

mini **manuel**

Électro- magnétisme

Électrostatique

Magnétostatique

Michel Henry
Abdelhadi Kassiba

→ L1/L2

→ IUT

**Cours +
Exos
corrigés**

DUNOD

Manuel

d'Électromagnétisme

Cours + Exercices

Michel Henry

Maître de conférences à l'IUFM des Pays de Loire
Agrégré de physique

Abdelhadi Kassiba

Professeur à l'université de Maine

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2009
ISBN 978-2-10-054273-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Comment utiliser le Mini-Manuel ?

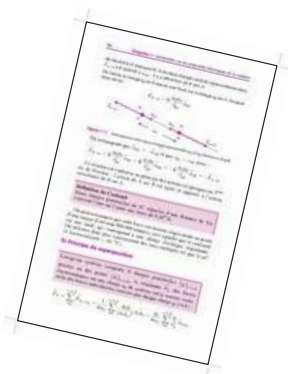
La page d'entrée de chapitre



Elle donne le plan du cours, ainsi qu'un rappel des objectifs pédagogiques du chapitre.

Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.



Les rubriques



Une erreur à éviter



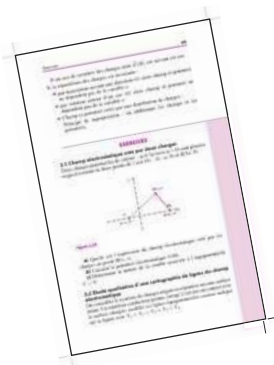
Un peu de méthode



Un exemple pour comprendre



Les points clés à retenir



Les exercices, QCM ou QROC

Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

COMPARAISON ENTRE LES CHAMPS ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE.

Électrostatique	Magnétostatique
Les sources de champs	
Charges fixes Charge $q(P)$ ou densité de charge ρ Un scalaire	Charges mobiles : Densité de courant $\vec{j}$ ou élément de courant $Id\vec{l}(P)$ Un vecteur
Les champs	
Loi de coulomb $\vec{E}(M) = (1/4\pi\epsilon_o) \int \left(\rho(P) dV \vec{PM}/PM^3 \right)$ $\vec{E}$: vecteur vrai (vecteur polaire)	Loi de Biot et Savart $\vec{B}(M) = (\mu_o/4\pi) \int \left(Id\vec{l}(P) \wedge \vec{PM}/PM^3 \right)$ $\vec{B}$: pseudo-vecteur (vecteur axial)
π_S plan de symétrie pour les sources (plan miroir)	
π_S plan de symétrie pour $\vec{E}$ (plan miroir)	π_S plan d'anti-symétrie pour $\vec{B}$ (plan anti-miroir)
π_{AS} plan d'anti-symétrie pour les sources (plan anti-miroir)	
π_{AS} plan d'anti-symétrie pour $\vec{E}$ (plan anti-miroir)	π_{AS} plan de symétrie pour $\vec{B}$ (plan miroir)
Circulation sur un contour fermé	
Circulation conservative $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint -dV = 0$ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire V	Circulation non conservative $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \sum I_{enlacé}$ Théorème d'Ampère
Flux à travers une surface fermée	
Flux non conservatif $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{int}/\epsilon_o$ Théorème de Gauss	Flux conservatif $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Table des matières

1	Généralités sur les propriétés électriques de la matière	1
1.1	Charges électriques	1
	Les deux types de charges électriques	1
	Charges électriques élémentaires	3
	Neutralité électrique d'un corps	4
1.2	Propriétés électriques de la matière	4
	Électrisation d'un corps	4
	Matériaux conducteurs et isolants	7
	Conservation de la charge électrique	7
1.3	Densité de charges électriques	8
	Distributions continues de charges avec une densité volumique ρ	8
	Distributions continues de charges avec une densité surfacique σ	10
	Distributions continues de charges avec une densité linéique λ	11
1.4	Loi de Coulomb	12
	Loi de Coulomb	12
	Principe de superposition	14
	Points-clés	16
	Exercices	16
	Solutions	20
2	Champ et potentiel électrostatiques	26
2.1	Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle	26
	Champ électrique d'une charge ponctuelle	26

Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle	29
Relations entre champ et potentiel électrostatiques	31
Surfaces équipotentielles	34
Généralisation pour un ensemble de charges ponctuelles : principe de superposition	35
2.2 Propriétés de symétrie	41
Principe de Curie	41
Définition des opérations de symétrie	41
2.3 Champ et potentiel électrostatiques créés par une distribution continue de charges	50
Champ et potentiel créés par un fil chargé	50
Champ et potentiel créés par un disque chargé	59
Cas d'un plan infini chargé uniformément en surface	63
Champ et potentiel créés par une distribution volumique de charges	66
Points-clés	68
Exercices	69
Solutions	72
 3 Théorème de Gauss	 81
3.1 Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle	81
Flux d'un champ de vecteur $\vec{A}$	81
Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle	85
3.2 Théorème de Gauss	90
Flux du champ électrostatique créé par une distribution de charges	90
Théorème de Gauss	93
Intérêt et utilisation du théorème de Gauss	94

3.3 Applications du théorème de Gauss	95
Champ et potentiel électrostatiques créés par une sphère chargée	95
Champ et potentiel électrostatiques créés par un cylindre chargé uniformément	101
Champ et potentiel électrostatiques créés par un fil infini chargé uniformément	109
Champ et potentiel électrostatiques créés par un plan infini chargé uniformément	111
Champ et potentiel électrostatiques créés par deux plans parallèles portant des charges opposées	116
Points-clés	119
Exercices	120
Solutions	123
 4 Le champ magnétique	 128
4.1 Les sources de champ magnétique	128
Les aimants : sources de champ magnétique	128
La boussole et les pôles (magnétiques) d'un aimant	128
Action magnétique entre deux aimants	129
Le courant électrique : source de champ magnétique	131
Origine du champ magnétique créé par la matière	131
4.2 Les forces magnétiques	132
La force de Laplace	132
La force de Lorentz	135
Lien entre Force de Laplace et Force de Lorentz	135
4.3 Le vecteur champ magnétique	138
Direction et sens du vecteur champ magnétique	138
Mesure du champ magnétique	139
Unité et ordre de grandeurs	144

Points-clés	144
Exercices	145
Solutions	146
5 Champ magnétique créé par des courants	149
5.1 Loi de Biot et Savart	149
Champ magnétique créé par un conducteur filiforme parcouru par un courant	149
Généralisation de la loi de Biot et Savart	151
5.2 Propriétés de symétrie du champ magnétique	152
5.3 Champ magnétique créé par un courant circulant dans un fil rectiligne	155
Position du problème	155
Champ élémentaire créé par un élément de courant Idl situé au point P	157
Expression du champ magnétique pour un fil fini	159
Cas du fil infini	159
5.4 Cas de la spire circulaire et des bobines parcourues par un courant	160
Champ magnétique créé par une spire circulaire	160
Champ magnétique créé par une bobine plate	167
Champ magnétique créé par une bobine longue ou solénoïde	170
Points-clés	175
Exercices	176
Solutions	178
6 Théorème d'Ampère	
Propriétés du champ magnétique	184
6.1 Théorème d'Ampère	184
Circulation sur un contour fermé du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant	184

Généralisation : théorème d'Ampère	186
Intérêt et utilisation du théorème d'Ampère	188
6.2 Exemples d'application du théorème d'Ampère	189
Cas du fil infini parcouru par un courant	189
Cas du solénoïde infini	191
6.3 Flux du champ magnétique	194
Flux magnétique	194
Flux magnétique à travers une surface fermée	195
Points-clés	196
Exercices	197
Solutions	201
 Index	 210



Généralités sur les propriétés électriques de la matière

PLAN

- 1.1 Charges électriques
- 1.2 Propriétés électriques de la matière
- 1.3 Densité de charges électriques
- 1.4 Loi de Coulomb

OBJECTIFS

- Connaître l'origine du phénomène d'électrisation
- Avoir les notions de base sur les conducteurs et les isolants
- Savoir manipuler les densités de charges et le calcul de charges
- Connaître et savoir appliquer la loi de Coulomb

1.1 CHARGES ÉLECTRIQUES

Les phénomènes d'électrisation de la matière se manifestent dans diverses situations de la vie quotidienne. Ainsi, le toucher d'une carcasse métallique d'une voiture ayant roulé par temps chaud et sec, provoque une désagréable sensation. Un effet similaire peut se produire au contact d'une armoire métallique placée dans une pièce sèche ou bien lorsqu'on retire un pull-over synthétique. Ces constats qualitatifs peuvent être réalisés à partir d'expériences simples. Par exemple, un bâton de verre frotté avec une étoffe de tissu peut attirer des objets légers tels que des morceaux de papiers. La même expérience peut être effectuée lorsqu'un bâton en matière plastique est frotté avec un chiffon de laine. Ces effets sont dus à la manifestation de charges électriques qui apparaissent par frottement ou par contact.

a) Les deux types de charges électriques

L'expérience schématisée *figure 1.1* qui consiste à frotter une règle en matière plastique avec un tissu montre que la règle peut alors attirer des petits morceaux de papier.

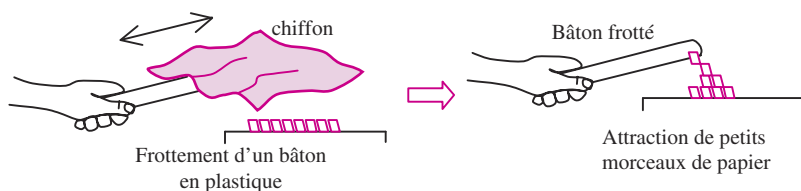


Figure 1.1 Illustration du phénomène d'électrisation. Le bâton est électrisé par frottement : il porte alors une charge électrique.

On dit que le bâton a été *électrisé* par frottement ou bien qu'il porte une *charge électrique* (ou encore qu'il est *chargé*).

Remarque :

Ce phénomène, connu depuis l'Antiquité, se manifeste en particulier sur « l'ambre » qui se traduit en grec par le mot « elektron ». Ce dernier est à l'origine des mots électrisation, électrique, etc.

Dans le cas du bâton de verre ou d'ébonite (résine organique contenant du soufre) électrisé par frottement, on constate que la charge électrique reste localisée à l'endroit frotté. Par contre il est impossible d'électriser une tige de métal tenue à la main car la charge électrique se répartit aussi sur le corps. L'électrisation devient possible si la tige de métal est maintenue à l'aide d'un manche en matière plastique. On constate alors que la charge apportée par frottement se répartit sur toute la tige métallique.

Il est possible d'électriser de petites boules d'aluminium suspendues à un fil de nylon par contact avec un bâton lui-même électrisé. En approchant deux boules électrisées avec le même bâton, on constate qu'elles se repoussent. Par contre dans le cas où l'une des boules est électrisée par le bâton de verre (frotté avec un drap) et l'autre avec le bâton d'ébonite (frotté avec un chiffon de laine) il y a attraction. Le physicien français Du Fay (1733) mettait ainsi en évidence l'existence de deux types de charges électriques.

Il existe deux types de charges électriques :

Deux corps portant le même type de charges électriques se repoussent.

Deux corps portant des charges électriques de types différents s'attirent.

Pour distinguer ces deux types de charges l'une sera notée charge positive, l'autre charge négative.

Par convention :

La charge qui apparaît sur l'ébonite frottée avec un chiffon de laine est une charge négative (anciennement nommée électricité résineuse).

La charge qui apparaît sur le verre frotté avec un drap est une charge positive (anciennement nommée électricité vitreuse).

Un corps non chargé est dit neutre.

L'origine de ces charges électriques qui apparaissent au cours des phénomènes d'électrisation se trouve dans la nature même de la matière.

b) Charges électriques élémentaires

L'atome, entité constitutive de tout corps matériel, se compose d'un nuage d'électrons et d'un noyau formé de nucléons (protons, neutrons). La charge électrique élémentaire, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ (expérience de Millikan 1908), où C (coulomb) désigne l'unité de charge électrique dans le système international, est une caractéristique intrinsèque du proton et de l'électron au même titre que leurs masses respectives $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et $9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Avec la convention adoptée pour les signes des charges, le proton constitue la charge positive élémentaire alors que l'électron est la charge élémentaire négative. La stabilité de l'édifice atomique, globalement neutre, est assurée par l'interaction électrique entre le noyau de charge positive et les électrons qui l'entourent.

TABEAU 1.1 CARACTÉRISTIQUES DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES.

<i>Particules</i>	<i>Symbole</i>	<i>Masse (kg)</i>	<i>Charge électrique (C)</i>
Électron	e^-	$9,1 \cdot 10^{-31}$	$-1,6 \cdot 10^{-19}$
Proton	p	$1,672 \cdot 10^{-27}$	$1,6 \cdot 10^{-19}$
Neutron	n	$1,674 \cdot 10^{-27}$	0

- Le coulomb (symbole C) désigne l'unité de la charge électrique dans les unités du système international (u.s.i.). Charles de Coulomb, physicien français (1736–1806), est à l'origine de la détermination de la force s'exerçant entre deux charges électriques.
- Ces particules sont assimilables à des sphères de rayon très faible.
- L'électron est une charge électrique mobile pouvant être libérée par la matière.

- Le proton est fortement lié à la matière car c'est l'un des constituants du noyau atomique.
- $|e| = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ est la plus petite charge électrique que l'on puisse isoler de la matière.

c) Neutralité électrique d'un corps

Lorsqu'un matériau est constitué par des atomes associés par des liaisons moléculaires, la neutralité électrique des atomes est préservée lorsqu'ils participent à la formation des molécules. Le matériau ainsi formé sera qualifié de neutre électriquement car il comporte autant de charges positives que négatives.

1.2 PROPRIÉTÉS ÉLECTRIQUES DE LA MATIÈRE

Il existe différents procédés destinés à communiquer à un matériau des charges électriques excédentaires par rapport à l'état de neutralité électrique. De tels procédés permettent de retirer ou de rapporter des électrons sur le matériau qui devient chargé. L'état chargé se caractérise par une charge électrique macroscopique $Q = Ne$ avec N un entier positif ou négatif et e la charge élémentaire ($1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$).

a) Électrisation d'un corps

Expérience 1 : Électrisation par frottement

En frottant le bâton de verre avec un drap, le verre se charge positivement alors que le drap se trouve chargé négativement (*figure 1.2*). En fait l'ensemble est neutre et c'est en frottant le bâton que des électrons du verre sont passés sur le tissu. Le verre se retrouve avec un déficit en électron et est donc chargé positivement. Le tissu avec son excès d'électron est chargé négativement.

La même expérience peut être réalisée à l'aide d'un bâton en matière plastique et un chiffon en laine (*figure 1.3*). On constate alors que le plastique se charge négativement alors que la laine porte des charges positives.

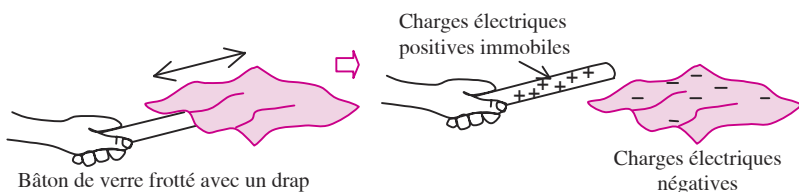


Figure 1.2 Interprétation de l'électrisation par frottement dans le cas du verre.

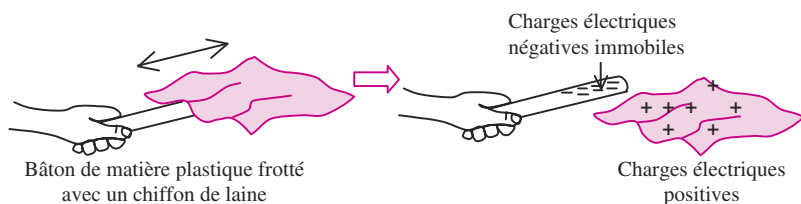


Figure 1.3 Interprétation de l'électrisation par frottement dans le cas du plastique.

Expérience 2 : Électrisation par contact

Un corps (A), initialement neutre, s'électrise au contact d'un corps (B) chargé. Si le corps (B) est chargé négativement une partie des électrons excédentaires va se répartir sur le corps (A) qui se charge négativement. Au contraire, si le corps (B) est chargé positivement (défaut d'électrons), des électrons du corps (A), attirés par les charges positives, peuvent passer sur le corps (B) : le corps (A) se trouve alors chargé positivement (voir *figure 1.4*).

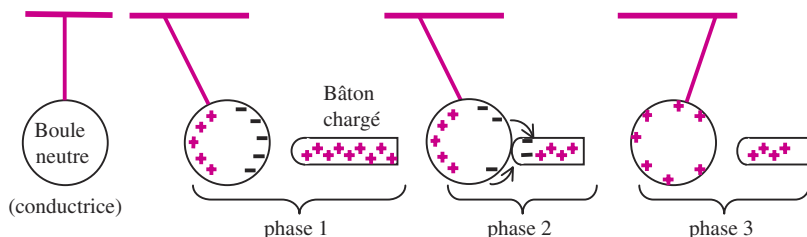


Figure 1.4 Schématisation de l'électrisation par influence (phase 1) puis par contact (phase 2). La phase 3 traduit la répulsion entre deux corps portant des charges de même nature.

Expérience 3 : Électrisation par influence

On peut, par exemple, utiliser des bâtons en verre ou en plastique chargés par frottement ainsi qu'un pendule constitué d'une petite boule légère en polyester recouverte d'un mince feuillet d'aluminium et suspendue à un fil de nylon (voir *figure 1.4*). Dans la phase 1, Le bâton de verre électrisé est approché du pendule. La boule va subir alors une redistribution des charges à sa surface. Une charge négative (des électrons mobiles) se condense sur sa face avant alors que la même quantité de charges mais de signe opposé se développe sur sa face arrière (défaut d'électrons). Cette redistribution de charges

constitue un exemple d'électrisation par influence. Dans la phase 2, une attraction se produit entre le verre et la boule jusqu'au contact des deux. Les électrons en excès sur la face avant peuvent passer sur la baguette de verre : l'ensemble est globalement chargé positivement. Enfin, dans la phase 3, une répulsion se produit due à la répartition de charges de même signe sur les deux corps.



Encart 1.1 Les machines électrostatiques

Le générateur électrostatique de Van de Graaff a été inventé dans la période 1931–1933 par R. Van de Graaff de l'université américaine de Princetown. Le principe du générateur, illustré dans la *figure 1.5 (a)*, repose sur une courroie en caoutchouc entraînée par un moteur pour véhiculer des charges électriques à la sphère creuse en haut du dispositif.

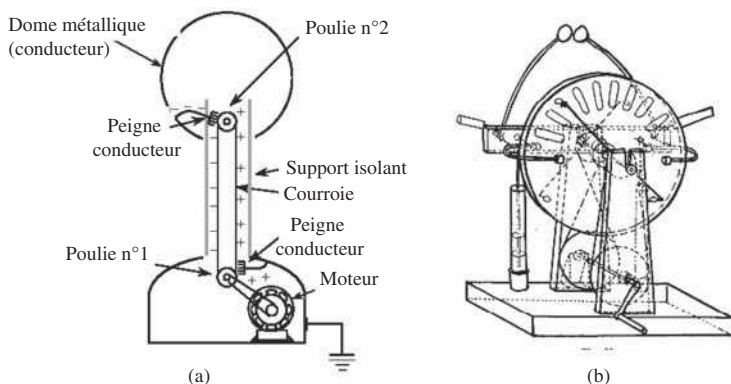


Figure 1.5 (a) Générateur Van de Graaf et (b) machine de Wimshurst.

Les tensions créées par ce générateur peuvent atteindre jusqu'au million de Volts par contre les courants restent infiniment faibles (<1 mA). Il existe cependant une limite à la tension électrique qui peut être atteinte au niveau de la sphère. Cette tension limite dépend du rayon de la sphère et de la nature du gaz qui l'entoure.

La machine de Wimshurst est une autre machine électrostatique inventée en 1882 par l'anglais James Wimshurst. Cette machine, schématisée dans la *figure 1.5 (b)*, reste encore utilisée pour illustrer de nombreux phénomènes d'électricité statique.

b) Matériaux conducteurs et isolants

À un stade élémentaire, on peut se limiter à des considérations simples pour définir le caractère isolant ou conducteur d'un matériau.

Dans les matériaux conducteurs (exemple des métaux), les électrons des couches atomiques périphériques sont faiblement liés aux noyaux. L'agitation thermique favorise l'ionisation des atomes et conduit à l'existence d'un gaz d'électrons presque libres. La densité n (nombre d'électrons libres par unité de volume) est l'un des paramètres clés qui gouverne le caractère conducteur d'un matériau. Dans les métaux usuels (cuivre, aluminium. . .) la densité n est de l'ordre de 10^{27} électrons par unité de volume ($n = 10^{27} \cdot \text{m}^{-3}$). Dans le cas des conducteurs ioniques, c'est la densité d'ions libres et leur mobilité qui définit le caractère conducteur.

Dans les matériaux isolants, les électrons sont solidement liés aux atomes. La densité d'électrons libres est quasi-nulle. Parmi les matériaux isolants, on peut citer les matières plastiques, le verre, la paraffine, le papier ou encore le bois. Le terme diélectrique désigne aussi un matériau isolant.

Entre ces extrêmes, conducteurs et isolants, il existe des matériaux semi-conducteurs dont la densité de porteurs libres est typiquement dans la gamme de 10^{17} à 10^{23} m^{-3} . Ce paramètre dépend fortement du taux de dopage des matériaux semi-conducteurs (Si, Ge, GaAs. . .).



Le dopage d'un semi-conducteur tel que le silicium consiste, lors de sa fabrication, à inclure des atomes tels que l'azote ou le bore en très faible quantité. Cette opération permet d'augmenter la densité de porteurs libres.

Dans les expériences d'électrisation par contact, la nature conductrice ou isolante du matériau conditionne la distribution des charges électriques sur le corps. Ainsi, une charge électrique excédentaire acquise par un corps isolant, reste localisée là où elle a été déposée. Pour un corps conducteur, la charge électrique acquise se répartit sur toute la surface du conducteur.

c) Conservation de la charge électrique

Dans un procédé d'électrisation par frottement, un chiffon de laine et une baguette de verre, échangent des électrons qui sont arrachés au verre et localisés sur l'étoffe de laine. La même quantité de charge mais de signe opposé est donc portée par chacun des corps. Cette charge demeure constante tant que le corps reste isolé de tout autre contact matériel.

Dans un processus d'électrisation par influence, aucun contact matériel n'est nécessaire. Le corps qui influence modifie uniquement

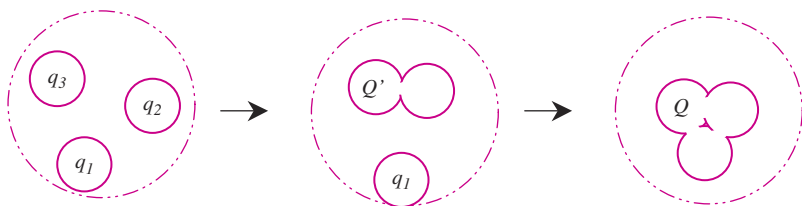


Figure 1.6 Illustration du principe de conservation de la charge électrique. On peut écrire : $q_1 + q_2 + q_3 = q_1 + Q' = Q$.

la répartition des charges sur le corps influencé sans qu'aucun apport de charges ne se produise. La charge totale du corps reste constante, seule la répartition des charges sur le corps influencé se modifie dans un tel processus.

En règle générale, tant qu'un corps est isolé de tout contact matériel, sa charge électrique demeure constante.

Principe de la conservation de l'électricité

Dans tout système électriquement isolé, la somme algébrique des quantités d'électricité ou charges électriques se conserve.

1.3 DENSITÉ DE CHARGES ÉLECTRIQUES

La charge électrique macroscopique Q d'un corps comporte un nombre important de charges élémentaires e ($Q = Ne$ avec N entier relatif très grand). Vu la faible dimension de cette charge élémentaire, on considère qu'à l'échelle macroscopique, la répartition de la charge Q se fait de façon continue sur le corps matériel. Cette répartition peut être modélisée par des densités de charges électriques qui dépendent de la géométrie du corps chargé (filiforme, surfacique ou volumique).

a) Distributions continues de charges avec une densité volumique ρ

C'est le cas d'un corps matériel de volume ($\mathcal{V}$) pouvant être chargé par une quantité de charge Q . Cette charge peut être répartie uniformément dans le volume ($\mathcal{V}$). Dans ce cas, la densité volumique de charge (charge par unité de volume), notée ρ (lettre grecque rho), s'exprime simplement par :

$$\rho = \frac{Q}{\mathcal{V}} \Rightarrow Q = \rho \mathcal{V}$$

L'unité de la densité volumique de charge électrique est le C.m^{-3} .

Si la répartition n'est pas uniforme, il est possible de définir en tout point M du volume ($\mathcal{V}$) une densité volumique de charge $\rho(M)$. On considère alors un volume élémentaire $d\mathcal{V}$ autour de M suffisamment petit pour pouvoir considérer que la charge électrique élémentaire dQ qu'il contient est répartie uniformément. On peut alors écrire :

$$\rho(M) = \frac{dQ}{d\mathcal{V}} \Leftrightarrow dQ = \rho(M)d\mathcal{V}$$

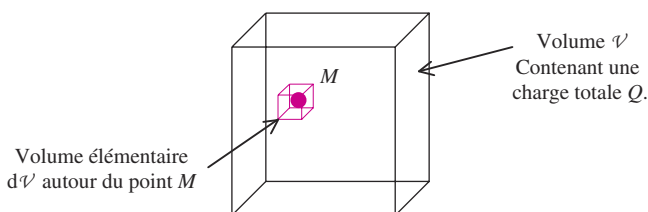


Figure 1.7 Le volume $\mathcal{V}$ contient une charge électrique totale Q . Le volume élémentaire $d\mathcal{V}$ autour du point M porte la charge électrique élémentaire dQ .

La charge totale Q contenue dans le volume chargé $\mathcal{V}$ est définie par l'intégrale suivante :

$$Q = \int_{M \in \mathcal{V}} \rho(M)d\mathcal{V}$$

Remarque :

Certains ouvrages utilisent, à juste titre, la notation de l'opération d'intégration sur un volume ($\mathcal{V}$) par trois symboles ($\iiint_{(\mathcal{V})}$) à cause de l'intégration sur un produit des trois variables qui définissent un volume élémentaire. Cependant, pour une simplicité de la notation, on continuera à utiliser un simple symbole ($\int_{M \in \mathcal{V}}$).



Dans le cas où la répartition est uniforme, la densité volumique de charge ne dépend pas du point M : $\rho(M) = \rho_o$. On peut alors écrire :

$$Q = \int_{M \in \mathcal{V}} \rho(M)d\mathcal{V} = \rho_o \int_{M \in \mathcal{V}} d\mathcal{V} = \rho_o \mathcal{V}$$

b) Distributions continues de charges avec une densité surfacique σ

C'est le cas d'un corps matériel de surface S pouvant être chargé avec une quantité de charge Q . Cette charge peut être répartie uniformément sur la surface S . Dans ce cas, on définit simplement la densité surfacique de charge (charge par unité de surface), notée σ (lettre grecque sigma) par :

$$\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma S$$

L'unité de densité surfacique de charge électrique est le C.m^{-2}

Si la répartition n'est pas uniforme, il est possible de définir en tout point M de la surface S une densité surfacique de charge $\sigma(M)$. On considère alors une surface élémentaire dS autour de M suffisamment petite pour pouvoir considérer que la charge électrique élémentaire dQ qu'elle contient est répartie uniformément. On peut alors écrire :

$$\sigma(M) = \frac{dQ}{dS} \Leftrightarrow dQ = \sigma(M)dS$$

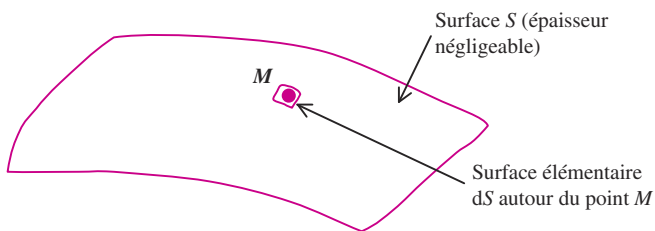


Figure 1.8 La surface S porte une charge électrique totale Q . La surface élémentaire dS autour du point M porte la charge électrique élémentaire dQ .

La charge totale portée par la surface chargée est donnée par la relation :

$$Q = \int_{M \in S} \sigma(M) dS$$



Dans le cas où la répartition est uniforme, la densité surfacique de charge ne dépend pas du point M : $\sigma(M) = \sigma_o$. Avec S l'aire de la surface, on peut écrire :

$$Q = \int_{M \in S} \sigma(M) dS = \sigma_o \int_{M \in S} dS = \sigma_o S$$

c) Distributions continues de charges avec une densité linéique λ

C'est le cas d'un corps matériel filiforme, de longueur L et de diamètre négligeable, pouvant être chargé par la quantité de charge Q . Cette charge peut être répartie uniformément sur le corps. On définit la densité linéique de charge (charge par unité de longueur), notée λ (lettre grecque lambda) par :

$$\lambda = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = \lambda L$$

L'unité de la densité linéique de charges électriques est le C.m^{-1} .

Si la répartition n'est pas uniforme, il est possible de définir en tout point M du fil une densité linéique de charge $\lambda(M)$. On considère alors une longueur élémentaire dl autour de M suffisamment petite pour pouvoir considérer que la charge électrique élémentaire dQ qu'elle contient est répartie uniformément. On peut alors écrire :

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \Leftrightarrow dQ = \lambda dl,$$

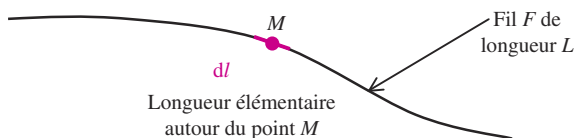


Figure 1.9 Le fil F porte une charge électrique totale Q . Le segment élémentaire dl autour du point M porte la charge électrique élémentaire dQ .

La charge totale portée par le fil chargé est donnée par la relation :

$$Q = \int_{M \in L} \lambda(M) dl$$



Dans le cas où la répartition est uniforme, la densité linéique de charge ne dépend pas du point M : $\lambda(M) = \lambda_o$. Avec L la longueur du fil, on peut écrire :

$$Q = \int_{M \in L} \lambda(M) dl = \lambda_o \int_{M \in L} dl = \lambda_o L$$

Modèle de la charge ponctuelle Ce modèle de la charge ponctuelle est très important en électrostatique. C'est le cas d'un système matériel portant une charge Q mais dont les dimensions sont suffisamment

petites pour qu'il soit assimilé à un point de l'espace doté d'une charge Q .

1.4 LOI DE COULOMB

La loi de Coulomb a été établie en 1785 et exprime l'action qui s'exerce entre deux charges électriques. Le dispositif expérimental qui a permis d'établir cette loi repose sur une expérience de mécanique utilisant un pendule de torsion et des corps électrisés. Bien que la loi de Coulomb ait été déduite de mesures dont la précision n'est pas optimale, cette loi est aussi importante que celle de la force de gravitation entre des corps pesants. La validité de cette loi est tout aussi vérifiée pour des corps chargés à l'échelle macroscopique qu'à l'échelle atomique entre particules élémentaires chargées.

a) Loi de Coulomb

La loi de Coulomb exprime la force électrique exercée entre deux charges ponctuelles en fonction de la valeur des charges et de la distance qui les sépare.

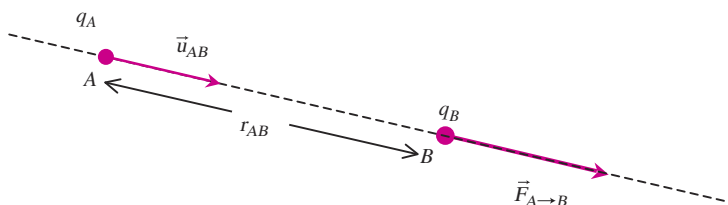


Figure 1.10 Action d'une charge ponctuelle q_A située en A sur une charge ponctuelle q_B située en B.

Énoncé de la loi de Coulomb pour des charges ponctuelles

La force électrostatique entre deux charges électriques ponctuelles est proportionnelle à la valeur des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Cette interaction est portée par la droite qui joint les deux charges.

Si les charges sont de même signe, il y a répulsion, si elles sont de signe contraire, il y a attraction

Pour la formulation mathématique de la loi de Coulomb, on considère deux charges ponctuelles q_A et q_B placées respectivement en deux points A et B (figure 1.10).

La force électrostatique $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ exercée par la charge ponctuelle en A sur celle située en B s'écrit :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = K \frac{q_A q_B}{r_{AB}^2} \vec{u}_{AB} = K \frac{q_A q_B}{r_{AB}^2} \frac{\vec{AB}}{r_{AB}} = K \frac{q_A q_B}{r_{AB}^3} \vec{AB}$$

- $r_{AB} = AB$ distance entre les deux charges ponctuelles q_A et q_B
- $\vec{u}_{AB}$: vecteur unitaire suivant AB et dirigé de A (qui exerce la force) vers B (qui subit la force). Ce vecteur peut s'écrire :

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{\vec{AB}}{r_{AB}}$$

- K est la constante de proportionnalité. Elle dépend des unités choisies et de la nature du milieu dans lequel sont situées les charges électriques.

Dans le système international (S.I) des unités, la force est exprimée en newton (N), la distance en mètre (m) et les charges en coulomb (C). Si les charges sont dans le vide, la constante K est alors définie par :

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ u.s.i.}$$

La grandeur ϵ_0 représente la permittivité du vide ou constante diélectrique du vide.

Dans le cas où les charges se trouvent dans un milieu caractérisé par sa permittivité absolue ϵ , la nouvelle constante K est obtenue en échangeant ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ où $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$, grandeur sans dimension, est appelée la permittivité relative du milieu par rapport au vide. Cette grandeur est toujours supérieure à 1. Elle est de l'ordre de 2 par exemple pour la paraffine et est comprise entre 4 et 10 pour les verres. Dans l'air sec, la permittivité relative est de $\epsilon_r(\text{air}) = 1,00057$ soit pratiquement 1 : on peut considérer que l'air sec se comporte comme le vide du point de vue électrique.

Si K_m est la valeur de la constante dans un milieu et K celle dans le vide, on a : $K_m = \frac{K}{\epsilon_r} \Rightarrow F_{\text{milieu}} = \frac{F_{\text{vide}}}{\epsilon_r}$

la force électrique qui s'exerce entre deux objets électriquement chargés est moindre dans le milieu que dans le vide.



Si les deux charges sont de même nature, le produit ($q_A \cdot q_B$) est positif. La force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ aura le même sens que $\vec{u}_{AB}$ et correspond bien alors à une force de répulsion (A repousse B). Si les deux charges sont de signe contraire alors $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ est opposé à $\vec{u}_{AB}$: il y a attraction de B vers A.

De même, la charge q_B en B exerce une force sur la charge q_A en A . On peut donc écrire :

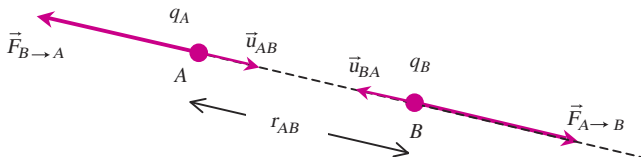


Figure 1.11 Interactions entre deux charges ponctuelles q_A et q_B situées en A et B .

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = K \frac{q_B q_A}{r_{BA}^2} \vec{u}_{BA}$$

En remarquant que $\vec{u}_{BA} = -\vec{u}_{AB}$ et que $r_{BA} = r_{AB}$ alors :

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = K \frac{q_B q_A}{r_{BA}^2} \vec{u}_{BA} = K \frac{q_A q_B}{r_{AB}^2} \vec{u}_{BA} = -K \frac{q_A q_B}{r_{AB}^2} \vec{u}_{AB} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$$

Ce résultat est conforme au principe des actions réciproques ou 3^{ème} loi de Newton : l'action de A sur B est égale et opposée à l'action simultanée de B sur A .

Définition du coulomb

Deux charges ponctuelles de 1C séparées d'une distance de 1m exercent l'une sur l'autre une force de $9 \cdot 10^9$ N.

On peut remarquer que cette force est énorme (équivalente au poids d'une masse d'environ 900 000 tonnes). Ceci signifie que le coulomb est une unité qui correspond à une charge électrique importante. On utilisera donc plus couramment des sous multiples tel que le μC (1 microcoulomb = 10^{-6}C).

b) Principe de superposition

Lorsqu'un système comporte N charges ponctuelles $\{q_i\}_{i=1,N}$ placées en des points $\{A_i\}_{i=1,N}$, la résultante $\vec{F}_k$ des forces électrostatiques sur une charge q_k du système est la somme vectorielle des forces individuelles exercées par chaque charge q_i ($i \neq k$) :

$$\vec{F}_k = \sum_{i \neq k}^{i=1,N} \vec{F}_{A_i \rightarrow A_k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq k}^{i=1,N} \frac{q_k q_i}{(A_i A_k)^3} \vec{A_i A_k} = \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq k}^{i=1,N} \frac{q_i}{r_{ik}^2} \vec{u}_{A_i A_k}$$

avec $r_{ik} = A_i A_k$ et $\vec{u}_{A_i A_k} = \vec{A_i A_k} / r_{ik}$

On parlera de l'équilibre de la charge électrique q_k sous l'action des autres charges lorsque la résultante des forces est nulle.

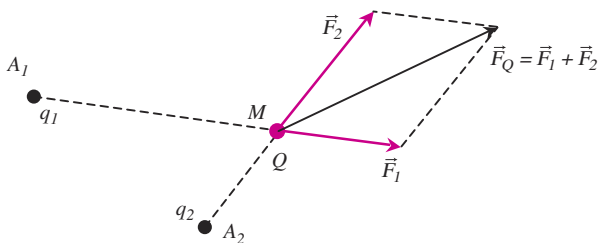


Figure 1.12 La charge Q en M subit l'action $\vec{F}_1$ de la charge q_1 en A_1 et $\vec{F}_2$ de la charge q_2 en A_2 . La force résultante $\vec{F}_Q$ agissant sur la charge Q est égale à la somme vectorielle des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

Pour une répartition continue de charges la sommation se transforme en une intégration. La *figure 1.13* illustre le principe de calcul dans le cas d'une surface chargée agissant sur une charge ponctuelle Q . On décompose alors cette surface en aires élémentaires dS , chacune étant définie autour d'un point P et portant une charge élémentaire dq .

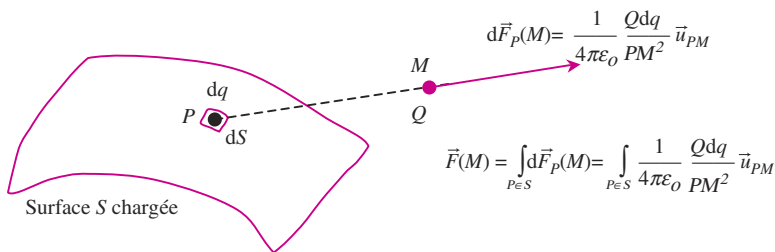


Figure 1.13 Détermination de la force exercée par une surface chargée sur une charge Q .

La force $d\vec{F}_p(M)$ exercée par cette charge élémentaire s'exprime simplement en utilisant la loi de Coulomb. Pour obtenir la résultante de toutes les forces il suffit d'additionner vectoriellement toutes les forces élémentaires lorsque le point P parcourt toute la surface S . Cette sommation d'une infinité de termes infiniment petits conduit à une intégration.

Dans le cas d'une répartition volumique de charge l'intégration se fera sur tout le volume chargé (intégrale à 3 dimensions). Pour une répartition linéique de charge, l'intégrale se fera sur la longueur L du fil (intégrale à une dimension).



POINTS-CLÉS

- Densité volumique de charges : $dQ(M) = \rho(M)dV$ (ρ en C.m^{-3})
- Densité surfacique de charges : $dQ(M) = \sigma(M)dS$ (σ en C.m^{-2})
- Densité linéique de charges : $dQ(M) = \lambda(M)dL$ (λ en C.m^{-1})
- Loi de Coulomb : force électrostatique exercée par une charge ponctuelle Q en O sur une charge ponctuelle q en M , avec $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ ($\vec{u}_r$ unitaire) :

$$\vec{F}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^3} \vec{OM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{u}_r$$

EXERCICES

1.1 On suppose que la Terre, considérée comme sphérique de rayon $R = 6400$ km, porte une charge négative $Q = -10^6$ C.

a) On considère que les charges sont réparties uniformément sur sa surface avec une densité de charge surfacique σ_T . Calculer σ_T .

b) On considère maintenant que les charges négatives sont réparties uniformément dans le sol sur une profondeur égale à $P = 50$ km. Quelle est dans ce cas la densité volumique de charges ρ_T ?

Réponses : **a)** $\sigma_T = -1,94 \cdot 10^{-9} \text{ C.m}^{-2}$ **b)** $\rho_T = -3,9 \cdot 10^{-14} \text{ C.m}^{-3}$

1.2 Déterminer la quantité de charges portée par l'ensemble des électrons d'une pièce de monnaie en cuivre (Cu, $A = 63$, $Z = 29$) de masse 2 g. On donne l'unité de masse atomique $1 \text{ u} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Réponse : $Q = -88\,160 \text{ C}$.

1.3 Dans un premier temps, une tige linéaire de longueur L est mise en contact avec le dôme chargé d'un générateur de Van de Graaf. La charge acquise par la tige se répartit sur sa longueur avec la densité linéique λ . Dans un second temps, la tige éloignée de la source de Van de Graaf est entourée d'un cylindre métallique creux, de rayon extérieur R et d'épaisseur e , initialement non chargé. Par influence électrostatique entre la tige et le cylindre, on admettra que des charges électriques se développent sur les surfaces internes et externes du cylindre.

a) Quelle propriété doit être satisfaite par la charge totale du cylindre ?

b) En supposant que la distribution de charges est uniforme sur le cylindre, déterminer l'expression littérale des densités de charges développées sur la surface interne et externe du cylindre.

1.4 Distributions de charge.

Soit un fil fin, de centre O , dirigé suivant un axe Oz , de longueur $2L$ et portant une charge électrique totale Q répartie linéairement.

a) Donner l'expression de la densité linéique de charge moyenne λ_m si on suppose que la répartition est uniforme.

b) Cette distribution de charge n'est pas uniforme et suit la loi :

$$\lambda(z) = \lambda_o \cos \frac{\pi \cdot z}{2L} \quad \text{pour } -L \leq z \leq +L \text{ et } \lambda(z) = 0 \quad \text{pour } |z| \geq L$$

Exprimer la charge élémentaire δQ située en z sur une portion de fil dz . En déduire l'expression de λ_o en fonction de Q et de L .

c) En s'approchant de l'axe Oz , le fil apparaît comme un cylindre d'axe Oz et de rayon R (figure 1.14). On considère alors que la charge est répartie en surface. Sachant que pour un z fixé et sur une hauteur dz , la répartition est uniforme, exprimer, comme au b), la charge élémentaire δQ située en z sur une hauteur dz . En déduire l'expression de la distribution surfacique de charge $\sigma(z)$ en fonction de λ_o , L et z puis en fonction de Q , L et z .

d) En fait, cette répartition n'est pas surfacique mais plutôt volumique. Après avoir exprimé la charge élémentaire δQ située en z sur une épaisseur dz , déterminer l'expression de $\rho(z)$ en fonction de λ_o , L et z puis en fonction de Q , L et z .

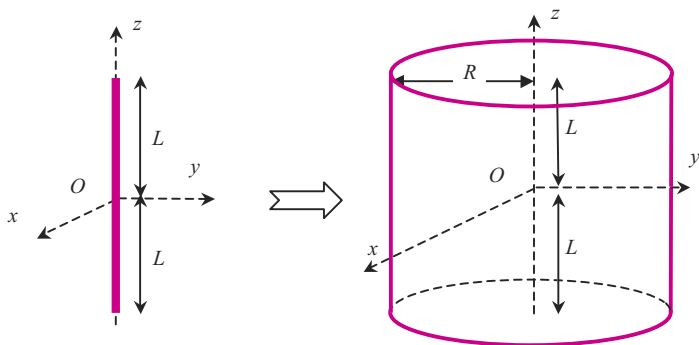


Figure 1.14 Fil cylindrique de longueur $2L$, portant une charge électrique totale Q .

1.5 Force électrostatique

Dans un repère plan (O, x, y) on considère trois charges ponctuelles de coordonnées : $+Q$ en $A(-a, 0)$; $-Q$ en $B(a, 0)$; $2Q$ en $C(0, b)$.

Déterminer la résultante des forces électrostatiques sur la charge $2Q$, en précisant sa direction et sa norme. Faire une représentation graphique.

1.6 Force électrostatique

Deux charges ponctuelles négatives q_A et q_B , de même valeur ($q_A = q_B = -Q$) sont fixées sur un axe Ox , à la distance $AB = 2d$ l'une de l'autre. Une troisième charge q_C , positive de valeur ($q_C = 2Q$), peut se déplacer sur l'axe Ox entre A et B . Le point O étant au milieu de AB on pose $OC = x$ (figure 1.15).

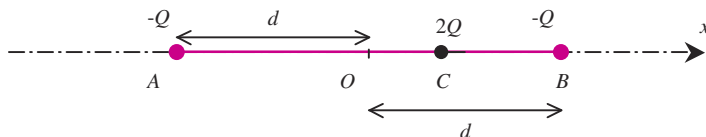


Figure 1.15

a) Déterminer la norme et la direction de la force électrique qui s'exerce sur q_C à l'abscisse x .

b) Déterminer la position d'équilibre de q_C et préciser si cet équilibre est stable.

1.7 Équilibre des tiges d'un électroscope

Les tiges d'un électroscope se présentent sous la forme de fils de longueurs L avec aux extrémités des sphères de masse m selon le schéma de la figure 1.16 :

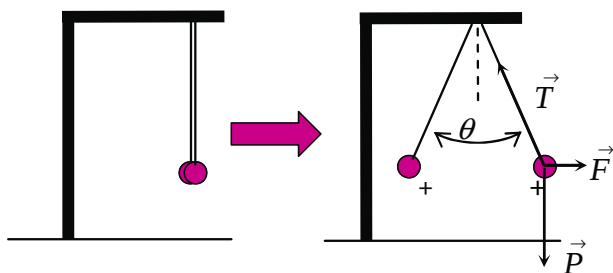


Figure 1.16 La charge de l'électroscope est Q et chaque sphère porte la charge $Q' = Q/2$.

Lorsque les fils sont écartés d'un angle θ , quelle est la charge Q portée par l'électroscope ? On supposera que la charge portée par les tiges est négligeable devant celles des sphères.

1.8 Distance d'approche minimale entre particules chargées

Un noyau d'hélium ${}^4_2\text{H}_2^{2+}$ est envoyé avec une énergie cinétique de $E_c^i = 30 \text{ MeV}$ en direction d'un noyau d'uranium ${}^{238}_{92}\text{U}$ au repos. Quelle est la distance minimale d'approche entre les deux noyaux ? La distance initiale entre les deux particules est égale à $d = 10 \text{ cm}$.

Réponse : $d_{\min} = 8,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

1.9 Équilibre mécanique d'un système de charges



Figure 1.17

Deux sphères conductrices identiques A et B , de petites dimensions, portent des charges électriques $q_A = q_B/2$ maintenues fixes à la distance $d = 20 \text{ cm}$ (figure 1.17). Une troisième sphère C , identique aux deux autres et initialement neutre, est mise en contact avec A et abandonnée ensuite. Sachant que C est mobile uniquement sur l'axe (AB) , déterminer la position d'équilibre et discuter sa stabilité. Toutes les charges sont assimilées à des charges ponctuelles.

1.10 Calcul d'une force électrostatique

On considère le système de charges ponctuelles représenté sur la figure 1.18.

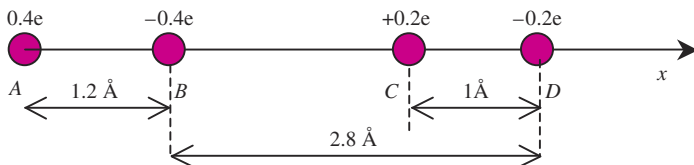


Figure 1.18

Déterminer la force électrostatique sur la charge B ($q_B = -0,4e$) en précisant sa direction et sa norme.

On donne $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$ et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ u.s.i.}$

Réponse : $F_B = 0,946 \cdot 10^{-9} \text{ N}$ et la force est dirigée suivant l'axe des x vers A .

SOLUTIONS

1.1 a) La distribution de charges étant uniforme on a :

$$\sigma_T = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{-10^6}{4\pi \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2} = -1,943 \cdot 10^{-9} \text{ C.m}^{-2}.$$

b) Les charges occupent ici le volume $\mathcal{V}$ compris entre la surface terrestre et la couche sphérique à la profondeur $P = 50 \text{ km}$. La distribution de charges étant uniforme, la densité de charge volumique est donnée par :

$$\rho_T = \frac{Q}{\mathcal{V}}, \text{ avec } \mathcal{V} = \frac{4\pi}{3} (R^3 - (R - P)^3)$$

$$\text{A.N. : } \rho_T = 3,9 \cdot 10^{-14} \text{ C.m}^{-3}.$$

1.2 La masse m_a d'un atome de cuivre correspond à : $m_a = 63,1,67 \cdot 10^{-27} = 1,0521 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$. Une masse de cuivre de $2 \text{ g} = 0,002 \text{ kg}$ contient donc : $n = 0,002 / 1,0521 \cdot 10^{-25} = 19 \cdot 10^{21}$ atomes. Le nombre d'électrons correspondant est de $n_e = n \cdot 29$. La charge d'un électron étant de $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, la quantité de charges négatives due aux électrons est donc : $Q = 19 \cdot 10^{21} \cdot 29 \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19}) = -88160 \text{ C}$. Cette charge est colossale mais, dans la matière, elle se trouve compensée par la charge positive due aux protons, assurant ainsi la neutralité électrique du corps matériel.

1.3 a) La quantité de charges électriques portée par un corps est une grandeur qui demeure constante tant que le corps est isolé de tout autre support matériel. En vertu de la conservation de la charge totale d'un corps isolé, le cylindre étant neutre initialement, il le demeure après l'influence électrique. La quantité de charges négatives sur sa face interne est exactement compensée par la charge positive sur sa surface externe.

b) La figure 1.19 récapitule la situation d'électrisation du cylindre par influence électrique due à la tige.

En l'absence des effets de bord, la densité de charge linéique sur la tige est uniforme de même pour les densités de charge sur les surfaces du cylindre. Soit une longueur l de la tige, la quantité de charges associée est $q_l = \lambda l$. L'influence totale entre la tige et le cylindre conduit sur la même longueur du cylindre à une charge développée par influence sur la face interne égale à $-q_l = \sigma_i \cdot 2\pi(R - e) \cdot l$, σ_i étant la densité de charge sur la surface interne du cylindre. Cette densité est donc donnée par $\sigma_i = -\frac{\lambda}{2\pi(R - e)}$

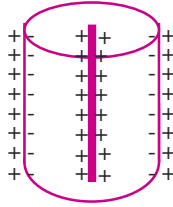


Figure 1.19 Électrisation d'un cylindre par influence électrique due à une tige chargée positivement située sur l'axe du cylindre.

En vertu du principe de conservation de la charge du cylindre, la quantité de charges sur la face externe est donnée par :

$$\sigma_e \cdot 2\pi R \cdot l = -\sigma_i \cdot 2\pi(R - e) \cdot l$$

σ_e représente la densité de charges sur la surface externe.

$$\text{D'où } \sigma_e = -\frac{\sigma_i(R-e)}{R} = \frac{\lambda}{2\pi R}$$

1.4 Distributions de charge.

a) Densité linéique de charge moyenne $\lambda_m = Q/2L$

b) Avec le repère (O, x, y, z) de la figure 1.20, une longueur élémentaire dl de fil autour du point M situé à la cote z s'écrit dz .

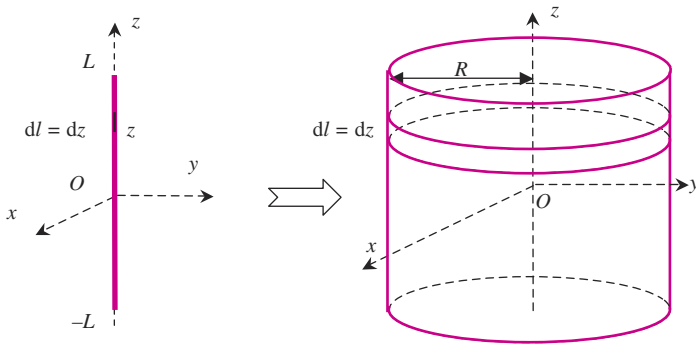


Figure 1.20 Fil cylindrique de longueur $2L$ découpé en portion élémentaire dz .

On a donc : $dQ = \lambda(M)dl = \lambda(z)dz = \lambda_o \cos \frac{\pi z}{2L} dz$ avec $-L \leq z \leq L$

On obtient la charge totale Q en additionnant tous les dQ lorsque le point M décrit le fil soit :

$$Q = \int_{M \in \text{fil}} dQ = \int_{-L}^L \lambda(z)dz = \int_{-L}^L \lambda_o \cos \frac{\pi z}{2L} dz = \lambda_o \frac{2L}{\pi} \left[\sin \frac{\pi z}{2L} \right]_{-L}^L$$

$$Q = \lambda_o \frac{2L}{\pi} \left(\sin \frac{\pi L}{2L} - \sin \frac{-\pi L}{2L} \right) = \lambda_o \frac{4L}{\pi} \Rightarrow \lambda_o = \frac{Q\pi}{4L} = \frac{\pi}{2} \lambda_m$$

c) On découpe le cylindre en couronne située à la cote z et de hauteur élémentaire dz . La surface correspondante est donc $dS = 2\pi R dz$.

On peut écrire la charge élémentaire dQ à la cote z de 2 façons :

$$\begin{cases} dQ = \sigma(z) dS = 2\pi R \sigma(z) dz \\ dQ = \lambda_o \cos \frac{\pi z}{2L} dz \end{cases} \Rightarrow \sigma(z) = \frac{\lambda_o}{2\pi R} \cos \frac{\pi z}{2L}$$

Soit : $\sigma(z) = \sigma_o \cos \frac{\pi z}{2L}$ avec $\sigma_o = \frac{\lambda_o}{2\pi R} = \frac{Q}{8LR}$

d) On découpe le cylindre en disque situé à la cote z et de hauteur élémentaire dz . Le volume correspondant est $dV = \pi R^2 dz$.

