrie.

- Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1 - i| = 2$:

$$z - 1 - i = z - (1 + i)$$

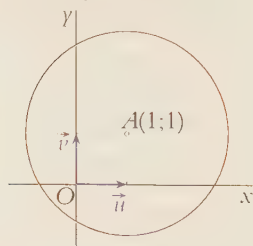
Si l'on introduit le point A d'affixe $z_A = 1 + i$,

$$|z - (1 + i)| = 2 \text{ équivaut à }$$

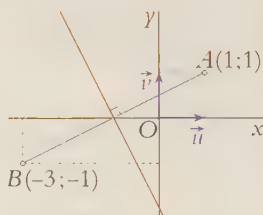
$$|z - z_A| = 2 \text{ c'est-à-dire}$$

$$AM = 2.$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 2.



- Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1 - i| = |z + 3 + i|$: Avec B d'affixe $-3 - i$, l'égalité équivaut à



$$AM = BM.$$

L'ensemble cherché est la médiatrice de $[AB]$.

- Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1 - i| = |2z + 4 - 2i|$. On a :

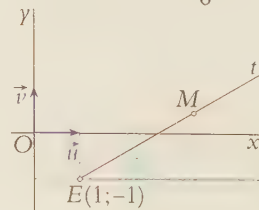
$$2z + 4 - 2i = 2(z - (-2 + i))$$

et avec le point $C(-2; 1)$, l'égalité des modules équivaut à $AM = 2CM$,

$$\text{c'est-à-dire } \frac{MA}{MC} = 2.$$

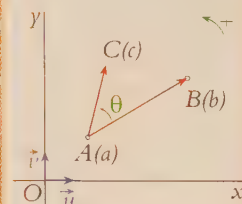
Cet ensemble est un cercle de centre $K(-3; 1)$ et de rayon 2.

- Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z - 1 + i) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.



À connaître

Les points A, B, C ayant pour affixes respectives les nombres a, b , et c , on a :



$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |b - a|.$$

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) + k2\pi.$$

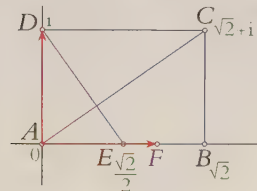
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) + k2\pi.$$

Si l'on place le point $E(1; -1)$, l'égalité donnée équivaut à :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{EM}) = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$$

L'ensemble cherché est la demi-droite $[Et)$ privée du point E , de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6}$.

● $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$. E étant le milieu de $[AB]$, démontrer que $(DE) \perp (AC)$.



Afin d'utiliser les nombres complexes, il faut introduire un repère orthonormal direct $(A, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$

avec $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{AB}$ et

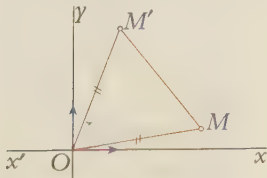
$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}.$$

Les affixes des divers points sont faciles à déterminer, et on a :

$$\begin{aligned} \frac{z_C - z_A}{z_E - z_D} &= \frac{\sqrt{2} + i}{\frac{\sqrt{2} - i}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2i}{\sqrt{2} - i} = i\sqrt{2}, \end{aligned}$$

donc $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC}) = \arg(i\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$
d'où $(DE) \perp (AC)$.

● M étant le point d'affixe z et M' d'affixe $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$, démontrer



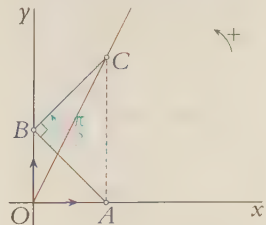
que le triangle OMM' est équilatéral :

$$\begin{aligned} OM &= |z| \\ OM' &= |z'| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} |z| = |z| \\ \text{d'où } OM &= OM'. \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) &= \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \\ \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{\pi}{3} + k2\pi. \end{aligned}$$

Le triangle ayant deux côtés de même longueur et un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ est un triangle équilatéral.

● A décrit $x'x$ et B décrit $y'y$ avec $OA = OB = l$ ($l > 0$). ABC est un triangle isocèle rectangle en B et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

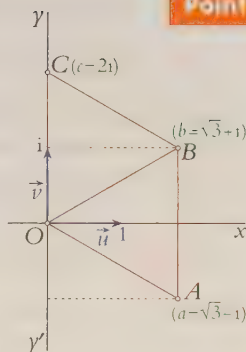
Trouver les coordonnées de C et le lieu géométrique de C .



Si l'on désigne par a, b et c respectivement les affixes de A, B et C , on sait que : $|c - b| = |a - b|$ et $\arg\left(\frac{c - b}{a - b}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, donc $c - b = i(a - b)$.

Or, $a = l$ et $b = il$
d'où $c = l(1 + 2i)$. Les coordonnées du point C sont donc $(l; 2l)$.

La droite (AC) reste parallèle à $y'y$. Le lieu de C est une demi-droite d'équation $y = 2x$ ($x > 0$).



● A a pour affixe $\sqrt{3} - i$
 B a pour affixe $\sqrt{3} + i$
 C a pour affixe $2i$

Trouver les propriétés du quadrilatère $OABC$.

$$OA = |z_A| = 2$$

$$OB = |z_B| = 2$$

$$OC = |z_C| = 2.$$

$OA \cdot OB = OC$: les points ABC sont sur le cercle de centre O , de rayon 2.

L'affixe du milieu de $[OB]$ est $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

L'affixe du milieu de $[AC]$ est :

$$\frac{2i + \sqrt{3} - i}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i.$$

Ces points sont confondus : les diagonales de $OABC$ se coupent en leur milieu donc $OABC$ est un parallélogramme.

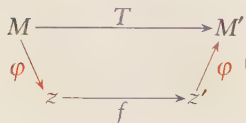
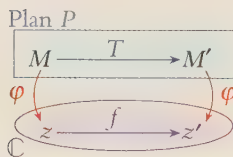
Comme $OA = OC$, c'est un losange. ■

Nombres complexes et transformations du plan

Calculer avec les nombres complexes, c'est aussi faire de la géométrie. On peut ainsi retrouver les propriétés de certaines figures uniquement par le calcul.

Translations, homothéties et rotations

Soit T une transformation du plan P . Si φ est la bijection qui à tout point M de P associe son affixe dans $\mathbb{C}$, alors on définit une fonction f dans $\mathbb{C}$ qui à $\varphi(M)$ associe $\varphi(M')$ avec $M' = T(M)$.



La fonction f dans $\mathbb{C}$ est la « fonction complexe » associée à la transformation T .

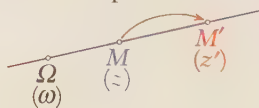
• T est la translation de vecteur $\vec{u}$.
Pour tout point M on a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Si β est l'affixe du vecteur $\vec{u}$, on a dans $\mathbb{C}$



$z' - z = \beta$, d'où $f : z \mapsto z' = z + \beta$.
C'est la fonction complexe associée à une translation.

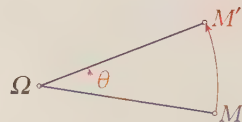
• T est la symétrie centrale de centre $\Omega : z_\Omega = \omega$.
Pour tout point $M : \Omega$ est milieu de $[MM']$ donc $z' + z = 2\omega$ d'où :
 $f : z \mapsto z' = -z + 2\omega$.
C'est la fonction complexe associée à la symétrie centrale.

• T est l'homothétie de centre Ω et de rapport k .
Pour tout point $M :$



$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$, d'où, avec les affixes, $z' - \omega = k(z - \omega)$ on a :
 $f : z \mapsto z' = kz + \omega(1 - k)$.
C'est la fonction complexe associée à l'homothétie.

• T est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta :$
Pour tout point $M :$



$\Omega M = \Omega M'$, d'où :
 $|z - \omega| = |z' - \omega|$;

et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$
donc :

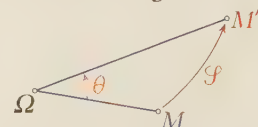
$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$, d'où

$f : z \mapsto z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

C'est la fonction complexe associée à la rotation. ■

Le cas général pour une similitude directe quelconque

La similitude de centre Ω , de rapport k et d'angle θ est la composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport k et de la rotation de même centre et d'angle θ .



La fonction complexe associée est :
 $f : z \mapsto z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Toute fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est associée à une similitude directe du plan.

● Si $a = 1$: c'est une translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $b = z_{\vec{u}}$.

● Si $a = -1$: c'est une symétrie centrale.

● Si a est un réel non nul autre que 1, c'est une homothétie de rapport $k = a$.

● Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$, on a : $a = e^{i\theta}$ et la transformation est une rotation.

Exemples

① Soit f :

$$z \mapsto f(z) = -3z + 2 + i.$$

On a $z' = -3z + 2 + i$, la transformation est une

homothétie de rapport

-3. Le centre est le point invariant dont l'abscisse est la solution de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z = \frac{1}{-3} + \frac{1}{4}i.$$

Le centre est $\Omega\left(\frac{1}{-3}, \frac{1}{4}\right)$.

② Soit $f : z \mapsto \sqrt{2}(1+i)z$.

$$a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}; |a| = 2$$

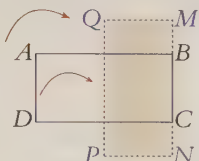
$$a = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

La transformation est la similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$, de

rapport 2 et de centre l'origine O , seul point invariant. ■

Application : la table de bridge

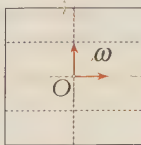
La table de salon $ABCD$ est un rectangle de largeur égale à la moitié de la longueur.



Par un astucieux système de rotation, le rectangle $ABCD$ est amené en position $MNPQ$.

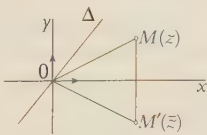
Puis, par dédoublement autour d'une charnière PQ , on obtient une table carrée de surface double, bien pratique pour les joueurs de cartes.

Où placer le centre de rotation de la table ?



Une réflexion importante

Si T est la réflexion d'axe $x'x$; $f : z \mapsto \bar{z}$.



Cherchons la composée de cette réflexion et de la rotation de centre O et

On choisit un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, O étant le centre du rectangle de dimensions 4 et 2 (par exemple).

La rotation est associée à la fonction complexe

$$f : z \mapsto z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz.$$

La translation est associée à la fonction complexe

$$g : z \mapsto z'' = z + 1.$$

Puisque $|i| = 1$, cette fonction est associée à

une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et son centre a pour affixe ω tel que $i\omega + 1 = \omega$.

$$D'où \omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$M(x, y)$ étant un point quelconque, pour trouver les coordonnées du point image M' on pose :

$$z_M = x + iy \text{ et } z'_{M'} = x' + iy'$$

$$\text{on a } x' + iy' = i(x + iy) + 1$$

$$\text{soit } \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x. \end{cases}$$

d'angle $\frac{\pi}{2} : z \mapsto \bar{z} \mapsto iz$.

On a donc $z' = i\bar{z}$.

Si l'on cherche les points invariants, on doit résoudre l'équation

$$x + iy = i(x - iy), \text{ soit } x = y.$$

Tous les points de la première bissectrice Δ sont invariants. On a la réflexion d'axe Δ . ■

Une autre façon de représenter une courbe

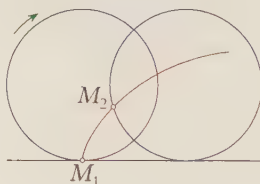
Étant donné une fonction f , la représentation graphique de f est une courbe d'équation $y=f(x)$. Mais étant donné une courbe, il n'existe pas forcément de fonction dont elle soit la représentation graphique.

Généralités

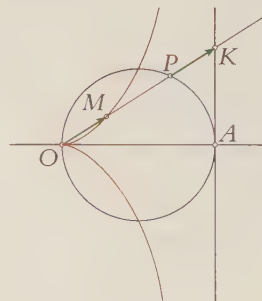
En étudiant une fonction f dans $\mathbb{R}$, sa représentation graphique C est une courbe d'équation $y=f(x)$. On sait aussi donner une équation cartésienne de droite ou de cercle dans un repère du plan. Mais ces modes de représentation sont très restrictifs.

- Ainsi, lorsqu'une roue roule sans glisser sur une route rectiligne, on peut se demander quelle est la trajectoire décrite par un point quelconque de la roue ; le type de courbe obtenu est appelé une cycloïde, et il est impos-

sible d'écrire son « équation » sous la forme $y=f(x)$.



- En étudiant le problème de la duplication du cube, le géomètre Dioclès (VI^e siècle av. J.-C.) s'est intéressé à la cissoïde qui porte son nom : le point P décrivant le cercle de diamètre $[OA]$, la droite (OP) coupant en K la



tangente au cercle en A , on place M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PK}$. La cissoïde de Dioclès est le lieu géométrique du point M lorsque P décrit le cercle. Là encore, cette courbe n'est pas la représentation graphique d'une fonction. ■

Diverses représentations

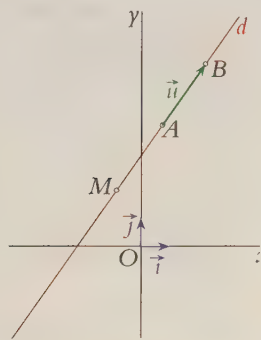
Selon le problème posé, la propriété étudiée, il peut être judicieux de

choisir l'une de ces représentations plutôt qu'une autre...

C'est un peu comme dans le cas des nombres complexes.

	Équation cartésienne	y en fonction de x	Représentation paramétrique
Droite	$ax + by + c = 0$	$y = mx + p$	$\begin{cases} x(t) = a + t\alpha \\ y(t) = b + t\beta \end{cases}$
Cercle	$x^2 + y^2 = R^2$	$y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ou $-\sqrt{R^2 - x^2}$	$\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases}$

La droite d est la droite passant par les deux points A et B . Si on



connaît les coordonnées de ces deux points dans un repère du plan, on sait en écrire une équation cartésienne. À tout point M de d on peut associer un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. Si A a pour coordonnées (a, b) et $M(x, y)$ et si B a pour coordonnées (α, β) , l'égalité vectorielle se traduit par les égalités suivantes appelées équations paramétriques de la droite d :

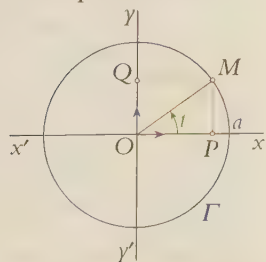
$$\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \end{cases}$$

Si t décrit l'ensemble $\mathbb{R}$, M décrit la droite d . À tout t est associé un point M . Ce point est noté $M(t)$ et ses coordonnées sont notées $x(t)$ et $y(t)$: ce sont des fonctions du paramètre réel t .

Pour une même droite, on peut écrire une infinité d'équations paramétriques : il suffit de changer le point A ou de remplacer $\overrightarrow{AB}$ par un vecteur colinéaire (non nul). ■

Le cercle et ses équations paramétriques

Soit deux axes perpendiculaires $x'x$ et $y'y$, un point P sur le premier et un point Q sur le second. Sur l'axe $x'x$, l'abscisse de P est $x(t) = a \cos t$ ($a > 0$). Si t est le temps, le mouvement de P est un mouvement sinusoïdal. Sur l'axe $y'y$, l'ordonnée de Q est $y(t) = a \sin t$. C'est un mouvement de même période 2π .



On pose $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ et on cherche le lieu géométrique du point M , t décrivant $\mathbb{R}$. On a $OM^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2 = a^2$.

Le point M décrit le cercle Γ de centre O et de rayon a . C'est un point animé d'un mouvement circulaire périodique de période 2π : si t décrit $[0, 2\pi]$, $x(t)$ varie de a à $-a$ et $y(t)$ également.

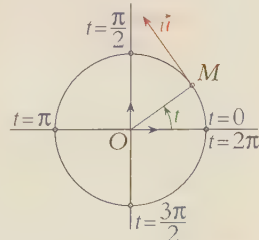
Les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \end{cases}$$

constituent une équation paramétrique du cercle Γ .

Attention ! Dans ce cas, le centre du cercle est l'origine du repère.

Si on calcule les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$, le vecteur $\overrightarrow{u(t)} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OM}$ car $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.



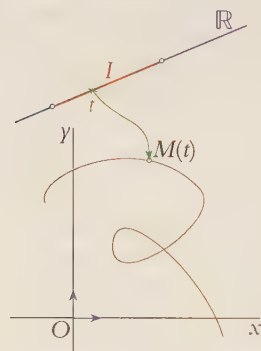
D'autre part, sa norme est constante : $\|\overrightarrow{u}\| = a$. Le mouvement de M est un mouvement uniforme sur le cercle Γ : $\overrightarrow{u(t)}$ est le vecteur vitesse à l'instant t . ■

Des généralités sur les courbes paramétrées

Avec les équations paramétriques d'une courbe, la géométrie devient de la mécanique : on peut imaginer les points se déplaçant sur les courbes en fonction du temps.

Définition et exemple

Soit f et g deux fonctions de la même variable t , dérivables sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$.



On leur associe, dans un repère du plan, le point $M(t)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$$

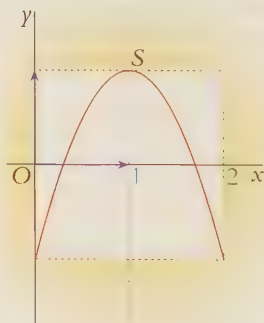
L'ensemble C des points $M(t)$ lorsque t décrit I est une courbe paramétrée. Le système est un système d'équations paramétriques de la courbe C . L'étude des deux fonctions f et g permet de construire C et d'en trouver des propriétés. Dans certains cas, par élimination de t entre $x(t)$

et $y(t)$, on pourra déterminer une relation entre x et y , c'est-à-dire une équation cartésienne de C , mais cela demande des précautions.

Soit par exemple la courbe définie par :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \sin t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases}$$

Or, $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$, d'où $y = 1 - 2(x - 1)^2$ ou



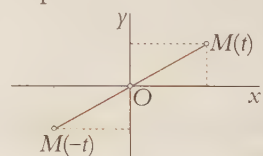
$y = -2x^2 + 4x - 1$. C'est l'équation d'une parabole d'axe $x = 1$ de sommet $S(1; 1)$, mais il faut prendre garde au fait que $0 \leq x \leq 2$ et $-1 \leq y \leq 1$. La courbe C n'est donc qu'un arc de parabole située dans un rectangle. $[0; 2] \times [-1; 1]$.

Étude générale d'une courbe paramétrée

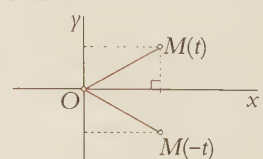
Il existe plusieurs particularités à considérer dans l'étude des courbes paramétrées.

Les symétries

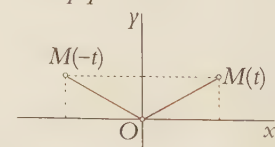
Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ pour tout $t \in I$, alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport au point O .



Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ pour tout $t \in I$, alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe x' .



Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ on a une symétrie par rapport à l'axe y' .



Ainsi, l'étude des parités

de $x(t)$ et de $y(t)$ donne des indications sur les éléments de symétrie de la courbe C .

Exemple

La cissoïde de Dioclès a pour représentation paramétrique

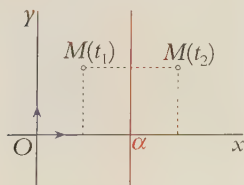
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

$t \mapsto x(t)$ est paire et

$t \mapsto y(t)$ est impaire.

La courbe admet $x'x$ comme axe de symétrie. Pour la construire, il suffit de faire décrire à t l'intervalle $[0; +\infty[$

Autres symétries



Si on peut trouver une constante α telle que pour tout t_1 et $t_2 = t_1 + \lambda$ on a :

$$x(t_1) + x(t_1 + \lambda) = 2\alpha$$

$$\text{et } y(t_1) = y(t_2),$$

la droite d'équation $x = \alpha$ est un axe de symétrie.

Périodes

Dans le cas où les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ ont une période commune T , alors $x(t + T) = x(t)$ et

$y(t + T) = y(t)$. Les deux points $M(t)$ et $M(t + T)$ coïncident.

Pour obtenir la courbe complète, il suffit que t décrive un intervalle J d'amplitude T , par exemple $J = [0; T[$.

Les variations des deux fonctions

L'étude du signe de chacune des dérivées $x' = x'(t)$ et $y' = y'(t)$ sur l'intervalle envisagé permet de déterminer les variations de chacune des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

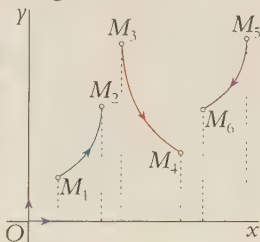
t	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
x'	+	+	+	+	+	-
y'	+	+	-	-	-	-
x	↗	↗	↘	↘	↘	↘
y	↗	↘	↘	↘	↘	↘

Exemple

Reprenons les équations $x(t) = 1 + \sin t$ et $y(t) = \cos 2t$. $T = 2\pi$ est période commune aux deux fonctions.

Il suffit de les étudier sur l'intervalle $[0; 2\pi[$. ■

Ces variations « simultanées » donnent une idée de la forme de la courbe décrite par M sur chaque intervalle, et du « déplacement » de M lorsque t augmente. ■

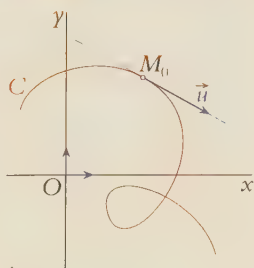


La tangente à une courbe paramétrée

Si en t_0 les valeurs dérivées $x'(t_0)$ et $y'(t_0)$ ne sont pas nulles simultanément, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x'(t_0), y'(t_0))$ est vecteur directeur de la tangente à C au point $M(t_0)$.

● Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la tangente est parallèle à l'axe $y'y$.

● Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, la tangente est parallèle à l'axe $x'x$.



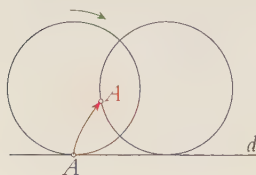
Équation de la tangente en $M(t_0)$:

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Les représentations paramétriques ont la particularité de permettre de dresser de très belles courbes, dont certaines sont définies de manière mécanique.

La cycloïde ou roulette

Un cercle de rayon R roule sans glisser sur une droite d .



La cycloïde est la courbe décrite par un point A de ce cercle au cours de ce roulement (la courbe décrite par la valve de la chambre à air de la roue d'une bicyclette).

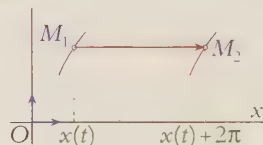
Ses équations paramétriques s'écrivent (en prenant $R = 1$).

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

La fonction x est impaire et la fonction y est paire : l'axe yy' est axe de symétrie et il suffit de faire varier t sur $[0; +\infty[$.

$$x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi \text{ et}$$

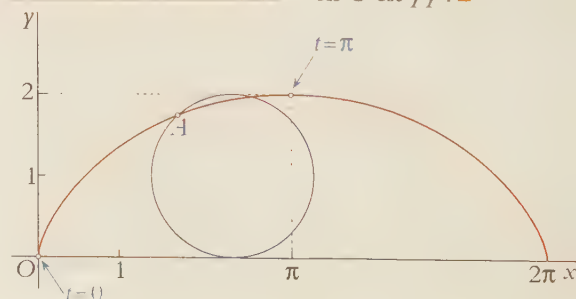
$$y(t + 2\pi) = y(t)$$



Ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est égal à $2\pi \vec{i}$ avec $M_1 = M(t)$ et $M_2 = M(t + 2\pi)$.

Si l'on trace la courbe pour t décrivant $[0; 2\pi[$, on obtiendra toute la courbe en appliquant à l'arc obtenu des transla-

t	0	π	2π
$x'(t)$	0	+	0
$y'(t)$	0	+	0
$x(t)$	0	π	2π
$y(t)$	0	2	0



tions de vecteur $\lambda 2\pi \vec{i}$.

Étudions x et y sur $[0; 2\pi]$

$$\begin{cases} x' = 1 - \cos t \\ y' = \sin t \end{cases}$$

d'où les variations de $x(t)$ et $y(t)$.

Au point $M(\pi)$, la tangente a pour vecteur directeur $\vec{u}(2; 0)$: cette tangente est parallèle à xx' .

En $M(\frac{\pi}{2})$, on a le

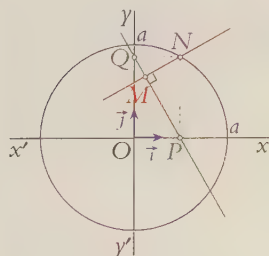
vecteur $\vec{V}(1; 1)$: la tangente est parallèle à la première bissectrice. À $t = 0$, les deux dérivées s'annulent. Il faut prendre les valeurs dérivées secondes :

$$x''(t) = \sin t \quad y''(t) = \cos t$$

d'où $\vec{W}(0; 1)$: la tangente en O est yy' . ■

Cette courbe fut étudiée par de nombreux mathématiciens, en particulier par Jean Bernoulli (1667-1748).

On envisage, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point N décrivant le cercle de centre O et de rayon a . Ce point N se projette en P sur $x'x$ et en Q sur $y'y$. Les coordonnées de N sont $(a \cos t, a \sin t)$.



Soit M le projeté orthogonal de N sur (PQ) : on démontre sans trop de peine que les coordonnées de N sont :

$$(a \cos^3 t, a \sin^3 t).$$

L'astroïde est l'ensemble des points M dont une représentation paramétrique s'écrit

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^3 t \\ y(t) = a \sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0).$$

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques, de période 2π : il suffit que t décrive l'intervalle $[-\pi; +\pi]$.

En raison des parités, les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont

symétriques par rapport à $x'x$ et il suffit que t varie entre 0 et π .

$$D'autre part \quad x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$$

$$\text{et } y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t);$$

la première bissectrice du repère est axe de symétrie de la courbe. On a

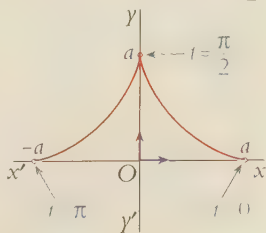
$$\begin{cases} x'(t) = -3a \sin t \cos^2 t \\ y'(t) = 3a \cos t \sin^2 t \end{cases}$$

d'où le signe de x' et y' et les variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$, sur l'intervalle $[0; \pi]$.

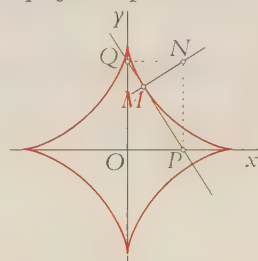
t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$x'(t)$	0	0	0
$y'(t)$	0	+	0
$x(t)$	a	0	a
$y(t)$	0	a	0

Pour $t = \frac{\pi}{2}$, les dérivées s'annulent, de même en $t = 0$ et $t = \pi$: pour la tangente en ces points, il faut faire appel aux dérivées secondes.

La courbe est tangente à $x'x$ en $t = 0$ et $t = \pi$, et tangente à $y'y$ pour $t = \frac{\pi}{2}$.



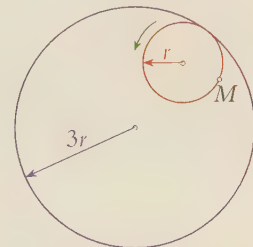
On complète sans peine avec la symétrie par rapport à $x'x$. On démontre que la tangente en un point M de la courbe est précisément la droite (PQ) sur laquelle on a projeté le point N .



D'autre part, la longueur PQ est constante et égale à a .

En éliminant t , dans les équations paramétriques, on trouve une équation cartésienne de l'astroïde sous la forme

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$



L'astroïde peut être engendrée par le point M d'un cercle de rayon r qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon $3r$. ■

C'est une courbe connue depuis l'Antiquité grecque. Depuis Kepler (1571-1630) et Newton (1642-1727), on sait que l'ellipse est la courbe décrite par les planètes autour du Soleil. On la rencontre aussi en architecture ainsi que dans la conception des jardins d'ornement.

Les équations paramétriques de l'ellipse

Soit l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$$

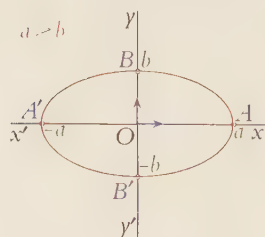
Le repère est orthonormal.

Les fonctions ont pour période 2π : on donne à t les valeurs de $[0; 2\pi]$.

L'axe $x'x$ est axe de symétrie car $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$.

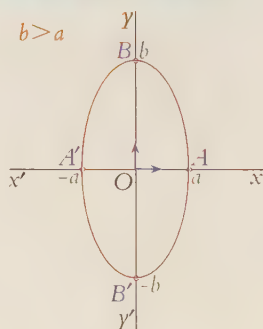
L'axe $y'y$ est axe de symétrie car $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$.

L'origine du repère est donc centre de symétrie.



Si $a > b$, on a une ellipse de grand axe $2a$ porté par $x'x$.

Si $b > a$ on a une ellipse de grand axe $2b$ porté par $y'y$.



On peut aisément éliminer t

$$\frac{x(t)}{a} = \cos t \text{ et } \frac{y(t)}{b} = \sin t$$

d'où l'équation cartésienne

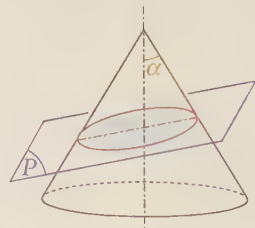
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les points $A(a; 0)$, $A'(-a; 0)$, $B(0; b)$ et $B'(0; -b)$ sont les sommets de cette courbe.

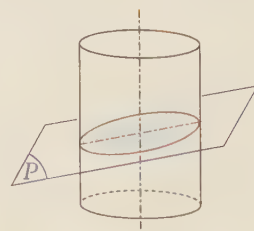
Les tangentes en A et A' sont parallèles à $y'y$ et les tangentes en B et B' parallèles à $x'x$. ■

L'ellipse est une « conique »

C' est la courbe obtenue en coupant un cône de révolution par un plan P qui fait, avec l'axe du cône, un angle supérieur à α , demi-angle au sommet... d'où le nom de conique.

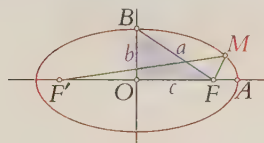


On obtient aussi une ellipse par section d'un cylindre de révolution par un plan non parallèle aux bases. ■



Les foyers d'une ellipse

On va supposer $a > b$ et on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Les points de l'axe xx' : $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ sont appelés foyers de la courbe. Ils ont des propriétés remarquables.



En particulier, on sait que la Terre décrit une ellipse autour du Soleil qui occupe la position de l'un des foyers.

On démontre que

$$MF = a - c \cos t$$

$$MF' = a + c \cos t$$

d'où, quel que soit t , $MF + MF' = 2a$.

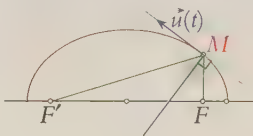
Ainsi, l'ellipse est aussi le lieu géométrique des points M dont la somme des distances $MF + MF'$ aux deux points fixes F et F' est constante.

Cette définition purement géométrique donne au jardinier un moyen simple pour tracer une ellipse dans un jardin d'ornement : les deux bouts d'une corde sont fixés en F et F' ; un piquet en M tend la ficelle et, couissant le long de la corde, décrit l'ellipse... ■



La tangente à l'ellipse

Le vecteur $\vec{u}(t)$ $x'(t) = -a \sin t$ $y'(t) = a \cos t$ est vecteur directeur de la tangente en $M(t)$ à l'ellipse.



On démontre que sa direction est perpendiculaire à la bissectrice $[Mz]$ de l'angle $\widehat{FMF'}$.

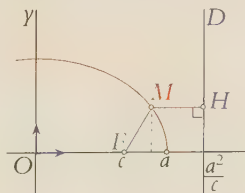
Une autre définition géométrique

Soit la droite D d'équation $x = \frac{a^2}{c}$ et H le projeté sur D d'un point M de l'ellipse.

$$\text{On a } MH = \frac{a^2}{c} - a \cos t = \frac{a}{c} (a - c \cos t).$$

$$\text{Or } MF = a - c \cos t$$

$$\text{d'où } \frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}.$$

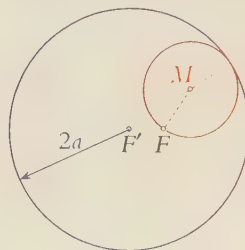


L'ellipse est aussi le lieu géométrique des points M dont le rapport des distances au « foyer » F et à la « directrice » D est constant : le rapport $\frac{c}{a}$,

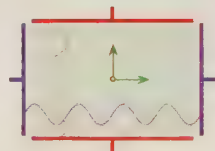
Cette propriété curieuse a des applications inattendues. Dans un billard elliptique, la boule lancée de F' qui frappe le bord en M se réfléchit en passant par F quel que soit le point M . Ou encore un rayon sonore émis de F' se réfléchit sur une voûte elliptique et vient toujours en F . Ce phénomène acoustique est rencontré, par exemple, à l'abbaye de La Chaise-Dieu. ■

designé par e , est appelé « excentricité » de l'ellipse. L'excentricité de l'ellipse est inférieure à 1. On peut bien sûr considérer la seconde directrice D' associée au foyer F' : on a aussi $\frac{MF'}{MH'} = e$.

On démontre que l'ellipse est le lieu des centres M des cercles tangents intérieurement au cercle $(F', 2a)$ et passant par le point intérieur F , avec $FF' = 2c$ ($c < a$). ■



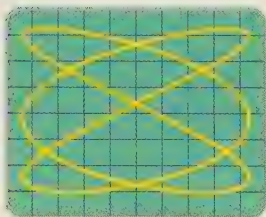
En 1873, ces courbes ont été rencontrés par Lissajous en étudiant des mouvements vibratoires. On peut les observer sur un oscillographe cathodique. Une particule est soumise à deux champs électromagnétiques sinusoïdaux, de directions perpendiculaires. On obtient sur l'écran un spot lumineux dont la trajectoire est une telle courbe.



L'étude d'une courbe de Lissajous

Considérons une courbe C de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

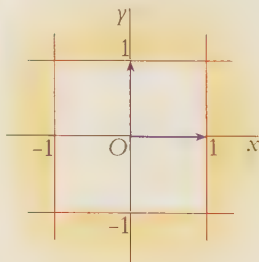


Les deux fonctions sont périodiques, de période $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{2} : 2\pi$ est une période commune.

Il suffit de faire décrire à t l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ ou encore $[-\pi ; \pi]$.

Les points $M_1(t)$ et $M_2(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe x' , qui est donc un axe de symétrie pour la courbe C . Il suffit de faire décrire à t l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Par ailleurs $x(t + \pi) = -x(t)$ et $y(t + \pi) = y(t)$. Les points $M_1(t)$ et $M_3(t + \pi)$ sont symétriques par rapport à y' qui est un axe de symétrie de cette courbe de Lissajous. O est centre de symétrie. Par ailleurs, $-1 \leq x(t) \leq 1$ et $-1 \leq y(t) \leq 1$:



La courbe est contenue dans un carré de centre l'origine, de côté 2. En raison de la périodicité et des symétries, on fera varier t entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Variations :

$$\begin{cases} x'(t) = -3 \sin 3t \\ y'(t) = 2 \cos 2t \end{cases}$$

Sur $[0 ; 2\pi]$:

$x'(t)$ s'annule en 0 et $\frac{\pi}{3}$.

$y'(t)$ s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

On sait alors étudier le signe de ces dérivées.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		
$x'(t)$	0	-	-	0	+	3
$y'(t)$	2	+	0	-	-	-2
$x(t)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
$y(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	

En $t=0$, on obtient le point $A(1; 0)$ avec une tangente parallèle à y' .

Pour $t = \frac{\pi}{4}$, on obtient le

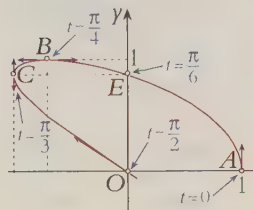
point $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$ et une tangente parallèle à l'axe x' .

Pour $t = \frac{\pi}{3}$, on obtient le

point $C\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et une tangente parallèle à y' .

Pour $t = \frac{\pi}{2}$, on obtient

l'origine O du repère avec une tangente de vecteur directeur $\vec{u}(3, -2)$.



Par ailleurs, $x(t)$ s'annule aussi pour $t = \frac{\pi}{6}$: on obtient le point

$$E\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

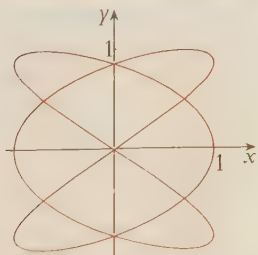
On complète par :

• une symétrie par rapport à x' .

• une symétrie par rapport à $y'y$.

Ce qui donne un cycle complet pour t décrivant l'intervalle $[0, 2\pi]$. ■

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Arc décrit	A	E	B	C	O



Les équations générales

D'une façon plus générale, une courbe de Lissajous a une représentation paramétrique du type :

$$\begin{cases} x(t) = a \sin(mt) \\ y(t) = b \cos(nt) \end{cases}$$

Elle est toujours incluse dans le rectangle défini par $-a \leq x \leq a$ et $-b \leq y \leq b$.

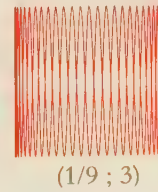
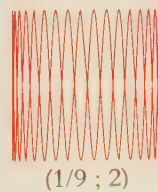
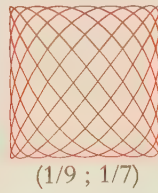
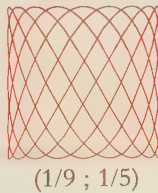
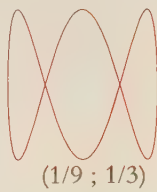
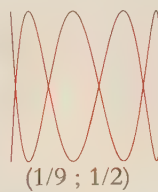
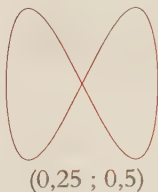
Si $m = n$, on obtient une ellipse, et un cercle si, de plus, $a = b$.

L'allure d'un cycle change évidemment selon les valeurs des coefficients m et n .

Exemples

La courbe se ferme si le quotient $\frac{m}{n}$ est un rationnel : les périodes $\frac{2\pi}{m}$ et $\frac{2\pi}{n}$ ont un « multiple » commun qui est une période commune à $x(t)$ et $y(t)$.

En revanche, si le quotient $\frac{m}{n}$ est irrationnel, la courbe ne se ferme pas, et au bout d'un temps assez long la trajectoire remplira le rectangle... Ci-dessous, voici neuf exemples, avec l'indication de leur couple (m, n) . ■



C'est à partir de la connaissance des naturels qu'ont été inventés tous les autres nombres.

Introduction : l'ensemble $\mathbb{N}$

L'arithmétique se propose l'étude des nombres entiers et des propriétés des opérations sur ces nombres. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N} : \mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 \dots\}$. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z} : \mathbb{Z} = \{\dots - 4 ; - 3 ; - 2 ; - 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 \dots\}$

Les entiers naturels ont été inventés pour compter des objets. Un nombre entier naturel caractérise les ensembles ayant le même nombre d'éléments : ils peuvent être mis en bijection l'un avec l'autre.

S'est posé très vite le problème de l'écriture de tous les naturels : ils sont en nombre illimité et il est souhaitable de pouvoir les écrire « tous » avec un minimum de signes : les chiffres. C'est le problème de la numération.

Au cours des âges, de nombreux systèmes furent utilisés depuis les Babyloniens, en passant par les Hindous, les Égyptiens, les Romains et les Arabes.

La première idée consiste à grouper les nombres par paquets en donnant

des noms aux groupements. La deuxième idée consiste à noter avec les mêmes symboles (les « chiffres »), les nombres de paquets, puis de paquets de paquets, etc. C'est la « numération de position », complétée par l'invention du zéro par les Hindous quelques siècles après J.-C.

Babylone $37 =$ 

Égypte $137 =$ 

Rome $37 =$ XXXVII

L'ensemble $\mathbb{N}$ possède des propriétés importantes élaborées au cours de l'histoire des mathématiques : elles conditionnent les propriétés de tous les autres nombres inventés à partir des entiers naturels. Ces propriétés ont été codifiées de manière « axiomatique » par G. Peano (1858-1932).

● Tout naturel n a un « suivant » ou « successeur » noté $n + 1$. Tout naturel k , sauf 0, a un antécédent noté $k - 1$.

● Il y a un ordre entre deux naturels quelconques et différents : Si n n'est pas égal à p , on a soit $n < p$ soit $n > p$.

● Le naturel zéro noté 0 est plus petit que tous les autres.

● Il n'y a pas de naturel plus grand que tous les autres.

● Il n'y a aucun naturel entre n et $n + 1$.

● Les opérations sur $\mathbb{N}$ sont l'addition et la multiplication dont les propriétés sont bien connues.

Avec les entiers naturels, on utilise souvent un raisonnement particulier qui est une conséquence de la propriété appelée principe de récurrence. ■

Le principe de récurrence

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Si $0 \in A$ et si $(p \in A) \Rightarrow (p + 1 \in A)$ alors $A = \mathbb{N}$.

Autrement dit, si l'on envisage une propriété liée à un entier naturel p , si cette propriété est vraie pour $p = 0$, si, étant vraie pour p , cela entraîne qu'elle est aussi vraie pour $p + 1$, alors elle est vraie pour tout entier p .

Si le naturel a est égal au produit $b \times c$, on dit indifféremment que :

● a est multiple de b

ou a est multiple de c ;

● b est un diviseur de a

ou c est un diviseur de a ;

● b divise a ou c divise a . ■

Les propriétés de ces relations dans $\mathbb{N}$

● Pour tout naturel a :

$$a = 1 \times a$$

donc a est multiple de lui-même et a est multiple de 1 ; 1 est diviseur de a et a est diviseur de a .

● Pour tout naturel a :

$$0 = 0 \times a$$

donc 0 est multiple de a .
0 est multiple de 0.

● Tout multiple d'un multiple de a est aussi un multiple de a . Le plus petit multiple non nul de a est a lui-même.

● Tout diviseur d'un diviseur de a est aussi un diviseur de a . Le plus

petit diviseur de a est 1.
Le plus grand diviseur de a est a lui-même.

● Les multiples de 2 sont les nombres pairs ; les autres sont impairs.

● La liste des multiples de a est illimitée : on note souvent M_a l'ensemble des multiples de a :
 $M_a = \{0 ; a ; 2a ; 3a ; \dots ; ka \dots\}$.

● La liste des diviseurs de a est finie puisque le plus grand diviseur est a lui-même. On note souvent D_a l'ensemble des diviseurs de a . ■

L'écriture décimale ou « en base dix »

On connaît les puissances de 10 : 10^0 ; 10^1 ; 10^2 ; 10^3 ; ... ; 10^p .

Tout nombre naturel est la somme de multiples des puissances de dix.

L'écriture d'un naturel en base dix est une combinaison linéaire de ces puissances de dix, les coefficients étant des nombres inférieurs à 10.

$$372\,095 = 300\,000 + 70\,000 + 2\,000 + 90 + 5$$

$$372\,095 = 3 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 5 \times 10^1$$

Nous reviendrons sur cette question des « bases » de numération.

Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de ses diviseurs « propres », c'est-à-dire les diviseurs autres que lui-même.

On vérifiera sans peine que 28 est parfait :

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Les nombres 496 et 8128 sont parfaits de même que $2^{12} (2^{13} - 1)$.

Relation « est diviseur de » dans $\mathbb{N}$ notée $|$

Pour tout $a : a | a$.

Si $a | b$ et $b | c$ alors $a | c$.

Si $a | b$ et $b | a$ alors $a = b$.

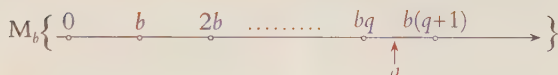
Recherche des diviseurs d'un nombre naturel

Pour trouver tous les diviseurs d'un naturel, il suffit de l'écrire sous la forme d'un produit de toutes les manières possibles : les diviseurs vont par « paire », sauf si le nombre considéré est un carré :

$28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$ on a $D_{28} = \{1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28\}$
 $16 = 1 \times 16 = 2 \times 8 = 4 \times 4$
d'où $D_{16} = \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16\}$.
Nous verrons plus loin une autre méthode systématique pour trouver tous ces diviseurs. ■

Lorsqu'on effectue une division de deux naturels à la calculatrice, elle affiche très souvent un nombre à virgule. Ici, on s'intéresse à une division particulière où n'interviennent que des entiers.

La division euclidienne dans $\mathbb{N}$



Soit a et b deux naturels. Si a est un multiple de b on a $a = bq$.

Si a n'est pas un multiple de b , on peut encadrer ce nombre a par deux multiples consécutifs de b : $bq < a < b(q+1)$ d'où $a = bq + r$ avec $r < b$.

Dans tous les cas, on peut trouver les naturels q et r tels que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

C'est ce que l'on appelle la formule de la division euclidienne de a par b dans $\mathbb{N}$: q est le quotient euclidien et r le reste.

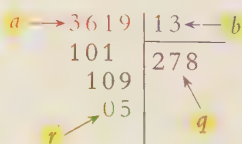
On sait trouver q et r depuis l'école élémentaire en « posant la division » de a par b .

Exemple

$3619 = 278 \times 13 + 5$ et $5 < 13$.

C'est la division de 3619 par 13.

La division de 3619 par 5 s'écrirait $3619 = 723 \times 5 + 4$ et $4 < 5$. ■



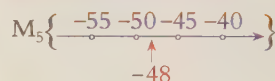
Les propriétés

- b est un diviseur de a ou a est divisible par b ou a est multiple de b si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

- Si $a < b$, alors $q = 0$ et $r = a$ $a = 0b + a$.

- Si $a = b$, alors $q = 1$ et $r = 0$ $a = 1b + 0$.

La division euclidienne dans $\mathbb{Z}$



On définit aussi dans $\mathbb{Z}$ la division d'un entier relatif quelconque a par un entier b strictement positif : il suffit d'intercaler le nombre a entre deux multiples consécutifs de b , qui sont négatifs ou positifs :

Ainsi, avec $a = -48$ et $b = 5$ on a $5 \times (-10) < -48 < 5 \times (-9)$ d'où $-48 = 5 \times (-10) + 2$ et $2 < 5$.

Cette fois le quotient (-10) est négatif, mais on prend toujours le reste positif : il est inférieur au diviseur 5.

Étant donné deux entiers relatifs a et b , avec $b > 0$, il existe un unique couple (q, r) d'entiers tels que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Dire que le reste est nul, c'est dire que a est multiple de b ou encore que b est un diviseur de a , comme dans $\mathbb{N}$. ■

Le critère de divisibilité en base dix dans

Pour un nombre naturel écrit dans notre système de numération décimale, il est intéressant de reconnaître très vite certaines divisibilités, par exemple dans la recherche des diviseurs de ce nombre.

- Un nombre est divisible par 10 dans le seul cas où il est terminé par 0.
- Un nombre est divisible par 100 dans le seul cas où il est terminé par 00.
- Un nombre est divisible par 2 dans le seul cas où le dernier chiffre est pair.

● Un nombre est divisible par 5 dans le seul cas où il est terminé par 0 ou 5.

● Un nombre est divisible par 4 dans le seul cas où le nombre formé par les deux derniers chiffres à droite est multiple de 4.

● Un nombre est divisible par 25 dans le seul cas où il se termine par 00 ou 25 ou 50 ou 75.

● Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

● Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la

somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemple

Soit $n = 68\,148$.

Ce nombre est divisible par 2 et par 4, car 48 est multiple de 4.

On a $6 + 8 + 1 + 4 + 8 = 27$;

or 27 est multiple de 9, donc le nombre n est divisible par 9 et par 3.

Soit $p = 127\,897$.

Ce nombre n'est pas divisible par 2, ni par 4, ni par 8, ni par 5, ni par 3, ni par 9, mais il est divisible par 7. (Voir l'encadré ci-dessous.) ■

Le critère de divisibilité par 11 en base dix

Pour savoir si un naturel écrit en base dix est divisible par 11, on peut procéder de la façon suivante : On effectue la somme I des chiffres de rang impair à partir de la droite puis la somme P des chiffres de rang pair à partir de la droite : le nombre est divisible par 11 si et seulement si $|I - P|$ est multiple de 11.

Exemple : $n = 43\,857$

$I = 7 + 8 + 4 = 19$ et

$P = 5 + 3 = 8$

$I - P = 11$ donc n est multiple de 11.

Le reste d'une division euclidienne

Si le nombre considéré a n'est pas divisible par b , ces critères de divisibilité permettent de trouver très vite le reste de la division euclidienne de a par b dans les cas simples.

$68\,148$ n'est pas divisible par 5 : le reste de sa division par 5 est le même que celui de la division par 5 de 8 :
or $8 = 5 \times 1 + 3$ donc
 $68\,148 = 5q + 3$.

Soit $68\,348$: la somme de ses chiffres est 29. Ce nombre n'est pas divisible par 3 : on a
 $29 = 3 \times 9 + 2$.