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} dQ = \rho(z) dV = \pi R^2 \rho(z) dz \\ dQ = \lambda(z) dz = \lambda_o \cos \frac{\pi z}{2L} dz \end{cases} \Rightarrow \rho(z) = \frac{\lambda_o}{\pi R^2} \cos \frac{\pi z}{2L}$$

Soit : $\rho(z) = \rho_o \cos \frac{\pi z}{2L}$ avec $\rho_o = \frac{\lambda_o}{\pi R^2} = \frac{Q}{4LR^2} = \frac{2\sigma_o}{R}$

1.5 D'après la loi de Coulomb et le principe de superposition on a (figure 1.21) :

Force $\vec{F}_1$ exercée par la charge Q sur la charge $2Q$: $\vec{F}_1 = \frac{2Q^2}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{AC}}{AC^3}$

Force $\vec{F}_2$ exercée par la charge $-Q$ sur la charge $2Q$: $\vec{F}_2 = \frac{-2Q^2}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{BC}}{BC^3}$

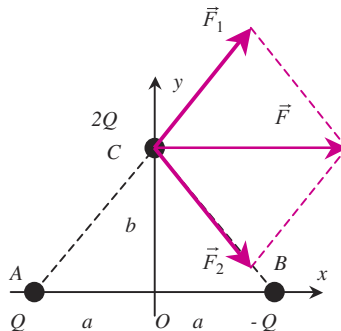


Figure 1.21

$$\text{On a : } AC^2 = BC^2 = a^2 + b^2$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = a\vec{u}_x + b\vec{u}_y \text{ et } \vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = -a\vec{u}_x + b\vec{u}_y$$

La force qui s'exerce sur la charge $2Q$ résulte des deux actions exercées par les charges $+Q$ et $-Q$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\vec{AC}}{AC^3} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-Q)\vec{BC}}{BC^3} = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AC} - \vec{BC}}{AC^3}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{2a\vec{u}_x}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{-3/2} \vec{u}_x$$

Cette force est parallèle à l'axe Ox et de norme : $\frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \vec{u}_x$

1.6 D'après la loi de Coulomb et le principe de superposition on a :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{(d+x)^2} \vec{u}_{AC} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{(d-x)^2} \vec{u}_{BC}$$

Avec $\vec{u}_{AC} = \vec{u}_x = -\vec{u}_{BC}$ on obtient :

$$\vec{F} = -\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(d+x)^2} - \frac{1}{(d-x)^2} \right] \vec{u}_x = -\frac{2Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{yd}{(d+x)^2(d-x)^2} \vec{u}_x$$

La position d'équilibre est réalisée lorsque la force $\vec{F} = \vec{0}$ c'est-à-dire pour $x = 0$. La charge est donc en équilibre lorsqu'elle est au point O .

Si à partir de la position d'équilibre, on effectue un déplacement élémentaire de la charge q_c , celle-ci subira une force qui va s'opposer au déplacement effectué et donc orientée vers la position d'équilibre. L'équilibre ainsi réalisé est donc stable.

1.7 Les forces s'exerçant sur l'une des sphères chargées se composent de la force électrique ($\vec{F}$), du poids de la sphère ($\vec{P}$) et de la tension du fil ($\vec{T}$). L'équilibre de la sphère est réalisée pour : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$

Les projections sur les axes du repère x, y donnent :

$$\left. \begin{array}{l} F - T \sin \theta = 0 \\ T \cos \theta - P = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F = P \cdot \tan \theta$$

La charge (Q) portée par l'électroscope est répartie sur les deux sphères ($Q' = Q/2$) qui interagissent avec la force électrique :

$$F = \frac{Q'^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \Rightarrow Q' = d\sqrt{4\pi\epsilon_0 F} \quad \text{avec} \quad d = 2L \sin \theta$$

La quantité de charges portée par l'électroscope est donc donnée par :

$$Q = 2Q' = 8L \sin \theta \sqrt{\pi\epsilon_0 mg \tan \theta}$$

1.8 Les deux noyaux étant chargés positivement, leur répulsion électrostatique le long d'un axe x passant par les deux noyaux, est d'autant plus forte que les deux noyaux se rapprochent l'un de l'autre (figure 1.22). La distance minimale d'approche entre les deux noyaux ($d_{\min}$) est celle pour laquelle la vitesse du noyau d'hélium s'annule pour changer de sens. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre l'instant initial où la distance séparant les noyaux est d et l'instant où cette distance est minimale on obtient :

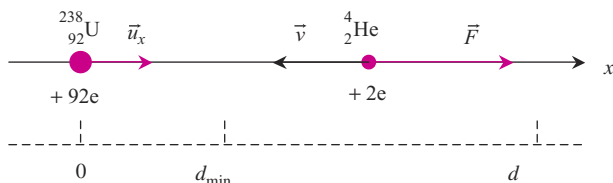


Figure 1.22

$$\Delta E_c = W_{(F)} \Rightarrow 0 - E_c^i = \int_d^{d_{\min}} \vec{F} \cdot d\vec{x} \vec{u}_x$$

Or la force électrique est donnée par : $\vec{F} = \frac{92e \cdot 2e}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{u}_x$
et l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_d^{d_{\min}} \vec{F} \cdot d\vec{x} \vec{u}_x &= \int_d^{d_{\min}} F \cdot dx = \frac{184e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{x} \right]_d^{d_{\min}} = \frac{184e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_{\min}} \right) \\ &= -E_c^i \end{aligned}$$

La distance minimale d'approche est donc $\frac{1}{d_{\min}} = \frac{1}{d} + \frac{4\pi\epsilon_0 E_c^i}{184e^2}$

L'énergie cinétique est donnée en Mev avec 1 Mev = $e \cdot 10^6$ Joules. On peut donc écrire :

$$\frac{4\pi\epsilon_0 E_c^i}{184e^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{30 \cdot 10^6 e}{184 \cdot e^2} = \frac{10^{17}}{184 \cdot 4,8} = \frac{1}{0,88 \cdot 10^{-14}} \text{ m}^{-1}$$

En comparant avec $\frac{1}{d} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ m}^{-1}$, on constate que $1/d$ est négligeable devant l'autre terme. On a alors :

$$\frac{1}{d_{\min}} = \frac{1}{0,88 \cdot 10^{-14}} \Rightarrow d_{\min} = 0,88 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 8,8 \text{ fermis.}$$

1.9 Les charges des sphères A , B et C sont respectivement $\frac{q_B}{4}$, q_B , $\frac{q_B}{4}$ car la mise en contact de A et C répartit équitablement la charge $\frac{q_B}{2}$ sur les deux sphères identiques.

La résultante des forces sur la charge C est donnée par :

$$\vec{F}_C = \frac{q_B^2}{16\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{(d-x)^2} \right\} \cdot \vec{u}_x$$

La position d'équilibre est réalisée lorsque $F_C = 0 \Rightarrow x_{\text{équilibre}} = d/3$

L'équilibre ainsi réalisé est stable. Il se justifie simplement en considérant un déplacement élémentaire de la charge C à partir de sa position d'équilibre. La résultante des forces qui se développe s'oppose au déplacement et ramène C vers sa position d'équilibre.

1.10 La résultante des forces électrostatiques exercées par les différentes charges est portée par l'axe Ox :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-0,4e)(0,4e)}{AB^2} \vec{u}_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-(0,16e^2)}{AB^2} \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_{C \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-0,4e)(0,2e)}{CB^2} \vec{u}_{CB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-0,08e^2)}{CB^2} (-\vec{u}_x)$$

$$\vec{F}_{D \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-0,4e)(-0,2e)}{DB^2} \vec{u}_{DB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(0,08e^2)}{DB^2} (-\vec{u}_x)$$

La résultante est : $\vec{F}_B = \frac{-0,08e^2}{4\pi\epsilon_0} \vec{u}_x \left[\frac{1}{DB^2} + \frac{2}{AB^2} - \frac{1}{CB^2} \right]$

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= -9.10^9 \cdot 0,08 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \\ &\times \left[\frac{1}{(2,8 \cdot 10^{-10})^2} + \frac{2}{(1,2 \cdot 10^{-10})^2} - \frac{1}{(1,8 \cdot 10^{-10})^2} \right] \vec{u}_x \end{aligned}$$

$F_B = 0,946 \cdot 10^{-9} \text{ N}$ et la force est dirigée suivant l'axe des x vers A .

CHAPITRE 2

Champ et potentiel électrostatiques

PLAN	2.1	Champ et potentiel électrostatiques créés par des charges ponctuelles
	2.2	Propriétés de symétrie des champs et potentiels en électrostatique
	2.3	Champ et potentiel électrostatiques créés par des distributions continues de charges
	2.4	Méthodologies et applications
OBJECTIFS	➤	Connaître la définition du champ et du potentiel électrostatique
	➤	Savoir utiliser les propriétés de symétrie pour déterminer l'allure des lignes de champs et des équipotentiels
	➤	Connaître l'expression du champ et du potentiel créés par une ou plusieurs charges ponctuelles
	➤	Connaître la méthode pour déterminer le champ et le potentiel créés par des distributions continues de charges.

2.1 CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUES CRÉÉS PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

En électrostatique, les effets électriques générés par un corps chargé peuvent être décrits par deux grandeurs mathématiques : l'une constitue un champ de vecteurs ou champ électrique et l'autre représente un champ de scalaires ou potentiel électrique. La connaissance de ces deux grandeurs en tout point de l'espace permet de décrire toutes les perturbations électriques induites par le corps chargé dans son environnement et donc les actions subies par des charges avoisinantes. Soulignons aussi que ces deux grandeurs sont interdépendantes ce qui signifie que la connaissance du champ électrique en chaque point de l'espace permet de déduire le potentiel électrique et inversement.

a) Champ électrique d'une charge ponctuelle

Définition

La notion du champ électrique créé par une charge ponctuelle Q dans son environnement peut être introduite par l'action que subit

une charge électrique ponctuelle q (charge test) de la part de la charge Q .

La force électrostatique qui s'exerce par la charge Q placée en (O) sur la charge test q placée en (M) est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{qQ}{OM^2} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = q \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{u}_{OM}}{r_{OM}^2} \right]$$

Dans cette expression, le terme entre crochets ne dépend que de la valeur de la charge Q , de la nature du milieu environnant (ϵ_o) et du point M de l'espace. C'est donc une caractéristique liée à la charge Q et représente le champ électrique créé dans son environnement.

Le champ électrostatique créé, en un point M de l'espace, par une charge ponctuelle Q placée en un point O , est défini par :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{u}_{OM}}{r_{OM}^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} \quad (2.1)$$

La force subie par une charge ponctuelle test q placée en M peut donc s'exprimer par :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = \vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$$



D'après cette définition, le champ électrique ou électrostatique s'exprimerait, dans le système international des unités, en N.C^{-1} (newton/coulomb). Nous verrons plus loin que cette unité correspond à des Volt/mètre ou V.m^{-1} .



Un moyen pratique et rapide de retrouver le sens du champ électrique en un point M est d'imaginer y placer une charge test positive et de voir quel serait le sens de la force agissant sur elle. Ce sens est aussi celui du champ électrique.

L'expression du champ électrostatique peut encore s'écrire :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad (2.2)$$

avec $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. Le vecteur $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire dans la direction de OM , de O (point où est située la source) vers M (point où on observe le champ).



Cette expression (2.2) a l'avantage d'être plus légère que la précédente (2.1) mais l'inconvénient de ne plus faire apparaître la signification de r et du vecteur $\vec{u}_r$. Il est nécessaire alors d'accompagner cette formule de la signification des différents termes.

En choisissant un repère dont l'origine est prise au point O où est située la charge responsable du champ, le vecteur position $\vec{OM}$ s'exprime simplement par $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ où le vecteur $\vec{u}_r$ correspond au vecteur unitaire radial de la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ des coordonnées sphériques (voir encart 3.4).

Lignes du champ électrostatique

Une ligne de champ est une courbe tangente en chaque point au vecteur champ électrique défini en ce point.

Le faisceau des lignes de champ définit une cartographie du champ électrique.

Dans le cas d'une charge ponctuelle, il est facile de voir que toutes les lignes sont des droites qui convergent à l'endroit de la charge ponctuelle responsable du champ. Le champ est à symétrie sphérique : toutes les directions sont équivalentes. Si la charge Q est positive alors les lignes partent du point source O pour aller vers l'infini : le champ est centrifuge ou divergent. Pour une charge Q négative, c'est le contraire : le champ est centripète ou converge vers la charge.

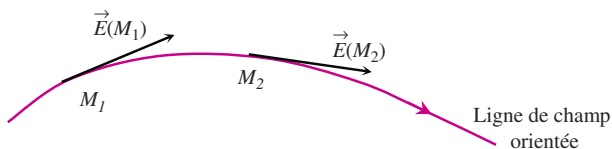


Figure 2.1 Ligne de champ. En tout point M , le vecteur champ est tangent à la ligne de champ qui est orientée comme le champ.

La figure 2.2 représente l'allure de deux cartographies de champs électriques créés par une charge ponctuelle positive et négative.

Tube de champ

Un tube de champ est la surface engendrée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé.

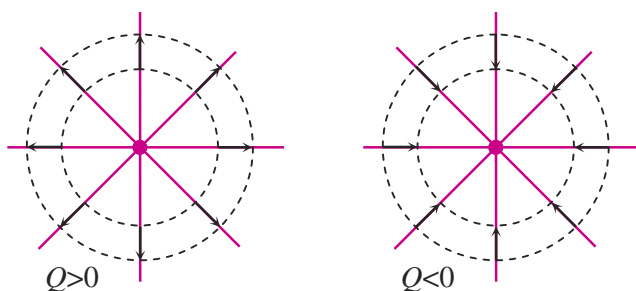


Figure 2.2 Cartographie de champs. Pour la charge positive le champ est divergent, pour la charge négative il est convergent. Le champ électrique présente la symétrie sphérique.

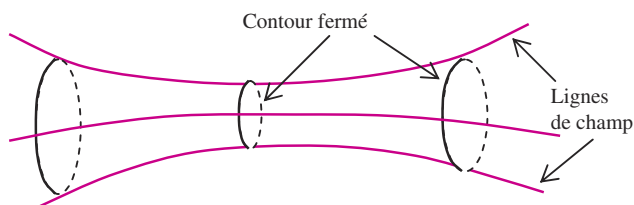


Figure 2.3 Tube de champ.

b) Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

Circulation élémentaire du vecteur champ électrostatique

Considérons une charge ponctuelle Q en un point O de l'espace et une courbe quelconque (AB) (voir *figure 2.4*). En chaque point M de la

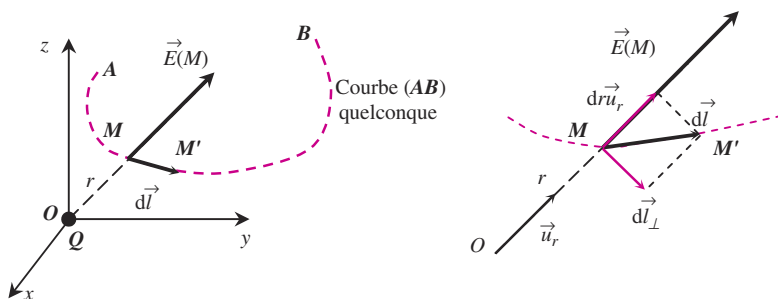


Figure 2.4 Circulation du champ électrostatique sur une courbe quelconque (AB) et sur un déplacement élémentaire $d\vec{l} = \vec{MM}'$.

courbe, la charge Q crée un champ électrique $\vec{E}(M)$ dont l'expression (2.2) est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

avec $\vec{u}_r$ vecteur unitaire suivant $OM = r$.

Un déplacement élémentaire sur la courbe (AB) correspond à un passage du point M au point voisin M' suffisamment proche pour pouvoir considérer que le champ électrostatique ne change pas. Ce déplacement élémentaire noté $d\vec{l}$ peut toujours se décomposer en un déplacement élémentaire dr suivant $\vec{u}_r$ et un déplacement élémentaire $d\vec{l}_\perp$ perpendiculairement à $\vec{u}_r$ (voir *figure 2.4*). On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{l} = dr\vec{u}_r + d\vec{l}_\perp \quad (2.3)$$

avec $\vec{u}_r \cdot d\vec{l}_\perp = 0$

La circulation élémentaire δC du champ $\vec{E}(M)$ est par définition :

$$\delta C = \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} \quad (2.4)$$



La lettre grecque δ (delta) est utilisée pour indiquer que la grandeur considérée est élémentaire (ou infiniment petite) alors que la lettre « d » est utilisée pour désigner la différentielle d'une grandeur pouvant aussi représenter la variation élémentaire de la grandeur.

En utilisant l'expression (2.3) du déplacement élémentaire on obtient :

$$\begin{aligned} \delta C = \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + d\vec{l}_\perp) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} [dr\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r + \vec{u}_r \cdot d\vec{l}_\perp] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

En remarquant que $1/r^2$ est la dérivée de la fonction $(-1/r)$ on peut écrire que :

$$\frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right) = -d\left(\frac{1}{r}\right)$$

On obtient donc finalement :

$$\delta C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \quad (2.5)$$

La circulation élémentaire δC du champ électrostatique se présente comme l'opposé de la différentielle d'une fonction $Q/4\pi\epsilon_0 r$.

Circulation du champ électrostatique entre deux points A et B :

Il s'agit d'intégrer l'expression (2.5) entre deux points A et B.

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \int_A^B -d\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = \left[\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

Ainsi, la circulation du champ électrostatique ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale. Ce résultat est une propriété importante du champ électrique qui mène à la définition du potentiel électrostatique.

Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

La circulation du champ électrostatique entre deux positions peut s'écrire comme l'opposé de la variation d'une fonction V appelée potentiel électrostatique.

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} = V(A) - V(B) = -\Delta V$$

Ce résultat conduit à définir le potentiel électrostatique par :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{constante}$$



Le potentiel électrostatique est défini à une constante près. Cette constante ne joue aucun rôle : expérimentalement on ne mesure que des différences de potentiels (ou tensions).



Il est possible de fixer cette constante par un choix de l'origine des potentiels. Dans le cas d'une charge ponctuelle, si on choisit de prendre le potentiel nul à une distance infiniment loin de la charge, la constante est, par convention, nulle.

$$V(\infty) = 0 \Rightarrow \text{constante} = 0 \Rightarrow V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Unité du potentiel électrique : dans le système u.s.i., le potentiel électrique s'exprime en volt (symbole : V).

c) Relations entre champ et potentiel électrostatiques**Relation différentielle (ou définition différentielle)**

Elle est obtenue à partir des relations (2.4) et (2.5). La circulation élémentaire du champ électrostatique est égale à l'opposé de la

différentielle d'une fonction appelée potentiel électrostatique. On peut écrire :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} \quad (2.6)$$

On dit que le champ électrostatique dérive d'une fonction scalaire qui est le potentiel électrostatique.

Relation locale (ou définition locale)

La différentielle du potentiel peut s'écrire (voir encart 2.1) :

$$dV(M) = \overrightarrow{\text{grad}} V(M) \cdot d\vec{l} = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

On obtient donc la relation locale (vraie en tout point M de l'espace) :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) \quad (2.7)$$



Lorsque le potentiel ne dépend par exemple que d'une variable x , le gradient de la fonction potentiel $V(x)$ correspond à la dérivée du potentiel par rapport à x . On a alors :

$$\vec{E}(M) = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x$$

Ceci montre bien que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérive du potentiel $V(M)$.

Remarque :

Avec le potentiel exprimé en volt (V) l'unité utilisée pour le champ électrique est le volt/mètre ($\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$).

Relation intégrale (ou définition intégrale)

Elle est obtenue en exprimant la circulation du champ électrostatique entre deux points M_1 et M_2 . On a alors :

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = - \int_{M_1}^{M_2} dV = V(M_1) - V(M_2) \quad (2.8)$$

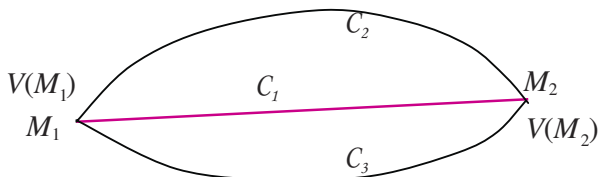


Figure 2.5 La circulation du champ électrostatique entre deux points est indépendante du chemin suivi.

Si le point d'arrivée M_2 correspond au point de départ M_1 , on a :

$$\int_{M_1}^{M_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = - \int_{M_1}^{M_1} dV = V(M_1) - V(M_1) = 0$$

La circulation du champ électrostatique sur une courbe fermée est nulle. On dit que le champ électrostatique est à circulation conservative.



Encart 2.1. Le vecteur gradient d'une fonction

Soit une fonction $f(x)$ d'une variable x . La différentielle de cette fonction s'écrit : $df = \frac{df}{dx} dx$. Cette différentielle nous renseigne sur la variation de la fonction pour une variation élémentaire dx de la variable x .

Lorsque la fonction dépend de trois variables (x, y, z) la différentielle s'obtient en fixant à tour de rôle deux variables sur les trois.

Différentielle partielle : on considère une variation élémentaire de la variable x , les variables y et z étant fixées. La fonction peut être considérée comme une fonction d'une variable. On appelle alors dérivée partielle de la fonction par rapport à x la dérivée obtenue en considérant y et z comme des constantes. La notation est :

Dérivée partielle de f par rapport à x : $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z}$

Il est alors possible d'exprimer la différentielle dite partielle en fonction de cette dérivée et notée : $\partial_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z} dx$.

La même opération peut être effectuée avec y (x et z étant fixées) puis z (x et y fixées). L'expression de la différentielle totale de la fonction correspond à la somme des différentielles partielles :

$$df = \partial_x f + \partial_y f + \partial_z f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y} dz.$$

On définit alors le vecteur gradient de la fonction, en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

En remarquant que $d\vec{l} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$, la différentielle totale de la fonction peut s'écrire comme le produit scalaire de deux vecteurs :

$$df = \overrightarrow{\text{grad} f} \cdot d\vec{l}$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) on a :

$$df = \overrightarrow{\text{grad} f} \cdot d\vec{l} \quad \text{avec} \quad d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z \quad \text{et} \\ df = \partial_r f + \partial_\theta f + \partial_z f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} dr + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z} d\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} dz. \quad \text{On en}$$

$$\text{déduit : } \overrightarrow{\text{grad} f} = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Signification géométrique : soit la surface définie par $f(x, y, z) = \text{constante}$. Si le point M se déplace sur la surface le vecteur $d\vec{OM}$ appartient à cette surface. La différentielle d'une constante étant nulle ($df = 0$) on a : $df = \overrightarrow{\text{grad} f} \cdot d\vec{OM} = 0$

Le vecteur gradient est un vecteur perpendiculaire aux surfaces définies par $f(x, y, z) = \text{constante}$.

d) Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle correspond à l'ensemble des points M se trouvant au même potentiel. Elle est donc définie par $V(M) = \text{constante}$

Dans le cas d'une charge ponctuelle :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{constante} = V_1 \Rightarrow r = OM = r_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 V_1}$$

L'ensemble des points M situés à la distance r_1 du point O se trouve sur la sphère de rayon r_1 et de centre O .

Remarque :

Le vecteur gradient d'une fonction $f(x, y, z)$ est un vecteur perpendiculaire aux surfaces définies par $f(x, y, z) = \text{constante}$ et est dirigé vers les valeurs croissantes de la fonction (voir encart 2.1). Le champ électrostatique étant opposé par définition au gradient du potentiel (voir relation 2.7) on en déduit que les lignes de champs sont des droites perpendiculaires aux sphères et dirigées vers les potentiels

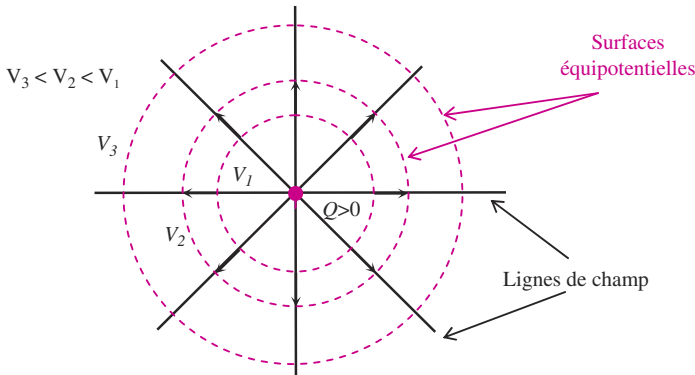


Figure 2.6 Pour une charge ponctuelle, les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge. Les lignes de champ radiales sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et dirigées vers les potentiels décroissants.

décroissants (voir *figure 2.6*). On retrouve ainsi que le champ est radial, colinéaire aux rayons des sphères équipotentielles.

e) Généralisation pour un ensemble de charges ponctuelles : principe de superposition

Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Pour un système de charges ponctuelles $\{q_i\}_{i=1,N}$ placées en des points $\{A_i\}_{i=1,N}$, la force exercée sur une charge test q placée en un point M s'écrit d'après le principe de superposition :

$$\vec{F}(M) = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{F}_i(M) = \sum_{i=1}^{i=N} [q\vec{E}_i(M)] = q \left[\sum_{i=1}^{i=N} \vec{E}_i(M) \right] = q\vec{E}(M)$$

avec $\vec{E}_i(M)$ champ électrostatique au point M créé par la charge q_i en A_i et $\vec{E}(M)$ le champ électrostatique résultant en M .

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i=N} q_i \frac{\vec{A_iM}}{A_iM^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i=N} q_i \frac{\vec{u}_{A_iM}}{r_i^2} \quad (2.9)$$

avec $r_i = A_iM$ et $\vec{u}_{A_iM}$ vecteur unitaire dirigé de A_i vers M .



Il s'agit d'effectuer une somme vectorielle. Cette somme peut s'effectuer par construction géométrique (voir *figure 2.7*) ou algébriquement en utilisant une base.

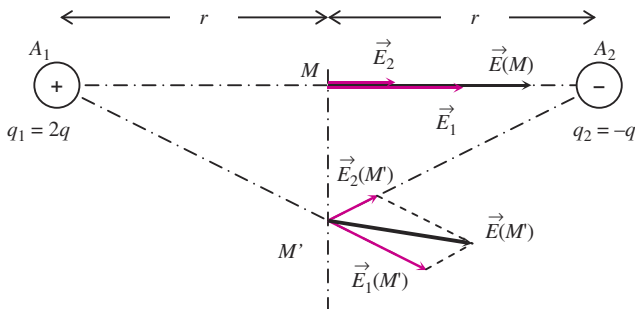


Figure 2.7 Sur la médiatrice MM' de A_1A_2 le champ $\vec{E}_1$ créé par la charge positive $q_1 = 2q$ est 2 fois plus intense que le champ $\vec{E}_2$ créé par la charge $q_2 = -q$. Le champ résultant $\vec{E}$ est la somme vectorielle $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Potentiel électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

La relation différentielle qui s'écrit :

$$dV = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = -\left[\sum_{i=1}^{i=N} \vec{E}_i(M) \right] \cdot d\vec{l} = -\sum_{i=1}^{i=N} [\vec{E}_i(M) \cdot d\vec{l}]$$

$$dV = \sum_{i=1}^{i=N} dV_i = d \left[\sum_{i=1}^{i=N} V_i \right]$$

permet de déduire le potentiel électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles. Il s'agit bien entendu de la somme algébrique des potentiels électrostatiques créés par chaque charge au point M .

$$V(M) = \sum_{i=1}^{i=N} V_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{A_iM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{r_i} \quad (2.10)$$

Champ et potentiel électrostatiques créés par des distributions continues de charges

Pour une distribution ($\mathcal{D}$) continue de charges, on la décompose en charges élémentaires δq , chacune étant définie autour d'un point P . Le champ électrique élémentaire créé par δq est donné par :

$$\delta \vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Le champ résultant est la somme vectorielle de tous ces champs élémentaires créés par tous les points P constituant la distribution $(\mathcal{D})$. La sommation discrète (Σ) se transforme alors en intégration :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in (\mathcal{D})} \delta \vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in (\mathcal{D})} \frac{\delta q}{PM^2} \vec{u}_{PM} \quad (2.11)$$

De la même façon, le potentiel élémentaire $\delta V_P(M)$ créé en M par la charge élémentaire δq en P s'écrit (avec le potentiel nul à l'infini) :

$$\delta V_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q}{PM}$$

Le potentiel résultant est la somme algébrique de tous ces potentiels élémentaires créés par tous les points P constituant la distribution $(\mathcal{D})$ soit :

$$V(M) = \int_{P \in (\mathcal{D})} \delta V_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in (\mathcal{D})} \frac{\delta q}{PM} \quad (2.12)$$

Suivant que la distribution porte sur un volume, une surface ou une courbe les intégrations porteront sur un volume, une surface ou une courbe (voir encart 2.2., 2.3. et 2.4.).

Le champ électrostatique et le potentiel sont toujours reliés par les relations (2.6), (2.7) et (2.8) :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = V(M_1) - V(M_2)$$

Si le champ électrostatique est connu, il existe alors deux méthodes pour déterminer le potentiel.

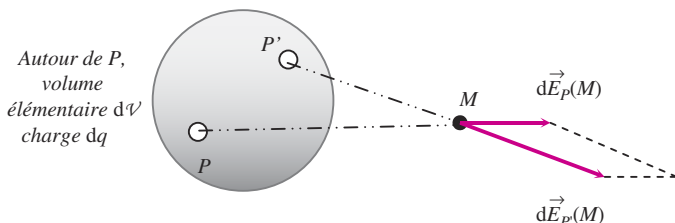


La lettre grecque δ (delta) est très souvent remplacée par la lettre « d » (comme par exemple dans l'encart 2.2) ceci pour simplifier les notations mais surtout parce que ces grandeurs élémentaires sont assimilées ici à la différentielle d'une fonction (voir exercices d'applications).



Encart 2.2. Champ et potentiel créés par une répartition volumique de charges électriques

Volume $\mathcal{V}$ chargé avec une densité volumique de charge $\rho(P)$



$$dq = \rho(P) d\mathcal{V}$$

Champ élémentaire :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P) \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\mathcal{V}$$

Champ résultant :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in \mathcal{V}} d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P) \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\mathcal{V}$$

Potentiel élémentaire :

$$dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(P)}{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)}{PM} d\mathcal{V}$$

Potentiel résultant :

$$V(M) = \int_{P \in \mathcal{V}} dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{PM} d\mathcal{V}$$

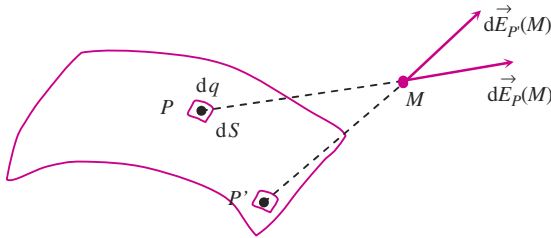
Si la répartition est uniforme : $\rho(P) = \rho_o = \text{constante}$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho_o}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{V}} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} d\mathcal{V} \text{ et } V(M) = \frac{\rho_o}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{V}} \frac{d\mathcal{V}}{PM}$$



Encart 2.3. Champ et potentiel créés par une répartition surfacique de charges électriques

Soit une surface S chargée avec une densité surfacique de charge $\sigma(P)$



La charge élémentaire dq portée par une surface élémentaire dS autour d'un point M est :

$$dq = \sigma(P)dS$$

Champ élémentaire :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(P)\vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)\vec{u}_{PM}}{PM^2} dS$$

Champ résultant :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in S} d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in S} \frac{\sigma(P)\vec{u}_{PM}}{PM^2} dS$$

Potentiel élémentaire :

$$dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(P)}{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)}{PM} dS$$

Potentiel résultant :

$$V(M) = \int_{P \in S} dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in S} \frac{\sigma(P)}{PM} dS$$

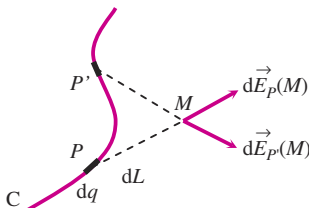
Si la répartition est uniforme : $\sigma(P) = \sigma_o = \text{constante}$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma_o}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in S} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dS \quad \text{et} \quad V(M) = \frac{\sigma_o}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in S} \frac{dS}{PM}$$



Encart 2.4. Champ et potentiel créés par une répartition linéique de charges électriques

Courbe C , longueur L avec une densité linéique de charge $\lambda(P)$



$$dq = \lambda(P)dL$$

Champ élémentaire :

$$\vec{dE}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P) \vec{u}_{PM}}{PM^2} dL$$

Champ résultant :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in C} \vec{dE}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in C} \frac{\lambda(P) \vec{u}_{PM}}{PM^2} dL$$

Potentiel élémentaire :

$$dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)}{PM} dL$$

Potentiel résultant :

$$V(M) = \int_{P \in C} dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in C} \frac{\lambda(P)}{PM} dL$$

Si la répartition est uniforme : $\lambda(P) = \lambda_o = \text{constante}$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in C} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dL \quad \text{et} \quad V(M) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in C} \frac{dL}{PM}$$

Les calculs permettant de déterminer le champ et le potentiel électrostatiques créés par une distribution de charges peuvent très rapidement se révéler compliqués. En fait, par une étude des symétries liées à la répartition des charges il est possible de simplifier ces calculs.

2.2 PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIE

Le calcul analytique des champs et potentiels électrostatiques créés par des distributions de charges n'est pas toujours aisé et le recours à des considérations de symétrie peut s'avérer incontournable. En effet la cartographie des lignes de champ et potentiels reflète la géométrie de la distribution de charges au sein du système. Au préalable à toute détermination de grandeurs électriques il convient de procéder à une analyse de la symétrie du système de charges. Cette approche permet de prévoir la symétrie des champs et potentiels électrostatiques créés par le système. Dans la suite on introduit les bases de cette méthodologie.

a) Principe de Curie

La symétrie des causes (que sont les charges, sources de l'électrostatique) se retrouve dans les effets produits (que sont le champ et le potentiel électrostatiques).

Ce principe est très utile en électrostatique car il permet de prévoir l'allure des lignes du champ électrique et les surfaces équipotentielles à partir de la symétrie du système chargé.

La réciproque n'est pas toujours vraie mais on peut souligner que lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie se retrouve dans les causes qui leur ont donné naissance.

b) Définition des opérations de symétrie

Nous allons considérer le cas où la distribution de charges électriques présente :

- un plan de symétrie
- un plan d'anti-symétrie

- une invariance par translation parallèlement à un axe
- une invariance par rotation autour d'un axe.

Symétrie plane : Transformée d'une grandeur scalaire (potentiel électrostatique)

On considère deux points M et M_S placés symétriquement par rapport à un plan (π) (voir *figure 2.8*).

Si la charge $q(M)$ (ou la densité de charge $\rho(M)$) située en M est égale à la charge $q(M_S)$ (ou à la densité de charge $\rho(M_S)$) située en M_S alors le plan est un plan de symétrie (π_S) .

Si la charge $q(M)$ (ou la densité de charge $\rho(M)$) située en M est égale à l'opposé de la charge $q(M_S)$ (ou la densité de charge $\rho(M_S)$) située en M_S alors le plan est un plan d'anti-symétrie (π_{AS}) .

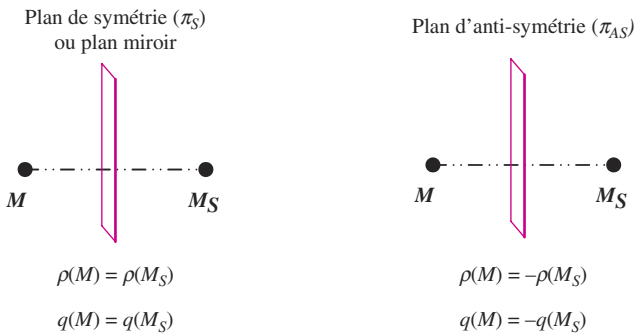


Figure 2.8 Plan de symétrie (π_S) et d'anti-symétrie (π_{AS}) . Le point M_S est le symétrique de M par rapport aux plans (π_S) et (π_{AS}) .

- Transformation par un plan de symétrie (π_S) : $M \xrightarrow{\pi_S} M_S$ (*figure 2.9*)

$$\begin{cases} \rho(M) \xrightarrow{\pi_S} \rho(M_S) = \rho(M) \\ q(M) \xrightarrow{\pi_S} q(M_S) = q(M) \end{cases} \Rightarrow V(M) \xrightarrow{\pi_S} V(M_S) = V(M)$$



Une transformation par un plan de symétrie (π_S) laisse inchangée une grandeur scalaire telle que le potentiel électrostatique.

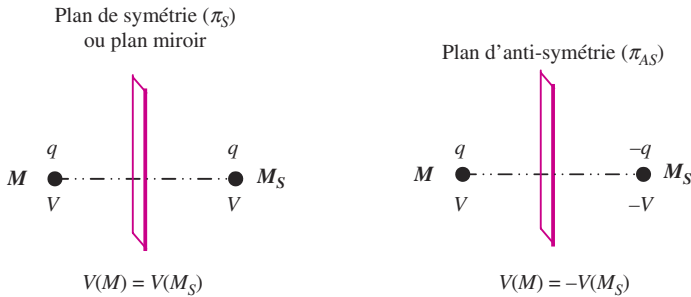


Figure 2.9 Plan de symétrie (π_S) et d'anti-symétrie (π_{AS}). Le point M_S est le symétrique de M par rapport aux plans (π_S) et (π_{AS}).

► Transformation par un plan d'anti-symétrie (π_{AS}) : $M \xrightarrow{\pi_{AS}} M_S$ (voir figure. 2.9)

$$\begin{cases} \rho(M) \xrightarrow{\pi_S} \rho(M_S) = -\rho(M) \\ q(M) \xrightarrow{\pi_S} q(M_S) = -q(M) \end{cases} \Rightarrow V(M) \xrightarrow{\pi_S} V(M_S) = -V(M)$$



Une transformation par un plan d'anti-symétrie (π_{AS}) change une grandeur scalaire (telle que le potentiel électrostatique) en son opposé.



Si le point M est dans le plan d'anti-symétrie il se confond avec son symétrique M_S . On a alors :

$$M \in (\pi_{AS}) \Rightarrow V(M) = -V(M_S) = -V(M) \Rightarrow V(M) = 0$$

Le potentiel est nul dans un plan d'anti-symétrie pour les charges.

Symétrie plane : Transformée d'une grandeur vectorielle (champ électrostatique)

La figure 2.10 montre comment un vecteur se transforme par symétrie plane.

La symétrie plane transforme une grandeur vectorielle parallèle au plan en son symétrique identique (vecteur $\vec{b}_{//} = \vec{b}_{S//}$ de la figure 2.10).

La symétrie plane transforme une grandeur vectorielle perpendiculaire au plan en son opposé (vecteur $\vec{a}_{\perp} = -\vec{a}_{S\perp}$ de la figure 2.10).

La symétrie plane transforme une grandeur vectorielle comme dans un miroir (vecteur $\vec{u}_{PM} \rightarrow \vec{u}_{P_S M_S}$ de la figure 2.10).

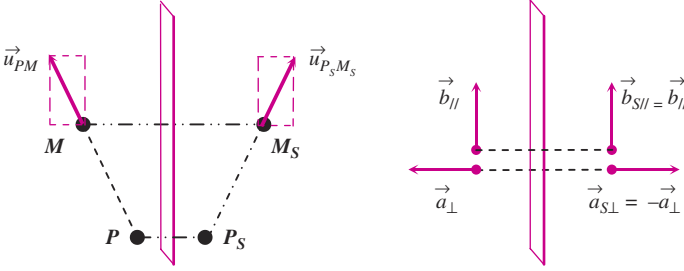


Figure 2.10 Transformation d'un vecteur par une symétrie plane.

D'après la loi de Coulomb, le champ électrostatique $\vec{E}$ en M créé par une charge q en P est un vecteur proportionnel au produit de la charge q par le vecteur unitaire $\vec{u}_{PM}$ dirigé de P vers M . On va donc pouvoir en déduire comment le vecteur champ électrostatique se transforme par rapport à un plan de symétrie ou d'anti-symétrie (figure 2.11).

Transformation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ par un plan de symétrie (π_S)

La transformation par un plan de symétrie (π_S) laissant inchangés les scalaires, le vecteur champ électrostatique se transforme comme pour une symétrie plane c'est-à-dire comme dans un miroir (voir figure 2.11 et 2.12).

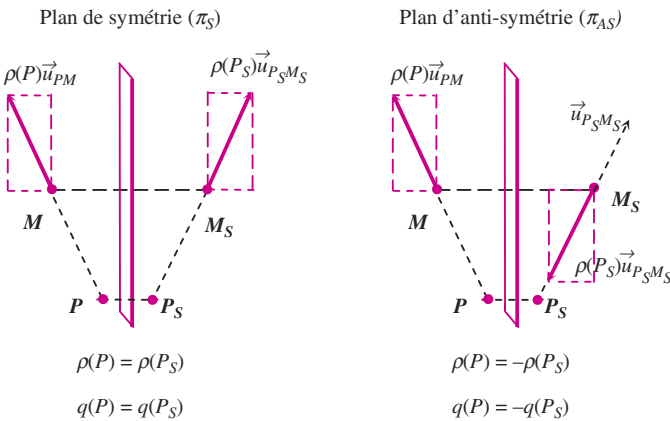


Figure 2.11 Transformation d'un vecteur multiplié par un scalaire par un plan de symétrie (π_S) et par un plan d'anti-symétrie (π_{AS}). Dans le cas des figures on a choisi $\rho(P)$ ou $q(P) > 0$.

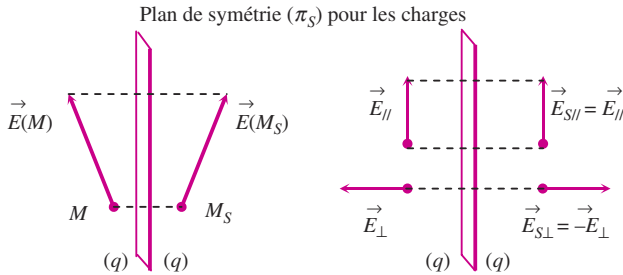


Figure 2.12 Transformation du vecteur champ électrostatique par un plan de symétrie (π_S).

Un plan de symétrie pour les charges :

- laisse inchangée la composante du vecteur champ électrostatique parallèle au plan ($E_{S//} = E_{//}$)
- transforme la composante du vecteur champ électrostatique perpendiculaire au plan en son opposé ($E_{S\perp} = -E_{\perp}$)

Par rapport à un plan de symétrie pour les charges, le vecteur champ électrostatique se transforme comme dans un miroir.

Si le point M appartient au plan de symétrie il se confond avec son symétrique M_S . On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ et } M_S \text{ symétriques}/\pi_S \Rightarrow \vec{E}_{\perp}(M_S) = -\vec{E}_{\perp}(M) \\ M \in \pi_S, M \equiv M_S \Rightarrow \vec{E}_{\perp}(M_S) = \vec{E}_{\perp}(M) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E}_{\perp}(M) = \vec{0}$$

Le vecteur champ électrostatique est dans le plan de symétrie.

Transformation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ par un plan d'anti-symétrie (π_{AS})

Dans la transformation par un plan d'anti-symétrie changeant un scalaire en son opposé, on obtient un vecteur champ électrostatique opposé à celui obtenu par une symétrie plane (voir figures 2.11 et 2.13).

Un plan d'anti-symétrie pour les charges (figure 2.13) :

- transforme la composante du vecteur champ électrostatique parallèle au plan en son opposé : $E_{AS//} = -E_{//}$
- laisse inchangée la composante du vecteur champ électrostatique perpendiculaire au plan : $E_{AS\perp} = E_{\perp}$

Si le point M est dans le plan d'anti-symétrie il se confond avec son symétrique M_S . On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ et } M_S \text{ symétriques} / \pi_{AS} \Rightarrow \vec{E}_{//}(M_S) = -\vec{E}_{//}(M) \\ M \in \pi_S, M \equiv M_S \Rightarrow \vec{E}_{//}(M_S) = \vec{E}_{//}(M) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E}_{//}(M) = \vec{0}$$

Le vecteur champ électrostatique n'a pas de composante dans le plan d'anti-symétrie : il est perpendiculaire au plan d'anti-symétrie.

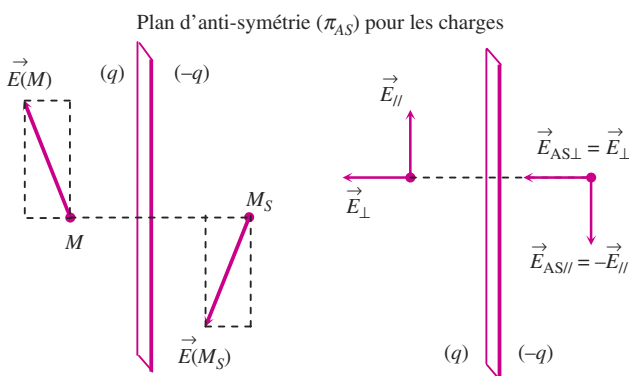


Figure 2.13 Transformation du vecteur champ électrostatique par un plan d'anti-symétrie (π_{AS}).



Les transformations d'une grandeur vectorielle par un plan de symétrie ou d'anti-symétrie dépendent de la nature du champ de vecteurs. Les résultats donnés ci-dessus concernent un champ de vecteurs polaires (ou vecteur) (tel que le champ électrostatique, un champ de vitesses...). Les résultats sont opposés pour un champ de vecteurs axiaux (ou pseudo vecteur) (tel que le champ magnétique).

Invariance par translation

Il y a invariance par translation parallèlement à un axe Δ confondu avec l'axe Oz d'un repère cartésien si la densité de charges ρ reste inchangée lorsqu'on passe d'un point M de coordonnées (x, y, z) à un point M' de coordonnées (x, y, z') (figure 2.14). On peut donc écrire :

$$\text{Pour tout } z \text{ et } z' \quad \rho(x, y, z) = \rho(x, y, z')$$

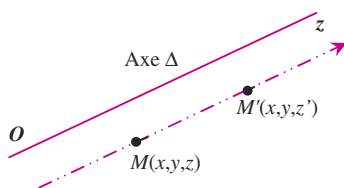


Figure 2.14 Distribution de charges invariante par translation.



La densité ne dépend pas de la variable z .

Dans ces conditions, le potentiel électrostatique $V(M)$ et le vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M)$ restent inchangés par translation le long de l'axe Oz : ces grandeurs ne dépendent pas de la variable z .

Invariance par translation suivant un axe Oz :

$$V(M) = V(x, y, z) = V(x, y)$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)$$

Invariance par rotation

L'opération de rotation autour d'un axe Δ d'un angle de $2\pi/n$ (n entier) se note C_n^Δ . La densité de charges $\rho(M)$ est invariante par l'opération C_n^Δ si une rotation de $2\pi/n$ autour de l'axe Δ , qui amène le point M au point M' , laisse la densité de charges inchangée : $\rho(M) = \rho(M')$



L'axe Δ correspond alors à un axe de symétrie d'ordre n .

On note l'opération de rotation autour d'un axe Δ d'un angle quelconque par C_∞^Δ

La densité de charges électrique $\rho(M)$ est invariante par l'opération C_∞^Δ si, pour une rotation d'un angle θ quelconque autour de l'axe Δ qui déplace M en un point M' , la densité reste inchangée : $\rho(M) = \rho(M')$.

La distribution de charges possède alors la symétrie de révolution autour de l'axe Δ (axe de symétrie). En repérant le point M en

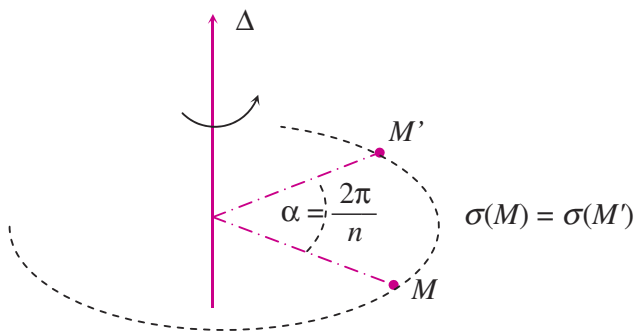


Figure 2.15 Invariance par rotation d'un angle $\alpha = 2\pi/n$ autour de l'axe Δ .

coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe de symétrie Δ étant confondu avec l'axe Oz , on peut écrire :

$$\rho(M) = \rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$$



La densité ne dépend pas de la variable θ

Dans ces conditions, le potentiel électrostatique $V(M)$ reste inchangé par rotation autour de l'axe de symétrie Oz et ne dépend donc pas de la variable θ . De même, par rotation autour de l'axe Δ qui amène un point M en M' , le vecteur champ électrostatique $E(M)$ se superpose au vecteur champ électrostatique $E(M')$.

Ces grandeurs ne dépendent pas de la variable θ .

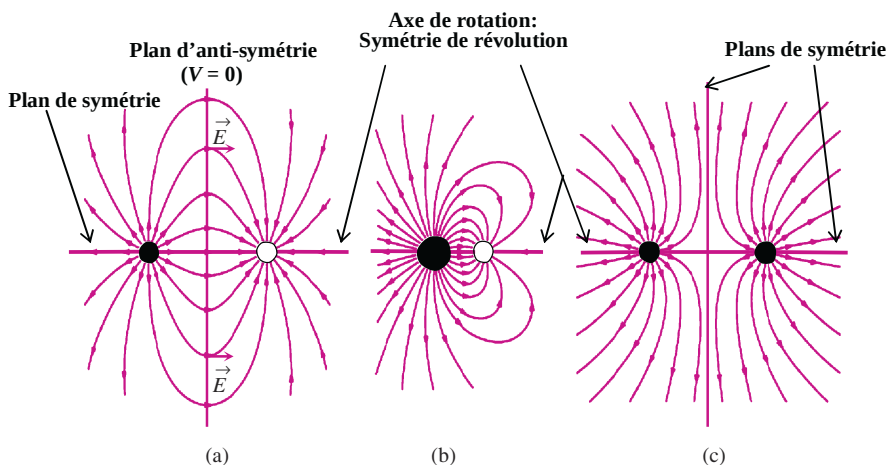


Figure 2.16 Lignes de champ pour deux charges : (a) $(+q, -q)$; (b) $(2q, -q)$; (c) $(+q, +q)$. Tout plan contenant les charges est plan de symétrie.

Invariance par rotation autour de l'axe de symétrie Oz :

$$V(M) = V(r, \theta, z) = V(r, z)$$

$$E(M) = E(r, \theta, z) = E(r, z)$$



Remarque : Tout plan contenant un axe de symétrie de révolution est un plan de symétrie.

Cas où le point M est sur un axe de symétrie :

Le vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M)$ devant se superposer à lui-même par une rotation quelconque il faut nécessairement que le champ électrostatique soit suivant l'axe de symétrie.

Exemples d'éléments de symétrie de corps chargés

La *figure 2.16* représente la cartographie des lignes de champ pour trois systèmes de charges : a) deux charges $(+q, -q)$, b) deux charges $(2q, -q)$ et c) deux charges $(+q, +q)$. On peut remarquer que tout plan contenant les deux charges est un plan de symétrie : il y en a une infinité, en particulier le plan de la figure et le plan perpendiculaire à la figure. L'intersection de ces plans de symétrie définit un axe de symétrie de révolution. Dans le cas (a), il existe un plan d'anti-symétrie : le champ électrostatique est perpendiculaire au plan et le potentiel électrostatique est nul.

Récapitulatif

Si le point M appartient à :

- un plan de symétrie des charges alors : $\vec{E}(M)$ est dans le plan
- un plan d'anti-symétrie des charges alors : $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire au plan et le potentiel est nul
- deux plans de symétrie des charges alors $\vec{E}(M)$ est suivant la droite commune aux deux plans
- un axe de symétrie des charges alors $\vec{E}(M)$ est suivant cet axe

Si la répartition des charges est invariante :

- par translation suivant une direction Oz alors champ et potentiel ne dépendent pas de la variable z
- par rotation d'un angle θ autour d'un axe Oz alors champ et potentiel ne dépendent pas de la variable θ

2.3 CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUES CRÉÉS PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

a) Champ et potentiel créés par un fil chargé

On considère un fil de longueur $2L$ chargé uniformément avec une densité linéique λ_o (supposée positive). L'inventaire de tous les éléments de symétrie de la tige chargée permet de limiter la détermination du champ ou du potentiel électrostatique à une zone restreinte de l'espace où le calcul est aisé. Par application des éléments de la symétrie on génère la cartographie des lignes de champs dans tout l'espace environnant.

Éléments de symétrie du système

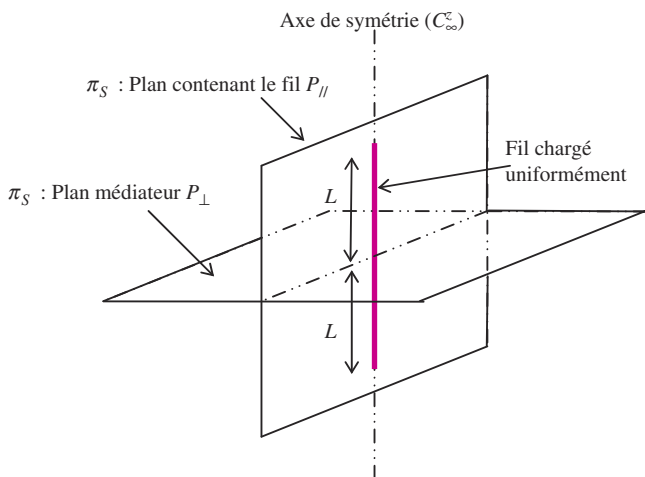


Figure 2.17 Fil chargé uniformément : éléments de symétrie.

Les éléments de symétrie des charges sont :

- Les plans $P_{//}$ contenant le fil sont des plans de symétries (π_S) : il y en a une infinité
- L'axe du fil est un axe de symétrie (C_∞^z)
- Le plan médiateur $P_\perp$ (perpendiculaire au fil passant par son milieu) est un plan de symétrie π_S .

Les symétries des causes (les charges) doivent se retrouver dans les effets produits (le champ et le potentiel électrostatiques). Aussi le calcul du champ peut se limiter à un demi-plan $P_{//}$ contenant le fil. On déduit le champ et le potentiel en tout point par rotation

autour de l'axe. De plus, l'existence du plan médiateur comme plan de symétrie réduit l'étude au quart de plan au dessus du plan médiateur.

Le *figure 2.18* donne un aperçu des lignes de champ électrostatique créé par le fil en accord avec les éléments de symétrie des charges.

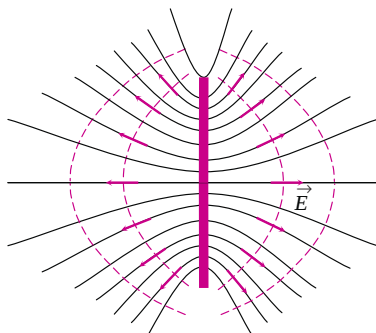


Figure 2.18 Fil chargé uniformément : aperçu de la cartographie des lignes de champ électrostatique (traits pleins) et des équipotentielles (pointillés) dans un plan contenant le fil.

Calcul du champ

L'objectif ici est de déterminer le champ et le potentiel électrostatique en un point M de l'espace créé par le fil rectiligne de longueur $2L = AB$ et chargé uniformément avec une densité linéique de charges λ_o .

Le point M peut être repéré par sa distance au fil : $r = OM$ (voir *figure 2.19*). Un point P du fil peut être repéré par sa cote $z = OP$.

La méthode consiste à décomposer le fil en longueur élémentaire dl autour d'un point P et portant la charge $dq = \lambda_o dl$

Le champ élémentaire créé par P (charge $dq = \lambda_o dl$) en M s'écrit :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda_o dl}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Opérant sur des vecteurs, il est nécessaire d'utiliser une base adaptée pour exprimer le champ élémentaire dont la direction est dans le plan contenant le fil et le point M . La base des coordonnées cylindriques est toute indiquée ici avec le fil comme axe Oz , la coordonnée z repérant un point P du fil, et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On a alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r; \overrightarrow{OP} = z\vec{u}_z; dl = dz$$

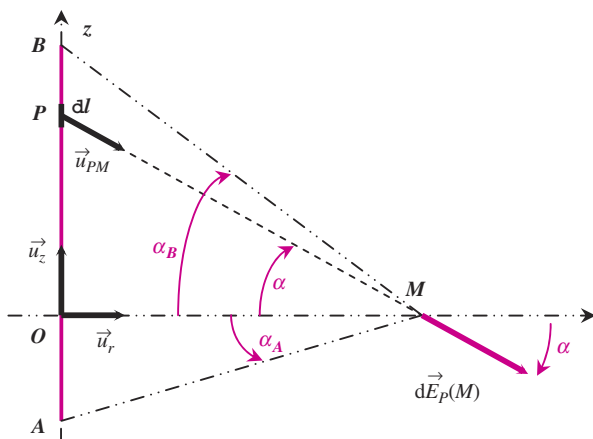


Figure 2.19 Calcul du champ créé par un fil rectiligne chargé uniformément avec une densité linéique de charges $\lambda(P) = \lambda_o$

En introduisant l'angle α que fait PM avec OM , on peut écrire :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda_o dz}{PM^2} [\cos\alpha \vec{u}_r - \sin\alpha \vec{u}_z]$$

Les variables z ($z_A \leq z \leq z_B$) ou α ($\alpha_A \leq \alpha \leq \alpha_B$) ne sont pas indépendantes et peuvent servir à repérer le point P . On a :

$$\tan\alpha = \frac{z}{r} \Rightarrow dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

En choisissant la variable α on peut écrire :

$$\frac{1}{PM^2} = \frac{\cos^2\alpha}{r^2} \Rightarrow \frac{dz}{PM^2} = \frac{\cos^2\alpha}{r^2} \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{d\alpha}{r}$$

En reportant dans l'expression du champ élémentaire, on obtient :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o r} [\cos\alpha d\alpha \vec{u}_r - \sin\alpha d\alpha \vec{u}_z]$$

Le champ total en M s'obtient alors simplement :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in \text{fil}} d\vec{E}_P(M) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o r} \left[\vec{u}_r \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \cos\alpha d\alpha - \vec{u}_z \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \sin\alpha d\alpha \right]$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o r} ([\sin\alpha]_{\alpha_A}^{\alpha_B} \vec{u}_r + [\cos\alpha]_{\alpha_A}^{\alpha_B} \vec{u}_z)$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o r} ([\sin\alpha_B - \sin\alpha_A] \vec{u}_r + [\cos\alpha_B - \cos\alpha_A] \vec{u}_z)$$



Dans cette expression, les sinus et cosinus des angles α_A et α_B dépendent de la position r du point M . On a par exemple :

$$\cos \alpha_A = \frac{r}{\sqrt{z_A^2 + r^2}} \text{ et } \sin \alpha_B = \frac{z_B}{\sqrt{z_B^2 + r^2}}$$

Si OM est la médiatrice du fil (voir figure 2.20), on a $\alpha_A = -\alpha_B = -\beta$. Il n'y a donc pas de composante suivant z . Le champ est suivant $\vec{u}_r$ et on obtient :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r} \sin \beta \vec{u}_r = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \vec{u}_r$$

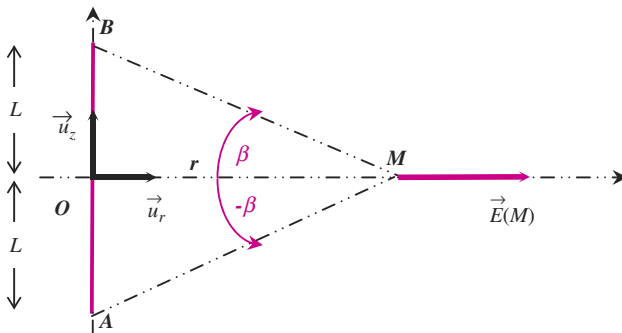


Figure 2.20 Calcul du champ créé par un fil rectiligne chargé uniformément avec une densité linéique de charges λ_o en un point M situé sur la médiatrice.

Remarque :

La médiatrice du fil est un axe de symétrie (d'ordre 2). On retrouve bien que le champ est suivant cet axe.

Calcul du potentiel $V(M)$ (intégration directe)

On considère le cas où le point M est sur la médiatrice : $\alpha_A = -\alpha_B = -\beta$

Dans ce calcul le point M est fixé, r n'est pas une variable.

Potentiel élémentaire créé par P (charge $\lambda_o dl = \lambda_o dz$) en M :

$$dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{dq}{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda_o dz}{PM}$$

En conservant la variable α pour positionner P sur le fil, on a :

$$\frac{1}{PM} = \frac{\cos\alpha}{r} \text{ et } dz = \frac{rd\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{dz}{PM} = \frac{\cos\alpha}{r} \frac{rd\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

En remplaçant dans l'expression du potentiel $dV_P(M)$:

$$dV_P(M) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

$$V(M) = \int_{P \in \text{fil}} dV_P(M) = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

Le potentiel s'écrit : $V(M) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} K$ avec $K = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = 2 \int_0^{\beta} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$

Le calcul de l'intégrale K donne (voir encart 2.5) :

$$K = \left[\ln \frac{(1+u)}{(1-u)} \right]_0^{\sin\beta} = \ln \frac{(1+\sin\beta)}{(1-\sin\beta)}$$

On peut donc donner l'expression du potentiel :

$$V(M) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} K = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \ln \frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta} \text{ et } \sin\beta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$$



Dans cette expression, le potentiel est choisi nul à l'infini c'est à dire pour $\beta = 0$.



Encart 2.5 Calcul d'une primitive : $I = \int 2(\cos\alpha)^{-1} d\alpha$

$$\frac{2d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2d(\sin\alpha)}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{2du}{1 - u^2} = \frac{2du}{(1-u)(1+u)}$$

avec le changement de variable $u = \sin\alpha$.

La décomposition en fractions simples donne :

$$\frac{2du}{(1-u)(1+u)} = \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{du}{(1+u)} + \frac{du}{(1-u)}$$

La primitive I s'écrit :

$$I = [\ln(1+u) - \ln(1-u)] \Rightarrow I = \ln \frac{1+u}{1-u} = \ln \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

$$\int \frac{2d\alpha}{\cos\alpha} = \ln \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \text{ à une constante près}$$

Calcul du potentiel $V(M)$ à partir du champ $\vec{E}(M)$

Par définition et en considérant le cas où le point M est sur la médiatrice du fil (*figure 2.20*) :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = -\vec{E} dr \vec{u}_r \Rightarrow dV = -E dr$$

$$dV = -\frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \frac{\sin\beta}{r} dr$$

Dans ce calcul le point M « bouge » et r est donc variable.

Les variables r et β sont reliées par les relations :

$$r = \frac{L}{\tan\beta} \text{ et } dr = -\frac{L}{\sin^2\beta} d\beta$$

En choisissant de conserver la variable β plutôt que r , on a :

$$dV = \frac{2\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \frac{\tan\beta}{L} \sin\beta \frac{L}{\sin^2\beta} d\beta = \frac{2\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \frac{d\beta}{\cos\beta}$$

Pour obtenir le potentiel $V(M)$ il suffit de déterminer une primitive de l'expression précédente. D'après l'encart 2.5 on a :

$$\int \frac{2d\alpha}{\cos\alpha} = \ln \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

Le potentiel s'écrit donc :

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \ln \frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta} + V_o \text{ avec } \sin\beta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \text{ et } V_o$$

une constante qui dépend du choix de l'origine des potentiels.

En prenant $V(\infty) = 0$ c'est-à-dire $\beta \rightarrow 0$ on a : $V(r \rightarrow \infty) = V_o = 0$. Finalement, on retrouve le même résultat que par la méthode d'intégration directe.

Détermination du champ $\vec{E}(M)$ à partir du potentiel $V(M)$

En partant de la relation entre potentiel et champ on a, pour M sur la médiatrice du fil (figure 2.20) :

$$\frac{dV}{dr} = -E \Rightarrow E = -\frac{dV}{d\beta} \frac{d\beta}{dr} \text{ avec } r = \frac{L}{\tan\beta} \text{ et } \frac{d\beta}{dr} = -\frac{\sin^2\beta}{L}$$

$$E = \frac{dV}{d\beta} \frac{\sin^2\beta}{L} \text{ et } V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} [\ln(1 + \sin\beta) - \ln(1 - \sin\beta)]$$

$$\frac{dV}{d\beta} = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{d}{d\beta} [\ln(1 + \sin\beta)] - \frac{d}{d\beta} [\ln(1 - \sin\beta)] \right)$$

$$\frac{dV}{d\beta} = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{\cos\beta}{1 + \sin\beta} + \frac{\cos\beta}{1 - \sin\beta} \right)$$

$$\frac{dV}{d\beta} = \frac{\lambda_o \cos\beta}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{(1 - \sin\beta) + (1 + \sin\beta)}{1 - \sin^2\beta} \right]$$

$$\frac{dV}{d\beta} = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \frac{2\cos\beta}{1 - \sin^2\beta} = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \frac{2}{\cos\beta}$$

$$E = \frac{dV}{d\beta} \frac{\sin^2\beta}{L} = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \frac{\sin^2\beta}{L \cos\beta} = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \frac{r}{L} \tan\beta \sin\beta$$

$$\text{D'où, avec } \tan\beta = \frac{L}{r} \text{ on a : } E = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r} \sin\beta = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$$

On retrouve bien l'expression déterminée par le calcul direct

Cas particulier : le fil chargé à une longueur infinie

Une opération de symétrie supplémentaire apparaît. Il s'agit de la symétrie de translation le long de l'axe Oz . Le système possédant en plus la symétrie de révolution autour de l'axe Oz , on dit qu'il possède la symétrie cylindrique.

Dans le cas où $L \gg r$ qui correspond au cas où le fil devient infini ou quand le point M est très proche du fil, l'angle β tend

vers $\pi/2$, on obtient pour le champ électrostatique l'expression suivante :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r} \vec{u}_r.$$

Le même raisonnement appliqué à l'expression du potentiel $V(r)$ (avec $V(\infty) = 0$) conduit à une indétermination. Ceci provient du fait qu'il existe des charges à l'infini et qu'il n'est plus possible de fixer un potentiel nul à l'infini. Aussi, dans des problèmes similaires, la détermination du potentiel se fera à partir de l'expression du champ électrostatique. En utilisant la définition différentielle on peut écrire :

$$dV(r) = -\vec{E}(r) \cdot d\vec{l} = -E(r)dr = -\frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \frac{dr}{r}$$

Ainsi pour ce problème, le potentiel est donné par :

$$V(r) = -\frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \int \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \ln r + C^{ste}$$

La constante dépend du choix de l'origine des potentiels qui dans ce cas ne peut pas être nulle à une distance infinie du fil. En prenant par exemple $V(r_o) = 0$ où r_o peut représenter l'unité de longueur on a :

$$V(r_o) = 0 \Rightarrow C^{ste} = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \ln r_o$$

Le potentiel s'écrit alors :

$$V(r) = -\frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \ln r + \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \ln r_o = -\frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r}{r_o}$$



Ce résultat peut se retrouver à partir de l'expression du potentiel obtenu pour le fil de longueur $2L$ par la méthode d'intégration directe à la condition de prendre la même origine des potentiels c'est à dire $V(r_o) = 0$ et non pas le potentiel nul à l'infini. On a alors :

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \ln \frac{1 + \sin\beta}{1 - \sin\beta} + V_o = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \ln \frac{1 + \sin\beta}{1 - \sin\beta} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \ln \frac{1 + \sin\beta_o}{1 - \sin\beta_o}$$

Les sinus des angles β et β_o s'écrivent :

$$\sin\beta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} = \frac{L}{L\sqrt{1 + (r/L)^2}} = \left[1 + \frac{r^2}{L^2}\right]^{-1/2} \quad \text{et} \quad \sin\beta_o = \left[1 + \frac{r_o^2}{L^2}\right]^{-1/2}.$$

En considérant le cas du fil infini c'est à dire $r/L \ll 1$, un développement limité donne :

$$\sin\beta = \left[1 + \frac{r^2}{L^2}\right]^{-1/2} \approx 1 - \frac{r^2}{2L^2} \text{ et } \sin\beta_o = \left[1 + \frac{r_o^2}{L^2}\right]^{-1/2} \approx 1 - \frac{r_o^2}{2L^2}$$

En remplaçant les sinus dans l'expression du potentiel, on obtient :

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \ln \left[\frac{1 + \sin\beta}{1 - \sin\beta} \frac{1 - \sin\beta_o}{1 + \sin\beta_o} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \ln \left[\frac{2 - r^2/2L^2}{r^2/2L^2} \frac{r_o^2/2L^2}{2 - r_o^2/2L^2} \right]$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \ln \left[\left(\frac{r_o}{r} \right)^2 \frac{2 - r^2/2L^2}{2 - r_o^2/2L^2} \right]$$

$$\Rightarrow V(M) \approx \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_o} \ln \frac{r_o}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{r}{r_o}$$

On retrouve bien l'expression déterminée à partir du champ.

Les surfaces équipotentielles s'obtiennent en cherchant l'ensemble des points se trouvant au même potentiel c'est-à-dire : $V(M) = V(r) = \text{constante}$. On a alors : $V(r) = C^{ste} \Rightarrow r = \text{constante}$ ce qui correspond à l'équation d'un cylindre de rayon r et dont l'axe est confondu avec le fil.

Les lignes de champ sont radiales (champ dirigé suivant $\vec{u}_r$) c'est à dire perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

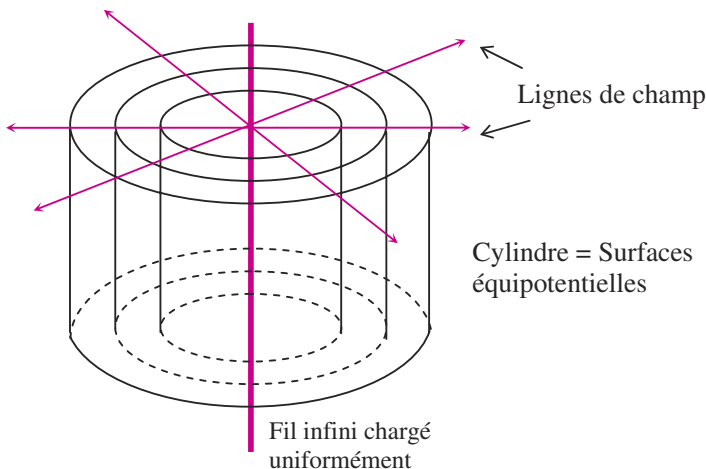


Figure 2.21 Surfaces équipotentielles et lignes du champ électrostatique d'un fil infini chargé uniformément.

b) Champ et potentiel créés par un disque chargé

On considère un disque de centre O , d'axe de révolution Oz , de rayon R , d'épaisseur négligeable et chargé uniformément en surface avec une densité σ_o .

Éléments de symétrie du système

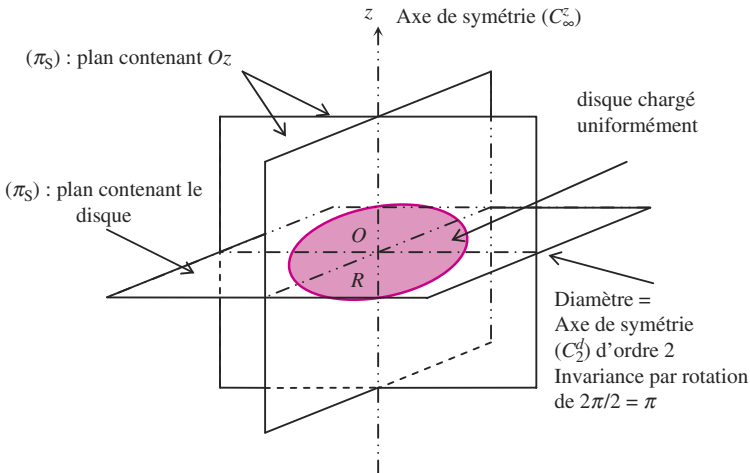


Figure 2.22 Disque chargé uniformément : éléments de symétrie.

Le plan du disque étant un plan de symétrie on peut se limiter à l'étude du champ et du potentiel dans le demi espace $z > 0$.

Le système admet un axe de symétrie Oz : l'étude peut donc se réduire à un demi-plan

Sur l'axe de symétrie Oz , le champ électrostatique est suivant cet axe.

Le calcul des effets électriques est complexe mais la cartographie doit traduire les éléments de symétrie du disque chargé.

Calcul de $\vec{E}(M)$ sur l'axe Oz

Le point M est repéré par son abscisse $OM = z$ (avec $z > 0$)

Le principe consiste à décomposer la surface chargée en aires élémentaires dS chacune étant définie autour d'un point P et portant la charge $dq = \sigma_o dS$ (voir *figure 2.23*). Le champ électrostatique élémentaire s'écrit alors :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\sigma_o dS \overrightarrow{PM}}{PM^2 PM}$$

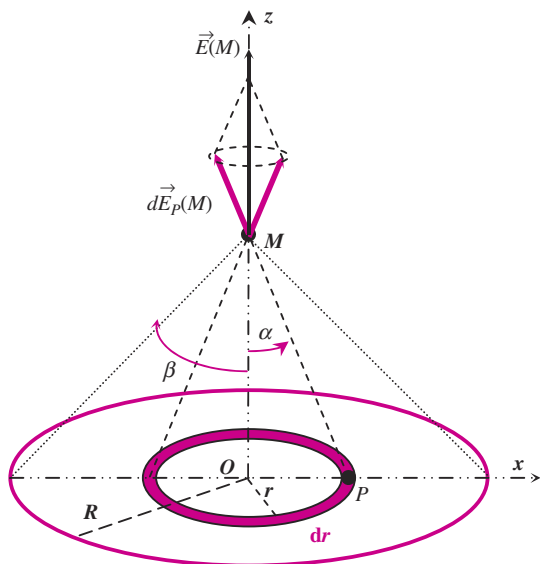


Figure 2.23 Disque chargé uniformément : champ électrostatique sur un point de l'axe.

Sachant que le champ résultant est suivant Oz , seule la composante E_{Pz} suivant Oz intervient dans le calcul. En introduisant l'angle α que fait PM avec Oz (voir *figure 2.23*) on peut écrire :

$$dE_{Pz}(M) = \vec{u}_z \cdot d\vec{E}_P(M) = \frac{\sigma_o dS}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{PM} \cdot \vec{u}_z}{PM^3} = \frac{\sigma_o dS}{4\pi\epsilon_o} \frac{PM \cos\alpha}{PM^3}$$

avec $\tan\alpha = \frac{r}{z}$.

Cette expression est identique pour l'ensemble des points P situés sur une couronne de rayon r et d'épaisseur élémentaire dr . La surface élémentaire correspondante s'écrit alors :

$$dS = 2\pi r dr$$

L'expression de la composante dE_{Pz} du champ élémentaire devient :

$$dE_{Pz}(M) = \frac{\sigma_o 2\pi r dr \cos\alpha}{4\pi\epsilon_o PM^2} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \frac{r \cos\alpha}{PM^2} dr$$

Pour obtenir le champ résultant il suffit d'additionner tous les champs élémentaires créés par les couronnes de rayon r variant de 0 à R (voir *figure 2.23*). Il est possible aussi de choisir la variable α pour positionner une couronne, l'angle α variant de 0 à β (avec $\tan\beta = R/z$) pour recouvrir le disque.

Avec la variable r , on a :

$$PM^2 = r^2 + z^2 \text{ et } \cos\alpha = \frac{z}{PM} = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \text{ soit :}$$

$$dE_{Pz}(M) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \frac{r z}{(r^2 + z^2)\sqrt{r^2 + z^2}} dr = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} z \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Avec la variable α , on a :

$$\tan\alpha = \frac{r}{z} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} d\alpha = \frac{dr}{z} \Rightarrow \cos\alpha dr = \frac{z}{\cos\alpha} d\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{PM} \Rightarrow \frac{1}{PM} = \frac{\cos^2\alpha}{z^2}$$

$$dE_{Pz}(M) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \frac{\cos^2\alpha}{z^2} \frac{zr}{\cos\alpha} d\alpha = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \frac{r}{z} \cos\alpha d\alpha$$

$$dE_{Pz}(M) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \tan\alpha \cos\alpha d\alpha = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \sin\alpha d\alpha$$

Le champ résultant s'écrit alors :

$$E(M) = E(z) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} z \int_0^R (r^2 + z^2)^{-3/2} r dr$$

ou :

$$E(M) = E(z) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \int_0^\beta \sin\alpha d\alpha$$

L'expression en fonction de l'angle donne directement :

$$E(M) = E(z) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} [-\cos\alpha]_0^\beta = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} (1 - \cos\beta)$$

Avec $\cos\beta = z/\sqrt{z^2 + R^2}$, l'expression en fonction du rayon R est :

$$E(z) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$



Pour $z < 0$, par symétrie par rapport au plan contenant le disque on a :

$$\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z) \text{ soit : } E(z) = -\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \left(1 - \frac{-z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

On peut donc écrire pour tout z :

$$E(z) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

Calcul du potentiel électrostatique $V(M)$, sur l'axe Oz

► À partir du champ électrostatique ($z > 0$)

La relation différentielle entre le potentiel et le champ électrostatique donne :

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{E}(z) \cdot d\vec{l} = -E(z) \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = -E(z) dz \\ &= -\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) dz \end{aligned}$$

En posant le changement de variable $u = z^2 + R^2$ et donc $du = 2zdz$, on a :

$$\int \frac{zdz}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = u^{1/2} = \sqrt{z^2 + R^2}$$

Le potentiel s'écrit donc, pour $z > 0$:

$$V(z) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \int \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right) dz = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right) + V_o$$

Si on choisit de prendre le potentiel nul à l'infini ($V(z \rightarrow \infty) = 0$) la constante V_o est nulle.

$$V(z) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right)$$

Remarque :

Pour $z < 0$, par symétrie par rapport au plan contenant le disque on a : $V(z) = V(-z)$ (fonction paire).

On peut donc écrire pour tout z :

$$V(z) = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right)$$

► Calcul direct (méthode d'intégration directe)

La même procédure appliquée pour calculer le champ électrostatique s'applique pour le potentiel. On découpe autour d'un point P appartenant au disque une surface élémentaire dS qui porte la charge $dq = \sigma_o dS$. Elle crée en M un potentiel électrostatique élémentaire :

$$dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\sigma_o dS}{PM} \text{ avec potentiel nul à l'infini.}$$

Cette expression est identique pour l'ensemble des points P situés sur une couronne de rayon r et d'épaisseur élémentaire dr dont la surface élémentaire s'écrit : $dS = 2\pi r dr$. Le potentiel élémentaire créé par cette couronne est donné par l'expression :

$$dV_{\text{couronne}(r)}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\sigma_o 2\pi r dr}{PM} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Le potentiel créé par le disque s'obtient par intégration sur r variant de 0 à R :

$$V_{\text{disque}(R)}(M) = \int_0^R dV_{\text{couronne}(r)} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Avec $\int \frac{z dz}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \sqrt{z^2 + R^2}$ (voir précédemment), on a :

$$V_{\text{disque}(R)}(z) = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} [\sqrt{z^2 + r^2}]_0^R = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} (\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2})$$

Soit pour tout z , et avec le potentiel nul à l'infini, on obtient l'expression finale :

$$V_{\text{disque}(R)}(z) = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right)$$

c) Cas d'un plan infini chargé uniformément en surface

Considérons un plan (O, x, y) chargé uniformément (voir figure 2.24). Ce plan est un plan de symétrie pour les charges ce qui donne pour deux points M et M' symétriques :

$$V(M) = V(M') \text{ et } \vec{E}(M) = -\vec{E}(M')$$

Toute droite perpendiculaire au plan passant par un point M (droite parallèle à l'axe Oz) est un axe de symétrie. Le champ électrostatique

est donc suivant la direction de cette droite c'est-à-dire :

$$\vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{u}_z$$

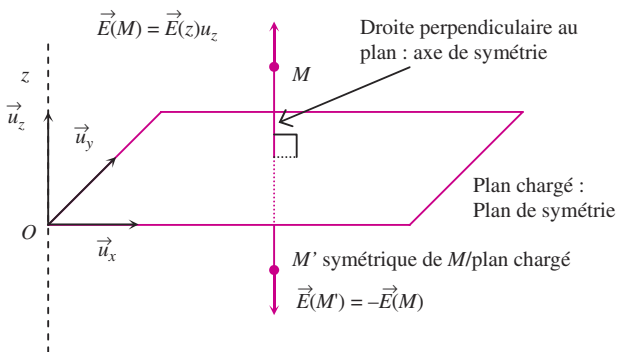


Figure 2.24 Éléments de symétrie pour un plan infini chargé uniformément. Le plan étant infini, il y a invariance par translation parallèlement au plan : champ et potentiel ne dépendent pas des variables x et y .

Pour toute translation parallèlement au plan, il y a invariance : le champ et le potentiel ne dépendent pas des variables x et y :

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z \text{ et } V(M) = V(z)$$

Pour obtenir l'expression du champ électrostatique, il suffit de prendre l'expression du champ créé par un disque de rayon R en un point M sur son axe ($z > 0$) et de chercher la limite quand R tend vers l'infini :

$$E_{\text{plan}}(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} E_{\text{disque}(R)}(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}$$

On constate que le champ est uniforme. Par symétrie on a :

$$\text{pour } z < 0 \quad \vec{E}_{\text{plan}} = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \vec{u}_z$$

$$\text{pour } z > 0 \quad \vec{E}_{\text{plan}} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \vec{u}_z$$

Les lignes de champs sont des droites perpendiculaires au plan chargé uniformément (voir *figure 2.26*).



Pour un point du plan, le champ ne peut être que nul puisqu'il doit être à la fois dans le plan de symétrie (plan O, x, y) et suivant la direction $\vec{u}_z : E(O) = 0$. À la traversée du plan, on constate une discontinuité du champ :

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}(z > 0) - \vec{E}(z < 0) = 2\vec{E} = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} \vec{u}_z$$

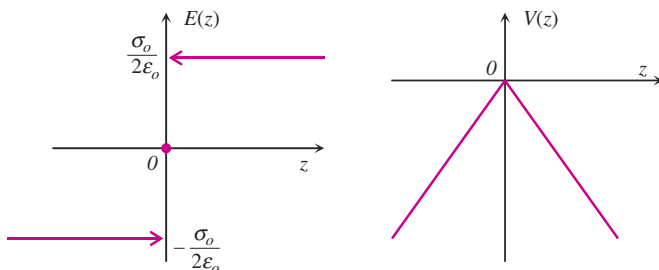


Figure 2.25 Champ et potentiel créés par un plan infini chargé uniformément.

Le potentiel se détermine à partir de la relation champ-potentiel :

$$dV = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = -Edz$$

Pour $z > 0$ on a :

$$dV = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} dz \Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} z + V_o$$



Tout comme pour le fil chargé infini, il y a des charges à l'infini et il n'est plus possible de choisir le potentiel nul à l'infini. Ceci explique pourquoi on ne peut pas obtenir le potentiel créé par un plan à partir de l'expression du potentiel créé par un disque dont on ferait tendre le rayon vers l'infini.

On peut fixer la constante en choisissant de prendre le potentiel nul à la surface du plan chargé : la constante V_o s'annule alors.

La fonction $V(z)$ étant paire on peut écrire pour tout z :

$$V(z) = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} |z|$$

Remarque :

Contrairement au champ, il y a continuité du potentiel à la traversée de la surface chargée (voir *figure 2.25*).

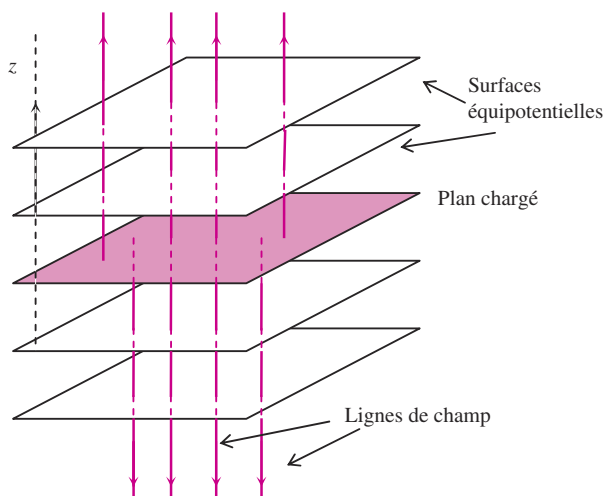


Figure 2.26 Lignes de champ et surfaces équipotentielles pour un plan infini chargé uniformément (densité surfacique positive).

Les surfaces équipotentielles ($V(z) = \text{constante}$) sont obtenues pour $z = \text{constante}$: ce sont des plans parallèles au plan chargé. Les lignes de champs sont bien perpendiculaires à ces surfaces (voir figure 2.26).

c) Champ et potentiel créés par une distribution volumique de charges

Considérons le cas d'une sphère ou d'un cylindre chargés en volume. Si on s'intéresse au calcul du champ électrostatique créé par l'une ou l'autre des distributions, on décompose le système en disque d'épaisseur élémentaire dz . Le point de départ est donc l'expression du champ créé par un disque chargé traité ci-dessus. L'épaisseur dz élémentaire est suffisamment petite pour que l'expression du champ créé par un disque reste valable. À la charge élémentaire portée par un élément de surface du disque sans épaisseur $dq = \sigma dS$ correspond la même charge mais répartie dans le volume élémentaire $d\mathcal{V} = dzdS$. On a donc la correspondance :

$$dq = \sigma dS = \rho d\mathcal{V} = \rho dzdS \Rightarrow \sigma = \rho dz$$

► Cas du cylindre

Soit un cylindre de rayon R , de hauteur h , d'axe Oz , le point O étant au milieu du cylindre et de densité volumique de charge ρ . On cherche

à exprimer le champ électrostatique créé par ce cylindre en un point M de son axe repéré par son abscisse notée Z .

Le cylindre étant découpé en tranches d'épaisseur dz situées à l'abscisse z (voir *figure 2.27*), on a :

$$d\vec{E}_{tranche(dz)}(Z) = \frac{\rho dz}{2\epsilon_0} \left(\frac{(Z-z)}{|Z-z|} - \frac{Z-z}{\sqrt{(Z-z)^2 + R^2}} \right) \vec{u}_z$$

Le champ total s'obtient par intégration sur z variant entre $-h/2$ et $h/2$.

► Cas de la sphère

Soit une sphère de rayon R et de centre O . On cherche le champ en un point M quelconque de l'espace. On définit alors un axe Oz confondu avec OM et on repère M par son abscisse Z . On décompose alors la sphère en disques de rayon r , d'épaisseur dz à l'abscisse z (voir *figure 2.27*). Le champ élémentaire en M créé par un disque est :

$$d\vec{E}_{tranche(dz)}(z) = \frac{\rho dz}{2\epsilon_0} \left(\frac{(Z-z)}{|Z-z|} - \frac{Z-z}{\sqrt{(Z-z)^2 + r^2}} \right) \vec{u}_z$$

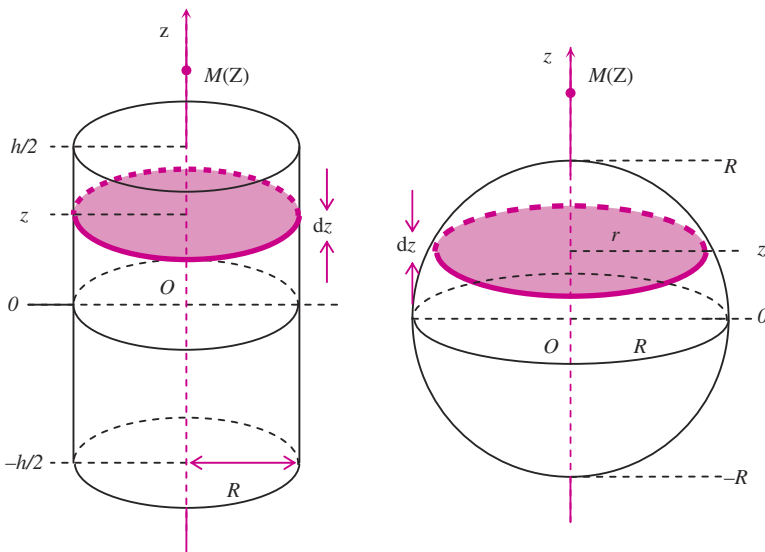


Figure 2.27 Décomposition d'un cylindre et d'une sphère en disque d'épaisseur dz . Le champ résultant en M est la contribution de tous les disques constituant le cylindre ou la sphère.

L'intégrale sur la variable z variant de $-R$ à $+R$ permet de déduire le champ électrique total en notant que r varie avec z .

La méthode développée dans ce chapitre permet de calculer la cartographie du champ ou du potentiel électrostatique créé par des systèmes chargés avec différentes géométries. La complexité de la méthode tient aux difficultés du calcul analytique. Cependant, pour des points appartenant aux éléments de symétrie du système de charges, le calcul du champ et du potentiel électrostatique peut être effectué de façon plus aisée. En dehors de ces points particuliers, des outils numériques peuvent être utilisés pour déterminer la cartographie des lignes du champ et potentiel. Une autre méthode qui sera développée plus loin et qui repose sur le théorème de Gauss permet d'établir facilement la cartographie électrique autour de corps chargés présentant des symétries élevées comme par exemple la symétrie sphérique ou cylindrique.



POINTS-CLÉS

- Champ électrostatique créé en M par une charge ponctuelle en O :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \text{ avec } r = OM \text{ et } \vec{u}_r = \vec{OM}/r$$

- Potentiel électrostatique créé en M par une charge ponctuelle en O

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ avec potentiel nul à l'infini}$$

Le potentiel est défini à une constante près dépendant du choix de l'origine des potentiels.

- Définition du potentiel :

$$\text{Différentielle : } dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Locale : } \vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V$$

$$\text{Intégrale : } \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = - \int_{M_1}^{M_2} dV = V(M_1) - V(M_2)$$

La circulation du champ électrostatique sur un contour fermé est nulle : le champ électrostatique est à circulation conservative.

- Symétrie :

Si le point M appartient à :

- un plan de symétrie des charges alors $\vec{E}(M)$ est dans le plan
- un plan d'anti-symétrie des charges alors $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire au plan et le potentiel est nul
- deux plans de symétrie des charges alors $\vec{E}(M)$ est suivant la droite commune aux deux plans

- un axe de symétrie des charges alors $\vec{E}(M)$ est suivant cet axe
- Si la répartition des charges est invariante :
- par translation suivant une direction Oz alors champ et potentiel ne dépendent pas de la variable z
 - par rotation d'un angle θ autour d'un axe Oz alors champ et potentiel ne dépendent pas de la variable θ
 - Champ et potentiel créés par une distribution de charges :
Principe de superposition : on additionne les champs et les potentiels.

EXERCICES

2.1 Champ électrostatique créé par deux charges

Deux charges ponctuelles de valeurs $-q$ et $3q$ (avec $q > 0$) sont placées respectivement en deux points de l'axe Ox : $A(-a, 0)$ et $B(3a, 0)$ (figure 2.28).

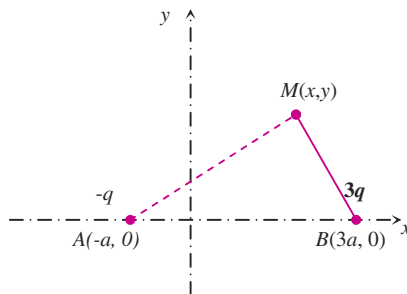


Figure 2.28

- a) Quelle est l'expression du champ électrostatique créé par les charges au point $M(x, y)$.
- b) Calculer le potentiel électrostatique $V(M)$.
- c) Déterminer la nature de la courbe associée à l'équipotentielle $V = 0$

2.2 Étude qualitative d'une cartographie de lignes du champ électrostatique

On considère le système de charges négatives réparties sur une surface plane. Un matériau conducteur pointu, lorsqu'il est mis en contact avec la surface chargée, modifie les lignes équipotentielles comme indiqué sur la figure avec $V_0 < V_1 < V_2 < V_3 < V_4$ (figure 2.29).

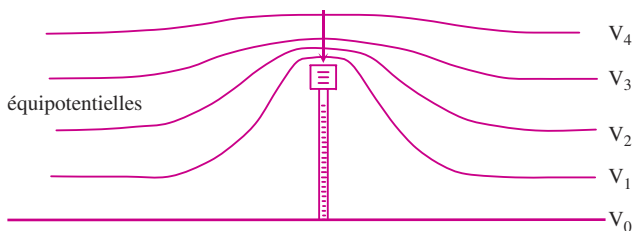


Figure 2.29

a) Dessiner qualitativement mais de façon concise les lignes du champ électrostatique sur la figure en précisant leurs orientations.

b) Préciser sur le schéma les régions où le champ électrostatique est le plus intense et celles où il est moins intense. Justifier soigneusement votre analyse de la cartographie.

2.3 Notion de Champ, Potentiel et Gradient

Soit un champ de vecteurs défini en un point $M(r, \theta)$ par ses composantes en coordonnées polaires : $E_r = 2k\cos\theta/r^3$ et $E_\theta = k\sin\theta/r^3$ où k est une constante.

a) Montrer que ce champ de vecteurs est le gradient d'une fonction scalaire $V(r, \theta)$. L'expression du gradient en coordonnées polaires est :

$$\vec{\text{grad}} V(r, \theta) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

b) Déterminer la fonction $V(r, \theta)$ (on prendra $V(\infty) = 0$).

c) Déterminer l'équation des lignes de Champ en coordonnées polaires.

d) Exprimer le champ de vecteurs en fonction des coordonnées cartésiennes.

2.4 Champ et potentiel électrostatiques créés par une distribution linéique de charges λ_0

Un conducteur est constitué de deux brins rectilignes de longueur L et d'un demi-cercle de centre O et de rayon R (voir figure 2.30). Une charge électrique est uniformément répartie sur le conducteur avec la densité uniforme λ_0 .

Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques créés par le conducteur en O (voir figure 2.31).

2.5 Champ et potentiel électrostatiques créés par une distribution surfacique de charges σ_0

Dans le cas d'un conducteur plan délimité par deux demi-cercles concentriques, de rayon R_1 et R_2 , déterminer le champ et le potentiel au centre O (voir figure 2.31).

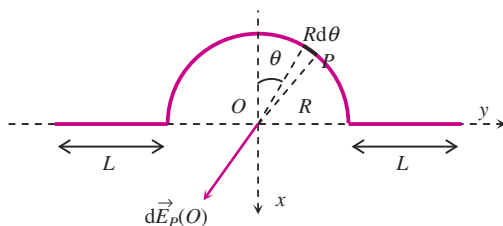


Figure 2.30

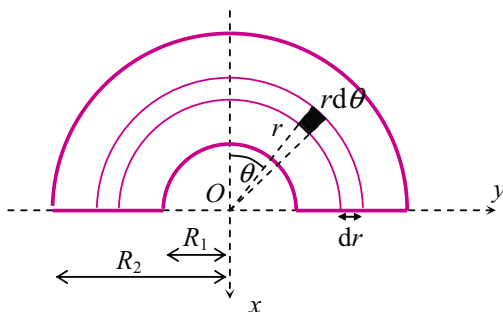


Figure 2.31

Application numérique :

Sachant que la charge totale distribuée uniformément sur le conducteur est $Q = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, déterminer les valeurs du champ et du potentiel en O . On donne $R_1 = 10 \text{ cm}$ et $R_2 = 12 \text{ cm}$.

Réponses : $E(O) = 1,2 \cdot 10^5 \text{ V.m}^{-1}$ et $V(O) = 40 \text{ kV}$.

2.6 Champ et potentiel électrostatique créés par un plan chargé uniformément avec une densité surfacique de charge σ_o

a) Déterminer le champ électrostatique créé par un fil conducteur infini portant une densité linéique de charge uniforme λ_o .

b) En déduire le champ électrostatique créé par un plan chargé infini portant une densité surfacique de charge uniforme σ_o (figure 2.32).

2.7 On considère trois plaques conductrices assimilées à des plans infinis, parallèles et distant de $d = 5 \text{ cm}$ (voir figure 2.33). La plaque centrale porte une densité surfacique de charges $(+\sigma_o)$ et les deux autres $(-\sigma_o)$.

a) Quel est le champ électrostatique entre les différentes plaques.

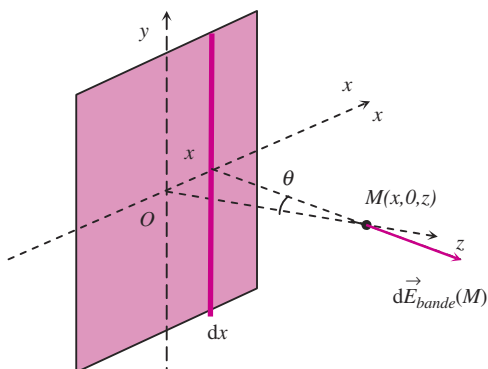


Figure 2.32 Décomposition du plan infini chargé en bandes de largeur dx assimilées à des fils infinis chargés.

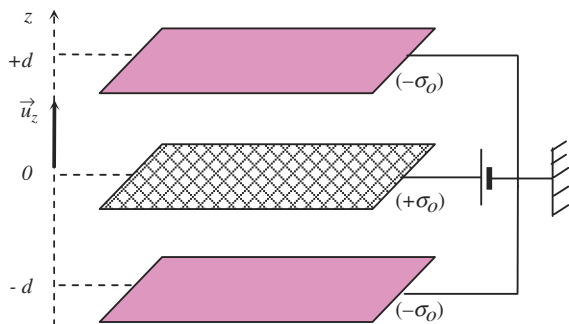


Figure 2.33

b) Déterminer l'expression de la différence de potentiel (ΔV) entre le conducteur central et une des plaques chargée avec $-\sigma_0$.

c) Calculer le champ entre les plaques pour $\Delta V = 10 \text{ kV}$.

Réponses : b) $\Delta V = Ed$; c) $E = 200\,000 \text{ V.m}^{-1}$

SOLUTIONS

2.1 a) Le champ électrique au point M est la somme vectorielle des champs électriques créés par les deux charges $-q$ et $+3q$:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-q \frac{\vec{AM}}{AM^3} + 3q \frac{\vec{BM}}{BM^3} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{\vec{BM}}{BM^3} - \frac{\vec{AM}}{AM^3} \right]$$

$$\frac{\vec{AM}}{AM^3} = \frac{(x+a)\vec{u}_x + y\vec{u}_y}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}}; \quad \frac{\vec{BM}}{BM^3} = \frac{(x-3a)\vec{u}_x + y\vec{u}_y}{((x-3a)^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(M) = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \text{ avec :}$$

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(x-3a)}{((x-3a)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{(x+a)}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} y \left(\frac{3}{((x-3a)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

b) Le potentiel électrostatique se compose de deux contributions dues aux deux charges :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{AM} + \frac{3q}{BM} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3}{BM} - \frac{1}{AM} \right]$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{((x-3a)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x+a)^2 + y^2)^{1/2}} \right)$$

c) Pour $V = 0$ on a

$$\frac{3}{((x-3a)^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x+a)^2 + y^2)^{1/2}} = 0$$

$$3((x+a)^2 + y^2)^{1/2} = ((x-3a)^2 + y^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$9(x+a)^2 + 9y^2 = (x-3a)^2 + y^2$$

$$9x^2 + 9a^2 + 18ax + 8y^2 = x^2 + 9a^2 - 6ax$$

$$8x^2 + 24ax + 8y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3ax + y^2 = 0$$

$$x^2 + 3ax + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + y^2 = 0$$

$y^2 + (x + \frac{3}{2}a)^2 = \frac{9}{4}a^2$ ce qui représente l'équation d'un cercle de centre $(-3/2a, 0)$ et de rayon $3/2a$.

2.2 a) Les lignes du champ électrostatique (traits noirs) sont perpendiculaires aux lignes équipotentielles (traits rouges). Elles sont orientées dans le sens des potentiels décroissants (figure 2.34).

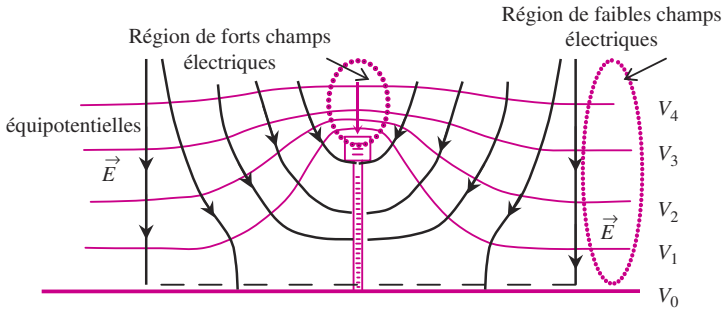


Figure 2.34

b) L'intensité du champ électrique est défini par $\Delta V / \Delta l$ avec ΔV la différence de potentiel entre deux points distants de Δl . On constate sur la figure 2.34 l'existence de régions où ΔV est constante. Ces lignes sont plus resserrées au centre (Δl faible) et plus dispersées à la périphérie (Δl grand) ; d'où les délimitations champs faibles et champs forts reportées sur la figure.

2.3 Notion de Champ, Potentiel et Gradient

a) D'après la définition du gradient en coordonnées polaires on peut écrire, si le champ $\vec{E}$ dérive d'une fonction scalaire V : $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 2k \cos\theta / r^3 \text{ et } E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = k \sin\theta / r^3$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -2k \frac{\cos\theta}{r^3} \Rightarrow V(r, \theta) = k \frac{\cos\theta}{r^2} + f(\theta).$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[k \frac{\cos\theta}{r^2} + f(\theta) \right] = \frac{k \sin\theta}{r^3} - \frac{df(\theta)}{r d\theta} = \frac{k \sin\theta}{r^3}$$

On en déduit que $\frac{df(\theta)}{d\theta} = 0 \Rightarrow f(\theta) = C$ (constante)

Il existe bien une fonction $V(r, \theta) = k \frac{\cos\theta}{r^2} + C$ telle que $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$

b) Choix de l'origine des potentiels : pour $r \rightarrow +\infty$ on a $V(\infty) = 0$ et donc la constante C est nulle. Le potentiel s'écrit alors :

$$V(r, \theta) = k \frac{\cos \theta}{r^2}$$

c) Le champ est tangent aux lignes de champ ce qui se traduit par :

$$\vec{E} = \alpha d\vec{l} \Rightarrow E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta = \alpha dr \vec{u}_r + \alpha r d\theta \vec{u}_\theta \Rightarrow \frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta}$$

En reportant les expressions de E_r et E_θ dans cette égalité on a :

$$\frac{r^3 dr}{2k \cos \theta} = \frac{r^4 d\theta}{k \sin \theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta} = 2 \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta}$$

En intégrant :

$\ln r = 2 \ln \sin \theta + C = \ln(\sin^2 \theta) + \ln K$. L'équation en coordonnées polaires des lignes de champ est : $r = K \sin^2 \theta$.

d) On a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$, $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$
De plus : $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_\theta$
On a donc :

$$E_r \vec{u}_r = \frac{2k \cos \theta}{r^3} [\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y] = \frac{2k x}{r^3} \left[\frac{x}{r} \vec{u}_x + \frac{y}{r} \vec{u}_y \right]$$

$$E_r \vec{u}_r = \frac{2k}{(x^2 + y^2)^{5/2}} [x^2 \vec{u}_x + xy \vec{u}_y]$$

De même :

$$E_\theta \vec{u}_\theta = \frac{k \sin \theta}{r^3} [-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y] = \frac{k y}{r^3} \left[-\frac{y}{r} \vec{u}_x + \frac{x}{r} \vec{u}_y \right]$$

$$E_\theta \vec{u}_\theta = \frac{k}{(x^2 + y^2)^{5/2}} [-y^2 \vec{u}_x + xy \vec{u}_y]$$

$$\text{Soit : } \vec{E} = \frac{k}{(x^2 + y^2)^{5/2}} [(2x^2 - y^2) \vec{u}_x + 3xy \vec{u}_y]$$

2.4 a) Les deux tiges rectilignes de longueur L créent au point O , des champs électriques d'égale intensité mais de sens opposé. Ainsi, le

champ électrique en O provient uniquement du conducteur en forme de demi-cercle.

Soit l'élément de longueur $Rd\theta$ autour d'un point P qui porte la charge $dQ = \lambda_o Rd\theta$ (voir figure), le champ électrique élémentaire créé en O s'écrit avec $\vec{u}$ vecteur unitaire suivant PO :

$$d\vec{E} = \frac{\lambda_o Rd\theta}{4\pi\epsilon_o R^2} \vec{u}$$

Or pour des raisons de symétrie, le champ électrostatique est orienté selon l'axe Ox (axe de symétrie) : seule la composante suivant Ox intervient dans la contribution du champ total. On a donc :

$$\vec{E}(O) = E_x(O) \vec{u}_x \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} E_x(O) &= \int_{(\text{demi-cercle})} d\vec{E} \cdot \vec{u}_x = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\lambda_o Rd\theta}{4\pi\epsilon_o R^2} \cos\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\lambda_o d\theta}{4\pi\epsilon_o R} \cos\theta \end{aligned}$$

$$E_x(O) = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o R} [\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o R}$$

b) Pour le potentiel électrique, il convient de noter la superposition des trois contributions issues du demi-cercle et des deux tiges de longueur L .

Pour le demi-cercle, le potentiel élémentaire créé par la charge $dQ = \lambda_o Rd\theta$ est :

$$dV_C(O) = \frac{\lambda_o Rd\theta}{4\pi\epsilon_o R}$$

L'intégration sur la longueur du demi-cercle donne :

$$V_C(O) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\lambda_o}{4\epsilon_o} \frac{d\theta}{\pi} = \frac{\lambda_o}{4\epsilon_o} \left[\frac{\theta}{\pi} \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\lambda_o}{4\epsilon_o} ;$$

Les deux tiges étant identiques et alignées, elles créent le même potentiel que l'on détermine pour l'une d'entre elles.



Soit l'élément de longueur dy portant la charge $dQ = \lambda_o dy$, le potentiel électrique élémentaire est donné par :

$$dV_L(O) = \frac{\lambda_o dy}{4\pi\epsilon_o y}$$

Le potentiel créé par la tige en O est donc obtenu par intégration de l'expression ci-dessus :

$$V_L(O) = \int_R^{R+L} \frac{\lambda_o \cdot dy}{4\pi\epsilon_o y} = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} [\ln y]_R^{R+L} = \frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o} \ln\left(1 + \frac{L}{R}\right)$$

On en déduit donc le potentiel électrique créé par le conducteur constitué des trois éléments :

$$V(O) = \frac{\lambda_o}{4\epsilon_o} + \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o} \ln\left(1 + \frac{L}{R}\right)$$

2.5 Par le calcul direct

La charge $\sigma_o \cdot dS$ matérialisée en carré noir sur le schéma, crée le champ électrique élémentaire :

$$\vec{dE}(O) = \frac{\sigma_o \cdot dS}{4\pi\epsilon_o r^2} \cdot \vec{u} \text{ avec } dS = r d\theta dr$$

Pour des raison de symétrie, le champ électrique créé par la bande comprise entre le disque de rayon r et celui de rayon $r + dr$ est orienté selon Ox (axe de symétrie). Seule la composante suivant Ox intervient dans la contribution du champ. On a donc :

$$d\vec{E}_b(O) = dE_{bx}(O) \vec{u}_x \text{ avec}$$

$$dE_{bx}(O) = \int_{\text{bande}} d\vec{E}(O) \cdot \vec{u}_x = \int_{\text{bande}} dE(O) \vec{u} \cdot \vec{u}_x = \int_{\text{bande}} dE(O) \cos\theta$$

$$dE_{bx}(O) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sigma_o \cdot dr \cdot d\theta}{4\pi\epsilon_o r} \cos\theta = \frac{\sigma_o \cdot dr}{4\pi\epsilon_o r} [\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\sigma_o \cdot dr}{2\pi\epsilon_o r}$$

Le champ électrique est donné par :

$$E(O) = \int_{\text{couronne}} dE_{bx}(O) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_o \cdot dr}{2\pi\epsilon_o r} = \frac{\sigma_o}{2\pi\epsilon_o} [\ln r]_{R_1}^{R_2} = \frac{\sigma_o}{2\pi\epsilon_o} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Le champ résultant est suivant $\vec{u}_x$

Le potentiel électrique se déduit aisément en considérant la contribution de la bande semi-circulaire de rayon r et $r+dr$:

$$dV(O) = \frac{\sigma_o dr}{4\epsilon_o}$$

Le potentiel total est donné par : $V(O) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_o \cdot dr}{4\epsilon_o} = \frac{\sigma_o}{4\epsilon_o} (R_2 - R_1)$

Application numérique : La densité de charge est donnée par :

$$\sigma_o = \frac{2Q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{2.0,5.10^{-6}}{\pi.10^{-4}(144 - 100)} = 72,4.10^{-6} \text{ C.m}^{-2}$$

Le champ électrique est égal à :

$$E(O) = \frac{\sigma_o}{2\pi\epsilon_o} \ln (R_2/R_1) = 1,3.10^6 \cdot \ln(1,2) \\ \approx 2,37.10^5 \text{ V.m}^{-1}$$

Le potentiel est $V(O) = \frac{\sigma_o}{4\epsilon_o} (R_2 - R_1) = 4.10^4 \text{ V}$
 $V(O) \approx 40 \text{ kV}$

2.6 a) Voir le calcul dans la partie cours (2.3.a).

Pour un fil infini, le champ est radial et a pour expression :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o r} \vec{u}_r$$

b) En considérant que le plan chargé avec la densité surfacique σ_o est composé de bandes d'épaisseur dx assimilables à des fils chargés avec la densité λ_o . La correspondance entre les deux densités de charges est $\lambda_o = \sigma_o dx$. Le champ élémentaire créé par une bande d'épaisseur dx est donc :

$$d\vec{E}(M) = \frac{\sigma_o dx}{2\pi\epsilon_o (x^2 + z^2)^{1/2}} \vec{u}_r$$

Pour des raisons de symétrie, le champ résultant est suivant Oz (axe de symétrie). Seule la composante suivant $\vec{u}_z$ contribue au calcul du champ résultant. On a donc, avec θ l'angle que font $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ (voir figure) :

$$\begin{aligned} dE_z(M) &= d\vec{E}(M) \cdot \vec{u}_z = \frac{\sigma_o dx}{2\pi\epsilon_o(x^2 + z^2)^{1/2}} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z \\ &= \frac{\sigma_o dx}{2\pi\epsilon_o(x^2 + z^2)^{1/2}} \cos\theta \end{aligned}$$

Choix de la variable d'intégration : $x \in]-\infty, +\infty[$ ou $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$

Relation entre les variables : $\tan\theta = x/z$ et $d(\tan\theta) = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dx}{z}$
En remarquant que $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$ on obtient :

$$dE_z(M) = \frac{\sigma_o dx}{2\pi\epsilon_o(x^2 + z^2)^{1/2}} \cos\theta = \frac{\sigma_o}{2\pi\epsilon_o} \frac{\cos\theta}{z} \frac{zd\theta}{\cos^2\theta} \cos\theta = \frac{\sigma_o}{2\pi\epsilon_o} d\theta$$

$$E(z) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \frac{d\theta}{\pi} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \left[\frac{\theta}{\pi} \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \vec{u}_z$$

Le champ est uniforme et est perpendiculaire au plan

2.7 a) D'après le cours ou l'exercice 2.6, le champ électrostatique créé par un plan infini chargé uniformément avec une densité de charges σ_o est uniforme, est perpendiculaire au plan et a pour norme $|\sigma_o|/2\epsilon_o$.