Le reste de la division de $68\,348$ par 3 est 2 :

$$68\,348 = 3q + 2.$$

De même, le reste de la division par 9 de $68\,348$ est 2 : $68\,348 = 9q' + 2$. ■

La divisibilité par 7

$A = 3\,192$

$$\begin{array}{r} 3\,192 \\ - 4 \quad \swarrow 2 \\ \hline 3\,15 \\ - 10 \quad \swarrow 2 \\ \hline 21 \\ - 2 \quad \swarrow 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

3 192 est
divisible
par 7

$B = 1\,976$

$$\begin{array}{r} 1\,976 \\ - 12 \quad \swarrow 2 \\ \hline 185 \\ - 10 \quad \swarrow 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

8 n'est pas
divisible
par 7, 1976
non plus !

Le reste dans une division euclidienne est intéressant : on peut en tirer des applications utiles dans l'exploration des propriétés des nombres entiers naturels.

La notion de congruence

Soit a et a' deux naturels. Si la différence $a - a'$ est un multiple de b (b non nul), alors a et a' ont le même reste dans la

division euclidienne par b et réciproquement.

On écrit $a \equiv a' [b]$

qui se lit :

« a congru à a' modulo b ».

C'est ce que l'on appelle la relation de congruence dans $\mathbb{N}$.

Ainsi : $17 \equiv 9 [2]$

et $17 \equiv 37 [5]$. ■

Ses propriétés

• Quel que soit a , on a : $a \equiv a [b]$.

• Si $a \equiv m [b]$, alors $m \equiv a [b]$.

• Si $a \equiv m [b]$ et $m \equiv p [b]$, alors $a \equiv p [b]$.

• Si r est le reste de la division euclidienne de a par b , alors $a \equiv r [b]$.

Dès que l'on a une division euclidienne, on peut écrire une relation de congruence. Ce qui est intéressant, c'est que cette relation est compatible avec l'addition, la multiplication et l'exponentiation dans $\mathbb{N}$:

Si $a \equiv r [b]$ et $a' \equiv r' [b]$,
alors $a + a' \equiv r + r' [b]$,
alors $a \times a' \equiv r \times r' [b]$,
alors $a^n \equiv r^n [b]$.

Si on se donne un entier a non nul, tous les nombres a' tels que $a \equiv a' [b]$ s'écrivent $r + kb$,

r étant le reste de la division euclidienne de a par b et k étant un entier quelconque :

$\{r; r+b; r+2b; r+3b; \dots; r+kb \dots\}$

Ce sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme r et de raison b .

Le nombre a figure dans cette liste puisque $a = bq + r$.

Ainsi, pour la relation de congruence modulo 2, les entiers sont répartis en deux classes : les pairs et les impairs :

$C_0 = \{0; 2; 4; 6; 8 \dots 2k; \dots\}$

et $C_1 = \{1; 3; 5; 7 \dots 2k+1; \dots\}$.

Une preuve

qui n'en est pas une : la « preuve par 9 »

Pour une multiplication, si $a \equiv r [9]$ et si $b \equiv r' [9]$

alors $ab \equiv rr' [9]$ et on présentait cette « preuve » au moyen d'une croix ; cependant, la moindre erreur d'un multiple de 9 passait inaperçue et cette preuve est bien illusoire !

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 31 \\ \hline 25 \\ 75 \\ \hline 775 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 31 \\ \hline 25 \\ 75 \\ \hline 955 \end{array}$$

C'est juste !

Un théorème d'Euler :

si a n'est pas divisible par p , alors le reste de la division par p de a^{p-1} est 1, ce qui s'écrit sous forme de congruence :

si a n'est pas congru à 0 modulo p , alors $a^{p-1} \equiv 1 [p]$.

Par exemple, $38 \equiv 2 [3]$ donc $38^2 \equiv 1 [3]$. ■

La base de numération : la base dix

Points clés

Soit le nombre $n = 68\,209$.

Le nombre considéré est somme de multiples de puissances de 10 et les coefficients de ces puissances successives sont les restes dans la division par 10 du nombre n et des quotients successifs obtenus dans ces divisions.

$$\begin{array}{rcl} \text{Division de } n \text{ par } 10 & 68\,209 = 6\,820 \times 10 + 9 \\ \text{Division par } 10 \text{ du quotient } 6\,820 & = 682 \times 10 + 0 \\ \text{Division par } 10 \text{ du quotient } 682 & = 68 \times 10 + 2 \\ \text{Division par } 10 \text{ du quotient } 68 & = 6 \times 10 + 8 \\ \text{Division par } 10 \text{ du quotient } 6 & = 0 \times 10 + 6 \end{array}$$

68209

Ainsi :

$$68\,209 = 6 \times (10^4) + 8 \times (10^3) + 2 \times (10^2) + 0 \times (10^1) + 9 \times (10^0).$$

La base deux pour écrire un entier naturel

Écrivons en base deux le nombre qui s'écrit 43 en base dix. Si on remarque que les puissances de 2 sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ... on a $43 = 32 + 8 + 2 + 1$ soit $43 = 2^5 + 0 \times 2^4 + 2^3 + 0 \times 2^2 + 2^1 + 2^0$.

En base deux ce nombre s'écrit :

$$\overline{101011}^{(\text{deux})}$$

Le zéro de l'écriture chiffrée signifie que la puissance de la base ne figure pas dans cette écriture. L'écriture d'un nombre en base deux ne nécessite l'utilisation que de deux chiffres : 1 et 0. Et c'est bien pratique dans les ordinateurs.

La suite des entiers dans cette base s'écrit :
0 - 1 - 10 - 11 - 100 - 101 - 110 - 111 - 1000 - 1001 - 1010 - 1011, etc.

$$\begin{array}{rcl} 43 & = & 2 \times 21 + 1 \\ 21 & = & 2 \times 10 + 1 \\ 10 & = & 2 \times 5 + 0 \\ 5 & = & 2 \times 2 + 1 \\ 2 & = & 2 \times 1 + 0 \\ 1 & = & 2 \times 0 + 1 \end{array}$$

32 16 8 4 2 1

$$\overline{101011} = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$$

La table d'addition est extrêmement simple et la table de multiplication encore plus !

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Une multiplication en base deux

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times 101 \\ \hline 111 \\ 000 \\ 111 \\ \hline 100011 \end{array}$$

$$111 \times 101 = 100\,011.$$

La base douze

Elle utilise douze chiffres : les dix chiffres de notre numération et deux autres signes pour noter dix et onze, par exemple α = dix et β = onze.

Voici un nombre A écrit en base douze :

$$A = \alpha \, \beta \, 3.$$

On a

$$A = \alpha \times 12^3 + 8 \times 12^2 + \beta \times 12^1 + 3 \times 12^0,$$

d'où l'écriture de A en base dix :

$$A = 10 \times 1\,728 + 8 \times 144 + 11 \times 12 + 3 = 18\,567.$$

Plus grand commun diviseur (pgcd) et plus petit commun multiple (ppcm)

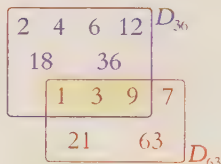
Dans tous les problèmes d'arithmétique interviennent souvent les diviseurs et les multiples communs à deux naturels.

L'introduction de la notion de pgcd

Lorsqu'on envisage deux entiers strictement positifs, on peut s'intéresser à leurs diviseurs communs, ce qui est utile en particulier pour simplifier une fraction.

Ainsi, les nombres 36 et 63 ont chacun des diviseurs : $D_{36} = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$ et $D_{63} = \{1; 3; 7; 9; 21; 63\}$.

L'intersection de ces deux ensembles est $\{1; 3; 9\}$: c'est l'ensemble des diviseurs communs à 36 et 63.



Le plus grand diviseur commun est 9 : on écrit $\text{PGCD}(36; 63) = 9$.

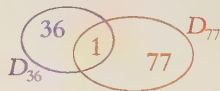
Et on peut écrire

$$\frac{36}{63} = \frac{9 \times 4}{9 \times 7} = \frac{4}{7}.$$

Pour deux entiers strictement positifs a et b , l'un de leurs diviseurs communs est plus grand que tous les

autres : on l'appelle le plus grand commun diviseur de a et b : il est noté $\text{pgcd}(a, b)$.

Évidemment, il arrive que le seul diviseur commun soit 1 ; si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, on dit que a et b sont étrangers ou premiers entre eux. Ainsi, 36 et 77 sont premiers entre eux : $\text{pgcd}(36; 77) = 1$. ■



L'importance du pgcd de a et b pour les fractions

● Les diviseurs du pgcd de a et b sont les diviseurs communs à a et à b . Ainsi, les diviseurs communs à 36 et 63 sont les diviseurs de 9 soit $\{1; 3; 9\}$.

● Si b est diviseur de a , alors $\text{pgcd}(a, b) = b$.

● Si on multiplie a et b par l'entier non nul k , le pgcd de a et b est aussi multiplié par k :

$\text{pgcd}(ka, kb) = k \text{pgcd}(a, b)$. Ainsi le pgcd de 36 000 et 63 000 est 9 000.

● Si D est le pgcd de a et b , alors les nombres $\frac{a}{D}$ et

$\frac{b}{D}$ sont des nombres premiers entre eux.

La fraction $\frac{\frac{a}{D}}{\frac{b}{D}}$ est alors

la fraction irréductible égale à $\frac{a}{b}$.

● Si $a > b$, le pgcd de a et de b est aussi le pgcd de b et du reste de la division euclidienne de a par b .

Cette propriété est très pratique pour calculer un pgcd au moyen d'un algorithme déjà connu

d'Euclide :

En supposant $a > b$, on divise a par b : le reste est r .

Si $r = 0$, alors le pgcd cherché est b ;

sinon, on divise b par r : le reste est r' .

Si $r' = 0$ alors le pgcd est r sinon, on divise r par r' , etc.

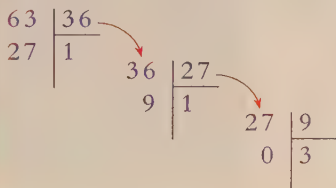
Les restes $r, r', r'' \dots$ sont des entiers et vont en décroissant : dans cette suite, l'un des restes sera 0. Le pgcd est le dernier reste non nul dans cet algorithme. ■

La recherche du pgcd de 63 et 36

$$63 = 36 \times 1 + 27 \quad \text{pgcd}(63; 36) = \text{pgcd}(36; 27)$$

$$36 = 27 \times 1 + 9 \quad \text{pgcd}(63; 36) = \text{pgcd}(27; 9)$$

$$27 = 3 \times 9 + 0 \quad \text{pgcd}(63; 36) = 9$$



Pour deux entiers relatifs non nuls, leur pgcd est celui de leurs valeurs absolues.

Le plus petit commun multiple

Voici les premiers multiples de 15 :
0 ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ;
105 ; 120 ... $k \times 15$...
et les premiers multiples de 20 :

0 ; 20 ; 40 ; 60 ; 80 ; 100 ;
120 ; 140 ; 160 ; 180 ...
 $k' \times 20$...

Ils ont en commun un certain nombre de multiples : par exemple 0 ; 60 ; 120 ; ...

Le plus petit multiple commun autre que 0 est 60 : on l'appelle ppcm de 15 et 20.

Pour deux entiers strictement positifs a et b , l'un de leurs multiples non nul est plus petit que tous les autres : on l'appelle leur plus petit commun multiple et on le note $\text{ppcm}(a, b)$. ■

Des propriétés

● Les multiples communs à a et b sont les multiples de leur ppcm. Ainsi les multiples communs à 15 et 20 sont les multiples de 60.

● Si a est un multiple de b , alors $\text{ppcm}(a, b) = a$.

● Le produit de deux entiers est égal au produit de leur pgcd par leur ppcm :
 $\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = a \times b$.

● Deux nombres sont premiers entre eux si et seulement si leur ppcm est égal à leur produit : 36 et 77 sont premiers entre eux : leur ppcm est 36×77 soit 2772.

● Les nombres $\frac{\text{ppcm}(a, b)}{a}$ et $\frac{\text{ppcm}(a, b)}{b}$ sont premiers entre eux. ■

Le calcul du ppcm

On peut bien sûr écrire la liste des multiples non nuls, dans les cas simples. Mais l'algorithme d'Euclide fournit un moyen simple pour calculer un pgcd : il suffit ensuite de diviser le produit $a \times b$ par le pgcd de a et b . Ainsi $\text{pgcd}(392; 36) = 4$ donc $\text{ppcm}(392; 36) =$

$$\frac{392 \times 36}{4} = 3\,528.$$

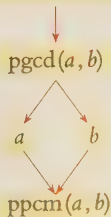
Les multiples communs à 392 et 36 sont les multiples de 3 528.

On verra plus loin un autre procédé de calcul du pgcd et du ppcm.

Pour deux entiers relatifs non nuls, leur ppcm est celui de leurs valeurs absolues.

La relation « ... est diviseur de ... » dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ chaque flèche signifie « ... est diviseur de ... ». ■

Tout diviseur de a et de b



Tout multiple de a et de b

L'étude des nombres premiers a toujours fasciné les mathématiciens depuis l'Antiquité et c'est loin d'être terminé ! Ératosthène, Fermat, Euler et bien d'autres y ont consacré nombre de leurs recherches et les mathématiciens continuent ces travaux sur les nombres premiers...



Pierre de Fermat (1601-1665).

Introduction des nombres premiers

Un nombre naturel est premier s'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Un entier relatif est premier si sa valeur absolue est un nombre premier. Le nombre 1 n'est pas premier : il n'a qu'un seul diviseur.

Voici le début de la liste des naturels premiers :

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31 ... etc.

Les divers problèmes qui se posent à propos des nombres premiers sont :

- Trouver tous les nombres premiers jusqu'à un nombre donné.
- Comment savoir si un nombre pris au hasard est premier ?

● Y a-t-il une infinité de nombres premiers ?

● Peut-on trouver une formule les donnant tous ? etc.

La dernière question n'a pas encore reçu de réponse. ■

Le crible d'Ératosthène pour des petits nombres

C'est une méthode pour trouver les nombres premiers jusqu'à un nombre donné. On écrit par exemple les entiers naturels jusqu'à 100 et on supprime dans cette liste les nombres qui ne sont pas premiers : 1 est barré. 2 n'est pas barré.

On barre ensuite tous les multiples de 2.

On supprime tous les multiples de 3 sauf 3 : le premier à barrer est 3×3 car 3×2 est barré.

~~1~~ (2) (3) ~~4~~ (5) ~~6~~ (7) ~~8~~ ~~9~~ 10
 (11) ~~12~~ (13) 14 15 16 (17) 18 (19) ~~20~~
~~21~~ ~~22~~ (23) ~~24~~ 25 26 ~~27~~ 28 29 30
 (31) ~~32~~ ~~33~~ 34 35 36 (37) ~~38~~ ~~39~~ 40
 (41) ~~42~~ (43) 44 45 46 (47) ~~48~~ 49 50
 51 ~~52~~ (53) 54 55 56 ~~57~~ 58 (59) 60
 (61) ~~62~~ ~~63~~ 64 65 66 (67) ~~68~~ ~~69~~ 70
 (71) ~~72~~ (73) 74 75 76 77 78 (79) 80
 81 ~~82~~ (83) 84 85 86 ~~87~~ 88 (89) 90
 91 92 ~~93~~ 94 95 96 (97) 98 99 100

Les multiples de 4 sont barrés comme étant multiples de 2. On supprime les multiples de 5, sauf 5, en commençant par 5×5 et ainsi de suite... jusqu'à 100. Les nombres qui restent sont les nombres premiers inférieurs à 100. Mais cette méthode ne peut pas s'appliquer si le nombre donné est très grand ! ■

Reconnaître si un nombre donné est premier

Cette méthode repose sur la propriété suivante
Tout nombre non premier n admet au moins un diviseur premier p dont le carré p^2 est inférieur ou égal à n .

Ainsi, pour savoir si n est premier, on procède de la façon suivante :

On le divise par tous les nombres premiers p , depuis 2.

Si toutes les divisions ont un reste non nul tant que $p^2 \leq n$, alors n est un nombre premier.

Exemple

269 est-il premier ?

269 n'est divisible ni

par 2, ni par 3, ni par 5 d'après les critères de divisibilité dans notre système de numération.

$$\begin{array}{r} 269 \overline{) 38} \\ \underline{30} \\ 69 \\ \underline{60} \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 269 \overline{) 11} \\ \underline{10} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 269 \overline{) 13} \\ \underline{12} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 269 \overline{) 17} \\ \underline{14} \\ 15 \end{array}$$

FIN!

$$17^2 = 289 > 269$$

Inutile de poursuivre !

269 est premier. ■

Quelques propriétés

Tout nombre non premier est un produit de nombres premiers.

• Tous les nombres premiers supérieurs à 2 sont impairs.

• Le ppcm de deux nombres premiers est égal à leur produit, puisqu'ils ont premiers entre eux : leur pgcd est 1.

• L'ensemble des nombres premiers est illimité. Il n'y a donc pas de nombre premier supérieur à tous les autres. ■

Des curiosités à propos des nombres premiers

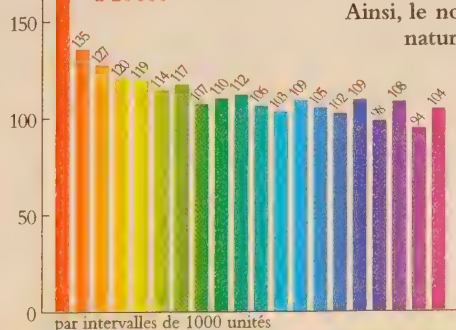
• Il n'y a pas de formule donnant tous les nombres premiers ! Mais si l'on prend la fonction définie par $g(x) = x^2 + x + 41$ pour tout x compris entre 0 et 40, ses valeurs sont des nombres premiers.

• Fermat a montré que si un nombre premier s'écrit $2^k + 1$ alors k est une puissance de 2 ; la réciproque de cette propriété est fausse.

• Si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier : la réciproque est fausse. Ainsi $2^5 - 1$ est premier ainsi que 5.

• Tout nombre premier qui s'écrit $4^k + 1$ est la somme de deux carrés.

Répartition des 2262 nombres premiers inférieurs à 20 000



• Nombres premiers curieux : 1 000 000 009 641 ; 99 133 ; 99 137 ; 99 139.

• La répartition des nombres premiers est intéressante à étudier. Ainsi, le nombre des naturels premiers

inférieurs à n est voisin de $\frac{n}{\ln n}$.

Un nombre naturel qui n'est pas premier est appelé parfois nombre composé. Tout nombre composé, sauf 1 et 0, s'écrit de manière unique sous la forme d'un produit de naturels premiers.

La pratique de cette décomposition

On peut procéder de manière un peu empirique en écrivant le nombre sous la forme d'un produit jusqu'à ce que tous les facteurs obtenus soient des nombres premiers.

Ainsi :

$$20 = 4 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5.$$

$$60 = 3 \times 20 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

De même

$$900 = 15 \times 60$$

$$900 = 3 \times 5 \times 2^2 \times 3 \times 5$$

soit enfin :

$$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2.$$

Mais on peut aussi procéder de façon plus systématique en essayant les divisions par tous les nombres premiers depuis 2, jusqu'à l'obtention du quotient 1 : pour 60, on divise d'abord par 2,

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

etc. ■

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$$

L'exemple de nombres composés

$$\begin{aligned} 5\,040 &= 504 \times 10 = 504 \times 2 \times 5 \\ &= 252 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 126 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 63 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 7 \times 9 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 7 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &\text{et l'on écrit} \\ 5\,040 &= 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7. \end{aligned}$$

Cette « décomposition » est très intéressante pour la recherche des diviseurs d'un nombre et pour la détermination du pgcd et du ppccm de deux naturels comme cela est expliqué ci-contre.

Applications :

la recherche des diviseurs d'un nombre

Si le nombre naturel n s'écrit sous la forme $a^m \times b^p \times c^q$,

a, b et c étant des nombres premiers, alors tout diviseur de n s'écrit $d = a^x \times b^y \times c^z$ avec $0 \leq x \leq m; 0 \leq y \leq p$ et $0 \leq z \leq q$.

Tout multiple de n s'écrit $M = k \times a^x \times b^y \times c^z$ avec $x \geq m; y \geq p$ et $z \geq q$ et k entier quelconque.

Le nombre des diviseurs de n est donc : $\Delta_n = (1 + m)(1 + p)(1 + q)$.

Exemples

● $16 = 2^4$: on a

$$\Delta_{16} = 4 + 1 = 5.$$

Diviseurs de 16

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16$$

● $20 = 2^2 \times 5$ donc $\Delta_{20} = (2 + 1)(1 + 1) = 6$.

● $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ donc $\Delta_{60} = 3 \times 2 \times 2 = 12$.

● $5\,040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$ donc le nombre des diviseurs de 5 040 est 60. On dispose d'un procédé systématique pour écrire tous les diviseurs du nombre naturel considéré. On peut aussi en donner une représentation spatiale : c'est le treillis des diviseurs de ce nombre. ■

Diviseurs de 20



La recherche du pgcd et du ppcm de deux naturels

Si l'on connaît les décompositions primaires de deux nombres naturels A et B , on sait écrire une décomposition d'un diviseur de A et de B et d'un multiple de A et de B .

• Soit les nombres

$$A = a^x \times b^y \text{ et}$$

$$B = a^u \times b^v \times c^k$$

a , b et c étant des naturels premiers.

Un diviseur commun à A et B ne contient que les facteurs communs a et b avec un exposant au plus égal au plus petit des exposants figurant dans les deux décompositions.

Un multiple commun à A et B contient tous les facteurs, communs ou non, avec un exposant au moins égal au plus grand des exposants dans A et B .

Exemple

Soit les décompositions de deux nombres non premiers :

$$A = 66\,000 \text{ et } B = 17\,500$$

$$A = 2^4 \times 3 \times 5^3 \times 11 \text{ et}$$

$$B = 2^2 \times 5^4 \times 7.$$

Le pgcd (A, B) contient uniquement les facteurs premiers communs, avec le plus petit exposant :
 $\text{pgcd}(A, B) = 2^2 \times 5^3 = 500.$

Le ppcm (A, B) contient tous les facteurs, communs ou non, avec le plus grand exposant :

$$\text{ppcm}(A, B) = 2^4 \times 3 \times 5^4 \times 7 \times 11 = 2310000.$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(A, B) \times \\ \text{ppcm}(A, B) &= (2^2 \times 5^3) \times \\ &\quad (2^4 \times 3 \times 5^4 \times 7 \times 11) \\ &\quad - 2^6 \times 3 \times 5^7 \times 7 \times 11 \\ \text{et } A \times B &= 2^6 \times 3 \times 5^7 \times 7 \times 11. \end{aligned}$$

On retrouve bien la propriété :

$$\text{pgcd}(A, B) \times \text{ppcm}(A, B) = A \times B. \blacksquare$$

Une application

Soit le système :

$$\begin{cases} 334x + 117y = 585 \\ -182x + 273y = 637. \end{cases}$$

Pour simplifier ce système, on peut chercher le

pgcd des trois nombres 334, 117, 585 puis celui de 182, 273, 637.

Pour le premier, on trouve 117, pour le

second, on trouve 91.

Le système devient :

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x + 3y = 9, \end{cases}$$

ce qui est plus simple. ■

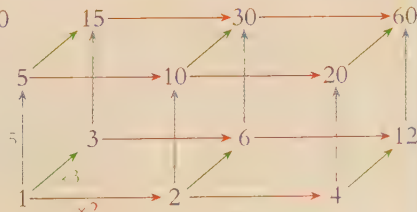
Un treillis en trois dimensions

Les diviseurs de $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

• 3 facteurs premiers

• 3 dimensions

Diviseurs de 60



3 facteurs premiers : 3 dimensions



Quelques grands théorèmes : Bezout, Gauss et Diophante

L'étude de la théorie des nombres fait l'objet de nombreux travaux. Voici quelques exemples historiques célèbres.

Le théorème de Bezout

Le mathématicien Étienne Bezout (1730-1783) s'intéressait tout particulièrement aux équations algébriques. Il s'est rendu célèbre par l'énoncé d'un théorème déjà connu de Gaspard Bachet de Méziriac (1650) qu'il a généralisé en l'appliquant à la divisibilité des polynômes. Voici ce théorème : deux naturels a et b sont premiers entre eux si et seulement si on peut trouver deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = 1$. Cela signifie que cette équation a des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux. L'importance de cet

énoncé tient au fait qu'il permet d'établir des résultats intéressants concernant les nombres premiers entre eux.

Exemple

Prenons les naturels $a = 25$ et $b = 18$ et cherchons à résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}$ $25x + 18y = 1$. Les divisions successives de l'algorithme d'Euclide donnent une méthode systématique pour cette recherche : elle consiste à écrire tous les restes successifs comme combinaisons des nombres a et b choisis au départ :

$$\begin{aligned} a &= 25 \text{ et } b = 18 \\ 25 &= 18 \times 1 + 7, \\ \text{d'où } 7 &= a - b \\ 18 &= 7 \times 2 + 4, \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &= b - 7 \times 2 = \\ &= b - 2 \times (a - b) = 3b - 2a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 &= 4 \times 1 + 3, \text{ d'où} \\ 3 &= 7 - 4 = (a - b) - \\ &= (3b - 2a) = 3a - 4b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &= 3 \times 1 + 1, \text{ d'où} \\ 1 &= 4 - 3 = \\ &= (3b - 2a) - (3a - 4b) \\ &= -5a + 7b \text{ le couple} \\ &(-5; 7) \text{ est une solution} \\ &\text{de l'équation et l'on a} \\ &-5 \times (25) + 7 \times (18) = 1 \text{ ce} \\ &\text{qui confirme que 25 et 18} \\ &\text{sont premiers entre eux.} \end{aligned}$$

Il est à noter que les entiers relatifs -5 et 7 sont aussi premiers entre eux car les valeurs absolues le sont.

On a trouvé un couple solution. Reste à savoir s'il y en a d'autres. ■

Le théorème de Gauss et la divisibilité

Carl Friedrich Gauss, (1777-1855), astronome, physicien et mathématicien, déjà rencontré à propos des nombres complexes, a énoncé le théorème suivant : si le nombre naturel a divise le produit bc et s'il

est premier avec le facteur b par exemple, alors il divise l'autre facteur c . Il se démontre facilement au moyen du théorème de Bezout : Si l'on suppose a premier avec b , alors on peut trouver x et y de $\mathbb{Z}$ tels

que $ax + by = 1$ et, en multipliant par c , on a $cax + cby = c$. Mais a divise bc donc $cb = aq$, c'est-à-dire $cax + aqy = c$ et $a(cx + qy) = c$, ce qui prouve que a est un diviseur de c . ■

La résolution de l'équation $ax + by = 1$

Si a et b sont premiers entre eux, alors on sait que cette équation a au moins une solution (x, y) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: le théorème de Gauss permet de montrer qu'elle en a une infinité et de les trouver toutes.

Reprenons par exemple l'équation $25x + 18y = 1$. On a trouvé la solution particulière $(-5; 7)$: $25 \times (-5) + 18 \times (7) = 1$. Par différence avec l'équa-

tion donnée, on obtient $25(x+5) + 18(y-7) = 0$ d'où $25(x+5) = 18(7-y)$. Or, 25 est premier avec 18 et divise le produit $18(7-y)$, donc 25 est un diviseur de $(7-y)$: $7-y = 25k$ et $y = 7 - 25k$ avec k entier.

On en déduit que $x+5 = 18k$ et $x = -5 + 18k$. Les solutions de cette équation sont tous les couples $(-5 + 18k; 7 - 25k)$ l'entier relatif k étant

quelconque. La première solution trouvée est celle qui correspond à $k=0$. Les valeurs de x et de y sont les termes de deux suites arithmétiques associés deux à deux :

pour x : ... -59 ; -41 ; -23 ; -5 ; 13 ; 31 ; 49 ; etc.
pour y : ... 82 ; 57 ; 32 ; 7 ; -18 ; -43 ; -68 ...

Ainsi : $(-59) \times 25 + (82) \times 18 = 1$. ■

D'autres équations « diophantiennes »

Diophante d'Alexandrie (vers II^e-IV^e siècle av. J.-C.) s'intéressa tout particulièrement aux équations à plusieurs inconnues entières comme celles que nous venons d'étudier avec le théorème de Bezout.

Exemples

● Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $17x + 5y = 4$.

Une solution particulière est $(1; -3)$ et, au moyen du théorème de Gauss, on obtient toutes les solutions $x = 5k + 1$ et $y = 17k - 3$.

● Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $28x + 46y = 1$.

On peut affirmer qu'elle n'a pas de solutions entières puisque les nombres 28 et 46 ne sont

pas premiers entre eux.

● Résoudre l'équation $x^2 + xy + y^2 = 19$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Elle a exactement 12 couples solutions : l'une d'elles est $(2; 3)$. Les équations diophantiennes ont fait couler beaucoup d'encre chez les mathématiciens depuis l'Antiquité !

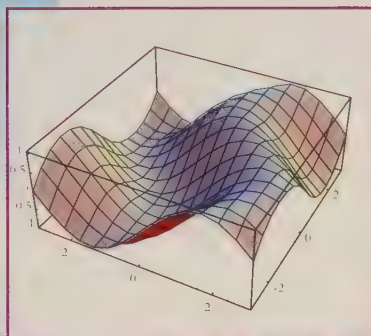
Les triplets de Pythagore sont les solutions entières de $x^2 + y^2 = z^2$.

Il y a une infinité de solutions dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ données par $x = m^2 - n^2$; $y = 2mn$ et $z = m^2 + n^2$, avec m et n naturels quelconques tels que $m > n$.

L'équation $x^3 + y^3 = z^3$ n'a pas de solutions entières et, plus généralement, Fermat avait conjecturé que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions pour $n > 2$. La démonstration de cette propriété n'a été donnée qu'en 1996 par l'Anglais Wiles, après des décennies de tentatives infructueuses.

Mais le même Fermat avait démontré que pour tout nombre premier p qui s'écrit $p = 4k + 1$, l'équation $p = x^2 + y^2$ a toujours une solution. Lagrange a démontré que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = n$ a des solutions entières pour tout entier n . ■

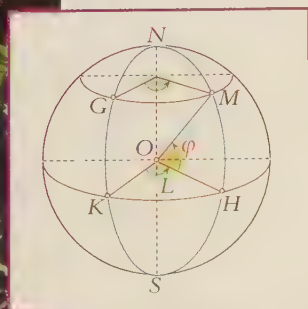




FICHES PRATIQUES

Pour se documenter

Un guide pour se documenter et s'orienter dans le monde mathématique et pour en maîtriser les différents outils...



Des méthodes

Raisonner et démontrer	435
Cadres et méthodes	439
Pièges à éviter	441
Programmer une calculatrice	443
Simuler pour savoir...	445

À côté des mathématiques

Des maths à la portée de tous	447
Des livres pour le lycée	449
Des références et des revues	451
La recherche en mathématiques	453
Le Kangourou des lycées	455
Les autres concours mathématiques	457

Des thèmes mathématiques

Résoudre les équations	459
Calculer une intégrale au lycée	461
Comment déterminer un signe... ?	463
Le nombre pi	465
Le nombre d'or	467
Le mètre et la méridienne	469
Des formats chez l'imprimeur	471
Polyèdres et solides de Platon	473
En spirales !...	475
Géométrie et cartographie	477
La théorie des graphes	479

Depuis le début du xx^e siècle et l'influence de David Hilbert, on a bien compris que les mathématiques jouent un double jeu.

Le jeu de la signification et de la compréhension qui s'amuse de ce que « la mathématique est le langage de l'univers » (comme le disait Galilée), mais aussi le langage de l'industrie, de l'économie, de la vie quotidienne.

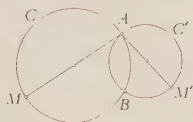
Le jeu de la démonstration, plutôt formelle, qui consiste à énoncer des axiomes, des définitions et des règles logiques pour les dérouler en raisonnements et bâtir des théories aboutissant à des théorèmes, propriétés aux résultats...

Hypothèses et conclusion

Démontrer, c'est déduire certaines propriétés ou résultats, d'autres propriétés déjà connues ou données dans une situation particulière. Les matériaux et outils permettant de construire ces déductions sont les théorèmes, définitions et énoncés du cours de mathématiques.

Exemple

• Soit deux cercles C et C' se coupant en A et B . Les points M et M' sont les points diamétralement opposés à A sur C et C' .



• Les **données** de la situation sont bien repérables et résumées sur la figure. En mathématiques, ces données s'appellent les **hypothèses**.

• La **conclusion** à laquelle on veut aboutir est que les points M , B , et M' sont alignés.

Chercher une démonstration

Pour chercher une démonstration, il n'y a pas de méthode unique. Cependant, il faut d'abord se mettre en tête les résultats du cours évoqués par l'énoncé du problème.

• D'une part, on peut essayer de déduire de

nouvelles propriétés à partir des hypothèses.

• D'autre part, à partir de la conclusion, on peut chercher les moyens dont on dispose pour la démontrer. En fait, on cherche un peu par les deux bouts jusqu'à ce que les choses se rejoignent.

Exemple

Montrer que trois points sont alignés, c'est montrer qu'ils sont sur une même droite.

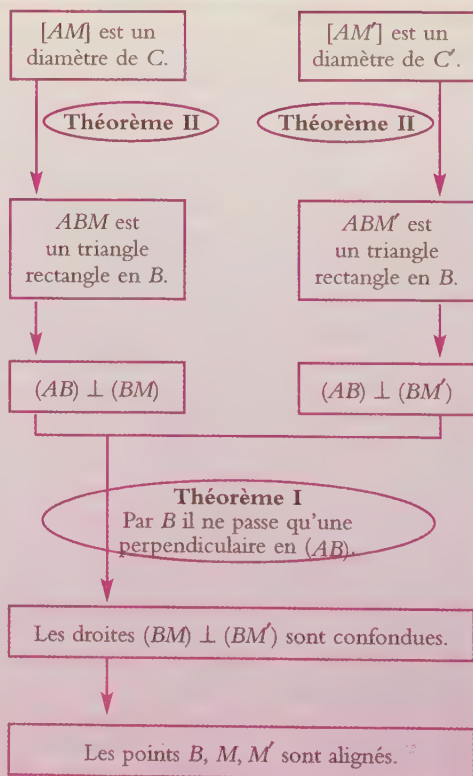
Dans le domaine des parallèles ou des perpendiculaires, on évoque parfois « une seule droite » là où il paraît y en avoir plusieurs ;

le postulat d'Euclide, par exemple, ou le théorème suivant :

• **Théorème I.** Par un point pris hors d'une droite d , il passe une et une seule droite perpendiculaire à d . Mais dès qu'il est question de cercle et de diamètre, il y a des angles droits.

• **Théorème II.** Un triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle. On peut représenter l'ensemble de la démonstration par un schéma montrant l'enchaînement logique des hypothèses, des théorèmes et de la conclusion. Mais il reste aussi à la rédiger.

Schéma d'une démonstration



Rédiger une démonstration

Rédiger, c'est écrire une suite logique qui part des hypothèses pour arriver à la conclusion. Chaque chaînon de la déduction doit être justifié par un résultat du cours de mathématiques ou déjà connu de l'élève. Selon son niveau ou ce qui est demandé, on peut alléger le développement de certains chaînons simples. Mais il vaut mieux être trop complet que trop rapide.

Exemple de rédaction

• Puisque $[AM]$ est diamètre de C , et que B est sur le cercle C , ABM est un triangle rectangle. Donc, $(AB) \perp (BM)$.

• De même, puisque $[AM']$ est un diamètre de C' , et que B est sur le cercle C' , ABM' est un triangle rectangle. Donc $(AB) \perp (BM')$.

• Or, par B , il ne passe qu'une seule perpendiculaire à (AB) ; les droites (BM) et (BM') sont donc confondues et les points B , M et M' sont donc alignés. CQFD. (Il est souvent utile de dire qu'on a terminé une démonstration par les initiales de « Ce Qu'il Fallait Démontrer ».

Une autre habitude consiste à doubler le point final par un petit carré en fin de ligne. □)

L'énoncé d'un théorème

Énoncer un théorème consiste à bien distinguer les hypothèses et la conclusion, et à la lier dans une phrase du type « si... », alors... » :
si (des hypothèses), alors (une conclusion).

Exemple

En abrégé, on écrit souvent l'énoncé « si H alors C » sous la forme d'une implication :

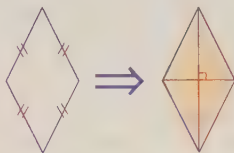
$$H \Rightarrow C$$

Et on dit alors ceci : H est une **condition suffisante** pour C .

Ou : C est une **condition nécessaire** pour H .

Exemple

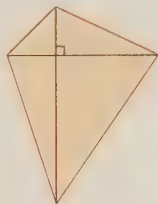
Le théorème
« si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires »,



permet d'affirmer :

« Avoir les diagonales perpendiculaires est une condition nécessaire pour être un losange. »

Mais ce n'est pas une condition suffisante comme le montre la figure suivante :



Il faut bien prendre garde à bien distinguer un énoncé de deux autres énoncés qui lui ressemblent : son énoncé réciproque ; son énoncé contraposé.

L'énoncé réciproque

L'énoncé réciproque de si H , alors C s'énonce :
si C , alors H .

Attention !

Un énoncé peut très bien être **vrai** et sa réciproque **fausse**.

• Par exemple, la réciproque de l'énoncé ci-dessus donné en exemple est fausse. En effet, « si un quadrilatère a des diagonales perpendiculaires, alors c'est peut-être un losange mais c'est peut-être aussi autre chose ! »

• En revanche, par exemple, la réciproque du théorème de Pythagore est aussi vraie que le théorème direct :

« Si ABC est rectangle en B , alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$ » est en effet aussi vrai que : « Si, dans le triangle ABC , on a $AB^2 + BC^2 = AC^2$, alors le triangle est rectangle ».

Dans un tel cas, les assertions H et C sont dites **équivalentes** et on écrit la formule suivante, en utilisant le symbole d'équivalence :

ABC est un rectangle en B



$$AB^2 + AC^2 = B$$

Donc, lorsqu'on a à la fois : $D \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow D$, on écrit $D \Leftrightarrow C$, et on utilise plutôt une phrase du type « D si et seulement si C ». Par exemple, comme pour donner une définition : « Un quadrilatère est un losange si et seulement si ses quatre côtés ont même longueur. »

L'énoncé contraposé

L'énoncé contraposé de
si H , alors C
s'énonce :

si non C alors non H
(où « non C » désigne le
« contraire de C », vrai
lorsque C est faux, et alors
seulement).

• Par exemple, si les diagonales d'un quadrilatère ne sont pas perpendiculaires, alors (alors on est sûr que) ce quadrilatère n'est pas un

losange. Eh oui ! Un énoncé et son contraposé sont vrais en même temps. De sorte que, parfois, on préfère démontrer le contraposé d'un théorème, plutôt que le théorème lui-même, lorsque cela est plus facile.

Exemple

Soit à démontrer le théorème :
« $\sqrt{2}$ est irrationnel ».

Donnons-lui la forme
« si... alors... » :
« si $x = \sqrt{2}$, alors il n'existe pas de fraction égale à x » ;
ou encore :
« si $x^2 = 2$, alors il n'existe pas p et q entiers tels que $x = p/q$ ».

Le contraposé est :
« Si $p \in \mathbb{N}$ et $x = p/q$, alors x^2 est différent de 2 », ce qui se démontre assez facilement (voir page 69).

Le calcul des propositions

L'utilisation des connecteurs logiques **et** et **ou** permet de calculer avec les assertions intervenant dans les énoncés.

Ainsi l'implication

$$H \Rightarrow C$$

est équivalente à l'affirmation : C ou non H .

• Il se peut que les hypothèses d'un théorème soient multiples. Il vaut alors mieux savoir que non (H_1 et H_2)
 $= (\text{non } H_1) \text{ ou } (\text{non } H_2)$.

• Par exemple, le contraposé :

$$H_1 \text{ et } H_2 \Rightarrow C$$

est :

non $C \Rightarrow$ non H_1 ou non H_2 .

Attention aux pièges

Le jeu des conditions nécessaires et des conditions suffisantes n'est pas toujours facile à comprendre et à manier.

Exemple

• Cherchons à résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

De cette équation, on tire les conséquences (nécessaires) suivantes :

$$x^2 = -x - 1$$

Puis, on multiplie par x :

$$x^3 = -x^2 - x$$

$$x^3 = -(-x - 1) - x$$

$$x^3 = x + 1 - x$$

$$x^3 = 1$$

Or, il n'y a qu'un seul réel dont le cube soit 1, c'est le nombre 1. Donc $x = 1$.

Or, x n'est sûrement pas la solution de l'équation car

cela donnerait :

$$1 + 1 + 1 = 0 !$$

Le raisonnement semble imparable mais cache la confusion d'un énoncé et de sa réciproque.

• En effet, on a bien démontré ceci :
si $x^2 + x + 1 = 0$, alors $x = 1$.
Alors que trouver la solution x_0 de l'équation, c'est être sûr que :
si $x = 1$, alors $x^2 + x + 1 = 0$.

• En fait, le théorème :
« dans $\mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ », est bien **vrai**. C'est-à-dire que s'il y a avant une solution, nécessairement elle vaudrait 1. Mais ce théorème ne sert à rien puisqu'il n'existe pas de x qui vérifie l'équation.

L'objectif de l'enseignement des mathématiques n'est pas d'accumuler des connaissances mais de savoir résoudre des problèmes en utilisant les divers outils mathématiques acquis au cours de la scolarité. Mais pour utiliser ces outils, encore faut-il les avoir bien expérimentés et savoir à quoi il servent.

Des méthodes en géométrie

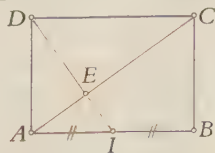
Dans la recherche d'un problème, vous passerez en général par les étapes suivantes :

- Lire et comprendre l'énoncé en notant en particulier ce que l'on sait, ce que l'on veut obtenir ou démontrer, faire un dessin, un graphique.
- Esquisser un inventaire des outils utilisables pour parvenir à la solution.
- Essayer un cheminement, une méthode et trouver autre chose en cas d'échec.
- Puis, évidemment, rédiger une solution.

Il existe souvent plusieurs méthodes pour démontrer certaines propriétés. Il est important de connaître tous les outils dont on peut disposer afin de choisir celui qui paraît le mieux approprié.

Exemple

$ABCD$ est un rectangle dans lequel $AB = \sqrt{2}$ et $AD = 1$.



Le point I est le milieu de $[AB]$. (DI) coupe (AC) en E .

Démontrer que (AC) est perpendiculaire à (DI) .
Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires, on peut se placer dans différents cadres.

- ① Utiliser des propriétés des configurations géométriques : la réciproque du théorème de Pythagore, la trigonométrie...
- ② Utiliser la géométrie analytique dans un repère orthonormé et montrer que le produit des pentes est -1 .
- ③ Utiliser la géométrie vectorielle, en démontrant qu'un produit scalaire est nul.
- ④ Utiliser les transformations en montrant que l'une des deux droites est image de l'autre par une rotation ou une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

Pour ce problème, on a découvert une dizaine de méthodes. Étudions-en quelques-unes.

① Les configurations

- D'après le théorème de Thalès $\frac{ED}{EI} = \frac{EC}{EA} = \frac{DC}{AI} = \frac{1}{2}$
donc $ED = \frac{2}{3}ID$ et $AE = \frac{1}{3}AC$

donc $ED = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ et $AE = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

$ED^2 + AE^2 = 1$ et $AD^2 = 1$.

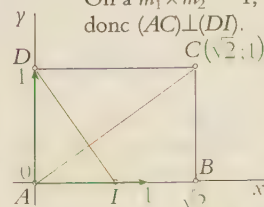
Donc, en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ADE est rectangle en E . On a bien $(AC) \perp (DI)$.

- Dans le triangle ADC , $\cos \widehat{DAC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; dans le triangle DAI , $\sin \widehat{ADI} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; pour ces deux angles aigus, le cosinus de l'un étant égal au sinus de l'autre, ce sont deux angles complémentaires. Donc DEA est un triangle rectangle en E ; on a bien $(AC) \perp (DI)$.

② La géométrie analytique

On doit introduire un repère orthonormal, par exemple, le repère $(A, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

- La pente de (AC) est $m_1 = \frac{Y_c}{X_c} = \sqrt{2}$. La pente de (DI) est $m_2 = \frac{Y_i}{X_i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On a $m_1 \times m_2 = -1$, donc $(AC) \perp (DI)$.



• En utilisant les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DI}$, on vérifie la condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

③ Le calcul vectoriel

On pense évidemment au produit scalaire...
On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ et
 $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$.
On a $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} +$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AI} =$$

$$-1 + 0 + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 0.$$

On a bien $(AC) \perp (DI)$.

④ Les transformations

Il existe une unique similitude directe telle que

$$S(D) = A \text{ et } S(C) = D; \text{ on a}$$

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{AD}{DC} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

on a donc l'angle et le rapport de S . On démontre

que $S(A) = I$. Donc la droite (CA) a pour image la droite (DI) dans une similitude

d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a bien

$(AC) \perp (DI)$. On peut aussi déterminer la fonction complexe f associée à cette similitude dans le repère ci-dessus et on démontre que

$$f(i) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ce qui prouve}$$

que I est l'image de A .

Des méthodes en algèbre et en analyse

On considère l'équation d'inconnue x : $\sqrt{x} = x + m$.
Suivant les valeurs de m , combien a-t-elle de solutions ? Pour étudier le nombre de solutions d'une équation, on peut se placer dans différents cadres :

① Le cadre graphique : grâce à votre calculatrice graphique, vous pouvez faire des conjectures sur les solutions. Il restera ensuite à les démontrer.

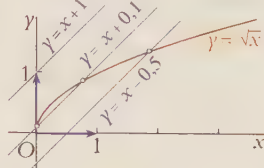
② Le cadre algébrique : utiliser ce que l'on sait à propos de la résolution d'une équation.

③ Le cadre fonctionnel : le théorème de la bijection appliqué à une fonction bien choisie. D'autre part, on peut aussi envisager la position de deux courbes, ici la position de la parabole et de la droite.

① Le graphique

En utilisant une calculatrice graphique, on a tracé à la fois

la demi-parabole $y = \sqrt{x}$ et les droites $y = x + 1$, $y = x + 0,1$, $y = x - 0,5$; on peut donc



penser que selon les valeurs de m , on aura 0 solution, 2 solutions ou une solution.

② L'algèbre

L'équation $\sqrt{x} = x + m$ est équivalente à : $\begin{cases} x = (x + m)^2 & (E1) \\ x + m \geq 0 & (E2) \end{cases}$

Pour E1, on a :

$$x^2 + x(2m - 1) + m^2 = 0.$$

Le discriminant est égal à $-4m + 1$; il est positif pour $m \leq \frac{1}{4}$. Pour que les solutions

conviennent, elles doivent être supérieures à $-m$.

On démontre que si $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$, les deux solutions conviennent et que si $m < 0$, une seule racine convient.

③ Les fonctions

• On étudie la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - x - m$;

$$f'(x) = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

x	0	1/4	$+\infty$
f'		+	0 -
f	$-m$	$\nearrow f(1/4)$	$\searrow -\infty$

$$\text{on a } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-4m + 1}{4}.$$

Le signe du maximum permet de conclure au nombre de solutions. Et on trouve les mêmes résultats qu'au ②.

• Il peut être intéressant de savoir pour quelle valeur de m la droite D_m d'équation $y = x + m$ est tangente à la demi-parabole d'équation $y = \sqrt{x}$. On veut résoudre l'équation $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$ (1 est la pente de D_m) soit $x = \frac{1}{4}$.

Lorsque m varie, la droite D_m reste parallèle à elle-même ; en déplaçant D_m on retrouve le nombre de points d'intersection, donc le nombre de solutions de cette l'équation.

Souvent, dans l'affolement d'un contrôle ou d'un examen, on est amené à faire des erreurs que l'on ne fait pas d'habitude: par exemple, appliquer le théorème de Pythagore dans un triangle sans qu'on ait vérifié s'il était rectangle, ou écrire que $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

On évitera à tout prix d'écrire certaines incohérences, par exemple, en trigonométrie, $\cos x = \frac{4}{3}$ ou, en probabilités,

$p(A)=1,2$; trouver le barycentre de $\{(A, 2); (B, -2)\}$, calculer la dérivée d'une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, donner une aire négative..., et on pourrait citer bien d'autres exemples. Voici maintenant quelques pièges dans lesquels il ne faut pas tomber.

Produits et égalités

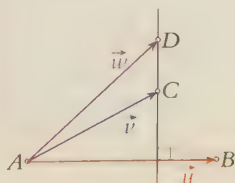
- Si l'on a $ab = ac$, on est tenté de déduire $b = c$. Mais c'est un peu risqué... On a en effet oublié la condition $a \neq 0$.