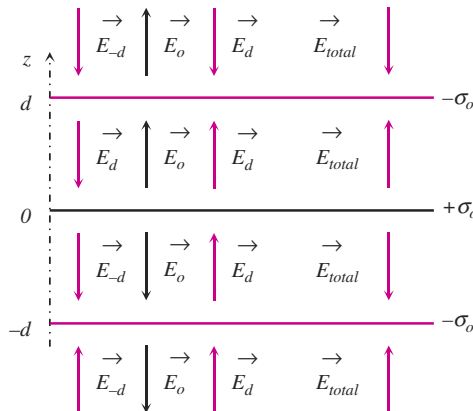


Figure 2.36

La plaque $z = d$ crée un champ électrostatique tel que :

Pour $z > d$ on a $\vec{E}_d = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z$ et pour $z < d$ on a $\vec{E}_d = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z$

La plaque $z = -d$ crée un champ électrostatique tel que :

Pour $z > -d$ on a $\vec{E}_{-d} = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z$ et pour $z < -d$ on a $\vec{E}_{-d} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z$

La plaque $z = 0$ crée un champ électrostatique tel que :

Pour $z > 0$ on a $\vec{E}_o = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z$ et pour $z < 0$ on a $\vec{E}_o = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z$

Le champ électrique résultant est uniforme et s'obtient par superposition des trois champs. Une addition simple ou une représentation graphique (voir figure 2.36) donne la valeur du champ :

Pour $0 < z < d$ le champ est $\vec{E}_{total} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z$

Pour $-d < z < 0$ le champ est $\vec{E}_{total} = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z$

b) $\Delta V = V_o - V_d = \int_0^d \vec{E} d\vec{l} = \int_0^d \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} dx = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} d = Ed$

c) $E_{total} = \Delta V/d = 200\,000 \text{ V.m}^{-1}$

CHAPITRE 3

Théorème de Gauss

PLAN

- 3.1 Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle
- 3.2 Théorème de Gauss
- 3.3 Applications du théorème de Gauss

OBJECTIFS

- Comprendre la notion de flux d'un champ à travers une surface
- Connaître le théorème de Gauss
- Savoir utiliser le théorème de Gauss pour la détermination du champ électrostatique dans quelques cas : sphère, cylindre ou plan chargés uniformément

3.1 FLUX DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

a) Flux d'un champ de vecteur $\vec{A}$

➤ Flux élémentaire

Soit une surface élémentaire dS , autour d'un point M , orientée par son vecteur unitaire normal $\vec{n}$: $d\vec{S} = \vec{n}dS$.

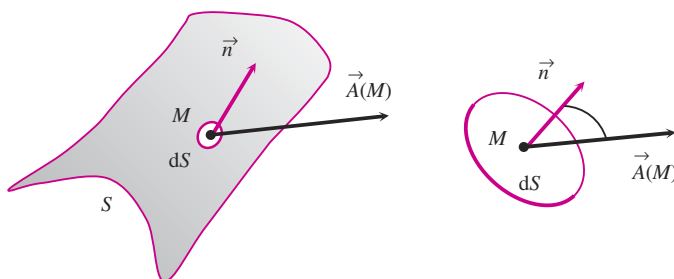


Figure 3.1 Flux d'un champ de vecteur $\vec{A}$ à travers une surface S orientée.

Le flux élémentaire noté $d\Phi$ (Φ : lettre grecque phi) du champ de vecteur $\vec{A}(M)$ à travers la surface élémentaire $d\vec{S}$ située en M est par définition le produit scalaire du champ par le vecteur surface :

$$d\Phi = \vec{A}(M)d\vec{S} = \vec{A}(M) \cdot \vec{n}dS$$

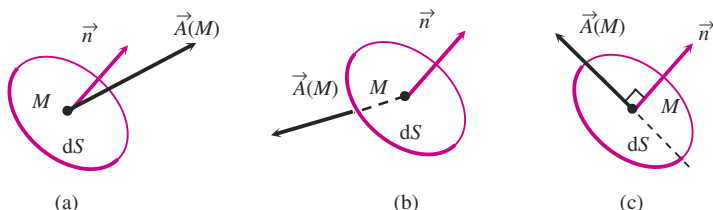


Figure 3.2 Flux du champ de vecteur $\vec{A}$ à travers une surface élémentaire dS orientée. (a) Flux positif (b) Flux négatif (c) Flux nul.

Le flux élémentaire peut s'écrire : $d\Phi = \vec{A} \cdot \vec{n}dS = A \cdot dS \cos \alpha$ où α est l'angle que fait le vecteur champ avec la normale à la surface. On constate que le flux est une valeur algébrique avec :

$d\Phi > 0$ si $\vec{A}$ et $\vec{n}$ sont dirigés vers le même côté (*figure 3.2.a*)

$d\Phi < 0$ si $\vec{A}$ et $\vec{n}$ sont dirigés en sens inverse (*figure 3.2.b*)

$d\Phi = 0$ si $\vec{A}$ et $\vec{n}$ sont perpendiculaires c'est à dire si le vecteur $\vec{A}$ est parallèle à la surface (*figure 3.2.c*) (le champ ne traverse pas la surface).

► Flux à travers une surface S

Le flux total Φ du champ de vecteur $\vec{A}$ s'obtient en additionnant tous les flux élémentaires : $\Phi = \int_{M \in S} d\Phi$

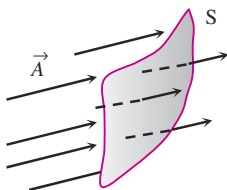


Figure 3.3 Flux d'un champ de vecteur uniforme à travers une surface S .

► Orientation d'une surface S s'appuyant sur un contour

Le calcul d'un flux nécessite d'avoir une surface orientée. Pour une surface s'appuyant sur un contour fermé, il suffit d'orienter le contour pour définir le sens du vecteur normal à la surface. Pour cela on utilise la règle du « tire-bouchon » (ou d'une vis) : le sens de la normale à la surface est donné par le sens de déplacement du « tire-bouchon » lorsqu'on le tourne dans le même sens que l'orientation du contour (voir figure 3.2).

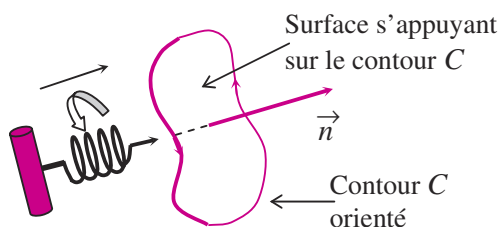


Figure 3.4 Le tire-bouchon tourne dans le sens du contour et avance dans le sens du vecteur normal à la surface s'appuyant sur le contour.

Réciproquement, en utilisant la même règle, la normale à une surface oriente automatiquement le contour sur lequel s'appuie cette surface.

► Cas d'une surface fermée

Une surface fermée S délimite un volume fini de l'espace. Il y a alors deux régions de l'espace : l'intérieur de S et l'extérieur de S . Pour tout élément de surface on oriente le vecteur normal vers l'extérieur (voir figure 3.5).

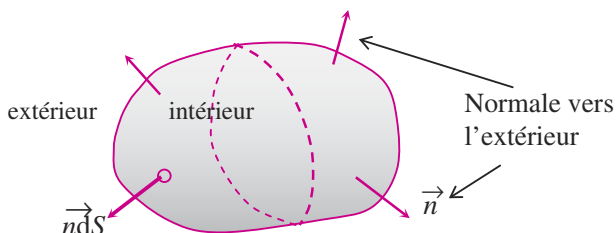


Figure 3.5 Définition d'une surface fermée. Le vecteur normal à la surface est orienté vers l'extérieur.

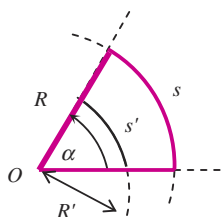


La normale étant dirigée vers l'extérieur, le flux d'un champ de vecteurs à travers cette surface est qualifié de flux sortant.

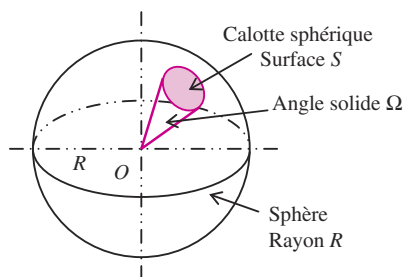


Encart 3.1 Angle solide

Dans le plan, un angle α est défini comme le rapport de la mesure s de l'arc de cercle de rayon R qu'il intercepte sur ce rayon. On a : $\alpha = s/R = s'/R' \dots$ L'unité d'angle est le radian (rad) et est sans dimension.



Angle dans un plan



Angle solide dans l'espace

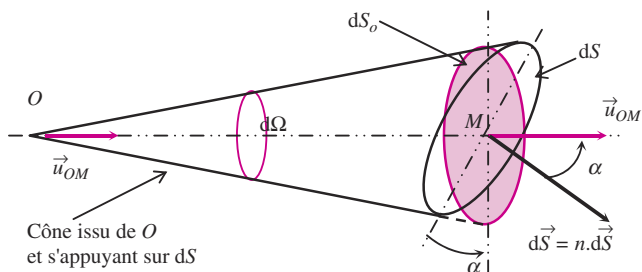
De la même façon, dans l'espace, un angle solide Ω , délimité par un cône de sommet O , est défini comme le rapport de la surface S de la portion de sphère de rayon R qu'il intercepte sur ce rayon au carré. On a :

$\Omega = \frac{S}{R^2} = \frac{S'}{R'^2} \dots$ L'unité d'angle solide est le stéradian (sr) et est sans dimension.



Encart 3.2 Angle solide élémentaire

L'angle solide élémentaire $d\Omega$ correspond à l'angle solide sous lequel on voit une surface élémentaire dS à partir d'un point O (voir figure).



La surface élémentaire dS est orientée par un vecteur normal $\vec{n} : d\vec{S} = \vec{n}dS$.

Le milieu de la surface élémentaire dS est le point M .

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_{OM}$ avec $\vec{u}_{OM}$ vecteur unitaire de O vers M .

La surface élémentaire dS_o correspond à la surface de la portion de sphère, de centre O et de rayon $OM = r$, délimitée par le cône issu de O et s'appuyant sur dS .

La surface élémentaire dS_o est orientée par le vecteur normal $\vec{u}_{OM} \Rightarrow d\vec{S}_o = \vec{u}_{OM}dS_o$.

Avec $\vec{n} \cdot \vec{u}_{OM} = \cos \alpha$ on a : $dS_o = \cos \alpha dS$ (voir figure).

Par définition on a :

$$d\Omega = \frac{dS_o}{r^2} = \frac{\cos \alpha dS}{r^2} = \frac{\vec{u}_{OM} \cdot \vec{n} dS}{r^2} = \frac{\vec{u}_{OM} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u}_{OM} \cdot d\vec{S}}{OM^2}$$

b) Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

On considère une charge ponctuelle Q située en un point O de l'espace. Le vecteur champ électrostatique en un point M a pour expression (voir équation 2.1) :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{u}_{OM}}{r^2} \text{ avec } OM = r$$

► Flux élémentaire

On considère une surface élémentaire dS orientée par sa normale $\vec{n}$ (voir figure 3.6). Le flux élémentaire du champ électrostatique à travers la surface élémentaire dS est :

$$d\Phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = E(r) \vec{u}_{OM} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{u}_{OM} \cdot \vec{n} dS}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} d\Omega$$

La grandeur $d\Omega = \frac{\vec{u}_{OM} \cdot \vec{n} dS}{r^2}$ correspond à la définition de l'angle solide élémentaire sous lequel on voit la surface dS à partir du point O (voir les encarts 3.1 et 3.2).

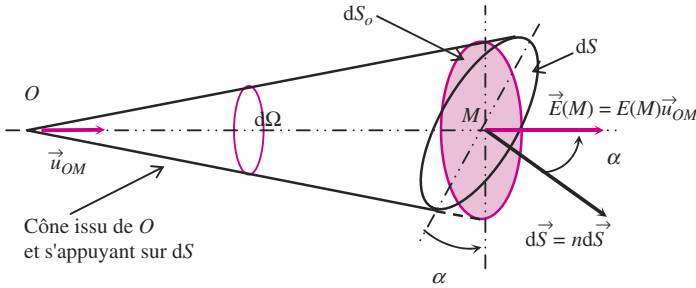


Figure 3.6 Flux élémentaire du champ électrostatique à travers une surface orientée dS .

► Flux à travers une surface S

On considère une surface quelconque S qui s'appuie sur un contour fermé C . On oriente le contour pour définir un sens à la normale à la surface (voir figure 3.7).

Le flux total du champ électrostatique s'obtient en additionnant tous les flux élémentaires à travers les surfaces élémentaires dS constituant la surface S . On a :

$$\Phi = \int_{M \in S} d\Phi = \int_{M \in S} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{M \in S} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (3.1)$$

avec Ω l'angle solide délimité par le cône de sommet O et s'appuyant sur le contour C (le résultat ne dépend que du contour choisi et non de la surface S).

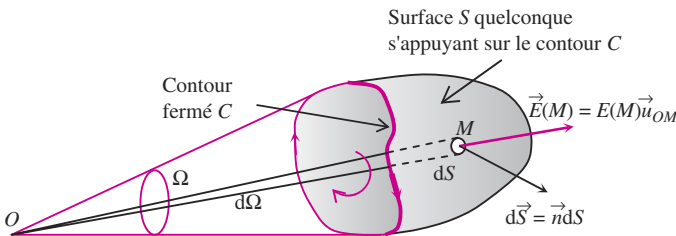


Figure 3.7 Flux du champ électrostatique à travers une surface S s'appuyant sur un contour orienté.

► Flux à travers une surface S fermée : la charge Q est à l'intérieur

Dans ces conditions (voir figure 3.8) l'angle solide sous lequel la charge en O voit la surface correspond à l'angle solide de l'espace

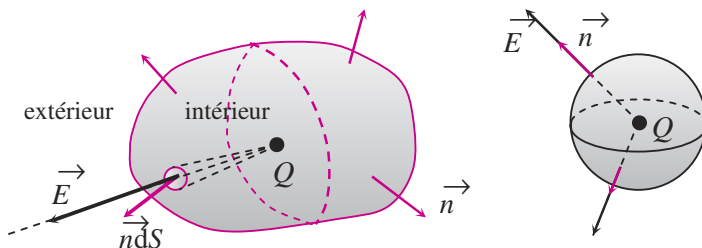


Figure 3.8 Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée S contenant la charge.

tout entier. Cette angle solide vaut 4π (voir encart 3.3). On a donc :

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_{\text{espace}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.2)$$

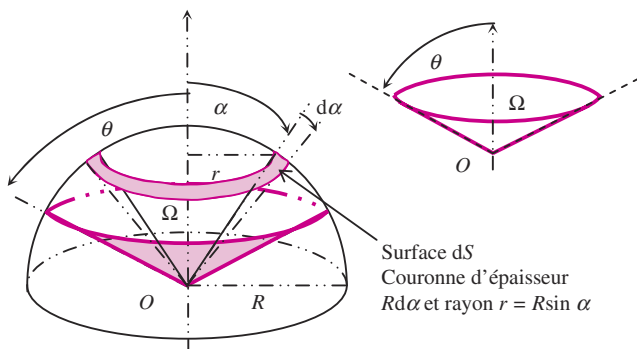
Le flux total (sortant) du champ électrostatique à travers une surface fermée est égale à la valeur de la charge qui en est la source, divisée par la permittivité diélectrique du milieu où existe le champ.



Encart 3.3 Calcul d'angle solide

Expression de l'angle solide Ω délimité par un cône de demi-angle au sommet θ .

Soit la surface S de la portion de sphère de centre O et de rayon R interceptée par le cône d'angle au sommet 2θ (voir figure). Par définition, l'angle solide Ω délimité par le cône s'obtient en divisant la surface S par le rayon R au carré.



Calcul de la surface S de la calotte sphérique :

On considère une surface élémentaire dS délimitée sur la sphère par le demi-angle au sommet α et d'épaisseur $Rd\alpha$ (avec $0 \leq \alpha \leq \theta$)

Le rayon de cette couronne est $r = R \sin \alpha$. On a donc :

$$dS = 2\pi r R d\alpha = 2\pi R^2 \sin \alpha d\alpha$$

On obtient la surface S de la calotte par intégration :

$$S = 2\pi R^2 \int_0^\theta \sin \alpha d\alpha = 2\pi R^2 [\cos \alpha]_0^\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta)$$

Expression de l'angle solide : $\Omega = S/R^2 = 2\pi(1 - \cos \theta)$

Remarque : $\theta = \pi$ correspond à la sphère entière. On a donc :

Espace entier : Angle solide pour $\theta = \pi$: $\Omega_{\text{espace}} = 4\pi$

$1/2$ espace : Angle solide pour $\theta = \pi/2$: $\Omega_{1/2\text{espace}} = 2\pi$

Remarque :

Dans le cas où la surface fermée correspond à une sphère de rayon r centrée sur la charge le calcul du flux est simple à effectuer. En effet cette surface sphérique est une surface équipotentielle et le champ électrostatique radial est perpendiculaire à la surface en chaque point de la sphère. On a :

$$d\Phi = \vec{E}(M) d\vec{S} = E(r) \vec{u}_{OM} \cdot \vec{u}_{OM} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{dS}{r^2}$$

Ce qui donne par intégration :

$$\Phi = \oint_{\text{sphère}} d\Phi = \oint_{\text{sphère}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{dS}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} \oint_{\text{sphère}} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

► Flux à travers une surface S fermée : la charge Q est à l'extérieur

On constate alors que les lignes de champ électrostatique formant un cône élémentaire issu de la charge Q traverse un nombre pair de fois la surface fermée (le flux du champ entre autant de fois qu'il ressort de la surface) (voir *figure 3.10*). Le flux élémentaire étant proportionnel à l'angle solide élémentaire, on constate que les flux entrant et sortant correspondant au même angle solide $d\Omega$ s'opposent : ils s'annulent donc tous deux à deux.

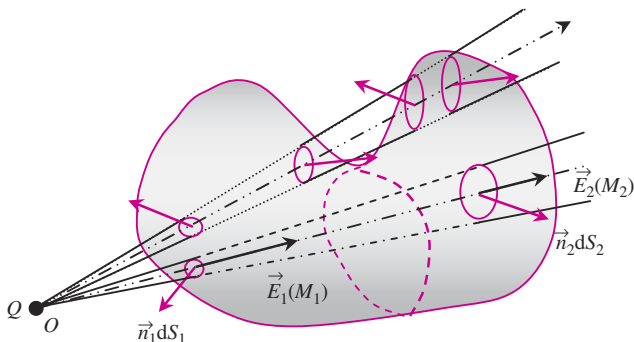


Figure 3.9 Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée S , la charge étant à l'extérieur.

Dans le cas de la *figure 3.9* on peut exprimer l'angle solide élémentaire $d\Omega$ à partir de la surface élémentaire dS_1 (flux entrant) ou bien de dS_2 (flux sortant). On a (voir encart 3.2) avec $d\Omega > 0$:

$$d\Omega = \frac{\vec{u}_{OM_1} \cdot (-\vec{n}_1) dS_1}{r_1^2} = -\frac{\vec{u}_{OM_1} \cdot \vec{n}_1 dS_1}{r_1^2} = \frac{\vec{u}_{OM_2} \cdot \vec{n}_2 dS_2}{r_2^2}$$

Les flux élémentaires correspondant s'écrivent :

$$d\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{OM_1} \cdot \vec{n}_1 dS_1}{r_1^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$d\Phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{OM_2} \cdot \vec{n}_2 dS_2}{r_2^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

La somme de ces deux flux donne $d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times [-d\Omega + d\Omega] = 0$.

Les flux élémentaires s'annulent tous deux à deux.

Le flux total (sortant) du champ électrostatique à travers une surface fermée est nul si la charge responsable du champ est à l'extérieur de cette surface.

Remarque :

Dans le cas très académique où la charge ponctuelle (donc sans dimension) est située sur la surface (épaisseur nulle) fermée, le flux du champ électrostatique s'écrit :

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_S$$

avec Ω_S l'angle solide sous lequel on voit la surface à partir de la charge : cet angle solide correspond à l'angle solide du demi-espace (voir figure 3.10) : $\Omega_S = \Omega_{1/2\text{espace}} = 2\pi$ (voir encart 3.3).

Dans ces conditions on a :

$$\Phi = \frac{Q_{\text{surface}}}{4\pi\epsilon_0} \Omega_{1/2\text{espace}} = \frac{Q_{\text{surface}}}{4\pi\epsilon_0} 2\pi = \frac{Q_{\text{surface}}}{2\epsilon_0} \quad (3.3)$$

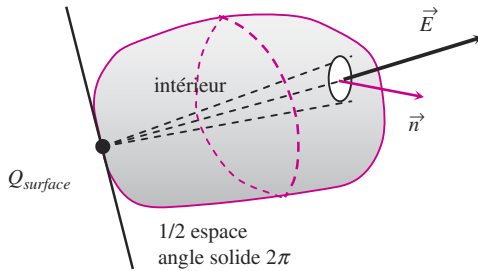


Figure 3.10 Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée S , la charge étant sur la surface. L'angle solide sous lequel la charge voit la surface correspond au demi-espace.

3.2 THÉORÈME DE GAUSS

a) Flux du champ électrostatique créé par une distribution de charges

Considérons une surface fermée S quelconque, fictive ou pas, délimitant un volume $\mathcal{V}_{\text{int}}$ fini de l'espace dans lequel existe un champ électrostatique $\vec{E}$ créé par un ensemble fini de charges ponctuelles.

Les charges situées à l'intérieur de la surface S , dans le volume $\mathcal{V}_{\text{int}}$ sont notées $\{q_1^{\text{int}}, q_2^{\text{int}}, \dots, q_j^{\text{int}}, \dots\}$ et celles à l'extérieur $\{q_1^{\text{ext}}, q_2^{\text{ext}}, \dots, q_i^{\text{ext}}, \dots\}$ (voir figure 3.11).

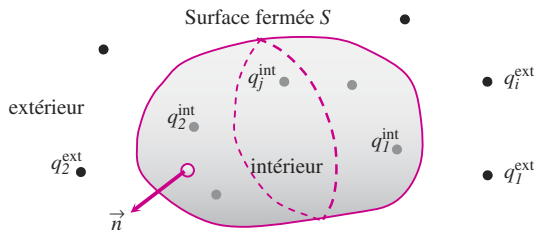


Figure 3.11 Surface fermée S plongée dans un champ électrostatique créé par des charges ponctuelles situées à l'intérieur ou à l'extérieur de S .

Le champ électrostatique total $\vec{E}(M)$ correspond à la superposition des champs créés par toutes les charges :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i^{\text{ext}}(M) + \sum_j \vec{E}_j^{\text{int}}(M)$$

Le flux sortant Φ à travers la surface S du champ électrostatique total $\vec{E}(M)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \oint_{M \in S} \left(\sum_i \vec{E}_i^{\text{ext}} + \sum_j \vec{E}_j^{\text{int}} \right) \cdot d\vec{S} \\ \Phi &= \oint_{M \in S} \left(\sum_i \vec{E}_i^{\text{ext}} \right) \cdot d\vec{S} + \oint_{M \in S} \left(\sum_j \vec{E}_j^{\text{int}} \right) \cdot d\vec{S} \\ &= \sum_i \oint_{M \in S} \vec{E}_i^{\text{ext}} \cdot d\vec{S} + \sum_j \oint_{M \in S} \vec{E}_j^{\text{int}} \cdot d\vec{S} \\ \Phi &= \sum_i \Phi_i^{\text{ext}} + \sum_j \Phi_j^{\text{int}} = 0 + \sum_j \frac{q_j^{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

avec $Q^{\text{int}} = \sum_j q_j^{\text{int}}$ la charge totale située dans le volume $\mathcal{V}_{\text{int}}$ délimité par la surface fermée S .

Il est facile de généraliser dans le cas où la distribution de charges est continue : il suffit de remplacer le symbole sommation Σ par le symbole intégration $\int$.

► On aura, pour un volume chargé $\mathcal{V}_{\text{chargé}}$ avec une densité volumique de charges $\rho(M)$:

$$Q^{\text{int}} = \int_{M \in \mathcal{V}_{\text{int}}} \rho(M) d\mathcal{V} \quad (3.4)$$

Si la densité volumique de charge est uniforme $\rho(M) = \rho_o$, alors :

$$Q^{\text{int}} = \rho_o \int_{M \in \mathcal{V}_{\text{int}}} d\mathcal{V} = \rho_o \mathcal{V}$$



L'intégration se fait uniquement sur le volume $\mathcal{V}_{\text{int}}$ car seule la charge intérieure à la surface S intervient dans la valeur du flux. Les charges à l'extérieur donnent un flux nul.

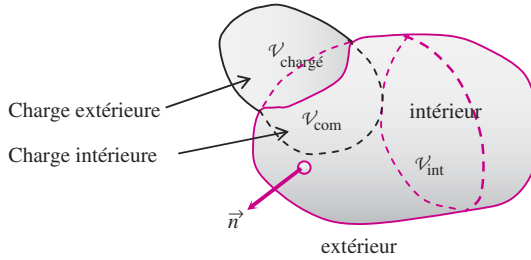


Figure 3.12 Charge intérieure à une surface fermée dans le cas d'une distribution volumique de charge.

L'intégration se fait en réalité dans le volume $V_{\text{com}} = (V_{\text{chargé}} \cap V_{\text{int}})$ commun au volume chargé $V_{\text{chargé}}$ et au volume intérieur V_{int} (figure 3.12).

- Dans le cas d'une surface chargée $S_{\text{chargé}}$ avec une densité surfacique de charge $\sigma(M)$ le calcul de la charge à l'intérieur se fait en considérant uniquement la surface S_{int} correspondant à la partie de la surface chargée à l'intérieur de la surface fermée S (voir figure 3.13 a). On a alors :

$$Q^{\text{int}} = \int_{M \in S_{\text{int}}} \sigma(M) dS_{\text{int}} \quad (3.5)$$

Si la densité surfacique de charge est uniforme $\sigma(M) = \sigma_o$, alors :

$$Q^{\text{int}} = \sigma_o \int_{M \in S_{\text{int}}} dS_{\text{int}} = \sigma_o S_{\text{int}}$$

- Enfin, dans le cas d'une charge linéique répartie sur un fil chargé $L_{\text{chargé}}$ avec une densité linéique $\lambda(M)$, en appelant L_{int} la partie du fil à l'intérieur de la surface fermée S (voir figure 3.13 b), on a :

$$Q^{\text{int}} = \int_{M \in L_{\text{int}}} \lambda(M) dL_{\text{int}} \quad (3.6)$$

Si la densité linéique de charge est uniforme $\lambda(M) = \lambda_o$, alors :

$$Q^{\text{int}} = \lambda_o \int_{M \in L_{\text{int}}} dL_{\text{int}} = \lambda_o L_{\text{int}}$$

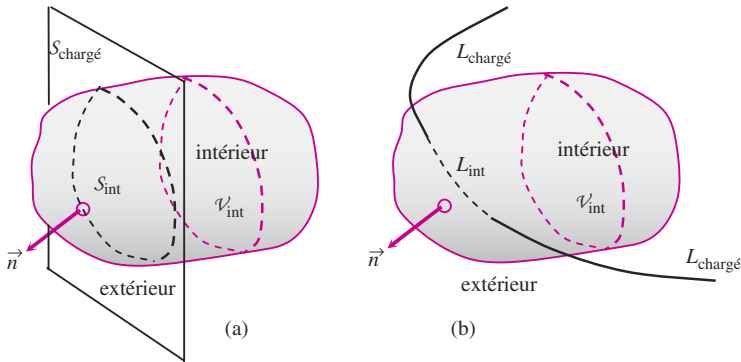


Figure 3.16 Charge intérieure à une surface fermée dans le cas a) d'une distribution surfacique de charge et b) d'une distribution linéique de charge.

b) Théorème de Gauss

Dans le vide, le flux (sortant) du champ électrostatique à travers une surface fermée S quelconque délimitant un volume intérieur fini $\mathcal{V}_{\text{int}}$ est égale à la somme algébrique Q^{int} des charges dans ce volume divisé par ϵ_0

$$\Phi_{\text{sortant}} = \oint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (3.7)$$

La surface fermée choisie est appelée « **Surface de Gauss** ».

Remarque :

Dans le cas très particulier où il existe une distribution de charge surfacique et que la surface de Gauss coïncide en partie ou totalité avec la surface chargée, alors le flux sortant correspond à la charge surfacique Q^{surf} située sur la surface de Gauss divisé par $2\epsilon_0$ (voir relation 3.3, fin du paragraphe 3.1.b et figure 3.10).

$$\Phi_{\text{sortant}} = \oint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q^{\text{surf}}}{2\epsilon_0} \quad (3.8)$$

c) Intérêt et utilisation du théorème de Gauss

L'intérêt de ce théorème est de pouvoir déterminer le champ électrostatique en tout point M de l'espace créé par une répartition de charges connue. Pour cela il faut être capable de trouver une surface fermée dite de Gauss S_G qui passe par le point M et pour laquelle le calcul du flux du champ $\vec{E}(M)$ est simple. Si le champ est en tout point perpendiculaire à la surface choisie on aura :

$$\vec{E}(M) \text{ perpendiculaire à } d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{S} \Rightarrow \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = E(M)dS$$

Typiquement les surfaces répondant à ce critère sont les surfaces équipotentielles.

Si de plus la valeur du champ est constant en tout point de cette surface alors avec $E(M) = E$:

$$\Phi_{\text{sortant}} = \oint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \oint_{M \in S} E(M)dS = \oint_{M \in S} EdS = E \oint_{M \in S} dS = ES$$

Il suffit ensuite d'exprimer le flux en utilisant le théorème de Gauss :

$$ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 S}$$



On peut compléter une surface non fermée qui répond aux critères précédents par des surfaces pour lesquelles le flux du champ électrostatique est nul, c'est-à-dire une surface qui contient le vecteur champ (si $\vec{E}$ est parallèle à $d\vec{S}$ alors $\vec{E} \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$)

Le calcul de la charge intérieure à la surface de Gauss se fait très simplement en dénombrant les charges situées dans le volume intérieur (voir équations 3.4, 3.5 et 3.6).

L'application du théorème de Gauss ne sera possible que si il y a suffisamment de symétrie pour avoir une idée de l'allure des lignes de champs et donc de pouvoir choisir la bonne surface de Gauss.

L'utilisation du théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution de charges donne le résultat avec une remarquable simplicité dans le cas de systèmes chargés de haute symétrie (cylindrique, sphérique). Cependant, au delà de cet aspect pratique, le théorème de Gauss est une formulation intégrale liant les effets (champ) aux sources (charges). La forme locale de ce théorème constitue l'une des quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme selon Maxwell.

Dans la suite, on appliquera le théorème de Gauss à des distributions de charges présentant différentes géométries. On détaillera la procédure pour déterminer la cartographie des lignes du champ

électrostatique pour ces systèmes chargés. La méthodologie pour déterminer le champ et le potentiel électrostatique sera la suivante :

Méthode

- Inventaire des éléments de symétrie et des invariances du système de charges
- En déduire les surfaces équipotentiellles et les lignes de champ c'est-à-dire avoir une idée de la direction du champ et des variables dont le module dépend
- Pour calculer le champ en un point donné, choisir une surface de Gauss fermée passant par ce point, qui se confond partiellement ou totalement avec une équipotentielle et pour laquelle le module E est constant.
- Déterminer l'expression mathématique du flux du champ électrostatique à travers la surface fermée choisie.
- Déterminer la charge intérieure à la surface de Gauss
- Appliquer le théorème de Gauss pour déduire le champ électrostatique
- En déduire le potentiel électrostatique

3.3 APPLICATIONS DU THÉORÈME DE GAUSS

a) Champ et potentiel électrostatiques créés par une sphère chargée

La sphère chargée (surface S_C , volume $\mathcal{V}_C$) est définie par son centre O et son rayon R . Elle porte une charge totale Q répartie uniformément soit en surface (avec une densité surfacique σ_o) soit en volume (avec une densité volumique ρ_o).

Si la répartition est surfacique on a :

$$Q = \int_{M \in S_C} \sigma_o dS = \sigma_o \int_{M \in S_C} dS = \sigma_o S_C = 4\pi R^2 \sigma_o \Rightarrow \sigma_o = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Si la répartition est volumique on a :

$$Q = \int_{M \in \mathcal{V}_C} \rho_o d\mathcal{V} = \rho_o \int_{M \in \mathcal{V}_C} d\mathcal{V} = \rho_o \mathcal{V}_C = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_o \Rightarrow \rho_o = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

On cherche le champ électrostatique créé par cette sphère en un point M situé à la distance r de O ($OM = r$).

► Symétrie des charges

La répartition de charges présente la symétrie sphérique (voir encart 3.4).

Le champ et le potentiel s'expriment en coordonnées sphériques :

On a $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$ et $V(M) = V(r, \theta, \varphi)$

Pour tout point M de l'espace, la droite OM est un axe de symétrie. De plus il y a invariance par rotation des angles (θ, φ) . On peut écrire :

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r) \text{ et } \vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r)$$

Les surfaces équipotentielles définies par $V(r) = \text{constante}$ correspondent à l'ensemble des points pour lesquels $r = \text{constante}$ c'est à dire à des sphères centrées sur O et de rayon r .

Le champ devant être suivant la direction de OM (axe de symétrie) il est donc radial : $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$

On retrouve bien que le champ électrostatique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

► Choix de la surface de Gauss

Le champ $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$, radial, est perpendiculaire à des surfaces sphériques centrées sur O et garde une norme constante sur ces sphères (r fixé). La surface de Gauss à prendre est donc une sphère de centre O de rayon $r = OM$ (le point M appartient à la surface fermée de Gauss).

► Expression du flux sortant à travers la surface de Gauss :

Une surface élémentaire sur la sphère autour du point M s'écrit : $d\vec{S} = dS\vec{u}_r$. On a donc :

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \oint_{r=\text{cst}} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{r=\text{cst}} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r dS = \oint_{r=\text{cst}} E(r) dS = E(r) \oint_{r=\text{cst}} dS \\ &= E(r)S \end{aligned}$$

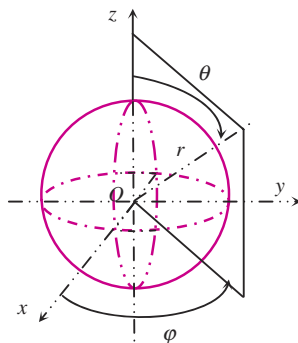
La surface de la sphère de Gauss de rayon r est $S = 4\pi r^2$; On a donc :

$$\Phi_S = 4\pi r^2 E(r)$$



Encart 3.4 Symétrie sphérique

Les coordonnées appropriées sont les coordonnées sphériques (r, θ, φ) (voir figure).



Pour une sphère de centre O :

Toutes les droites passant par le centre O sont des axes de symétrie.

Tous les plans contenant O sont des plans de symétrie.

Une répartition volumique de charges est caractérisée par sa densité $\rho(r, \theta, \varphi)$. Si elle présente la symétrie sphérique alors toute droite passant par le centre O est un axe de symétrie et donc il y a invariance par rotation d'un angle φ quelconque et d'un angle θ quelconque.

On a alors : $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$ (aucune direction n'est privilégiée) et donc la répartition présente la symétrie sphérique.

De même pour une répartition surfacique de charge on aura :

$\sigma(r = R, \theta, \varphi) = \sigma(r = R) = \sigma_o$ (le rayon est fixé)

► Théorème de Gauss : $\Phi_S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_o}$

On a alors : $\Phi_S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_o} = 4\pi r^2 E(r) \Rightarrow$

$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \epsilon_o} \quad (3.9)$$

Il reste à déterminer la charge Q_{int} (charge à l'intérieur de la surface fermée de Gauss, ici la sphère de rayon r). Cette charge va dépendre de la position du point M considéré.

Deux cas se présentent :

Le point M est à l'intérieur de la sphère chargée ($r < R$). La sphère de Gauss est donc à l'intérieur de la sphère chargée (figure 3.14 b).

Le point M est à l'extérieur de la sphère chargée ($r > R$). La sphère de Gauss entoure complètement la sphère chargée (figure 3.14 a).

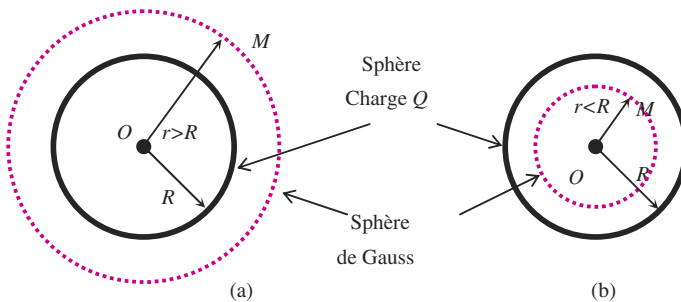


Figure 3.14 Sphère de rayon R portant une charge Q et sphère de Gauss de rayon $OM = r$ avec a) $r > R$ et b) $r < R$.

Calcul de Q_{int} dans le cas $r > R$ (M est à l'extérieur de la sphère chargée de rayon R) (figure 3.14a)

Dans ce cas il est facile de voir que la charge Q_{int} correspond à la charge totale de la sphère c'est-à-dire Q .

Pour $r > R$: $Q_{\text{int}} = Q$

Ce résultat est valable que la charge soit surfacique ou volumique.

Calcul de Q_{int} dans le cas $r < R$ (M est à l'intérieur de la sphère chargée de rayon R) (figure 3.14b)

Si la répartition de charge est surfacique et uniforme, on a :

$$\sigma_o = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} \Rightarrow Q = 4\pi R^2 \sigma_o$$

Dans ce cas, si $r < R$, il n'y a aucune charge à l'intérieur de la surface de Gauss (Q_{int} nulle).

Si la répartition est volumique, la charge étant répartie uniformément dans le volume $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$, on a :

$$\rho_o = \frac{Q}{\mathcal{V}} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \Rightarrow Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o$$

Dans ce cas, si $r < R$, il faut calculer la charge qui se trouve uniquement dans la sphère de rayon r (rayon de la sphère de Gauss) :

$$Q_{\text{int}} = \rho_o \mathcal{V}_{\text{Gauss}} = \rho_o \frac{4}{3} \pi r^3$$

Les expressions du champ électrostatique (relation 3.9), suivant les valeurs de $OM = r$ et dans les cas où la répartition de charge est uniforme surfacique ou volumique, sont rassemblées dans le *tableau 3.1*.

TABLEAU 3.1 CHAMP ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UNE SPHÈRE CHARGÉE : LA SPHÈRE, DE CENTRE O ET RAYON R , PORTE LA CHARGE TOTALE Q .

$OM = r$	Densité surfacique σ_o	Densité volumique ρ_o
$r < R$	$Q_{\text{int}} = 0$ $E(r) = 0$	$Q_{\text{int}} = \rho_o \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$ $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{r}{R^3} = \frac{\rho_o}{3\epsilon_o} r$
$r > R$	$Q_{\text{int}} = Q$ $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{\sigma_o R^2}{\epsilon_o r^2}$	$Q_{\text{int}} = Q$ $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{\rho_o R^3}{\epsilon_o 3r^2}$
$r = R$	$\lim_{r \rightarrow R^-} E(r) = 0$ $\lim_{r \rightarrow R^+} E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^2} = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o}$ il y a discontinuité du champ $\Delta E = E(R^+) - E(R^-) = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o}$	$\lim_{r \rightarrow R^-} \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \frac{r}{R^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^2}$ $\lim_{r \rightarrow R^+} \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^2}$ il y a continuité du champ



Lorsque le point M est à l'extérieur de la sphère portant la charge Q , le champ électrostatique a la même expression que le champ créé par une charge ponctuelle Q située au centre O de la sphère. Ceci est vrai quelque soit le type de répartition des charges (surfacique ou volumique) du moment que la symétrie sphérique est conservée (*figure 3.15*).

Dans le cas de la répartition surfacique de charge, on constate qu'il y a une discontinuité du champ à la traversée de la surface chargée

(voir tableau 3.1). Cette discontinuité vaut :

$$\Delta E = \lim_{r \rightarrow R^+} E(r) - \lim_{r \rightarrow R^-} E(r) = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o}$$

Ce résultat se vérifie pour toute surface chargée indépendamment de sa forme.

Il n'y a pas de discontinuité du champ pour une répartition volumique.

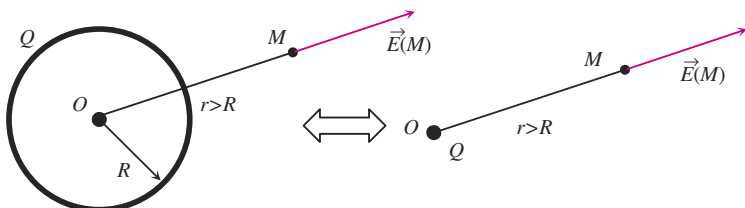


Figure 3.15 Équivalence entre le champ électrostatique créé à l'extérieur d'une sphère portant une charge Q (la répartition de charge présentant la symétrie sphérique) et le champ créé par cette même charge ponctuelle située au centre O de la sphère.

Calcul du champ électrostatique sur la sphère chargée dans le cas de la répartition surfacique de charges :

Dans ce cas, la surface de Gauss se confond avec la surface sphérique chargée : les charges ne sont ni à l'intérieur ni à l'extérieur de la surface de Gauss, elle sont sur la surface. Le théorème de Gauss s'écrit (relation 3.8) :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{sortant}} &= \oint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = 4\pi R^2 E(R) = \frac{Q_{\text{surf}}}{2\epsilon_o} = \frac{Q}{2\epsilon_o} \\ E(R) &= \frac{Q}{8\pi R^2 \epsilon_o} = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \end{aligned} \quad (3.10)$$

On constate que le champ a pour valeur la moitié de la discontinuité.

Calcul du potentiel $V(M)$

Par définition :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = -E(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{l}$$

Un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ quelconque peut toujours se décomposer en un déplacement élémentaire $dr \vec{u}_r$ suivant $\vec{u}_r$ et $d\vec{l}_\perp$ suivant une direction perpendiculaire à $\vec{u}_r$. On peut écrire :

$$\vec{u}_r \cdot d\vec{l} = \vec{u}_r \cdot [dr \vec{u}_r + d\vec{l}_\perp] = dr$$

On obtient alors : $dV(M) = -E(r)dr \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -E(r)$

Par intégration de $E(r)$, on obtient le potentiel à une constante près qui dépend du choix de l'origine des potentiels.



Le champ électrostatique étant une grandeur physique qui existe, le potentiel doit être une fonction dérivable en tout point ce qui impose qu'elle soit continue.

On intègre donc $E(r)$ dans les différents domaines ($r < R$ et $r > R$) puis on détermine les constantes d'intégration en fixant une origine des potentiels et en vérifiant la continuité de V pour $r = R$.

Pour les calculs du potentiel, on peut choisir par exemple le potentiel nul à l'infini : $V(r \rightarrow \infty) = 0$

Le tableau 3.2 rassemble les expressions du potentiel pour une répartition surfacique ou volumique de charges.

La figure 3.16 est une représentation graphique des résultats obtenus :

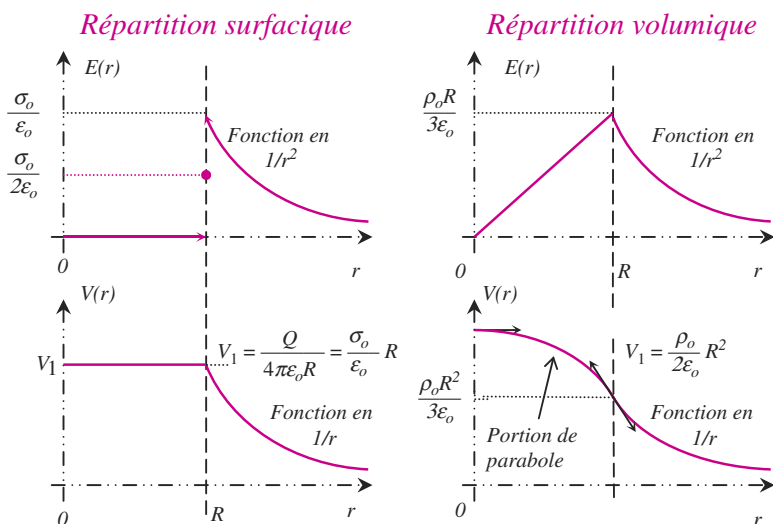


Figure 3.16 Représentation graphique du champ et du potentiel créés par une sphère chargée (charge Q) uniformément en surface (σ_o) ou en volume (ρ_o).

b) Champ et potentiel électrostatiques créés par un cylindre chargé uniformément

Le cylindre, considéré de longueur infinie, est caractérisé par son axe de révolution zz' et son rayon R . Il est chargé uniformément soit en surface (densité surfacique σ_o) soit en volume (densité volumique ρ_o).

TABEAU 3.2 POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UNE SPHÈRE CHARGÉE : LA SPHÈRE, DE CENTRE O ET RAYON R , PORTE LA CHARGE TOTALE Q .

$OM = r$	Densité surfacique σ_o	Densité volumique ρ_o
$r < R$	$\frac{dV_{\text{int}}}{dr} = -E(r) = 0$ $V_{\text{int}}(r) = \text{constante} = V_1$	$-E(r) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_o R^3} r = \frac{-\rho_o}{3\epsilon_o} r$ $V_{\text{int}}(r) = -\frac{\rho_o}{6\epsilon_o} r^2 + V_1$ $= -\frac{Q}{8\pi\epsilon_o R^3} r^2 + V_1$
$r > R$	$-E(r) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{-\sigma_o R^2}{\epsilon_o r^2}$ $V_{\text{ext}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r} + V_2$ $= \frac{\sigma_o R^2}{\epsilon_o r} + V_2$ $V(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow V_2 = 0$ $V_{\text{ext}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r} = \frac{\sigma_o R^2}{\epsilon_o r}$	$-E(r) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{-\rho_o R^3}{\epsilon_o 3r^2}$ $V_{\text{ext}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r} + V_2$ $= \frac{\rho_o R^3}{3\epsilon_o r} + V_2$ $V(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow V_2 = 0$ $V_{\text{ext}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r} = \frac{\rho_o R^3}{3\epsilon_o r}$
$r = R$	Continuité du potentiel en $r = R$ $V_{\text{int}}(r \rightarrow R^-) = V_1 = V_{\text{ext}}(r \rightarrow R^+)$ $V_{\text{int}}(r) = V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R} = \frac{\sigma_o R}{\epsilon_o}$	Continuité du potentiel en $r = R$ $V_{\text{int}}(R^-) = \frac{-\rho_o R^2}{6\epsilon_o} + V_1$ $= \frac{-Q}{8\pi\epsilon_o R} + V_1$ $V_{\text{ext}}(R^+) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R} = \frac{\rho_o R^2}{3\epsilon_o}$ $V_{\text{int}}(r \rightarrow R^-) = V_{\text{ext}}(r \rightarrow R^+)$ $\Rightarrow V_1 = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_o R} = \frac{\rho_o R^2}{2\epsilon_o}$

Une hauteur h du cylindre (surface S_C , volume $\mathcal{V}_C$), porte une charge Q correspondant alors à :

$$Q = \int_{M \in S_C} \sigma_o dS = \sigma_o \int_{M \in S_C} dS = \sigma_o S_C = 2\pi R h \sigma_o \Rightarrow \sigma_o = \frac{Q}{2\pi R h}$$

si la répartition est surfacique

$$Q = \int_{M \in \mathcal{V}_C} \rho_o d\mathcal{V} = \rho_o \int_{M \in \mathcal{V}_C} d\mathcal{V} = \rho_o \mathcal{V}_C = \pi R^2 h \rho_o \Rightarrow \rho_o = \frac{Q}{\pi R^2 h}$$

si la répartition est volumique

Dans la suite, on cherche le champ électrostatique créé par ce cylindre en un point M situé à la distance r de l'axe de symétrie.

► Symétrie des charges

La répartition des charges présente la symétrie cylindrique (voir encart 3.5).

Le champ et le potentiel s'expriment en coordonnées cylindriques par :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) \text{ et } V(M) = V(r, \theta, z)$$

L'invariance par translation suivant z et par rotation d'un angle θ quelconque autour de cet axe conduit à :

$$V(r, \theta, z) = V(r) \text{ et } \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$$

Les surfaces équipotentielles correspondent à l'ensemble des points pour lesquels $r = \text{constante}$ c'est-à-dire à des cylindres de même axe $z'z$ et de rayon r .

Le champ étant perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, il est forcément radial : $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$

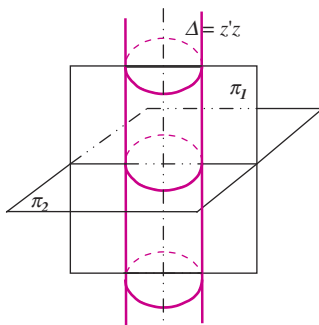


La droite perpendiculaire à l'axe et passant par un point M est un axe de symétrie d'ordre 2 correspondant à l'intersection de 2 plans de symétrie π_1 (contenant M et l'axe) et π_2 (contenant M et perpendiculaire à l'axe) (voir encart 3.5). Le champ électrostatique est donc suivant cette droite et donc radial.



Encart 3.5 Symétrie cylindrique

Les coordonnées appropriées sont les coordonnées cylindriques (r, θ, z) (voir figure)



L'axe $\Delta = z'z$ est un axe de symétrie de révolution

Il y a invariance par translation parallèlement à cet axe (suivant z) (cylindre infini)

Il y a invariance par rotation d'un angle θ autour à cet axe

Les plans π_1 et π_2 sont des plans de symétrie ou plans miroir (tout plan contenant l'axe de symétrie ou perpendiculaire à l'axe de symétrie est un plan de symétrie)

Pour une densité volumique de charges présentant la symétrie cylindrique on aura : $\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$

Pour une densité surfacique de charges on aura :

$\sigma(r = R, \theta, z) = \sigma(r = R) = \sigma_o$ (le rayon est fixé)

► Choix de la surface de Gauss

Le champ $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$, radial, est perpendiculaire à des surfaces cylindriques d'axe $z'z$ et garde une norme constante sur ces cylindres (r fixé). La surface de Gauss à prendre est donc un cylindre d'axe $z'z$ et de rayon r (le point M appartient à la surface fermée de Gauss). La surface doit délimiter un volume fini de l'espace pour que la valeur du flux prenne une valeur finie. Il suffit alors de limiter le cylindre de Gauss à une hauteur h quelconque, la surface étant fermée par les deux couvercles perpendiculaires à l'axe.

Remarque :

Le résultat final ne doit pas dépendre de la hauteur h qui est choisie de façon arbitraire.

► Expression du flux sortant à travers la surface de Gauss :

La surface de Gauss se décompose naturellement en trois parties : le cylindre, les couvercles C_1 supérieur et C_2 inférieur (*figure 3.17*).

La surface élémentaire sur la partie cylindrique, autour du point M , s'écrit : $d\vec{S} = dS\vec{u}_r$.

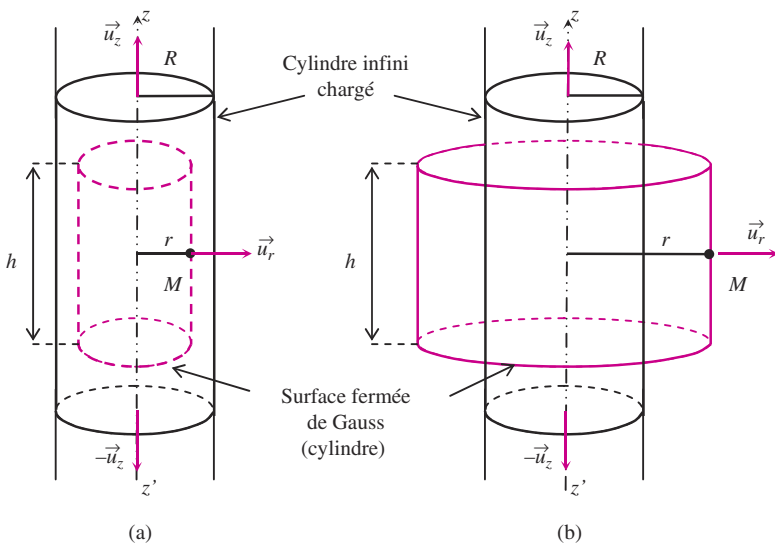


Figure 3.17 Cylindre infini de rayon R chargé uniformément et surface cylindrique de Gauss, hauteur h et rayon r (distance du point M à l'axe) avec a) $r < R$ et b) $r > R$.

Pour le couvercle C_1 on aura $d\vec{S}_1 = dS_1\vec{u}_z$ et pour C_2 : $d\vec{S}_2 = -dS_2\vec{u}_z$ (le vecteur unitaire normal à la surface doit être dirigé vers l'extérieur).

Le flux total se décompose en trois flux :

$$\begin{aligned}\Phi_S &= \oint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{r=\text{cst}} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r dS + \int_{C_1} E(r)\vec{u}_r \cdot dS_1\vec{u}_z + \int_{C_2} -E(r)\vec{u}_r \cdot dS_2\vec{u}_z\end{aligned}$$

Le flux du champ électrostatique à travers les couvercles est nul (le champ ne traverse pas les couvercles) ; il reste donc :

$$\Phi_S = \oint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{r=\text{cst}} E(r) dS = E(r) \int_{r=\text{cst}} dS$$

La surface du cylindre de Gauss de rayon r et hauteur h est $S = 2\pi rh$. On a donc :

$$\Phi_S = 2\pi rhE(r)$$

► Théorème de Gauss : $\Phi_S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 2\pi rhE(r) \Rightarrow$

$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi rh\epsilon_0} \quad (3.11)$$

Il reste à déterminer la charge Q_{int} (charge à l'intérieur de la surface fermée de Gauss). Cette charge va dépendre de la position du point M considéré.

Deux cas se présentent:

Le point M est à l'intérieur du cylindre chargé ($r < R$). Le cylindre de Gauss est alors à l'intérieur du cylindre chargé (figure 3.17 a).

Le point M est à l'extérieur du cylindre chargé ($r > R$). Le cylindre de Gauss entoure alors une partie du cylindre chargé (figure 3.17 b).

Calcul de Q_{int} dans le cas $r > R$ (M est à l'extérieur du cylindre infini chargé de rayon R) (figure 3.17 b)

Dans ce cas il est facile de voir que la charge Q_{int} correspond à la charge Q située sur une hauteur h du cylindre infini chargé.

Pour $r > R$: $Q_{\text{int}} = Q$

Si la répartition est surfacique : $Q_{\text{int}} = Q = S_h \sigma_o = 2\pi R h \sigma_o$

Si la répartition est volumique : $Q_{\text{int}} = Q = \mathcal{V}_h \rho_o = \pi R^2 h \rho_o$

Calcul de Q_{int} dans le cas $r < R$ (M est à l'intérieur du cylindre infini chargé de rayon R) (figure 3.17 a)

Si la répartition de charge est surfacique, les charges se trouvent à l'extérieur de la surface de Gauss : il n'y a aucune charge dans la surface fermée de Gauss : $Q_{\text{int}} = 0$

Si la répartition est volumique, la charge intérieure se trouve dans le volume délimité par la surface de Gauss fermée. On a donc :

$$Q_{\text{int}} = \rho_o \mathcal{V}_{\text{Gauss}} = \rho_o \pi r^2 h$$

Les expressions du champ électrostatique (relation 3.11), suivant les valeurs de $OM = r$ et dans les cas où la répartition de charges est uniforme surfacique ou volumique, sont rassemblées dans le tableau 3.3.



Dans le cas de la répartition surfacique de charge, on constate qu'il y a une discontinuité du champ à la traversée de la surface chargée (voir tableau 3.3). Cette discontinuité vaut :

$$\Delta E = \lim_{r \rightarrow R^+} E(r) - \lim_{r \rightarrow R^-} E(r) = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o}$$

On retrouve ici le même résultat que dans le cas de la sphère chargée en surface.

Il n'y a pas de discontinuité du champ pour une répartition volumique.

TABLEAU 3.3 CHAMP ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UN CYLINDRE INFINI CHARGÉ DE RAYON R .

$OM = r$	Densité surfacique σ_o	Densité volumique ρ_o
$r < R$	$Q_{\text{int}} = 0$ $E(r) = 0$	$Q_{\text{int}} = \rho_o \pi r^2 h$ $E(r) = \frac{\rho_o \pi r^2 h}{2 \pi r h \epsilon_o} = \frac{\rho_o}{2 \epsilon_o} r$
$r > R$	$Q_{\text{int}} = 2 \pi R h \sigma_o$ $E(r) = \frac{2 \pi R h \sigma_o}{2 \pi r h \epsilon_o} = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} \frac{R}{r}$	$Q_{\text{int}} = \pi R^2 h \rho_o$ $E(r) = \frac{\pi R^2 h \rho_o}{2 \pi r h \epsilon_o} = \frac{\rho_o}{2 \epsilon_o} \frac{R^2}{r}$
$r = R$	$\lim_{r \rightarrow R^-} E(r) = 0$ $\lim_{r \rightarrow R^+} E(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} \frac{r}{R} = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o}$ il y a discontinuité du champ $\Delta E = E(R^+) - E(R^-) = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o}$	$\lim_{r \rightarrow R^-} \frac{\rho_o}{2 \epsilon_o} r = \frac{\rho_o}{2 \epsilon_o} R$ $\lim_{r \rightarrow R^+} \frac{\rho_o}{2 \epsilon_o} \frac{R^2}{r} = \frac{\rho_o}{2 \epsilon_o} R$ Il y a continuité du champ

Calcul du champ électrostatique sur le cylindre chargé dans le cas de la répartition surfacique de charges :

Dans ce cas, la surface de Gauss se confond avec une partie de la surface chargée : la charge n'est ni à l'intérieur ni à l'extérieur, elle est surfacique. Le théorème de Gauss s'écrit (relation 3.8) :

$$\Phi_{\text{sortant}} = \oint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = 2 \pi R h E(R) = \frac{Q^{\text{surf}}}{2 \epsilon_o} = \frac{2 \pi R h \sigma_o}{2 \epsilon_o}$$

$$E(R) = \frac{\sigma_o}{2 \epsilon_o} \quad (3.12)$$

On constate que le champ a pour valeur la moitié de la discontinuité.

Calcul du potentiel $V(M)$

Par définition : $dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = -E(r)\vec{u}_r \cdot d\vec{l}$

Un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ quelconque peut toujours se décomposer en un déplacement élémentaire $dr\vec{u}_r$ suivant $\vec{u}_r$ et $d\vec{l}_\perp$ suivant une direction perpendiculaire à $\vec{u}_r$. On a alors : $\vec{u}_r \cdot d\vec{l} = dr$

La définition s'écrit : $dV(M) = -E(r)dr \Rightarrow V(r) = -\int E(r)dr$

Par intégration de $E(r)$, on obtient le potentiel à une constante près qui dépend du choix de l'origine des potentiels.



Rappel : le potentiel doit être une fonction continue en tout point.

On intègre donc $E(r)$ dans les différents domaines ($r < R$ et $r > R$) puis on détermine les constantes d'intégration en fixant une origine des potentiels et en vérifiant la continuité de V pour $r = R$.

Le *tableau 3.4* rassemble les expressions du potentiel pour une répartition surfacique ou volumique de charges.



On constate qu'il n'est pas possible de choisir le potentiel nul à l'infini. Ceci est lié à l'existence de charges à l'infini. Il faut donc faire un autre choix. Il y a plusieurs possibilités : on peut choisir le potentiel nul sur l'axe ($V(r=0)=0$) ou bien nul sur le cylindre ($V(r=R)=0$) ou encore à une distance r_o quelconque (unitaire par exemple) ($V(r=r_o)=0$).

La *figure 3.18* est une représentation graphique des résultats obtenus :

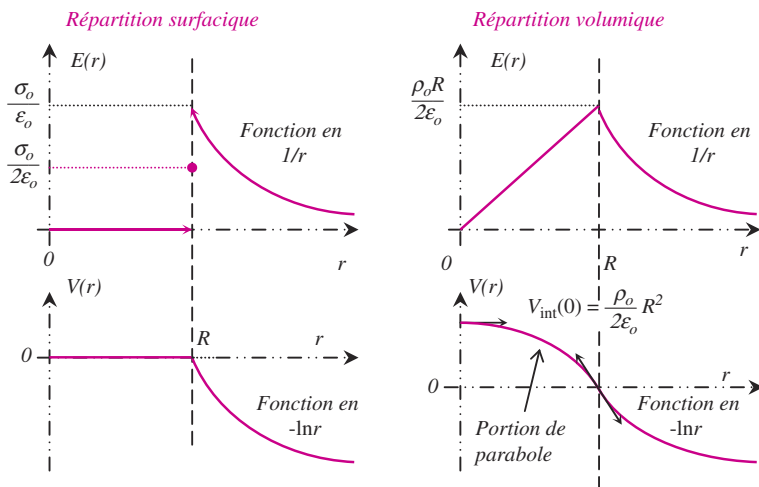


Figure 3.18 Représentation graphique du champ et du potentiel créés par un cylindre infini chargé uniformément en surface (σ_o) ou en volume (ρ_o). Le choix de l'origine des potentiels est $V(r=R)=0$ (potentiel nul sur la surface).

c) Champ et potentiel électrostatiques créés par un fil infini chargé uniformément

Le fil est chargé avec une densité linéique de charge λ_0 constante.

Le problème est identique à celui du cylindre en faisant tendre le rayon vers 0. Le point M ne peut qu'être à l'extérieur et donc les calculs se simplifient.

► Symétrie des charges

La répartition de charges présente la symétrie cylindrique (voir encart 3.5). On a vu alors que :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

$$V(M) = V(r)$$

Les surfaces équipotentielles définies par $V(r, \theta, z) = V(r) = \text{constante}$ correspondent à des cylindres d'axe le fil et de rayon r .

► Choix de la surface de Gauss

Comme pour le cylindre chargé, on choisit un cylindre d'axe le fil, de rayon r (le point M appartient à la surface fermée de Gauss) et de hauteur h . La surface est fermée par les deux couvercles perpendiculaires à l'axe.

► Expression du flux sortant à travers la surface de Gauss

La surface de Gauss se décompose naturellement en trois parties : le cylindre, les couvercles C_1 supérieur et C_2 inférieur (*figure 3.17*). le flux du champ à travers les couvercles est nul et il ne reste que le flux à travers la surface latérale du cylindre :

$$\Phi_S = \oint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{r=\text{cst}} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r dS = \int_{r=\text{cst}} E(r) dS = E(r) \int_{r=\text{cst}} dS$$

$$\Phi = 2\pi r h E(r)$$

► Théorème de Gauss : $\Phi_S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 2\pi r h E(r) \Rightarrow$

$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi r h \epsilon_0} \quad (3.13)$$

TABLEAU 3.4 POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR UN CYLINDRE INFINI CHARGÉ DE RAYON R .

$OM = r$	Densité surfacique σ_o	Densité volumique ρ_o
$r < R$	$\frac{dV_{\text{int}}}{dr} = -E(r) = 0$ $V_{\text{int}}(r) = \text{constante} = V_1$	$-E(r) = \frac{-\rho_o}{2\epsilon_o} r$ $V_{\text{int}}(r) = -\frac{\rho_o}{4\epsilon_o} r^2 + V_1$
$r > R$	$-E(r) = \frac{-\sigma_o R}{\epsilon_o} \frac{1}{r}$ $V_{\text{ext}}(r) = -\frac{\sigma_o R}{\epsilon_o} \ln r + V_2$	$-E(r) = \frac{-\rho_o R^2}{2\epsilon_o} \frac{1}{r}$ $V_{\text{ext}}(r) = -\frac{\rho_o R^2}{2\epsilon_o} \ln r + V_2$
Choix origine	$V(r = R) = 0 \text{ et}$ Continuité du potentiel en $r = R$ $V_{\text{int}}(r \rightarrow R^-) = 0$ $= V_{\text{ext}}(r \rightarrow R^+)$	$V(r = R) = 0 \text{ et}$ Continuité du potentiel en $r = R$ $V_{\text{int}}(r \rightarrow R^-) = 0$ $= V_{\text{ext}}(r \rightarrow R^+)$
$r = R$	$V_{\text{int}}(R) = V_1 = 0$ $V_{\text{int}}(r) = V_1 = 0$ $V_{\text{ext}}(R) = -\frac{\sigma_o R}{\epsilon_o} \ln R + V_2$ $V_{\text{ext}}(R) = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{\sigma_o R}{\epsilon_o} \ln R$ $V_{\text{ext}}(r) = -\frac{\sigma_o R}{\epsilon_o} \ln r + \frac{\sigma_o R}{\epsilon_o} \ln R$ $V_{\text{ext}}(r) = -\frac{\sigma_o R}{\epsilon_o} \ln \frac{r}{R}$	$V_{\text{int}}(R) = -\frac{\rho_o}{4\epsilon_o} R^2 + V_1 = 0$ $+ V_1 = \frac{\rho_o}{4\epsilon_o} R^2$ $V_{\text{int}}(r) = \frac{\rho_o}{4\epsilon_o} (R^2 - r^2)$ $V_{\text{ext}}(R) = -\frac{\rho_o R^2}{2\epsilon_o} \ln R + V_2$ $+ V_2 = \frac{\rho_o R^2}{2\epsilon_o} \ln R$ $V_{\text{ext}}(r) = -\frac{\rho_o R^2}{2\epsilon_o} \ln \frac{r}{R}$

Dans ce cas il est facile de voir que la charge Q_{int} correspond à la charge Q située sur une hauteur h du fil chargé

$$Q_{\text{int}} = \lambda_o h$$

$$\text{On a finalement : } E(r) = \frac{\lambda h}{2\pi r h \epsilon_o} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_o r}$$



Le champ est défini partout sauf sur le fil.

Calcul du potentiel $V(M)$

$$\text{Par définition : } dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = -E(r)\vec{u}_r \cdot d\vec{l} = -E(r)dr$$

$$dV(M) = -E(r)dr \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -E(r) = \frac{-\lambda}{2\pi \epsilon_o r}$$

Par intégration de $E(r)$, on obtient le potentiel à une constante près qui dépend du choix de l'origine des potentiels.

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_o} \ln r + V_o$$

Il n'est pas possible de choisir le potentiel nul à l'infini (présence de charges à l'infini) ni pour $r = 0$ (champ non défini sur le fil). On peut prendre alors : $V(r = r_o) = 0$. On a alors :

$$V(r_o) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_o} \ln r_o + V_o = 0 \Rightarrow V_o = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_o} \ln r_o.$$

Finalement :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_o} \ln r + V_o = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_o} \ln r + \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_o} \ln r_o = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_o} \ln \frac{r}{r_o}$$

Nous retrouvons ici les mêmes expressions du champ et du potentiel obtenues en utilisant la loi de Coulomb (chapitre 2.3 précédent)

d) Champ et potentiel électrostatiques créés par un plan infini chargé uniformément

On considère un plan chargé uniformément avec une densité surfacique de charges σ_o . Il est possible alors de choisir un système d'axe tel que l'axe $z'z$ soit perpendiculaire à ce plan et que les axes $x'x$ et $y'y$ soient dans ce plan. Un point M quelconque peut être repéré en coordonnées cartésiennes ou bien cylindriques (*figure 3.19*).

Une portion de plan de surface S porte une charge Q telle que :

$$Q = \int_{M \in S} \sigma_o dS = \sigma_o \int_{M \in S} dS = \sigma_o S$$

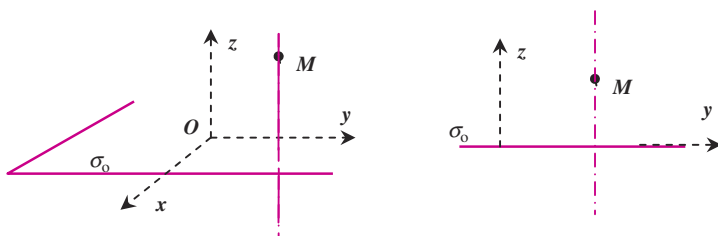


Figure 3.19 Plan infini chargé uniformément : la droite passant par M et perpendiculaire au plan est un axe de symétrie pour la répartition des charges.

On cherche le champ électrostatique créé par ce plan en un point M situé à la distance z du plan chargé.

► Symétrie des charges

La répartition de charges présente la symétrie d'un plan (voir paragraphe 2.3c). On a montré alors que (voir *figure 2.24*) :

$$V(x, y, z) = V(z) \text{ et } \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z) = E(z)\vec{u}_z$$

Les surfaces équipotentielles définies par $V(z) = \text{constante}$ correspondent à l'ensemble des points pour lesquels $z = \text{constante}$ c'est-à-dire à des plans parallèles au plan chargé.

Le plan chargé est un plan de symétrie pour les charges. Pour deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x, y, -z)$ symétriques par rapport à ce plan on peut écrire que :

$$V(z) = V(-z) \text{ (le potentiel est une fonction paire)}$$

$$\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z) \Rightarrow E(z) = -E(-z) \text{ (le champ est une fonction impaire)}$$

► Choix de la surface de Gauss

Le point M appartient à la surface de Gauss qui doit se composer de surfaces parallèles au plan chargé (confondues donc avec des équipotentielles). Elle est fermée par des parois parallèles au champ E et reliant deux équipotentielles. Une surface fermée possible peut être un cylindre de bases parallèles au plan et de génératrices colinéaires avec le champ $\vec{E}$ (voir *figure 3.20*). Le point M est situé sur la base supérieure.

► Expression du flux sortant à travers la surface de Gauss :

La surface de Gauss se décompose naturellement en trois parties : le cylindre, les couvercles C_1 supérieur et C_2 inférieur (*figure 3.20*).

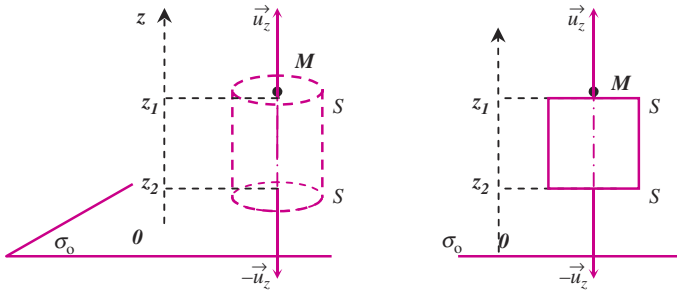


Figure 3.20 Plan infini chargé uniformément. La surface de Gauss choisie est un cylindre de bases parallèles au plan chargé et de section S quelconque.

Le champ $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$ reste parallèle à la surface cylindrique : le flux du champ à travers cette portion de surface est donc nulle ($\vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = 0$)

Pour le couvercle C_1 on aura $d\vec{S}_1 = dS\vec{u}_z$ et pour C_2 : $d\vec{S}_2 = -dS\vec{u}_z$ (le vecteur unitaire normal à la surface doit être dirigé vers l'extérieur).

Le flux total se décompose en deux flux :

$$\Phi_S = \oint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = + \int_{C_1(z=z_1)} E(z_1)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z + \int_{C_2(z=z_2)} -E(z_2)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z$$

Le champ étant uniforme sur les couvercles, on aura :

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_{C_1(z=z_1)} E(z_1)dS + \int_{C_2(z=z_2)} -E(z_2)dS \\ &= E(z_1) \int_{C_1(z=z_1)} dS - E(z_2) \int_{C_2(z=z_2)} dS \end{aligned}$$

$$\Phi_S = E(z_1)S - E(z_2)S = [E(z_1) - E(z_2)]S$$



Le résultat ne dépend pas de la forme de la base qui peut être absolument quelconque. Un disque ou une section rectangulaire conduirait au même résultat.

► Théorème de Gauss : $\Phi_S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = [E(z_1) - E(z_2)]S$

La charge Q_{int} (charge à l'intérieur de la surface fermée de Gauss) va dépendre de la position de la surface de Gauss par rapport au plan chargé.

La surface de Gauss est en dehors du plan:

Dans ces conditions $z_1 > z_2 > 0$ (voir figure 3.20).

La charge à l'intérieur est donc nulle ce qui conduit à :

$$Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow [E(z_1) - E(z_2)]S = 0 \Rightarrow E(z_1) = E(z_2)$$

Les valeurs positives de z_1 et z_2 étant quelconques le module du champ E est indépendant de z . Le champ est donc uniforme :

Pour $z > 0$ on a $\vec{E}(x, y, z) = E_o \vec{u}_z$

Le plan chargé étant un plan de symétrie on en déduit que :

Pour $z < 0$ on a $\vec{E}(x, y, z) = -E_o \vec{u}_z$

Le plan chargé coupe le cylindre (figure 3.21) :

Dans ce cas la charge à l'intérieur de la surface de Gauss correspond à la charge située sur la surface S du plan chargé : $Q_{\text{int}} = \sigma_o S$

De plus, avec $E(z_1) = E_o$ et $E(z_2) = -E_o$, le flux total s'écrit :

$$\Phi_S = [E(z_1) - E(z_2)]S = [E_o - (-E_o)]S = 2E_o S$$

L'application du théorème de Gauss donne :

$$2E_o S = \frac{\sigma_o S}{\epsilon_o} \Rightarrow E_o = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}$$

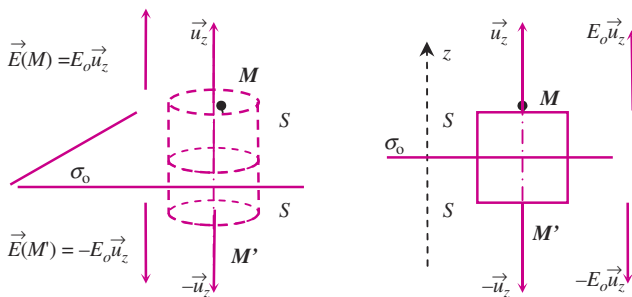


Figure 3.21 Plan infini chargé uniformément. La surface de Gauss est ici un cylindre de section S coupé par le plan chargé.

On a donc finalement :

$$\text{Pour } z > 0 : \vec{E}(M) = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \vec{u}_z \quad (3.14a)$$

$$\text{Pour } z < 0 : \vec{E}(M) = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \vec{u}_z \quad (3.14b)$$



Le résultat peut être obtenu en une seule opération. Il suffit de placer le cylindre de façon à ce que les deux bases soient symétriques par rapport au plan chargé (figure 3.21). Le point M étant sur le couvercle supérieur à la cote $z_1 = z$, le couvercle inférieur se trouve à la cote ($z_2 = -z$).

Sachant que $E(z) = -E(-z)$ on aura pour tout z :

$$\Phi_S = [E(z_1) - E(z_2)]S = [E(z) - E(-z)]S = 2E(z)S$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est : $Q_{\text{int}} = \sigma_o S$

L'application du théorème de Gauss conduit alors à :

$$\Phi_S = 2E(z)S = \frac{\sigma_o S}{\epsilon_o} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} = E_o$$

On obtient directement la valeur du champ qui est donc uniforme de part et d'autre du plan.



On constate qu'il y a une discontinuité du champ à la traversée de la surface chargée. Cette discontinuité vaut :

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}(z > 0) - \vec{E}(z < 0) = E_o \vec{u}_z - (-E_o \vec{u}_z) = 2E_o \vec{u}_z = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} \vec{u}_z$$

On retrouve ici le même résultat que dans le cas de la sphère et du cylindre chargés en surface.

Dans le plan chargé qui est aussi un plan de symétrie des charges, le champ ne peut être que nul puis qu'il doit être à la fois dans ce plan de symétrie et perpendiculaire à ce plan (suivant $\vec{u}_z$).

Nous retrouvons le résultat obtenu par le calcul direct (voir chapitre 2.3c) en partant du champ créé par un disque chargé et en faisant tendre le rayon vers l'infini. L'application du théorème de Gauss permet d'obtenir rapidement et simplement ce que la méthode de Coulomb donne après quelques calculs d'intégration plus ou moins compliqués.

Calcul du potentiel $V(M)$ (voir paragraphe 2.3c)

Par définition :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = -E(z) \vec{u}_z \cdot [dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z]$$

$$dV(M) = -E(z) dz \Rightarrow \frac{dV}{dz} = -E(z)$$

Par intégration on obtient le potentiel à une constante près qui dépend du choix de l'origine des potentiels.

$$\text{Pour } z > 0, \text{ on a : } \frac{dV}{dz} = -E_o \Rightarrow V(z) = -E_o z + V_o$$

La constante V_o représente alors le potentiel du plan chargé, le potentiel nul se situant à la cote $z = V_o/E_o$.

Le plan chargé étant plan de symétrie on a $V(z) = V(-z)$. On en déduit l'expression du potentiel pour tout z :

$$V(z) = -E_o|z| + V_o$$

La figure 2.25 (chapitre 2.3c) est une représentation graphique des résultats obtenus (avec $V_o = 0$).



Ce résultat peut être utilisé pour des plaques chargées de dimensions finies. Si on se place suffisamment près du centre de la plaque, on peut la considérer comme infinie : cela revient à négliger les effets de bords.

e) Champ et potentiel électrostatiques créés par deux plans parallèles portant des charges opposées

On considère deux plans (P_1) et (P_2) parallèles, séparées d'une distance e , perpendiculaire à un axe $z'z$ (voir figure 3.22), respectivement repérés par leur cote $z_1 = -e/2$ et $z_2 = e/2$ et dont la densité surfacique de charges est $\sigma_1 = -\sigma_o$ et $\sigma_2 = \sigma_o$ (avec $\sigma_o > 0$)

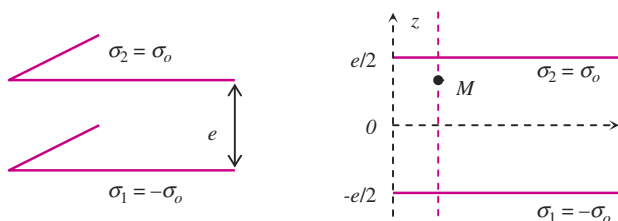


Figure 3.22 Deux plans infinis chargés uniformément avec une densité surfacique σ_o et $-\sigma_o$.

Pour obtenir le champ électrostatique il est commode d'utiliser ici le principe de superposition : le champ résultant est la somme des champs créés par chacun des plans. En reprenant les résultats obtenus au d) on peut écrire :

► Champ créé par (P_1) :

$$\text{Pour } z > -e/2 \text{ on a } \vec{E}_1(z) = \vec{E}_1^+ = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_o} \vec{u}_z = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \vec{u}_z$$

$$\text{Pour } z < -e/2 \text{ on a } \vec{E}_1 = \vec{E}_1^- = -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_o} \vec{u}_z = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \vec{u}_z = -\vec{E}_1^+$$

► Champ créé par (P_2) :

$$\text{Pour } z > e/2 \text{ on a } \vec{E}_2(z) = \vec{E}_2^+ = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_o} \vec{u}_z = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o} \vec{u}_z = \vec{E}_1^-$$

Pour $z < e/2$ on a $\vec{E}_2(z) = \vec{E}_2^- = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z = \vec{E}_1^+$

► Superposition des champs (voir figure 3.23)

Pour $-e/2 < e/2 < z$, $\vec{E} = \vec{E}_1^+ + \vec{E}_2^+ = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z + \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z = \vec{0}$

Pour $-e/2 < z < e/2$, $\vec{E} = \vec{E}_1^+ + \vec{E}_2^- = -\frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z - \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z = -\frac{\sigma_o}{\epsilon_o}\vec{u}_z$

Pour $z < -e/2 < e/2$, $\vec{E} = \vec{E}_1^- + \vec{E}_2^- = \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z - \frac{\sigma_o}{2\epsilon_o}\vec{u}_z = \vec{0}$

Le champ est nul en dehors des plans et est uniforme entre les deux plans.

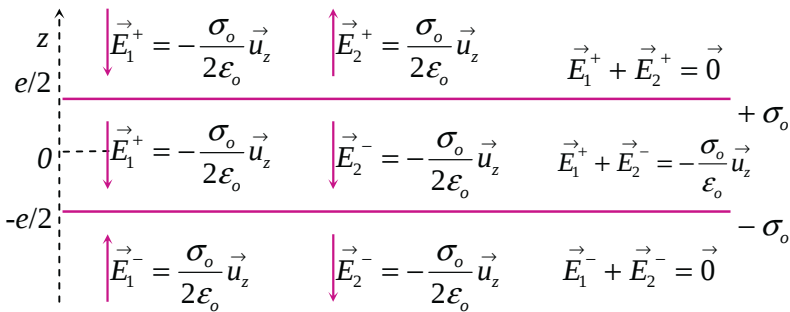


Figure 3.23 Application du principe de superposition pour la détermination du champ créé par deux plans avec des densités surfaciques de charges opposées.

Calcul du potentiel

Par définition : $dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$

Pour un point M entre les deux plans ($-e/2 < z < e/2$) :

$$\begin{aligned} dV(M) &= -\left(-\frac{\sigma_o}{\epsilon_o}\vec{u}_z\right) \cdot dz\vec{u}_z = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} dz \Rightarrow \frac{dV}{dz} = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} \Rightarrow V(z) \\ &= \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} z + V_o \end{aligned}$$

En choisissant par exemple le potentiel nul en $z = 0$:

$$V(z) = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} z$$

Pour un point M en dehors des plans ($-e/2 < e/2 < z$)

$$dV(M) = 0 \Rightarrow V^+ = V_2$$

Pour un point M en dehors des plans ($z < -e/2 < e/2$)

$$dV(M) = 0 \Rightarrow V^- = V_1$$

Les constantes V_1 et V_2 se déterminent par continuité du potentiel et correspondent donc respectivement au potentiel des plans (P_1) et (P_2)

$$\text{On a : } V(z_1) = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} z_1 = -\frac{\sigma_o}{\epsilon_o} \frac{e}{2} = V_1 \text{ et } V(z_2) = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} z_2 = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} \frac{e}{2} = V_2$$

La différence de potentiel U (ou tension) entre les deux plans s'écrit :

$$U = \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} e = \|\vec{E}\| e$$

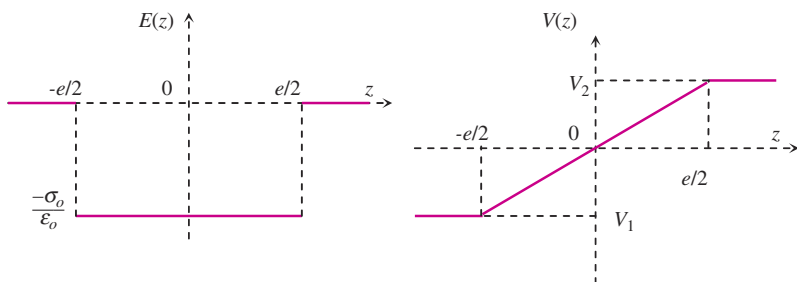


Figure 3.24 Représentation graphique du champ et du potentiel électrostatiques créés par deux plans parallèles (densités surfaciques de charges opposées).

Remarque :

Dans le cas où les plans sont de dimensions finies (plaques carrées par exemple) grandes devant l'écartement e , les résultats précédents restent valables en négligeant les effets de bords. Si les plaques (P_1) et (P_2), de même surface en regard S , portent respectivement les charges $Q_1 = -Q$ et $Q_2 = Q$, alors on peut écrire :

$$\sigma_2 = \sigma_o = \frac{Q}{S}$$

L'expression du champ en fonction de la charge devient :

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} = \frac{Q}{\epsilon_o S}$$

La différence de potentiel s'écrit :

$$U = \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} e = \frac{Q_2}{\epsilon_o S} e \Rightarrow Q_2 = \frac{\epsilon_o S}{e} (V_2 - V_1)$$

$$Q_2 = \frac{\epsilon_o S}{e} (V_2 - V_1) \Rightarrow Q = CU \text{ avec } C = \frac{\epsilon_o S}{e}$$

La quantité C , qui ne dépend que de la géométrie des plaques et du diélectrique entre ces plaques, s'appelle la capacité (unité le farad, symbole F). La charge portée sur chaque plaque est proportionnelle à la différence de potentiel existant entre celles-ci.



POINTS-CLÉS

► Théorème de Gauss

$$\Phi_{\text{sortant}} = \int_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_o}$$

Dans le vide, le flux (sortant) du champ électrostatique à travers une surface fermée S quelconque délimitant un volume intérieur fini est égale à la somme algébrique Q^{int} des charges dans ce volume divisé par ϵ_o .

► Utilisation du théorème de Gauss : la méthode

- Inventaire des éléments de symétrie et des invariances du système de charges
- En déduire les surfaces équipotentielles et les lignes de champ c'est-à-dire avoir une idée de la direction du champ et de quelles variables le module dépend
- Pour calculer le champ en un point donné, choisir une surface de Gauss fermée passant par ce point, qui se confond partiellement ou totalement avec une équipotentielle et pour laquelle le module E est constant.
- Déterminer l'expression mathématique du flux du champ électrostatique à travers la surface fermée choisie.
- Déterminer la charge intérieure à la surface de Gauss
- Appliquer le théorème de Gauss pour déduire le champ électrostatique
- En déduire le potentiel électrostatique

EXERCICES

3.1 Étude d'un dispositif électrostatique destiné à la purification d'un gaz

La figure 3.25.a) montre le schéma de principe d'un appareil utilisé pour la purification de l'air ou d'un gaz quelconque de ses impuretés à l'aide d'un procédé électrostatique. L'appareil est constitué d'un ensemble d'électrodes centrales portées à un potentiel positif V_c entourées d'électrodes externes reliées à la terre. Le gaz à purifier est introduit en bas du bâti et chemine à travers les électrodes externes. Le principe de purification par procédé électrostatique repose sur l'ionisation de l'air au voisinage immédiat des électrodes centrales à l'aide d'un champ électrostatique dont la valeur dépasse la rigidité diélectrique de l'air ($3 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$). Les molécules d'air ionisées sont ensuite accélérées par le champ électrostatique qui règne entre chaque électrode centrale et l'électrode externe qui l'entoure. Des collisions entre ces molécules d'air et les impuretés provoquent une ionisation de ces dernières qui sont ensuite collectées par les électrodes. Le gaz rejeté en haut du bâti se trouve ainsi débarrassé de ses impuretés.

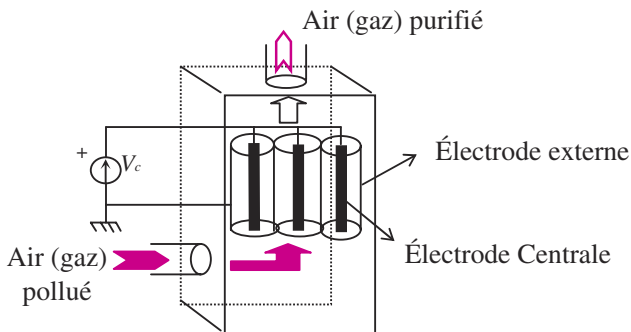


Figure 3.25 (a) Appareil de purification d'un gaz à l'aide d'un procédé électrostatique.

Fonctionnement du dispositif :

L'élément de base du dispositif est une cellule constituée de l'électrode centrale filiforme (rayon R_c), portée à un potentiel positif V_c , entourée de l'électrode externe de rayon R_e et mise à la terre (Figure 3.25.b)). Dans la suite, on ne tiendra pas compte des effets de bord (les électrodes sont assimilées à des cylindres de longueur infinie).

a) En utilisant le théorème de Gauss, montrer que le champ électrostatique entre les électrodes est donné par :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_l}{2\pi\epsilon_0 l r} \vec{u}_r \text{ avec } : R_c < r < R_e$$

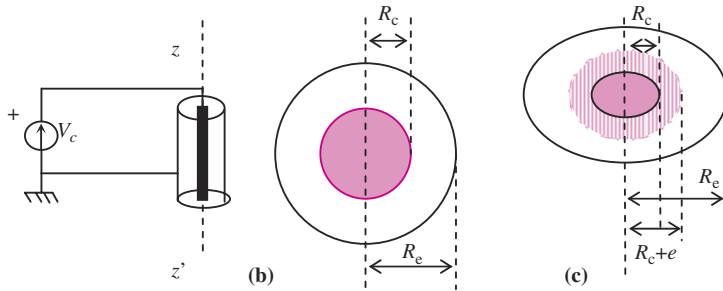


Figure 3.25 **b)** Schéma d'une cellule avec l'alimentation des électrodes et vue en coupe perpendiculaire à l'axe $z'z$. **c)** Électrode centrale recouverte d'un isolant d'épaisseur e .

ε_o : permittivité absolue du milieu (air ou gaz) entre les électrodes

Q_l : Charge électrique portée par une longueur l de l'électrode centrale.

b) À partir de l'expression du champ électrostatique en déduire que la différence de potentiel V_c entre les deux électrodes est donnée par :

$$V_c = \frac{Q_l}{2\pi\varepsilon_o l} \ln \frac{R_e}{R_c}$$

c) Le fonctionnement optimal du dispositif nécessite au voisinage immédiat de l'électrode centrale un champ électrostatique $E(r \approx R_c) \geq 3.10^6 \text{ V.m}^{-1}$. En déduire le potentiel minimal de l'électrode centrale ($V_c^{\min.}$).

A.N. Calculer $V_c^{\min.}$ pour $R_c = 2 \text{ mm}$, $R_e = 200 \text{ mm}$ et $36 \pi \varepsilon_o = 10^{-9} \text{ u.s.i.}$

d) Lorsque l'appareil a fonctionné pendant quelques mois, l'électrode centrale se couvre d'une couche isolante d'épaisseur e et de permittivité diélectrique relative ε_r (figure 3.25.c). En utilisant les résultats de la question a), donner l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(r)$ lorsque :

➤ $R_c < r < R_c + e$

➤ $R_c + e < r < R_e$

e) En déduire la différence de potentiel entre les deux électrodes $V_c = V(R_c) - V(R_e)$, en fonction de Q , ε_o , ε_r , l , R_c , e , R_e .

f) Le fonctionnement optimal de l'appareil nécessite un champ électrostatique $\vec{E}(r \approx R_c + e) \geq 3.10^6 \text{ V.m}^{-1}$, quelle est alors la valeur minimale du potentiel de l'électrode centrale $V_c^{\min}$?

Application numérique : calculer $V_c^{\min}$ pour $\varepsilon_r = 3$ et $e = 1 \text{ mm}$.

3.2 Calcul de flux et théorème de Gauss

L'espace est rapporté à un trièdre d'axes $Oxyz$ munis de vecteurs orthonormés $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Deux charges ponctuelles positives q_1 et q_2 sont placées sur l'axe Ox en $O(0, 0, 0)$ et en $A(a, 0, 0)$ (figure 3.26).

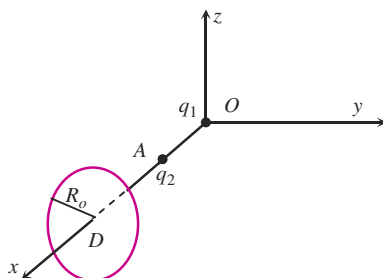


Figure 3.26

On dispose une boucle circulaire (C) de rayon R_0 , d'axe Ox et de centre D à la distance $OD = d$ de l'origine des coordonnées.

a) Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$ créé par les charges q_1 et q_2 en un point $M(x, y, z)$.

b) Déterminer, sans calcul mais en justifiant la réponse, la circulation de $\vec{E}$ sur le contour fermé (C).

c) On se propose de déterminer le flux de $\vec{E}$ à travers la surface du disque délimité par (C).

Déterminer le flux de $\vec{E}$ à travers une surface élémentaire de (C) comprise entre un cercle de rayon r et un cercle de rayon $(r + dr)$. L'orientation de la surface sera prise dans le sens de $(\vec{u}_x)$.

d) En déduire le flux de $\vec{E}$ à travers la surface délimitée par (C) en fonction des angles solides Ω_1 et Ω_2 sous lesquels on voit la surface respectivement de O et de A .



(Voir encart 3.2 sur la notion d'angle solide élémentaire).

3.3 Champ et potentiel électrostatiques créés par des distributions de charges

Partie A

On considère une distribution sphérique de charges avec une densité volumique ρ_c uniforme. Le rayon de la sphère chargée est R_0 .

a) Quelle est la valeur de ρ_c sachant que la charge totale de la sphère est égale à $-e$ (charge élémentaire de l'électron)?

b) Rappeler le théorème de Gauss et l'utiliser pour déterminer le champ électrostatique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

c) En déduire le potentiel électrostatique en tout point de l'espace.

Partie B

La distribution de charges ci-dessus représente le volume où l'électron de l'atome d'hydrogène est susceptible de se trouver. L'atome étant

constitué d'un noyau de charge $+e$ placé au centre d'une sphère de rayon R_o contenant les charges avec la distribution ρ_c de la partie A. Quel sont le champ et le potentiel électrostatiques à l'extérieur de la sphère? Le résultat était-il prévisible sans calcul ?

Partie C

Soient deux plans parallèles chargés avec des densités surfaciques $+\sigma$ et $-\sigma$. La différence de potentiel entre les deux plans est constante égale à U .

a) Exprimer le champ électrostatique entre les plans.

b) Sachant que l'espacement entre les armatures est $d = 3 \cdot 10^{-3}$ m, déterminer U pour que le champ entre les plans soit égal à $E_o = 10^6$ Volt.m $^{-1}$. Quelle est la valeur de la densité de charges ?

c) On introduit l'atome de la partie B dans l'espace entre les plans, décrire qualitativement (sans calcul) les effets du champ E_o sur l'atome. Que peut-on dire des effets électriques (champ et potentiel) à l'extérieur de l'atome?

SOLUTIONS

3.1 a) États des charges: L'électrode centrale reliée au pôle positif d'un générateur de tension, se charge positivement en surface. Pour l'électrode qui l'entoure, sa surface interne va être chargée négativement. Par contre la surface externe ne porte aucune charge du fait de la liaison à la terre.

Champ entre électrodes : En ne tenant pas compte des effets de bords, les électrodes et leur distribution de charges étant à symétrie cylindrique, on peut déduire que les surfaces équipotentiellles possèdent cette symétrie. Pour calculer le champ électrostatique entre les électrodes, on choisit une surface cylindrique fermée, de longueur l et coaxiale avec l'électrode centrale. Le flux du champ électrostatique à travers les bases du cylindre fermée étant nul, il reste uniquement à évaluer le flux à travers une surface latérale de longueur l et de rayon r sur laquelle la valeur du champ est uniforme: $\Phi = E \cdot 2\pi r l$ (voir cours 3.3)

D'après le théorème de Gauss, $\Phi = \frac{Q_l}{\epsilon_o}$, on en déduit que le champ électrostatique est donné par : $\vec{E}(r) = \frac{Q_l}{2\pi\epsilon_o l r} \vec{u}_r$

b) La relation locale $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr$ donne par intégration une fonction potentiel électrostatique :

$$V(r) = \frac{Q_l}{2\pi\epsilon_o l} \ln r + K$$

où la constante K peut être déterminée par l'une des conditions aux limites imposées : $V(R_c) = V_c$ et $V(R_e) = 0$

On peut aussi déduire la différence de potentiel entre les électrodes :

$$V(R_c) - V(R_e) = V_c = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R_e}{R_c}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } E(R_c) &= \frac{Q_l}{2\pi\epsilon_0 l R_c} \geq 3.10^6 \text{ V.m}^{-1} \\ \Rightarrow V_c &= R_c E(R_c) \ln \left(\frac{R_e}{R_c} \right) \geq 3.10^6 . R_c \ln \left(\frac{R_e}{R_c} \right) \end{aligned}$$

$$V_c^{\min} = 6.10^3 . \ln(100) = 27\,631 \text{ V}$$

d) Le principe du calcul du champ électrique par application du théorème de Gauss est le même que celui décrit dans la réponse à la question a). Le seul paramètre concerne la permittivité diélectrique relative qui dépend de l'intervalle que l'on considère.

Ainsi, lorsque $R_c < r < R_c + e$, le champ électrostatique est donné par :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_l}{2\pi\epsilon_0 . \epsilon_r l r} \vec{u}_r$$

Alors que pour $R_c + e < r < R_e$, le champ est donné par :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_l}{2\pi\epsilon_0 l r} \vec{u}_r$$

e) La relation locale entre le potentiel et le champ électrostatique $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr$ sera intégrée en considérant les deux régions à différentes constantes diélectriques.

Le potentiel est donc donné par :

$$V(R_c) - V(R_e) = V_c = \frac{Q_l}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_r l} \ln \left(\frac{R_c + e}{R_c} \right) + \frac{Q_l}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \left(\frac{R_e}{R_c + e} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \vec{E}(r \approx R_c + e) &\geq 3.10^6 \Rightarrow \frac{Q_l}{2\pi\epsilon_0 l (R_c + e)} \geq 3.10^6 \\ &\Rightarrow \frac{Q_l}{2\pi\epsilon_0 l} \geq 3.10^6 (R_c + e) \end{aligned}$$

En reportant ce résultat dans l'expression de V_c , on obtient :

$$V_c \geq 3 \cdot 10^6 (R_c + e) \left[\frac{1}{\varepsilon_r} \ln \left(\frac{R_c + e}{R_c} \right) + \ln \left(\frac{R_e}{R_c + e} \right) \right]$$

$$V_c \geq 3 \cdot 10^3 (2 + 1) \left[\frac{1}{3} \ln \left(\frac{2 + 1}{2} \right) + \ln \left(\frac{200}{2 + 1} \right) \right]$$

$$V_c \geq V_c'^{\min} = 9 \cdot 10^3 \left[\frac{1}{3} \ln(1,5) + \ln \left(\frac{200}{3} \right) \right]$$

$$= 9 \cdot 10^3 \cdot 4,33 = 39 \text{ kV}$$

3.2 a) Le champ électrique en un point M est celui de deux charges ponctuelles et son expression simple est la suivante :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left[\frac{q_1 \vec{OM}}{OM^3} + \frac{q_2 \vec{AM}}{AM^3} \right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left[\frac{q_1 \vec{u}_{OM}}{OM^2} + \frac{q_2 \vec{u}_{AM}}{AM^2} \right]$$

b) Le champ électrique est un champ de gradient et par conséquent sa circulation sur un circuit fermé est nulle (la circulation ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement du point initial et final. Sur un contour fermé ces deux points sont identiques, la circulation est donc nulle.

c) Le flux élémentaire du champ électrique, à travers une surface élémentaire $d\vec{S} = dS \vec{u}_x$ autour d'un point M du disque, est par définition :

$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left[\frac{q_1 \vec{OM}}{OM^3} + \frac{q_2 \vec{AM}}{AM^3} \right] \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left[q_1 \frac{\vec{u}_{OM} \cdot d\vec{S}}{OM^2} + q_2 \frac{\vec{u}_{AM} \cdot d\vec{S}}{AM^2} \right] \end{aligned}$$

On reconnaît la définition de l'angle solide élémentaire $d\Omega_1$ (ou $d\Omega_2$) sous lequel la charge q_1 en O (ou q_2 en A) voit la surface élémentaire dS (voir encart 3.2) :

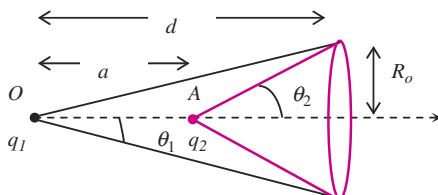
$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} [q_1 d\Omega_1 + q_2 d\Omega_2]$$

Le flux total est obtenu en intégrant l'expression $d\Phi$:

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} [q_1 d\Omega_1 + q_2 d\Omega_2] \Rightarrow \Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} [q_1 \Omega_1 + q_2 \Omega_2]$$

avec Ω_1 (ou Ω_2) angle solide sous lequel q_1 en O (ou q_2 en A) voit le disque de rayon R_o et de centre D .

L'encart 3.3 donne l'expression de l'angle solide en fonction de l'angle du cône qui s'appuie sur le contour du disque. On aura :



$$\Omega_1 = 2\pi(1 - \cos\theta_1) \text{ avec } \cos\theta_1 = \frac{d}{\sqrt{d^2 + R_o^2}}$$

$$\Omega_2 = 2\pi(1 - \cos\theta_2) \text{ avec } \cos\theta_2 = \frac{d - a}{\sqrt{(d - a)^2 + R_o^2}}$$

$$\Phi = \frac{1}{2\epsilon_o} [q_1(1 - \cos\theta_1) + q_2(1 - \cos\theta_2)]$$

3.3 Partie A a) $\rho_c = \frac{Q}{Vol} = \frac{-3e}{4\pi R_o^3}$

b) La symétrie étant sphérique, les surfaces équipotentielles sont des sphères et le champ électrostatique est radial. Pour déterminer le champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss, on choisit les deux surfaces fermées représentatives des points à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère chargée (voir cours 3.3 a et *tableau 3.1*).

Si le rayon de la surface fermée est r , le flux du champ électrostatique est $\Phi = E(r) \cdot 4\pi r^2$.

La quantité de charges à l'intérieur de la surface fermée est $\rho_c \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow E(r < R_o) = \frac{\rho_c r}{3\epsilon_o}$

À l'extérieur de la sphère chargée, le champ est donné par : $E(r > R_o) = \frac{\rho_c R_o^3}{3\epsilon_o r^2}$

c) Le potentiel électrostatique est déduit à partir de l'expression du champ électrostatique : $V(r) = - \int \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$, qui permet d'avoir :

$$r > R_o : V(r) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_o r} \quad ; \quad r < R_o : V(r) = -\frac{\rho_c r^2}{6\epsilon_o} + K$$

La continuité du potentiel en $r = R_o$ permet de déterminer la constante d'intégration K .

Partie B

À l'extérieur de l'atome, le champ électrostatique est dû au noyau (proton) chargé (+e) et à l'électron délocalisé dans la sphère de rayon R_0 .

Pour (+e) : $E_{(+e)}(r > R_0) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

Pour une distribution de charge négative représentant l'électron, tout se passe comme si toute la charge (-e) était concentrée au centre de la sphère chargée: $E_{(-e)}(r > R_0) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}_r$

Ainsi, le champ total à l'extérieur de l'atome d'hydrogène est nul ; Ce résultat était prévisible puisque l'atome est neutre et par conséquent ne crée pas de perturbations électriques dans son voisinage.

Partie C

a) Pour une nappe infinie chargée avec une densité surfacique σ , les équipotentielles sont des plans parallèles à la nappe et les lignes de champ sont les trajectoires orthogonales à la nappe (voir cours 3.3d).

Le champ créé par une nappe chargée (σ) est : $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

D'après le principe de superposition, le champ créé par deux nappes chargées par $+\sigma$ et $-\sigma$ est donné par (voir cours 3.3 e) : $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

b) La différence de potentiel entre les deux plaques s'écrit : $U = \Delta V = Ed$. Le champ électrique, uniforme entre les plaques, a pour valeur $E = U/d$. Avec les valeurs numériques données, le potentiel est égal à $U = 1000$ Volts et la densité de charges est $\sigma = \epsilon_0 E = 8.84 \cdot 10^{-6} \text{ C.m}^{-2}$.

Si on introduit un corps tel que l'atome d'hydrogène dans l'espace entre les armatures, les charges positives et négatives vont subir des forces électriques de signes opposées.

Il en résulte de cette action électrique le déplacement du barycentre des charges négatives par rapport au noyau positif. À cause de ce décalage des charges positives et négatives, l'action électrique de l'atome n'est plus neutre pour l'environnement. Il se développe à l'extérieur de l'atome un champ électrique et un potentiel électrique qui sont ceux de ce que l'on appelle un dipôle électrique.

CHAPITRE 4

Le champ magnétique

PLAN	4.1 Les sources de champ magnétique
	4.2 Les forces magnétiques
	4.3 Le vecteur champ magnétique
OBJECTIFS	➤ Connaître les sources de champ magnétique
	➤ Connaître les deux types de forces magnétiques : force de Lorentz et force de Laplace
	➤ Connaître les méthodes de mesure de l'intensité du champ magnétique et avoir compris ce qu'est l'effet Hall

4.1 LES SOURCES DE CHAMP MAGNÉTIQUE

a) Les aimants : sources de champ magnétique

Comme pour l'électrostatique, les premières observations concernant les phénomènes de magnétisme remontent à l'antiquité. Des corps naturels tel que la magnétite (ou oxyde de fer Fe_3O_4) ont la propriété d'attirer des morceaux de fer. Ce sont les aimants naturels.

Remarque :

La magnétite était une pierre provenant de la région de Magnésie en Grèce d'où l'origine des mots magnétique et magnétisme.

Les quelques substances attirées par l'aimant sont dites « magnétiques ». On trouve principalement le fer, le cobalt, le nickel et certains de leurs composés et alliages.

Convenablement traités, ces corps magnétiques peuvent donner naissance à des aimants artificiels.

b) La boussole et les pôles (magnétiques) d'un aimant

Les Chinois ont été les premiers à constater qu'une fine aiguille aimantée suspendue par un fil, loin de tout aimant, prenait toujours une direction fixe correspondant à la direction Sud-Nord des pôles

géographiques. Cette aiguille aimantée libre de s'orienter constitue la boussole. Les deux extrémités de l'aiguille ne jouent pas un rôle identique puisque c'est toujours la même pointe qui se dirige soit vers le pôle Nord soit vers le pôle Sud. De là vient la définition des deux pôles d'un aimant. L'extrémité de l'aimant se dirigeant vers le nord est appelée le pôle nord de l'aimant, l'autre le pôle sud (voir figure 4.1).

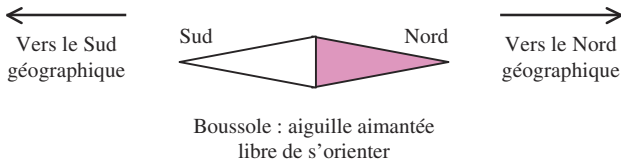


Figure 4.1 Définition des pôles d'un aimant : le pôle nord de l'aimant indique le Nord géographique. Pour le différencier du sud il est très souvent peint en rouge.



Remarque sur le langage utilisé : Le pôle nord (ou sud) magnétique de l'aimant est souvent appelé pôle nord (ou sud) de l'aimant ou encore plus simplement le nord (ou le sud) de l'aimant.

c) Action magnétique entre deux aimants

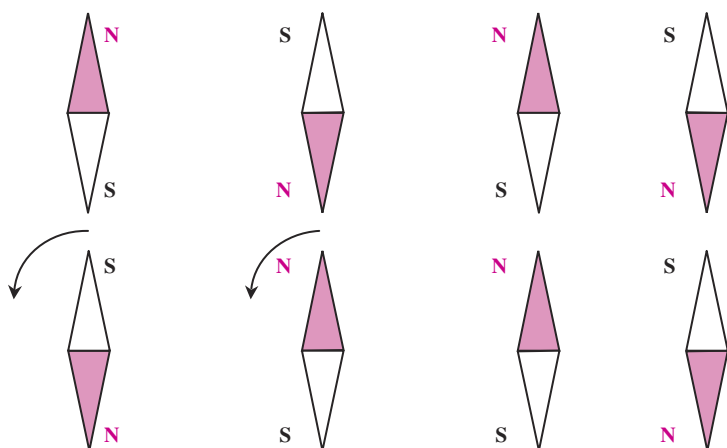
Si on approche deux aiguilles aimantées libres de s'orienter on constate que :

- Deux pôles de même nature se repoussent
- Deux pôles de nature différente s'attirent

Cette propriété est utilisée pour déterminer la nature des pôles d'un aimant quelconque : il suffit d'approcher une boussole vers une des extrémités de l'aimant et d'observer quel pôle est attiré. Le pôle inconnu de l'aimant sera alors de nature différente.

La Terre agissant sur l'aiguille d'une boussole se comporte comme un aimant. Le nord de l'aiguille aimantée se dirige vers un point appelé par le géographe le pôle Nord magnétique terrestre (voisin du pôle Nord géographique). Pour le physicien, ce pôle Nord correspond en réalité au pôle sud magnétique de l'aimant équivalent à la Terre. Au cours des différentes périodes géologiques il y eût plusieurs inversions des pôles magnétiques.

La boussole est l'instrument simple qui va permettre de vérifier s'il existe un champ magnétique dans une région de l'espace. Il est possible aussi d'utiliser de la limaille de fer, petit grain léger de fer qui va s'orienter avec le champ magnétique.



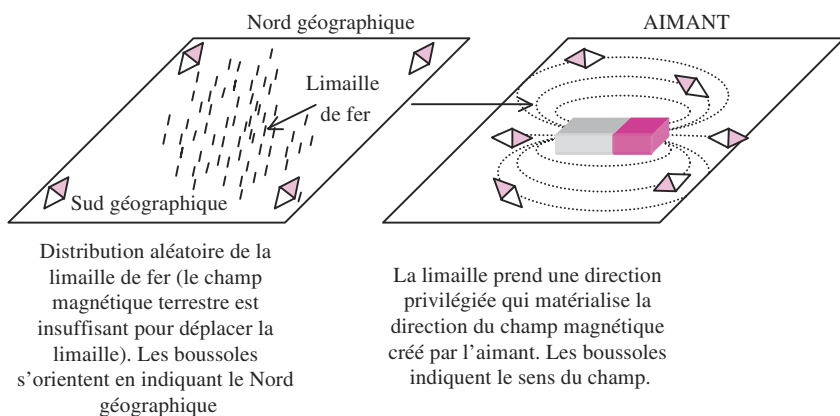
a) Positions instables : les pôles de même nature se repoussent

b) Positions stables : les pôles de nature différente s'attirent

Figure 4.2 Illustration des actions magnétiques entre deux aimants.



Les morceaux de fer ou limailles de fer sont attirés indifféremment par les pôles nord ou sud d'un aimant. Les petits grains de fer s'orientent donc dans le champ magnétique mais, contrairement à l'aiguille aimantée de la boussole, sans préciser le sens de l'action.