Ainsi, l'équation $2x(x^2-1) = 4(x^2-1)$ n'est pas équivalente à $2x = 4$.

- Si l'on a $a^2 = b^2$, il n'est pas question d'en déduire $a = b$ sauf si l'on sait que a et b sont de même signe.

- Si l'on travaille avec des vecteurs, l'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{w}$.

Si l'on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, l'égalité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ entraîne soit $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, soit $(DC) \perp (AB)$, soit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



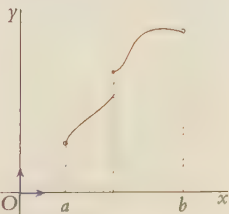
- L'égalité $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$ n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{w}$. Elle équivaut à $\vec{u} \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$, c'est-à-dire soit $\vec{u} = \vec{0}$, soit $\vec{v} = \vec{w}$, soit $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v} - \vec{w}$.

Fonctions

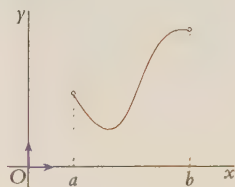
- Si f est une fonction numérique définie sur l'intervalle I , on est souvent amené à démontrer que f est une bijection de I sur $f(I)$. Il suffit que soient vérifiées les deux conditions :

- f est continue sur I
- f est strictement monotone sur I .

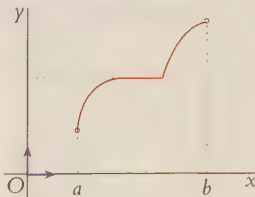
Et tous les mots ont ici leur importance.



f n'est pas continue sur $[a, b]$.

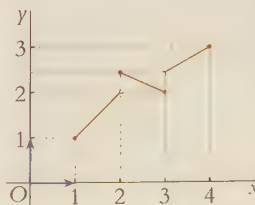


f n'est pas monotone sur $[a, b]$.



f n'est pas strictement monotone sur $[a, b]$.

Mais attention ! Ce sont deux conditions suffisantes, mais pas nécessaires.



Ainsi, la fonction affine par morceaux représentée page 477 est une bijection de $[1; 4]$ sur $[1; 3]$ et pourtant elle n'est ni continue ni monotone sur $[1; 4]$.

• Si f est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, il n'est pas question de parler de monotonie. Cependant, on sait démontrer que f est une bijection de A sur B en montrant que tout complexe

de A a une image dans B et que tout complexe de B a un antécédent dans A .

Exemple

$f(z) = \frac{iz+1}{z-1}$ f est une bijection de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C} - \{i\}$.

Le raisonnement par récurrence

Pour démontrer par récurrence que, pour tout entier n , la propriété $p(n)$ est vraie, il y a deux étapes : Montrer que $p(0)$ est vraie et que $p(k)$ entraîne $p(k+1)$. Chacune de ces deux étapes a son importance.

Exemple 1

Soit la propriété $p(n)$:

9 est un diviseur de $10^n + 1$. Supposons cette propriété vraie pour le naturel k : $10^k + 1 = 9a$ donc $10^k = 9a - 1$ donc $10^{k+1} = 10(9a - 1) = 90a - 10$, d'où $10^{k+1} + 1 = 90a - 9$. La propriété est vraie pour le naturel $k + 1$. Or il est clair qu'elle n'est pas vraie pour $n=0$, ni $n=1$... donc elle n'est jamais vraie.

Exemple 2

$f(n)$ est le polynôme $n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n$, n étant un naturel, on a : $f(0)=0$; $f(1)=0$ et même $f(3)=0$. On est tenté d'affirmer que $f(n)=0$. C'est évidemment faux, il suffit de calculer $f(10)$ pour s'en convaincre ; on ne peut pas démontrer que $f(k)=0$ entraîne $f(k+1)=0$.

La convergence d'une suite

Lorsqu'on étudie une suite définie par récurrence : $U_0 = a$; $U_{n+1} = f(U_n)$, pour étudier sa convergence, il ne faut pas se précipiter vers la résolution de l'équation $f(L) = L$. On ne peut calculer L de cette façon que si l'on a déjà démontré que cette suite est convergente... Il faut prendre des précautions.

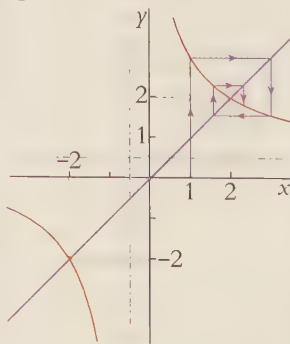
Exemple

Soit la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$:

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 8}{2U_n + 1}.$$

Elle n'est pas monotone comme on peut s'en

convaincre en calculant U_1, U_2, U_3 ... La droite d'équation $y = x$ coupe l'hyperbole d'équation $y = \frac{x+8}{2x+1}$ en deux points.



Au vu du dessin, on peut supposer que la suite est convergente vers une solution de l'équation $x = \frac{x+8}{2x+1}$.

Cette équation a deux solutions, 2 et -2 ; seule 2 convient car $U_n \geq 0$. Ceci ne prouve rien. Pour démontrer que U_n converge, on peut utiliser l'inégalité des accroissements finis ou une suite auxiliaire $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$; on

démontre que V_n est une suite géométrique de premier terme $-\frac{1}{3}$ et de raison $-\frac{3}{5}$. V_n converge donc vers 0 et U_n vers 2. Maintenant, c'est démontré...

La calculatrice programmable est un outil remarquable, que ce soit pour des calculs ou des représentations de fonctions, pour les suites, les statistiques, les probabilités ou pour des simulations de processus physiques, économiques ou biologiques. Cependant, quelle que soit la marque de votre calculatrice, ne vous précipitez pas sur sa programmation : descendez dans le détail petit à petit depuis notre langage parlé jusqu'à son langage propre.

Une méthodologie d'écriture de programmes

Nous vous conseillons de vous contraindre à suivre une méthodologie en quatre points, chacun de ces points étant subdivisé en sous-étapes précises. Ne croyez pas gagner du temps en sautant les étapes. Car vous perdrez à nouveau ce temps soit lors d'une mise au point laborieuse où vous serez obligé de revenir à une analyse du problème, soit lors de l'exploitation du programme où votre mémoire risque de vous jouer de mauvais tours. Nous vous donnons deux exemples de mise en œuvre ; l'un dans le domaine mathématique, l'autre dans un contexte de simulation de processus biologique.

À chaque étape,

- réfléchissez :
- Quel est le problème ?

Quel est l'objectif lié à l'utilisation d'une machine ?

données → **programme** → résultats

- Selon les cas, il existe :
 - une ou des **formules** donnant explicitement le ou les résultats en fonction des données ;
 - des formules liant données et résultats, mais il faut mettre en œuvre une **méthode** particulière (par itération ou aléatoire ou...) ;
 - un **modèle** ou un algorithme décrivant une suite d'opérations organisées aboutissant au résultat recherché.
- Ne descendez pas trop vite les niveaux de langage.
- N'essayez pas de faire un programme « performant » dès le premier jet.

Méthodologie

- ❶ **Analyse globale**
 - Énoncer l'objectif.
 - Se demander quels processus de calcul ou quel modèle de situation aboutissent à ces résultats, quelles sont les données, quels sont les résultats expérimentés.

- ❷ « **Descente** » des langages
 - Faire un **dictionnaire des variables** et un **schéma** de succession des opérations.
 - **Écrire des instructions** en termes de plus en plus proches du langage de la machine.

- ❸ **Mise au point et rodage**
 - Vérifier à partir de données simples. Corriger les erreurs matérielles ou logicielles.
 - Faire un protocole d'utilisation.

- ❹ **Exploitation**
 - Obtenir des résultats.
 - Réfléchir et utiliser la machine.

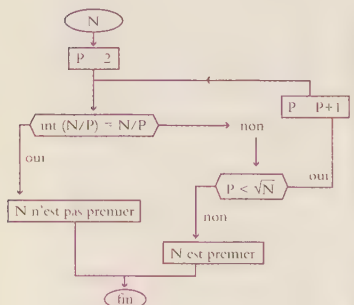
Un nombre est-il premier ?

❶ L'objectif est de faire déterminer à la machine si un nombre entier N est premier ou non.

Le résultat est l'affichage de « premier » ou « non premier » sur l'écran.

L'algorithme utilisé sera de tester si N est divisible par les entiers successifs 2, 3, 4... jusqu'à $\sqrt{N}$.

❷ **Variables** : N donné, P intermédiaire variant de 2 à $\sqrt{N}$.



Entrer N

De $P = 2$ à $\text{int } \sqrt{N}$

Si $\text{int}(N/P) = N/P$, N

n'est pas premier

Sinon afficher « N n'est pas premier ».

Afficher « N est premier ».

Fin.

❸ Essayer $N = 43, 360, 421$.

❹ On pourrait faire afficher le plus petit diviseur, ou tous les diviseurs, ...

La propagation d'une épidémie

❶ On veut étudier la propagation d'une épidémie et faire tracer à la machine les **courbes** donnant le nombre de malades, de morts, de non atteints et de guéris, au cours du temps.

Le **modèle de la situation** utilise trois paramètres caractéristiques de la maladie sur lesquels on fait les hypothèses suivantes :

- Le nombre de nouveaux malades est proportionnel à la fois à la proportion de malades dans la population vivante et à un coefficient de contagion c .

- Le nombre de morts est proportionnel au nombre de malades, avec un coefficient (de mortalité) m .

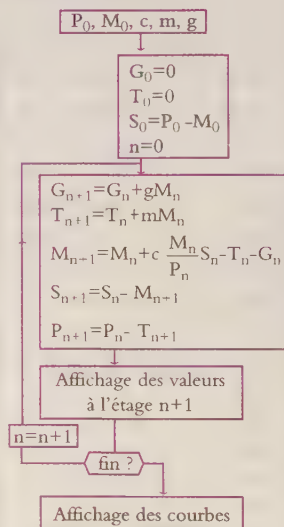
- Le nombre de nouveaux guéris est proportionnel au nombre de malades avec un coefficient (de guérison) g .

❷ **Variables données** : la population de départ : P_0 ; le nombre de malades initial : M_0 ; les coefficients : c , m , g .

• **Variables intermédiaires** : les étapes successives : n ;

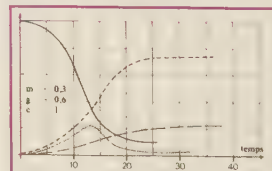
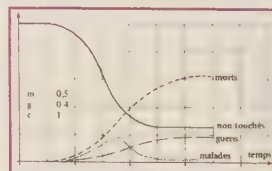
les malades (M), les guéris (G), les morts (T), la population (P), les non atteints (S).

• **Résultats** : les **représentations graphiques** des fonctions de n égales à M, G, T, S .



❸ Les courbes de résultats sont données ci-dessous.

❹ On voit, par exemple, qu'une maladie plus rapidement mortelle tue finalement moins de gens.



Simuler, c'est «faire semblant»... C'est essayer de reproduire artificiellement un phénomène pour voir ce qui se produit. On simule des tremblements de terre en laboratoire et d'autres phénomènes; on simule une élection par un sondage d'opinion... En mathématiques, la simulation est particulièrement intéressante en probabilité, en arithmétique et pour évaluer certaines grandeurs.

La touche **rand** d'une calculatrice scientifique

Cette touche permet d'obtenir un nombre aléatoire strictement compris entre 0 et 1. En tapant **rand**, vous obtenez un nombre pris au hasard dans une liste de nombres fournis par la calculatrice, si bien que votre calculatrice vous permet de simuler des jeux de hasard par ce procédé.

Exemple sur TI-81

Dans **MATH** **PRB** **rand**

rand **ENTER**

donne 0.1080114624

ENTER 0.5678994324
ENTER 0.8975543216,
etc.

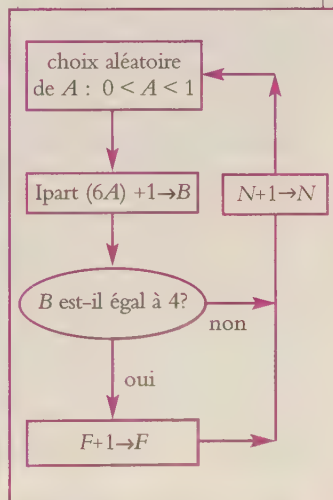
Soit a un nombre «au hasard» strictement compris entre 0 et 1.
 $0 < a < 1$ donc $0 < 6a < 6$
si $E(a)$ désigne la partie entière de a , on a $0 \leq E(6a) \leq 5$
d'où $1 \leq E(6a) + 1 \leq 6$,
ce qui donne un moyen d'obtenir un entier prenant au hasard les valeurs entières : 1; 2; 3; 4; 5; 6.

La partie entière E d'un nombre quelconque est fournie par la touche **Ipart**. On peut, par exemple, «jouer aux dés» avec sa calculatrice !

Lancer un dé

Lbl 1
Rand $\rightarrow$ A
Ipart (6A) + 1 $\rightarrow$ B
Disp B
Pause
Goto 1

Le programme ci-dessus (TI-81) vous donnera des entiers allant de 1 à 6 de manière aléatoire et autant que vous voudrez ! Pour obtenir une approximation de la probabilité d'obtention du nombre 4 par exemple, il reste à adjoindre deux **compteurs** :
– un compteur général N qui augmente de 1 à chaque lancer;
– un compteur des «cas favorables» F qui augmente de 1 chaque fois que le 4 apparaît, ce qui se fait



avec un «TEST» :
(if B = 4 then F + 1 $\rightarrow$ F).
Après un certain nombre de lancers (autant que l'on veut en laissant défiler la machine sans «pause») le quotient $\frac{F}{N}$ donne une approximation de la probabilité de l'événement «obtenir 4».

Ce principe des deux compteurs est important dans toutes ces simulations.

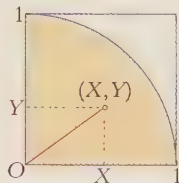
Simulation pour le nombre π : la méthode de « Monte Carlo »

Cette méthode permet de déterminer la valeur approchée d'un nombre à l'aide d'un phénomène aléatoire.

Pour le nombre π

Considérons un carré de côté 1 et le quart de cercle inscrit dans ce carré : son aire est $\frac{\pi}{4}$. Imaginons des « gouttes de pluie » qui tombent aléatoirement dans le carré :

s'il y a N gouttes au total et M gouttes dans le quart de disque, le rapport $\frac{M}{N}$ donne une approximation de $\frac{\pi}{4}$.



Et cette approximation est d'autant meilleure que le nombre N est grand.

Principe On choisit aléatoirement deux réels X et Y entre 0 et 1 (touche **rand**) : ce sont les coordonnées d'un

point intérieur au carré.

À chaque choix, le premier compteur N augmente de une unité ($N+1 \rightarrow N$)

On fait un TEST (IF):

Si $X^2 + Y^2 \leq 1$, le point tombe dans le quart de disque. Alors le second compteur M augmente de 1 ($M+1 \rightarrow M$)

Et on laisse « tourner » l'ordinateur ou la calculatrice aussi longtemps que l'on veut... Au bout de 10 000 simulations par exemple, ou

plus, le nombre $4 \times \frac{M}{N}$ donne

une approximation de π .

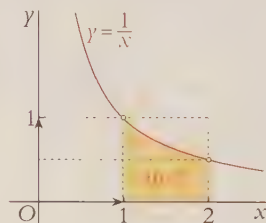
En fait cette approximation n'est pas très bonne pour des raisons diverses, mais elle est intéressante dans son principe.

Estimation du nombre $\ln 2$

On considère la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$

L'aire de la surface définie par $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ est

égale à $\ln 2$ qui est irrationnel. Une simulation permet là aussi de déterminer des approximations de ce nombre.



Principe Choix aléatoire de Z et Y entre 0 et 1 : on pose $X = Z + 1$. Le test est : « Y est-il inférieur à $\frac{1}{X}$ »

Dans l'affirmative le point tombe dans la surface à calculer et le compteur M augmente de 1. Après un certain nombre d'essais,

le nombre $\frac{M}{N}$ donne une approximation de $\ln 2$.

D'une façon générale, ce type de simulation permet d'évaluer une aire impossible à calculer par une intégrale.

Nombres premiers entre eux

En arithmétique, on démontre que si l'on choisit deux nombres entiers au hasard, la probabilité pour qu'ils soient premiers entre eux (leur seul diviseur commun est 1) est égale à $\frac{6}{\pi^2}$. On peut utiliser une simulation pour « vérifier » ce résultat remarquable !

Principe On a d'abord deux compteurs à 0 :

F et N . Le compteur N augmente de 1 à chaque « essai ». On choisit au hasard deux nombres entiers X et Y : la touche **x rand** le permet :

Ipart ($1000000 \times \text{rand}$) donne un entier inférieur à 10^6 .

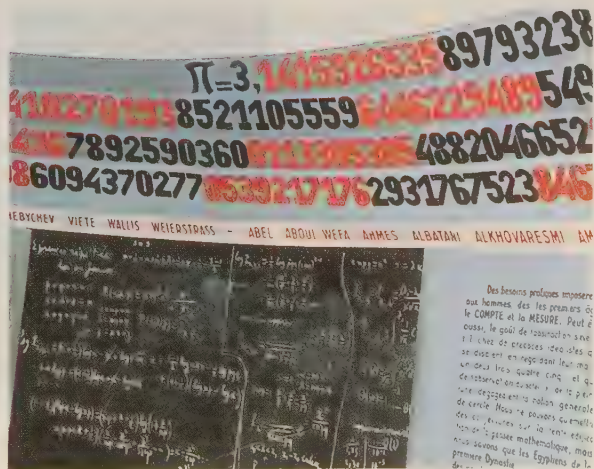
Un sous-programme permet de TESTER si le pgcd de X et Y est égal à 1 : si oui, le compteur F augmente de 1.

Tous les 1000 « tirages » par exemple, on affiche le quotient $\frac{F}{N}$ qui donne une approximation de $\frac{6}{\pi^2}$.

Les mathématiques n'existent pas que dans les cerveaux des mathématiciens. Comme toute science, elles se prêtent à des expériences. Elles s'exposent sur votre ordinateur branché sur la «toile», à travers une multitude de sites et de liens, ou encore dans les musées où, loin d'apparaître comme figées, elles se présentent comme une activité vivante aux applications multiples.

Annuaire, moteurs de recherche et sites de liens

Pour commencer, vous pouvez consulter un simple **annuaire**, par exemple Yahoo (son adresse : www.yahoo.fr). C'est un site en français qui vous propose une sélection d'adresses à la manière d'une immense table des matières organisée. Cette sélection vous permet d'aboutir à des liens qui vous renvoient vers des sites traitant des domaines qui vous intéressent. Pour rechercher plus intelligemment les thèmes qui vous intéressent, il vous faut un **moteur de recherche** comme Altavista (www.altavista.com), qui est très puissant, ou Google (www.google.fr). Pour effectuer une recherche, vous devez soumettre au moteur un ou plusieurs mots significatifs – que l'on peut relier avec des connecteurs logiques (et, ou, +...) comme dans toute recherche à l'intérieur



Le palais de la Découverte comprend une salle ronde où sont inscrites (depuis sa création en 1937) les 707 premières décimales du nombre π . L'erreur qui s'était glissée dans l'écriture de ce nombre a été corrigée depuis.

d'une base de données. Celui-ci affiche alors une liste de sites répondant à votre requête. Enfin,

essayez les **sites de liens**.

Ce sont des sites qui recensent des adresses d'autres sites traitant d'un sujet particulier. En cliquant sur leur adresse vous naviguez ainsi directement d'un site à l'autre.

Ces sites de liens portent le plus souvent le nom de portail. Voyez, par exemple, en France :

www.science-gouv.fr.

La cité des Sciences et de l'Industrie de la Villette consacre une exposition permanente aux mathématiques.

Adresses utiles

– Palais de la Découverte,
av. Franklin-Roosevelt,
75008 Paris,
tél. : 01 40 74 80 00.

– Cité des Sciences
et de l'Industrie,
19, av. Corentin-Cariou,
75019 Paris,
tél. : 01 40 10 57 06.

– Dans chaque académie, un CCST (centre de culture scientifique et technique) propose animations et expositions ainsi qu'un fonds de documentation. Par exemple, le CCST d'Orléans (au Centre-Sciences, 72, faubourg Bourgogne, 45000 Orléans, tél. : 02 38 77 11 06) dispose de deux expositions itinérantes (Horizons mathématiques et Jeux logiques et mathématiques) réservées aux établissements scolaires ou aux mairies.



La cité des Sciences et de l'Industrie

La cité des Sciences et de l'Industrie consacre une exposition permanente aux mathématiques. C'est la plus importante manifestation de ce type en France.

L'exposition a pour objectif de donner au public le goût des mathématiques en montrant qu'elles sont une activité vivante, essentielle pour la compréhension de notre monde, pour le développement des autres sciences et des technologies.

Elle propose de le découvrir en suivant un parcours et un sens de lecture pédagogique – allant du simple au complexe, du plus ancien au plus récent – utilisables par tous, qui permettent d'appréhender de manière attractive cette discipline omniprésente dans les champs scientifiques, technologiques et industriels. Elle parcourt ce faisant trois millénaires d'histoire des mathématiques.

Voici une sélection de quelques ouvrages non scolaires, qui pourront intéresser des lycéens – et bien d'autres ! –, choisis pour leur intérêt culturel ou ludique. C'est l'occasion de vous faire offrir un livre dans lequel vous découvrirez d'autres aspects des mathématiques, de leur utilisation, de leur histoire mais aussi de leur actualité. Nous avons sélectionné des ouvrages qui, en principe, ne présentent pas de difficultés théoriques.

Pour la dimension culturelle

- Amy Dahan-Dalmédico et Jeanne Peiffer, *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Le Seuil, coll. « Points sciences », 1986. Sur l'histoire des mathématiques, avec des problèmes traités, une bonne bibliographie. Les mathématiques ne sont pas qu'un jeu... Mais de nombreuses activités ludiques conduisent à faire des mathématiques parfois difficiles.

- Pierre Dedron et Jacques Itard, *Mathématiciens et mathématiciens*, Magnard, 1980. Sur l'histoire des

mathématiques de l'Antiquité au XIX^e siècle. Le style est aussi simple que possible, d'une lecture attrayante ; bien documenté.

- *Apprivoiser l'infini*, ACL-Éditions, 1997. Une approche distrayante et peu formalisée pour comprendre ce que l'on entend lorsque l'on parle d'infini. Des notions très abstraites présentées simplement.

- André Warusfel, *les Nombres et leurs mystères*, Le Seuil, coll. « Le Rayon de la science », 1980. Petit livre passionnant sur l'histoire des nombres.

- *Les Maths et la Plume* (2 tomes), ACL-Éditions, 2000. De nombreux écrivains ont succombé à la fascination des mathématiques ; dans cet ouvrage, des textes de Pagnol, Poe, en passant par Perrault, Voltaire, Allais, Vauban ou Conan Doyle.

A. Deloche
J.-C. Deloche
F. Gauthier



Les maths & la plume

Mathématiques Pour Tous — T. 5

- Stefan Hildebrandt et Anthony Tromba, *Mathématiques et formes optimales*, Pour la Science, 1998. Un très beau livre illustré. On y trouvera des curiosités passionnantes sur les formes géométriques et l'interprétation mathématique des « minima ».

- Philip Morrison, *Les Puissances de dix*, Pour la Science, 1998. Dans la même collection, on trouvera *Depuis l'infiniment petit vers l'infiniment grand*, avec des illustrations très parlantes.



- Ian Stewart, *Visions géométriques*, Pour la Science, 1994. Cet ouvrage propose une utilisation efficace des représentations géométriques pour analyser et traiter de nombreux problèmes (labyrinthes-photo-pavages...).

- Marius Cleyet-Michaud, *le Nombre d'or*, PUF, coll. « Que sais-je ? », n° 1530, rééd. 2002. Une synthèse claire et bien documentée sur le nombre d'or, son histoire et ses utilisations.

- Yakov Perelman, *Oh, les maths !*, Dunod, 2001.
200 contes, énigmes et casse-têtes commentés par l'un des plus grands vulgarisateurs scientifiques du xx^{e} siècle.
On y trouve à la fois de stimulantes anecdotes sur l'histoire des mathématiques et des applications inattendues de l'algèbre et de la géométrie dans la vie quotidienne.

À propos de jeux mathématiques

- M. Criton, *les Jeux mathématiques*, PUF coll. « Que sais-je ? » n° 3220, 1998.
- A. Deledicq-F. Casiro *Jeux et découvertes mathématiques*, ACL-Éditions, 1996.
- Émile Fourrey, *Récréations arithmétiques*, Vuibert, 2001.
- André Sainte-Laguë, *Avec des nombres et des lignes*, Vuibert, 2001.

Des ouvrages plus ludiques

- Raymond Smullyan, *Le Livre qui rend fou*, Dunod. De la lecture de ce livre, vous ne sortirez peut-être pas fou, mais certainement mieux armé contre les pièges de la logique et des raisonnements spontanés et fallacieux.

- *Histoires de maths*, ACL-Éditions. Dix-sept bandes dessinées accompagnées de commentaires racontant quelques épisodes de la vie des grands mathématiciens. Cet ouvrage est complété, par une frise chronologique (d'environ 1,60 m de long) présentant l'histoire des mathématiques.

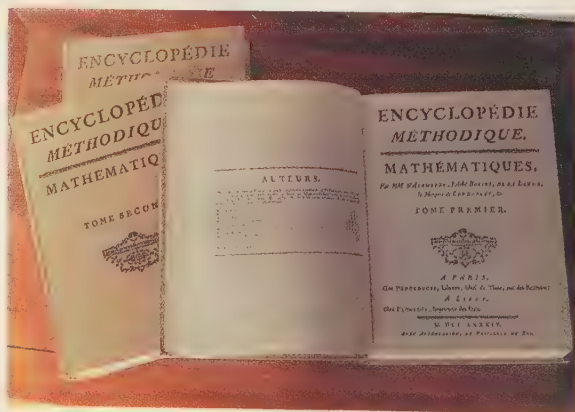
- Dans la collection «Découvertes» chez Gallimard, plusieurs petits ouvrages de 130 à

190 pages, richement illustrés. On pourra y trouver une foule d'informations scientifiques passionnantes.

Voici quelques titres :

- Denis Guedj, *L'Empire des nombres*, 1996.
- Pierre Comar, *La Perspective en jeu : les dessous de l'image*, 1992.
- T. Xuan Thuan, *Le Destin de l'Univers*, 1992.
- J.-P. Maury, *Newton et la mécanique céleste*, 1990.
- Denis Guedj, *La Révolution des savants*, 1988.
- J.-P. Maury, *Galilée, le messager des étoiles*, 1999.

*Le philosophe d'Alembert
écrivit une grande partie des
articles de l'Encyclopédie
dédiés aux mathématiques.*



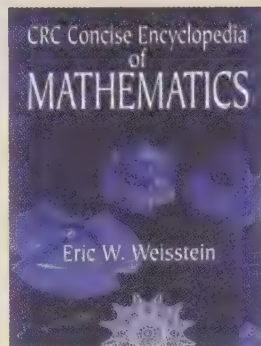
En plus de la bibliographie publiée dans la fiche pratique précédente, l'amateur de mathématiques peut enrichir ses connaissances par la lecture de quelques publications, dont nous donnons ici une liste représentative non exhaustive, ou en se procurant des ouvrages de référence très complets.

Des ouvrages de référence

Pour se perfectionner en mathématiques ou approfondir ses connaissances, signalons quelques titres d'ouvrages de référence, la plupart de taille imposante, qui constituent de véritables mines de renseignements. Ce sont aussi des ouvrages d'accès plus difficile.

- Jean-Paul Delahaye, *Le Fascinant Nombre π* , Pour la Science, 1997. Cet ouvrage traite de tout ce qu'il faut savoir à propos de ce nombre. Si certains développements mathématiques sont hors de votre portée pour le moment, pensez à l'avenir : vous les aborderez un jour.
- T. L. Lions, *Petite Encyclopédie des mathématiques*, Éditions Pagoulatos (Paris, Londres, Athènes)-Didier. Un livre très bien fait, très complet, dans lequel vous trouverez des exposés, des exemples, des prolongements des thèmes abordés par vos professeurs.

- *Encyclopédie méthodique*, 3 volumes reliés de la *Grande Encyclopédie de 1787 – Mathématiques*, réédition par ACL-Éditions, 1987. Un livre de référence pour ceux qui aiment l'histoire des mathématiques.
- Michel Serres, *Les Origines de la géométrie*, coll. « Champs » Flammarion, 1993. Plus qu'un essai historique, ce livre est aussi une réflexion philosophique à propos de l'invention de la géométrie et des méthodes de cette discipline depuis la nuit des temps.
- *Nouvelle Encyclopédie autodidactique*, Éditions Quillet, 1977. Pour apprendre et travailler seul, avec exercices et corrigés, tests de connaissances et indications historiques. Les mathématiques ne concernent qu'une partie de cet imposant ouvrage.



- L'ouvrage de référence le plus complet sur les mathématiques d'hier et d'aujourd'hui est la *Concise Encyclopedia of Mathematics*, de Eric W. Weisstein. Paru d'abord sur Internet, elle est aujourd'hui disponible sur papier, au format 21 x 28, en 1 970 pages écrites très serrées et largement illustrées. Comme son nom ne l'indique pas, elle est extraordinairement détaillée (110 000 références croisées, plus de 10 000 entrées) et renferme trésors et informations. Évidemment en anglais, elle se lit cependant sans difficulté, même pour un lycéen.

Des revues pour tous

Voici quelques titres de revues dédiées aux mathématiques :

- *Tangente*, revue mensuelle éditée par les Éditions Pole, 80, boulevard Saint-Michel, 75006 Paris.

Rédigée par une équipe de passionnés, cette publication de 52 pages traite de thèmes issus de différents aspects de la culture mathématique.

- *Plot* est une revue trimestrielle éditée par l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), 26, rue Duméril, 75013 Paris.

- *Hypercube*
Un magazine pour les collégiens et les lycéens, plutôt scolaire et susceptible d'aider ceux qui ne sont pas forcément très bons en maths. Très ouvert à la vie quotidienne, aux bricolages et aux expériences. 17, rue Salengro, 41100 Saint-Ouen-Vendôme.

Il existe heureusement d'assez nombreuses revues plus ou moins scientifiques pour les lycéens. Voici une sélection de quelques mensuels avec leurs coordonnées :

- *Science et Vie junior*
Une revue bien documentée, un peu « tape-à-l'œil » mais de bon ton. Avec une page de problèmes mathématiques. 1, rue du Colonel-Pierre-Avia, 75503 Paris Cedex 15.



- *Science et Vie*
Une des plus anciennes revues scientifiques populaires de notre siècle. Beaucoup d'informations avec une certaine tendance à préférer le sensationnel. De très bons numéros thématiques sur l'histoire des sciences. Pour les mordus de l'informatique, voir aussi *Science et Vie micro*. 1, rue du Colonel-Pierre-Avia, 75003 Paris Cedex 15. www.excelsior.fr/sv/.

- *Sciences et Avenir*
Malgré une volonté de vulgarisation très prononcée, on y trouve parfois de remarquables articles. En particulier, les numéros spéciaux sont souvent très intéressants. 10, place de la Bourse, 75002 Paris. www.scavaol.com.

- *La Recherche*
L'un des deux vrais grands magazines de sciences en France. Un peu difficile pour un lycéen, mais on y glane des informations et on y apprend beaucoup de choses. A édité en 1996, un très recherché numéro spécial sur les nombres. 4, rue du Texel, 75004 Paris.

- *Pour la Science*
L'autre vrai grand magazine de sciences publié en France. Avec des rubriques régulières et très intéressantes sur les jeux et les problèmes mathématiques. Édite régulièrement des articles mathématiques et d'histoire des maths en ouvrages reliés. 10, rue Férou, 75006 Paris.

- *Ciel et Espace*
Pour les mordus de l'astronomie, c'est le bon magazine : bien illustré et sérieux. Édité par l'AFA, 17, rue É.-Deutsch-de-la-Meurthe, 75014 Paris.

La recherche en mathématiques est extrêmement vivante. En France, par exemple, on compte un peu plus de 3 000 chercheurs travaillant essentiellement dans les universités et au CNRS (Centre national de la recherche scientifique).

Qui sont les chercheurs et comment le sont-ils devenus ?

Il existe et il a toujours existé des chercheurs en mathématiques autodidactes indépendants de toute institution. Mais la voie normale consiste à être engagé comme maître de conférences, professeur dans une université, chercheur au CNRS ou dans une grande entreprise ayant intérêt à développer des recherches théoriques. On postule ces postes généralement après avoir passé une thèse, obtenue après deux ou trois ans de recherche après la délivrance d'une maîtrise de mathématiques et d'un DEA. Certains, après quelques années, passent dans l'industrie ou la recherche appliquée, en particulier en informatique.

Que font-ils et comment travaillent-ils ?

Les chercheurs en mathématiques cherchent à résoudre les problèmes qu'ils se posent ou que se posent leurs collègues ; ils sont amenés à lire beaucoup : des livres, des articles des revues (il en paraît plus de 100 000 par an à travers le monde) et, depuis quelques années, des informations sur l'Internet. Ils se réunissent plusieurs fois par semaine dans des séminaires et s'expliquent les uns les autres ce qu'ils ont compris ou ce qui les fait réfléchir. Ainsi, de ces rencontres et de la confrontation des points de vue se découvrent petit à petit les solutions de problèmes vieux ou récents et se bâtissent de nouvelles manières de penser ou de voir.

Par exemple, le 23 juin 1993 à Cambridge, le mathématicien anglais Andrew Wiles expliqua à ses collègues de l'Institut Isaac Newton comment il pensait avoir réussi à démontrer le grand théorème de Fermat (voir encadré page suivante). Dans le monde entier, des centaines de mathématiciens se mirent au travail et certains découvrirent une faille. Avec l'aide de son collègue Richard Taylor, Wiles réussit à la combler en 1995. Pour cette prouesse, Andrew Wiles reçut en 1996 le prestigieux prix Wolf, l'un des équivalents du prix Nobel pour les mathématiciens de plus de quarante ans (car il en avait quarante-trois).

Qu'est-ce que la médaille Fields ?

L'industriel suédois Alfred Nobel a découvert en 1867 comment fabriquer la dynamite. Avant son décès en 1896, il précisa dans son testament que les revenus de sa fortune

seraient chaque année distribués à des savants méritants sous forme d'un prix : c'est le prix Nobel attribué chaque année à des physiciens, chimistes, biologistes, écrivains... mais

jamais à des mathématiciens. Et cela pour une sombre histoire de jalousie personnelle : le meilleur mathématicien de l'époque était alors suédois. Il s'appelait Mittag-Leffler, mais il

avait, dit-on, la même petite amie que M. Nobel : il n'était donc pas question que ce mathématicien reçoive le prix Nobel.

Ce n'est qu'en 1936 que le Canadien John Charles Fields créa un équivalent mathématique au Nobel. Depuis, en dépit d'une longue interruption due à la Seconde Guerre mondiale, cette récompense est attribuée tous les quatre ans à des chercheurs de moins de quarante ans.

Voici la liste des lauréats :

1936 : Ahlford et Douglas (États-Unis).

1950 : A. Selberg (Norvège) et L. Schwartz (France).

1954 : J.-P. Serre (France) et K. Kodaira (Japon).

1958 : K. F. Roth (Grande-Bretagne) et R. Thom (France).

1962 : L. Hormander (Suède) et J. W. Milnor (États-Unis).

1966 : M. F. Atiyah (Grande-Bretagne), P. J. Cohen (États-Unis), A. Grothendieck (France) et S. Smale (USA).

1970 : A. Baker (Grande-Bretagne), H. Hironaka (Japon) et J.-C. Thomson (Grande-Bretagne).

1974 : E. Bombieri (Italie), D. Mumford (États-Unis).

1978 : C. Feffermann et D. Quillen (États-Unis), G. A. Margoulis (URSS) et Deligne (Belgique).

1982 : A. Connes (France),

W. P. Thurston et Shing Tung Yau (États-Unis).

1986 : G. Faltings (RFA), M. Freedman (États-Unis), S. Donaldson (Grande-Bretagne).

1990 : V. G. Drenfeld (Ukraine), Jones (États-Unis), Mori (Japon) et E. Witten (États-Unis).

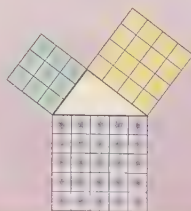
1994 : P.-L. Lions (France), J.-C. Yoccoz (France), J. Bourgain (Belgique) et Zelmanov (Russie).

1998 : R. E. Borcherds (Grande-Bretagne), W. T. Gowers (Grande-Bretagne), M. Kontsevich (États-Unis), C. T. McMullen (États-Unis).

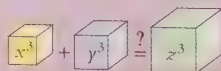
2002 : L. Laffargue (France), V. Voevodsky (États-Unis).

Le grand théorème de Fermat

Tout le monde sait qu'il est possible de découper deux carrés de côtés entiers pour reconstruire un troisième carré de côté entier : c'est le théorème de Pythagore qui en donne la preuve.



Est-il possible de découper deux cubes de côtés entiers pour reconstruire un troisième cube de côtés entiers ? La réponse est non ! Fermat émit la conjecture plus générale que l'équation en nombre entier $x^n + y^n = z^n$ n'avait aucune solution dès que $n > 2$. Cette conjecture est aujourd'hui démontrée.



Le prix Abel

En 2003, l'académie norvégienne d'Oslo décida d'honorer le 200^e anniversaire du mathématicien Niels Henrik Abel en créant un prix pouvant aussi remplacer le prix Nobel en mathématiques : le prix Abel. C'est le mathématicien français Jean-Pierre Serre qui eut l'honneur d'en être le premier lauréat, pour l'ensemble de ses travaux qui ont jalonné les mathématiques du XX^e siècle.

Faire des mathématiques est une activité ludique. Tournois, rallyes, championnats, concours, de nombreuses compétitions mathématiques sont organisées tous les ans en France comme dans tous les pays du monde. L'une des plus importantes est le concours Kangourou.

Le concours Kangourou des mathématiques

Ce concours est la plus importante des compétitions mathématiques organisées en France et dans le monde. Son histoire commence au début des années 80, lorsqu'un professeur de mathématiques à Sydney, en Australie, Peter O'Holan, décida de créer un nouveau type de jeu dans les classes de son pays : un questionnaire à choix multiples, corrigé par ordinateur, auquel pouvaient répondre des centaines de milliers de jeunes à la fois.

Le succès de ce Concours national mathématique australien fut immense. Et, en 1991, lorsque deux professeurs français, Jean-Pierre Boudine et André Deledicq, décidèrent de lancer le jeu dans l'Hexagone, ce dernier proposa de l'appeler « Kangourou » en hommage à nos amis australiens. La première édition réunit 120 000 collégiens. Depuis, le concours a été étendu aux écoliers et aux lycéens

français ; puis à ceux de 21 pays européens. Depuis longtemps, le concours Kangourou européen a dépassé le nombre de participants de son grand frère australien. Actuellement, en Europe, près de trois millions de participants jouent à ce jeu le même jour.

430 000 participants !

Voici le détail des participants français en 2003 :

Écoles : 70 000

CE2 : 16 000

CM1 : 24 000

CM2 : 30 000

Collèges : 313 000

6^e : 128 000

5^e : 84 000

4^e : 53 000

3^e : 39 000

BEP-CAP : 9 000

Lycées : 47 000

2^e : 24 000

1^{re} : 15 000

T : 8 000



Organisé tous les ans, autour de l'arrivée du printemps, le jeu-concours Kangourou intéresse tous les jeunes de 8 à 18 ans.



Quelques questions

Voici des questions extraites des concours Kangourou.

• Francis a gagné un T-shirt avec le mot «KANGOUROU» écrit sur le devant. Il s'admire dans la glace. Que voit-il ?

- A) KΛΙΓΟΠΩΠ
- B) UORUOGNAK
- C) UOЯUOЭHAK
- D) KΛIΓOYPOU
- E) ΠOYΠOЭNAK

• Ma souris blanche m'a dit «Ma queue mesure 14 cm de plus que la moitié de ma queue!». Combien de centimètres mesure la queue de ma souris ?

- A) 21
- B) 14
- C) 28
- D) 30
- E) 24



• On mélange deux jus de fruit. Le premier, dont on a deux litres, contient 10 % de sucre. Le deuxième, dont on a trois litres, contient 15 % de sucre. Quel est le pourcentage de sucre dans les cinq litres de jus de fruit après le mélange ?

- A) 25 %
- B) 5 %
- C) 13 %
- D) 12,5 %
- E) 12,75 %

• Si l'on augmente la vitesse d'un train de 30 km/h, on perd deux heures. Quelle est la longueur du trajet ?

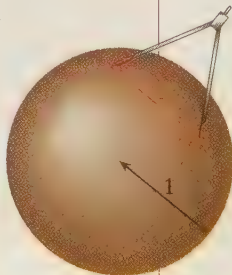
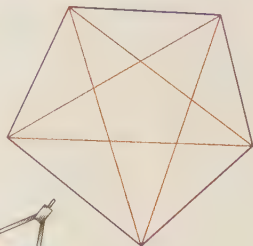
- A) on ne peut pas le dire
- B) 720 km
- C) 360 km
- D) 180 km
- E) 90 km

• Sur une sphère de bois de rayon 1, on trace un cercle avec un compas d'écartement. Quelle est la longueur de ce cercle ?

- A) π
- B) $3\pi\sqrt{2}$
- C) $\pi\sqrt{3}$
- D) 2π
- E) $2\pi\sqrt{3}$

• Parmi les phrases suivantes concernant les diagonales des polygones convexes, quelle est celle qui est juste ?

- A) Il existe un polygone convexe avec 28 diagonales.
- B) Si le nombre de diagonales est impair, alors le nombre de côtés est impair.
- C) Le nombre de diagonales est toujours plus grand que le nombre de côtés.
- D) Il existe un polygone convexe avec 35 diagonales.
- E) Le premier polygone convexe qui a plus de 100 diagonales a 17 côtés.



Les autres concours de mathématiques

Voici les coordonnées de quelques compétitions organisées en France, intéressant les lycées, assorties d'une des questions posées lors d'une de leurs dernières éditions.

- **Championnat FFJM**
(Fédération française de jeux mathématiques)
1, avenue Foch,
94700 Maisons-Alfort.

Question

Dans ce cadre, il y a exactement une phrase vraie.
Dans ce cadre, il y a exactement une phrase fausse.
Dans ce cadre, il y a exactement deux phrases vraies.
Dans ce cadre, il y a exactement deux phrases fausses.

Combien y a-t-il de phrases vraies dans le cadre ci-dessus ?

- **Mathématiques sans frontière - Midi-Pyrénées**
IREM
Université
Paul-Sabatier
118, route de Narbonne,
31062 Toulouse.

Question : le croisement des télésièges Au moment où Alain qui est assis sur le siège n° 98 croise le siège

n° 105, son copain Georges, qui occupe le siège n° 241, croise le siège n° 230. Bien sûr, les sièges, régulièrement espacés sur le câble, sont numérotés dans l'ordre à partir du n° 1. Combien cette remontée compte-t-elle de sièges en tout ?

- **Mathématiques sans frontières-Alsace**

Lycée Louis Pasteur,
24, rue Human,
67085 Strasbourg.

Question Daniel et Antoine sont assis en deux points diamétralement opposés d'une piscine circulaire dont l'eau est profonde de 1,80 m. Lorsque Myriam prend place au bord du même bassin, tous deux nagent tout droit vers elle. Après un parcours de 10 m, Antoine a déjà atteint Myriam, alors que Daniel devra nager 14 m de plus pour la rejoindre. Combien de litres d'eau y a-t-il dans ce bassin ? Expliquer.

- **Rallye mathématique du Centre**

IREM

Université d'Orléans
BP 6759,

45067 Orléans Cedex 2.
Rectorat secrétariat des IPR
2, rue Saint-Étienne ;
45043 Orléans Cedex.

Question Dans une cerise on peut estimer que l'épaisseur de la couche de chair est égale au diamètre du noyau. On peut également admettre que le noyau et la cerise sont deux boules de même centre.

Quel est le rapport du volume de la chair à celui du noyau ?

- **Rallye mathématique de Champagne-Ardennes**

IREM de Reims
IUFM de Reims
23, rue Clément Ader
BP 175,
51685 Reims Cedex.

Question Vanessa et Thierry ont inventé un code consistant à remplacer chaque chiffre d'un nombre par son équivalent en chiffres romains. Continuant d'utiliser leur code, ils vous font parvenir une magnifique addition

Les autres concours de mathématiques

romaine. Malheureusement, les espaces entre deux chiffres voisins ne sont pas indiqués (par exemple, IVI peut signifier 151, 16 ou 41).

IVII + VIII = IIII.

Soyez astucieux et retrouvez cette addition ne comportant pas de zéro.

• Tournoi mathématique du Limousin

IREM

123, avenue Albert-Thomas,

87060 Limoges Cedex.

Question Quelle distance maximale peut-on parcourir avec une voiture disposant de 7 pneus neufs, sachant que chaque pneu peut accomplir 40 000 km ?

• Rallye mathématique de Poitou-Charentes

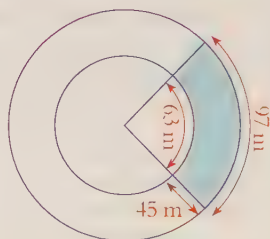
IREM de Poitiers,

Faculté des sciences

40, avenue du Recteur-Pineau, 86022 Poitiers.

Question La figure ci-dessous représente un terrain qui est une partie d'une couronne.

Si on vous propose d'échanger ce terrain contre un terrain « carré » de 60 m de côté, cet échange vous est-il favorable ?



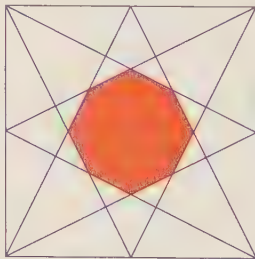
• Rallye mathématique de la Sarthe

Collège du Vieux-Colombier,

rue de la Briquetterie,

72000 Le Mans.

Question Dans le carré ci-dessous, de côté 1 mètre, on a tracé, comme l'indique le dessin, les segments joignant les sommets aux milieux des côtés. Calculer l'aire de l'octogone rouge ainsi construit.



• Rallye mathématique d'Auvergne

IREM, Complexe scientifique des Cézeaux, 63117 Aubière.

Question La société Bognat 2000 vient de mettre au point une calculatrice originale pour les

lauréats du Rallye ; celle-ci effectue deux opérations : l'addition usuelle notée +, une curieuse opération notée *.

On sait que, pour tout entier naturel a ,

$$a * a = a,$$

$$\text{et } a * 0 = 2a$$

et pour quatre entiers naturels quelconques, a, b, c, d ,

$$(a * b) + (c * d) = (a + c) * (b + d)$$

$$= (a + c) * (b + d)$$

Quels sont les résultats des opérations :

$$(2 + 3) * (0 + 3)$$

$$\text{et } 1024 * 48 ?$$

• Rallye mathématique d'Aquitaine

IREM - Université

40, rue Lamartine, 33340 Talence.

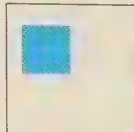
Question

– « Moi, Monsieur, mon côté est un nombre entier de centimètres ! » déclare fièrement le grand carré blanc.

– « Mais moi aussi ! » rétorque rageusement le petit carré bleu, avant de poursuivre. « Qu'on me donne 2 001 cm² de plus et je serai votre égal ! »

Combien peut bien mesurer le côté du plus grand des deux protagonistes ?

(Donner toutes les possibilités.)



Il n'est pas question ici de la résolution d'équations polynomiales du second degré ou de celles qui s'y ramènent, mais d'équations dont on se propose de déterminer une racine avec une certaine approximation, faute de mieux.

La résolution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$ suppose d'abord une étude rapide de la fonction f sur un intervalle $[a, b]$: continuité, variations et valeurs aux bornes.

La calculatrice pour les approximations

Il s'agit donc d'abord de localiser une racine. Cette localisation peut être faite de manière d'abord grossière au moyen de la calculatrice graphique, en prenant une « fenêtre » assez large, qui sera ensuite « diminuée » progressivement.

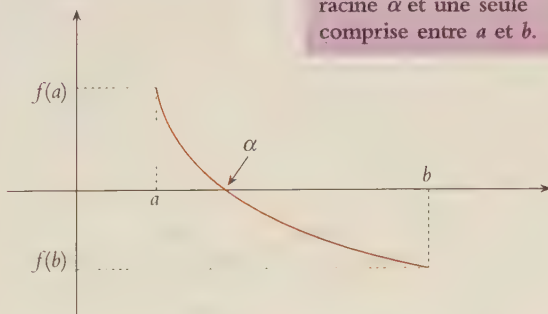
On obtiendra ensuite un meilleur encadrement de la racine par diverses méthodes qui peuvent

donner lieu à une programmation :

- balayage ;
- dichotomie ;
- méthode de Newton ;
- méthode du point fixe.