Distribution aléatoire de la limaille de fer (le champ magnétique terrestre est insuffisant pour déplacer la limaille). Les boussoles s'orientent en indiquant le Nord géographique

La limaille prend une direction privilégiée qui matérialise la direction du champ magnétique créé par l'aimant. Les boussoles indiquent le sens du champ.

Figure 4.3 Visualisation du champ magnétique avec de la limaille de fer et des petites boussoles.

d) Le courant électrique : source de champ magnétique

En 1819, au cours d'une expérience sur le courant électrique, le physicien Ørsted constate par hasard la déviation d'une boussole placée près d'un fil parcouru par un courant électrique. Cette découverte importante sera à l'origine de nombreux travaux sur le magnétisme.

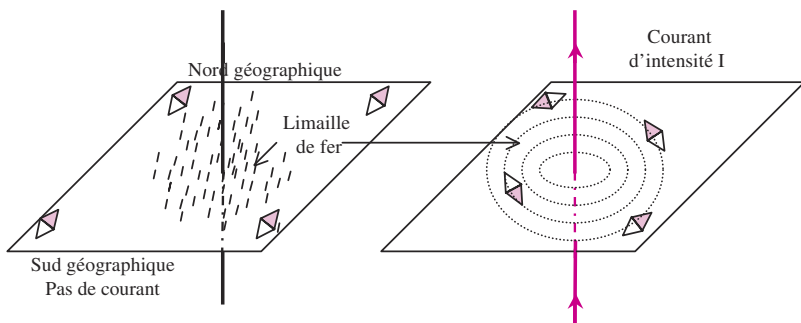


Figure 4.4 Expérience d'Ørsted (1819) : un courant électrique est source de champ magnétique.

Des charges électriques en mouvement (ou courant électrique) sont sources d'un champ magnétique.

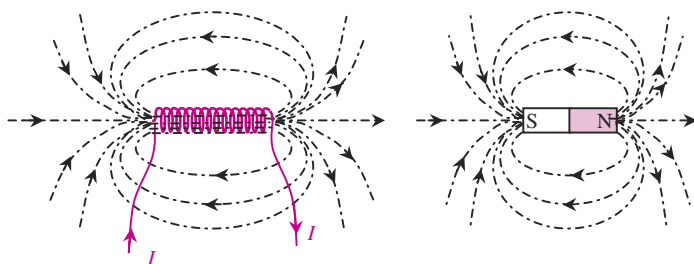


Figure 4.5 Les lignes de champ magnétique créé par une bobine parcourue par un courant I sont semblables à celles qui apparaissent autour d'un aimant en forme de barreau. Les faces de la bobine se comportent comme les pôles de l'aimant.

e) Origine du champ magnétique créé par la matière

L'interprétation du champ magnétique créé par des aimants a pu se faire dès que la nature de la matière a été connue. En effet, la

matière est formée d'un empilement d'atomes, chacun de ces atomes étant constitué d'un noyau autour duquel des électrons sont en mouvement. Un modèle simple consiste à considérer alors chaque atome comme une petite boucle de courant créant un champ magnétique élémentaire. Le champ magnétique macroscopique est obtenu en faisant la somme de tous les champs magnétiques élémentaires. Dans un aimant, les boucles élémentaires de courant donnent naissance à un champ magnétique macroscopique non nul. Dans une substance magnétique, les boucles de courant ont la possibilité de s'orienter dans le matériau sous l'action d'un champ magnétique extérieur et de donner à son tour un champ magnétique macroscopique non nul.



Une charge électrique est source de champ électrique. Si elle est en mouvement elle sera aussi source de champ magnétique. La vitesse d'une charge étant relative à un référentiel, le champ magnétique dépendra du référentiel dans lequel s'effectue l'observation.

4.2 LES FORCES MAGNÉTIQUES

La mesure d'un champ passe par la mesure des effets que produit ce champ. À titre d'exemples, on peut citer :

- le champ électrique $\vec{E}$ se définit à partir de la force électrostatique exercée par le champ sur une charge électrique q : $\vec{f}_E = q\vec{E}$
- le champ de pesanteur $\vec{g}$ se définit à partir de la force exercée par la Terre sur une masse m (poids d'une masse m) : $\vec{P} = m\vec{g}$

Les études effectuées à la suite de l'expérience d'Ørsted ont permis de définir à la fois les forces magnétiques et le champ magnétique.

a) La force de Laplace

C'est la force exercée par un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant.

La force de Laplace élémentaire $d\vec{F}_L$ qui agit sur une portion élémentaire d'un fil conducteur orienté $d\vec{l}$ parcouru par un courant d'intensité algébrique I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, s'écrit :

$$d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (4.1)$$

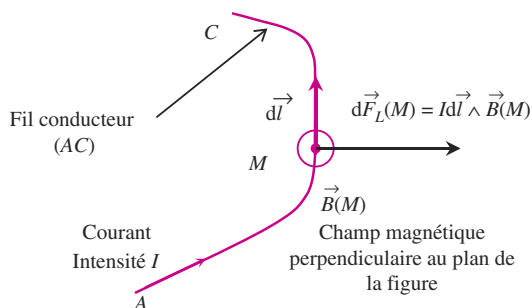


Figure 4.6 Force de Laplace élémentaire exercée par un champ magnétique sur la portion élémentaire $d\vec{l}$ d'un conducteur parcouru par un courant I .

- Le fil conducteur étant orienté, l'intensité I est une grandeur algébrique : elle est positive si le courant circule dans le sens positif choisi pour le conducteur.
- La force de Laplace est perpendiculaire à l'élément de courant $I d\vec{l}$ et au champ magnétique $\vec{B}$: cette force est perpendiculaire au plan défini par le conducteur et le champ magnétique.
- L'ensemble $(I d\vec{l}, \vec{B}, d\vec{F}_L)$ forme un trièdre direct comme $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: la règle des trois doigts de la main droite par exemple permet de retrouver le sens et la direction de cette force (voir encart 4.1 le produit vectoriel).
- Le changement du sens du courant (c'est-à-dire le signe de l'intensité I) ou le sens du champ magnétique change le sens de la force.

La force de Laplace résultante $\vec{F}_L$ appliquée sur un conducteur (AC) (voir *figure 4.7*) s'obtient en additionnant toutes les forces élémentaires. Il s'agit donc d'intégrer la force élémentaire sur la longueur du conducteur :

$$\vec{F}_L = \int_A^C d\vec{F}_L = \int_A^C (I d\vec{l} \wedge \vec{B})$$

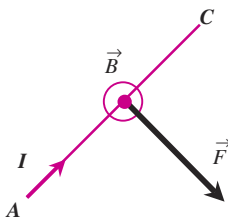


Figure 4.7 Force de Laplace résultante sur un fil rectiligne parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique uniforme et perpendiculaire au fil.

Remarque :

Dans le cas où le champ magnétique est uniforme on obtient :

$$\vec{F}_L = \int_A^C (I d\vec{l} \wedge \vec{B}) = I \left(\int_A^C d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} = \vec{IAC} \wedge \vec{B}$$

En particulier, pour un fil rectiligne de longueur L placé dans un champ magnétique uniforme et perpendiculaire au fil (figure 4.7) on a :

$$\vec{F}_L = \vec{IAC} \wedge \vec{B} \Rightarrow \|\vec{F}_L\| = F_L = ILB \quad (4.2)$$

Cette force est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique B .



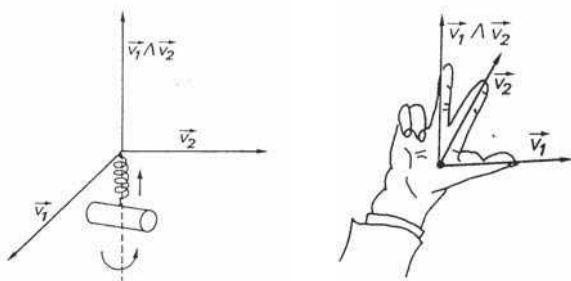
Encart 4.1. Le produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération entre deux vecteurs :
le résultat est un vecteur.

Notation : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forme un trièdre direct comme $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Le sens est donné par la règle du tire bouchon (on tourne $\vec{a}$ vers $\vec{b}$ et le tire bouchon se dirige vers $\vec{c}$) ou des trois doigts de la main droite (voir schéma)



Règle du tire-bouchon ou des 3 doigts de la main droite

La norme du vecteur résultant est :

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{c}\| = c = ab \sin \alpha \text{ avec } \alpha \text{ angle entre } (\vec{a}, \vec{b})$$

Ceci correspond à l'aire du parallélogramme défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Remarques : Pour deux vecteurs perpendiculaires on a $c = ab$

Pour deux vecteurs colinéaires on a $\vec{a} \wedge \lambda \vec{a} = \vec{0}$
 $\lambda \vec{a} \wedge \mu \vec{b} = \lambda(\vec{a} \wedge \mu \vec{b}) = \lambda \mu (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \mu \vec{a} \wedge \lambda \vec{b}$

Attention : $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$ (même norme mais sens opposé)

Remarque : $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$; $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$; $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$

Le produit vectoriel de 2 vecteurs de base pris dans l'ordre $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, \vec{u}_x, \vec{u}_y$ ou $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta \dots)$ donne le troisième. Si l'ordre n'est pas respecté on obtient l'opposé du troisième vecteur.

Exemples : $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta$ ou $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -\vec{u}_x$

b) La force de Lorentz

Si une particule de charge électrique q se déplace à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel dans lequel le champ magnétique vaut B la force qu'elle subit appelée force de Lorentz s'écrit :

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (4.3)$$

- Cette force est perpendiculaire au vecteur vitesse et au vecteur champ magnétique : elle est donc perpendiculaire au plan défini par les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et champ magnétique $\vec{B}$
- L'ensemble $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{f})$ forme un trièdre direct comme $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: la règle des trois doigts de la main droite par exemple permet de retrouver le sens et la direction de cette force (voir encart 4.1 le produit vectoriel).
- Changer le signe de la charge, le sens du vecteur vitesse ou le sens du champ magnétique change le sens de la force
- La force de Lorentz est une force qui ne travaille pas : la force est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse donc au déplacement.

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{l} = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$



La force de Lorentz est une force qui existe à l'échelle microscopique car elle agit sur des particules. La force de Laplace agit à l'échelle des conducteurs c'est-à-dire à notre échelle macroscopique. Il faut donc faire attention à ne pas confondre ces deux forces.

c) Lien entre Force de Laplace et Force de Lorentz

On cherche à déterminer l'action d'un champ magnétique $\vec{B}(M)$ sur un élément d'un conducteur filiforme en M , de longueur $d\vec{l}$, de section droite ds et parcouru par un courant I .

Les charges mobiles à l'origine du courant électrique dans l'élément de conducteur (les électrons de conduction), subissent :

- ▶ l'action du champ magnétique : $\sum \vec{f}_i$ correspond à la somme des forces de Lorentz exercées sur ces charges (cette action a pour effet de dévier la trajectoire des charges mobiles).
- ▶ l'action des constituants fixes de la matière qui retiennent les charges mobiles dans le conducteur : $\vec{dF'}$ correspond à la résultante de ces actions.

En régime permanent les actions exercées sur les charges mobiles se compensent (voir effet Hall) :

$$\sum \vec{f}_i + \vec{dF'} = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{f}_i = -\vec{dF'}$$

D'après le principe des actions réciproques, la résultante $\vec{dF}$ des forces qu'exercent les charges mobiles sur les constituants fixes de la matière correspond à : $\vec{dF} = -\vec{dF'} = \sum \vec{f}_i$.

La structure du conducteur subit donc une force appelée force de Laplace élémentaire et qui est égale à la somme des forces de Lorentz appliquées sur les charges mobiles.



Le champ magnétique n'agit pas directement sur les constituants fixes du conducteur mais agit sur les charges mobiles qui transmettent intégralement à la structure la résultante des forces de Lorentz qu'elles subissent.

La résultante des forces de Lorentz exercées sur les charges mobiles se déplaçant avec la vitesse d'ensemble $\vec{v}_e$ s'écrit :

$$\sum \vec{f}_i = \sum q_i \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \delta Q \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

où δQ correspond à la charge totale des porteurs mobiles qui se trouvent dans l'élément de conducteur. Avec q la valeur de la charge mobile, n la densité volumique des charges mobiles et dV le volume de l'élément de conducteur, on a :

$$\delta Q = nq dV = nq ds dl$$

En remarquant que : $\vec{v}_e dl = v_e d\vec{l}$ (le mouvement d'ensemble des charges mobiles se fait suivant la longueur dl du conducteur filiforme) on peut écrire :

$$\delta Q \vec{v}_e = nq ds dl \vec{v}_e = nq ds l \vec{v}_e = nq v_e ds d\vec{l}$$

L'intensité I du courant s'écrit (voir encart 4.2): $I = jds = nqv_e ds$
 Finalement, la résultante des forces de Lorentz a pour expression :

$$\sum \vec{f}_i = \delta Q \vec{v}_e \wedge \vec{B} = nqv_e ds d\vec{l} \wedge \vec{B} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Conclusion

La force élémentaire de Laplace $d\vec{F}(M)$ agissant sur un élément de conducteur filiforme $d\vec{l}$ parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}(M)$ a pour expression :

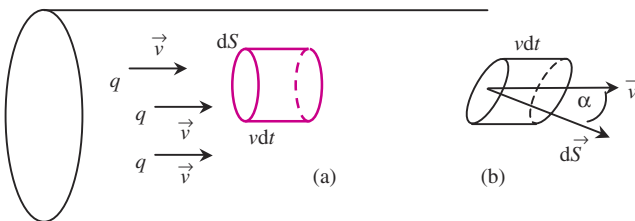
$$d\vec{F}(M) = Id\vec{l}(M) \wedge \vec{B}(M)$$



Encart 4.2. Densité de courant et intensité

Un courant électrique correspond à un déplacement de charges électriques élémentaires : dans un conducteur métallique ces charges sont les électrons de conduction.

L'intensité d'un courant est liée au débit ou flux des charges mobiles. Dans un conducteur, les charges mobiles q , de densité volumique n , se déplacent à la vitesse $\vec{v}$.



Flux de charges mobile à travers une surface

La densité de courant j correspond à la quantité de charges qui traversent par unité de temps une section droite de surface unité (flux de charges par unité de temps et de surface).

Si dQ est la charge élémentaire qui traverse pendant la durée dt une section élémentaire de surface dS perpendiculaire au déplacement des charges mobiles (figure a) on a par définition :

$$j = \frac{dQ}{dSdt}$$

La charge dQ est aussi celle qui est située dans un volume élémentaire dV de section dS et de longueur vdt . On a donc : $dQ = nq dV = nqdSvdt$ soit : $j = nqv$.

Le vecteur densité de courant se définit simplement par :

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

Ce vecteur a pour direction le sens de déplacement des charges positives et il est de sens opposé au déplacement de charges négatives.

Dans le cas général où la surface dS n'est pas perpendiculaire au déplacement des charges (figure b) le volume dV qui correspond à la base par la hauteur peut s'écrire :

$$dV = \cos\alpha dS.vdt = d\vec{S} \cdot \vec{v} dt$$

La charges dQ/dt qui traverse par unité de temps la surface dS s'écrit alors : $dQ/dt = nqdV/dt = nq\vec{v}d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$

L'intensité I d'un courant parcourant un conducteur correspond à la charge électrique qui traverse une section S du conducteur par unité de temps c'est-à-dire au flux du vecteur densité de courant à travers cette surface :

$$I = \int \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Dans le cas où le vecteur densité de courant est uniforme sur toute la section droite du conducteur on aura :

$$I = \int \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int \int_S j dS = jS$$

L'intensité I s'exprime en ampère (1 A) et la densité de courant en ampère par mètre carré (1 A.m⁻²)

4.3 LE VECTEUR CHAMP MAGNÉTIQUE

La détermination des forces magnétiques va permettre de déterminer le vecteur champ magnétique.

a) Direction et sens du vecteur champ magnétique

La direction et le sens du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point M de l'espace sont ceux de l'orientation (Sud-Nord) qu'indique une petite boussole placée en ce point (figure 4.8).

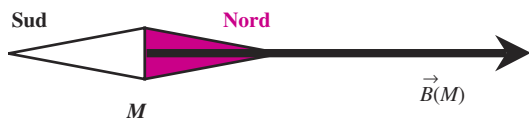


Figure 4.8 La direction Sud-nord de l'aiguille d'une boussole placée en un point M indique le sens et la direction du champ magnétique en ce point.



Les lignes de champ magnétique partent du pôle nord d'un aimant pour rejoindre son pôle sud (figure 4.9).

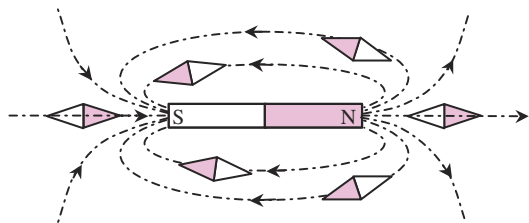


Figure 4.9 Les lignes de champ magnétique sortent par le pôle nord de l'aimant et rentrent dans le pôle sud.

b) Mesure du champ magnétique

► La balance de Cotton

La mesure de l'intensité d'un champ magnétique peut se faire à partir de la force de Laplace exercée par ce champ sur une portion de fil conducteur parcourue par un courant d'intensité I . La balance de Cotton¹ fonctionne sur ce principe.

L'un des bras de la balance qui a la forme d'un fléau, est entouré d'un fil conducteur dans lequel on fait circuler un courant électrique I (voir figure 4.10). Les portions de conducteur (ab) et (cd) sont des arcs de cercles centrés sur l'axe O de la balance et la partie (bc) est un segment de longueur L qui est horizontal quand la balance est équilibrée.

Le champ magnétique B à mesurer, considéré localement uniforme et perpendiculaire au fléau (voir figure 4.10), exerce alors des forces de Laplace ($\vec{F}$, $\vec{f}_{cc'}$, $\vec{f}_{bb'}$) sur les différentes parties du conducteur.

D'après la définition de la force de Laplace (équation 4.1) les forces élémentaires s'exerçant sur les arcs de cercles sont toutes

¹ Cet instrument a été inventé par Aimé Cotton (1900), professeur de physique théorique et générale à la Sorbonne

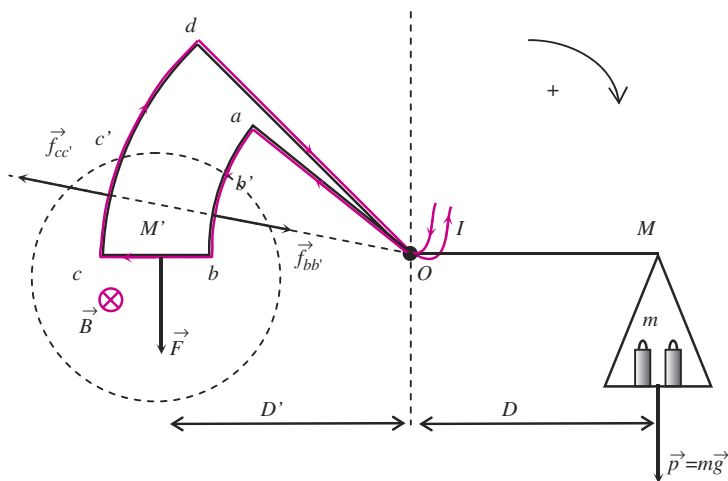


Figure 4.10 Schéma de principe de la balance de Cotton.

perpendiculaires au fil et donc la ligne d'action de toutes ses forces coupe en O l'axe de la balance : les forces résultantes $\vec{f}_{cc'}$ et $\vec{f}_{dd'}$ ont donc un moment nul par rapport à l'axe et ne participent pas à la rotation des bras.

Sur le segment (bc) la force de Laplace résultante s'écrit d'après la relation (4.2) :

$$\vec{F} = I \vec{bc} \wedge \vec{B} \Rightarrow \|\vec{F}\| = F = ILB$$

Cette force perpendiculaire au champ B et au conducteur (cb) est verticale à l'équilibre et appliquée au milieu M' du segment. On choisit convenablement le sens du courant en fonction du sens du champ magnétique pour que cette force soit dirigée vers le bas. Le moment de cette force par rapport à l'axe s'écrit avec l'orientation de la *figure 4.10* :

$$M_o(\vec{F}) = -F \cdot OM' = -FD'$$

Pour équilibrer la balance une masse totale m est placée sur le plateau de l'autre bras : le moment du poids de cette masse s'écrit à l'équilibre :

$$M_o(\vec{p}) = mg \cdot OM = mgD$$

Ces deux forces sont les seules à avoir un moment non nul et à participer à l'équilibre de la balance dont la condition s'écrit :

$$M_o(\vec{F}) + M_o(\vec{p}) = 0 \Rightarrow mgD - FD' = 0$$

On en déduit la valeur du champ magnétique B :

$$ILBD' = mgD \Rightarrow B = \frac{m}{I} \frac{D}{LD'}$$

Le coefficient D/LD' est fixé par construction et l'intensité I du courant est mesurée en plaçant un ampèremètre dans le circuit d'alimentation. On réalise ainsi une « pesée » du champ magnétique.



Il est possible d'affiner l'équilibre de la balance en variant les masses marquées mais aussi en ajustant l'intensité I du courant à l'aide d'un rhéostat par exemple.

Cette méthode de mesure, pas très pratique et longue à mettre en place, n'est plus utilisée de nos jours et est présentée surtout pour son côté pédagogique.

► L'effet Hall : sonde à effet Hall

Les appareils de mesure de champ magnétique couramment utilisés fonctionnent sur le principe de l'effet Hall. Ils permettent d'obtenir rapidement la valeur d'un champ magnétique en un point quelconque de l'espace sans manipulations compliquées.

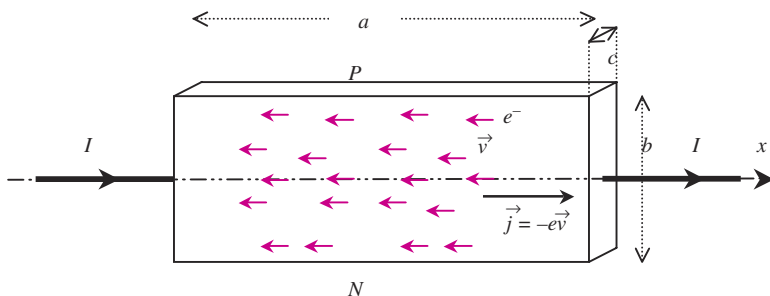


Figure 4.11 Plaquette conductrice parcourue par un courant I et utilisée comme sonde à effet Hall.

L'effet Hall apparaît dans les métaux et les semi-conducteurs. Pour la suite, on considère un matériau conducteur dans lequel il n'existe qu'un seul type de porteurs de charge. La densité volumique de porteurs est n et leur charge q . Par exemple, dans le cas d'un

conducteur métallique, les charges mobiles sont les électrons de charge $q = -e$.

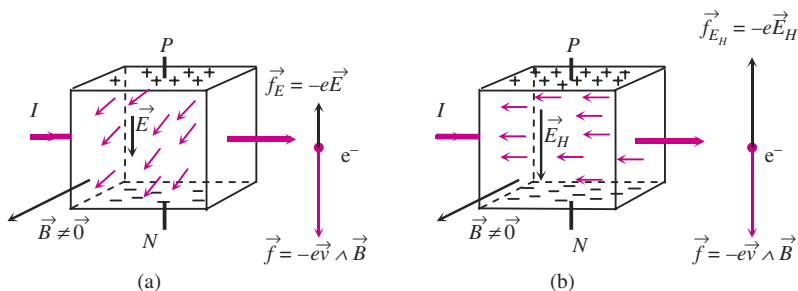


Figure 4.12 L'effet Hall. (a) Régime transitoire : la force de Lorentz dévie les électrons vers la face N (b) Régime permanent : la force électrique qui prend naissance dans le matériau s'oppose à la force de Lorentz ; les électrons ne sont plus déviés.

On considère une petite plaquette, réalisée dans ce matériau, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, de longueur a , grande devant la largeur b et dont l'épaisseur c est très faible devant b . Cette plaquette est traversée par un courant d'intensité I constante dont on supposera le vecteur densité de courant $\vec{j}$ (voir encart 4.2) uniforme sur la section $S = b \cdot c$ de la plaquette et dirigée selon la longueur a (voir figure 4.11).

Le vecteur densité de courant s'écrit (voir encart 4.2) :

$\vec{j} = nq\vec{v} = -ne\vec{v}$ avec e la valeur absolue de la charge d'un électron

Cette plaquette est placée maintenant dans un champ magnétique perpendiculairement à ses grandes faces (voir figure 4.12).

Les charges mobiles (les électrons dans notre cas) sont alors soumises à la force de Lorentz (équation 4.3) : $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$

Cette force a pour effet de faire dévier les électrons vers la face N (voir figure 4.12a) qui se charge progressivement grâce à un excès d'électrons pendant que la face opposée se retrouve avec un déficit en électrons. Il apparaît alors un champ électrique E à l'intérieur du matériau (dirigé dans ce cas de P vers N) qui va exercer une force $\vec{f}_E = qE = -eE$ de sens opposé à la force de Lorentz (figure 4.12a). Au fur et à mesure que les électrons s'accumulent sur la face N, le champ électrique augmente ainsi que la force électrique. Ce régime transitoire s'estompe lorsque la force électrique compense la force de Lorentz : les électrons retrouvent alors leur trajectoire rectiligne, c'est le régime permanent. Le champ électrique est appelé champ de Hall et est noté E_H .

Pour le régime permanent on peut écrire :

$$\vec{f} + \vec{f}_H = \vec{0} \Rightarrow -e\vec{v} \wedge \vec{B} - e\vec{E}_H = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

L'intensité du champ de Hall correspond à : $E_H = vB$

Entre les faces P et N il y a une différence de potentiel appelée tension de Hall et qui s'exprime en fonction du champ par la relation intégrale :

$$U_H = V_P - V_N = \int_P^N \vec{E}_H \cdot d\vec{l} = \int_P^N E_H dl = E_H b = vBb \quad (4.4)$$

Le champ magnétique est donc relié à la tension de Hall qui apparaît entre les deux faces P et N et à la vitesse v des charges mobiles. Cette vitesse peut s'exprimer en fonction de l'intensité I du courant obtenue en exprimant le flux du vecteur densité de courant à travers une section $S = bc$ du conducteur. Le vecteur densité de courant étant uniforme, on a :

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j dS = j \int_S dS = jS = nevS$$

La vitesse v s'écrit alors :

$$v = \frac{I}{neS} = \frac{I}{necb}$$

En reportant cette expression dans l'équation (4.4) on obtient :

$$U_H = \frac{I}{necb} Bb = \frac{I}{nec} B \quad (4.5)$$

La tension de Hall est proportionnelle à l'intensité du courant traversant le matériau ainsi qu'au champ magnétique B dans lequel est plongée la plaquette. La constante de proportionnalité $K = 1/nec$ dépend de la géométrie et de la nature du matériau.



Cette constante doit être la plus grande possible afin d'obtenir une tension de Hall suffisamment importante pour être mesurable. Il faut alors s'arranger pour que le produit nc soit le plus petit possible. On utilise donc des semi-conducteurs (n faible par rapport à des conducteurs) taillés en forme de plaquette d'épaisseur faible devant les autres dimensions a et b .

La valeur du champ magnétique est donnée par la relation :

$$B = nec \frac{U_H}{I}$$

Il suffit d'étalonner le système pour ensuite pouvoir déterminer le champ magnétique en fonction de la valeur de l'intensité I et de la tension de Hall mesurée. Les appareils de mesure de champ magnétique sont donc constitués d'une sonde (la plaquette) et d'un circuit électronique qui alimente la sonde et mesure la tension. Sur certains appareils, l'affichage indique directement la valeur du champ magnétique.

Remarque :

La plaquette étant de petite dimension on peut mesurer pratiquement le champ magnétique en tout point de l'espace.



On ne mesure que la composante du champ magnétique perpendiculaire à la plaquette. Pour déterminer le champ magnétique en un point de l'espace il faudra alors mesurer les trois composantes de ce champ en orientant convenablement la plaquette dans chacun des cas.

c) Unité et ordre de grandeurs

L'unité de champ magnétique est le tesla (symbole 1T). Cette unité peut s'exprimer en fonctions d'autres unités du système international. Par exemple, à partir de la relation (4.4) cette unité correspond à :

$$1\text{ T} = 1\text{ V.m}^{-2}.\text{s}$$

Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de $0,5 \cdot 10^{-4}\text{ T}$ (au niveau du sol à Paris). Les aimants classiques créent des champs de l'ordre du mT. Cela peut aller jusqu'à l'ordre du tesla pour les plus performants. L'utilisation médicale, comme l'IRM (imagerie par résonance magnétique), nécessite des champs de quelques teslas. Enfin des intensités de l'ordre d'une centaine de teslas peuvent être obtenues de façon transitoire en laboratoire. Un tesla correspond donc à une intensité relativement importante et les champs créés par des courants seront le plus souvent de l'ordre du mT. Il existe d'autres sous-unités du champ magnétique et notamment le gauss (symbole G, $1\text{G} = 10^{-4}\text{ T}$).



POINTS-CLÉS

- Sources de champ magnétique : les aimants et les courants électriques

- Action d'un champ magnétique $\vec{B}$ sur une particule de charge q en mouvement à la vitesse $\vec{v}$: la force de Lorentz $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
- Action d'un champ magnétique $\vec{B}$ sur un élément de courant $Id\vec{l}$: la force de Laplace $d\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$
- Effet Hall exploité dans certains appareils (teslamètres) pour mesurer des champs magnétiques

EXERCICES

4.1 Force de Lorentz

Dans un référentiel galiléen muni d'un repère (O, x, y, z) , une particule de charge q , de masse m , pénètre dans un zone de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$. À $t = 0$, la particule est en O avec la vitesse $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.

Montrer que le mouvement de la particule est un mouvement circulaire uniforme.

Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de B , m , q et v .

4.2 Force de Laplace

Un cadre rectangulaire $MNPQ$ de côtés $a = 10$ cm et $b = 5$ cm, comportant $n = 20$ spires de fil conducteur, est disposé au voisinage d'un fil (f) rectiligne, infini et confondu avec un axe Oz . Le cadre se trouve dans un plan xOz , le côté NP suivant l'axe Ox et MN parallèle à Oz . On repère sa position par l'abscisse x du point N le plus proche du fil (f) .

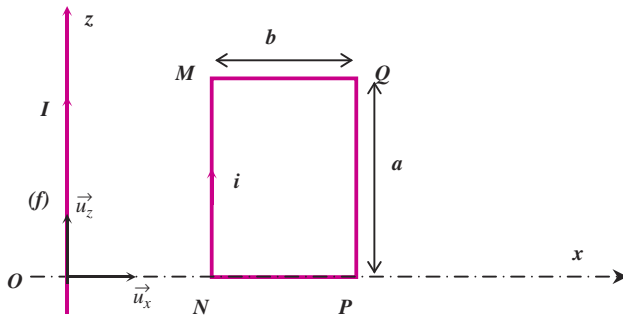


Figure 4.13

Le fil (f) parcouru par un courant d'intensité $I = 10$ A, dirigé vers les z positifs (voir figure 4.13) crée un champ magnétique en tout point de

l'espace. Dans le plan xOz , ce champ ne dépend que de l'abscisse x et a pour expression (voir chapitre suivant) :

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{u}_y \text{ (pour } x > 0 \text{)}$$

On fait circuler dans le cadre, un courant d'intensité $i = 5\text{ A}$ dans le sens $NMQP$.

Déterminer la résultante $\vec{F}$ des forces magnétiques s'exerçant sur le cadre.

SOLUTIONS

4.1 Force de Lorentz

Dans un référentiel galiléen, on considère une particule élémentaire de charge q , de masse m , de vitesse $\vec{v}$ placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

On suppose qu'à $t = 0$, la vitesse est perpendiculaire au vecteur champ magnétique : $\vec{v}(0) = \vec{v}_o = v_o \vec{u}_x \perp \vec{B}$

La seule force agissant sur la particule est la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ (le poids est négligeable devant cette force)}$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne :

$$dE_C = \delta W(\vec{f}) = 0 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \text{cste} \Rightarrow v = v_o = \text{cste}$$

La force de Lorentz ne travaillant pas, le mouvement est donc uniforme.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{B} = B\vec{u}_z \text{ et } \vec{a} \perp \vec{v}$$

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est perpendiculaire au champ magnétique ($\vec{a} \perp \vec{B} = B\vec{u}_z$). On en déduit que la composante de l'accélération suivant $\vec{u}_z$ est nulle. Cela implique que la composante suivant $\vec{u}_z$ de la vitesse est constante. Avec les conditions initiales $\vec{v}(0) = \vec{v}_o = v_o \vec{u}_x$ cette constante est donc nulle.

Aussi, le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire au vecteur champ magnétique et contenant $\vec{v}_o$.

$\vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow$ L'accélération est normale à la trajectoire. Dans le repère de Frenet, on a :

$$a_N = \frac{v_o^2}{\rho} = \frac{\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{m} = \frac{|q|v_o B}{m} \Rightarrow \rho = \frac{mv_o}{|q|B} = \text{cste} = R :$$

Le mouvement est circulaire uniforme. La mesure du rayon R permet de remonter à B . Cette expérience peut se réaliser avec un tube à électron et constitue une vérification expérimentale de la force de Lorentz

4.2 Force de Laplace

Force de Laplace sur NM parcouru par un courant i :

$$d\vec{F}_{NM} = id\vec{l} \wedge \vec{B} = idz\vec{u}_z \wedge B(x)\vec{u}_y = -iB(x)dz\vec{u}_x$$

Sur NM , l'abscisse x est constante, le champ est uniforme sur le fil. On a alors :

$$\int_N^M d\vec{F}_{NM} = \int_0^a -iB(x)dz\vec{u}_x = -iB(x)\vec{u}_x \int_0^a dz = -iaB(x)\vec{u}_x$$

Le cadre comportant n spires la portion NM subit n fois la force exercée sur un brin :

$$\vec{F}_{NM} = -inaB(x)\vec{u}_x = -\frac{\mu_o I nia}{2\pi x} \vec{u}_x$$

Le champ, étant uniforme sur tout le fil NM le point d'application de la résultante est situé au milieu de NM .

Force de Laplace sur QP parcouru par un courant i :

Par rapport au cas précédent, l'intensité du courant est de sens opposé : la force change de sens. De plus l'abscisse devient égale à $x+b$ et est constante pour tout le fil QP .

On aura donc : $F_{QP} = iNaB(x+b)\vec{u}_x = \frac{\mu_o I nia}{2\pi x+b} \vec{u}_x$ appliquée au milieu de QP .

Force de Laplace sur MQ parcouru par un courant i :

$$d\vec{F}_{MQ} = id\vec{l} \wedge \vec{B} = idx\vec{u}_x \wedge B(x)\vec{u}_y = iB(x)dx\vec{u}_z$$

Cette fois le champ magnétique n'est pas uniforme le long de MQ (parallèle à l'axe Ox). On a donc en tenant compte des n spires :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{MQ} &= \int_M^Q n d\vec{F}_{MQ} = \int_x^{x+b} inB(x)dx\vec{u}_z = in\vec{u}_z \int_x^{x+b} B(x)dx \\ &= \frac{\mu_o I}{2\pi} ni\vec{u}_z \int_x^{x+b} \frac{1}{x} dx \\ \vec{F}_{MQ} &= \frac{\mu_o I}{2\pi} ni\vec{u}_z [\ln x]_x^{x+b} = \frac{\mu_o I}{2\pi} ni\vec{u}_z [\ln(x+b) - \ln x] \\ &= \frac{\mu_o I}{2\pi} ni\vec{u}_z \ln \frac{x+b}{x} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{MQ} = \frac{\mu_o I}{2\pi} ni \vec{u}_z \ln \left(1 + \frac{b}{x} \right)$$

Force de Laplace sur PN parcouru par un courant i :

Le sens du courant a changé, cela change le sens de la force. Le reste est inchangé. On adonc :

$$\vec{F}_{PN} = -\frac{\mu_o I}{2\pi} ni \vec{u}_z \ln \left(1 + \frac{b}{x} \right)$$

On constate alors : $\vec{F}_{MQ} + \vec{F}_{PN} = \vec{0}$

La résultante des forces de Laplace exercées sur le cadre (courant i) de la part du champ magnétique créé par le fil infini (courant I) est donc :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{NM} + \vec{F}_{QP} &= -inaB(x) \vec{u}_x + -inaB(x+b) \vec{u}_x \\ &= -\frac{\mu_o naiI}{2\pi} \vec{u}_x \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b} \right] \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{NM} + \vec{F}_{QP} = -\frac{\mu_o naiI}{2\pi} \frac{b}{x+b} \vec{u}_x \text{ appliquée au centre d'inertie du cadre}$$

Remarque :

Le point d'application de la force $\vec{F}_{MQ}$ (ou $\vec{F}_{PN}$) n'est pas au milieu de MQ (ou NP). En effet, le champ magnétique est plus intense vers le fil infini donc vers M (ou N). Les forces élémentaires sont plus intenses vers M (ou N) et donc le point d'application se trouve plutôt du côté de M (ou N). Il correspond au barycentre des points du segment MQ (ou NP) affectés d'un coefficient correspondant à l'intensité de la force de Laplace élémentaire (agissant au point considéré). Ce point peut aussi être obtenu en cherchant à exprimer le moment résultant de cet force par rapport à un point (M ou N par exemple).

CHAPITRE 5

Champ magnétique créé par des courants

PLAN

- 5.1 Loi de Biot et Savart
- 5.2 Propriétés de symétrie du champ magnétique
- 5.3 Champ magnétique créé par un courant circulant dans un fil rectiligne
- 5.4 Cas de la spire circulaire et des bobines parcourues par un courant

OBJECTIFS

- Connaître la loi de Biot et Savart
- Savoir utiliser la loi de Biot et Savart pour déterminer le champ magnétique créé par des courants dans des configurations simples : fil rectiligne, spire circulaire, bobine plate, solénoïde. . .
- Savoir exploiter les symétries et invariances que peuvent présenter des courants pour en déduire les propriétés du champ magnétique résultant.

5.1 LOI DE BIOT ET SAVART

C'est à partir de l'étude des forces exercées entre conducteurs parcourus par des courants que Biot et Savart ont énoncé la loi qui porte leur nom et qui permet d'exprimer le champ magnétique créé par un courant en un point M de l'espace. Cette loi utilise les mêmes notions de calcul différentiel et intégral introduites dans la partie électrostatique.

a) Champ magnétique créé par un conducteur filiforme parcouru par un courant

Dans la plupart des cas, les circuits électriques sont constitués d'une succession de conducteurs filiformes c'est-à-dire de fils conducteurs de dimensions transversales très faibles devant leurs longueurs.

Soit un circuit filiforme décrivant une courbe (C) et parcouru par un courant d'intensité I (voir *figure 5.1*).

Le circuit étant orienté par le sens du courant, on considère une portion élémentaire $d\vec{l}$ du conducteur parcouru par un courant

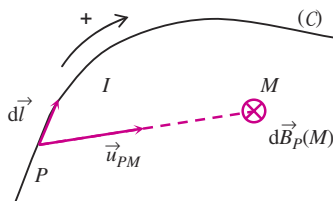


Figure 5.1 Champ magnétique créé en un point M par une portion élémentaire de conducteur filiforme situé en P et parcouru par un courant I .

d'intensité I algébrique et situé au point P . En un point M de l'espace environnant, le champ magnétique élémentaire $d\vec{B}_P(M)$ créé par l'élément de courant $I d\vec{l}$ est donné par la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (5.1)$$

La constante μ_o représente la perméabilité magnétique du vide. Elle est reliée à la permittivité du vide (ou constante diélectrique) ϵ_o et la célérité c de la lumière par la relation : $\epsilon_o \mu_o c^2 = 1$.

Dans les unités du système international on a : $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ u.s.i.



Un milieu magnétique est caractérisé par sa perméabilité absolue $\mu = \mu_r \mu_o$ où μ_r , grandeur sans dimension supérieure à 1, correspond à la perméabilité relative du milieu par rapport au vide. Dans un tel milieu, il suffit de remplacer μ_o par $\mu = \mu_r \mu_o$ dans l'expression (5.1).

Le produit vectoriel dans l'expression de la loi de Biot et Savart (équation 5.1) indique que le vecteur champ élémentaire $d\vec{B}_P(M)$ est perpendiculaire au plan défini par l'élément de courant ($I d\vec{l}$) et la direction PM : l'ensemble ($I d\vec{l}$, $\overrightarrow{PM}$, $d\vec{B}_P(M)$) forme un trièdre direct.

En posant $PM = r$ et en notant $\vec{u}_{PM}$ le vecteur unitaire dirigé de P vers M , l'expression du champ devient :

$$d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{r^2} \quad (5.2)$$

Remarque :

Le champ magnétique en un point est inversement proportionnel à la distance au carré séparant l'élément de courant et le point considéré.

Pour obtenir le champ total en un point M il faut ajouter vectoriellement la contribution de tous les éléments de courant constituant le circuit. On a alors :

$$\vec{B}(M) = \int_{P \in (C)} d\vec{B}_P(M) = \int_{P \in (C)} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} \quad (5.3)$$

Les outils du calcul intégral peuvent alors être exploités pour déterminer l'expression finale du champ magnétique créé par un conducteur filiforme.

b) Généralisation de la loi de Biot et Savart

L'élément de courant $Id\vec{l}$ intervenant dans l'expression du champ magnétique correspond en fait à un cylindre de section élémentaire dS et de longueur élémentaire dl (voir *figure 5.2*). Si $\vec{j}(P)$ est le vecteur densité de courant on a (voir encart 4.2) :

$$I = \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(P) \cdot dS$$

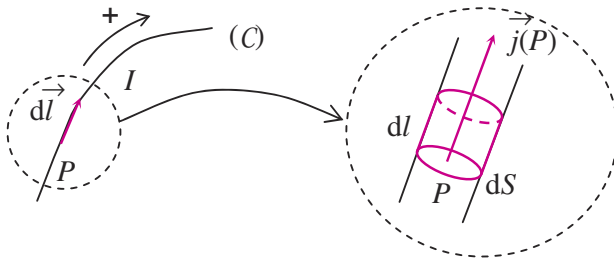


Figure 5.2 Portion élémentaire de courant et densité de courant.

Les vecteurs $\vec{j}$, $d\vec{S}$ et $d\vec{l}$ ont tous la même direction. On a alors :

$$Id\vec{l} = j(P)dSd\vec{l} = \vec{j}(P)dSdl = \vec{j}(P)d\mathcal{V}$$

où $d\mathcal{V} = dSdl$ représente le volume élémentaire autour du point P et pour lequel le vecteur densité de courant est $\vec{j}(P)$

La loi de Biot et Savart se généralise donc pour une distribution de courants quelconque caractérisée par un vecteur densité de courant $\vec{j}$ défini dans un volume $\mathcal{V}$:

$$\vec{B}(M) = \int_{P \in \mathcal{V}} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{j}(P)d\mathcal{V} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{V}} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\mathcal{V} \quad (5.4)$$

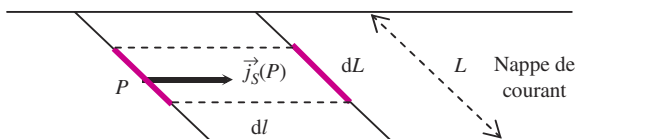


Figure 5.3 Nappe de courant et densité de courant surfacique.



Si les courants sont surfaciques (volume d'épaisseur négligeable) le vecteur densité de courant est surfacique que l'on note $\vec{j}_S$ (voir figure 5.3).

L'intensité I s'obtient alors par la relation : $I = \int_{P \in L} j_S dL$. Si le vecteur densité de courant est uniforme sur la largeur L alors on a $I = j_S \cdot L$.

L'expression du champ magnétique s'obtient en intégrant sur la surface de la nappe de courant. On peut écrire :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \text{nappe}} \frac{\vec{j}_S(P) \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} dS \quad (5.5)$$

5.2 PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Tout comme pour le champ électrostatique, la connaissance des symétries et invariances que présentent les sources permet de déduire certaines caractéristiques du champ résultant.

D'après la loi de Biot et Savart le champ magnétique élémentaire est proportionnel à un produit vectoriel ($\vec{j}(P) \wedge \vec{u}_{PM}$ dans l'équation 5.4 ou $Id\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}$ dans l'équation 5.3). L'étude du comportement du produit vectoriel pour différentes symétries permet de déduire les propriétés de symétrie que présente le champ magnétique résultant. Ces propriétés sont différentes de celles du champ électrostatique comme cela a été signalé dans la partie 2.2 : le champ magnétique est qualifié de champ axial alors que le champ électrostatique est un champ polaire.

Plan de symétrie (π_s) ou plan miroir pour les courants

La figure 5.4 montre comment le produit vectoriel se transforme par rapport à un plan de symétrie. On constate qu'un plan de symétrie se comporte comme un plan d'anti-symétrie pour le produit vectoriel donc pour le champ magnétique.

Un plan de symétrie pour les courants (figures 5.4 et 5.5) :

- transforme la composante du vecteur champ magnétique parallèle au plan en son opposé : $B_{S//} = -B_{//}$
- laisse inchangée la composante du vecteur champ magnétique perpendiculaire au plan : $B_{S\perp} = B_{\perp}$



Si le point M est dans le plan de symétrie il se confond avec son symétrique M_S . On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ et } M_S \text{ symétriques} / \pi_S \Rightarrow \vec{B}_{//}(M_S) = -\vec{B}_{//}(M) \\ M \in \pi_S, M \equiv M_S \Rightarrow \vec{B}_{//}(M_S) = \vec{B}_{//}(M) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}_{//}(M) = \vec{0}$$

Le vecteur champ magnétique n'a pas de composante dans le plan de symétrie : il est perpendiculaire au plan de symétrie

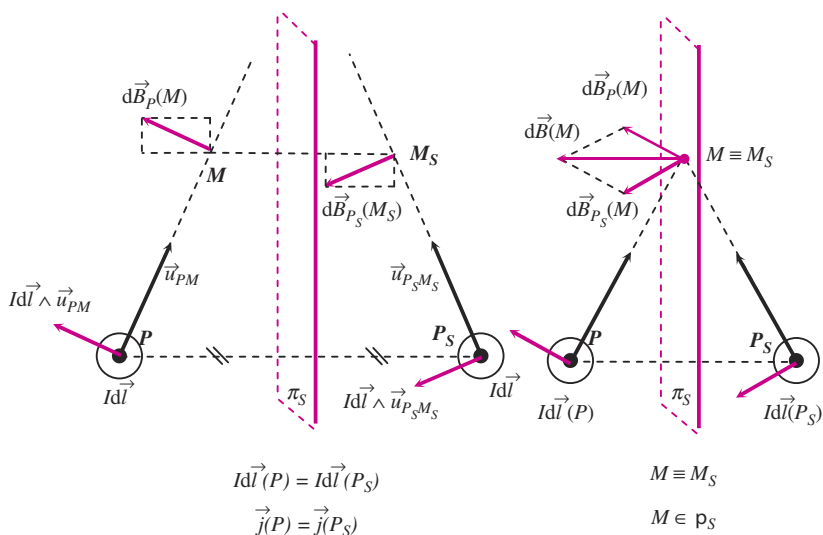


Figure 5.4 Transformation du produit vectoriel par un plan de symétrie (π_S). Les points P_S et M_S sont respectivement les symétriques des points P et M par rapport au plan π_S . Les courants sont symétriques par rapport à ce plan.

Plan de symétrie (π_S) pour les courants ($\vec{j}$)

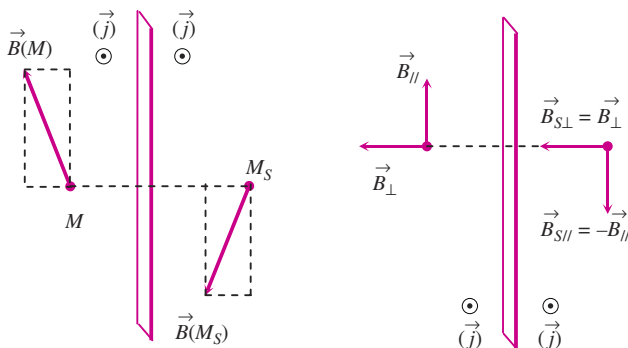


Figure 5.5 Transformation du vecteur champ magnétique par un plan de symétrie (π_S).

Plan d'anti-symétrie (π_{AS}) pour les courants

La figure 5.6 montre comment le produit vectoriel se transforme par rapport à un plan d'anti-symétrie. On constate qu'un plan d'anti-symétrie se comporte comme un plan de symétrie pour le produit vectoriel donc pour le champ magnétique.

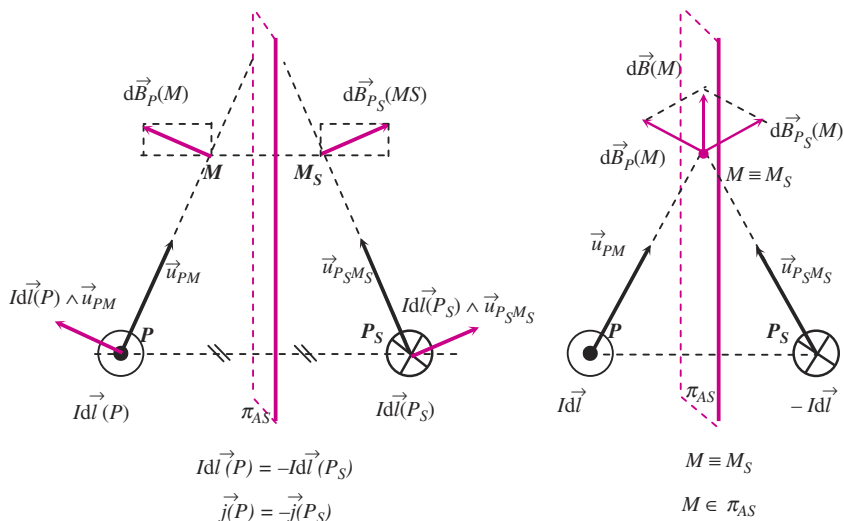


Figure 5.6 Transformation du produit vectoriel par un plan d'anti-symétrie π_{AS} . Les points P_S et M_S sont respectivement les symétriques des points P et M par rapport au plan π_{AS} . Les courants sont anti-symétriques par rapport à ce plan.

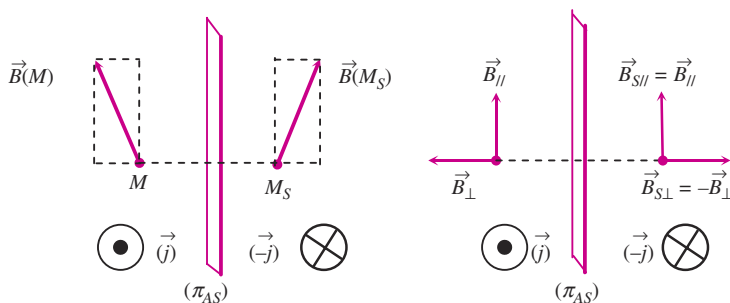


Figure 5.7 Transformation du vecteur champ magnétique par un plan d'anti-symétrie (π_{AS}).

Un plan d'anti-symétrie pour les courants (figures 5.6 et 5.7) :

- laisse inchangée la composante du vecteur champ magnétique parallèle au plan : $B_{AS//} = B_{//}$

► transforme la composante du vecteur champ magnétique perpendiculaire au plan en son opposé : $B_{AS\perp} = -B_{\perp}$



Par rapport à un plan d'antisymétrie le vecteur champ magnétique se transforme comme dans un miroir.



Si le point M est dans le plan d'anti-symétrie il se confond avec son symétrique M_S . On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ et } M_S \text{ symétriques} / \pi_{AS} \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M_S) = -\vec{B}_{\perp}(M) \\ M \in \pi_{AS}, M \equiv M_S \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M_S) = \vec{B}_{\perp}(M) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M) = \vec{0}$$

Le vecteur champ magnétique n'a pas de composante perpendiculaire au plan d'anti-symétrie : il est dans le plan d'anti-symétrie.

Le champ magnétique ne se comporte pas comme le champ électrique au cours d'une transformation par un plan de symétrie ou d'anti-symétrie. Le champ électrique qui se comporte comme un vecteur position est dit vecteur polaire (ou « vrai » vecteur) alors que le champ magnétique est dit vecteur axial (ou pseudo vecteur).

Conclusion : Un plan de symétrie pour les courants apparaît comme un plan d'anti-symétrie pour le champ magnétique. De même, un plan d'anti-symétrie pour les courants apparaît comme un plan de symétrie pour le champ magnétique.

Les invariances

Tout comme pour le champ électrique, si les sources du champ magnétique présentent des invariances par translation ou rotation le champ magnétique présentera les mêmes invariances.

Ainsi, pour un fil rectiligne infini suivant un axe zz' , le courant électrique d'intensité I présente une invariance par translation suivant cet axe zz' : le champ magnétique ne dépendra pas de la variable z .

De même, dans le cas d'une spire circulaire ou d'une bobine constituée de plusieurs spires circulaires de même axe de révolution, le courant électrique d'intensité I parcourant la bobine restera invariant par rotation d'un angle θ autour de cet axe : l'intensité du champ magnétique ne dépendra pas de la variable θ .

5.3 CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN COURANT CIRCULANT DANS UN FIL RECTILIGNE

a) Position du problème

Le cas du fil rectiligne de longueur finie peut paraître inutile car pour qu'un courant puisse circuler il faut nécessairement avoir un circuit

fermé. Cependant, lorsqu'on se place près d'une portion du circuit rectiligne la contribution du reste du circuit à l'expression du champ magnétique est souvent négligeable devant celle de la portion rectiligne.

On considère donc un segment de fil conducteur A_1A_2 parcouru par un courant d'intensité I (figure 5.8). Cette portion de fil définit tout naturellement un axe zz' et un point M de l'espace sera repéré en coordonnées cylindriques. Si le point H est le projeté de M sur le fil on a :

$\vec{HM} = r\vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ est le vecteur radial unitaire des coordonnées cylindriques.

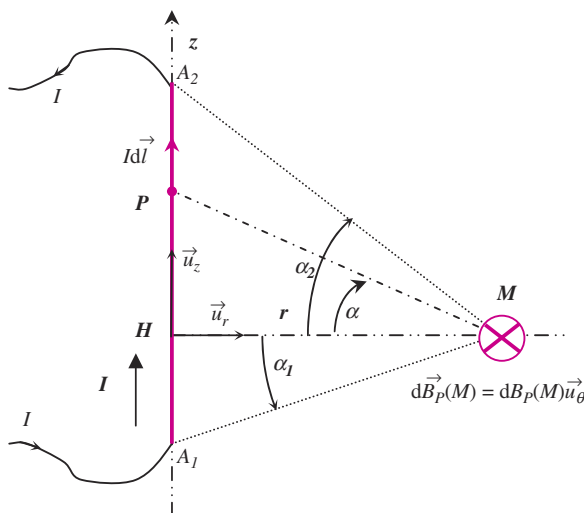


Figure 5.8 Champ magnétique créé par un fil rectiligne A_1A_2 parcouru par un courant d'intensité I .