Rappel

Si $f(a)f(b) < 0$ et si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et strictement monotone sur cet intervalle, alors l'équation $f(x) = 0$ a une racine α et une seule comprise entre a et b .



Balayage de l'intervalle $[a, b]$

On a montré qu'une racine de $f(x) = 0$ se situe dans l'intervalle $[a, b]$. Fixer un point de départ a et un pas P .

Calculer $f(a), f(a+P), f(a+2P)$, etc., jusqu'à ce que

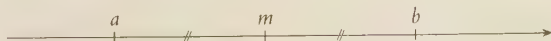
$f(a+kP) \times f(a+(k+1)P) < 0$. La racine est alors comprise entre $a+kP$ et $a+(k+1)P$.

Diviser le pas par 10 et recommencer à partir de $a+kP$... De proche en proche, on obtient un encadrement de plus en plus fin de la racine.

Dichotomie ou partage en deux

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, calculer $m = \frac{a+b}{2}$ et calculer $f(m)$. Selon le signe de $f(m)$, on

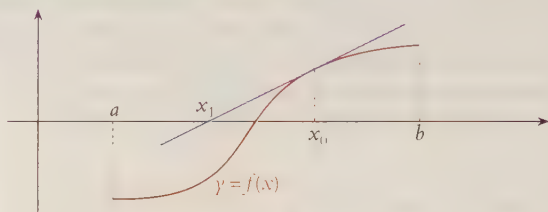
remplace $[a, b]$ par $[a, m]$ ou $[m, b]$ et on recommence avec le milieu de ce nouvel intervalle.



La méthode de Newton (ou dite de la tangente)

La tangente en M à la courbe de f coupe l'axe xx' en un point d'abscisse x_0 , qui donne une première approximation de la racine de $f(x)=0$.

Après avoir fait choix d'un point de « départ » x_0 convenable, on considère la suite x_n définie par x_0 et, pour $n \geq 0$, par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.



Cette suite converge vers la racine de l'équation si x_0 a bien été choisi et si certaines

conditions sont réalisées quant à la « concavité » de la courbe.

La méthode du point fixe

L'équation $f(x)=0$ équivaut à l'équation $f(x)+x=x$.

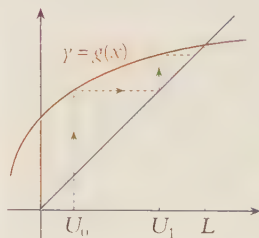
Si l'on pose $g(x)=f(x)+x$, la racine de $f(x)=0$ est le réel x qui vérifie $g(x)=x$ que l'on appelle le « point fixe » de la fonction g . Faire une représentation graphique.

Utiliser la suite U définie par U_0 et $U_{n+1}=g(U_n)$. Étudier la convergence de cette suite :

- Si U est croissante et majorée, alors elle est convergente.
- Si U est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Si elle est convergente, alors sa limite L vérifie $g(L)=L$.

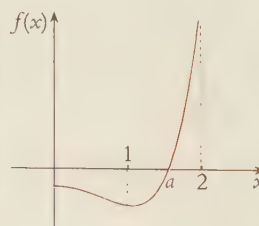
Dans certains cas, on utilisera l'inégalité des accroissements finis pour comparer cette suite à une suite géométrique.



tion $x^5-3x^2-2=0$. On étudie rapidement la fonction f telle que $f(x)=x^5-3x^2-2$

et on démontrera sans peine qu'elle s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}^+$ pour $x=a$.

La courbe représentative a l'allure suivante :



La calculatrice graphique donne cette courbe sur $[0; 3]$. On a $f(1)=-4$ et $f(2)=18$ donc $1 < a < 2$.

Balayage de $[1; 2]$

Pas P = 0,1

x 1,1	$f(x)=-4,019$
1,2	-3,083
1,5	-1,156
1,6	0,805

Donc $1,5 < a < 1,6$

Pas P = 0,01

x 1,52	$f(x)=-0,817$
1,53	-0,638
1,56	-0,061
1,57	0,144

Donc $1,56 < a < 1,57$

Pas P = 0,001

x 1,561	$f(x)=-0,415$
1,563	-0,0008
1,564	0,019

Donc $1,563 < a < 1,564$

Exemple

Donner un encadrement de la racine positive de l'équa-

Le calcul intégral est très important en mathématiques et dans les sciences utilisant les mathématiques : physique, mécanique, chimie, biologie et, plus tard, en probabilités. Calculer une dérivée est relativement simple si l'on sait utiliser des formules. Mais pour une primitive, c'est bien autre chose, au point que, pour certaines fonctions, on ne sait pas trouver de primitive, bien que l'on sache qu'elle existe. Par exemple, on ne sait pas trouver une primitive de $x \rightarrow \exp(x^2)$.

En calcul intégral, il est important que vous mémorisiez un certain nombre de techniques afin d'aller vite et d'être efficace.

D'abord... déterminer une primitive

Il est tout d'abord fondamental de bien connaître les formules de dérivation.

- **L'évidence** : savoir déterminer les primitives des fonctions simples telles que : $x \rightarrow x^p$ avec p rationnel et $p \neq -1$; $x \rightarrow \frac{1}{x}$; $x \rightarrow e^x$; $x \rightarrow \cos(ax+b)$; $x \rightarrow \sin(ax+b)$.

- **Des formes à reconnaître** u étant une fonction dérivable sur l'intervalle d'intégration, vous savez trouver les primitives de : $u^p u'$ pour p rationnel et $p \neq -1$; de $\frac{u'}{u}$; de $u' e^u$.

Exemple

Pour calculer

$\int_a^b (1-2x)^2 \sqrt{1-2x} \, dx$, il faut d'abord que $a < \frac{1}{2}$ et $b < \frac{1}{2}$.

On remarquera que la fonction à intégrer s'écrit

sous la forme $(1-2x)^2$ et en posant $u(x) = 1-2x$, on a $u'(x) = -2$. La fonction s'écrit $-\frac{1}{2} u^{\frac{5}{2}}$, dont les primitives sont $-\frac{1}{2} \times \frac{2}{7} (1-2x)^{\frac{7}{2}} + k$.

- **Savoir se ramener à une forme connue**
- Pour déterminer les primitives d'une fonction trigonométrique, il convient de tenter, si nécessaire, une transformation de la fonction.
- En particulier, se souvenir que : $f(x) = \tan x$ a pour dérivée $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ou $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

Une primitive de $\tan^2 x$ est donc $\tan x - x$.

- Pour des cubes et des puissances impaires en général : $\sin^3 x$ peut s'écrire $\sin x \sin^2 x$,

soit : $\sin x - \sin x \cos^2 x$.
 $\cos^3 x$ peut s'écrire $\cos x \cos^2 x$,
 soit $\cos x - \cos x \sin^2 x$.

- Pour les carrés :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

- Pour des puissances paires : on peut se ramener à des « puissances » de carrés
 $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left[\frac{1 - \cos 2x}{2} \right]^2 =$
 $= \frac{1}{4} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$, etc.

- Et on peut toujours utiliser les formules d'Euler dans $\mathbb{C}$ pour linéariser :

$$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$$

$$2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}.$$

Ainsi, pour « linéariser » $\cos^6 x$, développer $(2\cos x)^6$ soit $(e^{ix} + e^{-ix})^6$.

- Pour un quotient de polynômes, changer la forme pour se ramener à une forme connue.

Exemple

$\frac{x+1}{x-1}$ peut s'écrire $1 + \frac{2}{x-1}$

dont on sait trouver des primitives.

$\frac{4x+5}{2x^2-8}$ peut s'écrire sous la forme $2 + \frac{a}{2x^2-8}$: il reste à trouver a .

Pour calculer

$\int_a^x \frac{x^3}{x+1} dx$ on pensera que

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$\text{donc } \frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

et, sous cette forme, on sait déterminer les primitives.

• L'intégration par parties

Si la fonction f peut s'écrire sous la forme $u'v$ on sait trouver ses primitives F :

Elles s'écrivent

$F = (uv) - (\text{une primitive de } uv') + k$

Si le « choix » de u' et de v s'avère inopérant, changer ce choix...

L'intégration par parties (parfois deux intégrations successives) est particulièrement utile dans le cas de fonctions f qui s'écrivent sous l'une des formes suivantes :

$$f(x) = P(x) \cos x ;$$

$$f(x) = P(x) \sin x ;$$

$$f(x) = P(x) e^{ax+b} ;$$

$$f(x) = P(x) \ln x$$

où P désigne une fonction polynôme.

Exemple 1

$$f(x) = (3x-1)e^{4x+5}$$

Soit à calculer $\int_a^b f(x) dx$.

On pose $\begin{cases} u'(x) = e^{4x+5} \\ v(x) = 3x-1 \end{cases}$

$$\text{d'où } \begin{cases} u(x) = \frac{1}{4} e^{4x+5} \\ v'(x) = 3 \end{cases}$$

d'où $\int_a^b u'(x)v(x) dx = \left[(3x-1) \times \frac{1}{4} e^{4x+5} \right]_a^b - \int_a^b \frac{3}{4} e^{4x+5} dx$ et on sait calculer cette dernière intégrale.

Exemple 2

Soit à calculer $\int_a^b \ln x dx$; penser d'abord qu'il faut $a > 0$ et $b > 0$

On pose $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$

$$\text{d'où } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

et ainsi

$$\int_a^b \ln x dx = [x \ln x]_a^b - \int_a^b 1 dx.$$

Ensuite... calculer l'intégrale

Quelques repères.

• Les fautes de calcul sont fréquentes : on a

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

• Attention aux signes dans le calcul de la différence $F(b) - F(a)$!

• Attention aux calculs avec les fonctions trigonométriques.

• On sait bien que si $a < b$ et $f(x) > 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Si vous trouvez un résultat négatif, dites-vous qu'il y a

quelque chose qui ne va pas.

Et il en va de même si $f(x) < 0$ sur $[a, b]$. Si $a > b$, ces résultats sont inversés.

• Si f est impaire, alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

et si f est paire, alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

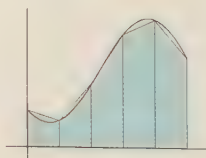
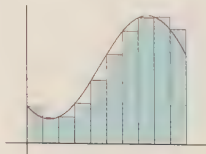
Exemple

Pour calculer $\int_{-2}^2 \sin^5 x dx$,

inutile de chercher une primitive de f ! Elle vaut zéro.

• Enfin, penser que l'on

peut toujours obtenir une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles ou des trapèzes...



Déterminer un signe, c'est dire si tel nombre, telle expression, telle fonction est positive ou bien négative. Et c'est bien évidemment très important en algèbre et en analyse, à propos de résolution d'inéquations, d'étude des variations d'une fonction, pour savoir où se trouve la courbe de la fonction dans un repère, pour l'étude des variations d'une suite, etc.

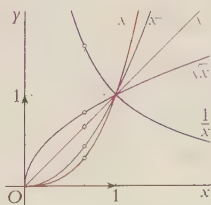
On peut déjà se poser la question toute bête : est-ce que par hasard ce n'est pas évident ?

Exemples :

- pour tout réel x : $x^4 + 546$ est positif
- pour tout réel positif : $x^2 + x + 2$ est positif
- pour tout réel x : $e^{-3x} + 3$ est positif
- pour tout x de l'intervalle $[0; p]$: $\sqrt{x} + \sin x$ est positif.

Les fonctions de référence

Sur l'intervalle $]0; 1[$, on a $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$, donc sur cet intervalle, on a $x - x^2 > 0$ et $x^3 - \frac{1}{x} < 0$.
Sur l'intervalle $]1; +\infty[$: $\frac{1}{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$, on a donc, par exemple, $\sqrt{x} - x^2 < 0$ sur cet intervalle.



L'outillage indispensable

- Le signe d'un polynôme du premier degré : $P(x) = ax + b$
- Le signe d'un trinôme du second degré : $T(x) = ax^2 + bx + c$
- Le signe d'un produit $A(x) \times B(x)$ et celui d'un quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$.
- Les comparaisons de fonctions de référence bien connues.
- Le signe des fonctions trigonométriques.
- L'usage des variations d'une fonction numérique.
- Le signe d'une intégrale.

Le signe d'un produit ou d'un quotient de polynômes

Exemple

Étudier le signe de :

$$P(x) = (3x - 4)(2x^2 + x - 3).$$

La technique consiste à déterminer le signe de chacun des facteurs de ce produit et, en utilisant un tableau de signes, en déduire le signe du produit en utilisant la règle des signes d'un produit de facteurs.

- Pour $3x - 4$: ce binôme du premier degré s'annule

pour $x = \frac{4}{3}$. Il est positif si $x > \frac{4}{3}$ et négatif si $x < \frac{4}{3}$.

- Pour le trinôme du second degré $2x^2 + x - 3$: ses racines sont 1 et $-\frac{3}{2}$.

Il est négatif entre ces racines et positif à l'extérieur de l'intervalle des racines.

Un tableau de synthèse résume ces informations et permet de déterminer le signe du produit de ces deux polynômes et de donner par exemple les racines d'une inéquation.

x	$-\infty$	$-3/2$	1	$4/3$	$+\infty$
signe de $(3x - 4)$	-	-	-	+	+
signe de $(2x^2 + x - 3)$	+	0	0	+	+
signe du produit	-	0	+	0	+

Étudier le signe de :

$$Q(x) = \frac{(3x-4)}{(2x^2+x-3)}.$$

La technique est rigoureusement la même et la règle des signes pour un quotient la

même que pour un produit. Il convient pourtant de ne pas oublier que le quotient n'est pas défini si le dénominateur est nul, c'est-à-dire ici pour $x=1$ et $x=-\frac{3}{2}$.

Le signe de fonctions particulières

Exemple

Étude du signe de :

$$f(x) = \sin 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

sur $[0; \pi]$.

Sur l'intervalle envisagé, déterminer d'abord le signe de $\sin 2x$: cette fonction est nulle pour $x=0$; $x=\frac{\pi}{2}$

et $x=\pi$.

Quant à $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, elle est

nulle si $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, $x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$...

d'où, sur l'intervalle

envisagé : $x = \frac{5\pi}{6}$. On obtient

le tableau suivant :

x	0	$\pi/2$	$5\pi/6$	π
$2x$	0	π		2π
signe de $(\sin 2x)$	0	+	0	+
$(x - \pi/3)$	$-\pi/3$		$\pi/2$	$2\pi/3$
$\cos(x - \pi/3)$	$1/2$	+	+	0
signe du produit	0	+	0	0

Déterminer un signe avec des radicaux

Exemple

Étudier le signe de la fonction f telle que

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - x.$$

On doit déjà avoir

$$x^2 - 9 \geq 0 \text{ et en utilisant}$$

le théorème concernant

le signe d'un trinôme du

second degré et sans faire de

tableau de signe, on obtient

$$x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3, \text{ c'est-à-dire}$$

$$x \in]-\infty; -3] \text{ ou } x \in [3; +\infty[.$$

D'autre part, si x est négatif, alors on a évidemment

$$f(x) > 0.$$

Pour les autres valeurs de x , on peut utiliser la « forme

conjuguée » qui est

$\sqrt{x^2 - 9} - x$: on multiplie et on divise $f(x)$ par cette forme. Il vient alors :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x}$$

$$f(x) = \frac{9}{\sqrt{x^2 - 9} + x}.$$

Pour $x > 0$, il est clair que la fonction f est alors négative.

On a alors les résultats suivants tenant compte de toute cette étude :

si $x \leq -3$ alors $f(x) > 0$ et

si $x \geq 3$ alors $f(x) < 0$.

Utiliser les variations d'une fonction

Si f est croissante sur un intervalle I , alors le signe de $f(b) - f(a)$ est le même que celui de $b - a$, et si f est décroissante sur I , le signe de $f(b) - f(a)$ est celui de $a - b$.

Exemple 1

Étude du signe de $\ln(4x+1)$ (avec $x > -\frac{1}{4}$).

On sait que $\ln 1 = 0$: donc le signe de $\ln(4x-1) - \ln 1$ est le même que celui de $(4x-1) - 1$ puisque la fonction $\ln$ est croissante : si $4x+1 > 1$ alors $\ln(4x+1) > 0$ si $4x+1 < 1$ alors $\ln(4x+1) < 0$.

Ainsi sur $] -\frac{1}{4}; 0[$ on a

$$\ln(4x+1) < 0 \text{ et sur }]0; +\infty[$$

$$\ln(4x+1) > 0.$$

Exemple 2

Étude du signe de $e^{2x} - e^{5x-2}$.

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, ce signe est le même que celui de la différence $(2x) - (5x-2)$ soit $-3x+2$.

Ainsi sur $] -\infty; \frac{2}{3}[$ on a $e^{2x} - e^{5x-2} > 0$ et sur $]\frac{2}{3}; +\infty[$, $e^{2x} - e^{5x-2} > 0$.

Lorsque l'on ne sait pas résoudre algébriquement une inéquation telle que $f(x) > 0$ par exemple, on peut étudier les variations de la fonction f , en utilisant le signe de sa dérivée, voire de sa dérivée seconde.

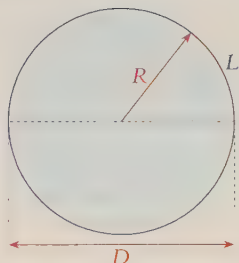
Depuis toujours, les géomètres sont convaincus que le rapport $\frac{L}{D}$, L étant la longueur d'une circonférence et D son diamètre, est un nombre constant.

Un bref historique du nombre π

Les Babyloniens 2000 ans avant notre ère, les Grecs, les Égyptiens, les Chinois puis les Arabes et les Hébreux donnent à ce rapport des valeurs voisines de 3. Archimède donnait 22/7 comme valeur approchée. Ce n'est que depuis 1700, en Angleterre, qu'on désigne ce rapport par la lettre grecque π , première lettre du mot grec signifiant

«périmètre».

De tout temps, on a cherché à en calculer des valeurs de plus en plus précises. Ce nombre n'est pas un rationnel, ce qui fut prouvé en 1761 par Lambert. Mais il y a mieux : cet irrationnel n'est pas encore comme les autres : il est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est pas solution d'une équation algébrique de type $P(x)=0$,



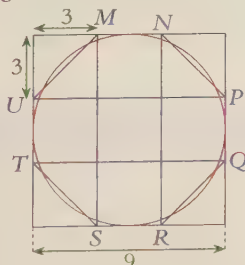
où P est un polynôme.

Ce fut démontré en 1882 par Lindemann.

Les mathématiciens ont trouvé actuellement plusieurs milliards de décimales exactes... et ce n'est pas fini.

Le papyrus Rhind (2000 av. J.-C.)

Ce texte ancien affirme que «l'aire du cercle de diamètre 9 coudées est celle du carré de 8 coudées de côté». Voici la démarche égyptienne. Un cercle de diamètre 9 est inscrit dans un carré de côté 9 : on a tracé l'octogone $MNPQRSTU$.

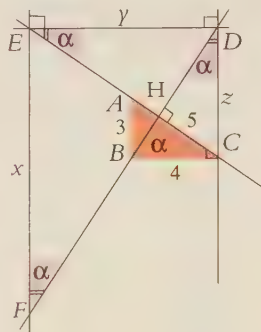


L'aire du disque de diamètre 9 est $\frac{1}{4}\pi \times 81$. Or cette aire est voisine de celle de l'octogone

qui est 63, soit les $\frac{7}{9}$ de 81, aire du carré de côté 9. Mais 63 n'étant pas un carré parfait, on le remplaçait par 64, carré de 8, d'où $\frac{1}{4}\pi \times 81 \approx 64$, ce qui revient à écrire $\pi \approx 64 \times \frac{4}{81}$, soit $\pi \approx (\frac{4}{3})^4$ et $\pi \approx 3,16$.

On peut d'ailleurs construire à la règle et au compas cette «longueur».

À partir du triangle ABC de côtés 3, 4 et 5, on trace la perpendiculaire en C à (BC) qui coupe en D la hauteur (BH) de ABC ; on trace la perpendiculaire en D à (DC) qui coupe (AC) en E , et enfin la perpendiculaire en E à (ED) qui coupe (BD) en F .



En utilisant la tangente de l'angle ACB ainsi que les égalités d'angles et en calculant successivement les longueurs y , z et x , on trouve EF égale à l'approximation du papyrus de Rhind : $(\frac{4}{3})^4$.

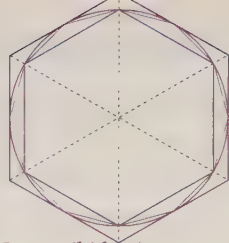
La méthode d'Archimède

Archimède a consacré de très nombreux travaux à la détermination de π au moyen de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle. Le principe de sa méthode est le suivant. À partir d'un cercle de rayon connu, on inscrit un polygone régulier et on envisage un polygone régulier circonscrit au cercle.

On est capable de calculer la longueur de l'un et de l'autre de ces polygones et le périmètre du cercle est compris entre ces deux

longueurs $l_n < 2\pi R < L_n$. En doublant le nombre des côtés, on obtient un encadrement plus fin de la longueur du cercle $l_{2n} < 2\pi R < L_{2n}$ et, de proche en proche, on détermine un encadrement de plus en plus précis du nombre π .

Tout le problème est de pouvoir calculer les périmètres de polygones réguliers : en fait, Archimède savait exprimer le périmètre d'un polygone régulier de $2n$ côtés en fonction de celui du polygone de n côtés.



Un travail identique peut être fait avec les aires des deux polygones réguliers qui « encadrent » celle du disque de rayon R . Par ce procédé, Archimède avait trouvé :

$$3 + \frac{2}{15} < \pi < 3 + \frac{2}{14}$$

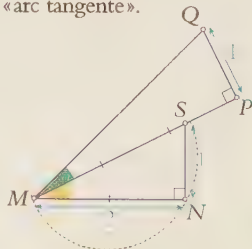
soit $3,133 < \pi < 3,142$, ce qui n'est pas si mal.

François Viète a trouvé $\pi \approx 3,141592653$

avec des polygones de 393 216 côtés, soit 6×2^{16} !

La méthode de James Gregory (1670)

Il calcule des décimales de π en utilisant la formule $\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ et $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, avec la fonction « arc tangente ».



Sur le dessin, on a $MN=2$, $NS=1$, $MP=3$ et $PQ=1$. L'angle $\widehat{NMQ}$ est voisin de 45° , soit $\frac{\pi}{4}$ en radians, et on a donc : $\widehat{NMP} + \widehat{PMQ} \approx \frac{\pi}{4}$. Or $\widehat{NMP}$ est l'angle de tangente égale à $\frac{1}{2}$ et $\widehat{PMQ}$ est

l'angle de tangente $\frac{1}{3}$, ce que l'on écrit :

$\frac{\pi}{4} \approx \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$, ce que vous pouvez calculer au moyen de votre calculatrice en mode radian.

On trouve facilement

$$\pi \approx 3,141592654.$$

C'est ce procédé amélioré que le mathématicien John

Machin utilisa en 1706 pour

déterminer les 100 premières décimales de π au moyen de la formule :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

et cela sans calculatrice !

Et en 1873, Schanks détermine 707 décimales, mais seules les 528 premières sont exactes.

Autres formules exactes mais pas très simples

• Formule de Viète (1540-1603)

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}} \dots$$

• Formule de Wallis (1616-1703)

$$\pi = 2 \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots \right)$$

• Formule de Leibniz (1646-1716)

$$\pi = 4 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right)$$

C'est Euclide qui dans le livre VI de ses *Éléments* parle déjà de «partager une droite en moyenne et extrême raison».

Cela signifie que le rapport grand segment/segment moyen est égal au rapport segment moyen/grand segment.

Ce rapport vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit environ 1,618. On le note ϕ .

Une fascination universelle

Léonard de Pise dit Fibonacci (*Liber Abacci*, 1202) introduisit des suites curieuses et des rapports conduisant à la «section dorée».

Fra Luca Paccioli, moine et professeur de mathématiques publia *De divina proportione*, en 1498, un ouvrage illustré par Léonard de Vinci. Le mathématicien cite les travaux d'Euclide sur le partage

d'un segment et les pentagones réguliers. Quant à Léonard de Vinci lui-même dans *Sectia Aurea*, il utilise la «section dorée» dans de nombreuses constructions géométriques utilisant des polygones réguliers. Au XIX^e siècle, Adolf Zeising, un professeur de philosophie, fut l'un des premiers à parler de l'utilisation de la «section d'or» dans les domaines

artistiques comme d'un critère qui «gouverne la beauté». Ce thème fut repris à Paris par une exposition «La section d'or». En 1927, Mathila Ghyka publia un ouvrage sur le nombre d'or, préfacé par Paul Valéry. Quant à l'architecte Le Corbusier, il fut inspiré par ce thème lorsqu'il conçut le Modulor et la «Cité radieuse» (1950).

Le rectangle d'or

Envisageons le carré $ABCD$.

I est le milieu du côté $[AB]$. Rabattre le point C sur (AB) en E au moyen du cercle de centre I et de rayon IC .

Construire le rectangle de côtés AD et AE .

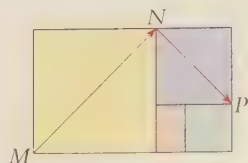
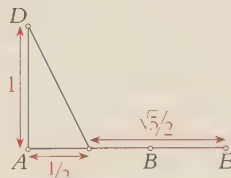
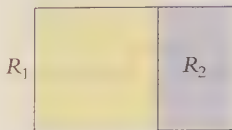
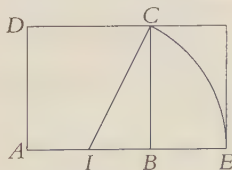
On démontre que $\frac{AE}{AD} = \phi$

(si $AD = 1$, alors $AE = \phi$)

Un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport

$$\frac{\text{grand côté}}{\text{petit côté}}$$

est égal au nombre d'or.



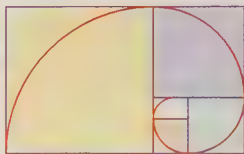
Les rectangles d'or emboîtés

On envisage un rectangle d'or R_1 . On découpe dans ce rectangle le plus grand carré possible; il reste alors un rectangle R_2 .

Démontrer que ce nouveau rectangle est aussi rectangle d'or.

Et ainsi de suite, par «découpage de carrés», on construit les rectangles R_3 , R_4 , ... qui sont tous des «rectangles d'or»!

Déterminer la similitude directe S qui transforme R_1 en R_2 , plus précisément (MN) en (NP), et montrer qu'elle transforme chaque rectangle R_n en R_{n+1} .



Préciser le rapport, le centre et l'angle.

En traçant un quart de cercle dans chaque carré «extrait» d'un rectangle d'or, comme indiqué sur le dessin, on obtient ainsi une spirale «illimitée».

Vers quel «point» du rectangle va-t-elle tendre? Quelle est la longueur de cette spirale illimitée?

Nombre d'or et trigonométrie

Voici un résultat capital, indispensable pour tous les problèmes qui touchent aux pentagones et décagones réguliers.

Démonstration

Posons $X = \cos \frac{\pi}{5}$ et $Y = \sin \frac{\pi}{5}$; on a $X^2 + Y^2 = 1$.

On sait que

$$2 \sin a \cos a = \sin 2a \text{ et que}$$

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \text{ qui permet}$$

$$\text{d'écrire : } 2XY - \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$\sin \frac{3\pi}{5} = \sin \left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \right) = 2X^2Y + (2X^2 - 1)Y,$$

d'où, en simplifiant:

$$4X^2 - 2X - 1 = 0 \text{ dont les}$$

$$\text{racines sont } \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

X en est la racine positive donc $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\phi}{2}$.

D'autre part

$$\cos \frac{2\pi}{5} = 2X^2 - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Pour étudier diverses questions concernant les pentagones réguliers les décagones réguliers, les triangles d'or, on retiendra que

$$\cos 36^\circ = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\phi}{2} \text{ et que}$$

$$\sin^2 36^\circ = 1 - \left(\frac{\phi}{2} \right)^2 = \frac{3-\phi}{4}.$$

On peut ainsi calculer $\sin 36^\circ$, $\cos 72^\circ$, $\sin 72^\circ$, etc., en fonction de ϕ .

Le triangle d'or

Un triangle d'or est un triangle isocèle d'angles 72° , 72° et 36° .

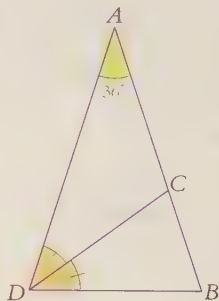
Dans tout triangle d'or on a

$$\frac{\text{grand côté}}{\text{petit côté}} = \phi.$$

Envisageons donc le triangle d'or ABD .

avec $\widehat{B} = \widehat{D} = 72^\circ$ et $\widehat{A} = 36^\circ$.

La bissectrice de l'angle $\widehat{D}$ coupe (AB) en C .



Puisque $CA = CD = DB$,

$$\text{on a } \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

$$\text{et } \frac{CA}{CB} = \frac{AB}{AC} = \phi, \text{ donc}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2 \cos 36^\circ, \text{ d'où } \dots$$

On peut montrer que BCD est un autre triangle d'or. Et on peut en obtenir d'autres!

Le géomètre, le physicien, le marchand et le commun des mortels ont besoin d'utiliser et de communiquer des «mesures de grandeurs», d'où la nécessité de disposer d'unités universelles et cohérentes. À partir de certaines unités de base pour les longueurs, les durées, les masses, on définit d'autres unités utiles. Nous allons nous intéresser ici à la définition du mètre, unité de base pour les longueurs.

La légende du mètre

La légende veut que les Chinois, vers 2700 av. J.-C., aient déjà défini une unité de longueur liée à la fréquence d'une note émise par une tige de bambou utilisée comme sifflet... Beaucoup plus tard, en Occident, Charlemagne tentera de faire adopter des unités valables dans tout son empire. Mais ce fut un échec et il en fut de même pour les tentatives d'autres souverains

après lui. La première «toise» qui valait environ 1,96 m, correspondait, dit-on, à la taille de Charlemagne, mais la toise n'était pas la même partout.

Si bien que, avant la Révolution de 1789, c'était l'incohérence totale, en particulier pour les unités de mesure de longueur. L'unité de base était le «pied du roi» (environ 0,3248 m), la toise valant 6 pieds à Paris, mais

7,5 pieds à Lyon... La perche de Paris valait 18 pieds alors que la perche des Eaux et Forêts valait 22 pieds. Et il y avait pour le moins trois sortes de lieues : celle de la poste (3,9 km environ), la lieue marine (5,56 km) et la lieue moyenne (5 km). En 1789, les savants étaient bien décidés à mettre un terme à cette situation qui rendait les échanges bien compliqués.

La création du système métrique

Un siècle plus tôt, un astronome nommé Picard (1669) avait mesuré un arc de méridien terrestre entre Paris et Amiens, afin d'améliorer la connaissance de notre planète. Lorsque l'on comprit que la Terre n'était pas tout à fait sphérique – un arc de 1° du méridien n'avait pas la même longueur à Paris qu'à Pérou – il fallut envisager des mesures plus précises : Clairaut, Maupertuis,

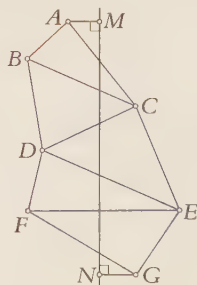
La Condamine, Bouguer effectuèrent diverses autres mesures en Laponie et au Pérou...

En 1789, les géomètres conseillèrent aux révolutionnaires de créer un système universel de mesures : le système métrique, «dédié à tous les temps et à tous les peuples». L'unité de base de longueur serait le mètre : il devait être rattaché de manière indiscutable à une mesure de grandeur

sur la Terre. Puisque «sous les pieds de tout habitant de notre planète passe un méridien», ils décidèrent que le mètre serait une fraction de ce méridien. Mais pour le définir de manière précise par rapport aux unités existantes, il fallait mesurer un arc de méridien, et sur une distance assez grande en raison du fait que la Terre n'est pas une sphère parfaite...

La mesure d'un arc du méridien terrestre

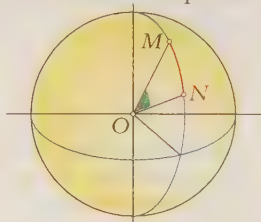
Une commission fut créée par l'Académie des sciences et Condorcet en fut un acteur très important. Les astronomes Delambre et Méchain furent chargés de la mesure (en toises) de l'arc de méridien entre Dunkerque et Barcelone. Cette aventure dura des années. Son principe : si l'on considère deux points M et N sur le méridien, on ne peut pas mesurer l'arc $\widehat{MN}$ d'un bout à l'autre. Et les mesures de longueur sont très souvent entachées d'erreurs sur le terrain alors que l'on peut mesurer avec une plus grande précision des angles entre deux directions.



L'idée était d'envisager une « chaîne de triangles » reliant ces deux points et de mesurer de proche en proche une longueur de base (AB), puis les divers angles dans les triangles de la chaîne.

Les problèmes posés par la triangulation

D'abord déterminer une mesure en degrés aussi précise que possible pour l'arc $\widehat{MN}$ entre les deux points.



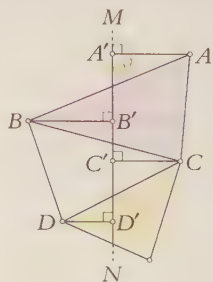
Cet arc $\widehat{MN}$ est égal à la différence des latitudes des deux points envisagés, ici Dunkerque et Barcelone. Cet arc $\widehat{MN}$ est égal à l'angle au centre $\widehat{MON}$ sur la sphère. Les astronomes de l'époque savaient bien effectuer ces mesures de latitude en utilisant la « hauteur du pôle » au-dessus de l'horizon à l'aide d'une lunette méridienne.

- **Déterminer la longueur AB , longueur de la base.** Elle fut mesurée sur le terrain entre deux points très précis bien repérables. Afin de vérifier les calculs, il fut décidé de choisir deux bases : une au départ, une à l'arrivée. Ces bases furent mesurées entre Lieusaint et Melun (12 km) et de Vernet à Salces, près de Perpignan (16 km).

- **La triangulation proprement dite** La « base » AB étant connue, la mesure des angles $\widehat{ACB}$

et $\widehat{BAC}$ permet de calculer très précisément les longueurs BC et AC dans le triangle ABC . Puis, de proche en proche, la connaissance de BC et des angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{DBC}$ permet de déterminer les longueurs CD et DB dans le triangle BCD , etc. Les mesures des longueurs étaient effectuées en toises.

• Les calculs définitifs

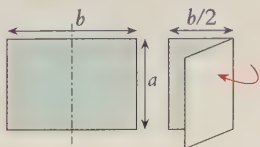


Pour déterminer la longueur de MN , on projette les segments $[AC]$, $[CD]$, $[DE]$ sur (MN) : la détermination des angles de la direction de (MN) – le méridien – avec chacune des directions (AC), (CD), (DE) permet de calculer les longueurs projetées $A'C'$, $C'D'$, etc. Ce travail commencé en 1792 se termina en 1795. Pendant ce temps, l'Académie des sciences se préoccupait de définir d'autres unités pour le temps, la masse...

En imprimerie, les formats de papier sont normalisés : on parle de «format 21 × 29,7» ou de «format A4», ou «A3», etc. Par exemple, on utilise couramment des feuilles 21 × 29,7... Au fait, d'où vient ce 21 × 29,7?

Un rectangle coupé en deux

Examinons un rectangle de côtés a et b avec $a < b$ et $a > \frac{b}{2}$



On le plie suivant la médiatrice des grands côtés : on obtient deux rectangles superposables équivalents, de même aire, de dimensions $\frac{b}{2}$ et a avec, cette fois, a comme grand côté. Comment choisir le rectangle de départ afin que le

rapport $\frac{\text{grand côté}}{\text{petit côté}}$ soit conservé après pliage, c'est-à-dire soit le même pour les deux rectangles ?

C'est une question algébrique relativement simple :

$$\text{il faut que } \frac{b}{a} = a \div \frac{b}{2}$$

$$\text{c'est-à-dire } b^2 = 2a^2$$

$$\text{On trouve : } \frac{\text{grand côté}}{\text{petit côté}} = \frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

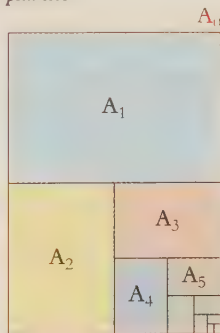
Ainsi, pour un rectangle (a ; $a\sqrt{2}$), s'il est coupé en deux comme il est indiqué ci-dessus, le rapport $\sqrt{2}$ des côtés reste le même après découpage, et c'est encore vrai après deux, trois, quatre... découpages.

Le rectangle d'aire d'un mètre carré

Considérons un tel rectangle d'aire 1 m², soit 10 000 cm². Quelles sont ses dimensions ? On a donc : $a \times a\sqrt{2} = 1$ (en m²) ou encore $a^2\sqrt{2} = 10\,000$ cm² soit $a = \frac{10\,000}{\sqrt{2}}$ en centimètres soit $a \approx 84,1$ cm environ. Quant au grand côté, on obtient 118,9 cm environ.

Et divisons encore par deux...

Partant de ce format A₀, on peut alors diviser chaque rectangle en deux parties égales suivant la médiatrice des grands côtés : chaque nouveau rectangle obtenu respecte le rapport $\frac{\text{grand côté}}{\text{petit côté}} = \sqrt{2}$



Partant de :
A₀ : première découpe
→ format A₁
A₁ : seconde découpe
→ format A₂
A₂ : troisième découpe
→ format A₃
A₃ : quatrième découpe
→ format A₄
A₄ : cinquième découpe
→ format A₅
et ainsi de suite jusqu'à A₁₀.

Une norme internationale

Le rectangle de côtés 1189 mm et 841 mm, d'aire 1 m², représente ce que l'on nomme «format A0» en imprimerie : c'est une dénomination internationale normalisée.

À vos calculatrices

Calculons en millimètres les côtés successifs : à chaque découpe, le petit côté A_n devient le grand côté de A_{n+1} , et le petit côté de A_{n+1} est égal à la moitié du grand côté de A_n . Dans ce tableau, toutes les mesures sont approchées.

Ce qui est remarquable, c'est que les longueurs des grands côtés sont les termes d'une

suite géométrique G_n de

Format	Grand côté (en mm)	Petit côté (en mm)	Aire (en mm ²)
A_0	1189	841	1 000 000
A_1	841	594	500 000
A_2	594	420	250 000
A_3	420	297	125 000
A_4	297	210	62 500
A_5	210	148	
A_6	148	105	
etc.			

premier terme $G_0 = 1189$ (en mm) et de raison $1/\sqrt{2}$, et que les longueurs des petits côtés sont les termes d'une suite géométrique P_n de premier terme $P_0 = 841$ (en mm) et de même raison. Quant aux aires, ce sont les termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Ces trois suites géométriques sont d'ailleurs convergentes de limite 0.

Des rectangles emboîtés

Reprenons le rectangle de départ R_1 ; soit I le milieu de $[AB]$. Découpons ce rectangle initial ($1; \sqrt{2}$) en deux rectangles et traçons la diagonale (DI). Puis découpons R_2 en deux rectangles et traçons la diagonale (IJ), etc. Puis de découpages en découpages, avec les rectangles successifs R_1, R_2, R_3, R_4 on tracera les diagonales comme il est indiqué. Calculons les longueurs de ces diagonales.

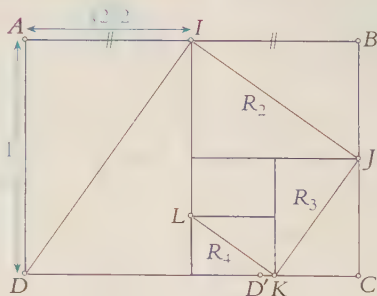
$$DI^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ d'où}$$

$$DI = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ et } IJ^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{d'où } IJ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ on a } IJ = \frac{\sqrt{2}}{2} DI.$$

On montre sans peine que les longueurs de ces diagonales sont les termes d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On démontre que (DI)



est perpendiculaire à (IJ) : les diagonales sont perpendiculaires deux à deux et d'autre part $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{ID}$; $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IJ}$, etc. : elles sont

deux à deux parallèles. Elles constituent une ligne polygonale, une sorte d'escargot dont le nombre des côtés est illimité.

Reprenons leurs longueurs $d_1; d_2; d_3; \dots d_n$ des diagonales. Posons $L_n = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n$. C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison inférieure à 1.

On sait que cette somme est

convergente et sa limite

$$\text{est } \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\frac{2}{2 - \sqrt{2}} \right] \text{ soit}$$

$$\text{Lim}(L_n) = \frac{\sqrt{6}(2 + \sqrt{2})}{2} \text{ qui vaut environ } 4,181 \dots$$

En utilisant les complexes, dans le repère $(D, \overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{DA})$ on montre que (DI) a pour image (IJ) dans la similitude directe associée à la fonction

$$z \mapsto z' = -i \frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{\sqrt{2} + 2i}{2}.$$

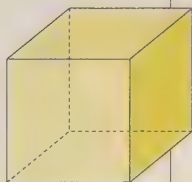
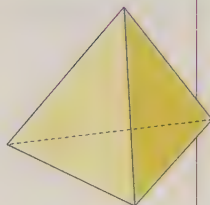
Son centre est le point

$$W \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}; \frac{1}{3} \right) \text{ et la ligne}$$

« polygonale » des diagonales « converge » vers ce point.

La légende raconte que, 800 ans av. J.-C., les Étrusques jouaient déjà aux dés avec des dodécaèdres réguliers. Les pythagoriciens, 450 ans avant notre ère, connaissaient le cube et le tétraèdre régulier. C'est vers 400 av. J.-C. que Platon et ses disciples parlent de cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre, l'icosaèdre.

Dans la philosophie platonicienne, chacun d'eux était associé symboliquement au Feu, à la Terre, à l'Air, l'Eau et l'Univers... Plus tard, Kepler utilise ces polyèdres remarquables et les sphères associées pour donner une représentation des planètes connues et de leurs orbites.



Qu'est-ce qu'un polyèdre ?

C'est tout simplement un solide délimité par des polygones plans (*poly*, plusieurs et *hedra*, face). Il est **convexe** si une droite quelconque ne peut pas le couper en plus de deux points. Il est **régulier** si toutes les faces sont des polygones réguliers convexes isométriques. Tout polyèdre régulier convexe est inscriptible dans une sphère, la sphère circonscrite, et il existe une sphère inscrite, tangente à toutes les faces. Si l'on désigne par S le nombre des sommets, par F le nombre des faces et par A le nombre des arêtes, on a la relation : $S + F = A + 2$ dite relation d'Euler (1752) sans doute déjà connue d'Archimède et certainement de Descartes. Elle s'applique à tous les

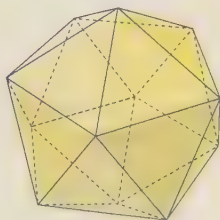
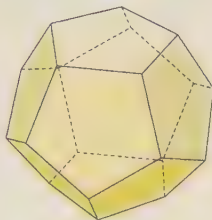
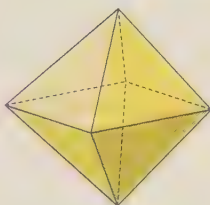
polyèdres convexes et elle a été généralisée par Henri Poincaré pour d'autres polyèdres.

Pour un polyèdre régulier convexe, à chaque sommet se rencontrent p arêtes, chaque face comporte q côtés donc $F \times q = S \times p$: comme chaque arête est comptée deux fois on a $A = \frac{Fq}{2} = \frac{Sp}{2}$ et en reportant

dans $S + F = A + 2$ on a, après simplification la relation

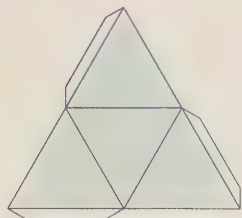
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \text{ donc } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

Comme on doit avoir $p \geq 3$ et $q \geq 3$, on peut sans peine vérifier qu'il y a seulement cinq couples d'entiers positifs (p, q) qui conviennent : $(3; 3)$, $(3; 4)$, $(4; 3)$, $(3; 5)$ et $(5; 3)$ et l'on retrouve nos cinq polyèdres réguliers convexes...



Le tétraèdre régulier

Il a quatre faces qui sont des triangles équilatéraux. Il est très facile d'en fabriquer un « patron » en partageant un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux isométriques.



Si a désigne la longueur d'une arête, S l'aire totale du

tétraèdre, V son volume et R le rayon de la sphère circonscrite, on a les formules :

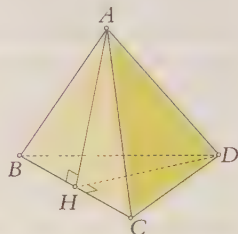
$$S = a^2 \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$$

$$a = 2R \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Si l'on désigne par $mnpq$ les centres de gravités des quatre faces, on démontre sans peine que $mnpq$ est un autre tétraèdre régulier que l'on appelle le « dual » ou le « conjugué » du précédent. Pour déterminer exactement l'angle de la face (ABC) avec la face (DBC) par exemple, c'est-à-dire l'angle

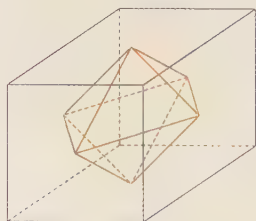
des deux plans, on trace la hauteur (AH) de ABC et la hauteur (DH) de DBC : l'angle cherché est AHD .



Dans le triangle isocèle AHD , on calcule aisément le cosinus de cet angle : $\cos \widehat{AHD} = \frac{1}{3}$, d'où un angle de $70,53^\circ$ environ.

Le cube et l'octaèdre régulier

Le cube est un polyèdre régulier bien connu dont les élèves de CM2 fabriquent des patrons sans difficulté.



Avec les mêmes notations que pour le tétraèdre on a les formules :

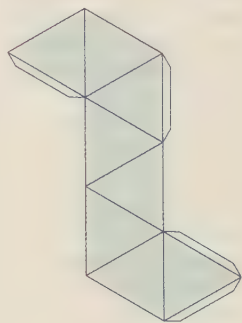
$$S = 6 a^2 \quad V = a^3 \quad a = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Si l'on marque les centres des six faces du cube, ces

six points sont les sommets d'un octaèdre régulier convexe : il comporte 8 faces qui sont des triangles équilatéraux. Remarquons que le nombre des sommets de l'octaèdre est égal au nombre des faces du cube et que le nombre des sommets du cube est égal au nombre des faces de l'octaèdre.

Cube et octaèdre sont des polyèdres *duaux* ou *conjugués*. Le patron de l'octaèdre s'obtient avec huit triangles équilatéraux isométriques correctement assemblés. Les centres de ses faces sont

les sommets d'un cube : c'est encore la dualité.



Pour l'octaèdre, on a les formules suivantes :

$$S = 2a^2 \sqrt{3} \quad V = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$$

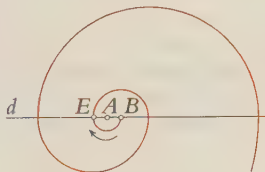
$$a = R\sqrt{2}$$

Les formes de spirales se rencontrent souvent si l'on regarde un peu autour de nous : une coquille d'escargot, le nautilus, le cœur d'une marguerite, le tire-bouchon, même nos galaxies ont une forme de spirale invisible à l'œil nu... comme si cette courbe était liée intimement aux phénomènes de la nature. En fait, ce que l'on nomme spirale recouvre toute une catégorie de courbes très différentes les unes des autres du point de vue géométrique. C'est ce que nous allons voir ici.



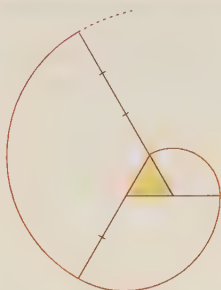
Des spirales tracées au compas

On les rencontre essentiellement dans des motifs décoratifs. Les spirales à deux centres sont les spirales les plus simples à tracer. On marque deux points A et B sur la droite d .



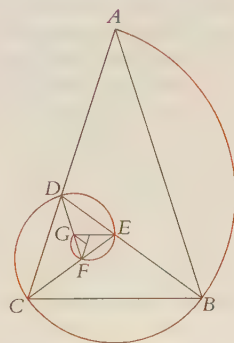
On trace un premier demi-cercle de centre A passant par B , puis un demi-cercle de centre B qui se raccorde au premier en E , tracé dans le demi-plan de frontière d qui ne contient pas le premier demi-cercle, puis un demi-cercle de centre E dans l'autre demi-plan, etc. Les longueurs de ces demi-cercles sont les termes d'une suite géométrique.

Des spirales associées au nombre d'or



Nous avons déjà rencontré une spirale tracée dans un rectangle d'or (page 452).