Symétries et invariances

Le plan contenant la portion de fil (axe zz') et le point M est un plan de symétrie pour les courants. Il contient les vecteurs unitaires $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_r$. On en déduit que le champ magnétique doit être perpendiculaire à ce plan c'est-à-dire suivant la direction du vecteur unitaire orthoradial $\vec{u}_\theta$:

$$\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_\theta$$

L'axe zz' est un axe de symétrie pour le courant I : il y a invariance par rotation d'un angle quelconque θ autour de cet axe : l'intensité du

champ magnétique ne dépend pas de la variable θ . Si z_M est l'abscisse de M par rapport à une origine O sur l'axe zz' alors on a :

$$\vec{B}(M) = B(r, z_M) \vec{u}_\theta$$

Les lignes de champ magnétique sont donc des cercles centrés sur le fil.

b) Champ élémentaire créé par un élément de courant $Id\vec{l}$ situé au point P

L'expression du champ magnétique élémentaire créé par l'élément de courant $Id\vec{l}(P)$ est donnée par la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad (5.6)$$

Le champ total est obtenu en additionnant les contributions de tous les éléments de courant quand le point P décrit tout le fil. La méthode de calcul consiste alors à exprimer les différents termes dépendant de la position de P en fonction d'une variable caractérisant cette position.

Le point P peut être repéré par son abscisse z telle que : $\vec{HP} = z\vec{u}_z$. La longueur élémentaire $d\vec{l}$ peut s'écrire : $d\vec{l} = dz\vec{u}_z$

Dans ces conditions, le produit vectoriel de la relation (5.6) s'écrit :

$$d\vec{l} \wedge \vec{PM} = d\vec{l} \wedge (\vec{PH} + \vec{HM})$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{PM} = (d\vec{l} \wedge \vec{PH}) + (d\vec{l} \wedge \vec{HM})$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{PM} = (dz\vec{u}_z \wedge (-z\vec{u}_z)) + (dz\vec{u}_z \wedge r\vec{u}_r)$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{PM} = (dz\vec{u}_z \wedge r\vec{u}_r) = rdz\vec{u}_\theta$$

Remarque :

Le produit vectoriel est un vecteur perpendiculaire au fil et à PM ; il est donc orienté suivant $\vec{u}_\theta$. On peut écrire :

$$d\vec{l} \wedge \vec{PM} = dl.PM.\sin(d\vec{l}, \vec{PM})\vec{u}_\theta$$

Le sinus d'un angle est égal au sinus de son supplémentaire : $\sin \phi = \sin(\pi - \phi)$ donc $\sin(d\vec{l}, \vec{PM}) = \sin(PH, PM)$.

Le sinus d'un angle est égal au cosinus de son complémentaire : $\sin \phi = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi)$ donc $\sin(PH, PM) = \cos(MP, MH)$. En appelant α l'angle entre MP et MH (voir figure 5.8) on a finalement :

$$d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM} = dz \cdot PM \cdot \cos \alpha \vec{u}_\theta$$

On introduit ici une nouvelle variable α qui repère, comme la variable z , le point P .

Choix de la variable d'intégration

Les variables z et α ne sont pas indépendantes. On a la relation :

$$\tan \alpha = \frac{z}{r} \quad (5.7)$$

Une petite variation dz de la variable z entraîne une variation $d\alpha$ de la variable α avec la relation différentielle :

$$d(\tan \alpha) = d\left(\frac{z}{r}\right) \Rightarrow (1 + \tan^2 \alpha) d\alpha = \frac{dz}{\cos^2 \alpha} = \frac{dz}{r}$$

Dans l'expression (5.6) la grandeur PM^3 qui varie lorsque le point P bouge le long du fil, peut s'exprimer en fonction de la variable z ou α .

Le triangle HPM étant rectangle en H le théorème de Pythagore donne : $PM^2 = r^2 + z^2 \Rightarrow PM^3 = (r^2 + z^2)^{3/2}$

$$\text{On a aussi : } \cos \alpha = \frac{r}{PM} \Rightarrow \frac{1}{PM^3} = \frac{\cos^3 \alpha}{r^3}$$

Expression du champ élémentaire en fonction de z ($z_{A_1} \leq z \leq z_{A_2}$)

$$d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} d\vec{l} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{rdz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_\theta$$

Cette expression n'est pas immédiate à intégrer et nécessite un changement de variable.

Expression du champ élémentaire en fonction de α ($\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$)

Avec $dz = \frac{rd\alpha}{\cos^2 \alpha}$ et $\frac{1}{PM^3} = \frac{\cos^3 \alpha}{r^3}$ on obtient

$$d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{PM dz}{PM^3} \cos \alpha \vec{u}_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{dz}{PM^2} \cos \alpha \vec{u}_\theta$$

$$d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{rd\alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} \cos \alpha \vec{u}_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi r} \cos \alpha d\alpha \vec{u}_\theta.$$

Cette dernière expression est facile à intégrer.

c) Expression du champ magnétique pour un fil fini

$$\vec{B}(M) = \int_{A_1}^{A_2} d\vec{B}_P(M) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_o I}{4\pi r} \cos \alpha d\alpha \vec{u}_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi r} \vec{u}_\theta [\sin \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \vec{u}_\theta$$

avec $\sin \alpha_2 = \frac{z_{A_2}}{\sqrt{r^2 + z_{A_2}^2}}$ et $\sin \alpha_1 = \frac{z_{A_1}}{\sqrt{r^2 + z_{A_1}^2}}$



Il est facile de vérifier que le module du champ $B(M)$ est toujours positif, quel que soit la position du point M .

Le sens du champ est donné par la règle habituelle du tire-bouchon : Le champ a le sens de rotation qu'il faut donner au tire-bouchon placé le long du fil pour qu'il se déplace dans le sens du courant I .

Cas où le point M est sur la médiatrice du fil

On a alors $\alpha_1 = -\alpha_2 = \beta$ (figure 2.9) et le champ a pour expression :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi r} [\sin \beta - \sin(-\beta)] \vec{u}_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi r} [\sin \beta + \sin \beta] \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \sin \beta \vec{u}_\theta \text{ avec } \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

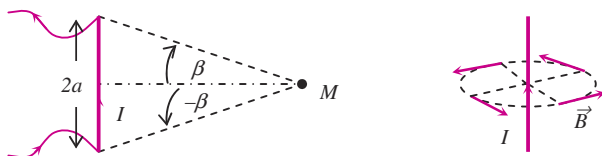


Figure 5.9 Champ magnétique sur la médiatrice d'un fil fini de longueur $2a$.

d) Cas du fil infini

Le calcul est identique au précédent, il suffit de modifier les bornes :

Fil infini $\Rightarrow \beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et $\sin \beta \rightarrow 1$

Le cas « fil infini » correspond aussi au cas où le point M est très proche du fil c'est-à-dire $r \ll a \Rightarrow \sin \beta \rightarrow 1$

On a alors :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (5.8)$$

Ordre de grandeur du champ

Avec $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ u.s.i., un courant d'une intensité $I = 1$ A crée à une distance $r = 1$ m un champ magnétique d'une intensité de :

$B(r = 1\text{m}) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T} \ll 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ champ magnétique terrestre.

On constate que dès qu'on s'éloigne un peu du fil, le champ magnétique devient rapidement très faible. Toujours pour un courant de 1 A, c'est autour d'une distance de 1 mm que l'intensité dépasse le champ magnétique terrestre. À cette distance une portion de fil de 10 cm peut être considéré comme infini : ceci justifie l'intérêt du calcul du champ magnétique créé par un fil infini.

5.4 CAS DE LA SPIRE CIRCULAIRE ET DES BOBINES PARCOURUES PAR UN COURANT

a) Champ magnétique créé par une spire circulaire

On considère une spire circulaire conductrice de centre O , d'axe $z'Oz$ caractérisée par son rayon R et parcourue par un courant I (figure 5.10).

On cherche à exprimer le champ magnétique créé par ce courant I en un point M situé sur l'axe de la spire. Le point M est repéré par son abscisse $OM = z$.

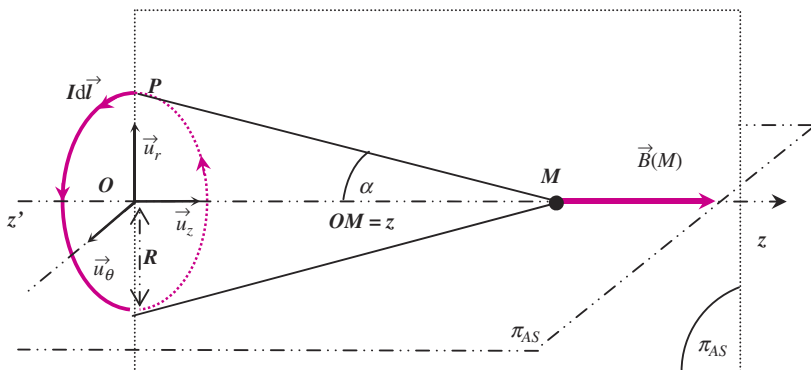


Figure 5.10 Champ magnétique créé par une spire circulaire en un point M de son axe. Les plans π_{AS} sont des plans d'anti-symétrie.

Symétrie et invariance

Tout plan contenant l'axe de la spire est un plan d'anti-symétrie pour les courants : il y en a une infinité. Le champ magnétique doit être dans tous ces plans, donc suivant leur intersection c'est-à-dire l'axe Oz (voir figures 5.10 et 5.11). Finalement on peut écrire :

$$\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_z$$

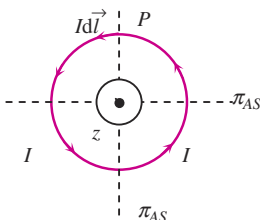


Figure 5.11 Tout plan contenant l'axe de la spire est un plan d'anti-symétrie pour les courants.

Le plan contenant la spire et perpendiculaire à l'axe est un plan de symétrie pour les courants. Le champ magnétique sur l'axe est perpendiculaire à ce plan et reste donc inchangé par symétrie par rapport au plan de la spire (voir chapitre 5.2). Dans ces conditions il suffit de déterminer le champ pour $z > 0$ et on aura :

$$B(-z)\vec{u}_z = B(z)\vec{u}_z$$

$B(z)$ est une fonction paire.

Application de la loi de Biot et Savart

D'après la loi de Biot et Savart l'élément de courant $Id\vec{l}$ (P) en un point P de la spire crée le champ magnétique élémentaire en M :

$$\vec{B}(M) = \oint_{P \in \text{spire}} \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{P \in \text{spire}} \frac{d\vec{l} \wedge (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})}{PM^3}$$

Pour tout point P de la spire la distance PM est identique (figure 5.10). De plus, en utilisant la relation de Chasles, le champ

magnétique peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux intégrales :

$$\begin{aligned}\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{PM^3} \left(\oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO} + \oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{PM^3} (C_1 + C_2)\end{aligned}$$

$$\text{avec : } C_1 = \oint_{P \in \text{spire}} (d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO}) \text{ et } C_2 = \oint_{P \in \text{spire}} (d\vec{l} \wedge \overrightarrow{OM})$$

Dans la deuxième intégrale, le vecteur $\overrightarrow{OM} = z\vec{u}_z$ est indépendant de la variable d'intégration repérant le point P sur la spire. Ce vecteur peut sortir du symbole intégrale et C_2 s'écrit alors :

$$C_2 = \oint_{P \in \text{spire}} (d\vec{l} \wedge \overrightarrow{OM}) = \left(\oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} \right) \wedge \overrightarrow{OM}$$

Le calcul de cette intégrale revient à additionner des vecteurs élémentaires $d\vec{l}$ c'est à dire, en utilisant la relation de Chasles, de mettre bout à bout ces vecteurs pour obtenir le vecteur résultant. Par exemple, si on passe d'un point initial $P \equiv P_1$ à un point final $P \equiv P_2$, on a :

$$\int_{P \equiv P_1}^{P \equiv P_2} d\vec{l} = \overrightarrow{P_1 P_2}$$

Dans le cas de la spire le point P fait un tour complet c'est à dire que le point initial est confondu avec le point final $P_1 \equiv P_2$:

$$\oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} = \int_{P \equiv P_1}^{P \equiv P_1} d\vec{l} = \vec{0}$$

Il ne reste donc que l'intégrale C_1 à déterminer. En utilisant les vecteurs de la base des coordonnées polaires permettant de repérer le point P (figure 5.10), on a :

$$\overrightarrow{OP} = R\vec{u}_r \text{ et } d\vec{l} = dl\vec{u}_\theta = R d\theta \vec{u}_\theta \text{ soit :}$$

$$C_1 = \oint_{P \in \text{spire}} (d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PO}) = \oint_{P \in \text{spire}} (\overrightarrow{OP} \wedge dl\vec{u}_\theta) = \oint_{P \in \text{spire}} (R\vec{u}_r \wedge dl\vec{u}_\theta)$$

$$C_1 = \oint_{P \in \text{spire}} R(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) dl = R(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) \oint_{P \in \text{spire}} dl = R\vec{u}_z \oint_{P \in \text{spire}} dl$$

La dernière intégrale correspond au périmètre de la spire : addition des longueurs élémentaires dl lorsque le point P fait un tour complet. On peut aussi écrire :

$$\oint_{P \in \text{spire}} dl = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$$



Il faut bien faire la différence entre les deux expressions suivantes :

$$\oint_{P \in \text{spire}} d\vec{l} = \vec{0} \text{ et } \oint_{P \in \text{spire}} dl = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$$

$d\vec{l} \wedge \vec{PO}$ est un vecteur dirigé suivant $\vec{u}_z$ et dont la norme correspond à l'aire du parallélogramme formé par dl et OP (voir encart 4.1 le produit vectoriel) ou bien encore au double de la surface élémentaire du triangle formé par dl et PO :

$$d\vec{l} \wedge \vec{PO} = 2d\vec{S} = 2dS\vec{u}_z$$

L'intégrale sur toute la spire donne alors deux fois sa surface :

$$C_1 = \oint_{P \in \text{spire}} (d\vec{l} \wedge \vec{PO}) = 2 \oint_{P \in \text{spire}} d\vec{S} = 2\pi R^2 \vec{u}_z$$

Finalement le champ magnétique a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{PM^3} C_1 = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{2\pi R}{PM^3} R\vec{u}_z = \frac{\mu_o I}{2} \frac{R^2}{PM^3} \vec{u}_z \\ \vec{B}(M) &= \frac{\mu_o I}{2R} \frac{R^3}{PM^3} \vec{u}_z \end{aligned} \quad (5.9)$$

En utilisant le théorème de Pythagore on a :

$$PM^2 = R^2 + z^2 \Rightarrow PM^3 = (R^2 + z^2)^{3/2}$$

$$\frac{R^3}{PM^3} = \frac{R^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{R^3}{R^3} \frac{1}{(1 + \frac{z^2}{R^2})^{3/2}} = \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2}$$

Il est possible aussi d'exprimer cette distance en introduisant la variable α qui est l'angle sous lequel le point M voit un rayon de la spire. On a alors :

$$\sin \alpha = \frac{R}{PM} \Rightarrow \frac{R^3}{PM^3} = \sin^3 \alpha$$

Remarque :

La position du point M par rapport à la spire peut être repérée par la variable z ou bien l'angle α avec le lien suivant :

$$\tan \alpha = \frac{R}{z} \Rightarrow z = \frac{R}{\tan \alpha} = R \cot \alpha \quad (5.10)$$

Expression en fonction de l'angle α

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(\alpha) = \frac{\mu_o I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z \quad (5.11)$$

Expression en fonction de z

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(z) = \frac{\mu_o I}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} \vec{u}_z \quad (5.12)$$

Remarque :

La fonction $B(z)$ est bien une fonction paire.

La solution de l'exercice 2.2 présente une autre façon de trouver ce résultat.

Champ au centre O de la spire

En O l'abscisse z est nulle (ou bien l'angle α vaut $\pi/2$). On obtient :

$$\vec{B}(O) = B_o \vec{u}_z = \frac{\mu_o I}{2R} \vec{u}_z \quad (5.13)$$

Pour une spire de rayon $R = 10$ cm et pour une intensité $I = 1$ A :

$$B_o = \frac{\mu_o I}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2 \cdot 0,1} = 2\pi \cdot 10^{-6} \text{ T} = 6,28 \mu \text{ T}$$

L'intensité de ce champ reste très faible comparée au champ magnétique terrestre.

Direction et sens du champ magnétique sur l'axe de la spire

Le sens du champ est donné par la règle habituelle du tire-bouchon : le tire-bouchon étant dirigé suivant l'axe, le sens du champ magnétique est le sens du déplacement du tire-bouchon quand on le fait tourner dans le même sens que le courant (*figure 5.12*).

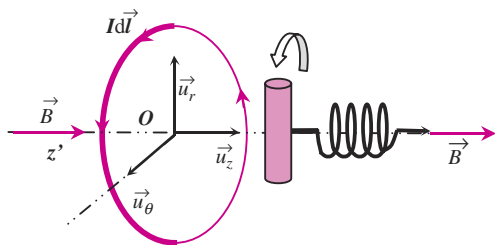


Figure 5.12 Le sens du champ magnétique dépend du sens du courant (règle du tire-bouchon).

Il existe d'autres règles permettant de déterminer le sens du champ magnétique. On peut utiliser le fait que pour un aimant le champ magnétique sort du pôle Nord pour entrer dans le pôle Sud. La spire se comporte comme un aimant plat, chacune de ses faces correspondant à un pôle.

Pour la face Nord, les branches, terminées par une flèche, de la lettre « N » inscrite sur la face indique le sens du courant (*figure 5.13*). De même, pour la face Sud, ce sont les extrémités, terminées par une flèche, de la lettre « S » qui indique le sens du courant.

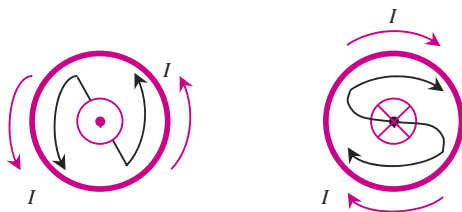


Figure 5.13 Le sens du champ magnétique dépend du sens du courant. Le champ magnétique sort de la face Nord pour entrer dans la face Sud.

Intensité du champ magnétique en fonction de la position du point M

D'après les relations 5.12 et 5.13 et en introduisant la nouvelle variable $u = z/R$, on a :

$$B(M) = B(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-3/2} = B_0 (1 + u^2)^{-3/2}$$

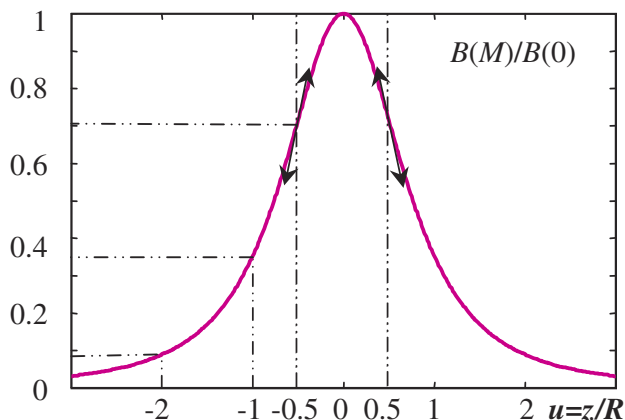


Figure 5.14 Graphe du rapport $B(M)/B(0)$ en fonction de la variable sans dimension $u = z/R$.

La figure 5.14 représente le graphe du rapport $b(u) = B(M)/B_0$ en fonction de la variable réduite $u = z/R$. Il est intéressant de remarquer que cette fonction est paire. La dérivée a pour expression :

$$\frac{db}{du} = -3u(1 + u^2)^{-5/2}$$

Cette fonction est impaire et s'annule pour $u = 0$. La dérivée étant négative pour u positive la fonction est décroissante et $u = 0$ correspond à un maximum. C'est au point O que le champ magnétique est le plus intense.

La dérivée seconde a pour expression :

$$\frac{d^2b}{du^2} = -3(1 + u^2)^{-5/2} + (-3u)\left(-\frac{5}{2}\right)(2u)(1 + u^2)^{-7/2}$$

$$\frac{d^2b}{du^2} = -3(1 + u^2)^{-7/2}[(1 + u^2) - 5u^2] = -3(1 + u^2)^{-7/2}(1 - 4u^2)$$

La dérivée seconde est une fonction paire qui s'annule pour $u = 1/2$ c'est à dire $z = R/2$. Ce point est un point d'inflexion.



L'intensité du champ décroît relativement rapidement dès qu'on s'éloigne du centre. Le tableau 5.1 suivant donne quelques valeurs pour des positions particulières.

TABLEAU 5.1

z	u	$b = B(M)/B(0)$
0	0	1
$R/2$	$1/2$	0,71
R	1	0,353
$2R$	2	0,089
$3R$	3	0,0316

b) Champ magnétique créé par une bobine plate

C'est une bobine constituée de N spires identiques de même axe Oz et dont l'épaisseur e est négligeable devant le rayon R des spires ($e \ll R$ c'est-à-dire en pratique dès que $e < R/10$). Dans ces conditions on peut considérer que toutes les spires coïncident et le champ magnétique en un point M de l'axe correspond alors à la superposition des N champs identiques créés par les spires.

Bobine constituée de N spires identiques

$$\begin{aligned}\vec{B}(M) &= \vec{B}(x) = \frac{\mu_o NI}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z \\ \vec{B}(M) &= \vec{B}(z) = \frac{\mu_o NI}{2R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} \vec{u}_z \\ \vec{B}(O) &= B_o \vec{u}_z = \frac{\mu_o NI}{2R} \vec{u}_z\end{aligned}\quad (5.14)$$

Si la bobine comporte 50 spires de rayon $R = 10$ cm et pour une intensité $I = 1$ A on aura :

$$B_o = \frac{\mu_o NI}{2R} = \pi \cdot 10^{-4} \text{ T} = 0,314 \text{ mT}$$

Cette fois l'intensité du champ prend une valeur supérieure à celle du champ magnétique terrestre. On comprend ici quel peut être l'intérêt de prendre une bobine avec le plus grand nombre de spires possible.

Le graphe de la *figure 5.14* reste valable puisqu'il représente la valeur relative du champ sur l'axe par rapport au champ au centre.

Remarque :

Le plan contenant la bobine est un plan de symétrie.

Pour deux points M et M' symétriques par rapport à ce plan, le champ magnétique est le même et dépend de l'angle α sous lequel, du point M , on voit un rayon R de la bobine (figure 5.15).

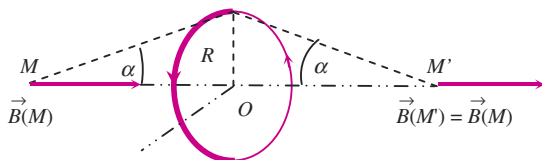


Figure 5.15 Les champs magnétiques pour deux points M et M' symétriques par rapport au plan de la bobine sont égaux.

Application : les bobines de Helmholtz

Ce sont deux bobines plates identiques, de centre O_1 et O_2 , de même axe z/z , et séparées par la distance $O_1O_2 = d = R$. Un même courant d'intensité I circule dans le même sens dans les deux bobines (figure 5.16).

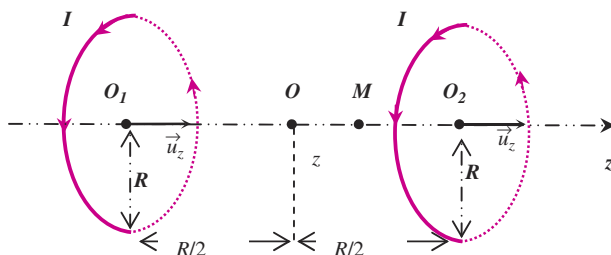


Figure 5.16 Ensemble de deux bobines identiques coaxiales formant les bobines de Helmholtz (pour des raisons de clarté, la figure n'est pas à l'échelle).

Soit O le milieu de O_1O_2 . On repère un point M de l'axe par $z = OM$.

D'après la relation 5.12 le champ créé par une bobine en un point M dépend de la distance entre le centre de la bobine considérée et M . On a :

$$\left\| \overrightarrow{O_1M} \right\| = O_1M = z_1 = z + \frac{R}{2} \text{ et } \left\| \overrightarrow{O_2M} \right\| = O_2M = |z_2| = \frac{R}{2} - z$$

En posant $f(x) = B_o(1 + \frac{x^2}{R^2})^{-3/2}$ on a :

$$B_1(M) = f(z_1) = f\left(z + \frac{R}{2}\right)$$

$$B_2(M) = f(z_2) = f(|z_2|) = f\left(z - \frac{R}{2}\right)$$

Le champ magnétique au point P est obtenu par superposition des champs créés par chacune des bobines. Ces champs ont même direction et même sens. En projection sur l'axe Oz on a

$$B(M) = B_1(M) + B_2(M) = f\left(z + \frac{R}{2}\right) + f\left(z - \frac{R}{2}\right)$$

Avec la variable réduite $u = z/R$ on aura :

$$B(M) = B_1(M) + B_2(M) = f\left(u + \frac{1}{2}\right) + f\left(u - \frac{1}{2}\right)$$

Le graphe de la *figure 5.14* donne l'allure de la fonction $f(u)$. Pour obtenir le champ résultant il faut translater cette fonction de $\pm 1/2$ sur l'axe de la variable réduite u puis d'additionner. On obtient le graphe de la *figure 5.17*.

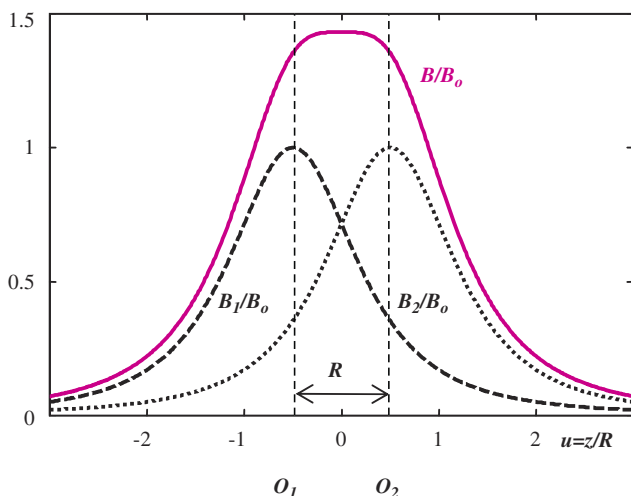


Figure 5.17 Graphe donnant l'intensité du champ magnétique entre les deux bobines de Helmholtz (séparées de $d = R$). La grandeur B_o correspond au champ magnétique créé par une bobine en son centre.

Conclusion : Entre les deux bobines de Helmholtz le champ magnétique est pratiquement uniforme. C'est l'un des rares systèmes permettant de créer un champ magnétique uniforme.

c) Champ magnétique créé par une bobine longue ou solénoïde

Dès que l'épaisseur d'une bobine n'est plus faible devant le rayon des spires cette bobine est dite longue. Il n'est plus possible de considérer les spires confondues : le champ magnétique en un point M de l'axe sera obtenu en additionnant tous les champs créés par les spires identiques mais décalées les unes par rapport aux autres sur leur axe commun.

Un solénoïde est une bobine longue constituée d'un fil conducteur enroulé sur un cylindre isolant. La bobine comporte alors N spires identiques, jointives, réparties régulièrement sur une longueur L . Le nombre de spires par unité de longueur s'écrit :

$$n = \frac{N}{L} \quad (5.15)$$

On désignera par R le rayon du cylindre et $z'z$ son axe de symétrie.

Expression du champ magnétique élémentaire en un point M de l'axe

Pour déterminer le champ magnétique en un point M de l'axe on décompose le solénoïde en bobines plates d'épaisseur élémentaire parcourues par le même courant d'intensité I . Connaissant l'expression du champ créé par une bobine plate il suffira d'additionner les contributions de toutes les bobines plates élémentaires constituant le solénoïde.

Le point M est situé, comme dans le cas de la *figure 5.18*, à gauche du solénoïde. Pour des raisons de symétrie le résultat sera le même si ce point est situé à droite.

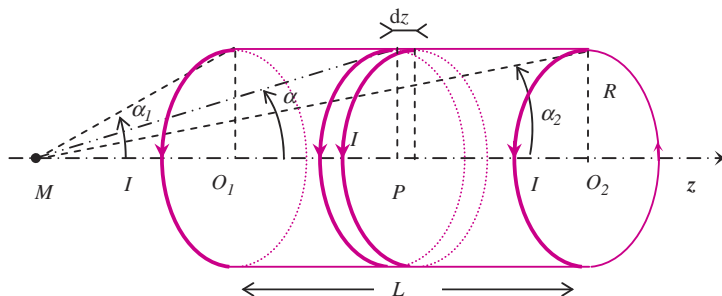


Figure 5.18 Bobine longue ou solénoïde.

Vu du point M , on appelle respectivement O_1 et O_2 les centres de la première et de la dernière spire du solénoïde. De même, α_1 et α_2 sont respectivement les angles sous lesquels, du point M , on voit un rayon de la première et de la dernière spire.

On considère maintenant une bobine plate d'épaisseur élémentaire et de centre P situé entre O_1 et O_2 . Ce point est repéré par son abscisse z par rapport au point M : $\overrightarrow{MP} = z\vec{u}_z$ et l'épaisseur élémentaire de la bobine correspond à une variation élémentaire dz de la variable z autour de P . Du point M , un rayon de cette bobine élémentaire est vu sous l'angle α .

Le nombre de spires dN constituant cette bobine plate élémentaire d'épaisseur dz , s'écrit :

$$dN = ndz = \frac{N}{L} dz$$

D'après le résultat du b) (relation 5.11) le champ magnétique élémentaire créé en M par cette bobine de centre P s'écrit :

$$d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_o I}{2R} dN \sin^3 \alpha \vec{u}_z = \frac{\mu_o I}{2R} ndz \sin^3 \alpha \vec{u}_z$$

Dans cette expression apparaissent les deux variables z et α liées par la relation :

$$\tan \alpha = \frac{R}{z} \Rightarrow z = \frac{R}{\tan \alpha} \quad (5.16)$$

Sachant que la dérivée de l'inverse de la fonction tangente est :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\tan \alpha} \right) = -\frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

on obtient, en différenciant la relation (5.16) le lien entre dz et $d\alpha$:

$$dz = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\alpha$$

Le signe « - » indique simplement que l'angle α diminue ($d\alpha < 0$) lorsque z augmente ($dz > 0$).

Finalement, l'intensité du champ magnétique élémentaire s'écrit :

$$dB_P(M) = \frac{\mu_o I}{2R} n \left(-\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \sin^3 \alpha = \frac{\mu_o n I}{2} (-\sin \alpha d\alpha)$$

Expression du champ magnétique en un point M de l'axe

$$B(M) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 n I}{2} (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$B(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad (5.17)$$



D'après la règle du tire-bouchon, le sens du courant indiqué sur la figure 5.18 fixe le sens du champ magnétique vers les z croissants. Le module du champ doit donc être positif ce qui est bien vérifié sur la formule puisque : $\alpha_2 < \alpha_1 \Rightarrow \cos \alpha_2 > \cos \alpha_1$.

Expression du champ en un point extérieur et à droite du solénoïde

Le plan perpendiculaire à l'axe et passant par le milieu de la bobine est un plan de symétrie pour les courants. Le passage d'un point M (à gauche du solénoïde) au point M' (à droite du solénoïde) symétrique de M par rapport au plan de symétrie laisse inchangé le champ magnétique perpendiculaire à ce plan (figure 5.19). On a donc :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(M')$$

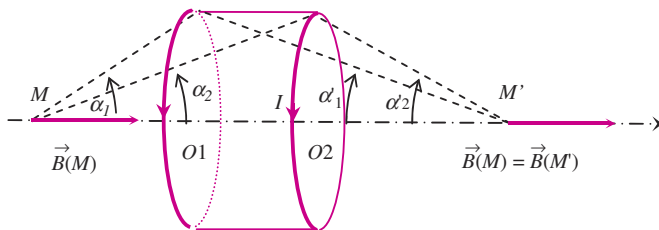


Figure 5.19 Bobine longue ou solénoïde : le point M' est le symétrique de M par rapport au plan de symétrie de la bobine, le champ magnétique est identique en M et M' .

Sans changer le nom des faces ni le sens du courant on constate que l'angle α'_1 positionnant la face n°1 par rapport à M' correspond à l'angle α_2 . De même, l'angle α'_2 est égal à l'angle α_1 (voir figure 5.19). L'expression 5.17 peut donc s'écrire :

$$B(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha'_1 - \cos \alpha'_2) \quad (5.18)$$

Expression du champ sur une face du solénoïde

Si le point M est confondu avec le point O_1 on a (figure 5.20a) :

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \theta_2 \Rightarrow \cos \alpha_2 = \cos \theta_2$$

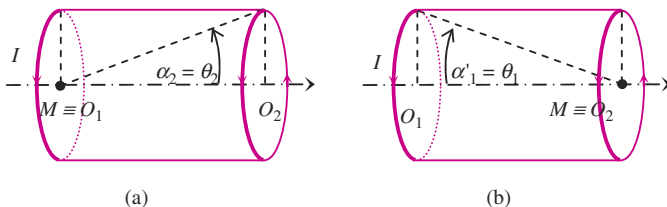


Figure 5.20 Cas où le point M est confondu avec (a) le centre O_1 de la face n°1 (b) le centre O_2 de la face n°2.

En reprenant l'expression (5.17) du champ magnétique (M est à gauche du solénoïde) on obtient l'expression du champ magnétique en $M \equiv O_1$:

$$B(M) = \frac{\mu_o n I}{2} \cos \theta_2 \quad (5.19)$$

Si le point M est confondu avec le point O_2 on a (figure 5.20b) :

$$\alpha'_1 = \theta_1 \Rightarrow \cos \alpha'_1 = \cos \theta_1$$

$$\alpha'_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha'_2 = 0$$

En reprenant l'expression (5.18) du champ magnétique (M est à droite du solénoïde) on obtient l'expression du champ magnétique en $M \equiv O_2$:

$$B(M) = \frac{\mu_o n I}{2} \cos \theta_1 \quad (5.20)$$

Remarque :

dans ce cas ($M \equiv O_1$ et $M \equiv O_2$) les angles θ_1 et θ_2 sont égaux.

Expression du champ à l'intérieur du solénoïde

Si le point M est à l'intérieur du solénoïde, l'expression du champ magnétique peut être simplement obtenu en additionnant les contributions des parties de la bobine à gauche et à droite du point (voir figure 5.21). On obtient, en utilisant le résultat (5.19) et (5.20) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o n I}{2} \vec{u}_z [\cos \theta_1 + \cos \theta_2] \quad (5.21)$$

Cas du solénoïde de longueur infinie

Si la longueur du solénoïde devient infinie le point M , sur l'axe $z'z$, est forcément à l'intérieur (relation 5.21). Les extrémités O_1 et O_2 sont renvoyées, de part et d'autre, vers l'infini sur l'axe $z'z$. L'expression du champ magnétique s'obtient alors en faisant tendre les angles θ_1 et θ_2 vers 0. On a alors :

$$\begin{aligned}\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 n I}{2} \vec{u}_z [\cos 0 + \cos 0] \\ \vec{B}(M) &= B_o \vec{u}_z = \mu_0 n I \vec{u}_z\end{aligned}\quad (5.22)$$

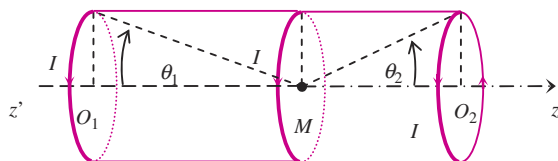


Figure 5.21 Cas où le point M est à l'intérieur du solénoïde.

Remarque :

Il y a invariance par translation suivant z : le champ est indépendant de z et donc est uniforme sur l'axe.



Le champ a été calculé uniquement sur l'axe. Nous verrons au chapitre suivant comment calculer le champ en tout point du solénoïde.

n correspond au nombre de spires par unité de longueur. Le nombre de spires total n'a pas de sens puisqu'il devient infini pour une bobine infinie.

Conditions pour qu'une bobine longue puisse être considérée comme infinie

Considérons un solénoïde de longueur $L = 2a$ et notons O le point milieu de O_1O_2 ($O_1O = a = OO_2$). Le champ magnétique au point O a pour expression avec $\theta_1 = \theta_2 = \theta$:

$$\begin{aligned}B(O) &= \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \theta + \cos \theta] = \mu_0 n I \cos \theta = B_o \cos \theta \\ \text{Avec } \cos \theta &= \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{a}{a \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}}} = \left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)^{-1/2} \\ B(O) &= B_o \left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)^{-1/2}\end{aligned}$$

Pour une longueur L telle que : $\frac{L}{2} = a \approx 10R$, le champ magnétique s'écrit :

$$B(O) = B_o \left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)^{-1/2} \approx B_o \left(1 + \frac{R^2}{(10R)^2}\right)^{-1/2} \approx B_o \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{-1/2}$$

$$B(O) \approx B_o \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{-1/2} \approx B_o \left(1 - \frac{1}{200}\right)$$

$$\frac{\Delta B}{B_o} = \frac{B_o - B(O)}{B_o} = \frac{1}{200} = 0,5\%$$

On peut donc conclure que :

$$B(O) \approx B_o \text{ à } 0,5\% \text{ près si } \frac{L}{2} \approx a \geq 10R$$



Le champ magnétique autour du milieu O de la bobine est, à moins de 0,5%, le même que si la bobine était infinie dès que la longueur L est supérieure à 10 fois le diamètre.



POINTS-CLÉS

- Loi de Biot et Savart : expression du champ magnétique créé par un conducteur filiforme parcouru par un courant I :

$$\text{Champ élémentaire : } d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

$$\text{Champ total : } \vec{B}(M) = \int_{P \in (C)} d\vec{B}_P(M) = \int_{P \in (C)} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^2}$$

- Propriétés de symétrie :

Dans un plan de symétrie des courants, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan

Dans un plan d'anti-symétrie des courants, le champ magnétique est contenu dans ce plan

Sur un axe de symétrie des courants, le champ est porté par l'axe

Un plan de symétrie des courants se comporte comme un plan d'anti-symétrie pour le champ magnétique

Un plan d'anti-symétrie des courants se comporte comme un plan de symétrie pour le champ magnétique

- Champ magnétique créé par un solénoïde infini

$$\text{À l'intérieur du solénoïde : } \vec{B}(M) = B_o \vec{u}_z = \mu_o n I \vec{u}_z$$

$$\text{À l'extérieur du solénoïde : } \vec{B}(M) = \vec{0}$$

EXERCICES

5.1 Fil rectiligne

Calculer le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant I en un point M distant de r du fil.

5.2 Bobine plate

Une bobine, pouvant être assimilée à une spire circulaire, comporte N tours de fil ($N = 50$) de rayon moyen R ($R = 0,20$ m). Le fil est parcouru par un courant constant d'intensité I ($I = 2$ A). L'axe de la bobine est noté $x'x$.

a) Calculer le champ magnétique au centre O de la bobine et en un point situé sur l'axe à $0,10$ m du centre.

b) Exprimer la grandeur $Z = B/B_o$, B étant la valeur du champ magnétique sur l'axe orienté de la bobine à la distance x du centre et B_o sa valeur au centre. Tracer la courbe $Z = f(x)$ en se limitant à $|x| \leq 3R$.

5.3 Bobine de Helmholtz

Le centre de la bobine envisagée ci-dessus (exercice 5.2) étant en O_1 , on place une bobine identique, parallèle à la première, parcourue dans le même sens par le même courant et dont le centre O_2 est sur l'axe de la première à une distance l ($O_1O_2 = l$).

a) On se propose d'étudier le champ magnétique en un point P situé sur l'axe entre les deux bobines. On considère la fonction $Z = B/B_o$, B étant le champ magnétique en P , B_o étant le champ magnétique produit en son centre par une seule bobine.

Montrer que le passage du point M , milieu de O_1O_2 , à un point P très voisin sur l'axe, $\overrightarrow{MP} = h$, fait subir à la fonction Z une variation qui est du deuxième ordre par rapport à h , quand la distance l est quelconque.

b) Montrer qu'il existe une valeur particulière de l , telle que la variation envisagée ci-dessus soit au moins du quatrième ordre par rapport à h . Calculer cette valeur particulière.

Quelle remarque cette étude vous suggère-t-elle ?

5.4 Solénoïde

Calculer le champ magnétique sur l'axe $x'x$ d'une bobine de longueur L , comportant N spires et parcourue par un courant d'intensité I . Donner l'expression dans le cas où la longueur est infinie.

5.5 Champ magnétique créé par un anneau plat

On considère un conducteur formé par un anneau plat d'épaisseur e de rayon intérieur R_o et de rayon extérieur R_1 . L'anneau présente une fente

dont les extrémités sont maintenues à une différence de potentiel V_o (Figure 5.22).

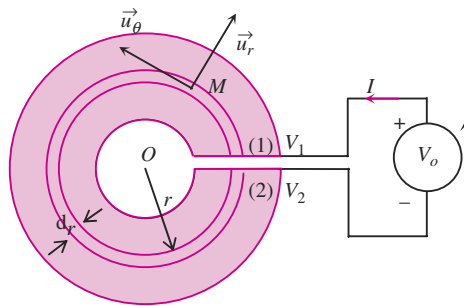


Figure 5.22

a) On rappelle que le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est relié au champ électrique $\vec{E}$ qui règne dans l'anneau par la loi d'Ohm locale : $\vec{j}(M) = \gamma \vec{E}(M)$ où γ est la conductivité électrique du conducteur. De plus, on peut montrer que le champ électrostatique est orthoradial :

$$\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_\theta$$

Préciser comment sont les lignes de courant $\vec{j}$ et rappeler la relation entre l'intensité du courant électrique I dans l'anneau et la densité de courant $\vec{j}$.

b) Déterminer l'expression de $E(r)$ en fonction de V_o et de r .

c) L'anneau élémentaire compris entre le cercle de rayon r et $r+dr$ est assimilé à une spire parcourue par un courant élémentaire dI . En utilisant les résultats ci-dessus, montrer que le courant élémentaire est donné par :

$$dI = \frac{\gamma V_o e}{2\pi r} dr$$

d) En déduire l'expression du champ magnétique élémentaire $d\vec{B}(O)$ créé par l'anneau élémentaire en son centre O . On exprimera la norme de $d\vec{B}(O)$ en fonction de μ_o , γ , V_o , e , r et dr . En déduire le champ magnétique total $\vec{B}(O)$ créé par l'anneau en son centre.

Application numérique : calculer la valeur du potentiel V_o nécessaire pour obtenir un champ magnétique $B = 10^{-2} \text{ T}$. On donne $R_o = 2 \text{ cm}$, $R_1 = 3 \text{ cm}$, $e = 2 \text{ mm}$, $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ et $\gamma = 10^5 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

SOLUTIONS

5.1 Solution détaillée voir cours.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{u}_r$$

5.2 Solution détaillée voir cours.

$$\text{a)} \vec{B}(M) = \vec{B}(\alpha) = \frac{\mu_o NI}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z = \vec{B}(x) = \frac{\mu_o NI}{2R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2} \vec{u}_x$$

$$\text{avec } \vec{B}(O) = B_o \vec{u}_x = \frac{\mu_o NI}{2R} \vec{u}_x$$

$$\text{A.N. } B(O) = \frac{4\pi 10^{-7} \cdot 50.2}{2 \cdot 0.2} = \pi 10^{-4} = 0,314 \text{ mT}$$

$$B\left(\frac{R}{2}\right) = B(O) \left(1 + \frac{R^2}{4R^2}\right)^{-3/2} = B(O) \left(\frac{5}{4}\right)^{-3/2} = B(O) \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \\ = 2,25 \cdot 10^{-4}$$

$$B(R/2) = 0,225 \text{ mT}$$

b) Voir cours.

5.3 Bobine de Helmholtz

On considère deux bobines identiques, de rayon R , de même axe Oz , de centres respectifs O_1 et O_2 et parcourues, dans le même sens, par un même courant I . on pose $L = O_1O_2$ la distance séparant les deux centres des bobines. On s'intéresse au champ magnétique sur l'axe entre les deux spires. On repère alors un point P de l'axe par son abscisse $\overrightarrow{MP} = h$ par rapport au milieu M de O_1O_2 ($h \leq L/2$). En introduisant le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ suivant l'axe Ox on peut écrire :

$$\overrightarrow{O_1O_2} = L\vec{u}_x; \quad \overrightarrow{MO_2} = \frac{L}{2}\vec{u}_x; \quad \overrightarrow{MO_1} = -\frac{L}{2}\vec{u}_x; \quad \overrightarrow{MP} = h\vec{u}_x;$$

$$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{MP} = \left(h + \frac{L}{2}\right)\vec{u}_x; \quad \overrightarrow{O_2P} = \overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{MP} \\ = \left(h - \frac{L}{2}\right)\vec{u}_x$$

Enfin on a :

$$\left\|\overrightarrow{O_1P}\right\| = O_1P = x_1 = h + \frac{L}{2}; \quad \left\|\overrightarrow{O_2P}\right\| = O_2P = x_2 = \left|z - \frac{L}{2}\right| = \frac{L}{2} - h$$

Le champ magnétique au point P est obtenu par superposition des champs créés par chacune des bobines. Ces champs ont même direction et même sens. En projection sur l'axe Oz on a pour la bobine n°1 :

$$B_1(P) = \frac{\mu_o NI}{2R} \left(1 + \frac{O_1 P^2}{R^2} \right)^{-3/2} = B_o \left(1 + \frac{x_1^2}{R^2} \right)^{-3/2}$$

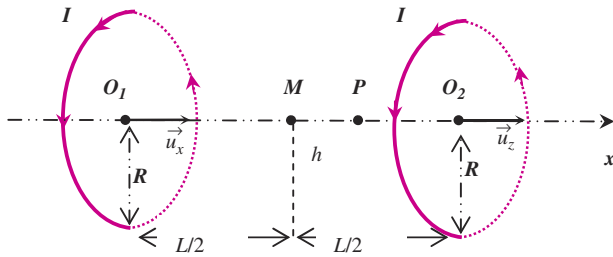


Figure 5.23 Ensemble de deux bobines identiques coaxiales formant les bobines de Helmholtz.

Introduisons la fonction $f(x)$ telle que : $f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right)^{-3/2}$

$$B_1(P) = B_o f(x_1) = B_o f\left(h + \frac{L}{2}\right)$$

De même pour la bobine n°2 on peut écrire :

$$B_2(P) = B_o f(x_2) = B_o f\left(h - \frac{L}{2}\right)$$

Le champ résultant s'écrit alors :

$$B(P) = B_1(P) + B_2(P) = B_o f\left(h + \frac{L}{2}\right) + B_o f\left(h - \frac{L}{2}\right)$$

$$Z = \frac{B(P)}{B_o} = f\left(\frac{L}{2} + h\right) + f\left(-\frac{L}{2} + h\right)$$

Cas où le point P est proche du milieu O c'est à dire $h \ll L/2$

Il est possible de faire un développement limité du champ résultant. La formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{L}{2} + h\right) &= f\left(\frac{L}{2}\right) + h \frac{df}{dx} \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} \left(\frac{L}{2}\right) \\ &= \frac{h^4}{4!} \frac{d^4f}{dx^4} \left(\frac{L}{2}\right) \dots \end{aligned}$$

$$f\left(-\frac{L}{2} + h\right) = f\left(-\frac{L}{2}\right) + h \frac{df}{dx}\left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}\left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3}\left(-\frac{L}{2}\right) \dots$$

L'étude du champ créé par une bobine a permis de montrer que (voir cours 5.4.b) :

$f(x)$ et $\frac{d^{2n}f}{dx^{2n}}$ (dérivée d'ordre $2n$ pair de f) sont des fonctions paires
 $\frac{d^{2n+1}f}{dx^{2n+1}}$ (dérivée d'ordre $(2n + 1)$ impair de f) sont des fonctions impaires

$$\text{On a donc : } f\left(\frac{L}{2}\right) = f\left(-\frac{L}{2}\right) \text{ et } \frac{d^{2n}f}{dx^{2n}}\left(-\frac{L}{2}\right) = \frac{d^{2n}f}{dx^{2n}}\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\frac{d^{2n+1}f}{dx^{2n+1}}\left(-\frac{L}{2}\right) = -\frac{d^{2n+1}f}{dx^{2n+1}}\left(\frac{L}{2}\right)$$

En additionnant les deux développements limités les termes correspondant aux dérivées d'ordre impair vont s'éliminer : il ne reste que les fonctions paires. On peut donc écrire :

$$Z = \frac{B(P)}{B_o} \approx 2f\left(\frac{L}{2}\right) + z^2 \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{z^4}{4!} \frac{d^4f}{dx^4}\left(\frac{L}{2}\right)$$

Le passage du point M milieu de O_1O_2 à un point P très voisin ($MP = |h|$) fait subir à l'intensité du champ magnétique une variation du 2^{ème} ordre par rapport à $|h|$. De plus, l'étude de la fonction $f(x)$ a montré l'existence d'un point d'inflexion pour $u = 1/2$ (à la distance $R/2$ du centre de la bobine) c'est-à-dire l'annulation de la dérivée seconde. Si on choisit L de sorte que $L/2R = u = 1/2$ alors :

$$h^2 \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{L}{2}\right) = x^2 \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{R}{2}\right) = 0$$

$$\text{Donc pour } L = R : Z = \frac{B(z)}{B_o} \approx 2f\left(\frac{R}{2}\right) + \frac{z^4}{4!} \frac{d^4f}{dx^4}\left(\frac{L}{2}\right)$$

La correction cette fois se fait à l'ordre 4 : le champ est dit hyperstationnaire autour du milieu M et l'intensité est pratiquement constante :

$$B(h) \approx 2B_{of}\left(\frac{R}{2}\right) = 2.0, 71.B_o = 1, 42.B_o$$

Remarque :

Au point $P \equiv O_1$ ($h = -L/2$) ou $P \equiv O_2$ ($h = L/2$) le champ correspondant vaut :

$$\begin{aligned} B(P) &= B_1(P) + B_2(P) = B_{af}\left(h + \frac{L}{2}\right) + B_{af}\left(h - \frac{L}{2}\right) \\ B(O_1) &= B_1(O_1) + B_2(O_1) \\ &= B_{af}\left(-\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right) + B_{af}\left(-\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\right) = B_o[f(0) + f(L)] \\ B(O_2) &= B_1(O_2) + B_2(O_2) = B_{af}\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right) \\ &\quad + B_{af}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\right) = B_o[f(L) + f(0)] \end{aligned}$$

D'après le *tableau 5.1* on a :

$$B(O_1) = B_o[1 + 0,353] = 1,353.B_o = B(O_2)$$

La variation relative entre la valeur du champ au milieu et celle au centre des bobines est de :

$$\frac{\Delta B}{B(M)} = \frac{B(M) - B(O_1)}{B(M)} = \frac{1,42 - 1,353}{1,42} = 4,7\%$$

Conclusion : Les bobines de Helmholtz correspondent au cas où la distance séparant les deux bobines est égale au rayon commun aux deux bobines : $L = R$.

Dans une zone entourant le point M milieu de O_1O_2 le champ est pratiquement uniforme. C'est cette propriété qui caractérise les bobines de Helmholtz.

5.4 Solénoïde

Solution détaillée voir cours. $\vec{B}(M) = B_o \vec{u}_x = \mu_o \frac{N}{L} I \vec{u}_x = \mu_o n I \vec{u}_x$

5.5 Champ magnétique créé par un anneau plat

a) D'après la loi d'Ohm local les lignes du vecteur densité de courant sont, comme celles du champ électrique, orthoradiales (cercles concentriques). L'intensité du courant électrique dans un conducteur représente le flux du vecteur densité de courant à travers la section droite (S) perpendiculaire aux lignes des vecteurs densité de courant : $I = \int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$. Le vecteur $d\vec{S}$ représente le vecteur surface élémentaire orienté comme $\vec{u}_\theta$. Ce vecteur peut s'écrire : $d\vec{S} = dr dz \vec{u}_\theta$ (voir *figure 5.24*).

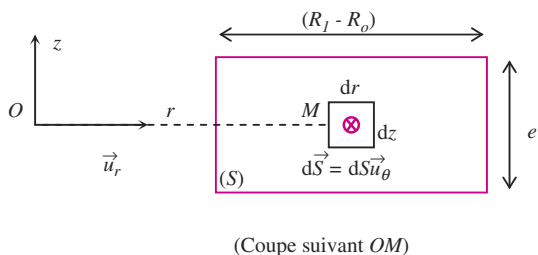


Figure 5.24 Une coupe de l'anneau suivant OM.

b) Sachant que le champ électrostatique est orthoradial, $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_\theta$, sa circulation sur le périmètre de l'anneau de rayon r et en négligeant la dimension de la fente, est donnée par :

$$\int_r \vec{E}(r) d\vec{l} = \int_r E(r) \vec{u}_\theta r d\theta \vec{u}_\theta = \int_r E(r) r d\theta = rE(r) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r E(r)$$

Par définition du potentiel on a aussi :

$$\int_1^2 \vec{E}(r) d\vec{l} = \int_1^2 -dV = \int_2^1 dV = V_1 - V_2 = V_o$$

Le champ électrique est donc donné par : $E(r) = \frac{V_o}{2\pi r}$

c) L'anneau élémentaire compris entre le cercle de rayon r et $r + dr$ est assimilé à une spire parcourue par un courant élémentaire dI donné par :

$$dI = \int_{-e/2}^{e/2} \vec{j}(r) \cdot dS \vec{u}_\theta = \int_{-e/2}^{e/2} j(r) \vec{u}_\theta \cdot dr dz \vec{u}_\theta = j(r) dr \int_{-e/2}^{e/2} dz$$

$$dI = ej(r) dr = e\gamma E(r) dr = \frac{e\gamma V_o}{2\pi r} dr$$

d) L'application de la loi de Biot et Savart donne le champ magnétique en O :

$$\begin{aligned} d\vec{B}(O) &= \int_{\text{anneau}} \frac{\mu_o dI d\vec{l} \wedge \vec{MO}}{4\pi MO^3} = \frac{\mu_o dI}{4\pi r^3} \int_{\text{anneau}} d\vec{l} \wedge (-r\vec{u}_r) \\ &= \frac{\mu_o dI}{4\pi r^2} \int_{\text{anneau}} d\vec{l} \vec{u}_z \\ d\vec{B}(O) &= \frac{\mu_o dI}{4\pi r^2} \vec{u}_z \int_{\text{anneau}} dl = \frac{\mu_o dI}{4\pi r^2} \vec{u}_z 2\pi r = \frac{\mu_o dI}{2r} \vec{u}_z \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$dB(O) = \frac{\mu_o}{2r} dI = \frac{\mu_o}{2r} e\gamma V_o \frac{dr}{2\pi r} = \frac{\mu_o e\gamma V_o}{4\pi r^2} dr$$

Le champ magnétique total $\vec{B}$ créé par l'anneau en son centre est donc donné par :

$$\vec{B}(O) = \vec{u}_z \int_{R_o}^{R_1} \frac{\mu_o e\gamma V_o}{4\pi r^2} dr = \frac{\mu_o e\gamma V_o}{4\pi} \left[\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_1} \right] \vec{u}_z$$

Application numérique : Le calcul donne une valeur de potentiel $V_o = 30$ Volts.