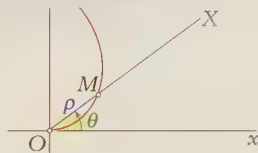
On peut aussi envisager une spirale tracée à partir d'un triangle d'or ABC : c'est un triangle isocèle ayant un angle de 36° et deux de 72° . Dans ce triangle, on peut tracer de proche en proche d'autres triangles d'or BCD , DCE , DEF , GFE , etc., au moyen des bissectrices des angles tels que CBA , CDB ... On trace ensuite un premier arc AB de centre D , puis un second BC de centre E , puis CD de centre F , etc.



Ces arcs, tous de mesure 108° , se raccordent en B , C , D avec la même tangente en chacun de ces points. Cette spirale est une courbe théoriquement illimitée dont on peut sans trop de peine calculer la « longueur ». Toutes ces spirales sont formées de la succession d'arcs de cercles. Il n'est pas question d'en donner une équation. Et on ne les rencontre pas dans la nature, tout au plus dans certains motifs décoratifs.

La spirale d'Archimède

Imaginons une demi-droite $[OX]$ qui tourne autour de son origine O d'un mouvement uniforme et, en même temps, le point M , parti de O , se déplace sur la demi-droite d'un mouvement uniforme.



C'est ce qui se passe lorsqu'un escargot se déplace à vitesse constante sur la grande aiguille d'une horloge qui tourne elle-même à vitesse angulaire constante. La bande magnétique sur une

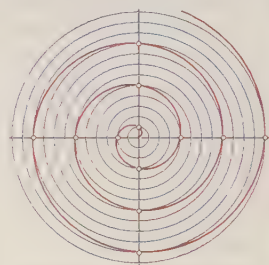
cassette vidéo, le sillon d'un disque sont des spirales d'Archimède. Cette courbe fut étudiée pour la première fois par Archimède (287-212 av. J.-C.). On peut en donner une équation en coordonnées polaires.

Un point M du plan muni d'un repère orthonormé est repéré par $\rho = \overline{OM}$ et par l'angle polaire $(OX, \overline{OM}) = \theta$ (module et argument du complexe $[Z_M]$).

L'équation polaire de la spirale d'Archimède est alors $\rho = k\theta$.

Pour dessiner grossièrement une telle courbe, on peut tracer des cercles concen-

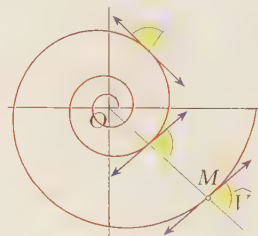
triques dont les rayons sont en progression arithmétique.



En partant du centre O , lorsque l'angle augmente par exemple de 90° , on saute d'un cercle au suivant : il suffit alors de marquer ces points consécutifs et de les joindre par une ligne continue.

La spirale logarithmique

Cette spirale était aussi connue sous le nom de *spira mirabilis*.



Ce nom lui a été donné par Jacques Bernoulli (1654-1705) qui l'étudia et étudia ses propriétés remarquables.

Si l'angle $(\overline{Ox}, \overline{OM})$ croît régulièrement de manière linéaire, le rayon vecteur $\overline{OM}$ croît de manière exponentielle.

Quelle que soit la demi-droite passant par l'origine O , elle coupe la spirale en un point M et l'angle $\hat{V}$ de $(\overline{OM})$ avec la tangente en M à la courbe est constant.

Si on envisage un arc de la spirale, par réduction ou agrandissement de cet arc, on obtient un arc qui coïncide avec un autre arc de la même courbe.

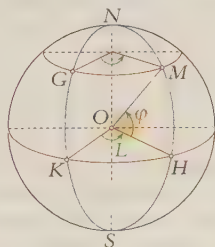
Cette propriété de croissance exponentielle du rayon vecteur correspond selon les spécialistes à la croissance exponentielle rencontrée dans de nombreux phénomènes naturels : la coquille d'escargot, le nautilus...

Pour construire grossièrement une telle spirale, on peut tracer des cercles concentriques dont les rayons croissent en progression géométrique. En partant du centre, lorsque l'angle au centre croît, on saute d'un cercle sur le suivant.

La surface de la Terre est approximativement une sphère et chacun sait qu'il n'est pas possible de représenter une surface courbe par une surface plane sans déformation : toutes les cartes planes sont donc fausses. La cartographie essaie de mettre au point des systèmes de projection de la surface sphérique de la Terre sur une surface plane en essayant de conserver certaines grandeurs, en sachant bien que d'autres ne le seront pas.

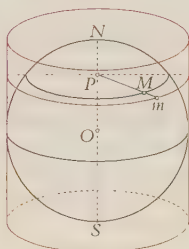
La projection cylindrique « normale »

Rappelons qu'un point de notre planète est repéré par sa *longitude* et sa *latitude*. Après avoir fait choix d'un méridien origine – le méridien G



de Greenwich – la longitude L de M est l'angle $\widehat{KOH}$ entre le méridien origine et celui de M (compté vers l'est ou l'ouest). La latitude de M est l'angle noté φ égal à $\widehat{HOM}$ (compté vers le nord ou le sud). Tous les points d'un même méridien ont la même longitude et tous les points d'un même parallèle ont la même latitude.

On imagine un cylindre de révolution tangent à la Terre le long de l'équateur. Pour obtenir la projection cylindrique du point M , on trace la perpendiculaire par M à



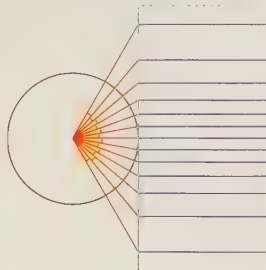
l'axe des pôles (NS) dans le plan méridien de M : cette perpendiculaire coupe le cylindre en m . Ce point m est l'image de M par cette « projection cylindrique ». Les méridiens deviennent des segments parallèles à l'axe (NS) du cylindre ; les parallèles deviennent des cercles d'axes (NS). Après quoi, on « coupe » le cylindre selon une génératrice, on déroule et on obtient une « carte » plane.



Les méridiens équidistants sont des segments portés par des droites équidistantes mais les parallèles, équidistants sur la Terre, ne sont pas équidistants sur la carte, ce qui signifie que cette carte ne permet pas de lire des distances entre deux points de latitudes différentes : la carte ne conserve pas les longueurs ! Soit M un point de coordonnées (L, φ) (l'axe xx' est l'équateur, yy' le méridien de Greenwich) et on a : $x = RL$ (L en radians) et $y = R \sin \varphi$. Pour deux points de latitudes φ et φ' différentes de 15° par exemple, la distance sur la carte sera de $R[\sin(\varphi + 15^\circ) - \sin \varphi]$. Elle dépend de la latitude et ce n'est pas satisfaisant pour le navigateur qui utilise cette carte ! On montre aussi que l'angle de deux directions sur la Terre n'est pas conservé sur la carte : on dit que cette représentation n'est pas conforme.

La projection de Mercator

C'est vers 1569 que le Flamand Mercator établit une carte afin de pallier les inconvénients de la projection cylindrique normale.



Le chemin le plus court pour aller d'un point A à un point B sur la Terre est celui qui suit le **grand cercle** de la sphère passant par ces deux points : c'est ce que l'on appelle la **loxodromie**.

La carte imaginée par Mercator représente ces loxodromies par des segments de droite : les chemins suivis par les navigateurs sont représentés par des segments sur une carte de Mercator, ce qui est bien pratique.

Cette carte, encore utilisée de nos jours, est obtenue en « étirant » vers le haut une projection cylindrique normale, depuis l'équateur jusqu'au pôle, de telle sorte que les loxodromies soient des droites.

Elle fut inventée par Mercator et construite point par point pour répondre aux besoins des navigateurs de l'époque et ce ne fut que bien plus tard que fut trouvée la formulation mathématique.

Sur la projection cylindrique normale, les coordonnées d'un point sont : $x = RL$ et $y = R \sin \varphi$ (φ en radians).

Sur la projection de Mercator, on garde x mais on remplace l'ordonnée par :

$$y = R \ln \tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{ dans}$$

laquelle intervient précisément la latitude du point M . Et cette fonction, primitive

de $\frac{1}{\cos \varphi}$, n'a été découverte par Gregory qu'au XVIII^e siècle.

La projection de Mercator, utile pour tous les problèmes de navigation, a toutefois des inconvénients, en particulier le pôle est « rejeté à l'infini » et l'échelle d'une carte dépend de la latitude en M .

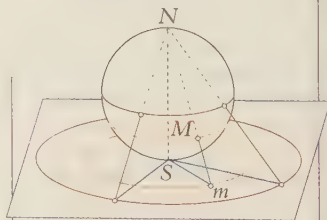
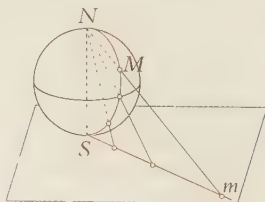
La projection stéréographique

On projette les points depuis le pôle Nord sur le plan tangent à la sphère au pôle Sud. Si M est un point de la sphère terrestre, la droite (NM) coupe en m ce plan tangent : c'est le projeté stéréographique de M .

Un méridien se représente comme une demi-droite passant par le pôle Sud et les parallèles deviennent des cercles concentriques de

centre le pôle Sud.

Cette représentation est conforme, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles de deux directions.



Une loxodromie est alors représentée par une spirale logarithmique. Il existe bien d'autres techniques de projection : projection conique, projection de Lambert...

Bien qu'elle traite de problèmes vieux comme le monde, parfois très simples à énoncer, la théorie des graphes, entrée au programme des lycées en 2001, ne s'est développée qu'au XX^e siècle. Sa représentation très imagée cache de très difficiles questions dont la plupart sont aujourd'hui non résolues.

Le problème d'Euler

Le premier mathématicien qui semble s'être posé un problème de théorie des graphes comme un problème de mathématiques est certainement Euler. Il le

pose en 1736 dans les *Commentaires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg* : « Les habitants de Königsberg peuvent-ils se promener en parcourant

les sept ponts de leur ville sans repasser deux fois par le même ? » La réponse est « non », comme nous allons le voir un peu plus mathématiquement...

Vocabulaire

Un **graphe** est constitué de deux ensembles : un ensemble d'éléments appelés **sommets**, souvent représentés par des points ; un ensemble de paires de sommets, appelées **arêtes**, souvent représentées par des traits. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes qui contiennent (ou qui sont adjacentes à) ce sommet. Deux sommets sont **adjacents** s'ils appartiennent à une même arête. Deux arêtes sont **adjacentes** si elles contiennent un même sommet. Un **chemin** est une suite d'arêtes adjacentes. Un chemin a soit deux extrémités, soit zéro extrémité (il

s'appelle alors un **cycle**). Un graphe est **eulérien** s'il existe un chemin contenant toutes les arêtes.

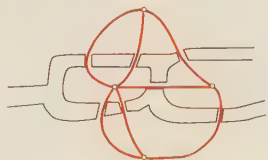
Exemple



Théorème : un graphe est eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Ce théorème montre que le graphe des ponts de Königsberg n'est pas eulé-

rien. Il est assez facile à démontrer lorsqu'on comprend que, s'il y a deux sommets impairs, le chemin eulérien part de l'un



Le graphe des ponts de Königsberg.

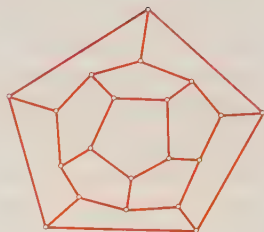
d'entre eux pour aboutir à l'autre. Un problème apparemment analogue au problème d'Euler, pourtant beaucoup plus difficile, a été posé par Hamilton en 1859 au sujet d'un jeu : le jeu d'Icosie.

Un problème d'Hamilton

Est-il possible de trouver un circuit qui passe par toutes les villes sans emprunter deux fois la même liaison ?

Le jeu de Hamilton se généralise sur un graphe quelconque. Un graphe est **hamiltonien** s'il existe un circuit contenant tous les

sommets sans contenir deux fois la même arête. On ne connaît pas aujourd'hui de condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit hamiltonien. La carte ci-contre représente 20 villes autour du monde et leurs liaisons (aujourd'hui aériennes).



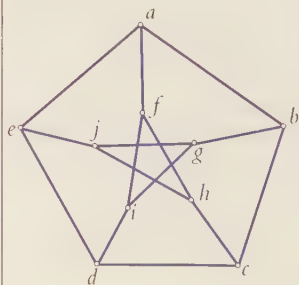
Le jeu d'Icosie

Graphes, schémas et matrices

Pour mieux comprendre ou pour traiter les problèmes de graphes dans un ordinateur, on associe naturellement un graphe, ayant n sommets, à une matrice carrée $n \times n$: chaque ligne i et chaque colonne j de la matrice est associée à un sommet et l'élément $i-j$ vaut 1 si l'arête (i, j) fait partie du graphe.

Exemple

Voici, par exemple, un graphe (dit graphe de Petersen) :



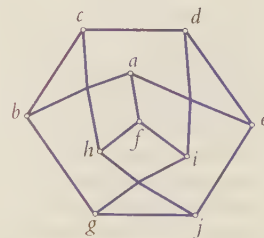
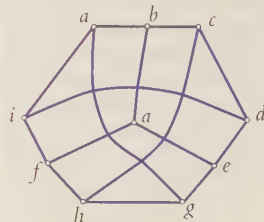
et sa matrice :

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a										
b										
c										
d										
e										
f										
g										
h										
i										
j										

Notez que la matrice est symétrique. Accepter des matrices non symétriques, c'est travailler sur des graphes **orientés** (dont les arêtes ont donc des « flèches »).

Les représentations dessinées d'un même graphe peuvent être différentes ; mais le fait que les matrices sont les mêmes montre qu'il s'agit du même graphe. (Inversement, un même dessin peut repré-

senter des matrices différentes, à des permutations de sommets près). Ainsi, les deux dessins ci-dessous représentent le même graphe de Petersen :



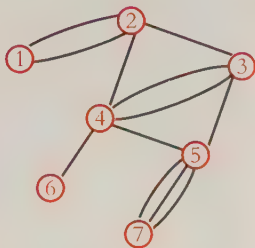
Multigraphes

Une généralisation de la théorie suppose que plusieurs arêtes peuvent joindre deux mêmes sommets.

Exemple

Considérons par exemple plusieurs personnes qui ont pu se serrer la main (une ou plusieurs fois dans une journée).

Associions un graphe à cette situation : chaque sommet représente une personne et chaque arête,



une poignée de mains. On peut alors démontrer un curieux résultat...

Comptons les arêtes de ce graphe :

n_1 arêtes adjacentes

au sommet 1

n_2 arêtes adjacentes

au sommet 2 etc.

On a donc, chaque arête étant comptée deux fois :

$$n_1 + n_2 + \dots = 2A$$

Certains n sont pairs,

d'autres impairs ; si leur

somme est paire, c'est que

le nombre d'impairs est

pair. On peut donc énon-

cer le théorème : **le**

nombre de sommets de

degré impair est pair.

Donc le nombre de per-

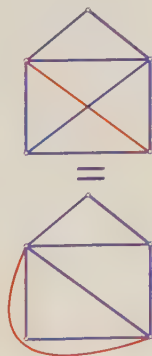
sonnes ayant échangé un

nombre impair de prises de

main est pair.

Graphes planaires

Certains graphes dont les arêtes se croisent sur un dessin peuvent se redessiner sans qu'elles se croisent :



On appelle **planaires** les graphes qui peuvent se dessiner sur le plan sans qu'aucune arête ne se croise. Par exemple, le graphe de

Petersen n'est pas planaire.

En effet, on a le théorème

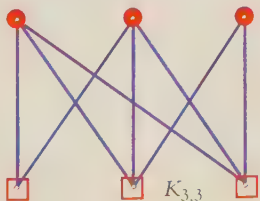
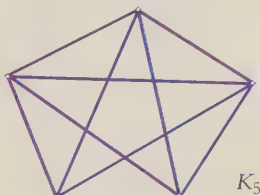
dit de Kuratowski : un

graphe est planaire si et

seulement si il ne

« contient » ni le graphe K_5

ni le graphe $K_{3,3}$.



(Le fait que $K_{3,3}$ ne soit pas

planaire signifie qu'on ne

peut relier trois maisons à

trois puits sans que les che-

mins d'une maison à un

puits ne se croisent.)

Pour faire comprendre le

sens du mot « contient »

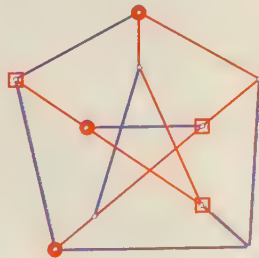
dans l'énoncé de

Kuratowski, nous avons

dessiné en rouge le graphe

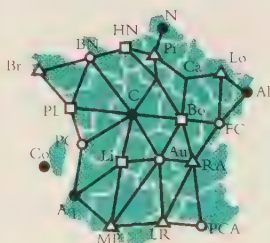
$K_{3,3}$ « contenu » dans celui

de Petersen :



Coloration des cartes de géographie

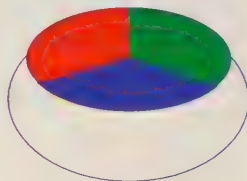
À toute carte de géographie, on peut associer un graphe planaire de la manière suivante, proposée ici sur les régions de France :



À chaque région est associé un sommet du graphe et une arête joint deux sommets-régions ayant une frontière commune.

Si on veut que deux régions ayant une frontière commune soit coloriée de manière différente, on peut se demander combien de couleurs seront nécessaires !

- Ce problème général fut posé en 1852 par Hamilton et De Morgan. On s'aperçoit vite que certaines cartes nécessitent quatre couleurs. Voici, par exemple, la figure suivante :



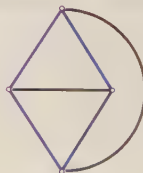
La démonstration de ce résultat fut proposée en 1879 par Alfred Kempe, mais elle était fausse. À ce jour, on en connaît une autre, certainement juste mais dont une partie nécessite un ordinateur : elle a été mise en évidence par Kenneth Appel et Wolfgang Haken en 1976 (théorème des quatre couleurs).

- Exprimée en termes de graphe, le théorème est le suivant : le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier ses sommets, de façon que deux sommets adjacents soient coloriés de deux couleurs différentes. Alors, le nombre chromatique d'un graphe planaire vaut 4 au plus.

La relation d'Euler

Dans un graphe planaire, il est possible de définir des **faces**. Et il est d'ailleurs assez remarquable que ces faces soient indépendantes du dessin représentant le graphe.

- Voici, par exemple, trois représentations du même graphe :



Ce graphe a 4 faces (sans oublier la face dite « extérieure » qu'il faut compter dans tous les graphes planaires). Tout graphe planaire vérifie la **relation d'Euler** :

$$s + f = a + 2$$

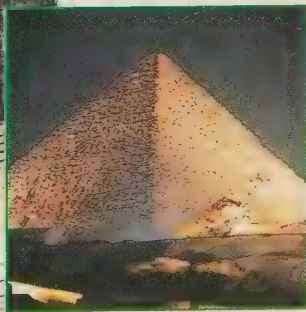
où s est le nombre de sommets, f le nombre de faces, a le nombre d'arêtes.



DICO

Pour retrouver une
définition, une notion

*De A à Z,
l'explication
des mots difficiles
et des notions
importantes.*



abscisse

Mot issu du latin abscissa,

«*ligne coupée*».

● Traditionnellement, on appelle abscisse d'un point du plan ou de l'espace muni d'une base la première coordonnée de ce point.

● Sur un axe muni d'un repère $(O, \vec{i})$, c'est la coordonnée x d'un point M tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.

→ pages : 21, 76, 118, 236.

absolue (valeur)

● La valeur absolue d'un réel est ce nombre s'il est positif, son opposé s'il est négatif :

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0$$

$$|x| = -x \text{ si } x \leq 0.$$

● La valeur absolue d'une somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ses termes :

$|x| + |y| \geq |x + y|$. Cette inégalité s'appelle l'«*inégalité triangulaire*».

→ pages : 147, 236, 248.

absurde

(démonstration par l')

● Démontrer par l'absurde une proposition A consiste à supposer que son contraire, non- A , est vraie et à réussir à en déduire logiquement une proposition B que l'on sait fausse. Cela prouve que la supposition était fausse et donc que A est vraie.

● Par exemple, pour démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre irra-

tionnel, on suppose le contraire : si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, alors on peut l'exprimer par le quotient $\frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers et la fraction $\frac{p}{q}$ étant irréductible.

D'où $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ ce qui peut

s'écrire $\frac{p^2}{q^2} = 2$ d'où $p^2 = 2q^2$, ce qui implique que p est un nombre pair ; p s'écrit donc $2m$, d'où on déduit que q est aussi pair.

Or cette conclusion est en contradiction avec l'hypothèse. $\sqrt{2}$ n'est donc pas un nombre rationnel, mais un irrationnel.

● Cette démonstration dite «*par le pair et l'impair*» figurait déjà dans les *Éléments* d'Euclide (300 av. J.-C.).

addition

*Mot issu du latin additio, de addere, «*ajouter*».*

● L'addition est la première des opérations définies dans l'ensemble des réels. Elle est associative, commutative et admet 0 pour élément neutre.

● Tout réel x a un opposé $-x$.

→ pages : 15, 104, 340.

adjacent

*Mot issu du latin adjacens, «*auprès*».*

● En géométrie, des angles adjacents ont même sommet, un côté com-

mun et sont situés de part et d'autre de ce côté.



● Deux segments sont adjacents lorsqu'ils ont une extrémité commune et sont situés de part et d'autre de cette extrémité.

→ pages : 31, 35.

affine (espace)

- L'espace affine modélise l'espace ordinaire de la géométrie.
- C'est un ensemble de points dans lequel aucun point particulier n'est choisi comme origine.

affine (fonction)

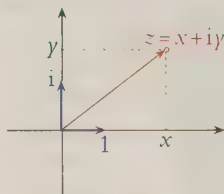
- Une fonction affine définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme générale $f(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- La représentation graphique d'une fonction affine sur un plan muni d'un repère est une droite passant par le point de coordonnées $(0; b)$ et de coefficient directeur a .

→ pages : 22, 23, 274.

affixe

Mot issu du latin *affixus*, « attaché ».

- On appelle affixe d'un point du

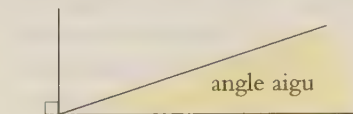


plan de coordonnées (x, y) le nombre complexe $z = x + iy$.

→ page : 394.

aigu (angle)

Mot issu du latin *acutus*, « pointu ».



- On appelle angle aigu un angle plus petit que l'angle droit.

→ page : 31.

aire

Mot issu du latin *area*, « surface unie ».

- En géométrie, une aire est la mesure d'une surface.

→ pages : 14, 33, 269, 330.

aléatoire

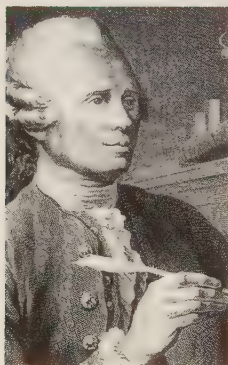
Mot issu du latin *alea*, « coup de dé ».

- Se dit de ce qui relève du hasard.

→ page : 388.

Alembert (Jean le Rond d')

Philosophe et mathématicien français (1717-1783).



● Jean le Rond d'Alembert, élu à l'âge de vingt-trois ans à l'Académie des sciences, est l'un des grands esprits du siècle des Lumières. Il se consacre tout d'abord à la

physique (*Traité de dynamique*, 1743) avant de se tourner vers les mathématiques. Esprit ouvert sur le monde, il est avec Denis Diderot le fondateur de l'*Encyclopédie*, et rédige en 1751 un *Discours préliminaire* qui expose les principes de la philosophie des encyclopédistes. Il en rédige également de nombreux articles mathématiques.

→ pages : 83, 111, 162, 402.

algèbre

Mot issu de l'arabe *al-jabr*, qui veut dire «réduction».

● L'algèbre élémentaire est consacrée à l'étude des nombres et des relations entre nombres grâce à des manipulations sur des lettres qui les remplacent. Plus généralement, l'algèbre (dite «moderne») étudie les structures créées par les opérations dans les ensembles de nombres.

→ pages : 20, 26, 77, 84, 267.

algorithme

Mot issu du nom du mathématicien arabe *Al-Kwarismi*.

● Un algorithme est un ensemble de règles opératoires générales permettant en un nombre fini d'étapes d'arriver avec certitude à un résultat escompté.

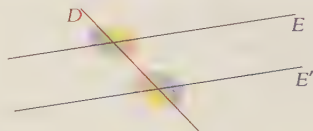
→ pages : 75, 88, 99, 143.

alignement

● Caractère d'un ensemble de points appartenant à une même droite.

→ page : 344.

alternes-internes/-externes



● Étant donné deux droites E et E' et une droite sécante D , les paires d'angles situés de part et d'autre de D sont dits alternes, ceux qui, en plus, sont situés entre E et E' sont dits internes et ceux qui sont situés de part et d'autre sont dits externes.

→ page : 31.

analyse

Mot issu du grec *analysis*, «décomposition».

● Branche des mathématiques s'intéressant aux notions de limite, de continuité, de dérivée, d'intégrale, etc.

→ pages : 37, 59, 74, 142-190.

analytique

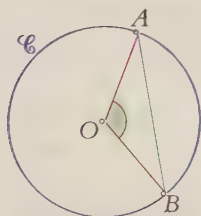
● La géométrie analytique s'intéresse aux propriétés géométriques des objets définis par leurs coordonnées dans un repère.

→ pages : 340-355.

angle

● Un «angle», en mathématiques, désigne des objets très différents : angle géométrique, angle de demi-droites, angle de droites, angle au centre.

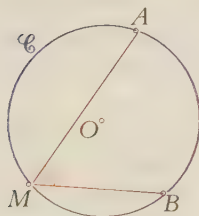
angle au centre



● Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et deux points A et B de $\mathcal{C}$. L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre interceptant la corde $[AB]$ d'extrémités A et B .

→ pages : 29, 31, 38.

angle inscrit

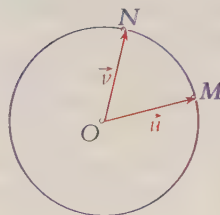


● Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et deux points A et B de $\mathcal{C}$. Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B . L'angle $\widehat{AMB}$ est un

angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

→ pages : 31, 38.

angle orienté



● Étant donné deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un cercle trigonométrique de centre O ,

il existe deux

points M et N sur le cercle tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$. L'angle $\widehat{MON}$ peut être orienté de deux façons. L'angle orienté noté $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'opposé de l'angle orienté noté $(\vec{v}, \vec{u})$.

→ pages : 200, 204, 208.

antécédent

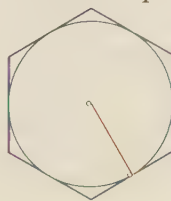
Mot issu du latin antecedenus, du radical cedere, «céder», signifie antérieur.

● Un antécédent d'un élément y d'un ensemble B pour une application d'un ensemble A vers un ensemble B est un élément x de A ayant y pour image.

→ page : 270.

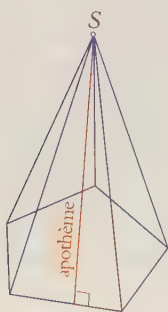
apothème

Mot issu du grec apothesis, «action de déposer».



● Le terme d'apothème désigne un segment de droite dont une extrémité est le centre

d'un polygone régulier et l'autre un point de contact de ce dernier avec son cercle inscrit.



● Ce terme désigne également le segment de droite ayant pour extrémités le sommet S d'une pyramide régulière et le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur un côté du polygone de base.

Il peut aussi désigner la longueur de ces deux segments.

appartenance (symbole d')

● Le symbole d'appartenance $\in$ est un symbole qui relie l'écriture d'un élément d'un ensemble et celle de cet ensemble.

application

● Une application f d'un ensemble E vers un ensemble F est une relation qui, à chaque élément de E , fait correspondre un unique élément de F .

approximation

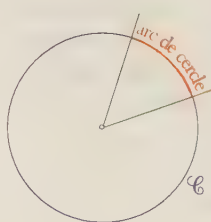
Mot issu du latin proximus, « très proche ».

● Une approximation est une évaluation approchée, mais avec une précision inconnue. La méthode des

approximations successives permet d'établir une suite indéfinie d'approximations de plus en plus voisines de la valeur recherchée.

→ pages : 14, 66, 74, 84, 268, 332.

arc de cercle



● On appelle arc de cercle l'intersection d'un secteur angulaire et d'un cercle $\mathcal{C}$ dont le centre est le sommet du secteur angulaire.

→ pages : 14, 38.

Archimède

Savant grec

(287–212 av. J.-C.).

● Après une formation certainement acquise à Alexandrie, Archimède retourne dans sa ville natale de Syracuse pour se consacrer à l'étude et aux applications des mathématiques. Il a laissé d'importants travaux sur le calcul des aires, en particulier l'aire d'un segment de parabole.

● Mais le savant est surtout connu par le célèbre théorème de la poussée qui porte son nom : « Tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale dirigée de bas en haut égale au poids du fluide qu'il

déplace.» Ce théorème est exposé dans le *Traité des corps flottants*.

● Archimède établit également une première approximation du nombre π , ainsi qu'un encadrement de ce nombre :

$$3 + \frac{1}{7} < \pi < 3 + \frac{10}{71}.$$

● En plus de nombreux travaux portant sur des aspects très divers des mathématiques et de la physique, il poursuivit dans sa cité une activité d'ingénieur et de citoyen. Il se trouva mêlé au siège de Syracuse par les Romains. Il y trouva la mort en 212 av. J.-C.

→ pages : 55, 157, 172, 183.

arête

Mot issu du latin arista, «épi».

● Une arête est un segment de droite ayant pour extrémités deux sommets consécutifs d'un polyèdre.

→ pages : 37, 46.

argument

● Pour tout nombre complexe non nul z , il existe un unique réel strictement positif r et des nombres réels θ tels que $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. On dit que r est le module, et θ un argument de z .

● Un argument est défini à $2k\pi$ près (k entier).

→ pages : 398, 404.

arithmétique

Mot issu du grec arithmêtikê, «science des nombres».

● Dans son acception classique, l'arithmétique se définit comme une branche des mathématiques dont l'objet est l'étude des propriétés des nombres entiers et rationnels.

arithmétique (suite)

● Soit un nombre réel r . On dit qu'une suite réelle (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n + r$. On a alors $u_n = u_0 + nr$.

→ pages : 139, 304.

arrangement

● Soit E un ensemble fini non vide à n éléments, p un entier naturel inférieur ou égal à n .

On appelle arrangement de p éléments de l'ensemble E tout p -uplet formé d'éléments distincts de E .

● Le cardinal de l'ensemble des arrangements de p éléments parmi n est noté A_n^p .

→ page : 382.

arrondi

● Dans un calcul, l'arrondi est la valeur approchée la plus proche possible d'un nombre, étant donné la précision que l'on a choisie.

● Une valeur arrondie au centième de π est 3,14.

associativité

● L'associativité désigne le caractère de ce qui est associatif.

● Dans un ensemble E , une opération $\star$ est dite associative sur E si, quels que soient les éléments a , b et c de E , on a :

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c.$$

● Par exemple, l'addition et la multiplication des nombres sont associatives.

On a : $x + (y + z) = (x + y) + z$ et $x(yz) = (xy)z$ pour tous nombres x , y et z .

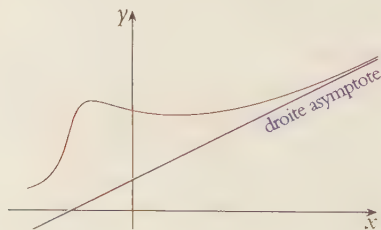
● Mais la soustraction n'est pas une opération associative. En effet : $10 - (5 - 2) = 10 - 3 = 7$; mais $(10 - 5) - 2 = 3 - 2 = 1$.

→ pages : 15, 356.

asymptote (droite)

Mot issu du grec asumptôtos, «qui ne s'affaisse pas».

● Une droite est asymptote à une courbe au voisinage de a_0 (ou de l'infini) si l'écart entre la droite et la courbe tend vers 0 quand la variable tend vers a_0 (ou l'infini).



→ pages : 95, 286.

augmentation

Mot issu du bas latin augmentare, «augmenter».

● On appelle augmentation, l'accroissement positif d'une fonction ou d'une variable.

→ pages : 25, 232.

axe

● Dans le plan ou l'espace muni d'un repère, on appelle axe toute droite munie d'un vecteur directeur et d'une origine.

→ pages : 21, 222.

axiome

Mot issu du grec axiōma, «estimation».

● On appelle axiome un énoncé premier considéré comme «vrai» dans une théorie mathématique.

● Les théorèmes sont alors les énoncés déduits du système d'axiomes considérés.

● La géométrie euclidienne se fonde en particulier sur un des axiomes d'Euclide :

«Par un point d'un plan, il passe une droite et une seule, parallèle à une droite donnée du plan.»

→ pages : 73, 102, 157.

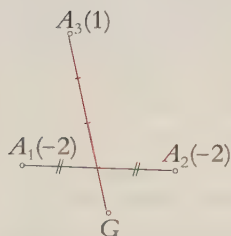
barycentre

Mot issu des mots grecs barus, «pesant», et kentron, «pointe».

● Dans un espace affine, le point G

est barycentre de n points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ affectés des coefficients $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ de somme non nulle

si on a la relation : $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.



- Le barycentre ne change pas si l'ordre des couples (m_i, A_i) change ; ou si tous les coefficients sont multipliés par un réel non nul ; ou si on

remplace plusieurs points dont la somme des coefficients est non nulle par leur barycentre affecté de la somme de ces coefficients.

→ pages : 208, 209, 210, 354, 356.

base

Mot issu du latin basis, «base».

- La base d'un polygone est un côté particulier de ce polygone.
- La base d'un solide est une face particulière de ce solide.
- La base d'un système de numération est un naturel strictement supérieur à 1 qui, choisi de manière arbitraire, permet d'écrire les entiers et dont dépend le système de numération.

→ pages : 314, 346, 422.

base vectorielle

- Dans le plan, une base est un couple de vecteurs non colinéaires ; dans l'espace, une base est un triplet de vecteurs non coplanaires.

- Plus généralement, une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ si et seulement si tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ s'écrit de façon

$$\text{unique : } \vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{v}_i.$$

- Une base est donc une famille de vecteurs qui permet l'écriture de tout vecteur de l'espace de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

Bernoulli

Famille de mathématiciens suisses dont les plus célèbres sont Jacques I^{er} (1654-1705) et son frère Jean I^{er} (1667-1748).

- Jacques Bernoulli consacra sa vie à



l'étude et au perfectionnement du calcul infinitésimal, et fut à l'origine du calcul des variations. Il réalisa la première intégration d'une équation différentielle qui porte encore

son nom. On lui doit un très important ouvrage posthume, *Ars conjectandi* (1713).

● Jean Bernoulli popularisa le calcul infinitésimal de Leibniz dans son *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, écrit en 1697.

→ pages : 153, 162, 392.

Bézout (Étienne)

*Mathématicien français
(1730-1783).*



● Il se consacra à la résolution par radicaux de l'équation algébrique de degré n , et utilisa les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

● Bézout étudia les systèmes de

points intersections de deux courbes algébriques.

● En arithmétique, on appelle égalité de Bézout l'égalité selon laquelle, si $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont des entiers premiers entre eux, alors il existe des entiers $U_1, U_2, \dots, U_n$ tels que :

$$U_1P_1 + U_2P_2 + \dots + U_nP_n = 1.$$

● Réciproquement, si $ua + vb = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

→ page : 430.

bicarrée (équation)

● Une équation bicarrée est une équation d'inconnue x de la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$).

● On la résout en posant $X = x^2$, car on sait résoudre l'équation $aX^2 + bX + c = 0$.

→ page : 254.

bijectif, ive voir bijection

bijection

Mot construit avec le préfixe bi, «deux», et le mot latin jectus, «jeté».

● Étant donné une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F : si pour tout élément a de F l'équation $f(x) = a$ possède une solution et une seule dans E , on dit que f est une bijection de E sur F .

● On peut dire aussi que l'équation f est bijective.

→ pages : 297, 316.

bijection réciproque

● On appelle bijection réciproque d'une bijection $f: E \rightarrow F$ l'unique bijection $g: F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = I_E$ et $f \circ g = I_F$. On écrit $f^{-1} = g$.

→ page : 316.

binaire

Mot issu du latin binarius, de bini, «deux par deux».

● Une relation binaire est une relation liant deux ensembles d'éléments.

● La numération binaire est la numération dont la base est deux. Les seuls chiffres employés pour écrire un entier naturel sont 0 et 1.

→ page : 423.

binôme

Mot issu de bi, «deux», et du grec nomos, «part».

● Un binôme à une variable est un polynôme constitué de deux termes, les monômes.

● On appelle binôme de Newton le développement d'un binôme élevé à une puissance entière positive :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}.$$

binomial (coefficient)

● Dans le binôme de Newton, le coefficient C_n^p est appelé coefficient binomial.

● Il donne le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

→ pages : 382, 392.

bissectrice

● Il existe deux demi-droites opposées $[Oz)$ et $[Oz')$ partageant un angle orienté $([Ox), [Oy])$ en deux angles égaux. La droite $z'z$ est aussi l'axe de l'unique symétrie orthogonale qui échange $[Ox)$ et $[Oy)$. Les demi-droites $[Oz)$ et $[Oz')$ sont appelées les bissectrices de l'angle $([Ox), [Oy])$. La droite

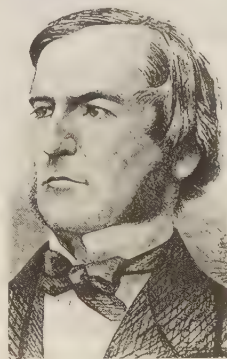
$z'z$ est appelée la droite bissectrice du couple $([Ox), [Oy])$.

→ pages : 31, 33.

Boole (George)

Mathématicien britannique

(1815–1864).



● George Boole consacra l'essentiel de ses recherches à un rapprochement systématique de la logique et des mathématiques.

● Il inventa l'algèbre qui porte son nom, parti-

culièrement utile aujourd'hui en automatique industrielle et en informatique.

→ pages : 117, 119, 121, 123.

borne

Mot issu du latin bodina, «borne».

● $(U_n)_n \in \mathbb{N}$ est une suite bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, alors il existe deux réels m et M tels que, pour tout n , on ait $m \leq U_n \leq M$.

● On appelle «borne supérieure» d'un ensemble le plus petit de ses majorants ; et «borne inférieure» le plus grand de ses minorants.

→ pages : 300, 301.

Bourbaki (Nicolas)

- Ce nom collectif désigne plusieurs mathématiciens.
- Nicolas Bourbaki, individu imaginaire, est depuis 1935 le pseudonyme collectif d'un groupe de mathématiciens français, renouvelés par cooptation. Sa « maison natale » a été inaugurée à Besse en Chandesse en juillet 2003.
- Ces jeunes mathématiciens se réunissaient à leurs débuts pour tenter d'écrire un cours de mathématiques sans concession de rédaction (en particulier les théorèmes fondamentaux de l'analyse).
- Le but de ce collectif fut de réexaminer l'ensemble des mathématiques à partir de leur point de départ. Ainsi, « Bourbaki » publie depuis 1948 des *Éléments de mathématiques*.

calcul

Mot issu du latin calculus, «caillou servant à compter».

- Le calcul numérique est la mise en œuvre des règles élémentaires d'opérations (c'est-à-dire addition, soustraction, multiplication, division) sur les nombres, mais aussi sur les fonctions, vecteurs et autres objets mathématiques.

→ pages : 52, 76, 106-109, 122-129.

calculatrice

- Machine électronique dotée d'un

microprocesseur qui permet d'effectuer automatiquement des opérations numériques, voire de programmer certaines fonctions numériques ou suites.

- Son usage est désormais autorisé en classe et dans certains concours et examens.

→ pages : 18, 465 à 470.

calendrier

Mot issu du latin calendarium, «registre de dettes».

- Un calendrier est un système de division du temps fondé sur les principaux phénomènes astronomiques.
- Les anciennes civilisations (aztèque, babylonienne, hébraïque, égyptienne, maya, grecque, romaine et aussi, semble-t-il, gauloise!...) avaient chacune le leur.

- Le calendrier aujourd'hui en vigueur est le calendrier grégorien, du nom du pape Grégoire XIII qui fit réformer le calendrier julien (de Jules César, qui avait introduit une année bissextile tous les 4 ans) en 1582.

canonique (forme)

Mot issu du grec kanôn, «règle».

- Est considérée comme canonique toute écriture mathématique dont la forme peut être prise comme référence.
- La forme canonique d'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est :

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right].$$

Elle permet d'étudier facilement ce trinôme.

→ pages : 86, 109.

caractère (qualitatif, quantitatif, discret, continu)

- En statistiques, l'objet d'une enquête est appelé caractère.
 - Un caractère est dit qualitatif s'il est non numérisable ; on ne peut pas alors en calculer de moyenne (par exemple, les différents pays visités par un groupe de touristes en vacances).
 - Un caractère est dit quantitatif s'il est lié à une notion numérisable susceptible d'un calcul de moyenne (par exemple, le nombre de pays visités par un groupe de touristes en vacances).
 - Un caractère qui est quantitatif peut être discret ou continu selon que les valeurs qu'il prend sont dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{R}$. Lorsque les valeurs prises sont en très grand nombre et rapprochées les unes des autres, on peut, par commodité, les considérer de caractère « continu ».
- page : 29.

cardinal

Mot issu du latin cardo, «gond, pivot».

- Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de cet ensemble, noté $\text{Card } E$.

- On parle également de cardinal d'ensembles infinis.

carré

Mot issu du latin quadratus, «carré».

- En géométrie, un carré est un quadrilatère plan dont les quatre côtés ont même longueur et dont les angles sont droits.
- En calcul arithmétique, un carré désigne le produit d'un nombre par lui-même.

→ pages : 17, 41, 66, 68, 69.

cartésien (repère)

- Un repère du plan est constitué d'un point origine et de deux vecteurs indépendants.
 - Un repère de l'espace est constitué d'un point origine et de trois vecteurs non coplanaires.
 - L'adjectif «cartésien» rappelle le nom de l'inventeur de la géométrie analytique : le philosophe René Descartes.
- pages : 21, 23, 364.

cartésienne (équation)

- Une équation cartésienne d'une droite est une équation de la forme $ax + by + c = 0$.
- pages : 19, 26, 348, 367.

Cauchy (Augustin)

Ingénieur et mathématicien français (1789–1857).



● Membre de l'Académie des sciences, professeur au Collège de France et à l'École polytechnique, esprit éclectique, Augustin Cauchy aborda de nom-

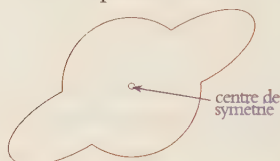
breuses branches des mathématiques et de la physique, mais son principal apport à ces disciplines est l'invention de la théorie des fonctions d'une variable complexe. On lui doit également la publication d'un *Cours d'analyse* (1821).

→ page : 150.

centre

Mot issu du latin centrum, du grec kentron, «pointe».

● Le centre d'un cercle ou d'une sphère est le point situé à égale distance de tous les points du cercle ou de la sphère.



● Le centre de symétrie d'une figure est le point tel que tous

les points de la figure sont deux à deux symétriques par rapport à lui.

● L'isobarycentre est le barycentre de points affectés d'un coefficient 1.

● Le centre de gravité d'un système de points est le barycentre de points affectés

de coefficients non-nuls égaux.

→ pages : 32, 38, 42, 344.

→ Barycentre, isobarycentre.

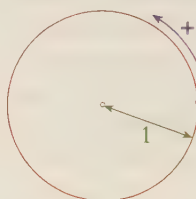
cercle

Mot issu du latin circus, «cercle».

● Un cercle est une courbe plane dont tous les points sont situés à égale distance d'un point appelé «centre».

→ pages : 38, 39, 85, 86, 127, 128, 129, 133, 177, 360.

cercle trigonométrique



● On appelle cercle trigonométrique un cercle de rayon 1, muni d'un sens de parcours dit positif (inverse de celui des aiguil-

les d'une montre) et d'une origine (A).

→ pages : 86, 360.

certain

● En probabilités, un événement est dit certain si sa probabilité est égale à 1.

Charles (Michel)

Mathématicien français (1793-1880).

● Il se consacra à l'étude de la géométrie et de son histoire.



- Soit trois points A, B, C quelconques.

Sur un axe, on a
 $AC = AB + BC$.

- Dans le plan ou dans l'espace, on a :
 $AC = AB + BC$.

Cette relation dite de Chasles s'appli-

que également à bien d'autres objets mathématiques susceptibles d'être additionnés.

→ pages : 200, 201.

chiffre

Mot issu de l'arabe sifr, «zéro».

- Un chiffre est un symbole servant à écrire les nombres dans un système de numération donné.
- En numérotation décimale, les chiffres sont au nombre de 10 : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

→ page : 14.

cinématique

Mot issu du grec kinêma, «mouvement».

- La cinématique est l'étude du mouvement d'un ou plusieurs points par rapport à un repère donné. C'est une partie de la mécanique.

circulaire (fonction)

- En mathématiques, les fonctions circulaires sont celles qui sont définies à partir du cercle trigonomé-

trique, comme le sinus, le cosinus et la tangente.

→ pages : 276, 278, 410, 412.

circonférence

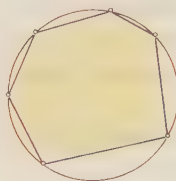
Mot issu du latin circumferre, «faire le tour».

- La circonférence est le périmètre d'un cercle, de longueur égale à $2\pi R$ si R est le rayon du cercle.
- Ce terme peut également désigner parfois le cercle lui-même.

→ pages : 14, 163.

circonsrit

Mot issu du latin circumscribere, «écrire autour».



- Un cercle est dit circonscrit à un polygone lorsque le cercle passe par tous les sommets du polygone.

- Un polygone circonscrit à un cercle est un polygone dont les côtés sont tangents au cercle.

→ page : 32.

classe

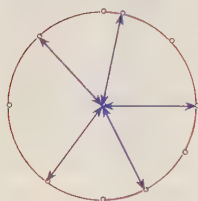
Mot issu du latin classis, «classe».

- En statistiques, une classe désigne un regroupement de valeurs d'une variable sous forme d'un intervalle.

→ page : 371.

cocyclique

Mot issu de co- («ensemble») et du grec kuklos, «cercle».



● Des points sont cocycliques lorsqu'ils appartiennent tous à un même cercle.

coefficient

● En algèbre, on appelle coefficient un nombre multipliant une variable ou les puissances de ce nombre dans un monôme ou un polynôme.
→ pages : 23, 87, 95.

coefficient directeur

● On appelle coefficient directeur d'une droite d'équation $y = mx + p$ en repère cartésien le nombre m mesurant la pente de cette droite.
→ pages : 22, 348.

colinéaire

● En géométrie, deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe des réels α et β tous deux également non nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.
● Il existe alors aussi des réels k et k' tels que $\vec{u} = k\vec{v}$ et $\vec{v} = k'\vec{u}$.
Par convention, le vecteur nul ($\vec{0}$) est colinéaire à tous les vecteurs.
● La colinéarité de vecteurs traduit

le parallélisme des droites qui les portent.

● Deux vecteurs de composantes (a, b) et (a', b') sont colinéaires si et seulement si $ab' - ba' = 0$

→ pages : 118, 342, 364.

combinaison

● Soit E un ensemble fini non-vide à n éléments, p un entier naturel inférieur ou égal à n . On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E à p éléments.
● Le nombre des combinaisons de p éléments parmi n est noté C_n^p .
→ pages : 26, 81, 382.

commun (facteur)

● Dans une somme algébrique, on dit qu'un nombre est un facteur commun s'il est un facteur de chacun des termes de la somme.
→ page : 16.

commutativité

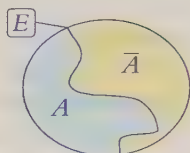
Mot dérivé du verbe «commuter» signifiant «échanger».

● Une opération est dite commutative si, lorsqu'on change l'ordre de ses termes, son résultat ne change pas.
● L'addition et la multiplication des nombres sont commutatives. Ainsi, on a $x + y = y + x$ et $xy = yx$ pour tous les nombres x et y .
→ page : 15.

complémentaires



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



● En géométrie, des angles ou des arcs sont complémentaires si la somme de leur mesure est égale à 90° .

● En algèbre, le complémentaire d'une partie A d'un ensemble E est une partie $\bar{A}$ formée par les éléments de E qui n'appartiennent pas à A . Ainsi $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

→ pages : 31, 35.

complexes (nombres)

● L'ensemble des nombres complexes est l'ensemble des nombres s'écrivant $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels et i est une racine de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Le nombre a s'appelle la partie réelle de z et b sa partie imaginaire.

● Cet ensemble est usuellement noté $\mathbb{C}$ et contient en particulier tous les nombres réels.

→ pages : 130, 131, 132, 133, 134, 394, 396.

→ Imaginaires (ensemble des nombres).

composantes

● En physique, si une force $\vec{F}$ se décompose en la somme de deux

forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, on écrit $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, les vecteurs $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ s'appellent les composantes du vecteur $\vec{F}$. Chacune des composantes est un vecteur.

● Soit un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dire que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(5; 3)$ revient à dire $\vec{u} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

● En mathématiques, on confond souvent les deux mots « composantes » et « coordonnées ».

composé

● Dans un ensemble E muni d'une loi de composition $\star$, le composé de deux éléments a et b de cet ensemble est l'élément de E noté $a \star b$.

→ pages : 196, 198, 202, 204, 210, 212, 214.

composée de deux fonctions

● Soit deux fonctions, f définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F et g définie sur F à valeurs dans un ensemble G . On appelle « fonction composée de f suivie de g » la fonction, notée $g \circ f$, définie sur E à valeurs dans G , par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

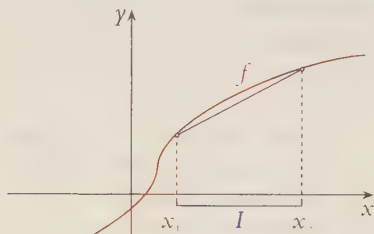
● Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est la composée de la fonction « carrée » : $x \mapsto x^2$ suivie de la fonction « sinus » : $u \mapsto \sin u$.

→ page : 312.

concave

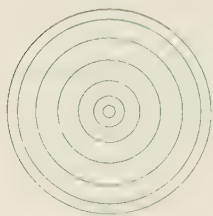
Mot issu du latin cavus, «creux».

- Une fonction f définie sur un intervalle I est dite concave si toute corde du graphe de f est en dessous du graphe.



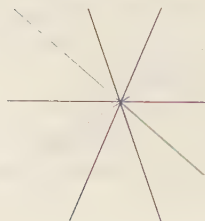
- En géométrie, une partie du plan ou de l'espace est concave si elle n'est pas convexe.

→ Convexe.

concentrique

- Des cercles ou des sphères sont dits concentriques s'ils ou elles ont même centre.

→ page : 39.

concourantes (droites)

- Des droites distinctes sont dites concourantes lorsqu'elles passent toutes par un même point.

→ pages : 32, 33.

condition

Mot issu du latin condicere, «fixer par accord», «dire ensemble».

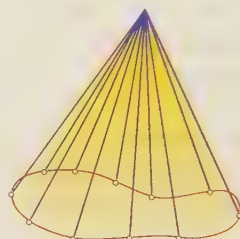
- Dans un problème, une condition est une relation imposée par l'énoncé entre les données et l'inconnue.
- S'agissant de propositions, une condition est dite nécessaire lorsque sa véracité est impliquée par la véracité d'une autre proposition.
- Une condition est dite suffisante lorsque sa véracité implique celle d'une autre proposition.
- Une condition est dite nécessaire et suffisante lorsque sa véracité équivaut logiquement à la véracité d'une autre proposition.

→ page : 437.

cône

Mot issu du grec kônos, «cône».

- Un cône est une surface engendrée par une droite mobile, appelée la génératrice, passant par un point fixe, le sommet, et s'appuyant sur une courbe fixe appelée la directrice.



- On appelle cône de révolution un cône dont la directrice est un cercle et dont le sommet est sur l'axe de ce cercle, c'est-à-dire la perpendiculaire au plan du cercle passant par son centre.

→ pages : 46, 47, 224.

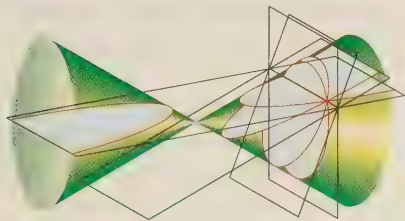
confondu

- Deux droites ou deux figures sont dites confondues lorsque tous les points de l'une appartiennent à l'autre et réciproquement.

→ page : 26.

conique

- Le terme « conique » est le nom donné à l'intersection d'un cône de révolution par un plan.



- Une conique du plan affine $\mathbb{R}^2$ est une courbe algébrique de $\mathbb{R}^2$ dont l'équation est de la forme $ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$, avec les nombres a , b et c non tous trois nuls.

→ pages : 96, 414.

conjecture

- Un énoncé de mathématiques, dont on ne sait pas démontrer s'il est vrai ou faux, porte le nom de conjecture.

conjugué d'un nombre complexe

- Pour tout nombre complexe $a + ib$, le nombre $a - ib$ est appelé son conjugué.

→ page : 396.

conjuguées (expressions)

- Pour tous nombres a et b positifs, on dit que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sont des expressions conjuguées l'une de l'autre.

→ page : 108.

consécutifs

Mot issu du latin consecutus, « suivi ».

- Dans le cas d'une suite $U_0, U_1, U_2, \dots$, les termes U_n et U_{n+1} sont dits consécutifs.

→ pages : 300, 302.

conséquence

Mot issu du latin consequentia, « conséquence ».

- Une conséquence est un énoncé qui découle d'un autre énoncé dans une démonstration.

constante

- Une constante est un nombre dont la valeur est connue, par exemple 3

dans $3x$ ou bien a dans $ax+b$, où x est une « inconnue ».

- Une fonction $f : E \rightarrow F$ sera dite constante s'il existe un élément a de F tel que $f(x) = a$ pour tout x de E .

construire à la règle et au compas

- Cette expression fait référence aux mathématiciens grecs qui faisaient largement appel à la règle et au compas.
- L'impossibilité de construire certaines figures à la règle et au compas (comme, par exemple, un cercle dont l'aire est égale à celle d'un carré ou la trisectrice d'un angle) conduisit alors les mathématiciens à étudier les raisons de ces échecs et à préciser les propriétés des objets constructibles à la règle et au compas.

→ pages : 65, 84, 121.

continue (fonction)

- Intuitivement, une fonction est continue en un point si elle ne varie pas beaucoup lorsque la variable varie peu autour de ce point.
- La définition précise de la continuité d'une fonction a occupé les recherches de nombreux mathématiciens du XIX^e siècle.
- Toutes les fonctions dérivables sont continues, mais la réciproque est fausse.

→ pages : 149, 150.

contradiction

- Une contradiction est un énoncé affirmant à la fois une proposition et sa négation.

contraire (événement)

- On appelle événement contraire d'un événement A d'un espace probabilisé sur un ensemble Ω l'événement $\bar{A}$, complémentaire de A dans Ω .
- Des événements contraires ne peuvent se produire simultanément et la somme de leurs probabilités est égale à 1.

→ page : 378.

contraposée

- La contraposée d'un énoncé de la forme $a \Rightarrow b$, qui se lit « a implique b », est l'énoncé $(\text{non } b) \Rightarrow (\text{non } a)$ qui se lit « non a implique non b ».

contre-exemple

- Un contre-exemple est un exemple qui contredit une règle ou une affirmation.
- Le nombre 10 est un contre-exemple de l'affirmation « tout nombre pair est divisible par quatre ».

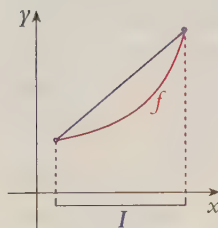
convergente (suite)

- Une suite (U_n) est convergente si elle admet une limite quand n tend vers l'infini.

→ pages : 302, 304, 308.

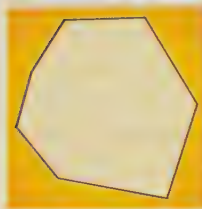
convexe

Mot issu du latin *convexus*, « voûté ».



● Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite convexe si toute corde du graphe de f est au-dessus de ce graphe.

Par exemple $x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.



● En géométrie, le terme « convexe » désigne une partie du plan ou de l'espace telle qu'un segment, dont les extrémités appartiennent à

celle-ci, y est entièrement contenu.

→ page : 41.

coordonnées

Mot issu du latin *ordinare*, « ordonner ».

● On appelle coordonnées d'un point M , dans un plan de repère (O, I, J) , le couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.

● On appelle coordonnées d'un point M , dans l'espace muni du repère (O, I, J, K) , le triplet de réels (x, y, z) tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}.$$

→ pages : 21, 22, 95, 110, 346.

coplanaire

● En géométrie, des points ou des droites sont dits coplanaires lorsqu'ils appartiennent au même plan.

→ pages : 218, 364.

corde

Mot issu du grec *khordê*, « boyau ».

● Une corde est un segment qui a pour extrémités deux points d'une courbe.

→ pages : 38, 121, 122.

corollaire

Mot issu du latin *corollarium*, « petite couronne, supplément ».

● Le terme de corollaire désigne une proposition découlant sans difficulté d'une autre proposition déjà démontrée.

→ pages : 69, 70.

corrélation (coefficient de)

Mot issu du latin *correlatio*, « corrélation ».

● En statistiques et en probabilités, le coefficient de corrélation est le nom donné à un nombre mesurant le degré de liaison entre deux variables.

● Soit X et Y deux variables réelles, $\text{cov}(X, Y)$ la covariance de X et de Y et $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ leurs écarts-types (voir page 376). Le coefficient

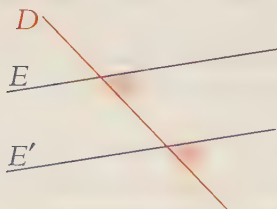
de corrélation ρ est donné par le quotient :

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Ce coefficient est nul si X et Y sont indépendantes. C'est un nombre compris entre 0 et 1.

→ pages : 374, 376.

correspondants (angles)

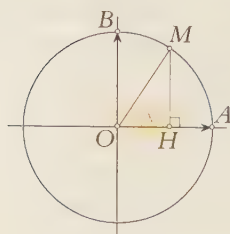


● Étant donné deux droites parallèles E et E' et une droite sécante D , les angles du même côté de D , l'un entre E et E' et l'autre en dehors, sont dits correspondants.

→ page : 38.

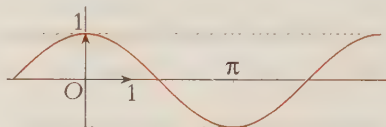
cosinus

● Le terme cosinus désigne une fonction trigonométrique.



● Soit le cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$, M un point quelconque de

ce cercle et x une mesure de l'angle orienté $(\vec{OA}, \vec{OM})$. Le cosinus de x est le nombre $\overline{OH}$ avec H abscisse de M sur la droite de repère (O, A) .



● La fonction trigonométrique $(x \mapsto \cos x)$ est définie pour tout réel x ; elle est paire et périodique de période 2π .

→ pages : 35, 258, 259, 276, 277, 278.

cotangente

● La fonction cotangente est une fonction trigonométrique notée $\cotan$ telle que pour tout réel $x \neq k\pi$, $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

● Cette fonction est périodique de période π .

→ pages : 258, 276.

cote

● Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $M(x, y, z)$ un point quelconque. Le réel z est la cote du point M .

→ pages : 226, 324.

côté

Mot issu du latin costatum, «côté du corps», de costa, «côte».

● Un côté est le nom donné à chacun des segments qui composent un polygone.

● Le même terme désigne également la longueur ou la mesure de ce segment.

→ page : 50.

couple

● Un couple est un ensemble ordonné de deux éléments.

→ pages : 26, 136.

courbe

Mot issu du latin curvus, «recourbé».

● Une courbe désigne un ensemble de points du plan dont les coordonnées (x, y) sont liées par une relation de type : $f(x, y) = 0$.

● Une droite est un cas particulier de courbe dont l'équation est de la forme :

$$ax + by + c = 0.$$

● Dans l'espace, une courbe est l'intersection de deux surfaces.

● Cependant, la notion de courbe n'est pas si simple. Par exemple, Jordan définit, à la fin du XIX^e siècle, une «courbe» dont l'ensemble des points emplit complètement un carré. Un peu avant, Weierstrass avait découvert une «courbe» n'admettant de tangente en aucun point (phénomène de crêpement).

→ pages : 272, 280, 408, 412, 416.

Cramer (Gabriel)

*Mathématicien suisse
(1704-1752).*

● Gabriel Cramer est l'auteur de travaux sur l'algèbre. On lui doit notamment l'étude des systèmes d'équations linéaires.

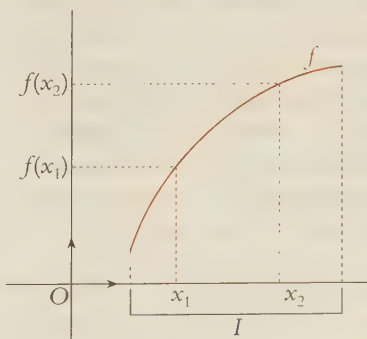
● Un système dit de «Cramer» est un système de n équations linéaires à n inconnues ayant une solution unique.

→ pages : 262, 266.

croissance (décroissance)

● Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle I . On dit que f est croissante sur I si, quels que soient x_1 et x_2 , éléments distincts de I , on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0.$$



● Si $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, pour tout x_1, x_2 de I , f est strictement croissante sur I .

Si $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$, pour tout x_1, x_2 de I , f est décroissante sur I .

Si $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, pour tout x_1, x_2 de I ,

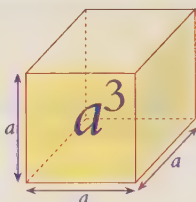
f est strictement décroissante sur I .

→ pages : 318, 322.

croissance (taux de)

voir variation

cube



Mot issu du grec *kubos*, « dé à jouer ».

● En géométrie, un cube est un polyèdre ayant les six faces carrées égales.

● On appelle cube d'un nombre le produit de trois facteurs égaux à ce nombre. 8 est le cube de 2.

● On note $2^3 = 8$.

→ pages : 17, 18, 46, 47.

cubique (racine)

● Dans $\mathbb{R}$, on appelle racine cubique de a le nombre x tel que $x^3 = a$.

→ pages : 36, 83, 298, 322.

cumulés (effectifs)

● En statistique, on appelle effectif cumulé jusqu'à la valeur x_k le

nombre :

$$N_k = \sum_{i=1}^k n_i$$

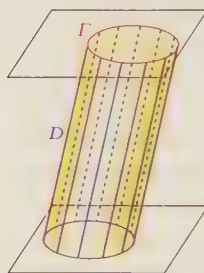
où n_i est l'effectif de x_i .

● On représente les effectifs cumulés par un diagramme dit « en escalier » (rangés par ordre croissant).

→ pages : 29, 370.

cylindre

Mot issu du grec *kulindros*, « cylindre ».



● Un cylindre est un solide limité à la fois par deux cercles dans deux plans parallèles et par tous les segments parallèles entre eux qui relient ces cercles.

● Soit une courbe Γ de l'espace et une droite D . On appelle cylindre, de directrice Γ et de direction celle de D , la réunion des droites parallèles à D et contenant un point de Γ .

→ pages : 46, 47.

décimal

Mot issu du latin *decimus*, « dixième ».

● Un nombre décimal est un nombre pouvant se mettre sous la forme $a \times 10^n$, a et n étant alors des entiers relatifs.

→ pages : 98-105.

décimale

- La numération décimale est la numération en base dix, que nous utilisons dans la vie courante.

→ page : 14.

décimaux

- Les décimaux sont l'ensemble des nombres que l'on peut écrire au moyen de la numération décimale.
- Les décimaux sont les nombres réels qui peuvent s'écrire comme des sommes de puissance de dix (positives ou négatives). Ils peuvent aussi s'écrire comme des fractions dont le numérateur est entier et dont le dénominateur est une puissance de dix (positive).

→ pages : 27, 66, 99, 104.

décroissance, voir croissance voir variation

décroissant

- L'ordre décroissant est celui qui va du plus grand au plus petit.

Dedekind (Richard)

Mathématicien allemand
(1831-1916).

- Ancien élève de Carl Friedrich Gauss, de Dirichlet et de Bernhard Riemann, Richard Dedekind, devenu professeur à l'école polytechnique de Zurich, consacre sa

recherche à l'élaboration d'une théo-



rie des nombres irrationnels. Dedekind développe aussi la théorie des idéaux. Cette dernière fournit les concepts nécessaires à

l'étude de la divisibilité dans des ensembles généraux.

→ pages : 69, 101, 102.

défaut (approximation par)

- Donner une approximation par défaut d'un nombre x , c'est donner un nombre inférieur à x qui approche x .
- Par exemple 3,14 est une approximation par défaut de π , en effet $3,14 < \pi$. On précise la qualité d'une approximation en indiquant les deux bornes d'un intervalle à l'intérieur duquel se trouve le nombre approché. Ainsi 3,14 est une approximation, par défaut, au centième près de π , car : $3,14 < \pi < 3,15$ (on a $3,15 = 3,14 + 1/100$).

→ page : 66.

définition (ensemble de)

- Soit une fonction f de E vers F . Tout élément de E admet au plus une image dans F . L'ensemble de définition de f est l'ensemble des

éléments de E qui ont une image dans F .

● On emploie d'ailleurs quelquefois l'expression : « domaine de définition ». f est aussi une application de son domaine de définition vers F .

→ page : 271.

degré

● Le degré est une unité de mesure d'angle ou d'arc dont le symbole s'écrit « ° ». Un arc de cercle de 1 degré (1°) est la 360^{e} partie d'un cercle.

● On appelle degré d'un polynôme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ le nombre n (si $n \neq 0$) égal au plus élevé des exposants de x .

→ pages : 31, 80, 82, 86, 238.

demi-droite

● Étant donné une droite D et un point O de D , les deux parties situées de part et d'autre de O sur D sont appelées demi-droites d'origine O .

→ pages : 22, 30, 31.

démonstration

Mot issu du latin demonstratio, « démonstration ».

● On appelle usuellement démonstration un raisonnement permettant d'établir la véracité d'une affirmation à partir d'énoncés et de théorèmes qui ont déjà été démontrés.

● On peut rencontrer divers types de démonstration particuliers : par l'absurde, par équivalence, par implication, par récurrence.

→ pages : 69, 70, 206.

dénombrément

Mot issu du latin denumerare, « dénombrer ».

● Calcul du nombre d'éléments composant un ensemble.

→ pages : 380, 382, 386.

dénominateur

● En arithmétique, le dénominateur d'une fraction est le nombre situé en dessous de la barre de fraction.

→ pages : 15, 27, 107, 109.

déplacement

● On appelle déplacement du plan toute isométrie qui conserve les angles orientés.

● Les déplacements du plan sont les translations et les rotations.

Les symétries axiales sont parfois appelées des « antidéplacements ».

→ pages : 204, 208.

→ Isométrie.

dérivée

● On appelle nombre dérivé d'une fonction f en x_0 sur un intervalle I la limite du rapport de l'accroissement de la fonction $f(x) - f(x_0)$ à l'accroissement $x - x_0$

correspondant de la variable, lorsque x tend vers x_0 . Ce nombre est noté $f(x_0)$ et on dit alors que f est dérivable en x_0 .

La fonction qui, à x , fait correspondre le nombre dérivé de f est notée f en x , et s'appelle la dérivée de f sur I .

● Soit la fonction f définie sur un intervalle I avec $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x_0 de I .

● Le calcul de la dérivée d'une fonction relève de techniques très simples ; et pourtant les applications de ce calcul sont très nombreuses et importantes : détermination du sens de variation d'une fonction, équation de la tangente au graphe de la fonction, détermination de valeurs approchées de cette fonction, ...

→ pages : 59, 76, 141, 151, 152, 188, 282, 284, 318.

dériver

● Dériver une fonction, c'est calculer sa dérivée.

→ pages : 282, 284.

Descartes (René)

Philosophe et mathématicien français (1596-1650).

● Descartes est l'un des plus grands esprits de son temps. Après un séjour à Paris, et après avoir parcouru l'Europe pendant des

années, il se fixe aux Pays-Bas, où il passera l'essentiel de son existence.



● Auteur, notamment, du *Discours de la méthode* (1637) et de son appendice intitulé *La Géométrie*, René Descartes est, en mathématiques, l'inventeur de la géométrie analytique.

→ pages : 19, 85, 110, 190.

déterminant

● Dans un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$.

Le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est le nombre :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \text{ noté } xy' - x'y.$$

On appelle déterminant du système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

le nombre réel $ab' - a'b$.

→ pages : 112, 114, 115, 262.

développer

● En algèbre, développer une expression algébrique contenant des produits revient à l'écrire partiellement ou totalement sous forme de sommes.

→ page : 16.

diagonale

Mot issu du grec *diagônos*,
« droite qui relie deux angles ».

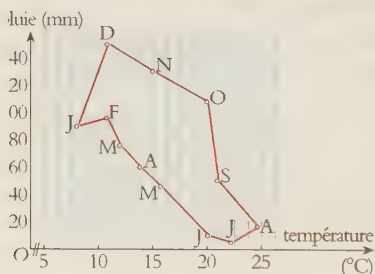
● Une diagonale est une droite ou un segment qui joint deux sommets non consécutifs d'un polygone, ou deux sommets d'un polyèdre n'appartenant pas à une même face.

→ pages : 36, 51, 53, 66, 68.

diagramme

Mot issu du grec *diagramma*,
« dessin ».

climogramme d'Alger



● Le diagramme ci-dessus représente les variantes de pluie et de température selon les mois remarquées au cours d'une certaine année dans une région tempérée de l'hémisphère Nord.

● Un diagramme est une représentation graphique ou schématique permettant de décrire l'évolution d'un phénomène.

→ page : 29.

diamètre

Mot issu des mots grecs *dia*, « deux » et *metron*, « mesure ».

● Soit un cercle ou une sphère de centre ω et de rayon r . Un segment $[MM']$ tel que les points M et M' appartiennent au cercle ou à la sphère et M , ω , et M' soient alignés est dit le diamètre du cercle ou de la sphère.

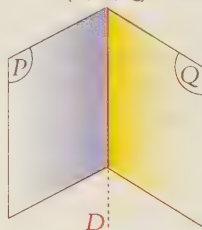
● On dit aussi que le nombre $2r$ est le diamètre du cercle ou de la sphère.

→ pages : 14, 38, 177.

dièdre

Mot issu du grec *hedra*,
« base, plan ».

(P, D, Q)



● Un dièdre est une figure constituée de deux demi-plans, les faces ayant une frontière commune, l'arête.

● Si P et Q sont deux plans sécants en une droite D , le dièdre correspondant se note (P, D, Q).

différence

Issu du latin *differentia*,
« différence ».

● Une différence est le résultat de la soustraction de deux nombres.

→ pages : 15, 17.

différentielle (équation)

- Une équation différentielle est une équation liant une fonction et une ou plusieurs de ses dérivées successives. L'inconnue d'une équation différentielle est une fonction.
 - Elle peut s'écrire sous la forme : $F(x, \gamma, \gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(n)}) = 0$ où $\gamma, \gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(n)}$ sont les valeurs au point x des dérivées successives jusqu'à l'ordre n d'une fonction inconnue f et F une fonction de plusieurs variables.
 - La solution de l'équation différentielle $\gamma' = \gamma$ est l'exponentielle $x \rightarrow k e^x$.
 - Résoudre l'équation différentielle $\gamma' = f(x)$, c'est trouver les primitives de f .
- pages : 336 à 339.

dimension

Mot issu du latin *dimensio*, « mesurage ».

- On appelle dimension d'un espace le nombre de vecteurs d'une base de cet espace.
- Le plan est de dimension 2 ; et l'espace de la géométrie élémentaire est de dimension 3.

Diophante

Mathématicien grec (entre le ^{III}e siècle av. J.-C. et le ^{IV}e siècle apr. J.-C.).

- On ne sait pratiquement rien de la vie de Diophante, qui ne

nous est connue que grâce à deux de ses ouvrages, les *Arithmétiques*, considéré comme l'expression la plus achevée de l'algèbre grecque antique, et les *Nombres polygonaux*.

- Dans ces deux ouvrages, qui consistent en une succession de problèmes du premier, deuxième et troisième degré, Diophante fait apparaître différentes techniques de résolution.
- Ces ouvrages influencèrent tout d'abord les mathématiciens arabes puis leurs successeurs de la Renaissance occidentale.

→ page : 430.

direct (énoncé)

- On peut appeler énoncé « direct » un énoncé de la forme « si A alors B » par opposition à sa réciproque « si B alors A ».

direct (sens)

- Dans le plan, l'orientation est déterminée par un sens de rotation sur l'ensemble des cercles. Par convention, on appelle sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre. On l'appelle aussi sens trigonométrique.
 - Un repère direct est un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$.
- page : 200.

directe (transformation)

- Une transformation directe est une transformation qui conserve l'orientation.
- Les rotations et les translations sont des isométries directes.
- Une similitude directe est la composée d'une homothétie et d'une isométrie directe.

→ pages : 208, 214.

directeur (coefficient) voir coefficient

directeur (vecteur)

- Un vecteur directeur d'une droite D est un vecteur non nul $\vec{v}$ égal à $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de D .
- Dans l'espace, pour définir un plan, il faut un point et deux vecteurs non colinéaires. Ces deux vecteurs non colinéaires sont dans ce cas appelés « vecteurs directeurs » du plan.

→ page : 366.

direction

- En géométrie, on appelle « direction » un ensemble de droites parallèles entre elles.
- La direction de la droite D est aussi la direction d'un vecteur directeur de cette droite.

→ pages : 117, 119, 121, 123.

discriminant

- On appelle discriminant du polynôme du second degré ax^2+bx+c dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ le nombre Δ égal à b^2-4ac . Si $b=2b'$, on appelle discriminant réduit du polynôme le nombre Δ' égal à b'^2-ac .

→ page : 254.

disjoints

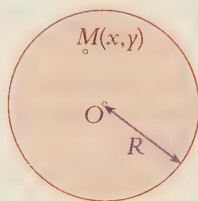
- On dit que deux ensembles A et B sont disjoints si leur intersection est vide. Ils n'ont aucun élément commun : $A \cap B = \emptyset$.

→ pages : 117, 119, 121, 123.

disque

Mot issu du latin discus, « palet ».

- Dans un plan P , on appelle disque ouvert de centre O et de rayon r ($r > 0$), l'ensemble des points M de P tels que $OM < r$. Le disque fermé de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de P tels que $OM \leq r$.



- Soit $O(x_0, y_0)$ et $M(x, y)$ deux points du plan P muni d'un repère orthonormé.

Le disque ouvert est défini par :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2.$$

Le disque fermé est défini par :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2.$$

→ page : 179.

distance

Mot issu du latin distantia, «distance».

● La distance de deux points est la longueur du segment qui les joint. La distance d'un point à une droite ou à un plan est la longueur du segment d'extrémités ce point et son projeté orthogonal sur la droite ou sur le plan.

→ pages : 22, 360.

distinct

Mot issu du latin distinctus, «distinct».

● En géométrie, deux points sont dits distincts lorsqu'ils ne sont pas confondus.

● En algèbre, deux nombres sont distincts s'ils ne sont pas égaux.

distributivité

● On dit que l'opération $\wedge$ est distributive par rapport à l'opération $\star$ si, quels que soient a, b, c de E , on a :

$$(b \star c) \wedge a = (b \wedge a) \star (c \wedge a).$$

● Par exemple, dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

● En probabilités, on utilise le fait que, dans les parties d'un ensemble, l'intersection est distributive par rapport à l'union :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

→ pages : 17, 104, 385.

divergente (suite)

● Une suite numérique (U_n) est dite divergente si sa limite lorsque n tend vers l'infini est infinie ou si elle n'y admet aucune limite.

→ pages : 139, 300.

dividende

Mot issu du latin dividendus, «qui doit être divisé».

● Dans une division, on appelle dividende le nombre qui doit être divisé par un autre. Cet autre nombre est appelé diviseur.

→ page : 15.

diviseur

Mot issu du latin divisio, «division».

● Dans une division, le diviseur est le nombre par lequel on divise un autre nombre.

● Soit a et b deux entiers relatifs. S'il existe un entier relatif q tel que $a = bq$, on dit que b est un diviseur de a .

→ pages : 418, 426, 428.

divisible

Mot issu du latin divisibilis, de dividere, «diviser».

● On dit qu'un nombre entier a est divisible par un nombre entier b si b est un diviseur de a .

→ pages : 418, 420.

division

Mot issu du latin divisio, «division».

- On appelle division d'un réel a par un réel b non nul l'opération consistant à trouver la solution unique x de l'équation $bx = a$.

Le résultat de cette opération se note $a \div b$, $\frac{a}{b}$ ou a/b .

On appelle ce résultat «quotient» de a par b .

→ pages : 15, 418, 420.

→ Euclidienne (division).

dix (puissances de)

- Les puissances de 10 jouent un rôle fondamental dans notre système de numération.
- Pour n entier positif, 10^n s'écrit «1» suivi de n zéros. Pour n entier négatif, 10^n s'écrit «1» précédé de n zéros, y compris le zéro avant la virgule.

→ page : 18.

donnée

Mot issu du latin donare, «faire un don».

- En statistiques, on appelle donnée le résultat d'une analyse ou d'une expérience.
- En mathématiques, une donnée est une hypothèse figurant dans l'énoncé d'un problème.

→ page : 129.

droit

Mot issu du latin directus, «direct».

- On dit qu'un angle est droit lorsque sa mesure est de 90° , ou de $\frac{\pi}{2}$ radians.

→ page : 31.

droite

Mot issu du latin directus, «direct».



- La notion de droite recouvre en mathématiques des situations très différentes et plus ou moins complexes.
- La définition d'une droite en termes de distance – c'est-à-dire comme «le plus court chemin d'un point à un autre» – peut servir de point de départ à la géométrie élémentaire.

→ pages : 22, 30, 69, 80, 348, 350.

écart-type

- L'écart-type d'une variable statistique ou d'un X est la racine carrée de la variance $V(X)$.

On le note $\sigma(X)$.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

→ pages : 372, 390.

échelle

Mot issu du latin scala, «échelle».

- On appelle échelle le rapport entre la représentation figurée d'une longueur et sa longueur réelle (sur le terrain ou sur une autre représentation).

effectif

- En statistiques, on appelle effectif le nombre d'individus associés à une valeur donnée ou à une classe de valeurs données du caractère étudié.

→ pages : 29, 370.

égal, égalité

Mot issu du latin aequalis, «égal».

- La relation d'égalité est une notion fondatrice des mathématiques. Ainsi, deux ensembles E et F sont les mêmes si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

- Écrire $a = b$ revient à dire que a et b sont les mêmes objets mathématiques.

→ pages : 55, 27, 106, 242.

élément

- La notion d'élément est une notion première des mathématiques.
- On écrit $a \in A$ pour indiquer que l'objet nommé a est un élément de l'ensemble nommé A .

- On écrit $a \notin A$ si a n'est pas un élément de l'ensemble A .

→ page : 15.

élémentaire

- En probabilités, un événement est dit élémentaire s'il ne contient qu'un élément, c'est-à-dire une éventualité.

→ page : 384.

élever

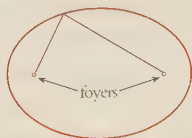
- Soit a et x deux réels avec $a > 0$. Élever a à la puissance x , c'est chercher l'image de x par l'exponentielle de base a . On la note a^x .

- n étant un entier naturel non nul, élever un nombre x à la puissance n , c'est effectuer le produit de n facteurs égaux à x .

→ page : 18.

ellipse

Mot issu du grec ellipsis, «manque».



- Une ellipse est une courbe plane, lieu des points tels que la somme de

leur distance à deux points fixes appelés foyers est constante. C'est aussi l'ensemble des points M dont le rapport des distances à deux points F et F' est constant et inférieur à 1 : $\frac{MF}{MF'} = e$, $e < 1$.

L'inégalité $e < 1$ est l'origine du «manque» de l'étymologie.

- L'équation cartésienne d'une ellipse par rapport à un repère orthonormé porté par ses deux axes de symétrie est

de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Si $a = b$, l'ellipse est un cercle.

→ pages : 95, 414.

encadrement

● On appelle encadrement d'un réel x le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq x \leq b$.

→ pages : 234, 298.

ensemble

Mot issu du latin insimul, «ensemble».

● Bien que la notion d'ensemble soit première en mathématiques, on peut assimiler intuitivement un ensemble à une «collection d'objets» regroupant des «éléments» qui peuvent être toutes sortes d'objets mathématiques.

● Un ensemble de n éléments contient 2^n en sous-ensembles.

● L'ensemble vide ne contient aucun élément et est noté « $\emptyset$ ».

→ page : 70.

entier naturel

● Un nombre entier naturel est un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$.

● Il appartient à la suite illimitée 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4, etc.

→ pages : 14, 52, 69, 98, 418.

équation

Mot issu du latin aequatio, «égalité».

● Une équation est souvent une relation de la forme $f(x) = g(x)$, f et g étant deux fonctions numériques

définies sur un même ensemble D et x un élément quelconque de D appelé inconnue.

● L'équation d'un cercle dans un repère cartésien est de la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

→ pages : 19, 26, 86, 242, 248, 264, 268, 296, 298, 320, 366.

équidistant

Mot issu du latin aequus, «égal», et de distantia, «distance».

● Signifie «à même distance de».

● Par exemple, deux points équidistants d'un troisième sont à la même distance de celui-ci.

→ pages : 30, 32.

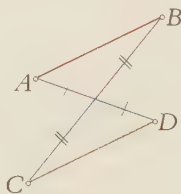
équilatéral

● Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont égaux.

→ pages : 14, 33.

équipollent

Mot issu du latin aequipollentia, «équivalence».



● Deux bipoints (A,B) et (C,D) sont dits équipollents si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

équiprobabilité (hypothèse d')

- En probabilités, on dit qu'on est sous hypothèse d'équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité de réalisation.

→ page : 380.

équivalence

- Soit p et q deux propositions. On dit que p est équivalente à q si $p \Rightarrow q$ (« p implique q ») et $q \Rightarrow p$ (« q implique p »).

On note parfois $p \Leftrightarrow q$.

équivalentes (équations)

- Équations ayant le même ensemble de solutions.

→ page : 244.

Ératosthène

Mathématicien grec

(284-192 av. J.-C.).

- Il parvint le premier à établir la circonférence de la Terre, et mit au point une méthode pour trouver les nombres premiers, appelée «crible d'Ératosthène».

→ page : 426.

espace

- Par espace, on entend généralement l'espace affine euclidien à trois dimensions dans lequel nous faisons de la géométrie.

- Cet espace est noté $\mathbb{R}^3$.

→ page : 20.

espérance

Mot issu du latin sperare,

«attendre».

- En probabilités, l'espérance d'une variable aléatoire est la somme des produits des valeurs de la variable par leur probabilité.

→ page : 390.

et

Mot issu du latin et, «et».

- En logique, l'énoncé « P et Q » est vrai dans le seul cas où les énoncés P et Q sont simultanément vrais.

→ page : 379.

Euclide

Mathématicien grec

(III^e siècle av. J.-C.).

- Le cinquième postulat d'Euclide est celui sur lequel se fonde la géométrie étudiée au collège et au lycée : «Par un point, il passe une seule droite parallèle à une droite donnée.»

→ pages : 56, 65, 66, 102, 116, 156, 420, 424 .

euclidien(ne)

- Relatif à la géométrie découlant des postulats d'Euclide.

→ pages : 70, 71, 90, 120.

euclidienne (division)

- Étant donné deux nombres entiers positifs a et b , avec $b < a$, il existe un

seul couple de nombres positifs q et r , tels que : $a = bq + r$ et $r < b$. Faire la division euclidienne de a par b , c'est trouver q (appelé quotient) et r (appelé reste).

→ pages : 99, 420.

euclidien (espace)

● On désigne par « espace euclidien » l'espace de la géométrie ordinaire décrite pour la première fois dans les *Éléments* d'Euclide avec ses postulats et sa notion de distance.

Euler (Leonhard)

Mathématicien suisse (1707–1783).



● Ancien brillant élève de Jean Ier Bernoulli, il consacra toute sa vie à la recherche et aux applications mathématiques.

● On lui doit plusieurs centaines d'essais sur des sujets aussi divers que la musique, l'optique ou l'astronomie.

● En mathématiques, il réorganisa l'analyse autour de la notion de fonction (*Introduction aux infiniment petits*, 1748) et découvrit les relations qui portent son nom : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

● Son *Traité complet de mécanique* (1736) est la première application de l'analyse à la science du mouvement.

→ pages : 131, 394, 400.

événement

Mot issu du latin evenire, « advenir ».

● En probabilité, un événement désigne une partie de l'univers Ω des issues possibles.

→ pages : 378, 384.

exact

Mot issu du latin exactus, « achevé ».

● Se dit de ce qui est conforme à la règle, à la vérité.

● En mathématiques, on distingue « valeur exacte » et « valeur approchée ».

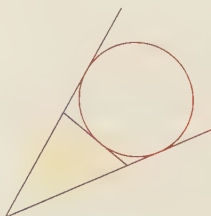
excès (par)

● Approcher par excès un nombre, c'est en donner une approximation supérieure à sa valeur exacte.

Le nombre 3,1416 est une valeur approchée, arrondie au dix-millième, par excès de π .

→ pages : 14, 66, 74, 84, 268, 332.

exinscrit



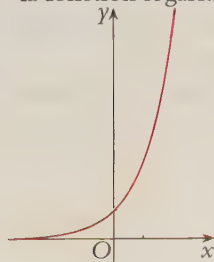
● Un cercle exinscrit à un triangle est tangent à un côté de ce triangle et aux prolongements des deux autres.

→ page : 33.

exponentielle

Mot issu du latin *exponens*, «*exposant*».

● La fonction exponentielle est définie par $y=f(x)=e^x$ telle que $x=\ln y$. Il s'agit de la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.



● On appelle exponentielle généralisée de base réelle $a > 0$ la fonction définie pour tout réel x en posant $a^x = e^{x \ln a}$.

→ pages : 316, 317, 320, 398.

exposant

● Un exposant est placé en haut à droite d'un nombre.

● Soit les nombres a et b . a^b se lit «*a* exposant b » et désigne a élevé à la puissance b .

→ page : 118.

extrémité

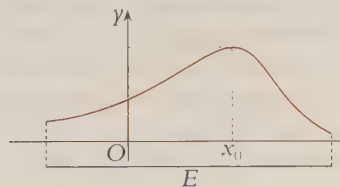
Mot issu du latin *extremitas*, «*extrémité*».

● Les extrémités d'un segment $[AB]$ sont les points A et B .

extremum

● Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble E de $\mathbb{R}$. Affirmer que f admet un extremum en x_0 de E signifie que f admet un

maximum ou un minimum en x_0 .



● Si f est dérivable sur un intervalle contenant x_0 et si la dérivée s'annule en x_0 en changeant de signe, la fonction f admet un extremum en x_0 .

→ page : 145.

face

Mot issu du latin *facies*, «*visage*».

● En géométrie, une face désigne chacun des polygones délimitant un polyèdre, ou chacun des secteurs de plan qui composent la frontière d'un dièdre ou d'un trièdre.

→ pages : 46, 47.

facteur

Mot issu du latin *factor*, «*celui qui fait*».

● Un facteur est un des nombres figurant dans un produit.

→ pages : 15, 18.

factorielle

● Le produit des n premiers entiers naturels $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ s'écrit $n!$ et se nomme «*factorielle n* ».

● Exemples : $5! = 120$; $6! = 720$.

→ pages : 202-206.

factorisation

- Factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à deux revient à l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré ou du second degré.

→ pages : 16, 228, 258, 260.

Fermat (Pierre de)

*Mathématicien français
(1601-1665).*

- Ses travaux portèrent sur la théorie des nombres, le calcul des probabilités, le calcul différentiel et la géométrie analytique.



- On connaît aussi ce savant pour le « grand théorème de Fermat », qui résista trois siècles et demi aux mathématiciens avant d'être démontré

en 1995 par l'Anglais Andrew Wiles : « Pour tout entier n strictement supérieur à 2, il n'existe pas d'entier x , y , z non nuls tels que $x^n + y^n = z^n$. »

→ pages : 143, 154, 189, 190, 443.

Fibonacci (Leonardo)

*Mathématicien italien
(v. 1175-apr. 1240).*

- Fils d'un marchand de Pise amené à voyager tout autour du bassin méditerranéen, Leonardo Fibonacci

découvre la richesse des mathématiques pratiquées par les savants arabes. De retour à Pise, il publie en 1202 le *Liber Abacci*, qui introduit dans l'Occident chrétien les connaissances mathématiques gréco-arabes, avec notamment le zéro. Il publiera ensuite *Practica Geometriae* (1221) et *Liber Quadratorum* (1225).

- On appelle suite de Fibonacci la suite 1; 2; 3; 5; 8; 13... où chaque terme est égal à la somme des deux précédents.

→ page : 308.

figure

Mot issu du latin figura, « forme, figure ».

- Une figure géométrique est un dessin servant à la visualisation de certains êtres mathématiques et permettant d'éclairer une démonstration.

→ page : 65.

fini

- Ce terme est employé par opposition à infini : un ensemble fini, un cardinal fini, etc.

- Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments compris dans cet ensemble.

fonction

Mot issu du latin functio, de fungi, « s'acquitter ».

- On appelle fonction une applica-

tion d'un sous-ensemble D d'un ensemble donné E dans un ensemble donné F . Cette relation associe à chaque élément de son ensemble de définition D au plus une image dans l'ensemble F .

→ pages : 136, 139, 148-152, 270, 324.

fonction (en [...] de)

● En algèbre, écrire y en fonction de x , c'est trouver une expression de y contenant la lettre x et permettant de calculer y .

→ pages : 196, 270.

formule

Mot issu du latin formula, «petite forme».

● En mathématiques et plus généralement dans toutes les sciences, on a coutume d'appeler formule certaines égalités ou inégalités remarquables.

foyer

Mot issu du latin focus, «foyer».



● En géométrie, le foyer d'une conique est un point fixe qui, associé à une droite appelée directrice, permet de donner une définition métri-

que des coniques.

→ page : 414.

→ Ellipse, parabole.

fraction

Mot issu du latin fractio, de frangere, «briser».

● On appelle fraction l'écriture sous la forme $\frac{a}{b}$ du quotient d'un entier relatif a par un autre entier non nul b .

● Le nombre a est le numérateur et le nombre b le dénominateur de la fraction.

→ pages : 14, 27, 66, 99, 159.

fraction rationnelle

● Une fraction rationnelle est le quotient $\frac{P}{Q}$ de deux polynômes P et Q tels que $Q \neq 0$.

→ pages : 14, 99, 241.

fréquence

● En statistiques, le terme «fréquence» est utilisé pour désigner le rapport de l'effectif d'une classe ou d'une valeur d'un caractère à l'effectif de l'échantillon.

● Soit une population formée de n individus, C un caractère statistique comportant p modalités $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_p$, et n_i le nombre d'individus possédant la modalité C_i .

● On appelle fréquence de la modalité C_i le nombre $f_i = \frac{n_i}{n}$.

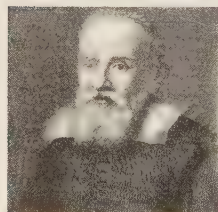
→ pages : 29, 370.

Galilée (Galileo Galilei dit)

*Mathématicien, physicien
et astronome italien
(1564-1642).*

● Professeur de sciences à l'université de Padoue à partir de 1592, Galilée incarne, comme Léonard de Vinci, le savant polyvalent de la Renaissance.

● Il est l'auteur de nombreuses expériences scientifiques, concernant notamment la chute des corps,



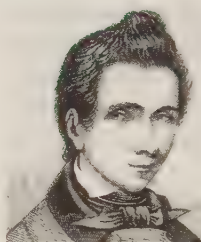
dans le vide ou l'oscillation des pendules (*Dialoga sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1632).

● Ses travaux en astronomie, effectués pour le compte du grand duc de Toscane, Cosme II, l'amènent à prendre le parti de Copernic à propos de la question de la rotation de la Terre, et du fait que celle-ci ne soit pas le centre de l'Univers. Cette théorie étant considérée comme hérétique par l'Église, Galilée est mis à l'index par l'Inquisition en 1633 et termine son existence en résidence surveillée.

Galois (Évariste)

*Mathématicien français
(1811-1832).*

● Malgré un double échec au concours d'entrée à l'École poly-



technique, Évariste Galois fut l'un des plus grands mathématiciens du XIX^e siècle.

● Confronté au problème de la

résolution des équations algébriques de degré supérieur à quatre, Galois en proposa une vision originale qui sera la base de la théorie des groupes.

● Il mourut prématurément lors d'un duel dans des circonstances mal connues. L'intérêt de ses travaux ne fut reconnu que plusieurs décennies après sa mort.

Gauss (Carl Friedrich)

*Mathématicien, physicien et
astronome allemand
(1777-1855).*



● Remarqué dès sa scolarité primaire pour ses capacités de raisonnement peu communes, Carl Friedrich Gauss accède en 1799 au doctorat en mathématiques.

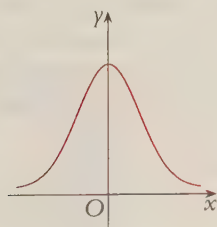
● Il approfondit en particulier la théorie des nombres (*Disquisitiones*

Arithmeticae, 1801) tout en se consacrant également à la mécanique, à l'optique et, à la fin de sa vie, au magnétisme (*Théorie générale du magnétisme terrestre*, 1839).

● La courbe de Gauss, d'équation

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

représente la densité de probabilité d'une variable aléatoire normale réduite :



● Théorème de Gauss en arithmétique : soit a, b, c trois entiers relatifs non nuls ; si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

→ pages : 53, 266, 394, 430.

géométrie

Mot issu du grec geômetria, «géométrie».

● La géométrie élémentaire traditionnelle est l'étude des relations entre points, droites et cercles du plan, et des objets qu'ils engendrent dans l'espace.

→ pages : 20, 65, 70, 84, 206, 226.

géométrie analytique

● La géométrie analytique associe des fonctions numériques à des objets géométriques grâce à l'usage de systèmes de coordonnées.

→ pages : 21, 114, 123.

-gone

Mot issu du grec gônia, «angle».

● Suffixe indiquant que l'on a affaire à une figure géométrique dotée d'un nombre d'angles précisé dans le préfixe grec.

● Par exemple, un pentagone (gr. *penta*, «cinq») est une figure plane à cinq angles et cinq côtés.

grade

Mot issu du latin gradus, «degré».

● Unité de mesure d'angle ou d'arc dont le symbole est gr :

$$400 \text{ gr} = 360^\circ.$$

graduation

● Une graduation est l'ensemble des divisions obtenu en divisant une longueur selon une longueur unité donnée.

→ page : 118.

grandeur (ordre de)

● Donner l'ordre de grandeur d'un résultat, c'est en donner une approximation (par exemple, 89 328 223 est de l'ordre de la centaine de millions).

graphe

Mot issu du grec *graphein*, «écrire».

● En théorie des graphes, on appelle graphe un ensemble de points liés par une relation binaire.

● Le graphe d'une application de l'ensemble E vers l'ensemble F désigne l'ensemble des couples (a, b) formés par un élément a de E et son image b par l'application de E dans F .

→ pages : 148, 184, 186, 189, 479.

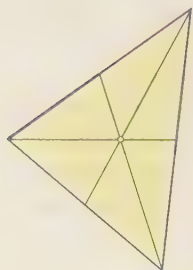
graphique (représentation)

● On appelle représentation graphique d'une fonction f la courbe plane dont les points ont pour coordonnées, dans un repère du plan, les couples $(x, f(x))$ formés par les antécédents et leurs images.

→ page : 296.

gravité (centre de)

Mot issu du latin *gravitas*, «pesanteur».



● En physique, le centre de gravité d'un objet est le point de cet objet tel qu'il tienne en équilibre si on place un support juste en dessous de ce point.

● En mathématiques, le centre de gravité d'un système de points est le «barycentre» de ces points affectés de coefficients égaux.

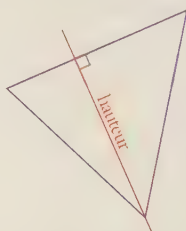
● En géométrie, le centre de gravité d'un triangle est le point de concours de ses médianes.

→ pages : 33, 344.

→ Barycentre.

hauteur

Mot issu du latin *altus*, «haut».



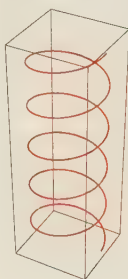
● On appelle hauteur d'un triangle une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

● La longueur du segment liant ce

sommet et le pied de cette perpendiculaire est aussi appelée hauteur.

→ pages : 14, 32, 350.

hélice



Mot issu du grec *helix*, «spirale».

● En géométrie, on désigne sous le terme «hélice» une courbe, le plus souvent dans l'espace, dont la tangente en chaque point fait

un angle constant avec une direction fixe.

● Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace, r un réel strictement positif et h un réel non nul. On appelle hélice circulaire droite l'ensemble des points dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$ et $z=h \theta$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.

→ page : 42.

Hermite (Charles)

Mathématicien français
(1822-1901).