CHAPITRE 6

Théorème d'Ampère Propriétés du champ magnétique

PLAN	6.1	Théorème d'Ampère
	6.2	Exemples d'application du théorème d'Ampère
	6.3	Le flux du champ magnétique
OBJECTIFS	➤	Connaître le théorème d'Ampère
	➤	Savoir utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique créé par des courants dans des configurations simples : fil rectiligne et solénoïde infini
	➤	Savoir que le champ magnétique est à flux conservatif.

6.1 THÉORÈME D'AMPÈRE

Le théorème d'Ampère est l'équivalent pour la magnétostatique du théorème de Gauss. En fonction de la symétrie des courants, ce théorème permet de déterminer sans calcul complexe l'expression du champ magnétique.

a) Circulation sur un contour fermé du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant

Soit un fil rectiligne infini parcouru par un courant I . Comme il a été démontré dans les chapitres 4 et 5, le champ magnétique créé par ce courant en un point est orthoradial et ne dépend que de la distance r du point au fil. Son expression, obtenu par la loi de Biot et Savart, est en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (6.1)$$

On s'intéresse maintenant à la circulation de ce champ sur un contour fermé (C) entourant le fil (*figure 6.1*). On oriente le vecteur normal à toute surface s'appuyant sur ce contour comme le courant I . L'orientation de la surface définit le sens positif sur le contour par la règle habituelle du tire-bouchon.

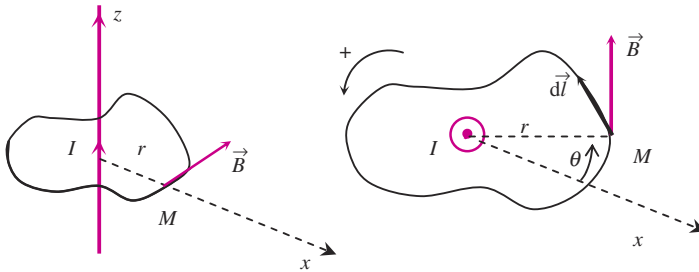


Figure 6.1 Champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant I . Circulation de ce champ sur un contour fermé orienté entourant le fil.

Un déplacement élémentaire sur le contour s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

L'expression de la circulation élémentaire est par définition :

$$dC = \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{u}_\theta (dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dC = \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_o I}{2\pi} d\theta$$

Sur le contour fermé la circulation totale est donnée par :

$$C = \oint_C dC = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_o I}{2\pi} d\theta = \frac{\mu_o I}{2\pi} \oint_C d\theta$$

Sur un tour complet, l'angle θ varie dans ce cas de 0 à 2π (voir figure 6.1). On obtient alors :

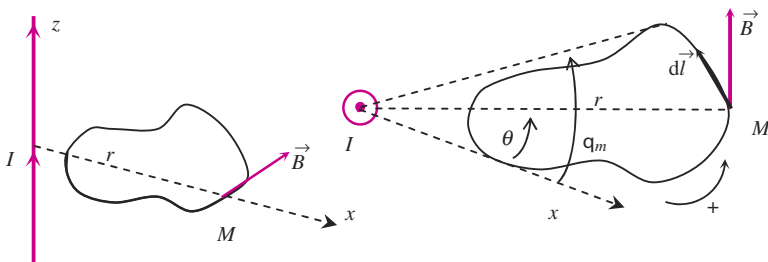


Figure 6.2 Champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant I . Circulation de ce champ sur un contour fermé orienté en dehors du fil.

$$C = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \oint_C d\theta = \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_o I}{2\pi} 2\pi = \mu_o I$$

Considérons maintenant le cas où le contour fermé est en dehors du fil (*figure 6.2*). L'expression de la circulation sur le contour fermé reste la même ; seules les bornes d'intégration changent.

En partant d'un angle $\theta = 0$ par exemple, cet angle va passer par une valeur θ_m pour finir par reprendre la valeur $\theta = 0$. On a donc :

$$C = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \oint_C d\theta = \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_0^0 d\theta = 0$$

Dans ce cas la circulation est nulle.

Conclusion : Dans le cas du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant on peut dire que :

- La circulation du champ magnétique sur un contour fermé est nulle si aucun courant ne traverse la surface qui s'appuie sur le contour.
- Si un courant I traverse la surface orientée s'appuyant sur le contour fermé alors la circulation du champ magnétique sur ce contour fermé n'est pas nulle et est égal au produit de la perméabilité μ_o par l'intensité I algébrique du courant dit enlacé (I positive si le courant traverse la surface dans le sens positif choisi)



Comparaison avec le champ électrostatique :

La circulation sur un contour fermé du champ électrostatique est toujours nulle :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^A \vec{E} d\vec{l} = - \int_A^A dV = V(A) - V(A) = 0$$

Pour le champ magnétique, le résultat change si le contour enlace des courants ou pas.

b) Généralisation : théorème d'Ampère

On peut montrer que ce résultat obtenu pour le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant se généralise pour toutes formes de courants. Cette généralisation constitue le théorème d'Ampère.

Considérons un contour fermé (C) quelconque orienté et une surface (S) quelconque mais s'appuyant sur le contour (*figure 6.3* : (S) à la forme d'un bonnet).

En tout point de (S), la normale à la surface est orientée à partir de l'orientation choisie pour le contour en utilisant la règle habituelle

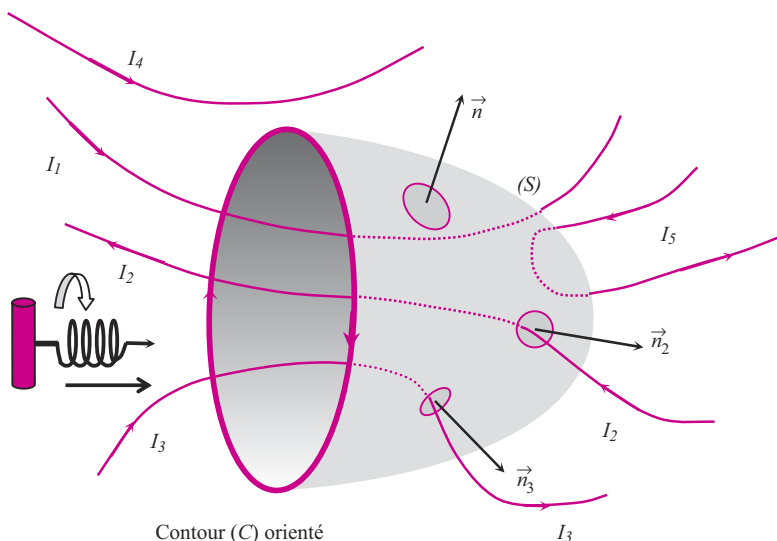


Figure 6.3 Contour quelconque (C) orienté et surface (S) quelconque s'appuyant sur le contour : la normale en différents points de la surface est automatiquement orientée par la règle du « tire-bouchon ». Les courants sources de champ magnétique traversent ou pas cette surface dans le sens de la normale ou en sens opposé.

du « tire-bouchon » (voir *figure 6.3*). Différents circuits filiformes parcourus par des courants et sources d'un champ magnétique traversent ou pas cette surface.



Ces circuits filiformes sont forcément fermés pour qu'un courant puisse exister : on peut parler alors de boucles de courant.

Remarque :

Les courants qui traversent toute surface s'appuyant sur le contour sont dits « courants enlacés » par le contour.

Théorème d'Ampère

La circulation du vecteur champ magnétique sur un contour fermé orienté quelconque est égale au produit de la perméabilité μ_0 du vide par la somme algébrique des intensités des courants enlacés par le contour.

$$\oint_{(C)} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}} \quad (6.2)$$



Les intensités sont algébriques: Les courants sont comptés positivement si leur orientation correspond à l'orientation de la surface, elle-même orientée à partir du contour (règle du tire-bouchon).

Exemple : L'application du théorème d'Ampère dans le cas de la figure 6.3 donne : $\sum I_{\text{enlacé}} = I_1 - I_2 + I_3 + (I_5 - I_5) = I_1 - I_2 + I_3$

c) Intérêt et utilisation du théorème d'Ampère

L'intérêt de ce théorème est de pouvoir déterminer le champ magnétique en tout point M de l'espace créé par des courants. Pour cela il faut être capable de trouver un contour fermé (C) qui passe par le point M et pour lequel on puisse calculer facilement la circulation du champ magnétique.

Si le champ est en tout point colinéaire au contour on aura :

$$\vec{B}(M) // d\vec{l} \Rightarrow \vec{B}(M) d\vec{l} = B(M) dl$$

Si de plus l'intensité $B(M)$ du champ magnétique est la même en tout point du contour alors, avec $B(M)=B$:

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M) d\vec{l} = \oint_{(C)} B(M) dl = \oint_{(C)} B dl = B \oint_{(C)} dl = BL$$

La circulation est, dans ce cas, égal au produit du champ B par le périmètre du contour fermé. Il suffit alors d'utiliser le théorème d'Ampère : si I_{et} est la somme algébrique des courants enlacés alors :

$$BL = \mu_0 I_{et} \Rightarrow B = \mu_0 I_{et} / L$$



On peut compléter un contour non fermé qui répond aux critères précédents par des portions de courbes pour lesquelles la circulation du champ magnétique est nulle, c'est-à-dire pour lesquelles le champ magnétique est perpendiculaire au déplacement ($\vec{B} \perp d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$).



Le calcul de la somme algébrique des courants enlacés se fait simplement en dénombrant ces courants et en faisant attention à les compter positivement ou négativement suivant leur sens par rapport au choix de l'orientation du contour.



L'application du théorème d'Ampère ne sera simple que s'il y a suffisamment d'éléments de symétrie et d'invariances pour avoir une idée de l'allure des lignes de champs et donc de pouvoir choisir le bon contour fermé.



Tout comme pour le théorème de Gauss, le théorème d'Ampère est une formulation intégrale liant les effets (champs) aux sources (courants).

La forme locale de ce théorème constitue l'une des quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme selon Maxwell.

Pour tous les systèmes qui seront étudiés, la méthodologie pour déterminer le champ magnétique est la suivante :

Méthode

- Inventaire des éléments de symétrie et des invariances des courants (sources de champs)
- En déduire les lignes de champ c'est-à-dire avoir une idée de la direction du champ et de quelles variables le module dépend
- Pour calculer le champ en un point donné, choisir un contour fermé passant par ce point, pour lequel la direction du champ est tangente et le module B constant
- Déterminer l'expression mathématique de la circulation du champ magnétique sur le contour fermé choisi
- Déterminer la somme algébrique des courants enlacés
- Appliquer le théorème d'Ampère pour déduire le champ magnétique

6.2 EXEMPLES D'APPLICATION DU THÉORÈME D'AMPÈRE

a) Cas du fil infini parcouru par un courant

Un point M de l'espace est tout naturellement repéré en coordonnées cylindriques : l'axe Oz est confondu avec le fil infini et on pose H le projeté de M sur l'axe. On a alors (voir figure 6.4) :

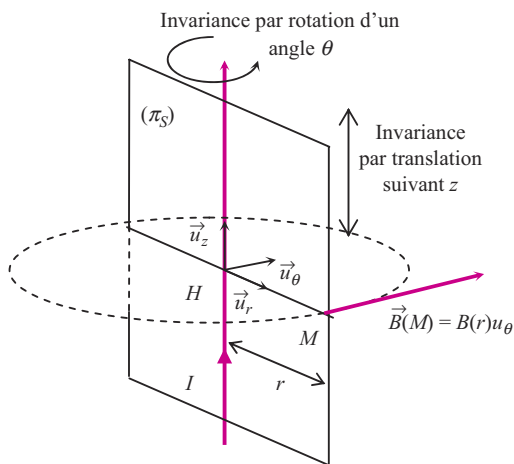


Figure 6.4 Fil infini parcouru par un courant d'intensité I : symétrie cylindrique.

$$\overrightarrow{HM} = r\vec{u}_r$$

On cherche à déterminer l'expression du champ magnétique en ce point créé par le courant d'intensité I circulant dans le fil.



I peut être algébrique, il est positif si le courant circule réellement vers les z croissants.

► Étude des symétries :

Le courant présente la symétrie cylindrique.

En coordonnées cylindriques on a : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z)$

Tout plan (π_S) contenant le fil et le point M est un plan de symétrie pour le courant (source du champ magnétique). Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan défini par les vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et est donc obligatoirement orthoradial : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$.

Remarque :

Le plan perpendiculaire au fil et contenant M est un plan d'anti-symétrie, le champ magnétique est donc dans ce plan.

Le fil est infini. Il y a donc invariance par translation le long de l'axe Oz . Le champ ne dépend pas de z .

Le fil est un axe de symétrie : il y a invariance par rotation d'un angle θ autour du fil. L'intensité du champ ne dépend pas de θ .

Conclusion : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$

► Choix du contour fermé orienté :

L'étude précédente montre que les lignes de champ sont des cercles de rayon r et que, sur un cercle, le module du champ magnétique est constant. Le contour fermé à choisir est donc :

Un cercle de centre H et de rayon $HM = r$.

Le contour est orienté comme $\vec{u}_\theta$. La surface du cercle est orientée alors comme l'axe Oz : $\vec{n} = \vec{u}_z$.

► Circulation du champ magnétique :

$$\begin{aligned} \oint_{M \in C} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_{M \in C} B(r)\vec{u}_\theta \cdot d\vec{l}\vec{u}_\theta = \oint_{M \in C} B(r)dl = B(r) \oint_{M \in C} dl \\ &= B(r)2\pi r \end{aligned}$$

► Théorème d'Ampère :

Le seul courant traversant la surface s'appuyant sur le contour est le courant d'intensité I dans le même sens que la normale $\vec{n} = \vec{u}_z$.

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \sum I_{\text{enlacé}} = \mu_o I \Rightarrow B(r)2\pi r = \mu_o I$$

$$B(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (6.3)$$

Remarque :

Ce résultat, obtenu pratiquement sans calcul, correspond bien à celui obtenu en utilisant la loi de Biot et Savart.



Seul un fil de longueur infinie peut traverser toute surface s'appuyant sur un contour fermé. Ceci justifie l'utilisation du théorème d'Ampère pour ce cas, contrairement au fil de longueur finie.

b) Cas du solénoïde infini

On considère un solénoïde infini constitué par l'enroulement d'un fil conducteur en spires jointives sur un cylindre d'axe $z'z$ et de rayon R . On note n le nombre de spires par unité de longueur (attention : le nombre de spires total n'a pas de sens car si la longueur est infinie le nombre de spires N aussi) et I l'intensité du courant circulant dans la bobine (figure 6.5).

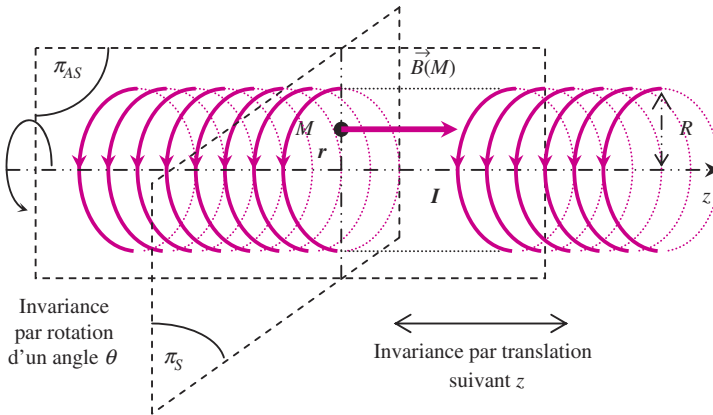


Figure 6.5 Solénoïde infini : symétries et invariances.

On cherche le champ magnétique en un point M de l'espace. Ce point est tout naturellement repéré en coordonnées cylindriques.

► Symétrie des courants (sources du champ magnétique)

Le plan π_S perpendiculaire à l'axe $z'z$ et passant par M est un plan de symétrie pour le courant orienté I . Le champ magnétique doit

être perpendiculaire à ce plan et est donc parallèle à l'axe $z'z$. On a donc :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = B(r, \theta, z) \vec{u}_z$$



Le plan π_{AS} contenant l'axe $z'z$ et passant par M est un plan d'anti-symétrie pour le courant orienté I . Le champ magnétique est dans ce plan.

Le solénoïde étant infini, il y a invariance par translation suivant l'axe $z'z$. Le champ magnétique ne dépend donc pas de z .

L'axe $z'z$ est un axe de symétrie pour la bobine. Toute rotation autour de cet axe ne change rien. L'intensité du champ magnétique ne dépend pas de la variable θ .

Le champ magnétique ne peut dépendre que de la variable r distance du point M à l'axe.

$$\text{On a donc : } \vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = B(r) \vec{u}_z$$

► Choix du contour fermé

Le contour doit comporter des segments rectilignes parallèles à l'axe z (champ constant si $r = \text{constante}$). Pour constituer un contour fermé on peut relier deux segments parallèles à l'axe par des segments perpendiculaires tels que la circulation du champ sera nulle sur ces portions.

Conclusion : prendre un cadre rectangulaire contenu dans le plan d'anti-symétrie π_{AS} , de longueur L parallèle à l'axe, r_1 et r_2 étant les distances à l'axe des deux longueurs (voir figure 6.6)

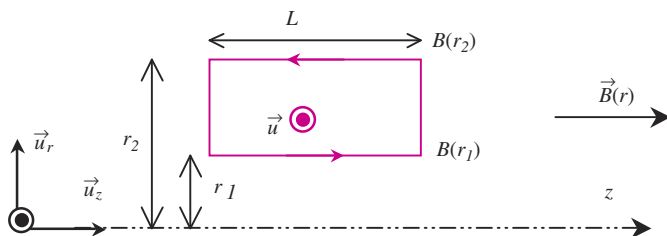


Figure 6.6 Contour choisi pour appliquer le théorème d'Ampère.

On oriente le contour en définissant le vecteur normal à la surface s'appuyant sur le cadre : $\vec{u} = \vec{u}_\theta$.

► Circulation de $\vec{B}$:

Elle se décompose en quatre parties. Sur les largeurs la circulation du champ, perpendiculaire au déplacement, est nulle. Il ne reste que la

circulation sur les longueurs pour lesquelles le champ est constant. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_{r=r_1}^{r=r_2} B(r_1) \vec{u}_z \cdot d\vec{z} \vec{u}_z + \int_{r_1}^{r_2} B(r) \vec{u}_z \cdot dr \vec{u}_r + \int_{r=r_2} B(r_2) \vec{u}_z \cdot d\vec{z} \vec{u}_z \\ &\quad + \int_{r_1}^{r_2} B(r) \vec{u}_z \cdot dr \vec{u}_r \\ \oint \vec{B} d\vec{l} &= B(r_1) \int_{r=r_1} dz + 0 + B(r_2) \int_{r=r_2} -dz + 0 \\ \oint \vec{B} d\vec{l} &= B(r_1)L - B(r_2)L = L[B(r_1) - B(r_2)]\end{aligned}$$

► Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \sum I_{\text{enlacé}}$

On peut envisager plusieurs cas possibles suivant la position du cadre.

Aucun courant ne traverse le cadre

Le cadre est complètement en dehors du solénoïde c'est-à-dire ($r_2 > r_1 > R$) ou entièrement dedans ($R > r_2 > r_1$). Alors aucun courant ne traverse la surface du cadre. La somme des courants enlacés est nulle.

On a dans ce cas :

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = L(B(r_1) - B(r_2)) = 0 \Rightarrow B(r_2) = B(r_1) \text{ pour tout } r_2 \text{ et } r_1$$

Le champ magnétique est donc uniforme dans le solénoïde et à l'extérieur du solénoïde.

On admettra qu'à l'extérieur le champ magnétique B_{ext} est nul. C'est en effet la seule solution qui a un sens physique (si on est suffisamment loin de la bobine, le champ doit être nul). On peut ajouter que les lignes de champ ne sortent pas de la bobine infinie : le champ à l'extérieur est donc nul.

Conclusion :

À l'intérieur du solénoïde, pour $r < R$ on a $\vec{B}_{\text{int}}(M) = B_o \vec{u}_z$

À l'extérieur du solénoïde, pour $r > R$ on a $\vec{B}_{\text{ext}}(M) = \vec{0}$

Remarque :

Le champ magnétique sur l'axe de la bobine a été calculé en utilisant la loi de Biot et Savart (relation 5.22). Il est identique dans tout le volume délimité par la bobine.

Le cadre est traversé par des courants

Pour calculer le champ magnétique uniforme B_0 à l'intérieur du solénoïde, on place le cadre de façon à avoir $r_2 > R$ et $r_1 < R$.

Dans ce cas (figure 6.7), avec l'orientation choisie, on aura : $\sum I_{\text{enlacé}} = nLI$ (il y a nL conducteurs traversant le cadre de longueur L et parcourus par une intensité I positive)

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = BL + 0 + 0 + 0 = BL = \mu_0 nLI \Rightarrow B = \mu_0 nI$$

Conclusion : Le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini est uniforme et a pour expression : $B = \mu_0 nI$ où n est le nombre de spires par unité de longueur et I l'intensité du courant.

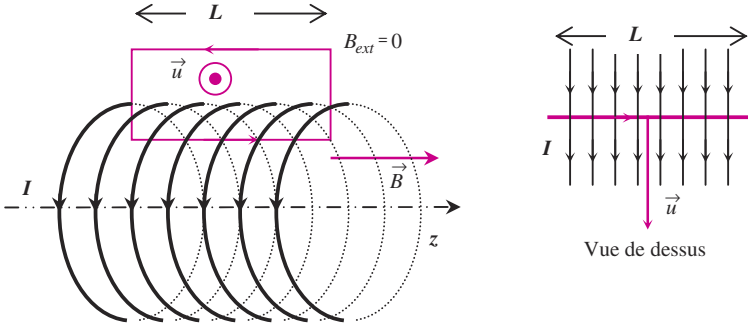


Figure 6.7 Contour choisi pour appliquer le théorème d'Ampère.

6.3 FLUX DU CHAMP MAGNÉTIQUE

a) Flux magnétique

On appelle flux magnétique à travers une surface (S) le flux du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ à travers cette surface. En définissant une surface élémentaire $d\vec{S}$, le flux élémentaire s'écrit :

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le flux total s'obtient par intégration :

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

L'unité de flux magnétique est le Weber.



Le champ magnétique $\vec{B}$ apparaît comme homogène à un flux par unité de surface :

1 Tesla correspond à 1 weber par mètre carré.

Pour cette raison, on rencontre parfois, dans des ouvrages techniques ou des manuels anciens l'appellation de densité de flux magnétique pour désigner le vecteur B .

b) Flux magnétique à travers une surface fermée

Reprenons le cas du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant I . Les lignes de champ sont des cercles concentriques dont l'axe est le fil. De plus, sur une même ligne l'intensité du champ est constante.

On considère une surface fermée quelconque, la normale orientée vers l'extérieur. Si une ligne de champ magnétique entre dans la surface fermée (flux élémentaire négatif) on constate qu'elle doit forcément ressortir (flux élémentaire positif) (voir figure 6.8). Ceci étant vrai pour toute ligne de champ on peut conclure que le flux total du champ magnétique sera nul.

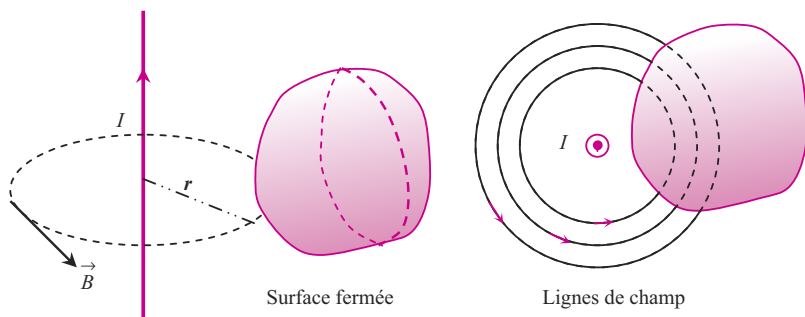


Figure 6.8 Champ créé par un fil infini : toute ligne de champ entrant dans une surface fermée ressort forcément.

Ce résultat se généralise pour tout champ magnétique créé par des courants ou des aimants.

Flux conservatif

Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée quelconque est toujours nul. On dit que le champ magnétique est à flux conservatif

$$\Phi_{\text{sortant}} = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

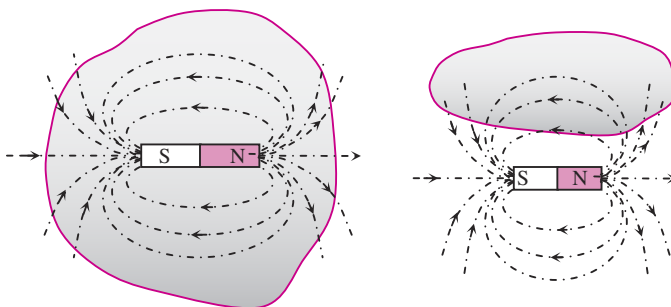


Figure 6.9 Champ créé par un aimant : toute ligne de champ entrant dans une surface fermée ressort forcément : le flux total du champ magnétique est nul.

La figure 6.9 illustre le cas d'un champ magnétique créé par un aimant. Le fait de ne pas pouvoir isoler un pôle magnétique fait que toute ligne partant de l'aimant source y retourne. Les lignes de champ ne divergent pas mais se referment sur elles-mêmes. Au contraire, pour le champ électrostatique, il existe des sources monopolaires : une charge q positive par exemple, pour laquelle les lignes de champ divergent. Dans ce cas le flux du champ à travers une surface fermée dépend du fait que la source q soit dans la surface ou à l'extérieur (théorème de Gauss).



POINTS-CLÉS

- Théorème d'Ampère : circulation du champ magnétique sur un contour fermé orienté

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}}$$

Le contour (C) est quelconque et $\sum I_{\text{enlacé}}$ correspond à la somme algébrique des courants enlacés par le contour orienté.

- Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée quelconque (S) est toujours nul :

$$\Phi_{\text{sortant}} = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Méthode pour l'utilisation du théorème d'Ampère
Étude des symétries et invariances pour avoir une idée de la cartographie du champ magnétique

Choisir le contour fermé (le champ doit être colinéaire et d'intensité constante sur le contour)

Exprimer la circulation du champ sur le contour choisi

Déterminer les courants enlacés par le contour.

Appliquer le théorème d'Ampère et en déduire l'expression du champ.

► Pour un récapitulatif, voir aussi le tableau en début d'ouvrage.

EXERCICES

6.1 Définition de l'unité « Ampère »

a) Soit un fil (f_1) infini parcouru par un courant I_1 . déterminer le vecteur champ magnétique $B(M)$ en tout point M de l'espace en utilisant le théorème d'Ampère.

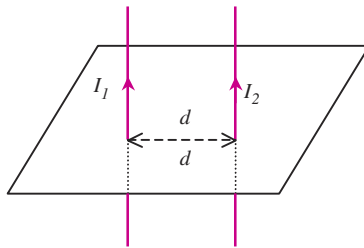


Figure 6.10.

b) On considère un deuxième fil (f_2) infini, parallèle au précédent et distant de d de celui-ci (voir figure 6.10). Il est parcouru par un courant d'intensité I_2 dans le même sens que I_1 . Déterminer la force F exercée sur une longueur l de (f_2) par le champ magnétique créé par (f_1).

c) Application numérique : $d = 1\text{ m}$; $l = 1\text{ m}$; $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\text{ u.s.i.}$; $I_1 = I_2 = I$.

d) On fixe I de sorte que la force F prenne la valeur $F = 2 \cdot 10^{-7}\text{ N}$. Déterminer la valeur de I et en déduire la définition légale de l'ampère.

6.2 Mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre

a) Champ magnétique créé par un solénoïde

On considère une bobine longue (ou solénoïde) constituée de N spires identiques, d'axe Ox , uniformément réparties sur une longueur L et parcourues par un courant d'intensité I . Pour la suite, on pourra

considérer cette bobine comme infiniment longue ce qui revient à négliger les effets de bords.

En utilisant les symétries du problème, déterminer le sens et la direction du vecteur champ magnétique créé par cette bobine en tout point M de l'espace.

Énoncer le théorème d'Ampère et l'utiliser pour déterminer la valeur du champ magnétique $B(M)$ en tout point M de l'espace.

Application numérique : Calculer la valeur du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

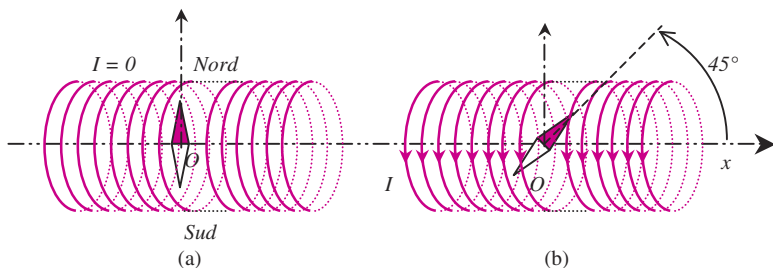


Figure 6.11 Boussole dans un solénoïde (a) $I = 0$ (b) $I \neq 0$.

On donne : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ u.s.i. ; $I = 100$ mA ; $N = 80$; $L = 50$ cm.

b) Champ magnétique terrestre

L'axe horizontal Ox de la bobine est placé perpendiculairement à la direction Sud-Nord qu'indique une boussole placée dans le solénoïde lorsque le courant est nul (figure 6.11a). On fait circuler le courant d'intensité I dans la bobine et on constate que la boussole tourne et prend une nouvelle direction qui fait 45° avec la direction Sud-Nord ainsi qu'avec l'axe de la bobine (figure 6.11b). Montrer que cette expérience permet de déterminer l'intensité de la composante horizontale du champ magnétique terrestre. Donner cette valeur.

6.3 Circulation du champ magnétique créé par une spire

On considère une spire de centre O , d'axe $x'Ox$, de rayon R et parcouru par un courant d'intensité I .

Le champ magnétique créé par cette spire en un point M de l'axe à l'abscisse x et a pour expression :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right)^{-3/2} \vec{u}_x = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_x \text{ avec } \tan \alpha = R/x.$$

On montre qu'en un point N de coordonnées (r, θ) avec $r \gg R$ le champ magnétique a pour expression :

$$\vec{B}(N) = B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} B_r = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2IS \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{IS \sin \theta}{r^3} \end{cases}$$

où S représente l'aire de la surface plane délimitée par la spire.

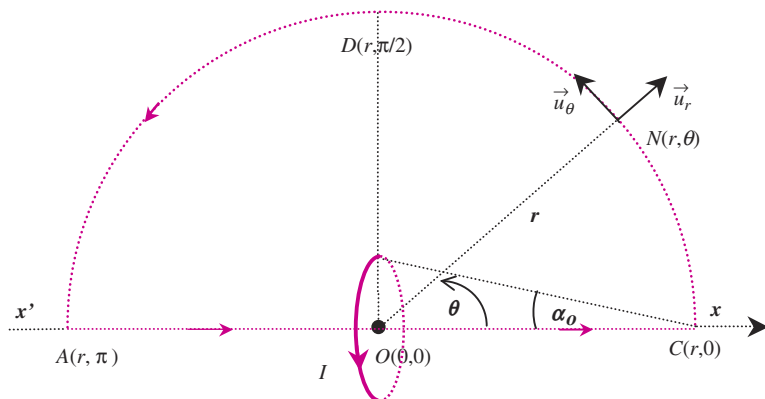


Figure 6.12 Circulation du champ magnétique créé par une spire.

On cherche à calculer la circulation de ce champ sur le contour fermé orienté $AOCDA$ suivant (voir *figure 6.12*) :

AOC : portion rectiligne suivant l'axe $x'x$, de longueur $2r$, O étant le milieu de AC . On se place dans le cas où $r \gg R$.

$CNDA$: demi cercle de rayon r . Le point N est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) . Les coordonnées des points A et D sont :

$$D(r, \pi/2) \text{ et } A(r, \pi)$$

a) Sans faire aucun calcul mais en justifiant la réponse, donner la valeur de la circulation du vecteur champ magnétique $B(M)$ le long du contour fermé $AOCNDA$.

b) Pour vérifier le résultat précédent, il suffit d'effectuer le calcul de la circulation qui se décompose en deux parties : le long de l'axe $x'Ox$, du point A au point C et le long du demi cercle CDA .

Circulation de A à C

Exprimer la circulation élémentaire de $\vec{B}(M)$ pour un déplacement élémentaire dx le long de l'axe $x'x$.

Calculer la circulation C_{OC} du champ du point O au point C . On pourra utiliser la variable α (variant de θ à α_o).

Que peut-on dire de la circulation C_{AO} du champ du point A au point O comparée à C_{OC} ?

Montrer alors que la circulation du champ de A à C sur l'axe s'écrit :

$$C_{AOC} = \int_A^C \vec{B} d\vec{l} = k(1 + u^2)^{-1/2} \text{ avec } u = \frac{R}{r}.$$

Déterminer l'expression de k .

Sachant que $u \ll 1$, faire un développement limité de C_{AC} jusqu'au deuxième ordre par rapport à l'infiniment petit u .

Circulation sur le demi cercle

Exprimer, en coordonnées polaires, le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ du point N sur le demi cercle CDA et en déduire l'expression de la circulation élémentaire de $\vec{B}$ suivant $d\vec{l}$.

Calculer la circulation de $\vec{B}$ sur le demi cercle CDA .

c) Donner la valeur de la circulation de $\vec{B}$ sur le contour fermé $AOCDA$ et retrouver le résultat de la question **a)**.

6.4 Champ magnétique créé par une bobine torique

Soit une bobine torique constituée par l'enroulement régulier de N spires carrées de côté a . Le rayon du cylindre intérieur au tore est b et on notera R le rayon moyen du tore (voir figure 6.13).

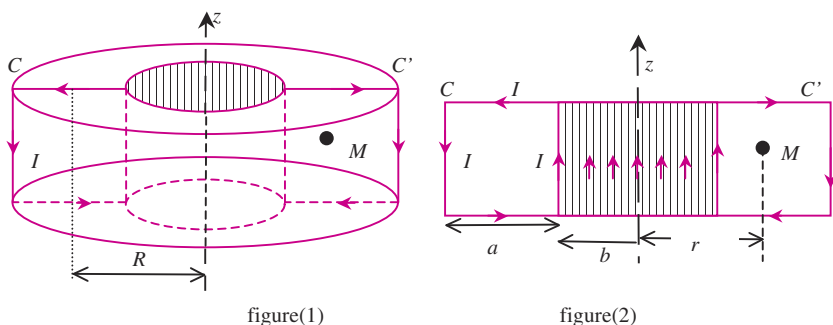


Figure 6.13 (1) Bobine torique à section carrée. (2) Coupe CC' .

Cette bobine est parcourue par un courant I orienté comme sur la figure. Les dimensions utiles sont représentées sur une section du tore par un plan passant par l'axe du tore.

a) Préciser les éléments de symétrie de la bobine et en déduire la cartographie des lignes du champ magnétique.

b) En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique créé par cette bobine.

6.5 Fil conducteur cylindrique de rayon R

On considère un fil conducteur cylindrique infini de rayon R et d'axe $z'z$. L'intensité du courant qui circule dans le fil est I .

a) Donner l'expression du vecteur densité de courant $\vec{j} = j\vec{u}_z$, uniforme dans le conducteur, en fonction de R et I .

b) Déterminer le champ magnétique créé par ce fil en tout point M de l'espace distant de r de l'axe du fil. On envisagera le cas où le point est à l'intérieur ($r < R$) et à l'extérieur ($r > R$) du fil.

6.6 Flux magnétique à travers une bobine longue

On considère une bobine constituée de N spires circulaires régulièrement disposées sur une longueur totale l . Le diamètre de chaque spire est d .

a) On fait circuler un courant d'intensité I dans la bobine. Déterminer l'expression du champ magnétique à l'intérieur de cette bobine dans le cas où elle peut être assimilée à un solénoïde « infiniment long ». Préciser ce que signifie cette approximation.

b) On appelle flux propre Φ_p le flux du champ magnétique créé par la bobine à travers toutes les spires constituant cette bobine. Déterminer l'expression de ce flux propre en fonction de μ_0 , N , l , d et I .

c) On définit l'inductance propre de la bobine par : $L = \Phi_p/I$ (unité le henry symbole H). Donner l'expression littérale de l'inductance propre de la bobine, en fonction de μ_0 , N , l et d .

Faire l'application numérique avec : $N = 5000$; $l = 40$ cm ; $d = 5$ cm.

6.7 Flux magnétique à travers une bobine torique

Reprendre l'exercice 6.4 et calculer le flux propre Φ_p c'est à dire le flux du champ magnétique créé par cette bobine à travers toutes les spires la constituant. En déduire l'expression de l'inductance propre L de cette bobine définie comme le rapport du flux propre par l'intensité du courant $L = \Phi_p/I$.

SOLUTIONS

6.1 a) Le champ magnétique créé par un fil conducteur infini parcouru par un courant d'intensité I_1 en un point situé à la distance r du fil a pour expression en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta \text{ (voir cours pour la démonstration)}$$

b) La force de Laplace exercé par le champ $\vec{B}_1$ sur le courant d'intensité I_2 parcourant un élément dl de fil (f_2) et situé à la distance d de (f_1) s'écrit :

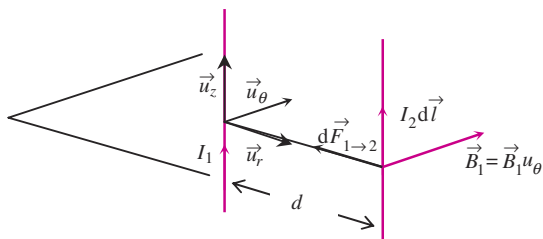


Figure 6.14

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 d\vec{l} \wedge \vec{B}_1(d) = I_2 d\vec{l} \vec{u}_z \wedge B_1(d) \vec{u}_\theta = -I_2 dl B_1(d) \vec{u}_r$$

Le vecteur $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire radial dirigé du fil (f_1) vers le fil (f_2) (voir figure 6.14).

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -I_2 \frac{\mu_o I_1}{2\pi d} dl \vec{u}_r = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi d} dl \vec{u}_r$$

Sur une longueur l de fil (f_2), le champ magnétique est uniforme. On obtient donc :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \int_l -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi d} dl \vec{u}_r = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi d} \vec{u}_r \int_l dl = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi d} l \vec{u}_r$$

Cette force est une force attractive (le fil (f_2) est attiré par le fil (f_1))

c) Application numérique : $F_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi d} = 2.10^{-7} I^2$

d) Si $F = 2.10^{-7}$ N alors $I^2 = 1$ soit $I = 1$ A

Définition de l'ampère

Un ampère est l'intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables, et distants d'un mètre dans le vide, produirait entre ces deux conducteurs, une force égale à 2×10^{-7} newton par mètre linéaire.

6.2 a) Tout plan perpendiculaire à l'axe de la bobine et passant par le point M est un plan de symétrie pour les courants. Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan et est dirigé suivant l'axe du solénoïde (vecteur unitaire $\vec{u}_x$).

La bobine pouvant être considérée comme de longueur infinie il y a invariance par translation suivant l'axe x : B ne dépend pas de x .

Il y a aussi invariance pour toute rotation d'un angle θ autour de l'axe de la bobine : B ne dépend pas de θ . Finalement : $B(M) = B(r) \vec{u}_x$

En appliquant le théorème d'Ampère (voir démonstration du cours) on trouve :

$$B(r) = B = \mu_o \frac{N}{L} I = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{80}{0,5} 0,1 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

b) L'aiguille de la boussole prend la direction du champ résultant :

$$\vec{B}_{total} = \vec{B} + \vec{B}_{th} = B\vec{u}_x + B_{th}\vec{u}_y$$

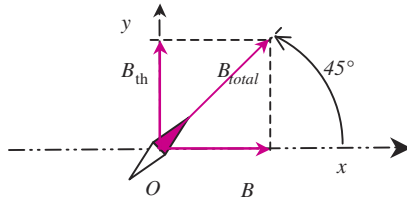


Figure 6.15

L'angle que fait cette résultante avec l'axe x est donné par (voir figure 6.15) : $\tan \alpha = \frac{B_{th}}{B}$

Pour $\alpha = 45^\circ$ on a $\tan 45^\circ = 1$ et donc : $B_{th} = B = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

6.3 a) Théorème d'Ampère : $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \sum I_{\text{enlacé}}$. Le seul courant traversant la surface délimitée par le demi-cercle est I . On a donc : $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I$

b) Circulation de A à C

$$\delta C = \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = B(x) \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = B(x) dx = \frac{\mu_o I}{2R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2} dx$$

$$\text{ou bien : } \delta C = \frac{\mu_o I}{2R} \sin^3 \alpha \, dx \tan \alpha = \frac{R}{x}$$

$$\text{On en déduit : } x = \frac{R}{\tan \alpha} \Rightarrow dx = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

De O à C, la variable x varie de 0 à r ou bien la variable α de $\pi/2$ à α_o .

$$C_{OC} = \int_0^r \frac{\mu_o I}{2R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2} dx = \frac{\mu_o I}{2R} \int_0^r \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2} dx$$

ou plutôt avec α :

$$C_{OC} = \frac{\mu_o I}{2R} \int_{\pi/2}^{\alpha_o} \frac{-R \sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_o I}{2} \int_{\pi/2}^{\alpha_o} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_o I}{2} [-\cos \alpha]_{\pi/2}^{\alpha_o}$$

$$C_{OC} = \frac{\mu_o I}{2} [-\cos \alpha]_{\pi/2}^{\alpha_o} = \frac{\mu_o I}{2} \left[-\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos \alpha_o) \right] = \frac{\mu_o I}{2} \cos \alpha_o$$

Le champ $B(x)$ est une fonction paire : changeons x en $-x$:

$$C_{AO} = \int_{-r}^0 \frac{\mu_o I}{2R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2} dx = \int_r^0 \frac{\mu_o I}{2R} \left(1 + \frac{(-x)^2}{R^2}\right)^{-3/2} d(-x)$$

$$C_{AO} = \int_r^0 -\frac{\mu_o I}{2R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2} dx = \int_0^r \frac{\mu_o I}{2R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2} dx = C_{OC}$$

Donc finalement : $C_{AOC} = C_{AO} + C_{OC} = 2C_{OC} = \mu_o I \cos \alpha_o$

$$\text{Avec } \cos \alpha_o = \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} = \frac{r}{r\sqrt{1 + \frac{R^2}{r^2}}} = \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^{-1/2} = (1 + u^2)^{-1/2}$$

$$C_{AOC} = \int_A^C \vec{B} d\vec{l} = k(1 + u^2)^{-1/2} \text{ avec } u = \frac{r}{R} \text{ et } k = \mu_o I$$

$$\text{Avec } \frac{u}{1} \ll 1 \text{ alors : } C_{AOC} = k(1 + u^2)^{-1/2} \approx k\left(1 - \frac{u^2}{2}\right) = \mu_o I \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right)$$

Circulation sur le demi-cercle

Un déplacement élémentaire sur le demi-cercle ($r = \text{constante}$) s'écrit :

$$d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta. \text{ On a donc : } \delta C = \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta) \cdot r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$\delta C = \vec{B} \cdot d\vec{l} = r B_\theta d\theta = \frac{\mu_o I S \sin \theta}{4\pi r^3} r d\theta = \frac{\mu_o I \pi R^2}{4\pi r^2} \sin \theta d\theta$$

$$\Rightarrow C_{CDA} = \frac{\mu_o I R^2}{4 r^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_o I R^2}{4 r^2} [-\cos \theta]_0^\pi$$

$$\Rightarrow C_{CDA} = \frac{\mu_o I R^2}{4 r^2} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{\mu_o I R^2}{4 r^2} (2)$$

$$\Rightarrow C_{CDA} = \frac{\mu_o I R^2}{2 r^2} = k \frac{u^2}{2} \text{ avec } u = \frac{R}{r} \text{ et } k = \mu_o I$$

c) Pour $r \gg R$:

$$C_{AOCDA} = C_{AOC} + C_{CDA} = k\left(1 - \frac{u^2}{2}\right) + k\left(\frac{u^2}{2}\right) = \mu_o I$$

On retrouve bien le résultat obtenu avec le théorème d'Ampère

6.4 a) Le plan contenant l'axe du tore et le point M (voir coupe CC' de la figure exercice 6.4) est un plan de symétrie pour les courants. En coordonnées cylindriques ce plan contient les vecteurs unitaires $\vec{u}_z$ (l'axe) et $\vec{u}_r$ (les points O et M). Le champ magnétique doit être perpendiculaire à ce plan donc est suivant $\vec{u}_\theta$: il s'agit donc d'un champ orthoradial.

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta, z) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$$

L'axe z est un axe de symétrie : il y a invariance pour toute rotation d'un angle θ quelconque : l'intensité du champ ne dépend pas de θ .

Conclusion : les lignes de champ sont des cercles concentriques autour de l'axe et l'intensité du champ ne dépend à priori que de r et z : $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta$.

b) Choix d'un contour fermé : un cercle passant par M , de rayon r et d'axe Oz . Sur ce cercle perpendiculaire à l'axe Oz , les variables r et z sont constantes. On a donc avec l'orientation suivant $\vec{u}_\theta$:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, z) \vec{u}_\theta \cdot d\vec{l} = B(r, z) dl$$

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{cercle}} B(r, z) dl = B(r, z) \oint_{\text{cercle}} dl = 2\pi r B(r, z)$$

Théorème d'Ampère :

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}} = 2\pi r B(r, z) \Rightarrow B(r, z) = \frac{\mu_0 \sum I_{\text{enlacé}}}{2\pi r}$$

Détermination des courants enlacés (voir figure 6.16) :

Si le point M est en dehors du tore, au-dessus ou au-dessous : aucun courant ne traverse la surface délimitée par le cercle de rayon r passant par M . Dans ce cas, le champ magnétique est nul.

Si le point M est en dehors du tore mais au niveau du tore alors on dénombre NI courants passant dans le sens positif (sens $\vec{u}_z$) et le même nombre dans l'autre sens. Globalement on a un courant enlacé nul et le champ magnétique est donc nul.

Par contre si le point M est à l'intérieur, on dénombre NI courants enlacés traversant la surface s'appuyant sur le contour dans le sens positif.

M intérieur au tore : $B(M_{\text{int}}) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ avec $b < r < b + a$

M extérieur au tore : $B(M_{\text{ext}}) = 0$ avec $0 < r < b$ ou $r > a + b$

On constate que le champ magnétique ne dépend pas de la coordonnée z .

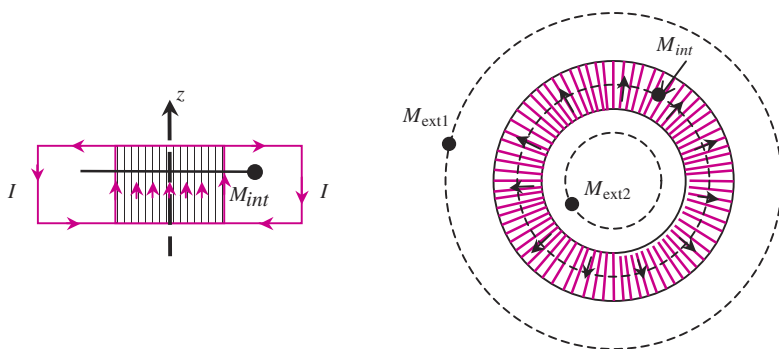


Figure 6.16

Remarque :

Considérons un contour fermé constitué d'un arc de cercle de longueur quelconque L à l'altitude z_1 et du même arc mais à l'altitude z_2 , les deux extrémités des arcs étant reliées par des segments parallèles à l'axe Oz . La circulation sur les segments suivants Oz est nulle (le champ est orthoradiale donc perpendiculaire à l'axe). Sur l'arc supérieur par exemple on aura $B(r, z_2)L$ et sur l'arc inférieur : $-B(r, z_1)L$

Finalement la circulation sur un tel contour s'écrit : $L[B(r, z_2) - B(r, z_1)]$

Si ce contour est complètement à l'intérieur du tore alors il n'y a aucun courant enlacé et donc pour un r fixé on a $B(r, z_2) = B(r, z_1)$ soit un champ magnétique qui ne dépend pas de z .

Remarque :

Si $a \ll b$ alors on peut considérer que $r \approx R = b + a/2$.

6.5 a) $I = \int_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{section}} j dS = j \int_{\text{section}} dS = j\pi R^2 \Rightarrow j = \frac{I}{\pi R^2}$

b) Le plan contenant le point M et l'axe du fil est un plan de symétrie des courants et donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan et donc est orthoradiale : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$

Le fil étant infini et correspondant à un axe de symétrie il y a invariance par translation suivant z et par rotation d'un angle θ . Le champ ne peut dépendre que de r distance du point M à l'axe : $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$.

Choix du contour : un cercle passant par M , de rayon r et d'axe l'axe Oz .

En tournant dans le sens de $\vec{u}_\theta$ (la normale à la surface du cercle est $\vec{u}_z$):

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{cercle}} B(r) dl = B(r) \oint_{\text{cercle}} dl = 2\pi r B(r)$$

Théorème d'Ampère :

Si le point M est en dehors du fil : $r > R$: alors le courant enlacé est I .

Si le point M est dans le fil : $r < R$: il ne faut compter que le courant circulant dans la partie du cylindre de rayon $r < R$. On a donc :

$$I_{\text{enlacé}} = \int_{\text{cercle}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \int_r dS = j\pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}$$

Conclusion :

M est à l'intérieur ($r < R$) : $B_{\text{int}}(r) = \mu_o I \frac{r^2}{2\pi r R^2} = \frac{\mu_o I}{2\pi R^2} r$

M est à l'extérieur ($r > R$) : $B_{\text{ext}}(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$

Pour $r = R$, le champ est continu $B(R) = \mu_o I / 2\pi R$

6.6 Flux magnétique à travers une bobine longue

a) Lorsque la longueur de la bobine dépasse dix fois le diamètre, le champ magnétique au milieu de la bobine est le même que celui obtenu si on considère la bobine de longueur infinie (voir 5.4 c). si on néglige les effets de bords, on peut alors considérer la bobine comme un solénoïde infiniment long d'axe zz' .

En utilisant le théorème d'Ampère (voir cours 6.2 b) on obtient :

$$\vec{B} = B\vec{u}_z = \mu_o n I \vec{u}_z = \mu_o \frac{N}{l} I \vec{u}_z$$

Attention : dans l'expression du champ, n représente le nombre de spires par unité de longueur.

Le champ magnétique est uniforme dans la bobine

b) Le flux du champ à travers une spire est égal à :

$$\Phi_1 = \int_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B\vec{u}_z \iint_{\text{spire}} d\vec{S} \vec{u}_z = B \iint_{\text{spire}} dS = BS = B\pi \frac{d^2}{4}$$

Le résultat est le même quel que soit la spire considérée. On a donc :

$$\Phi_P = N\Phi_1 = N\mu_o \frac{N}{l} I \pi \frac{d^2}{4} = \mu_o \frac{N^2 \pi d^2}{4l} I$$

c) $L = \Phi_P / I = \mu_o \frac{N^2 \pi d^2}{4l}$. L'inductance dépend de la géométrie du circuit.

$$\text{A.N. : } L = \mu_o \frac{N^2 \pi d^2}{4l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{(5 \cdot 10^3)^2 \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2}{4 \cdot 0,4} = 0,154 \text{ H}$$

6.7 Flux magnétique à travers une bobine torique

D'après l'exercice 6.4, pour un point M à l'intérieur du tore : $B(M_{\text{int}}) = \frac{\mu_o NI}{2\pi r}$ avec $b < r < b + a$ (voir figure 6.16)

Ce champ est indépendant de z et θ , il ne dépend que de la distance r à l'axe. Le champ étant identique quelque soit la spire considérée, le flux total du champ magnétique à travers la bobine torique correspond à N fois le flux du champ à travers une spire. L'expression du flux élémentaire à travers une surface élémentaire s'écrit par définition :

$$d\Phi_1 = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On oriente la surface d'une spire avec le sens du courant circulant dans la spire (voir figure 6.17). On a donc : $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$ et $d\vec{S} = dS\vec{u}_\theta$

$$d\Phi_1 = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B(r)dS$$

Le champ ne dépendant que de r , il est uniforme sur un bande de hauteur a , de largeur dr et situé à la distance r de l'axe. On peut donc écrire :

$$d\Phi_1 = B(r)dS = B(r)adr \text{ avec } b < r < b + a$$

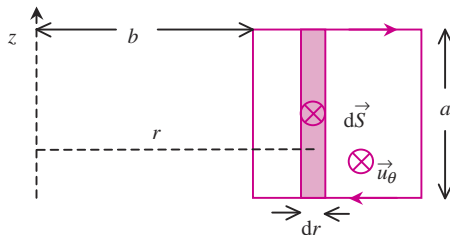


Figure 6.17

Le flux total s'obtient par intégration :

$$\Phi_1 = \int_b^{b+a} B(r)adr = \frac{\mu_o NIa}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o NIa}{2\pi} [\ln r]_b^{b+a}$$

Le flux total sera donc égal à :

$$\Phi_p = N\Phi_1 = N \frac{\mu_o NIa}{2\pi} [\ln(b+a) - \ln b] = \frac{\mu_o N^2 Ia}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}$$

$$\Phi_p = \frac{\mu_o N^2 I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) = LI$$

Donc

$$L = \frac{\mu_o N^2 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)$$

Index

A

aimant 129
angle solide 84

B

balance
Cotton 140
bobines de Helmholtz 168

C

champ
électrique 26
magnétique 138
charge 3
conducteur 7

D

densité
de charge 8
de courant 137

E

effet
Hall 141
électrisation 4
équipotentielle 34

F

flux 81
magnétique 194
force
électrique 12
Laplace 132
Lorentz 135

G

gradient 33

L

ligne de champ 28
loi
Biot et Savart 149
Coulomb 12

P

perméabilité magnétique 150
permittivité diélectrique 13
potentiel électrostatique 31
principe
Curie 41
produit vectoriel 134

S

symétrie 41
cylindrique 104
du champ magnétique 152
sphérique 97

T

tesla 144
teslamètre 145
théorème
Ampère 184
Gauss 93
tube de champ 28

U

unité
coulomb 3
gauss 144

MINI MANUEL

Michel HENRY
Abdelhadi KASSIBA

Mini Manuel d'Électromagnétisme Électrostatique Magnétostatique

Comment aller à l'essentiel, comprendre les méthodes et les principes avant de les mettre en application ?

Conçus pour faciliter aussi bien l'apprentissage que la révision, les Mini Manuels proposent un **cours concis et richement illustré** pour vous accompagner jusqu'à l'examen. Des **exemples sous forme d'encarts**, des **mis en garde**, des **méthodes** et des **exercices corrigés** complètent le cours.

Ce Mini Manuel d'Électromagnétisme rassemble les connaissances essentielles à tout étudiant en L1/L2 (Sciences de la Matière, Sciences de la Vie et Santé) ou préparant un DUT.

Contenu :

- Propriétés électriques de la matière
- Champ et potentiel électrostatique
- Théorème de Gauss
- Champ magnétique
- Champ magnétique créé par des courants
- Propriétés du champ magnétique

Michel Henry

Agrégé de physique
Maître de conférences
à l'IUFM des Pays de la Loire (Le Mans)

Abdelhadi Kassiba

Professeur à l'université du Maine

Public :

- ◆ **L1/L2**
Sciences de la Matière,
Sciences de la Vie et Santé
- ◆ **IUT**