● Professeur à l'École polytechnique, il est à l'origine de la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes permettant l'intégration des fonctions elliptiques.

● Il publia en 1873 *Sur la fonction exponentielle*, dans lequel il démontre que le nombre e ne peut être racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers. Ce nombre est donc transcendant.

Héron l'Ancien

Mathématicien et mécanicien grec
(1^{er} siècle apr. J.-C.).

● La tradition a pour usage d'attribuer à Héron l'Ancien l'invention de nombreuses machines et trai-

tés mécaniques, dont les *Pneumatiques*, où se trouve la première description attestée de l'orgue hydraulique, et *Des automates*.

● En mathématiques, Héron est l'auteur des *Métriques*, ouvrage consacré aux mesures des aires et des volumes, dont il applique les conclusions à l'arpentage, l'architecture et d'autres disciplines.

● La formule de Héron permet de calculer l'aire S d'un triangle en fonction de ses trois côtés a, b, c :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{avec } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

hexagone

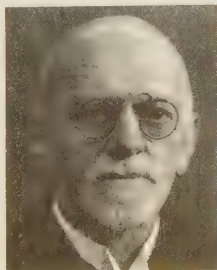
Mot issu des mots grecs *hexa*, «six», et *gônia*, «angle».

● Un hexagone est un polygone à six côtés.

→ page : 45.

Hilbert (David)

Mathématicien allemand
(1862-1943).



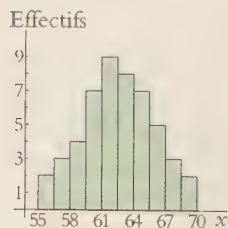
● David Hilbert est considéré comme l'un des plus importants mathématiciens du premier tiers du 20^e siècle. Dès la publication de sa thèse en

1885, dédiée aux invariants algébriques, il s'affirme comme un extraordinaire mathématicien. En 1893, il est chargé avec Minkowski de rédiger une encyclopédie sur la théorie des nombres. Celle-ci paraît en 1897 sous le titre de *Zahlbericht*, et s'impose comme un ouvrage de référence. De 1899 à 1903, il cherche à établir les fondements de la géométrie (*Grundlagen der Geometrie*, 1899). Cette nouvelle série de travaux aboutit à la mise en place de la méthode axiomatique.

● Au congrès de mathématiques de Paris, en 1900, Hilbert propose un ensemble de vingt-trois problèmes qu'il annonce comme devant être résolus au xx^e siècle. Certains résistent encore aujourd'hui aux mathématiciens.

→ page : 73.

histogramme



● Un histogramme est un graphique obtenu en portant sur un axe les intervalles de classe d'une distribution statistique et, sur ces intervalles, des rectangles ayant une aire proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence de la classe.

et, sur ces intervalles, des rectangles ayant une aire proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence de la classe.

homographique (fonction)

● On dit qu'une fonction d'une variable est homographique si elle s'exprime comme étant le quotient de deux polynômes du premier degré non proportionnels de cette variable.

→ pages : 109, 292.

homothétie



● Soit I un point donné et k un nombre réel donné non nul. On appelle homothétie affine de centre I et de rapport k l'application qui à tout point M associe le point M' tel que $\vec{IM'} = k \cdot \vec{IM}$. On la note $H(I, k)$.

→ pages : 131, 132, 214.

horizontal

Mot issu du grec *horizein*, «border».

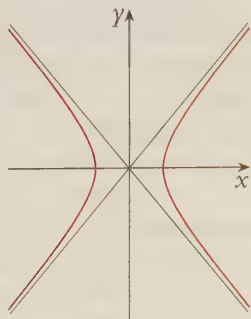
● En géométrie, se dit d'une droite ou d'un plan parallèle à un plan de référence.

hyperbole

Mot issu du grec huperbolê, « excès ».

● L'hyperbole est la courbe lieu des points d'un plan dont la valeur absolue de la différence des distances à deux foyers (ou points) fixes de ce plan est constante.

● C'est aussi l'ensemble des points M dont le rapport e des distances à un point F et à une droite D (dite « directrice ») est constant et supérieur à 1. L'inégalité $e \geq 1$ est l'origine de l'« excès » de l'étymologie.



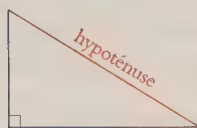
● L'hyperbole est une conique à centre dont l'équation cartésienne par rapport à un repère orthonormé porté par ses deux axes de symétrie est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ou } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Elle admet deux asymptotes d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

→ pages : 95, 148, 274.

hypoténuse



Mot issu du grec hupoteinousa pleura, « côté se tendant sous les angles ».

● En géométrie, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle. Sa mesure se calcule au moyen du théorème de Pythagore.

→ pages : 53, 54, 135.

hypothèse

Mot issu du grec hupothesis, « ce qui frappe en dessous ».

● Se dit d'une proposition, supposée vraie, à partir de laquelle on raisonne pour résoudre un problème ou démontrer un théorème.

→ page : 129.

identité

Mot issu du latin idem, « le même ».

● On appelle identité sur un ensemble E l'application de E dans E qui à tout élément associe cet élément lui-même.

→ pages : 16, 194, 195.

image

Mot issu du latin imago, « représentation ».

● On appelle image d'un élément x par une application f l'élément y de l'ensemble d'arrivée tel que $y = f(x)$.

● On appelle ensemble image d'une application f de E vers F le sous-ensemble de F noté $f(E)$ égal à l'ensemble des images par f des éléments de E .

→ pages : 198, 202, 204, 206, 270.

imaginaires (ensemble des nombres)

● C'est l'autre dénomination de l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$.

● L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois, définies par : quels que soient les couples de réels (a, b) et (a', b') ,
 $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$
 $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$ est un corps commutatif appelé le corps des nombres complexes et noté $(\mathbb{C}, +, \times)$ ou $\mathbb{C}$.

● Si i est une racine du polynôme $X^2 + 1$, pour tout nombre complexe z il existe un couple unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$.

Si $b = 0$, z est un réel.

Si $b \neq 0$ et $a = 0$, alors z est un imaginaire pur.

→ pages : 130, 394.

impair (nombre)

Mot issu du latin *impar*, « inégal ».

● On appelle impair un nombre qui n'est pas divisible par 2 entier : 1, 3, 5, 7, 9, 11...

impaire (fonction)

● Une fonction numérique f de la variable réelle x est dite impaire, lorsque pour tout x appartenant au domaine de définition tel que $-x$ appartienne aussi à ce domaine, on a l'égalité : $f(-x) = -f(x)$.

implication

● Soient p et q deux propositions, la proposition [q ou (non p)] se note $p \Rightarrow q$ et se lit « p implique q ».

● La proposition $p \Rightarrow q$ n'est fausse que si p est vraie et q est fausse.

inclusion (relation d')

● Un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tout élément de A appartient aussi à B .

● On écrit alors $A \subset B$.

incompatibles

● En probabilités, deux événements sont dits incompatibles s'ils sont dis-joints, c'est-à-dire s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

→ pages : 378, 384, 386, 388.

inconnue(s)

● En algèbre, lors de la résolution d'une équation ou d'une inéquation, on appelle inconnue(s) la (ou les) variable(s) que l'on cherche, par opposition aux quantités connues.

● Depuis les travaux de Descartes au XVII^e siècle, les inconnues sont le plus

souvent représentées dans les équations par des lettres appartenant à la fin de l'alphabet et les nombres connus par des lettres appartenant au début de l'alphabet, bien qu'il soit possible d'utiliser n'importe quelles autres lettres.

→ pages : 19, 20, 26, 82, 244.

indépendants

- En probabilités, deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- En géométrie, deux vecteurs sont indépendants lorsqu'ils sont non-colinéaires.

indice

Mot issu du latin indicium, « signe révélateur ».

- Dans le graphisme « a_b » on dit que la lettre b est écrite en indice par rapport à la lettre a et on lit « a indice b ».
- En fait, la notation a_b équivaut à la notation fonctionnelle $a(b)$.

individu

- En statistiques, on appelle individu n'importe quel élément de la population étudiée.

inégalité

Mot issu de l'ancien français inégalité, du latin inaequalitas, « inégalité ».

● Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$. On appelle inégalité dans E une expression de la forme $a \leq b$, a et b étant deux éléments de E .

● Étant donné une relation d'ordre $\leq$ sur un ensemble E , l'expression $a \leq b$ est appelée une inégalité et se lit « a est inférieur ou égal à b ».

● Dans $\mathbb{R}$, $a \leq b$ équivaut à « $b - a$ est négatif ou nul ».

→ pages : 27, 234.

inéquation

● En algèbre, on appelle inéquation une inégalité qui n'est satisfaite que pour certaines valeurs de la ou des inconnues.

● Une inéquation est de la forme $f(x) \leq g(x)$, avec f et g deux fonctions numériques, définies sur un même ensemble D , et x un élément de D .

● Une inéquation peut avoir plusieurs inconnues.

→ pages : 28, 250 à 256, 352.

inférieur

Mot issu du latin inferior, « qui est situé plus bas ».

● En algèbre, si un élément x d'un ensemble, muni d'une relation d'ordre notée $\leq$, est inférieur à un élément y , il se note $x \leq y$.

● $x \leq y$ se lit « x est inférieur ou égal à y » et $x < y$ se lit « x est strictement inférieur à y ».

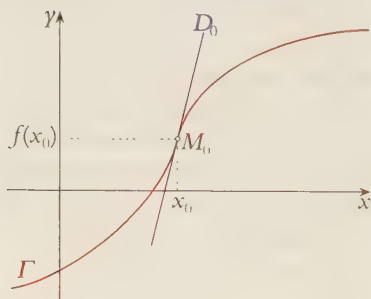
infini

Mot issu du latin infinitus, «infini».

- En mathématiques, un ensemble infini est un ensemble qui peut être mis en bijection avec une partie de lui-même.
 - On utilise aussi le mot (et la notation « ∞ ») dans des expressions où il est associé à des objets illimités.
- pages : 158, 172.

inflexion

Mot issu du latin inflexio, «inflexion».

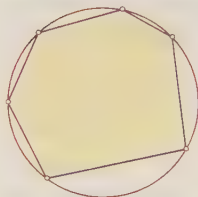


- Soit Γ la représentation graphique d'une fonction f admettant une tangente D_0 en $M_0 (x_0, f(x_0))$. Si Γ traverse sa tangente en M_0 , on dit que M_0 est un point d'inflexion de Γ .

inscrit

Mot issu du latin inscribere, «écrire sur».

- En géométrie, on appelle angle inscrit dans un cercle un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les côtés coupent ce cercle.



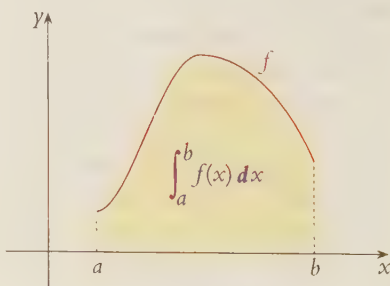
- Un polygone inscrit dans un cercle (ou un polyèdre inscrit dans une sphère) est tel que ses

sommets appartiennent à ce cercle (ou à cette sphère).

→ page : 33.

intégrale

Mot issu du latin integer, «entier».



- F étant une primitive de f , on appelle intégrale définie d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ le nombre $F(b) - F(a)$.

Ce nombre se note $\int_a^b f(x) \cdot dx$. Pour f positive, ce nombre mesure l'aire comprise entre la courbe représentative de f , l'axe des x et les deux verticales d'abscisses a et b .

● On appelle fonction intégrale d'une fonction f , la fonction g définie par

$$g(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt.$$

C'est la primitive de f qui s'annule en $x = a$.

→ pages : 187, 188, 326-332.

intégrer

● En mathématiques, intégrer veut dire procéder à une intégration, c'est-à-dire calculer une intégrale.

→ Intégrale.

interpolation linéaire

● On appelle interpolation linéaire l'approximation de la valeur d'une fonction sur un intervalle, donnée par la fonction affine définie sur cet intervalle et prenant aux bornes de cet intervalle les valeurs de la fonction approchée.

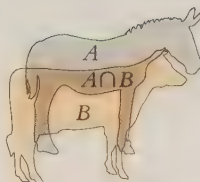
● Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit la fonction affine définie par $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$; c étant un point de $]a, b[$:

$$\varphi(c) = f(a) + (f(b) - f(a)) \frac{c-a}{b-a}.$$

On dit que $\varphi(c)$ est une valeur approchée de $f(c)$ obtenue par interpolation linéaire.

intersection

Mot issu du latin *intersectio*, de *secare*, «couper».



● En géométrie, se dit des points ou des éléments communs à deux ou plusieurs lignes, surfaces ou volumes.

● En algèbre, l'intersection de deux ensembles A et B désigne l'ensemble des éléments communs à ces deux ensembles et noté $A \cap B$.

→ pages : 95, 97, 250.

intervalle

Mot issu du latin *intervallum*, «entre deux palissades».

● On appelle intervalle ouvert $]a, b[$ l'ensemble des nombres x tels que $a < x < b$. L'intervalle fermé $[a, b]$ désigne l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x \leq b$.

● L'intervalle $[a, +\infty[$ est l'ensemble des nombres x tels que $x \geq a$.

● L'intervalle $]-\infty, b[$ est l'ensemble des nombres x tels que $x < b$.

● L'intervalle $[a, b]$ est l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x < b$.

→ page : 239.

invariant

Mot issu du verbe «varier», et du préfixe négatif «in».

● Par opposition à la notion de variable, se dit de ce qui demeure constant, identique à soi-même dans une structure, un système, etc.

- On appelle partie invariante par une application f toute partie X telle que $f(X) = X$.

→ pages : 45, 196, 202, 213.

inverse

Mot issu du latin inversus, «inverse».

- Deux nombres sont dits inverses l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à l'unité. L'inverse d'un nombre x est noté x^{-1} ou $\frac{1}{x}$.

→ pages : 17, 18, 27.

involutive (application)

- On appelle application involutive, ou involution, l'application f d'un ensemble E dans lui-même telle que $f \circ f$ soit l'application identique sur E .

→ page : 203.

irrationnel

- On appelle nombre irrationnel un nombre réel qui n'est pas rationnel, et ne peut donc s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers. Un nombre irrationnel est un élément de $\mathbb{R}$ n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$.

- $\sqrt{2}$, e et π sont des nombres irrationnels.

→ pages : 14, 27, 68, 69.

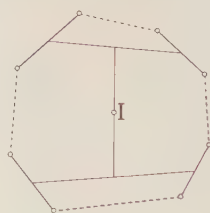
irréductible (fraction)

- Une fraction est dite irréductible quand le numérateur et le dénomina-

teur de la fraction sont premiers entre eux.

- Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

isobarycentre

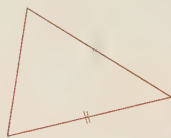


- On appelle isobarycentre le barycentre d'un système de points affectés du même coefficient non nul.

→ page : 354.

→ Barycentre.

isocèle



- Un triangle est isocèle lorsque au moins deux de ses côtés ont même longueur.

→ page : 33.

isométrie

Mot issu du grec iso, «même», et metron «mesure».

- On appelle isométrie du plan ou de l'espace toute application qui conserve les distances dans ce plan ou cet espace.

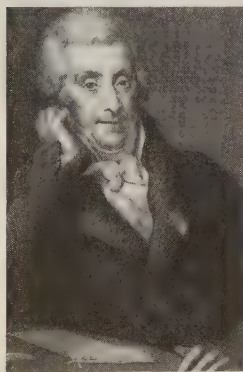
- En géométrie, des figures sont dites isométriques lorsqu'elles se correspondent dans une isométrie.

→ pages : 208, 210, 212.

Jordan (Camille)

Mathématicien français
(1838-1922).

● Professeur à l'École polytechnique, reçu en 1881 à l'Académie des sciences, Camille Jordan a été considéré pendant quarante ans comme le



chef de file de la théorie de groupes. Il a approfondi et systématisé, dans son *Traité des substitutions et des équations algébriques* (publié en 1870), les théories d'Évariste Galois.

Klein (Christian Felix)

Mathématicien allemand
(1849-1925).

● Klein se consacre d'abord à la géométrie : il publie en 1872 une classification de cette discipline, le « programme d'Erlangen », qui définit la géométrie non comme l'étude des objets, mais comme l'étude de leurs transformations.



● On doit également à Felix Klein une étude des fonctions modulaires et une étude approfondie du groupe fini des rotations qui conservent l'icosaèdre (terme qui désigne le cinquième

des polyèdres réguliers).

● Grand pédagogue, il est le fondateur de la *Grande Encyclopédie des Mathématiques* (1895) et le promoteur d'une modernisation de l'enseignement de cette discipline dans les études secondaires.

Kepler (Johannes)

Astronome et mathématicien
allemand (1571-1630).



● Considéré comme l'un des pères de l'astronomie moderne, partisan de la théorie de la thèse copernicienne selon laquelle la Terre tourne autour du Soleil au

sein d'un système de corps célestes



face et aucun bord, donc ni intérieur ni extérieur.

● On attribue à Felix Klein la découverte de la « bouteille » qui porte son nom : il s'agit d'une surface qui n'a qu'une

Lagrange (Joseph-Louis)

*Mathématicien français
(1736-1813).*

● Professeur à l'école d'artillerie de Turin, Lagrange entretient une correspondance avec quelques-uns des plus grands mathématiciens de son temps, notamment Euler et d'Alembert. Ce dernier le recommande en 1766 à Frédéric II de Prusse qui l'invite alors à diriger l'Académie des sciences de Berlin.

● En 1787, il rejoint l'Académie des sciences de Paris, et dirige la Commission des poids et mesures (1790) puis celle des longitudes (1795).

● Lagrange démontra plusieurs théorèmes relatifs à la théorie des groupes qui préparèrent les travaux d'Évariste Galois. Son œuvre donne à l'analyse en mathématiques une importance considérable.

● Sa *Mécanique analytique* (1788), sans référence à la géométrie, unifia les fondements de cette discipline.



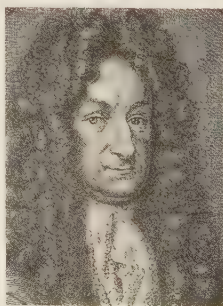
Legendre (Adrien-Marie)

*Mathématicien français
(1752-1833).*

● Précurseur de la théorie analytique des nombres, Legendre obtient des résultats importants sur la distribution des nombres premiers. On lui doit une classification des intégrales elliptiques qui prépare les travaux des mathématiciens Abel et Jacobi.

Leibniz (Gottfried Wilhelm)

*Mathématicien et philosophe
allemand (1646-1716).*



de l'université d'Iéna.

● De formation littéraire, tout jeune, Gottfried W. Leibniz se consacre d'abord à la philosophie avant de suivre en 1663 les cours de mathématiques

● À partir de 1672, il se consacre plus activement aux mathématiques. Après Newton, il invente le calcul infinitésimal et introduit notamment la notation différentielle « dx » qui rend son calcul très opérationnel. Devenu l'un des plus grands intellectuels d'Europe, il poursuit ensuite en parallèle divers travaux tant philosophiques que mathématiques.

→ pages : 76, 162, 362.

lieu géométrique

● On appelle lieu géométrique un ensemble de points vérifiant une propriété caractéristique donnée.

→ page : 207.

ligne de niveau

● Soit f une application d'un espace affine X dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. Soit k un nombre réel, on appelle ligne de niveau k de f l'ensemble des points M de X tels que $f(M)=k$.

→ page : 362.

limite

Mot issu du latin limes, «frontière».

● On appelle limite d'une fonction en un point c de son intervalle de définition un nombre l tel qu'on peut trouver des valeurs de la variable proches de c pour lesquelles la différence entre l et les valeurs prises par la fonction soient arbitrairement petites.

● On appelle limite d'une suite convergente le nombre l tel qu'on peut trouver un rang à partir duquel la différence entre l et le terme général de la suite soit arbitrairement petite.

→ pages : 152, 156, 159, 164, 286, 294, 302.

linéaire (fonction)

Mot issu du latin linea, «ligne».

● On appelle application ou fonction linéaire réelle une fonction de type $f(x)=ax$, a étant un réel déterminé.

● On a alors évidemment les relations $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(kx)=k f(x)$, qui traduisent la distributivité de la multiplication sur l'addition et l'associativité de la multiplication.

Ces relations seront à l'origine d'une importante généralisation de la notion de linéarité.

En terme de proportions, la linéarité se traduit par des égalités de fractions :

$$a = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}.$$

● Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.

● On appelle combinaison linéaire de vecteurs le vecteur obtenu en multipliant chacun de ces vecteurs par un nombre et en additionnant les vecteurs ainsi obtenus.

→ pages : 23, 80, 82, 262, 264.

littéral

Mot issu du latin littera, «lettre».

● On appelle calcul littéral un calcul utilisant des lettres où les nombres sont remplacés par des lettres.

● C'est le mathématicien François Viète (1540-1603) qui, au XVI^e siècle, systématisa l'emploi de lettres pour désigner des nombres dans des calculs.

→ page : 16.

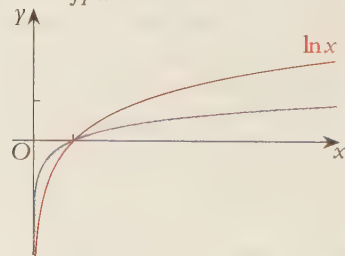
logarithme

Mot issu du grec logos, «raison» ou ici «rapport», et arithmos, «nombre».

● Le logarithme népérien, noté $\ln x$, est l'une des fonctions fondamentales des mathématiques.

C'est la primitive de $\frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ qui s'annule pour $x=1$.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x} df.$$



● On appelle logarithme de base a (avec $a > 0$ et $a \neq 1$) et on note $y = \log_a x$ le nombre $\ln x / \ln a$.

On a alors $a^y = x$.

→ pages : 314, 318, 320.

logique

Mot issu du grec logos, «raison».

● La logique est la science du raisonnement en lui-même, abstraction faite de la matière à laquelle elle s'applique.

longueur

Mot issu du latin longus, «long».

● Il désigne de manière générale la distance entre les extrémités d'un segment, mais aussi le côté d'un polygone, ou encore la mesure du côté le plus grand d'un rectangle.

→ pages : 14, 177.

losange



Mot issu du gaulois lausa, «pierre plate».

● Quadrilatère dont les quatre

côtés ont même longueur.

→ page : 41.

majorant

● On appelle majorant d'une fonction à valeurs dans un ensemble ordonné E un nombre supérieur à toute image de f .

→ pages : 300, 301, 306.

majoré

● On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par le réel M lorsque pour tout n : $u_n \leq M$.

mathématiques

Mot issu du grec mathêma, « science ».

● Ce terme désigne la science dont l'objet est l'étude, au moyen du raisonnement déductif des propriétés des nombres, des figures géométriques, etc., et les relations qui s'établissent entre eux.

● La caractéristique du discours mathématique est de ne pas accepter la présence simultanée de deux énoncés contraires.

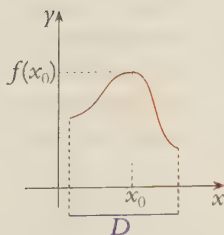
→ pages : 50, 191.

maximum

Mot latin signifiant « le plus grand ».

● Un maximum est le plus grand élément d'un ensemble ordonné.

● Le maximum d'une fonction sur un intervalle (ou sur son domaine de définition) est la plus grande des valeurs de cette fonction dans cet intervalle (ou dans son domaine de définition).



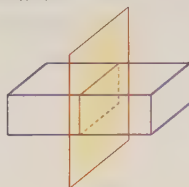
● Soit f une fonction définie sur un ensemble D de $\mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum en un point $x_0 \in D$ si et seulement si,

pour tout x de D , $f(x) \leq f(x_0)$; f admet un maximum relatif en x_0 de D si et seulement si il existe un intervalle

ouvert I de centre x_0 tel que pour tout x de $D \cap I$, $f(x) \leq f(x_0)$.

→ page : 143.

médian



Mot issu du latin medius, « qui est au milieu ».

● En géométrie, un plan médian d'un pavé est le

plan passant par des points milieu d'arêtes parallèles.

→ pages : 117, 119, 121, 123.

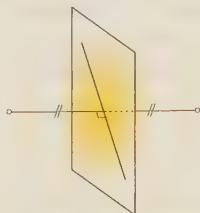
médiane

● En statistiques, c'est le nombre répartisant les termes d'une série numérique rangée par valeurs croissantes en deux groupes de même fréquence.

● En géométrie, la médiane d'un triangle est le segment joignant un sommet au milieu du côté opposé.

→ pages : 29, 33, 350.

médiateur (plan)



● Le plan médiateur d'un segment de l'espace est l'ensemble des points équidistants des extrémités du

segment; il est perpendiculaire au segment en son milieu.

→ page : 222.

médiatrice

- On appelle médiatrice d'un segment du plan la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
- Dans un triangle, elle désigne la perpendiculaire à un côté en son milieu.

→ pages : 30, 32, 350.

membre

- En algèbre, dans une égalité (ou une inégalité), on appelle membre chacun des deux termes figurant de part et d'autre du signe « = » (ou « ≤ »).

Menelaüs d'Alexandrie

Mathématicien grec du 1^{er} siècle de notre ère.

- Auteur d'un traité, *Les Sphériques*, qui constitue une étude de la trigonométrie sphérique.

- Théorème de Ménélaiüs :

Soit A, B, C trois points distincts d'un plan; M, N, P trois points distincts de A , de B et de C et appartenant respectivement aux droites (BC) , (CA) et (AB) ; les points M, N, P sont alignés si et seulement

$$\text{si : } \frac{MB}{MC} \times \frac{NC}{NA} \times \frac{PA}{PB} = -1.$$

mesure algébrique

- Soit D une droite affine et $\vec{i}$ un vecteur non nul de D . On appelle mesure algébrique de tout couple

(A, B) de points de D l'unique nombre réel a tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$.

- Ce réel est noté $\overline{AB}$. Dans un repère $(O, \vec{i})$ de D , si x_1 et x_2 sont les abscisses de A et B , on a $\overline{AB} = x_2 - x_1$.

→ page : 236.

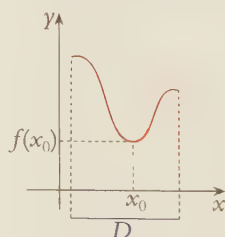
milieu

- En géométrie, le milieu d'un segment est le point du segment situé à égale distance des extrémités de celui-ci.

minimum

Mot latin signifiant «le plus petit».

- Un minimum est le plus petit élément d'un ensemble ordonné.
- Le minimum d'une fonction sur un intervalle (ou sur son domaine de définition) est la plus petite des valeurs de cette fonction dans cet intervalle (ou dans son domaine de définition).



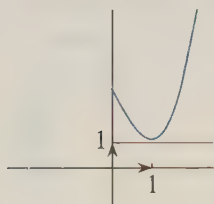
- Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble D de $\mathbb{R}$. On dit que f admet un minimum en un point $x_0 \in D$ si

et seulement si, pour tout x de D , $f(x) \geq f(x_0)$; f admet un minimum relatif en x_0 de D si et seulement si il existe un intervalle ouvert I de

centre x_0 tel que pour tout x de $D \cap I$, $f(x) \geq f(x_0)$.

→ pages : 143, 149.

minorant



● On appelle minorant d'une fonction à valeurs dans un ensemble ordonné E un nombre inférieur à toute image de

cette fonction f .

● La figure montre le graphe d'une fonction minorée par 1 sur $\mathbb{R}^+$.

→ pages : 300, 301, 306.

minoré

● On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ est minorée par un réel m lorsque pour tout n : $m \leq u_n$.

mise en équation

● La mise en équation d'un problème pratique consiste en la traduction de son énoncé sous forme d'égalités ou d'inégalités exploitables mathématiquement.

● La résolution du problème revient alors à trouver les solutions de ces équations ou inéquations.

mode

● En statistiques, on appelle mode la (ou les) valeur(s) d'un caractère ayant la plus grande fréquence.

module

● On appelle module d'un nombre complexe $z = a + ib$ le réel positif ou nul noté $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

Si M est le point d'affixe z , on a alors $\|OM\| = |z|$.

→ pages : 398, 404.

modulo n , congruence

● Soit n un entier naturel non nul.

On dit que x et y sont congrus modulo n , et on écrit $x \equiv y \pmod{n}$ ou $x \equiv y [n]$, lorsqu'il existe un entier k tel que $x - y = kn$.

Exemple : $365 \equiv 1 [7]$.

● Le calcul des congruences permet de calculer avec les restes de division comme on calcule avec les dividentes.

→ page : 422.

Moivre (Abraham de)

Mathématicien britannique d'origine française (1667-1754).

● Il précisa les principes du calcul des probabilités et introduisit la trigonométrie des quantités imaginaires. La formule porte son nom :

$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos^n \alpha + i \sin^n \alpha$.

→ page : 400.

Monge (Gaspard)

Mathématicien français (1746-1818).

● Gaspard Monge accompagne le général Bonaparte lors de l'expédition

d'Égypte (1798-1799) et devient le président de l'Institut d'Égypte.

- Partisan de la Révolution, il devient ministre de la Marine et organise l'armement de l'artillerie (poudrières et canons).

- Il participe activement à la fondation de l'École normale supérieure et de l'École polytechnique.

- Monge est le créateur de la géométrie descriptive et l'auteur de théories en géométrie analytique.

→ page : 217.

monôme

Mot issu des mots grecs monos, «seul», et nomos, «portion».

- Un monôme est un polynôme dont tous les coefficients sauf un sont nuls.

- Exemple : $3x^2$ est un monôme.

→ page : 238.

monotone

Mot issu du grec monos, «seul», et tonos, «ton».

- Une application d'un ensemble ordonné E vers un ensemble ordonné F est dite monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

- Une application d'un ensemble ordonné E vers un ensemble ordonné F est strictement monotone si elle est strictement croissante ou si elle est strictement décroissante.

moyenne

Mot issu du latin medianus, «milieu».

- Soit n un entier naturel non nul, $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels, on appelle moyenne arithmétique des n réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ le réel $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

- Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n réels strictement positifs, on appelle moyenne géométrique des n réels le réel positif $\sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n}$.

→ page : 372.

multiple

Mot issu du latin multiplex, «multiple».

- On dit qu'un entier a est multiple d'un entier b s'il existe un entier c tel que $a = bc$.

- Par exemple, 27 est multiple de 3 car $27 = 9 \times 3$.

→ page : 418.

multiplicateur

- Dans le produit $a \times b$, le premier terme a est parfois appelé le multiplicande et le deuxième terme b le multiplicateur.

→ page : 15.

multiplication

- Multiplier un entier p par un entier n , c'est faire la somme de n termes égaux à p .

- Plus généralement, la multiplica-

tion est la deuxième opération définie dans l'ensemble des nombres réels : la multiplication est associative, commutative et elle a un élément neutre 1. Tout réel différent de 0 a un inverse.

- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

- Lorsqu'on multiplie deux nombres x et y , on dit que x et y sont des facteurs du produit xy .

→ pages : 15, 17, 18, 63, 104.

naturels (ensemble des entiers)

- Un entier naturel, appelé aussi naturel, est un nombre de la suite 0, 1, 2, 3, 4, etc.

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

→ pages : 14, 418.

négatif

Mot issu du latin negare, «nier».

- Un nombre strictement négatif est un nombre inférieur à 0.

→ pages : 27, 104.

négligeable

Mot issu du latin negligere, «négliger».

- Dans un calcul, une quantité est dite négligeable si l'on peut ne pas en tenir compte dans l'obtention d'un résultat significatif.

Neper (John)

Mathématicien et théologien écossais (1550-1617).



- Grâce à un procédé de son invention, il ébauche la première machine à calculer. Il est aussi l'inventeur des logarithmes, qui

facilitent le calcul en substituant l'addition à la multiplication au moyen de tables.

→ page : 314.

neutre (élément)

Mot issu du latin neuter, «ni l'un ni l'autre».

- L'élément neutre e d'une opération $\star$ est l'élément tel que, pour tout x : $x \star e = e \star x = x$.

Le nombre 1 est neutre pour la multiplication ; et 0 est neutre pour l'addition.

→ page : 15.

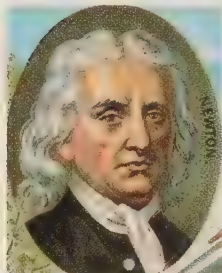
Newton (Isaac)

Physicien et mathématicien anglais (1642-1727).

- Il s'intéressa d'abord à l'optique et à l'astronomie, avant de se consacrer à la mécanique des phénomènes naturels (*Principes mathématiques de philosophie naturelle*, 1687). De ses

observations, Newton déduisit la théorie de l'attraction universelle.

● En mathématiques, il participa à l'élaboration de l'analyse moderne et fut le premier à en découvrir les principes.



● Véritable génie universel, Isaac Newton travailla sur de nombreux autres domaines, tels que l'histoire et l'alchimie.

→ pages : 76,

91, 92, 93, 145, 160, 161.

nombre

Mot issu du latin numerus, «nombre».

● Employé à l'origine pour quantifier et dénombrer les objets, le concept de nombre s'est enrichi au cours de l'histoire. À partir de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on peut construire successivement celui des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, des décimaux $\mathbb{D}$, des rationnels $\mathbb{Q}$, et enfin celui de tous les nombres mesurant un segment et leurs opposés (dits nombres réels $\mathbb{R}$).

→ pages : 14, 64, 69, 70, 394.

nombre dérivé

● Le terme de nombre dérivé en x_0 d'une fonction numérique f est synonyme de dérivée en x_0 .

● On l'utilise pour éviter la confusion entre dérivée en un point et fonction dérivée.

→ page : 76.

normal

Mot issu du latin norma, «équerre, règle».

● En géométrie, normal signifie «perpendiculaire à».

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite D , alors tout vecteur directeur $\vec{v}$ d'une perpendiculaire à D est normal à $\vec{u}$. On a alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

norme

Mot issu du latin norma, «équerre, règle».

● En calcul vectoriel, la norme d'un vecteur est un réel noté $\|\vec{x}\|$ tel que, pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E et tout réel λ , on ait :

$$\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \times \|\vec{x}\|.$$

● La norme d'un vecteur s'interprète comme la longueur commune à tous les segments orientés qui le définissent.

→ pages : 340, 358.

normal, repère

● Dans le plan ou dans l'espace, un repère est dit normal lorsque les

vecteurs de base ont tous pour norme 1.

- Il est dit orthonomé lorsque les vecteurs de base sont orthogonaux deux à deux et de norme 1.

notation

- Une notation est un signe conventionnel caractérisant un objet, un verbe ou une opération.

Exemples : +, -, $\sqrt{n}$, $\leq$.

→ page : 18.

nul

Mot issu du latin nullus, « nul ».

- Se dit de ce qui est égal à zéro.

numérateur

Mot issu du latin numerare, « compter ».

- On appelle numérateur la partie d'une fraction située au-dessus de la barre de fraction.

→ pages : 27, 107, 119.

numérique

Mot issu du latin numerare, « compter ».

- Se dit de ce qui concerne les nombres ou de ce que l'on peut représenter par des nombres.

→ page : 300.

oblique

Mot issu du latin obliquus, « oblique ».

- Désigne une direction qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire aux directions principales des objets d'une figure.

obtus

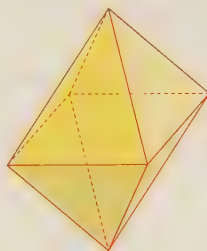
Mot issu du latin obtusus, « émoussé ».

- En géométrie, on dit qu'un angle est obtus si sa mesure est comprise entre 90 et 180 degrés.

→ page : 31.

octaèdre

Mot issu du grec okto, « huit », et hedra, « face ».



- Un octaèdre est un polyèdre à huit faces.

- Un octaèdre régulier est un octaèdre dont chacune des faces est un triangle équilatéral

de même aire.

→ page : 47.

octant

Mot issu du latin octans, « huitième partie ».

- Un octant est un huitième de cercle, c'est-à-dire un secteur circulaire de 45°.

- Ce mot désigne également un instrument de mesure servant aux navigateurs.

octogone

Mot issu du grec *oktagones*,
« à huit angles ».

- Polygone à huit côtés et huit angles.

→ pages : 117, 119, 121, 123.

opérateur

- Un opérateur est une fonction définie à partir d'opérations simples. Par exemple, l'opérateur « opposé » qui à x fait correspondre $-x$.

- L'opérateur qui à x fait correspondre kx (k réel) est dit « linéaire ».

opération

Mot issu du latin *operatio*,
« opération ».

- Une opération est une application qui, à deux éléments d'un ensemble, fait correspondre un élément appelé « résultat » de cette opération.

→ page : 15.

opposé

Mot issu du latin *opponere*,
« opposer ».

- En arithmétique, deux nombres sont dits opposés si leur somme est égale à 0. Deux nombres opposés ont même valeur absolue et sont de signes contraires. L'opposé du nombre x se note $-x$.

- En géométrie, on appelle demi-droites opposées des demi-droites qui sont portées par une même droite

et n'ont qu'un seul point commun : leur origine.

- On appelle secteurs opposés par le sommet deux secteurs de même sommet dont les côtés sont des demi-droites opposées deux à deux.

→ pages : 27, 31.

optimum

Mot latin signifiant « le meilleur ».

- Nombre ou objet rendant extrême la valeur d'une fonction prise pour critère.

- On emploie souvent « optimum » pour « minimum » ou « maximum ».

→ page : 74.

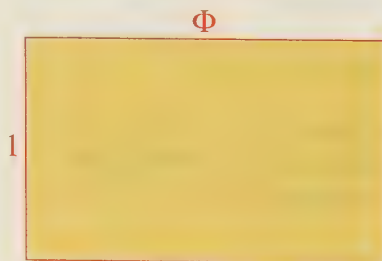
or (nombre d')

On appelle nombre d'or, ou « divine proportion » le nombre Φ racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

- $\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,62$, et on a à l'ap-

$$\text{proximation } \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

- Le rectangle d'or est un rectangle dont les côtés sont respectivement proportionnels à 1 et à Φ .



- En architecture et dans les beaux-arts, le rectangle d'or est considéré comme très agréable à l'œil.

On retrouve le rectangle d'or dans de nombreux monuments classiques, comme par exemple la façade du Parthénon de l'Acropole à Athènes.



→ page : 451.

ordonnée

Du latin *ordinare*, «ordonner».

- L'ordonnée d'un point du plan ou de l'espace muni d'une base est la deuxième coordonnée de ce point.

→ page : 21.

ordonnée à l'origine

- Étant donné une droite d'équation $y=ax+b$, le nombre b est appelé ordonnée à l'origine de la droite.
- Il s'agit de l'ordonnée du point

d'abscisse nulle appartenant à la droite d'équation $y=ax+b$.

→ page : 155.

ordre (relation d')

- La relation d'ordre habituelle dans $\mathbb{R}$ est notée $\leq$. Elle est compatible avec l'addition et avec la multiplication par des nombres positifs.

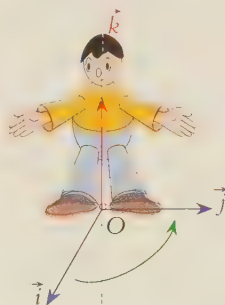
- On écrit $a \leq b$ lorsque $b-a \in \mathbb{R}^+$.

→ pages : 27, 234.

orientation, orienté

Mot construit sur la notion géographique d'«Orient».

- Espace vectoriel muni d'une orientation.



- Soit un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Selon les conventions de la physique, on dit que le repère est direct lorsqu'un observateur situé sur la demi-droite $[O, \vec{k})$ les pieds en O regardant dans la direction de $\vec{i}$ a le vecteur $\vec{j}$ sur sa gauche. Orienter l'espace, c'est choisir ce repère comme direct. Le repère est dit indirect lorsqu'il n'est pas direct.

- Sur une droite, l'orientation est fixée par le choix des points d'abscisse 0 et 1 ; le sens direct sur cette droite est celui de 0 vers 1.

- Dans le plan, l'orientation des angles et des arcs est définie par la donnée d'un cercle trigonométrique.
- En mathématiques, la notion d'orientation est liée à celle de « déterminant ».

Précisément, lorsqu'un repère privilégié est choisi, par convention ce repère est appelé « direct » ; un autre repère (u, v) est alors dit direct (ou indirect) selon que le déterminant des vecteurs (u, v) est positif ou négatif. Cette définition se généralise sans difficulté à des espaces de dimension supérieure à deux.

→ page : 201.

→ Cercle trigonométrique, Déterminant.

origine

Mot issu du latin origo, « origine ».

- En géométrie, le terme d'origine désigne le point où les coordonnées sont nulles.
- L'origine d'un repère est l'intersection des axes de coordonnées.

→ pages : 21, 101.

ortho-, orthocentre

Orthos est un préfixe grec signifiant « droit ».

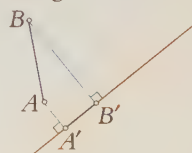
- Dans un triangle, l'orthocentre est le nom donné à l'intersection des hauteurs.

→ page : 32.

orthogonal

Mot issu du latin orthogonus, « à angle droit ».

- En géométrie élémentaire, ce terme est synonyme de perpendiculaire.
- En calcul vectoriel, des vecteurs orthogonaux sont deux vecteurs dont le produit scalaire est nul.
- On appelle repère (ou base) orthogonal de l'espace un repère formé de vecteurs deux à deux orthogonaux.



- On appelle projection orthogonale une projection dont la direction est

perpendiculaire à l'axe ou au plan de projection.

- Une symétrie orthogonale est une symétrie axiale.

→ pages : 220, 358.

orthonormal, orthonormé

- Dans le plan ou dans l'espace, un repère (ou une base) est dit orthonormal si ses vecteurs ont la même norme (égale à 1) et sont deux à deux orthogonaux.

→ pages : 21, 22, 111, 346.

ou

Mot issu du latin aut, « ou ».

- Soit a et b deux propositions ; « a ou b » est une proposition qui est fausse uniquement si a et b sont

simultanément fausses. Dans ce cas-là, le «ou» est dit inclusif, et est noté : $a \vee b$.

● « a ou bien b » est une proposition qui est fausse si a et b sont simultanément fausses ou si a et b sont simultanément vraies. Dans ce cas-là, on a affaire à un «ou exclusif», qui est noté : $a \vee\vee b$.

→ page : 379.

pair

Mot issu du latin par, «égal».

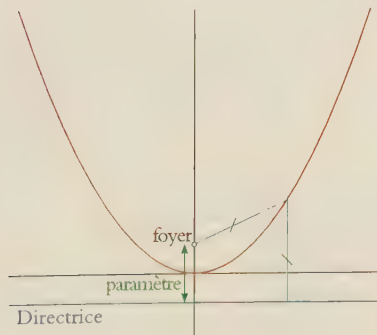
● Un entier relatif pair est divisible par 2, donc de la forme $2q$ avec $q \in \mathbb{Z}$.

paire (fonction)

● Une fonction numérique f définie sur un ensemble D ($D \subset \mathbb{R}$) est dite paire si, pour tout x de cet ensemble, $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$.

parabole

Mot issu du grec parabolê, «comparaison».



● Une parabole est une courbe plane appartenant à la famille des coniques dont chaque point est équidistant d'un point fixe, appelé le foyer, et d'une droite fixe, appelée la directrice. La distance qui sépare le foyer de la directrice est appelée paramètre de la parabole.

● L'équation cartésienne d'une parabole d'axe parallèle à Oy peut s'écrire ainsi :

$$y = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0.$$

→ pages : 95, 179, 182, 274, 288.

parallèle

Mot issu des mots grecs para, «à côté», et allêlous, «l'un l'autre».

● En géométrie plane, des droites parallèles sont des droites qui n'ont aucun point commun ou qui sont confondues.

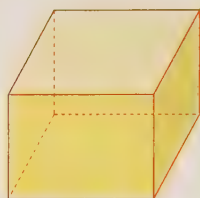
● En géométrie dans l'espace, des droites sont dites parallèles si elles sont coplanaires et si elles sont parallèles dans ce plan.

● Une droite parallèle à un plan est une droite parallèle à une droite de ce plan.

→ pages : 22, 26, 30, 34, 70, 216, 342.

parallélipède

● Un parallélipède est un polyèdre à six faces qui sont parallèles deux à deux.



● Un parallélépipède rectangle, parfois également appelé pavé, est un parallélépipède dont les six faces sont des rectangles.

→ page : 142.

parallélogramme

● On appelle parallélogramme un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

→ pages : 40, 41, 46, 47, 56, 112, 124, 195, 196.

paramètre

Mot issu des mots grecs para, «à côté», et metron, «mesure».

● Le paramètre désigne un nombre connu mais susceptible de varier.

parenthèses (règle des)

● Lorsqu'un calcul comporte des parenthèses, pour effectuer ce calcul, on commence par effectuer les calculs situés dans les parenthèses les plus intérieures, puis les calculs situés dans les parenthèses restantes.

● La présence d'un signe «-» devant une parenthèse change tous les termes de l'éventuelle somme qu'elle contient en leurs opposés.

→ page : 16.

parité

● Déterminer la parité d'un entier, c'est pouvoir dire s'il est pair ou impair.

● Déterminer la parité d'une fonction c'est pouvoir dire si elle est paire ou impaire.

→ pages : 69, 270, 272, 290.

partie

● Soient deux ensembles E et F . E est une partie de F si tous les éléments de E sont des éléments de F . La relation indiquant que E est une partie de F s'écrit « $E \subset F$ » et se lit « E est inclus dans F ».

On dit alors que E est un sous-ensemble de F .

● L'ensemble des parties de F se note $\mathcal{P}(F)$.

Si un ensemble a n éléments, l'ensemble de ses parties a 2^n éléments.

→ pages : 379, 380.

partition

● Une partition d'un ensemble E non vide est un ensemble de parties de E non vides, disjointes deux à deux et dont la réunion est E .

Pascal (Blaise)

Savant et philosophe français (1623-1662).

● Manifestant un intérêt précoce pour les mathématiques, Blaise

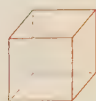
Pascal invente vers 1642 une machine à calculer. Il mène ensuite en parallèle des recherches en physique et des travaux qui donneront naissance aux calculs de probabilités. En particulier, son « triangle arithmétique » donne les coefficients de la loi binomiale.



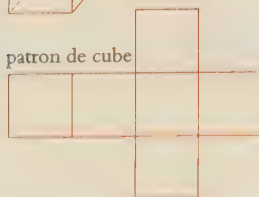
● Il s'intéresse passionnément à la géométrie et aux nouvelles méthodes infinitésimales. En particulier, il détermine les aires définies par une arche de cycloïde et par un arc de sinusoi-de, grâce à des méthodes préfigurant le calcul intégral.

→ pages : 147, 189, 378.

patron



patron de cube



● Faire le patron d'un solide de l'espace revient à en « découper » les arêtes pour le déployer sur un plan.

pentagone

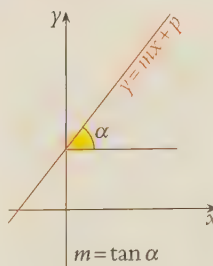
Mot issu des mots grecs *penté*, « cinq », et *gônia*, « angle ».



● Nom donné à un polygone à cinq côtés, qui, par conséquent, a également cinq angles.

pente

● Dans un plan muni d'un repère orthonormal, la pente est le nom donné au coefficient directeur d'une droite.



● Si l'équation de cette droite est de la forme $y = mx + p$, le coefficient directeur de celle-ci est m .

● La pente m est égale à la tangente de l'angle formé par l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = mx + p$.

→ pages : 22, 23.

périmètre

Mot issu du grec *perimetros*, de *peri*, « autour », et *metros*, « mesure ».

● En géométrie, se dit de la mesure de la longueur d'une courbe fermée, ou de la somme des mesures des côtés d'un polygone.

→ pages : 32, 145.

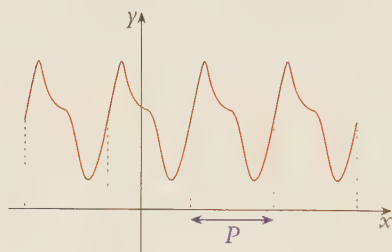
période

Mot issu du grec periodos, «circuit».

● On appelle période d'une fonction f le plus petit nombre P tel que $f(x+P)=f(x)$ pour tout x du domaine de définition de f .

→ pages : 338, 410, 416.

périodique (fonction)



● Une fonction numérique f de variable réelle ayant une période P est dite périodique de période P .

→ pages : 278, 280.

permutation

● Une permutation d'un ensemble E est une bijection de E vers E . Si $\text{Card } E = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), le nombre de permutations de E est $n!$ («factorielle n »). C'est donc le nombre de

façons de ranger n objets dans tous les ordres possibles.

→ page : 382.

perpendiculaire

Mot issu du latin perpendiculum, «fil à plomb».

● En géométrie, deux droites sont perpendiculaires lorsqu'elles font un angle de 90° .

● En géométrie dans l'espace, on réserve le mot «perpendiculaire» à deux droites sécantes.

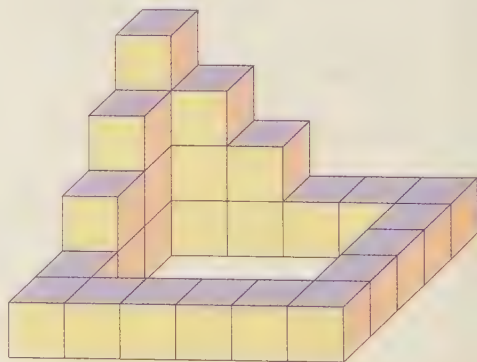
● Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à toute droite de ce plan avec laquelle elle a un point d'intersection.

● Deux plans sont perpendiculaires si une droite de l'un est perpendiculaire à l'autre plan.

→ pages : 21, 22, 30, 220.

perspective

Mot issu du latin perspicere, «voir à travers».



● La perspective est une technique de représentation en deux dimensions sur une surface plane d'objets en trois dimensions.

● La perspective dite « cavalière » est une perspective qui conserve le parallélisme des lignes.

pgcd (plus grand commun diviseur)

● Le pgcd d'entiers naturels est le plus grand commun diviseur de ces entiers.

● Si l'on décompose des entiers naturels en facteurs premiers, leur plus grand commun diviseur est le produit de tous les facteurs premiers qui sont communs à toutes les décompositions avec leur exposant le plus petit.

● Si le plus grand commun diviseur de deux entiers vaut 1, c'est que ces entiers sont premiers entre eux.

→ pages : 424, 428.

→ ppcd.

pi, ou π

Première lettre du mot grec signifiant « périmètre ».

● Cette lettre désigne par convention le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

● Une valeur approchée de π est 3,14.

→ pages : 14, 56, 100, 449.

plan

● Un plan est un espace de dimension deux.

● Un plan est défini par trois points, ou par un point et deux vecteurs non colinéaires. Précisément le plan P passant par un point A de E et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant linéairement indépendants) est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

→ pages : 21, 30, 65, 97, 216.

Poincaré (Henri)

Mathématicien français

(1854-1912).

● Considéré comme l'un des savants les plus renommés de son temps,



Henri Poincaré effectua des recherches dans des domaines des mathématiques aussi divers que les fonctions des variables complexes, la topologie, les équations

différentielles, les équations aux dérivées partielles, la physique mathématique et la mécanique céleste. Intuitionniste, précurseur de la théorie contemporaine du chaos, Henri Poincaré consacra la dernière

partie de sa vie à la philosophie des sciences.

point

Mot issu du latin punctum, de pungere, « piquer ».

● Un point est un élément d'un espace. On peut se le représenter comme l'intersection de deux droites.

→ pages : 21, 101, 124.

Poisson (Siméon)

Mathématicien français (1781-1840).



● Siméon Poisson est l'un des plus importants précurseurs de la physique mathématique.

● Élève puis suppléant de Joseph Fourier, il enseigna d'abord à l'École poly-

technique, puis à la faculté des sciences de Paris. Siméon Poisson appliqua l'analyse à la mécanique céleste, à la théorie de la chaleur, à l'électricité. Il contribua notamment à diffuser le calcul des probabilités.

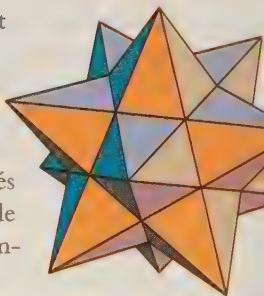
polyèdre

Mot issu des mots grecs polus, « nombreux » et hedra, « base ».

dodécaèdre étoilé

● Un polyèdre est un solide de l'espace dont la frontière est la réunion de polygones plan, appelés faces, se coupant le long de côtés communs, appelés arêtes.

→ page : 457.



polygone

Mot issu des mots grecs polus, « nombreux », et gônia, « angle ».

● Un polygone est une figure formée par une ligne brisée fermée constituant une suite de segments, ou côtés, dont chacun a une extrémité commune, le sommet, avec le précédent et le suivant.

→ pages : 50, 51, 179.

polynôme

Mot issu des mots grecs polus, « nombreux », et nomos, « division ».

● Un polynôme est une combinaison linéaire de puissances d'une variable : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

● On appelle fonction polynôme d'une variable réelle une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par :

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les coefficients

de f . Si $a_n \neq 0$, l'entier naturel n est appelé le degré de f .

→ pages : 238, 240, 290, 292.

pondération

Mot issu du latin ponderatio, de pondus, « poids ».

● En statistiques et dans les calculs de barycentre, la pondération d'une suite de nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$ par une suite de coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ est l'expression :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

population

● En statistiques, la population est le nom donné à l'ensemble d'individus auxquels on s'intéresse.

positif

● Un nombre est dit strictement positif lorsqu'il est supérieur à 0.

postulat

● Un postulat est un principe premier non démontré.

● Ce terme est tombé en désuétude. On lui préfère celui d'axiome.

→ pages : 117, 119, 121, 123.

pourcentage

● Soit p et x deux nombres réels positifs. On appelle « p pour cent » du réel x le nombre $\frac{px}{100}$, noté « $p\%$ » de x .

→ pages : 25, 60, 232.

ppcm (plus petit commun multiple)

● Le plus petit commun multiple d'entiers naturels est le plus petit multiple non nul commun à ces entiers naturels.

● Pour deux entiers a et b , le produit de leurs pgcd par leurs ppcm est égal à leur produit ab .

→ pages : 424, 428.

premiers (entre eux)

● Deux entiers naturels a et b sont dits premiers entre eux lorsque leur pgcd est égal à 1.

Leur ppcm est alors égal à leur produit.

→ pgcd, ppcm.

premiers (nombres)

● Un entier naturel premier n est un entier naturel ne possédant que deux diviseurs entiers naturels, 1 et n .

→ page : 426.

preuve

Mot issu du latin probare, « approuver ».

● Donner une preuve ou prouver est synonyme de démontrer.

● En arithmétique, la preuve d'une opération ou d'un calcul est un procédé mécanique permettant de contrôler qu'il n'est pas faux.

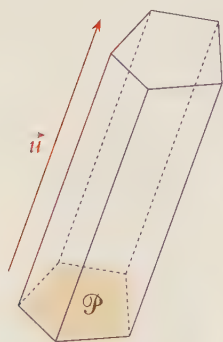
primitive

● On appelle primitive d'une fonction f sur un intervalle I une fonction F dont la dérivée est f sur l'intervalle I .

→ pages : 141, 188, 312, 326.

prisme

Mot issu du grec prizeîn, « scier ».



● Soit un polygone $\mathcal{P}$ et un vecteur $\vec{u}$ non nul et non parallèle au plan de $\mathcal{P}$. La réunion des segments $[A, B]$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, le point A décrivant $\mathcal{P}$, est un prisme de base $\mathcal{P}$.

Le point B décrit aussi une deuxième base de ce prisme.

→ pages : 46, 47.

probabilités (théorie des)

● La théorie des probabilités est une branche des mathématiques née de l'étude des jeux de hasard à laquelle contribuèrent notamment les mathématiciens français Pierre de Fermat, Blaise Pascal et Jacques Bernoulli.

● Cette théorie fut axiomatisée, au

xx^e siècle, par le mathématicien soviétique Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov.

→ pages : 378, 384, 386, 388.

produit

● Résultat d'une multiplication.

→ pages : 15, 17, 105, 246.

produit (équation)

● On appelle équation produit toute équation de la forme $AB=0$ où A et B représentent deux expressions contenant la ou les inconnues considérées.

→ page : 246.

produit scalaire

Mot issu du latin scala, « échelle ».

● Dans le plan et dans l'espace, le produit scalaire de deux vecteurs est le nombre $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Soit quatre points distincts A, B, C et D , le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ est le nombre égal à $A'B' \times CD$, avec A' et B' images de A et B par la projection orthogonale de la droite (AB) sur la droite graduée (CD) .

● Si $\vec{u}$ a pour composantes (u_1, u_2) et $\vec{v}$ a pour composantes (v_1, v_2) , alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le nombre $u_1v_1 + u_2v_2$.

● Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul.

→ pages : 358, 360.

produits en croix

- L'expression $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à une égalité sans dénominateur : $ad = cb$, appelée «égalité des produits en croix».

→ pages : 17, 24, 246.

produit vectoriel

Mot issu du latin vector, «conducteur».

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel E euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{B}$ une base ortho-normée directe de E , (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

- On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur de E de coordonnées :

$$\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - zy'$$

$$\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = zx' - xz'$$

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

dans la base $\mathcal{B}$.

- Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur normal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, de norme égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et orienté de manière que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit direct.

→ pages : 112, 368.

progression

Mot issu du latin progressio, «progrès».

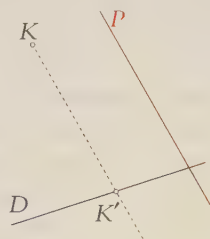
- Le terme de progression est parfois utilisé à la place de suite.

- On parlera ainsi de progression arithmétique, géométrique, etc.

→ page : 170.

projection

Mot issu du latin projectio, de projicere, «projeter».



- Une projection d'un point K parallèlement à une droite P sur une droite D est une application qui à K fait correspondre l'intersection de D et de la parallèle à D passant par K .

→ pages : 118, 218.

proportionnelles (suites)

- Des suites sont dites proportionnelles si le rapport de deux nombres de même rang dans ces suites est constant.

- Des nombres sont dits inversement proportionnels s'ils forment des suites de nombres telles que les nombres de l'une sont proportionnels aux inverses des nombres de l'autre.

→ page : 229.

puissance

Mot construit sur l'ancien participe présent du verbe «pouvoir».

● On appelle puissance entière d'un réel x le nombre noté x^n ($n \in \mathbb{N}$), égal au produit de n facteurs égaux à x .

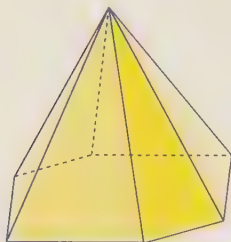
● Plus généralement, $x^a = e^{a \ln x}$.

→ pages : 18, 132, 181, 230

pyramide

Mot issu du latin pyramis, «pyramide».

● On appelle pyramide un polyèdre formé d'un polygone convexe plan (la base) et de tous les triangles ayant pour base les différents côtés du polygone et un sommet commun.



Cas particulier :

une pyramide régulière a pour base un polygone régulier dont le sommet se projette orthogonalement au centre de cette base.

→ pages : 46, 47, 185, 186.

Pythagore

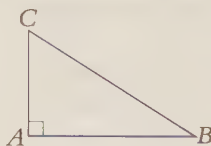
Philosophe et mathématicien grec (570-480 av. J.-C.).

● Fondateur de l'école qui porte son nom et qui donne naissance à un des plus importants courants philosophiques et mystiques de l'Antiquité grecque, Pythagore est lui-même

assez mal connu. Plusieurs légendes et anecdotes en tous genres sont attachées à son nom.

→ pages : 36, 54, 85, 120.

Pythagore (théorème de)



● Dans un triangle ABC rectangle en A , on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Autrement dit :

« Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse. »

La réciproque est vraie.

→ pages : 36, 120.

quadrant

Mot issu du latin quadrare, «rendre carré».

● Un quadrant est un secteur angulaire dont la mesure est 90° .

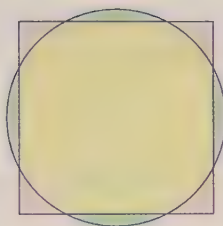
→ page : 21.

quadrature

Mot issu du latin quadratus, «carré».

● En analyse, on appelle quadrature le fait de trouver un «carré» ayant même aire qu'une aire cherchée. On emploie parfois le terme de quadrature pour celui d'intégrale.

● La quadrature du cercle est la construction d'un carré d'aire égale à



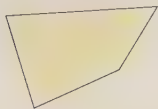
celle d'un disque donné. Il n'est pas possible de réaliser celle-ci à la règle et au compas.

Ce problème célèbre a donné

par extension son nom à une situation insoluble.

→ pages : 182, 183, 190.

quadrilatère



*Mot issu des mots latins **quatro**, « quatre » et **lateris**, « flanc ».*

● Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés.

→ pages : 40, 41, 54, 124.

quotient

*Mot issu du latin **quoties**, « combien de fois ».*

● On appelle quotient d'un réel a par un réel b non nul le réel x tel que $a = bx$; on l'écrit $\frac{a}{b}$.

● Un quotient est le résultat d'une division.

→ pages : 15, 17, 69, 99, 109.

racine

*Mot issu du latin **radix**, « racine ».*

● On appelle racine d'une équation la solution de cette équation.

● La racine d'un polynôme P est la racine de l'équation $P(x) = 0$.

→ page : 298.

racine carrée, cubique, $n^{\text{ième}}$

● La racine carrée positive d'un réel positif x , notée $\sqrt{x}$, est le nombre positif réel dont le carré est x .

● La racine cubique du réel positif x , notée $\sqrt[3]{x}$, est le nombre dont le cube est x .

● La racine $n^{\text{ième}}$ positive d'un réel positif a est le réel positif α noté $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$ tel que $\alpha^n = a$.

● Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, chaque nombre complexe a a exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$.

→ pages : 36, 83, 298, 322.

radian

*Mot issu du latin **radius**, « rayon ».*

● Unité de mesure d'angle, dont le symbole est « rad », équivalent à l'angle qui, ayant son sommet au centre d'un cercle, intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc de longueur égale à celle du rayon du cercle. $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$. $\pi \text{ rad} \approx 180^\circ$.

→ pages : 166, 200, 276, 294.

radical

*Mot issu du latin **radix**, « racine ».*

● En arithmétique, ce terme désigne le signe $\sqrt{\quad}$, symbole de la racine carrée.

→ pages : 107, 230.

raison

Mot issu du latin ratio,
«raison».

● En algèbre, ce terme désigne la différence entre deux termes consécutifs d'une suite arithmétique. Il désigne aussi le quotient de deux termes consécutifs d'une suite géométrique.

rapport

Mot issu de l'ancien français raipor,
«rapport».

● En arithmétique, rapport est synonyme de quotient.

● En géométrie, le terme de rapport désigne le coefficient intervenant dans la définition de plusieurs transformations ponctuelles, comme les affinités, les similitudes ou les homothéties. Par exemple, pour la projection orthogonale : soit deux axes $(D, \vec{i})$ et $(D', \vec{j})$ d'un plan affine ; quels que soient les points A et B distincts de D ayant respectivement pour projection orthogonale A' , B' sur D' ,

le quotient $\frac{A'B'}{AB}$ ne dépend pas du

choix des points A et B ; ce quotient est le rapport de projection orthogonale de l'axe $(D, \vec{i})$ sur $(D', \vec{j})$.

→ pages : 117, 119, 121, 123.

rapporteur

● Un rapporteur est un instrument de mesure d'angle qui se présente

sous la forme d'un demi-cercle ou d'un cercle gradué.

ratio

Mot latin.

● Un ratio désigne un rapport, exprimé en pourcentage, entre deux grandeurs numériques.

→ page : 14.

rationnelle (fonction)

● On appelle fonction rationnelle sur

$\mathbb{R}$ toute fonction de type $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$,

P et Q étant deux fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$.

→ page : 14.

rationnels (nombres)

● Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'exprimer sous la forme du quotient d'un entier par un entier non nul.

● L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

→ page : 14.

rayon

Mot issu du latin radius, «rayon».

● En géométrie plane, un rayon est un segment dont une extrémité est le centre d'un cercle et l'autre un point quelconque du cercle. Le rayon d'un cercle est aussi le nombre égal à la moitié du diamètre.

→ pages : 38, 39.

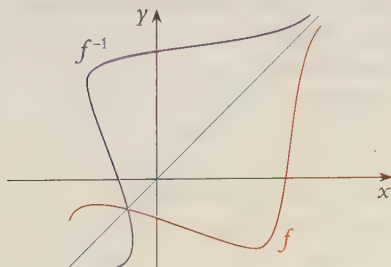
réciproque

Mot issu du latin reciprocus, «réciproque».

● On appelle bijection réciproque d'une bijection f définie sur un intervalle I la fonction, notée f^{-1} , définie par :

si $y = f(x)$, alors $x = f^{-1}(y)$.

● Exemple : $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont deux bijections réciproques. Leurs graphes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice dans un repère orthonormal.



● En logique, la proposition réciproque de la proposition « A implique B » est la proposition « B implique A ».

→ pages : 36, 119, 316.

rectangle

Mot issu du latin rectangulus, «rectangle».

● Un rectangle est un parallélogramme dont les côtés sont deux à deux perpendiculaires.

→ pages : 52, 143.

récurrance (raisonnement par)

Mot issu du latin recurrens, «courir en arrière».

● Pour prouver qu'une proposition générale est vraie pour tout entier naturel, on peut établir d'abord qu'elle est vraie pour un premier entier n_0 (principe d'initialisation) puis que, si elle est vraie pour un entier m quelconque, elle sera aussi vraie pour son successeur $m+1$ (principe d'hérédité). Le principe, dit d'induction, affirme alors que la propriété est vraie pour tout entier naturel à partir de n_0 .

→ page : 306.

réduction, réduire

Mot issu du latin reducere, «rapprocher».

● La réduction d'une somme est la réduction du nombre de ses termes. La réduction d'une fraction est la recherche d'une fraction irréductible égale à la fraction initiale.

● Réduire deux ou plusieurs fractions au même dénominateur consiste à rechercher un dénominateur commun à toutes ces fractions.

→ page : 15.

réduite (équation)

● On appelle équation réduite d'une droite une équation de la forme $y = ax + b$ ou $x = m$.

→ page : 15.

réels (nombres)

Mot issu du latin res, « chose ».

● Un nombre réel est un élément de l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$. Il s'agit de l'ensemble de tous les nombres susceptibles de mesurer un segment et de leurs opposés.

→ pages : 14, 70, 98-105.

réflexion

● Le terme réflexion est synonyme de symétrie axiale par rapport à une droite.

→ page : 210.

règle

Mot issu du latin regula, « règle ».

● La règle est un instrument de tracé rectiligne et, parfois, gradué.

● Ce terme désigne aussi une suite d'actions précisant un point (ou une liste de points) de méthode.

→ pages : 30, 70, 103, 120.

relatifs (nombres)

« Relatif » est un mot issu du latin referre, « rapporter ».

● Un nombre relatif est un élément de l'ensemble des nombres relatifs noté $\mathbb{Z}$. Il se note comme un entier naturel assorti d'un signe.

● On obtient les nombres relatifs en complétant les nombres entiers naturels par leurs opposés.

→ pages : 117, 119, 121, 123, 117, 119, 121, 123.

relation

Mot issu du latin relatio, « relation ».

● Une relation est une propriété qui porte sur l'ensemble des couples formés d'un élément d'un premier ensemble et d'un élément d'un second.

→ pages : 22, 123.

remarquables (identités)

● On appelle identités remarquables certaines égalités algébriques fréquemment utilisées et vérifiées quels que soient les nombres qu'elles contiennent.

● Exemples :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

→ page : 16.

repérage

● On appelle repérage l'action permettant de déterminer la place d'un point ou d'un objet dans l'espace ou le plan.

→ page : 226.

repère

● En géométrie, un repère est un ensemble d'éléments permettant de définir des coordonnées pour chaque point : par exemple, un tri-

plet de points (O, I, J) tels que $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ soient des vecteurs indépendants.

→ pages : 21, 23, 493.

reste

● En arithmétique, le reste d'une division (r) est la différence entre le dividende (a) et le produit du diviseur par le quotient (q) :

$$a = bq + r (0 < r < b).$$

→ pages : 420, 422.

restriction

● Soit f une fonction définie sur D et I un intervalle de D . On appelle restriction de f sur I la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)$, pour tout x de I .

● Exemple : la restriction de la fonction cosinus, définie sur $\mathbb{R}$, à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

réunion

● En algèbre, le terme de réunion de deux ensembles E et F désigne l'ensemble regroupant les éléments de E et les éléments de F . On le note $E \cup F$.

révolution

Mot issu du latin revolutio, de revolvere, « retourner ».

● Ce terme désigne le mouvement périodique d'un corps autour d'un axe ou d'un point.

● En géométrie, une surface de révolution est créée par la rotation d'une courbe, appelée génératrice, autour d'une droite fixe : l'axe de révolution.

→ pages : 224, 234.

Riemann (Bernhard)

Mathématicien allemand

(1826-1866).



● Les travaux de Bernhard Riemann ont porté principalement sur la théorie des nombres, sur des fonctions de variables complexes, sur l'intégration et sur les fondements de la géométrie.

● Il établit aussi

les bases de la topologie et introduit un nouveau type de fonction : continue et non dérivable.

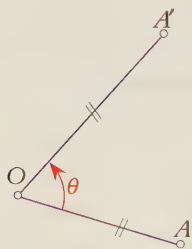
● Les géométries dites riemanniennes généralisent les géométries non euclidiennes. Elles sont très utilisées en physique, en particulier dans le cadre des théories relativistes, et sont à la base du renouveau de la géométrie à la fin du XIX^e siècle.

→ page : 236.

rotation

*Mot issu du latin **rotatio**, de **rotare** «tourner».*

- Dans un plan orienté, on appelle rotation d'angle θ autour d'un point O , la transformation ponctuelle telle qu'un point A diffèrent de O ait pour image le point A' tel que $OA = OA'$



et que l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ soit égal à θ . L'image du point O est O lui-même.

- Dans le cas de la géométrie dans l'espace, on appelle rotation d'angle θ autour d'un axe (D) la transformation dont la restriction à tout plan perpendiculaire à l'axe est une rotation plane ayant pour angle θ et pour centre l'intersection du plan et de l'axe (D) .

→ pages : 45, 131, 208.

scalaire

*Mot issu du latin **scala** «échelle».*

- Une grandeur est dite scalaire lorsque sa mesure dans un système d'unités est un nombre.
- On oppose à la notion de scalaire celle de vecteur.

→ page : 360.

→ Vecteur.

scalène

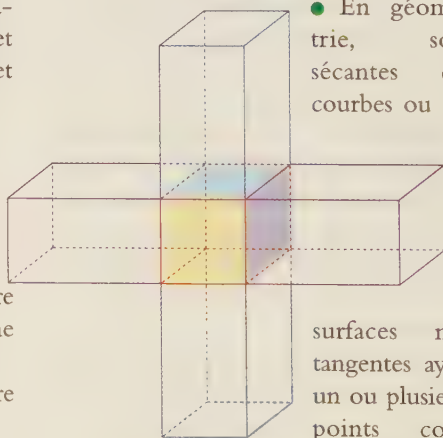
*Mot issu du grec **skalenos**, «oblique».*

- Un triangle est dit scalène lorsqu'il a trois côtés inégaux.
- On emploie quelquefois ce mot pour parler d'un triangle quelconque.

scientifique (notation)

- La notation scientifique d'un nombre décimal est son écriture sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal n'ayant qu'un chiffre significatif avant la virgule et où n est un entier relatif positif ou non.
- Par exemple, 0,0312 se note $3,12 \cdot 10^{-2}$.

sécant



- En géométrie, sont sécantes des courbes ou des

surfaces non tangentes ayant un ou plusieurs points communs.

→ pages : 26, 31.

second degré

- On appelle équation du second degré une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ et où a , b et c sont des éléments de $\mathbb{R}$.

→ pages : 216, 256.

secteur

Mot issu du latin secare, «couper».

- En géométrie, un secteur angulaire est une partie de plan délimitée par deux demi-droites de même sommet.

segment

Mot issu du latin segmentum, «morceau coupé».

- Partie de droite limitée par deux points dits extrémités. Le segment d'une droite (AB) compris entre les points A et B se note $[AB]$.

→ pages : 30, 51, 65, 128.

semblables

- Deux figures F et F' du plan sont dites semblables s'il existe une similitude s telle que $s(F) = F'$. Deux triangles ayant les mêmes angles sont semblables.

→ page : 214.

sens

Mot issu du latin sensus, «sens».

- En géométrie, deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits de même sens

si les droites (AB) et (CD) sont parallèles et si $ABDC$ forme un parallélogramme convexe.

→ page : 101.

série

Mot issu du latin series, «série».

- Une série désigne une suite particulière, dont chaque terme est lui-même une somme d'éléments d'une suite.

si... alors

- Quand l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on a en particulier : «si P est vrai, alors Q est vrai».

si et seulement si

- Quand l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on peut dire aussi : « P est vrai si et seulement si Q est vrai».

signe

Mot issu du latin signum, «signe».

- Le terme de «signe» désigne soit le nom de n'importe quel symbole $+$, $-$, $\times$, $=$, $\div$, $<$, $>$, etc., soit le nom du symbole particulier signifiant moins : « $-$ ».

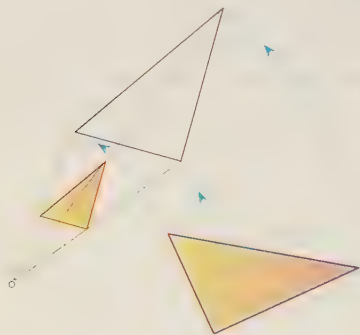
- On appelle «règle des signes» le fait que le produit de deux nombres de même signe soit positif et que celui de deux nombres de signes contraires soit négatif.

→ pages : 19, 103, 252.

similitude

Mot issu de l'adjectif latin *similis*, « semblable ».

● En géométrie, une similitude est une transformation ponctuelle du



plan qui conserve les angles. Elle se compose en général d'une rotation et d'une homothétie.

● Une application f du plan P dans lui-même est une similitude s'il existe une isométrie g et une homothétie H de rapport strictement positif telles que : $f = H \circ g$. Le rapport de H est appelé rapport de la similitude.

Si g est un déplacement, on dit que f est une similitude directe.

Si g est un antidéplacement, on dit que f est une similitude indirecte ou inverse.

→ pages : 214, 406.

simplification

Mot issu du latin *simplex*, « simple ».

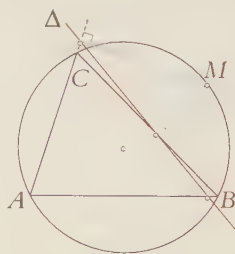
● En arithmétique, on parle de simplification de fractions lorsqu'on tente de réduire une fraction donnée à une fraction irréductible. On se sert de la propriété qui autorise à multiplier ou diviser le numérateur et le dénominateur sans changer la valeur du rapport. Ainsi $\frac{ax}{ay} = \frac{x}{y}$.

→ page : 16.

Simson (théorème de)

Du nom du mathématicien anglais Tom Simson (1710-1761).

● Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point M du plan sur les trois côtés d'un triangle ABC sont alignés si et seulement si M



appartient au cercle circonscrit au triangle. Ainsi, à tout point M du cercle circonscrit correspond

une droite Δ passant par les trois pieds et appelée droite de Simson de M .

simultanés

Mot issu du latin *simul*, « en même temps ».

● Se dit d'événements ou phénomènes se produisant en même temps.

→ pages : 250, 251.

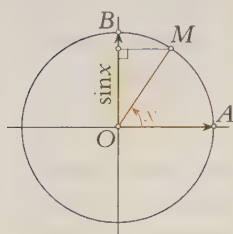
singleton

Mot issu de l'anglais *single*, «seul».

- Ensemble constitué d'un seul élément. Il est noté $\{a\}$.

sinus

Mot latin signifiant «pli».



- Soit le cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Soit M un point quelconque de ce cercle et x

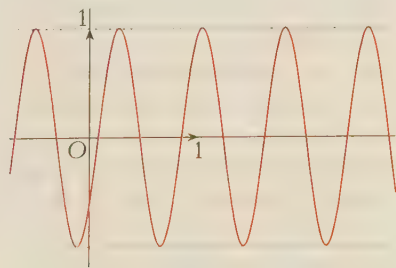
une mesure de l'angle orienté du couple $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Le sinus de x est l'ordonnée de M .

- La fonction trigonométrique $(x \mapsto \sin x)$ est définie pour tout réel x , elle est impaire et périodique de période 2π .

→ pages : 258, 276, 278.

sinusoïde



- Une sinusoïde est une représentation graphique de la fonction sinus,

ou, à une translation près, de la fonction cosinus. Plus généralement, il s'agit de toute représentation graphique d'une fonction de type $x \mapsto \sin(ax+b)$.

→ pages : 117, 119, 121, 123.

solution

- On appelle solution d'une équation ou d'une inéquation, dans un ensemble numérique donné, tout nombre de cet ensemble qui rend l'équation ou l'inéquation vraie.

→ pages : 16, 19, 242.

somme

Mot issu du latin *summus*,

«le plus élevé».

- Une somme est le résultat d'une addition.

● On parle souvent de «somme algébrique» pour désigner une expression de la forme $a+b$ qu'il s'agisse d'une addition comme $2+3$ ou d'une soustraction déguisée comme $4+(-7)$.

- Dans le cas d'une série convergente, on appelle somme le nombre vers lequel converge la suite des sommes partielles de la série.

→ pages : 16, 66, 112.

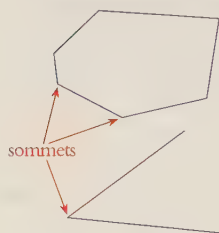
sommet

Mot issu de l'ancien français *som*,

«sommet», du latin, *summus*,

«le plus élevé».

- Un sommet est le point commun à deux côtés consécutifs d'un poly-



gone. Dans le cas d'un angle, le sommet est l'intersection des deux demi-droites formant les côtés de cet angle. Le sommet

d'un cône est le point commun à toutes les génératrices de ce cône.

→ pages : 31, 33.

sous-ensemble

- On appelle sous-ensemble d'un ensemble E une partie de E .

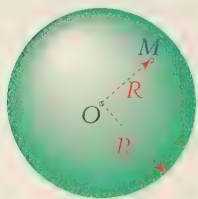
soustraction

Mot issu du latin subtrahere, «retirer».

- La soustraction d'un nombre x à un nombre y est l'addition de x et de l'opposé de y .

sphère

Mot issu du grec sphaira, «boule».



- Surface de l'espace définie par un centre O et un rayon R . La sphère est l'ensemble des points M de l'es-

pace tels que $OM = R$.

→ pages : 46, 47, 224.

spirale

Mot issu de l'ancien français espiralle, «spirale».



- C'est une courbe plane qui décrit des révolutions autour d'un point en s'en éloignant de plus en plus.

statistiques

Mot issu du latin status, «état».

- Ce terme désigne l'ensemble des méthodes mathématiques qui, à partir d'un ensemble de données issues d'expériences, se propose d'élaborer des modèles autorisant des prévisions.

- Ensemble de données d'observation relatives à un groupe d'individus ou d'unités.

→ pages : 29, 374.

substitution

Mot issu du latin substitutio, de substituere, «placer sous».

- Dans une expression contenant un symbole A , substituer un symbole A à un symbole B , c'est remplacer B par A . On utilise notamment ce procédé pour résoudre des équations ou pour appliquer des théorèmes généraux à des situations particulières.

→ page : 26.

suffisante (condition)

- Si une proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, la proposition P est une condition suffisante pour que la proposition Q soit vraie.

→ pages : 117, 119, 121, 123.

suite

Mot issu du latin secutus, « ayant suivi ».

- Une suite est constituée d'un ensemble d'éléments pris dans un ordre déterminé.
- On appelle suite réelle toute application d'une partie P de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit U une suite : $U(n)$ est souvent noté U_n , et appelé le terme d'indice, ou de rang, n .

- Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est qualifiée de récurrente si un ou plusieurs termes sont déterminés par la connaissance d'un ou plusieurs des termes de rang inférieur.

→ pages : 139, 300, 302, 310, 332.

suite arithmétique

- Soit un nombre réel r . On dit qu'une suite réelle $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $U_{n+1} = U_n + r$.

Une suite arithmétique est définie par son premier terme U_0 et par son rayon r .

→ pages : 139, 304, 332.

suite géométrique

- Soit un nombre réel q . On dit qu'une suite réelle $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $U_{n+1} = qU_n$.

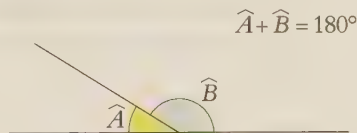
Une suite géométrique est définie par son premier terme U_0 et par son rayon r .

→ pages : 170, 304, 332.

supérieur

- Une relation d'ordre sur un ensemble peut être notée $\geq$. $x \geq y$ se lit « x est supérieur ou égal à y ».

supplémentaire



- En géométrie, des angles sont dits supplémentaires lorsque la somme de leurs mesures exprimée en radians est égale à π (ou à 180° , en degrés).

→ page : 31.

surface

- En géométrie, une surface plane est un ensemble de points intérieurs à une courbe fermée.

- Dans l'espace, une surface est un ensemble de points dont les coor-

données (x, y, z) sont liées par une relation de type $f(x, y, z)=0$. Par exemple, la sphère est une surface d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

→ pages : 17, 65, 72.

symbole

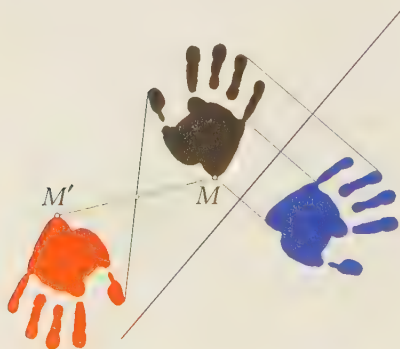
Mot issu du grec symbolon, « signe ».

● Le terme de symbole désigne tout élément graphique servant à noter les éléments du langage mathématique.

● En mathématiques, on distingue les symboles ensemblistes communs à toutes les théories, comme $\exists, \forall, \subset, \in$, etc., des autres symboles comme $+, -, \times$, etc., propres à des domaines particuliers.

symétrie

Mot issu des mots grecs sun, « avec », et metron, « mesure ».



● Une symétrie est une transformation ponctuelle qui à un point M associe un point M' tel que le segment $[MM']$ a soit un point fixe pour milieu (symétrie par rapport à un point, ou symétrie centrale), soit une droite fixe comme médiatrice (symétrie par rapport à une droite, ou symétrie axiale), soit un plan fixe comme plan médiateur (symétrie par rapport à un plan).

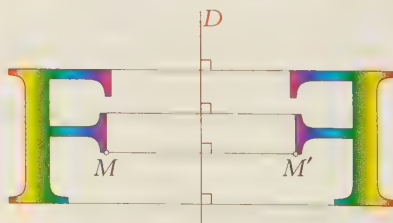
→ pages : 42, 122, 187, 196, 410.

symétrie (axe de)

● L'axe d'une symétrie d'une figure est la droite δ telle que la figure soit invariante dans la symétrie par rapport à la droite δ .

→ pages : 41, 44, 131, 196.

symétrie orthogonale



● Dans un plan, la symétrie orthogonale par rapport à une droite D associe à tout point M du plan le point M' tel que D soit la médiatrice du segment $[MM']$. C'est un antidéplacement.

→ pages : 44, 166.

système

Mot issu des mots grecs sustêma, «ensemble».

● On appelle système d'équations linéaires un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = \beta_1 \dots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = \beta_i \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = \beta_n \end{cases}$$

où $a_{11}, \dots, a_{np}, \beta_1, \dots, \beta_n$, sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et où les x_i sont les inconnues.

→ pages : 26, 262, 264, 266, 268, 352.

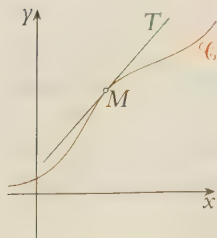
table

Mot issu du latin tabula, «table».

● Une table est un recueil de données groupées de façon systématique (en colonnes ou en tableau).

tangente

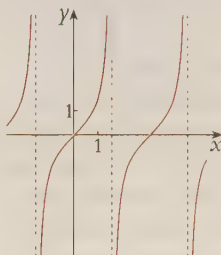
● On appelle tangente en un point M d'un cercle la droite qui, parmi toutes les droites passant par M , n'a qu'un et un seul point commun avec ce cercle. La tangente en M à un cercle de centre O est perpendiculaire au rayon (OM) .



● Pour une courbe plane d'équation cartésienne $y=f(x)$, lorsque $f'(x)$ existe, la courbe admet en $M(x_0, y_0)$

une tangente d'équation :

$$(x-x_0)f'(x_0)=y-y_0.$$

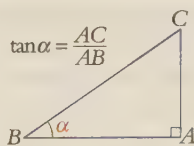


● En trigonométrie, on appelle fonction tangente la fonction numérique à variable réelle, notée «tan», et définie, pour tout réel

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ par } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

→ pages : 160, 276, 278, 284, 288, 410, 412.

tangente d'un angle



● Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est le quotient de la longueur

du côté opposé par celle du côté de l'angle droit adjacent à l'angle considéré.

→ pages : 160, 276.

taux d'accroissement moyen

Mot issu du latin taxare, «évaluer».

● Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 et x_1 deux réels distincts de I ; on

appelle taux d'accroissement moyen de f entre x_0 et x_1 le réel $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

terme

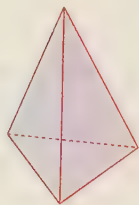
Mot issu du latin terminus, « borne ».

● En mathématiques, on appelle terme tout nombre intervenant dans une opération. Pour certaines opérations, les termes prennent des noms particuliers (exemples : facteur, dividende, etc.).

→ page : 15.

tétraèdre

Mot issu du grec tetra « quatre », et hedra, « face ».



● Un tétraèdre est un polyèdre convexe qui a quatre faces, six côtés et quatre sommets.

→ pages : 46, 47, 112, 222.

Thalès de Milet

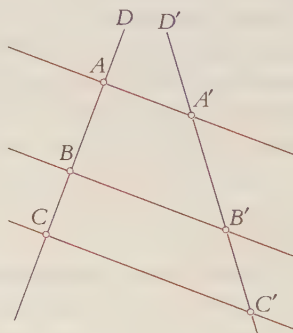
Mathématicien et philosophe grec (625-547 av. J.-C.).

● Thalès de Milet, considéré par la tradition comme l'un des Sept Sages de la Grèce, aurait rapporté d'Orient les éléments de la géométrie et de l'algèbre. On lui attribue la première mesure exacte du temps, ainsi que des travaux sur les relations des angles avec les triangles. Il se rendit

célèbre par la prédiction exacte d'une éclipse de Soleil.

→ pages : 60, 116, 117.

Thalès (théorème de)



● Soit deux droites D et D' .

Si trois parallèles coupent ces deux droites respectivement en A, B, C et A', B' et C' .

On a alors : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$.

→ pages : 20, 34, 60, 118.

théorème

Mot issu du grec theôrêma, « objet d'étude ».

● Ce terme désigne usuellement une proposition « vraie » dans une théorie, c'est-à-dire une proposition qui peut y être démontrée à partir des axiomes.

→ pages : 34, 36.

théorie

Mot issu du grec theôria, «action d'observer».

- Une théorie est un ensemble d'énoncés et de définitions systématiquement organisés.

topologie

Mot issu du grec topos, «lieu», et logos, «raison».

- La topologie est une branche des mathématiques née de l'étude des propriétés géométriques se conservant par déformation continue. Elle s'est ensuite généralisée pour englober les notions de limite et de voisinage.

transformation

Mot issu des mots latins trans, «au-delà», et formare, «former».

- On appelle transformation toute application d'un espace de points ou d'objets mathématiques dans lui-même.

→ pages : 42, 44, 109, 123, 131, 194, 195, 406.

translation

Mot issu du latin translatio, «transfert».

- On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application transformant M en M' telle que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

→ pages : 40, 43, 44, 194, 195.

trapèze

Mot issu du grec trapezion, de trapeza «table à quatre pieds».

- Un trapèze est un quadrilatère ayant deux de ses côtés parallèles.

→ pages : 34, 198.

triangle

Mot issu du latin triangulum, de tres, «trois», et angulum, «angles».

- Un triangle est un polygone à trois côtés.

→ pages : 14, 32, 33, 35, 52, 352.

triangulaire (inégalité)

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle inégalité triangulaire l'inégalité $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

- Étant donné trois points A, B, C , on a $AB \leq AC + CB$, c'est-à-dire que la longueur d'un côté du triangle est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres. S'il y a égalité, c'est que les trois points A, B, C sont alignés.

trièdre

- Dans l'espace, un trièdre est la donnée de trois demi-droites non coplanaires distinctes



deux à deux et de même origine.

→ page : 220.

trigonométrie

Mot issu du grec trigônon, «triangle».

● La trigonométrie est l'étude des propriétés des fonctions circulaires des angles et des arcs : sinus, cosinus, tangente, etc.

→ pages : 35, 258, 260, 294, 360.

trinôme

Mot issu des mots grecs tri, «trois» et nomos, «division».

● Un trinôme est un polynôme formé de trois termes.

● On appelle trinôme du second degré une fonction polynôme de degré 2 comme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a , b et c sont des réels et $a \neq 0$.

→ pages : 256, 288.

triplet

● En algèbre, un triplet est l'élément (x, y, z) du produit $E \times F \times G$ de trois ensembles E , F et G .

● Ce terme désigne donc une suite de trois éléments.

trisection

● La trisection est la division d'un ensemble ou d'une grandeur en trois parties égales.

→ page : 121.

trivial

● En mathématiques, trivial signifie évident.

trois (règle de)

● La règle de trois est le nom donné couramment à une certaine technique de résolution d'un problème de proportionnalité dans lequel on connaît trois nombres a , b , c et on voudrait en connaître un quatrième vérifiant $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$.

→ pages : 24, 60, 81.

troncature

● La troncature est l'opération consistant à ne retenir qu'une partie des décimales d'un nombre.

unité

Mot issu du latin unitas, «unité».

● «Unité» désigne une grandeur finie prise comme terme de comparaison avec des grandeurs de même espèce. On peut choisir comme unité de mesure une grandeur arbitraire.

● On emploie aussi parfois «unité» à la place du nombre 1.

→ pages : 65, 101.

univers

Mot issu du latin universus, «intégral».

- En probabilités, un univers est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une observation ou d'une expérience.

valeur absolue, voir absolue (valeur)

variable

Mot issu du latin variabilis, «variable».

- En mathématiques, on appelle variable un aléa numérique qui peut prendre ses valeurs à l'intérieur d'un ensemble.
- pages : 22, 29.

variable aléatoire

- Dans le domaine des probabilités, on appelle variable aléatoire un aléa numérique dont les valeurs sont associées aux résultats d'une expérience aléatoire.
- pages : 388 à 391.

variance

Mot construit sur le mot français variant.

- En statistiques, on appelle variance la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
 - La variance est égale à la différence entre la moyenne des carrés des valeurs d'un caractère et le carré de la moyenne de ces valeurs.
- page : 372.

variation

- Étant donné une fonction numérique f définie sur un intervalle I , on appelle variation de f entre x_0 et x_1 de I la différence $f(x_1) - f(x_0)$.
- On appelle variation relative le quotient $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{f(x_0)}$.

→ pages : 272, 280, 290, 306.

variation (sens de)

- Étudier le sens de variation d'une fonction numérique de la variable réelle, c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est croissante, décroissante ou constante.
 - Étudier le sens de variation d'une suite, c'est déterminer si cette suite est croissante, décroissante ou encore constante.
- pages : 144, 150, 280.

vecteur

Mot issu du latin vehere, «transporter».

- On appelle vecteur $\overrightarrow{AB}$ l'ensemble de tous les couples (C, D) tels que $ABDC$ est un parallélogramme.
- pages : 21, 43, 118, 124, 284, 340, 342.

vectoriel (calcul)

- Le calcul vectoriel désigne l'ensemble des règles et des méthodes de calcul avec des vecteurs.
- pages : 127, 130, 364, 366.

vertical

Mot issu du latin vertex, « sommet ».

- Se dit d'une droite ou d'un plan perpendiculaire à une droite ou à un plan de référence (dit « horizontal »).

vide

Mot issu du latin populaire vocitus, de vocuus, vacuus, « vacuité ».

- Il existe un seul ensemble n'ayant aucun élément, l'ensemble vide ; il est noté $\emptyset$.

Viète (François)

Mathématicien français (1540-1603).

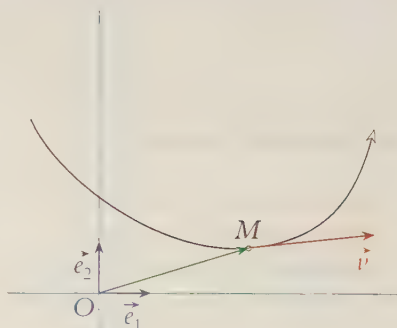


- François Viète fut un pionnier de la standardisation de l'écriture des symboles mathématiques. Il introduisit notamment l'usage des lettres dans le calcul

(calcul littéral). Viète est considéré comme le véritable fondateur de l'algèbre.

- Toutes ses recherches sont liées à l'astronomie.

→ page : 288.

vitesse (vecteur)

- Dans le plan, le mouvement d'un point M par rapport à un repère orthonormal est défini par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (x(t), y(t))$$

où x et y sont deux fonctions définies sur un intervalle de temps I .

- Si x et y sont dérivables au point t de I , on appelle vecteur vitesse de M à l'instant t le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$.

→ pages : 285, 408.

volume

Mot issu du latin volumen, « rouleau ».

- Un volume est une partie de l'espace à trois dimensions limitées par une surface.

- Ce terme désigne aussi la mesure de cette partie.

→ pages : 14, 334.

Weierstrass (Karl)

*Mathématicien allemand
(1815-1897).*

● Karl Weierstrass est l'un des principaux rénovateurs de l'analyse. En 1865, il donna, en particulier, la définition moderne de la limite d'une fonction. Il



développa en outre la théorie des fonctions analytiques et construisit une fonction continue dérivable en aucun point. Il

élabora une construction des nombres réels.

→ pages : 147, 151, 159.

Zénon d'Élée

Philosophe grec

(v. 490-v. 430 av. J.-C.).

● En mathématiques, on connaît surtout Zénon par le paradoxe qui porte son nom.

● Reposant sur l'application au continu de raisonnements pour le dénombrable, Zénon s'amuse à démontrer l'impossibilité du mouvement : avant qu'un projectile puisse atteindre un point donné, il doit d'abord traverser la moitié de cette distance ; avant qu'il puisse atteindre cette moitié, il doit d'abord traverser le quart et ainsi de suite indéfiniment.

→ pages : 116, 168.

zéro

Mot italien provenant de l'arabe sifr, « vide ».

● Le zéro, noté 0, est le plus petit élément de $\mathbb{N}$, et le seul à ne pas avoir de prédécesseur dans $\mathbb{N}$.

● On peut également le définir comme étant le cardinal de l'ensemble vide $\emptyset$.

→ pages : 27, 134.

zéro d'un polynôme

● On appelle zéro d'un polynôme x une valeur de la variable pour laquelle ce polynôme vaut 0.

→ pages : 240, 241.

Crédits photographiques

Couverture (g) Juan Gris, *Jeu d'échecs*, 1915, Art Institute, Chicago, Ph. Joseph Martin © Archives Larbor.

Couverture (d) Baëce (480-524), *De Arithmetica*, page manuscrite, Bibliothèque nationale de France, Paris, coll. Archives Larbor.

Charmet 69, 83, 270h, 394, 400, 403, 426, 484, 493, 505, 515, 517, 519h, 519b, 522, 523, 531g, 531d, 532b, 537, 549g, 559.

Cité des Sciences 432, 442.

Cosmos 48, 49, 58, 135, 270b, 284h, 284b, 378, 481g, 489, 490, 530, 540, 546.

SPL 481d.

Explorer 12, 19, 24, 40, 192, 200hd, 200bg, 202, 285, 379, 507, 542, 549d.

Giraudon 53, 520.

Palais de la Découverte 441.

Viollet 490, 494, 530h, 532h, 539g, 571, 572.

MANUEL +

La petite encyclopédie du lycée

La collection MANUEL + présente l'ensemble du programme du lycée dans chaque discipline.

Repères essentiels, analyses précises, ouvertures documentaires, conseils méthodologiques sont réunis en un seul volume richement illustré et organisé en cinq parties distinctes :

Bases *ce qu'il faut savoir à l'entrée en 2^{de}*

Fil rouge *pour comprendre le programme dans son ensemble*

Points clés *pour maîtriser les sujets de cours*

Fiches pratiques *pour se documenter*

Dico *pour retrouver une définition, une notion*

André Deledicq

André Deledicq est professeur agrégé de mathématiques et ingénieur informaticien.

Dans la même collection :

Anglais par Alex Taylor (collège et lycée)

Espagnol par Jorge Semprun (collège/lycée)

Français par Marcel Jullian (collège)

Français par Pierre Brunel (lycée)

Géographie – Éducation civique

par Yves Lacoste (collège et lycée)

Histoire par Pierre Miquel (collège et lycée)

Maths par André Deledicq (collège)

Philosophie par Roger-Pol Droit (lycée)

www.editionsdelacite.com

2-84-410061-9



9 782844 100610

